# FÍSICA 1

4ª Edicion



Resnick | Halliday | Krane

# FÍSICA Vol. 1

CUARTA EDICIÓN

(Tercera en español)


ROBERT RESNICK

*Professor of Physics*

*Rensselaer Polytechnic Institute*

DAVID HALLIDAY

*Professor of Physics, Emeritus*

*University of Pittsburgh*

KENNETH S. KRANE

*Professor of Physics*

*Oregon State University*



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DPTO. DE DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
BIBLIOTECA CENTRAL
Ing. Edo. García de Zúñiga
MONTEVIDEO - URUGUAY

No. de Entrada 05 43 53,
22 11 02



DÉCIMA SEGUNDA REIMPRESIÓN
MÉXICO, 2001

**COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL**

**Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:**



**correo:**
**Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.**



**fax pedidos:**
**(015) 561 4063 • 561 5231**



**e-mail:**
**info@patriacultural.com.mx**



**home page:**
**http://www.patriacultural.com.mx**

Título original de la obra:
PHYSICS, Vol. I, 4 th. ed.
ISBN 0-471-80458-4

Traducción autorizada por:
Copyright ©1992, by John Wiley & Sons. Inc.

530
R434f 4ed.
v.1
c.45

*Física Vol. 1*
Derechos reservados respecto a la edición en español:
© 1992, 1993, Robert Resnick, David Halliday,
Kemneth S. Krane/ John Wiley & Sons. Inc.
© 1993, Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V.
© 2000, GRUPO PATRIA CULTURAL, S.A. DE C.V.
bajo el sello de Compañía Editorial Continental
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, C.P. 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial
Registro num. 43

ISBN 968-26-1230-6 (tercera edición)
(ISBN 968-26-0617-3 segunda edición)
ISBN 968-26-0663-2 (obra completa)

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

Impreso en México
Printed in Mexico

**Tercera edición: 1993**
Décima primera reimpresión: 2000
Décima segunda reimpresión: 2001

# PREFACIO AL VOLUMEN 1

La primera edición de *Física para estudiantes de Ciencias e Ingeniería* apareció en 1960; la edición más reciente (la tercera), llamada simplemente *Física*, fue publicada en 1977. En esta cuarta edición (1992) cabe destacar la presencia de un nuevo coautor.

El texto ha sido actualizado para incluir los nuevos desarrollos en física y en su pedagogía. Basados en nuestra lectura de la literatura sobre estos temas, en los comentarios de numerosos lectores de las ediciones anteriores, y en la asesoría de un grupo de colaboradores que trabajaron con gran dedicación en la revisión del manuscrito de esta edición, hemos hecho varios cambios.

**1.** La energía se trata de una manera coherente a lo largo de todo el texto, comenzando con el teorema de trabajo-energía y continuando con la termodinámica. Por ejemplo, calculamos el trabajo, de manera que no deje lugar a dudas, como aquél efectuado *sobre* un sistema, usando entonces la misma convención de signos para el trabajo tanto en mecánica como en termodinámica. La atención de estos detalles ayuda al estudiante a discernir los conceptos comunes que intervienen en las diferentes áreas de la física.

**2.** La relatividad especial, que fue tratada como un tema suplementario en la edición anterior, se halla integrada a este texto. Se dedican dos capítulos a este tema: uno (en el Volumen 1) estudia las ondas mecánicas y el otro (en el Volumen 2) estudia las ondas electromagnéticas. Los temas relacionados con la relatividad especial (por ejemplo, movimiento relativo, marcos de referencia, cantidad de movimiento y energía) se tratan en el texto en los capítulos sobre cinemática, mecánica, y electromagnetismo. Este enfoque refleja nuestro punto de vista de que la relatividad especial debería ser tratada como parte de la física clásica. Sin embargo, para aquellos instructores que desean proponer la relatividad especial para el final del curso, el material se ha preparado en secciones aparte que pueden omitirse sin mayor problema en la primera lectura.

**3.** Entre los cambios en el ordenamiento de los temas de la tercera edición se incluye el cambio en el orden de aparición de los capítulos 2 y 3, de modo que la cinemática unidimensional precede ahora a los vectores; la consolidación de todo el material sobre el momento angular en el capítulo 13 (donde se incluyen la cinemática y la dinámica de rotación, lo que hace que nuestra exposición del movimiento de rotación sea más cercanamente paralelo a la del movimiento de traslación); y un reordenamiento y reconstrucción sustancial de los capítulos sobre termodinámica, haciendo hincapié en sus aspectos estadísticos, y dando al tema un tono más "moderno".

**4.** En respuesta a las peticiones de los usuarios, se han añadido al Volumen 1 varios temas clásicos nuevos; éstos incluyen el análisis dimensional, fuerzas de arrastre, elasticidad, tensión superficial, viscosidad, y acústica musical.

**5.** Las aplicaciones modernas se han repartido "salpicadas", a lo largo del texto: por ejemplo, la cuantización de la energía y el momento angular, la desintegración del núcleo y de las partículas elementales, teoría del caos, relatividad general, y estadística cuántica. Éstas no pretenden dar aquí un tratamiento a fondo de la física moderna (lo cual se hace así en los ocho capítulos adicionales de la versión ampliada del Volumen 2), sino indicar al estudiante cuáles son las fronteras de la física clásica y las relaciones entre ésta y la física moderna.

**6.** Hemos aumentado de manera sustancial el número de problemas al final de cada capítulo, en comparación con la edición previa del Volumen 1; hay ahora 1519 problemas, frente a los 958 anteriores, lo que constituye un aumento del 59%. El número de preguntas al final de cada capítulo ha sido igualmente aumentado de 614 a 821 (34%). Por otra parte, hemos tratado de mantener la calidad, y diversidad de los problemas que han conformado el sello de garantía de las ediciones anteriores de este texto.

**7.** El número de ejemplos resueltos en el Volumen 1 se ha aumentado de 135 a 183 (36%). El aumento real del número de ejemplos resueltos (ahora llamados problemas muestra) es más grande, porque la edición anterior presentaba ocasionalmente los temas nuevos por medio de ejemplos resueltos. Esta edición elimina esa práctica; el nuevo material se presenta sólo en la exposición del texto, y los problemas muestra sirven sólo como ejercicios en su aplicación.

**8.** Las técnicas de computación se presentan mediante varios ejemplos resueltos y una variedad de proyectos de computación al final del capítulo. Se ofrecen algunos listados de programas en un apéndice para animar al estudiante a adaptar esos métodos a otras aplicaciones.

**9.** Hemos aumentado y actualizado las referencias a artículos en la literatura que aparecen como notas al pie de página a lo largo del texto. Ciertas referencias (a menudo de artículos que aparecen en conocidas revistas de divulgación tales como *Scientific American*) tienen la intención de ampliar los conocimientos del estudiante a través de aplicaciones interesantes de un tema. En otros casos, que a menudo implican asuntos de importancia pedagógica sobre los cuales deseamos llamar la atención del estudiante y del instructor, hacemos referencia a artículos de revistas tales como el *American Journal of Physics* o el *Physics Teacher*.

**10.** Las ilustraciones han sido completamente renovadas y su número en el Volumen 1 se ha aumentado en casi un factor de 2, es decir de 463 a 899

**11.** Muchas de las deducciones, pruebas, y argumentos de la edición anterior se han perfeccionado, y toda hipótesis o aproximación ha sido aclarada. Asimismo hemos mejorado el rigor del texto sin elevar necesariamente su nivel. Nuestro empeño es indicar al estudiante el límite de validez de un argumento en particular y animarlo a que considere preguntas tales como: ¿coresponde siempre un resultado en particular o sólo a veces? ¿Qué pasa a medida que nos acercamos al límite cuántico o al límite relativista?

Aun cuando hemos hecho cierto esfuerzo para eliminar material de la edición anterior, las adiciones mencionadas antes hacen que el texto aumente de tamaño. *Deberá subrayarse que muy pocos instructores (si los hay) querrán seguir todo el texto de principio a fin.* Hemos trabajado para desarrollar un texto que ofrezca una introducción rigurosa y completa a la física, pero el instructor puede seguir muchos caminos alternativos a lo largo del libro. El instructor que desee tratar algunos temas con mayor profundidad (el enfoque de "lo menos es más", como suele decirse) podrá elegir entre estos caminos de los que hablamos. Algunas secciones han sido explícitamente marcadas como "opcionales" (se hallan impresas en un cuerpo de tipografía más pequeño), para indicar que pueden omitirse sin pérdida de la continuidad. Dependiendo del diseño del curso, pueden omitirse también o tratarse en forma más superficial otras secciones e incluso capítulos enteros. La guía del instructor, disponible en un volumen adicional, ofrece sugerencias para resumir o abreviar la extensión del texto. En tales circunstancias, el estudiante curioso que desee un estudio más profundo puede encontrar estímulo por su parte al abordar esos temas omitidos, con lo que podrá adquirir una visión más amplia de la materia. Así, el instructor tiene a la mano una amplia elección para cubrir determinado grupo reducido de temas en un curso. Para el instructor que desee una cobertura más completa, que le sirva para cursos para estudiantes con especialización en física, para estudiantes destacados, o para cursos de más de un año de duración, este texto provee el material adicional suficiente para una experiencia retadora y de alcance amplio. Esperamos que el texto sea considerado como una verdadera guía para adentrarse en la física; son muchos los caminos que pueden tomarse, panorámicos unos y directos otros, y no hay por qué recorrerlos todos en el primer viaje. El viajero más avezado puede sentirse animado a recurrir a esa guía para explorar zonas por las que no pasó en viajes anteriores.

El texto está disponible en volúmenes por separado: el Volumen 1 (capítulos 1 al 26) comprende la cinemática, la mecánica, y la termodinámica, y el Volumen 2 (capítulos 27 al 48) abarca el electromagnetismo y la óptica. Se dispone de una versión aumentada del Volumen 2 (capítulos 27 al 56) con ocho capítulos adicionales que presentan una introducción a la física cuántica y alguna de sus aplicaciones.

Un libro de texto contiene muchas más contribuciones a la ilustración de un tema que las hechas por los autores únicamente. Hemos tenido la fortuna de contar con la ayuda de Edward Derringh (Wentworth Institute of Technology) para preparar los conjuntos de problemas y de J. Richard Christman (U.S. Coast Guard Academy) para preparar la Guía del Instructor y los proyectos de computación. Nos hemos beneficiado de la gran dedicación que han puesto en sus comentarios y críticas capítulo tras capítulo el siguiente grupo de revisores:

Robert P. Bauman (University of Alabama)
Truman D. Black (University of Texas, Arlington)
Edmond Brown (Rensselaer Polytechnic Institute)
J. Richard Christman (U.S. Coast Guard Academy)
Sumner Davis (University of California, Berkeley)
Roger Freedman (University of California, Santa Barbara)
James B. Gerhart (University of Washington)
Richard Thompson (University of Southern California)
David Wallach (Pennsylvania State University)
Roald K. Wangsness (University of Arizona)

Estamos profundamente agradecidos y obligados hacia todos ellos por sus sustanciales contribuciones a este proyecto.

Damos las gracias al personal de John Wiley & Sons por su notable cooperación y apoyo, entre quienes se cuentan Cliff Mills, editor de física; Cathy Donovan, asistente del programa editorial; Cathy Faduska, gerente de mercadotecnia; John Balbalis, ilustrador; Deborah Herbert, supervisora editorial; Karin Kincheloe, diseñadora; Lucille Buonocore, supervisora de producción; Jennifer Atkins, investigadora de fotografía; Christina Della Bartolomea, copieditora. El proceso de mecanografía del manuscrito de esta edición fue magníficamente ejecutado por Christina Godfrey.

Septiembre 1991

ROBERT RESNICK
*Rensselaer Polytechnic Institute*
*Troy, Nueva York 12180-3590*

DAVID HALLIDAY
*Seattle, Washington*

KENNETH S. KRANE
*Oregon State University*
*Corvallis, Oregon 97331*

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

# CONTENIDO

**CAPÍTULO 1**
**MEDICIONES** **1**

1-1 Las Cantidades Físicas, Patrones y Unidades 1
1-2 El Sistema Internacional de Unidades 2
1-3 Patrón de Tiempo 3
1-4 Patrón de Longitud 5
1-5 Patrón de Masa 7
1-6 Precisión y Cifras Significativas 8
1-7 Análisis Dimensional 10
Preguntas y Problemas 11

**CAPÍTULO 2**
**MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL** **17**

2-1 Cinemática de la Partícula 17
2-2 Descripciones del Movimiento 17
2-3 Velocidad Promedio 20
2-4 Velocidad Instantánea 21
2-5 Movimiento Acelerado 23
2-6 Movimiento con Aceleración Constante 25
2-7 Cuerpos en Caída Libre 28
2-8 Galileo y la Caída Libre (*Opcional*) 29
2-9 Medición de la Aceleración en Caída Libre (*Opcional*) 30
Preguntas y Problemas 31

**CAPÍTULO 3**
**VECTORES** **41**

3-1 Vectores y Escalares 41
3-2 Suma de Vectores: Método Gráfico 42
3-3 Componentes de Vectores 43
3-4 Suma de Vectores: Método de las Componentes 46
3-5 Multiplicación de Vectores 48
3-6 Las Leyes Vectoriales en la Física (*Opcional*) 50
Preguntas y Problemas 53

**CAPÍTULO 4**
**MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL Y TRIDIMENSIONAL** **59**

4-1 Posición, Velocidad, y Aceleración 59
4-2 Movimiento con Aceleración Constante 61
4-3 Movimiento de Proyectiles 63
4-4 Movimiento Circular Uniforme 67
4-5 Vectores de Velocidad y de Aceleración en el Movimiento Circular (*Opcional*) 69
4-6 Movimiento Relativo 71
Preguntas y Problemas 74

**CAPÍTULO 5**
**FUERZA Y LAS LEYES DE NEWTON** **87**

5-1 Mecánica Clásica 87
5-2 Primera Ley de Newton 88
5-3 Fuerza 90
5-4 Masa 90
5-5 Segunda Ley de Newton 92
5-6 Tercera Ley de Newton 94
5-7 Unidades de Fuerza 96
5-8 Peso y Masa 97
5-9 Medición de Fuerzas 99
5-10 Aplicaciones de las Leyes de Newton 100
5-11 Más Aplicaciones de las Leyes de Newton 103
Preguntas y Problemas 106

**CAPÍTULO 6**
**DINÁMICA DE LA PARTÍCULA 117**

6-1 Leyes de la Fuerza 117
6-2 Fuerzas de Fricción 118
6-3 La Dinámica del Movimiento Circular Uniforme 123
6-4 Ecuaciones del Movimiento: Fuerzas Constantes y No Constantes 126
6-5 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Analíticos 128
6-6 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Numéricos (*Opcional*) 129
6-7 Fuerzas de Arrastre y el Movimiento de Proyectiles 130
6-8 Marcos No Inerciales y Seudofuerzas (*Opcional*) 133
6-9 Limitaciones de las Leyes de Newton (*Opcional*) 135
Preguntas y Problemas 137

**CAPÍTULO 7**
**TRABAJO Y ENERGÍA 149**

7-1 Trabajo Efectuado por una Fuerza Constante 149
7-2 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Unidimensional 153
7-3 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Bidimensional (*Opcional*) 155
7-4 Energía Cinética y el Teorema Trabajo-Energía 157
7-5 Potencia 159
7-6 Marcos de Referencia (*Opcional*) 160
7-7 Energía Cinética a Altas Velocidades (*Opcional*) 162
Preguntas y Problemas 163

**CAPÍTULO 8**
**CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 171**

8-1 Fuerzas Conservativas 171
8-2 Energía Potencial 174
8-3 Sistemas Conservativos Unidimensionales 176
8-4 Sistemas Conservativos Unidimensionales: La Solución Completa 179
8-5 Sistemas Conservativos Bidimensionales y Tridimensionales (*Opcional*) 182
8-6 Conservación de la Energía en un Sistema de Partículas 183
8-7 Masa y Energía (*Opcional*) 187
8-8 Cuantización de la Energía (*Opcional*) 189
Preguntas y Problemas 190

**CAPÍTULO 9**
**SISTEMAS DE PARTÍCULAS 203**

9-1 Sistemas de Dos Partículas 203
9-2 Sistemas de Muchas Partículas 206
9-3 Centro de Masa de Objetos Sólidos 209
9-4 Ímpetu Lineal de una Partícula 212
9-5 Ímpetu Lineal de un Sistema de Partículas 213
9-6 Conservación del Ímpetu Lineal 214
9-7 Trabajo y Energía en un Sistema de Partículas (*Opcional*) 217
9-8 Sistemas de Masa Variable (*Opcional*) 220
Preguntas y Problemas 224

**CAPÍTULO 10**
**COLISIONES 233**

10-1 ¿Qué es una Colisión? 233
10-2 Impulso e Ímpetu 234
10-3 Conservación e Ímpetu Durante las Colisiones 236
10-4 Colisiones en una Dimensión 237
10-5 Colisiones Bidimensionales 241
10-6 Marco de Referencia del Centro de Masa 244
10-7 Procesos de Desintegración Espontánea (*Opcional*) 248
Preguntas y Problemas 250

**CAPÍTULO 11**
**CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN 261**

11-1 Movimiento de Rotación 261
11-2 Las Variables de la Rotación 262
11-3 Rotación con Aceleración Angular Constante 264
11-4 Cantidades de Rotación como Vectores 265
11-5 Relaciones Entre Variables Lineales y Angulares: Forma Escalar 268
11-6 Relaciones Entre las Variables Lineales y Angulares: Forma Vectorial (*Opcional*) 269
Preguntas y Problemas 271

**CAPÍTULO 12**
**DINÁMICA DE LA ROTACIÓN 277**

12-1 Dinámica de la Rotación: Una Visión General 277

12-2 Energía Cinética de la Rotación e Inercia de la Rotación 278
12-3 Inercia de Rotación de los Cuerpos Sólidos 281
12-4 Torca que Actúa Sobre una Partícula 283
12-5 Dinámica de la Rotación de un Cuerpo Rígido 286
12-6 Movimientos de Rotación y de Traslación Combinados 290
Preguntas y Problemas 296

**CAPÍTULO 13 ÍMPETU ANGULAR 305**

13-1 Ímpetu Angular de una Partícula 305
13-2 Sistemas de Partículas 307
13-3 Ímpetu Angular y Velocidad Angular 309
13-4 Conservación del Ímpetu Angular 313
13-5 El Trompo 319
13-6 Cuantización del Ímpetu Angular (*Opcional*) 320
13-7 Dinámica Rotacional: un Repaso 321
Preguntas y Problemas 321

**CAPÍTULO 14 EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS 331**

14-1 Condiciones de Equilibrio 331
14-2 Centro de Gravedad 332
14-3 Ejemplos de Equilibrio 334
14-4 Equilibrio Estable, Inestable y Neutro de los Cuerpos Rígidos en un Campo Gravitatorio 339
14-5 Elasticidad 341
Preguntas y Problemas 344

**CAPÍTULO 15 OSCILACIONES 353**

15-1 Sistemas Oscilatorios 353
15-2 El Oscilador Armónico Simple 355
15-3 Movimiento Armónico Simple 356
15-4 Consideraciones Energéticas en el Movimiento Armónico Simple 359
15-5 Aplicaciones del Movimiento Armónico Simple 361
15-6 Movimiento Armónico Simple y Movimiento Circular Uniforme 365
15-7 Combinaciones de Movimientos Armónicos 367
15-8 Movimiento Armónico Amortiguado (*Opcional*) 368
15-9 Oscilaciones Forzadas y Resonancia (*Opcional*) 370
15-10 Oscilaciones de Dos Cuerpos (*Opcional*) 371
Preguntas y Problemas 373

**CAPÍTULO 16 GRAVITACIÓN 383**

16-1 La Gravitación Desde la Antigüedad Hasta Kepler 383
16-2 Newton y la Ley de la Gravitación Universal 385
16-3 La Constante Gravitatoria *G* 386
16-4 La Gravedad Cerca de la Superficie de la Tierra 388
16-5 Efecto Gravitatorio de una Distribución Esférica de la Materia (*Opcional*) 390
16-6 Energía Potencial Gravitatoria 393
16-7 El Campo Gravitatorio y el Potencial (*Opcional*) 396
16-8 Los Movimientos de Planetas y Satélites 397
16-9 Gravitación Universal 402
16-10 La Teoría General de la Relatividad (*Opcional*) 404
Preguntas y Problemas 408

**CAPÍTULO 17 ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS 419**

17-1 Fluidos y Sólidos 419
17-2 Presión y Densidad 420
17-3 Variación de la Presión en un Fluido en Reposo 422
17-4 Principio de Pascal y Principio de Arquímedes 426
17-5 Medición de la Presión 429
17-6 Tensión Superficial (*Opcional*) 431
Preguntas y Problemas 433

**CAPÍTULO 18 DINÁMICA DE LOS FLUIDOS 441**

18-1 Conceptos Generales del Flujo de los Fluidos 441
18-2 Trayectoria de una Corriente y la Ecuación de Continuidad 442
18-3 La Ecuación de Bernoulli 445
18-4 Aplicaciones de la Ecuación de Bernoulli y de la Ecuación de Continuidad 447
18-5 Campos de Flujo (*Opcional*) 450

18-6 Viscosidad, Turbulencia, y Flujo Caótico (*Opcional*) 453
Preguntas y Problemas 456

**CAPÍTULO 19 MOVIMIENTO ONDULATORIO 465**

19-1 Ondas Mecánicas 465
19-2 Tipos de Ondas 466
19-3 Ondas Viajeras 467
19-4 Velocidad de Onda 471
19-5 La Ecuación de la Onda (*Opcional*) 471
19-6 Potencia e Intensidad en el Movimiento Ondulatorio 475
19-7 El Principio de Superposición 476
19-8 Interferencia de Ondas 478
19-9 Ondas Estacionarias 482
19-10 Resonancia 485
Preguntas y Problemas 487

**CAPÍTULO 20 ONDAS SONORAS 495**

20-1 La Velocidad del Sonido 495
20-2 Ondas Viajeras Longitudinales 497
20-3 Potencia e Intensidad de las Ondas Sonoras 499
20-4 Ondas Longitudinales Estacionarias 501
20-5 Sistemas Vibratorios y Fuentes de Sonido 503
20-6 Pulsaciones 506
20-7 El Efecto Doppler 508
Preguntas y Problemas 511

**CAPÍTULO 21 LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD 519**

21-1 Las Dificultades con la Física Clásica 519
21-2 Los Postulados de la Relatividad Especial 521
21-3 Consecuencias de los Postulados de Einstein 522
21-4 La Transformación de Lorentz 526
21-5 Medición de las Coordenadas Espacio-Tiempo de un Suceso 529
21-6 La Transformación de las Velocidades 529
21-7 Consecuencias de la Transformación de Lorentz 531
21-8 Ímpetu Relativista 535
21-9 Energía Relativista 537
21-10 La Lógica la Relatividad Especial 540
Preguntas y Problemas 541

**CAPÍTULO 22 TEMPERATURA 547**

22-1 Descripción Macroscópica y Descripción Microscópica 547
22-2 Temperatura y Equilibrio Térmico 548
22-3 Medición de la Temperatura 549
22-4 La Escala de Temperatura de un Gas Ideal 552
22-5 Dilatación Térmica 554
Preguntas y Problemas 558

**CAPÍTULO 23 LA TEORÍA CINÉTICA Y EL GAS IDEAL 565**

23-1 Propiedades Macroscópicas de un Gas y la Ley del Gas Ideal 565
23-2 El Gas Ideal: Un Modelo 568
23-3 Cálculo Cinético de la Presión 569
23-4 Interpretación Cinética de la Temperatura 571
23-5 Trabajo Efectuado Sobre un Gas Ideal 572
23-6 La Energía Interna de un Gas Ideal 576
23-7 Fuerzas Intermoleculares (*Opcional*) 578
23-8 La Ecuación de Estado de van der Waals (*Opcional*) 579
Preguntas y Problemas 581

**CAPÍTULO 24 MECÁNICA ESTADÍSTICA 587**

24-1 Distribuciones Estadísticas y Valores Medios 587
24-2 Recorrido libre medio 589
24-3 La Distribución de las Velocidades Moleculares 593
24-4 La Distribución de las Energías 597
24-5 Movimiento Browniano 599
24-6 Distribuciones Estadísticas Cuánticas (*Opcional*) 600
Preguntas y Problemas 603

**CAPÍTULO 25 EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA 607**

25-1 El Calor: Energía en Tránsito 607
25-2 Capacidad Calorífica y Calor Específico 609
25-3 Capacidades Caloríficas de los Sólidos 611
25-4 Capacidades Caloríficas de un Gas Ideal 612

25-5 La Primera Ley de la Termodinámica 616
25-6 Aplicaciones de la Primera Ley 619
25-7 La Transferencia de Calor 622
Preguntas y Problemas 626

**CAPÍTULO 26**
**ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA 635**

26-1 Procesos Reversibles y Procesos Irreversibles 635
26-2 Máquinas Térmicas y la Segunda Ley 637
26-3 Refrigeradores y la Segunda Ley 639
26-4 El Ciclo de Carnot 641
26-5 La Escala de Temperatura Termodinámica 644
26-6 Entropía: Procesos Reversibles 646
26-7 Entropía: Procesos Irreversibles 648
26-8 Entropía y la Segunda Ley 650
26-9 Entropía y Probabilidad 651
Preguntas y Problemas 653

**APÉNDICES**

A El Sistema Internacional de Unidades (SI) A-1
B Algunas Constantes Fundamentales de la Física A-3
C Algunos Datos Astronómicos A-4
D Propiedades de los Elementos A-5
E Tabla Periódica de los Elementos A-7
F Partículas Elementales A-8
G Factores de Conversión A-10
H Fórmulas Matemáticas A-14
I Programas de Computadora A-16
J Premios Nobel de Física A-20
K Tablas A-24

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS CON NÚMEROS IMPARES A-28
CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS F-1
ÍNDICE I-1

# CAPÍTULO 1

# MEDICIONES

*A pesar de la belleza matemática de algunas de sus más complejas y abstractas teorías, incluyendo las de las partículas elementales y de la relatividad general, la física es sobre todo una ciencia experimental. Es, por tanto, crucial que quienes realizan mediciones precisas se pongan de acuerdo acerca de patrones mediante los cuales puedan expresarse los resultados de esas mediciones, de modo que puedan ser comunicadas de un laboratorio a otro y verificadas.*

*En este capítulo comenzaremos nuestro estudio de la física con la introducción de algunas de las unidades básicas de las cantidades físicas y de los patrones que han sido aceptados para su medición.*

*Tomamos en cuenta la manera adecuada de expresar los resultados de cálculos y mediciones, incluyendo las dimensiones apropiadas y el número de cifras significativas. Discutimos e ilustramos la importancia de poner atención a las dimensiones de las cantidades que aparecen en nuestras ecuaciones. Más adelante en el texto, se presentarán otras unidades básicas y muchas unidades derivadas según fuera necesario.*

## 1-1 LAS CANTIDADES FÍSICAS, PATRONES Y UNIDADES

El material fundamental que constituye la física lo forman las cantidades físicas, en función de las cuales se expresan las leyes de esta ciencia. Entre éstas están longitud, masa, tiempo, fuerza, velocidad, densidad, resistividad, temperatura, intensidad luminosa, intensidad del campo magnético, y muchas más. Muchas de estas palabras, tales como longitud y fuerza, son parte de nuestro vocabulario cotidiano. Por ejemplo, podría decirse: "Recorrería cualquier *distancia* (longitud) para ayudarte mientras no emplees la *fuerza* para obligarme a hacerlo." Sin embargo, en física no debemos engañarnos con los significados cotidianos de estas palabras. Las definiciones científicas precisas de longitud y de fuerza no tienen conexión alguna con los usos de estas palabras en la frase entre comillas.

Podemos definir una cantidad algebraica, por ejemplo, $L$ para la longitud, o cualquier otra que elijamos, y podemos suponer que es exactamente conocida. Sin embargo, cuando tratamos de asignar una unidad a un valor particular de esa cantidad, encontramos dificultades para establecer un *patrón*, de manera que quienes tienen la necesidad de comparar una longitud con otra, concuerden en las unidades de medición. Antiguamente, la medida inglesa de longitud era la yarda, determinada por el tamaño de la cintura del rey. Podemos fácilmente deducir cuáles serán los problemas de un patrón así: por un lado, es difícilmente *accesible* a quienes necesitan calibrar sus propios patrones secundarios y, por otro, no es *invariable* al cambio con el paso del tiempo.

Por fortuna, no es necesario definir y concordar sobre patrones para cada cantidad física. Ciertas cantidades elementales pueden ser más fáciles de establecer como patrones, y las cantidades más complejas pueden a menudo ser expresadas en función de las unidades elementales. *Longitud* y *tiempo*, por ejemplo, estuvieron durante muchos años entre las cantidades físicas más precisamente mensurables y fueron generalmente aceptadas como patrones. Por lo contrario, la *velocidad* fue menos sujeto de medición precisa y, por lo tanto tratada como una unidad derivada (velocidad = longitud/tiempo). Sin embargo, hoy día las mediciones de la velocidad de la luz han llegado a una precisión más allá del patrón anterior de longitud; todavía tratamos la longitud como una unidad fundamental, pero el patrón para su medición se deriva ahora de los patrones de velocidad y de tiempo.

El problema básico es, por lo tanto, elegir el número más pequeño posible de cantidades físicas como fundamentales y estar de acuerdo con los patrones para su medición. Estos patrones deben ser tanto accesibles como invariables, lo cual puede ser difícil de satisfacer de manera simultánea. Si el kilogramo patrón, por ejemplo, ha de ser un objeto invariable, debe ser *inaccesible* y mantenerse aislado más allá de los efectos del uso y de la corrosión.

Los acuerdos respecto a los patrones han sido logrados luego de una serie de reuniones internacionales de la Conferencia General de Pesos y Medidas que se inició en 1889; la 19a. reunión tuvo lugar en 1991. Una vez que un patrón ha sido aceptado, tal es el *segundo* como una unidad de *tiempo*, entonces puede aplicarse la unidad a una amplia gama de mediciones, desde la duración de vida del protón (mayor de $10^{40}$ segundos) hasta la duración de vida de las partículas menos estables que puedan ser producidas en nuestros laboratorios (alrededor de $10^{-23}$ segundos). Cuando expresamos un valor tal como $10^{40}$ en unidades de segundos, significa que la razón entre la duración de vida del protón y el intervalo de tiempo que se definió arbitrariamente como el patrón segundo es de $10^{40}$. Para lograr tal medición, debemos tener una manera de comparar los instrumentos de medición del laboratorio con el patrón. Muchas de estas comparaciones son indirectas, ya que ningún instrumento de medición es capaz de operar con precisión sobre 40 órdenes de magnitud. Sin embargo, es esencial al progreso de la ciencia que, cuando un investigador registra un intervalo de tiempo en particular con un instrumento de laboratorio, la lectura pueda de algún modo ser relacionada con una calibración basada en el patrón segundo.

La búsqueda de patrones más precisos o accesibles es en sí un empeño científico importante, donde intervienen físicos y otros investigadores en los laboratorios de todo el mundo. En Estados Unidos, los laboratorios del Instituto Nacional de Patrones y Tecnología (NIST), anteriormente la Oficina Nacional de Patrones (NBS) están dedicados a mantener, desarrollar, y probar patrones para investigadores de básicos así como para científicos e ingenieros en la industria. Las mejoras en los patrones en años recientes han sido extraordinarias: desde la primera edición de este texto (1960), la precisión del patrón segundo ha mejorado en un factor superior a 1000.

## 1-2 EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES*

La Conferencia General de Pesas y Medidas, en las reuniones sostenidas durante el periodo 1954-1971, seleccionó como unidades básicas las siete cantidades mostradas en la tabla 1. Éstas son la base del Sistema Internacional de Unidades, abreviado SI, del francés *Système International d'Unités*.

**TABLA 1** UNIDADES BÁSICAS DEL SI

| | *Unidad SI* | |
|---|---|---|
| *Cantidad* | *Nombre* | *Símbolo* |
| Tiempo | segundo | s |
| Longitud | metro | m |
| Masa | kilogramo | kg |
| Cantidad de sustancia | mol | mol |
| Temperatura termodinámica | kelvin | K |
| Corriente eléctrica | ampere | A |
| Intensidad lumínica | candela | cd |

A lo largo de este libro damos muchos ejemplos de unidades derivadas del SI, tales como velocidad, fuerza y resistencia eléctrica, que se desprenden de la tabla 1. Por ejemplo, la unidad SI de fuerza, llamada *newton* (abreviatura N), se define en función de las unidades básicas del SI así:

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg \cdot m/s^2}$$

tal como lo explicaremos con detalle en el capítulo 5.

Si expresamos propiedades físicas, como la producción de una central de energía o el intervalo de tiempo entre dos eventos nucleares en unidades SI, a menudo encontraremos números muy grandes o muy pequeños. Por conveniencia, la Conferencia General de Pesas y Medidas, en las reuniones sostenidas durante el periodo 1960-1975, recomendó los prefijos mostrados en la tabla 2. Así, podemos escribir la producción de una planta de energía eléctrica típica, $1.3 \times 10^9$ watt, como 1.3 gigawatt o 1.3 GW. De igual forma, podemos escribir un intervalo de tiempo de la dimensión encontrada a menudo en física nuclear, $2.35 \times 10^{-9}$ segundos, como 2.35 nanosegundos o 2.35 ns. Los prefijos de factores mayores a la unidad se expresan en términos que provienen del griego, y los de factores menores a la unidad se expresan con términos de origen latino (excepto femto y atto, que provienen del danés).

Para reforzar la tabla 1 necesitamos siete juegos de procedimientos operacionales que nos digan cómo producir las siete unidades SI básicas en el laboratorio. Exploramos las de tiempo, longitud y masa en las tres secciones siguientes.

Otros dos sistemas principales de unidades compiten con el Sistema Internacional (SI). Uno es el sistema gaus-

* Véase "SI: The International System of Units," por Robert A. Nelson (American Association of Physics Teachers, 1981). La guía "oficial" de Estados Unidos para el sistema SI puede encontrarla en la Special Publication 330, de la National Bureau of Standards (edición 1986).

En México se dispone también de información similar en la norma oficial mexicana NOM-Z-1981, Sistema Internacional de Unidades (SI), editada por la Dirección General de Normas, de la Secretaría de Comercio y Fomento Industrial (SECOFI). *(N. del T.)*

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



**TABLA 2** PREFIJOS DEL SI†

| *Factor* | *Prefijo* | *Símbolo* | *Factor* | *Prefijo* | *Símbolo* |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^{18}$ | exa- | E | $10^{-1}$ | deci- | d |
| $10^{15}$ | peta- | P | $10^{-2}$ | **centi-** | c |
| $10^{12}$ | tera- | T | $10^{-3}$ | **mili-** | m |
| $10^{9}$ | **giga-** | G | $10^{-6}$ | **micro-** | $\mu$ |
| $10^{6}$ | **mega-** | M | $10^{-9}$ | **nano-** | n |
| $10^{3}$ | **kilo-** | k | $10^{-12}$ | **pico-** | p |
| $10^{2}$ | hecto- | h | $10^{-15}$ | femto- | f |
| $10^{1}$ | deca- | da | $10^{-18}$ | atto- | a |

† Los prefijos utilizados en este libro se señalan en bold o negritas.

siano, con el que se expresa mucha de la literatura de física; en este libro no usamos este sistema. El apéndice G da los factores de conversión a unidades SI.

El segundo es el sistema británico (todavía en uso diario en Estados Unidos), del cual las unidades básicas de la mecánica son longitud (pie), fuerza (libra), y tiempo (segundo). De nuevo el apéndice G proporciona los factores de conversión a unidades SI. En este libro usamos unidades SI, pero a veces damos los equivalentes británicos. Solamente en tres países [Myanmar (Birmania), Liberia y Estados Unidos] se usa otro sistema diferente al SI como el patrón nacional de medición aceptado.

**Problema muestra 1** Cualquier cantidad física puede ser multiplicada por 1 sin cambiar su valor. Por ejemplo, 1 min = 60 s, de modo que 1 = 60 s/1 min; similarmente, 1 ft = 12 in, de modo que 1 = 1 ft/12 in. Usando los factores de conversión apropiados, halle (*a*) la velocidad en metros por segundo equivalente a 55 millas por hora, y (*b*) el volumen en centímetros cúbicos de un tanque que contiene 16 galones de gasolina.

**Solución.** (*a*) Para nuestros factores de conversión, necesitamos (véase apéndice G) 1 mi = 1609 m (de modo que 1 = 1609 m/1 mi) y 1 h = 3600 s (de modo que 1 = 1 h/3600 s). Entonces

$$\text{velocidad} = 55\ \frac{\cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{h}}} \times \frac{1609\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{mi}}} \times \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 25\ \text{m/s}.$$

(*b*) Un galón fluido es igual a 231 pulgadas cúbicas, y 1 in. = 2.54 cm. Entonces

$$\text{volumen} = 16\ \cancel{\text{gal}} \times \frac{231\ \cancel{\text{in.}}^3}{1\ \cancel{\text{gal}}} \times \left(\frac{2.54\ \text{cm}}{1\ \cancel{\text{in.}}}\right)^3 = 6.1 \times 10^4\ \text{cm}^3.$$

Nótese en estos dos cálculos cómo se insertan los factores de conversión de unidades, de modo que las unidades no deseadas aparezcan en el numerador y en el denominador y, por lo tanto, se cancelen.

## 1-3 EL PATRÓN DE TIEMPO*

La medición del tiempo tiene dos aspectos. Para propósitos cotidianos y para algunos de carácter científico, necesitamos saber la hora del día, de modo que podamos ordenar sucesivamente los acontecimientos. En la mayoría de los trabajos científicos precisamos saber cuánto dura un suceso (el intervalo de tiempo). Así pues, cualquier patrón de tiempo debe ser capaz de responder a las preguntas, "¿a qué hora ocurre?" y "¿cuánto dura?" La tabla 3 muestra el amplio margen de intervalos de tiempo que pueden medirse. Éstos varían por un factor de alrededor de $10^{63}$.

**TABLA 3** ALGUNOS INTERVALOS DE TIEMPO MEDIDOS†

| *Intervalo de tiempo* | *Segundos* |
|---|---|
| Duración de vida de un protón | $> 10^{40}$ |
| Periodo de semidesintegración doble beta del $^{82}$Se | $3 \times 10^{27}$ |
| Edad del universo | $5 \times 10^{17}$ |
| Edad de la pirámide de Keops | $1 \times 10^{11}$ |
| Vida media del ser humano (Estados Unidos) | $2 \times 10^{9}$ |
| Periodo de la órbita terrestre alrededor del Sol (1 año) | $3 \times 10^{7}$ |
| Periodo de rotación terrestre alrededor de su eje (1 día) | $9 \times 10^{4}$ |
| Periodo de la órbita de un satélite típico en órbita baja | $5 \times 10^{3}$ |
| Tiempo entre latidos normales del corazón | $8 \times 10^{-1}$ |
| Periodo del diapasón de concierto (en "la") | $2 \times 10^{-3}$ |
| Periodo de oscilación de microondas de 3 cm | $1 \times 10^{-10}$ |
| Periodo típico de rotación de una molécula | $1 \times 10^{-12}$ |
| Pulsación de luz más corta producida (1990) | $6 \times 10^{-15}$ |
| Duración de vida de las partículas menos estables | $< 10^{-23}$ |

† Valores aproximados

* Para una historia de la medición del tiempo, véase *Revolution in Time: Clocks and the Making of the Modern World*, por David S. Landes (Harvard University Press, 1983). Los desarrollos recientes en la cronomedición precisa se discuten en "Precise Measurement of Time," por Norman F. Ramsey, *American Scientist*, Enero-Febrero de 1988, pág. 42. Un listado de los diferentes sistemas para reportar el tiempo puede hallarse en "Time and the Amateur Astronomer," por Alan M. MacRobert, *Sky and Telescope*, Abril 1989, pág. 378.

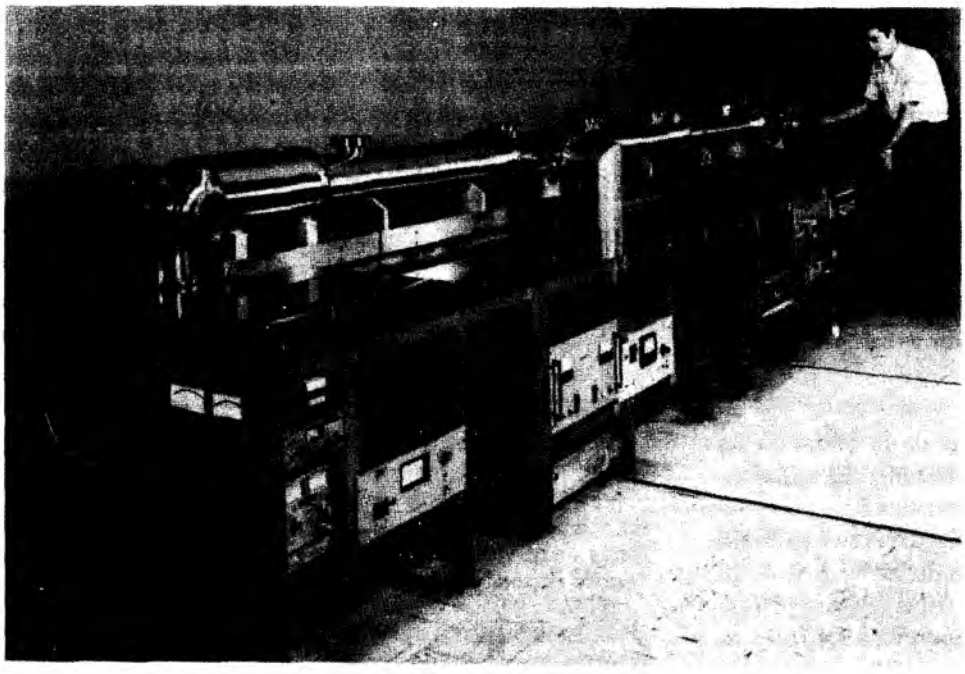


**Figura 1** Patrón de frecuencia atómica de cesio Núm. NBS-6 del National Institute of Standards and Technology, en Boulder, Colorado. Éste es el patrón primario para la unidad de tiempo en Estados Unidos. Marque el teléfono (303)499-7111 para calibrar su reloj contra el patrón. Marque el (900)410-8463 para las señales de tiempo del Observatorio Naval de ese país.

Cualquier fenómeno que se repita a sí mismo puede utilizarse como una medición del tiempo. La medición se realiza contando dichas repeticiones e incluyendo las fracciones de ellas. Podríamos usar un péndulo que oscila, un sistema masa-resorte, o un cristal de cuarzo, por ejemplo. De los muchos fenómenos repetitivos en la naturaleza la rotación de la Tierra sobre su eje, que determina la longitud del día, fue usada durante siglos como un patrón de tiempo. Un segundo (solar medio) se define como 1/86,400 de un día (solar medio).

Los relojes de cristal de cuarzo basados en las vibraciones periódicas de un cristal de cuarzo sostenidas eléctricamente sirven bien como patrones de tiempo secundarios. Un reloj de cuarzo puede ser calibrado contra la Tierra en rotación por medio de observaciones astronómicas y usado para medir el tiempo en el laboratorio. El mejor de éstos ha mantenido el tiempo por un año con un error acumulado máximo de 5 $\mu$s, pero aun esta precisión no es suficiente en la ciencia y la tecnología modernas.

Para cumplir la necesidad de un patrón de tiempo mejor, se han desarrollado relojes atómicos en varios países. La figura 1 muestra un reloj así, basado en una frecuencia característica de la radiación de las microondas emitidas por átomos del elemento cesio. Este reloj, guardado en el National Institute of Standards and Technology, en Estados Unidos, constituye en ese país la base para el Tiempo Universal Coordinado (Coordinated Universal Time, UTC), por el cual se obtienen señales de tiempo en radios de onda corta (estaciones WWV y WWVH) y en el teléfono.

La figura 2 muestra, por comparación con un reloj de cesio, las variaciones en la tasa de rotación de la Tierra en un periodo de 4 años. Estos datos muestran lo pobre del patrón de tiempo que proporciona la rotación de la Tierra para un trabajo preciso. Las variaciones que vemos en la figura 2 pueden ser atribuidas a los efectos en las mareas causados por la Luna y a las variaciones estacionales en los vientos atmosféricos.

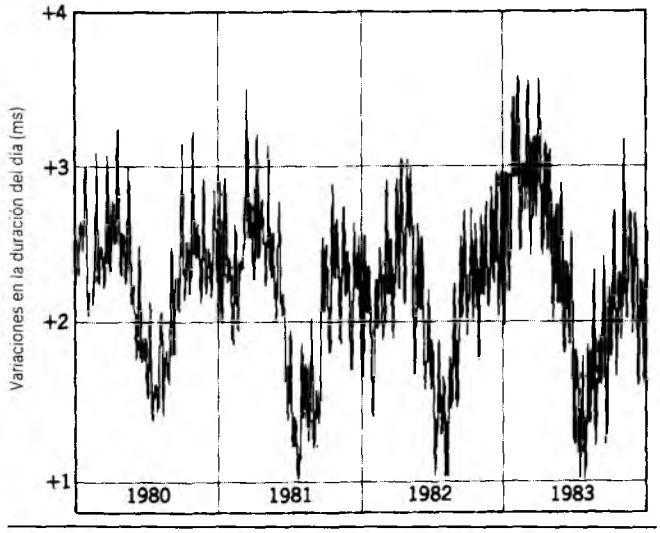



**Figura 2** La variación en la longitud del día en un periodo de 4 años. Nótese que la escala vertical es de sólo 3 ms = 0.003 s. Véase "The Earth's Rotation Rate," por John Wahr, *American Scientist*, Enero-Febrero 1985, p. 41.

El segundo basado en el reloj de cesio fue adoptado como un patrón internacional por la 13a. Conferencia General de Pesas y Medidas de 1967, donde se dio la siguiente definición:

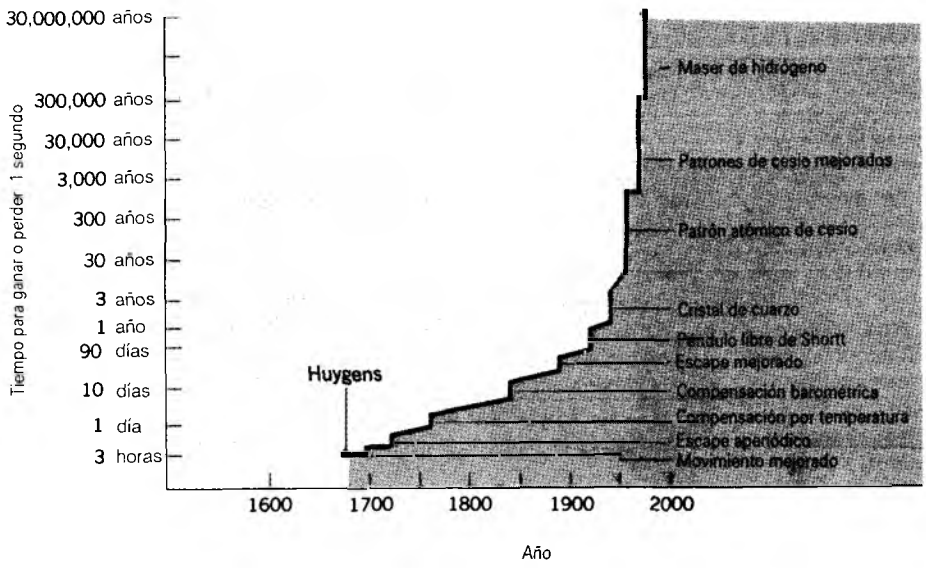



**Figura 3** La mejora en cronometría a lo largo de los siglos. Los antiguos relojes de péndulo ganaron o perdieron un segundo cada unas cuantas horas; los relojes de maser de hidrógeno actuales lo harían sólo después de 30 millones de años.

*Un segundo es el tiempo ocupado por 9,192,631,770 vibraciones de la radiación (de una longitud de onda específica) emitida por un átomo de cesio.*

Dos relojes de cesio modernos podrían marchar durante 300,000 años antes de que sus lecturas difieran en más de 1 s. Se han obtenido relojes de maser* de hidrógeno con la increíble precisión de 1 s en 30 millones de años. Los relojes basados en un simple átomo atrapado pueden ser capaces de mejorar esta precisión en tanto como 3 órdenes de magnitud. La figura 3 muestra el impresionante registro de mejoras en la cronometría que han ocurrido en las pasados 300 años, comenzando con el reloj de péndulo, inventado por Christian Huygens en 1656, y terminando con el maser de hidrógeno de hoy día.

## 1-4 EL PATRÓN DE LONGITUD‡

El primer patrón internacional de longitud fue una barra de una aleación de platino e iridio que se llamó el metro patrón, el cual fue guardado en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas cerca de París. La distancia entre dos líneas finas grabadas cerca de los extremos de la barra, cuando ésta se mantenía a una temperatura de 0°C y soportada mecánicamente de una manera prescrita, fue definida como el metro. Históricamente, el metro se tomó como una diezmillonésima parte de la distancia entre el polo norte y el ecuador a lo largo de la línea del meridiano que pasa por París. Sin embargo, las mediciones más precisas demostraron que la barra del metro patrón difiere ligeramente (alrededor del 0.023%) del valor deseado.

A causa de que el metro patrón no es muy accesible, se hicieron copias maestras precisas de él y enviadas a los laboratorios de estandarización alrededor del mundo. Estos patrones secundarios fueron usados para calibrar otros patrones, aún más accesibles. Entonces, hasta hace poco, cada varilla o dispositivo de medición derivó su autoridad del metro patrón a través de una complicada cadena de comparaciones usando microscopios y máquinas divisoras. Desde 1959, ello sirvió también para la yarda, cuya definición legal en Estados Unidos adoptada en aquel año es como sigue:

$$1 \text{ yarda} = 0.9144 \text{ metros (exactamente)}$$

que es equivalente a

$$1 \text{ pulgada} = 2.54 \text{ centímetros (exactamente).}$$

La precisión con la cual pueden hacerse las intercomparaciones necesarias de la longitud por la técnica de comparar rayas finas usando un microscopio ya no es satisfactoria para la ciencia y la tecnología modernas. Un patrón de longitud más preciso y reproducible fue obtenido cuando el físico estadounidense Albert A. Michelson comparó en 1893 la longitud del metro patrón con la longitud de onda de la luz roja emitida por los átomos de cadmio. Michelson midió cuidadosamente la longitud de la barra metro y encontró que el metro patrón era igual a 1,553,163.5 de aquellas longitudes de onda. Lámparas de cadmio idénticas podían ser obtenidas fácilmente en cualquier laboratorio, y así Michelson encontró una manera de tener un patrón de longitud preciso en todo el mundo, para fines científicos, sin atenerse a la barra del metro patrón.

* (N. del T.) El maser es un dispositivo de amplificación del sonido que usa un cristal de cianuro de potasio-cobalto para captar ondas de radio emitidas por objetos celestiales remotos.

‡ Véase "The New Definition of the Meter", por P. Giacomo, *American Journal of Physics*, Julio 1984, p. 607.

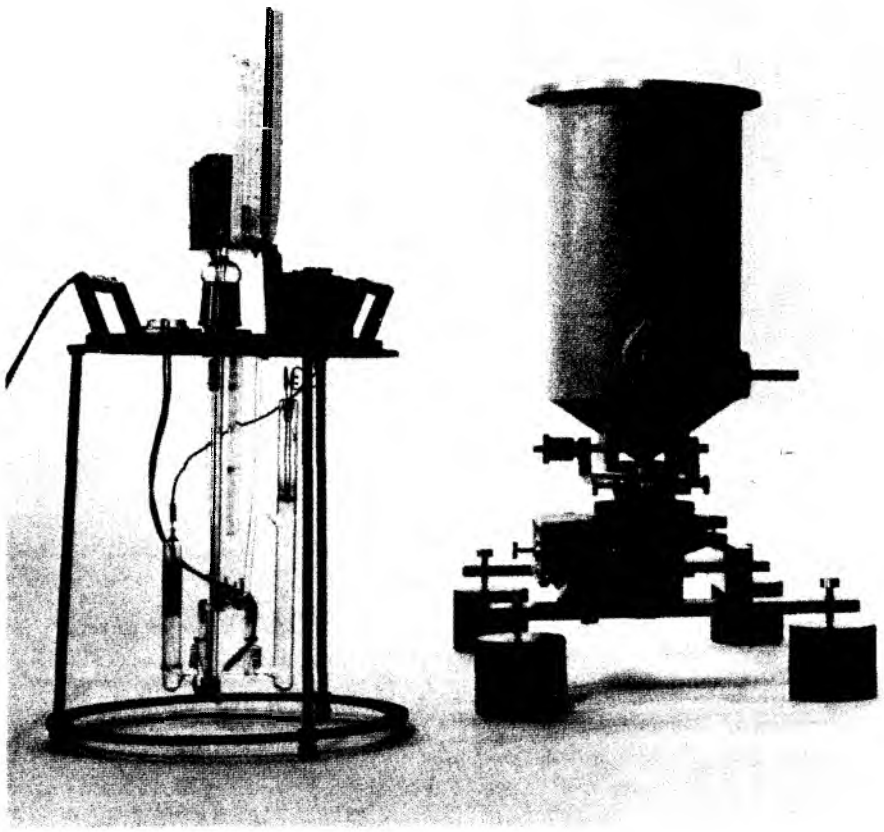


**Figura 4** Una lámpara de criptón de los Laboratorios Nacionales de Física, en Teddington, Inglaterra. El tubo capilar de vidrio del aparato de la izquierda contiene el gas $^{86}$Kr, el cual emite luz cuando es excitado por una corriente eléctrica. La lámpara está insertada en el criostato de la derecha, donde se mantiene a la temperatura del nitrógeno líquido (-210°C). La luz se ve a través de la pequeña portilla del criostato.

A pesar de este avance tecnológico, la barra de metal permaneció como el patrón oficial hasta 1960, cuando la 11a. Conferencia General de Pesas y Medidas adoptó un patrón atómico para el metro. Fue elegida la longitud de onda en el vacío de una cierta luz anaranjada emitida por átomos de un isótopo particular de criptón,* $^{86}$Kr, en una descarga eléctrica (véase la figura 4). Específicamente, el metro se definió como 1,650,763.73 longitudes de onda de esta luz. Con la posibilidad de hacer mediciones de longitud de una fracción de una longitud de onda, los científicos pudieron usar este nuevo patrón para hacer comparaciones de longitudes con una precisión de menos de 1 parte en $10^9$.

La elección de un patrón atómico ofrece otras ventajas, además del aumento de la precisión en las mediciones de longitud. Los átomos de $^{86}$Kr se obtienen en cualquier parte, son idénticos, y emiten luz de la misma longitud de onda. La longitud de onda particular elegida es únicamente característica del $^{86}$Kr y se halla definida de manera rigurosa y exacta. El isótopo puede obtenerse fácilmente en su forma pura.

Para 1983, las demandas de una precisión más alta habían llegado a tal punto que aun el patrón $^{86}$Kr no podía cumplirlas y en aquel año se dio un paso audaz. El metro fue redefinido como la distancia recorrida por una onda de luz en un intervalo de tiempo especificado. En las palabras de la 17a. Conferencia General de Pesas y Medidas:

> *El metro es la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299,792,458 de segundo.*

Esto es equivalente a decir que la velocidad de la luz $c$ se define ahora como

$$c = 299{,}792{,}458 \text{ m/s (exactamente).}$$

Esta nueva definicion del metro era necesaria porque las mediciones de la velocidad de la luz habían llegado a ser tan precisas que la reproducibilidad del metro $^{86}$Kr mismo

* El superíndice 86 del $^{86}$Kr da el *número de masa* (el número de protones más neutrones en el núcleo) de este isótopo del criptón. El gas natural de criptón contiene isótopos con números de masa de 78, 80, 82, 83, 84, y 86. La longitud de onda de la radiación elegida difiere en estos isótopos distintos en alrededor de 1 parte en $10^5$, lo cual es inaceptablemente grande comparado con la precisión del patrón, alrededor de 1 parte en $10^9$. En el caso del reloj de cesio, existe sólo un isótopo natural del cesio, el cual tiene un número de masa de 133.

eran el factor limitante. En vista de esto, tenía sentido adoptar la velocidad de la luz como una cantidad definida y usarla junto con el patrón de tiempo precisamente definido (el segundo) para redefinir el metro.

La tabla 4 muestra la gama de longitudes medidas que pueden ser comparadas con el patrón.

**Problema muestra 2** Un año-luz es una medida de longitud (no una medida de tiempo) igual a la distancia que la luz recorre en un año. Calcular el factor de conversión entre años-luz y metros, y hallar la distancia a la estrella Centauro Próxima ($4.0 \times 10^{16}$ m) en años-luz.

**Solución.** El factor de conversión de años a segundos es de

$$1 \text{ año} = 1 \text{ año} \times \frac{365.25 \text{ d}}{1 \text{ año}} \times \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ d}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}$$

$$= 3.16 \times 10^7 \text{ s}.$$

La velocidad de la luz es, con tres cifras significativas, $3.00 \times 10^8$ m/s. Entonces en un año la luz recorre una distancia de

$$(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(3.16 \times 10^7 \text{ s}) = 9.48 \times 10^{15} \text{ m},$$

de modo que

$$1 \text{ año-luz} = 9.48 \times 10^{15} \text{ m}.$$

La distancia a Centauro Próxima es

$$(4.0 \times 10^{16} \text{ m}) \times \frac{1 \text{ año-luz}}{9.84 \times 10^{15} \text{ m}} = 4.2 \text{ años-luz}$$

La luz de Centauro Próxima tarda alrededor de 4.2 años en viajar a la Tierra.

## 1-5 EL PATRÓN DE MASA

El patrón SI de masa es un cilindro de platino e iridio que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas al cual se le ha asignado, por acuerdo internacional, una masa de 1 kilogramo. Se envían patrones secundarios a laboratorios de estandarización en otros países y las masas de otros cuerpos pueden hallarse por la técnica de una balanza de brazos iguales con una precisión de 1 parte en $10^8$.

En Estados Unidos, una copia del patrón internacional de masa, conocido como kilogramo prototipo Núm. 20, se guarda en una bóveda del National Institute of Standards and Technology (véase la figura 5). Se le retira no más de una vez por año para comprobar los valores de patrones terciarios. Desde 1889 el prototipo Núm. 20 ha sido llevado a Francia dos veces para compararlo con el kilogramo maestro. Cuando se le retira de la bóveda siempre están presentes dos personas, una para transportar el kilogramo con un par de tenazas, y la segunda para sostener al kilogramo si la primera persona lo dejara caer.

**TABLA 4** ALGUNAS LONGITUDES MEDIDAS†

| *Longitud* | *Metros* |
|---|---|
| Distancia al cuásar más lejano observado | $2 \times 10^{26}$ |
| Distancia a la galaxia Andrómeda | $2 \times 10^{22}$ |
| Radio de nuestra galaxia | $6 \times 10^{19}$ |
| Distancia a la estrella más cercana (Centauro Próxima) | $4 \times 10^{16}$ |
| Radio medio de la órbita del planeta más distante (Plutón) | $6 \times 10^{12}$ |
| Radio del Sol | $7 \times 10^{8}$ |
| Radio de la Tierra | $6 \times 10^{6}$ |
| Altura del monte Everest | $9 \times 10^{3}$ |
| Altura de una persona promedio | $2 \times 10^{0}$ |
| Espesor de una página de este libro | $1 \times 10^{-4}$ |
| Tamaño de un virus típico | $1 \times 10^{-6}$ |
| Radio de un átomo de hidrógeno | $5 \times 10^{-11}$ |
| Radio efectivo de un protón | $1 \times 10^{-15}$ |

† Valores aproximados

La tabla 5 muestra algunas masas medidas. Nótese que varían por un factor de aproximadamente $10^{83}$. La mayoría de las masas han sido medidas en términos del kilogramo patrón por métodos indirectos. Por ejemplo, podemos medir la masa de la Tierra (véase la sección 16-3) midiendo en el laboratorio la fuerza gravitatoria de atracción entre dos esferas de plomo y comparándola con la atracción de la Tierra sobre una masa conocida. Las masas de

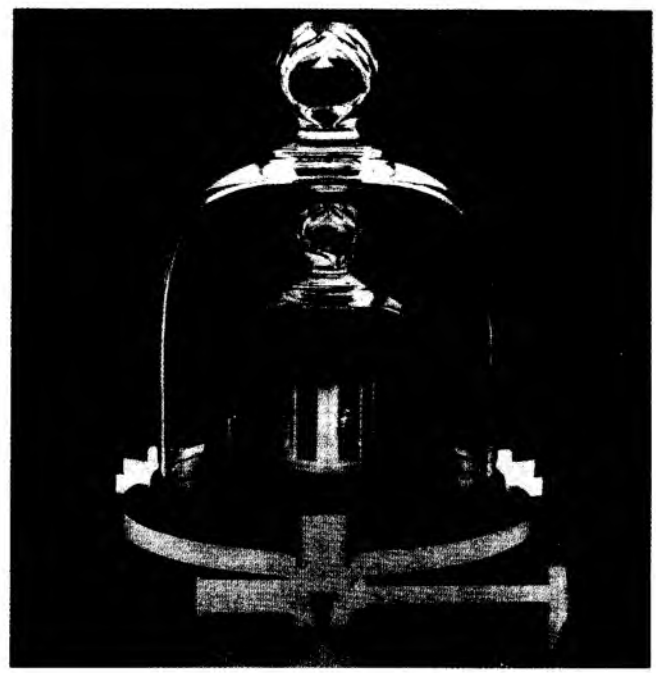


**Figura 5** El kilogramo patrón Núm. 20, que se conserva bajo una campana de vidrio doble en el U. S. National Institute of Standards and Technology.

**TABLA 5** ALGUNAS MASAS MEDIDAS†

| *Objeto* | *Kilogramos* |
|---|---|
| Universo conocido (estimación) | $10^{53}$ |
| Nuestra galaxia | $2 \times 10^{43}$ |
| El Sol | $2 \times 10^{30}$ |
| La Tierra | $6 \times 10^{24}$ |
| La Luna | $7 \times 10^{22}$ |
| Un trasatlántico | $7 \times 10^{7}$ |
| Un elefante | $4 \times 10^{3}$ |
| Una persona | $6 \times 10^{1}$ |
| Una uva | $3 \times 10^{-3}$ |
| Una partícula de polvo | $7 \times 10^{-10}$ |
| Un virus | $1 \times 10^{-15}$ |
| Una molécula de penicilina | $5 \times 10^{-17}$ |
| Un átomo de uranio | $4 \times 10^{-26}$ |
| Un protón | $2 \times 10^{-27}$ |
| Un electrón | $9 \times 10^{-31}$ |

† Valores aproximados

las esferas deben conocerse por comparación directa con el kilogramo patrón.

En la escala atómica tenemos un segundo patrón de masa, que no es una unidad SI. Es la masa del átomo de carbono $^{12}C$ al que, por acuerdo internacional, se le ha asignado una masa atómica de 12 unidades de masa atómica unificada (abreviatura u), exactamente y por definición. Podemos hallar las masas de otros átomos con precisión considerable usando un espectrómetro de masa (figura 6; véase también la sección 34-2). La tabla 6 muestra alguna selección de masas atómicas, incluyendo las incertidumbres estimadas de la medición. Necesitamos un segundo patrón de masa porque las técnicas de laboratorio actuales nos permiten comparar las masas atómicas entre sí con mayor precisión de lo que podemos hacerlo hoy día contra el kilogramo patrón. Sin embargo, el desarrollo de un patrón de masa atómica para sustituir al kilogramo patrón está aún lejano. La relación entre el patrón atómico actual y el patrón primario es, aproximadamente,

$$1 \text{ u} = 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Una unidad SI relacionada es el *mol*, que mide la cantidad de una sustancia. Un mol de átomos de $^{12}C$ tiene una masa de 12 gramos exactamente y contiene un número de átomos numéricamente igual a la constante de Avogadro $N_A$:

$$N_A = 6.0221367 \times 10^{23} \text{ por mol}.$$

Éste es un número determinado experimentalmente, con una incertidumbre de alrededor de una parte en un millón. Un mol de cualquier otra sustancia contiene el mismo número de entidades elementales (átomos, moléculas, u otros). Entonces 1 mol de gas helio contiene $N_A$ átomos de He, 1 mol de oxígeno contiene $N_A$ moléculas de $O_2$, y 1 mol de agua contiene $N_A$ moléculas de $H_2O$.

Para relacionar una unidad de masa atómica con una unidad de volumen es necesario usar la constante de Avogadro. Sustituir el patrón kilogramo por un patrón atómico requerirá una mejora de cuando menos dos órdenes de magnitud en la precisión del valor medido de $N_A$ para obtener masas con precisión de 1 parte en $10^8$.

## 1-6 PRECISIÓN Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Según vayamos mejorando la calidad de nuestros instrumentos de medición y la sofisticación de nuestras técnicas, podremos llevar a cabo experimentos a niveles de precisión siempre más elevados; esto es, podremos extender los resultados medidos a más y más *cifras significativas* y correspondientemente reducir la *incertidumbre experimental* del resultado. Tanto el número de cifras significativas como la incertidumbre dicen algo acerca de nuestra estimación de la precisión del resultado. Esto es, el resultado $x = 3$ m implica que conocemos menos sobre $x$ que del valor $x = 3.14159$ m. Al decir que $x = 3$ m, se sobreentiende que estamos razonablemente seguros de que $x$ se halla entre 2 m y 4 m, mientras que si expresamos a $x$ como 3.14159 m, significa que $x$ probablemente se halla entre 3.14158 m y 3.14160 m. Si expresamos a $x$ como 3 m cuando, de hecho, realmente creemos que $x$ es 3.14159 m, estamos pasando por alto una información que puede ser importante. Por otra parte, si expresamos $x = 3.14159$ m, cuando realmente no tenemos base para saber nada más que $x = 3$ m, estamos de alguna manera tergiversando la verdad al afirmar que tenemos más información de la que realmente tenemos. La atención a las cifras significativas es importante cuando se presentan los resultados de las mediciones y de los cálculos, y tan erróneo es incluir demasiadas cifras como demasiado pocas.

Existen unas cuantas reglas sencillas a seguir para decidir cúantas cifras significativas se deben incluir:

*Regla 1* Contar desde la izquierda sin tomar en cuenta los primeros ceros, y conservar todos los números hasta el primer número dudoso. Esto es, $x = 3$ m tiene sólo una cifra significativa, y expresar este valor como $x = 0.003$ km no cambia el número de cifras significativas. Si en su lugar escribimos $x = 3.0$ m (o su equivalente, $x = 0.0030$ km), implicaríamos que conocemos el valor de $x$ hasta dos cifras significativas. En particular, ¡no conviene escribir los 9 ó 10 dígitos de la pantalla de la calculadora si ello no se justifica por la precisión de los datos de entrada! En este texto la mayoría de los cálculos están hechos con dos ó tres cifras significativas.

Téngase cuidado con las anotaciones ambiguas: $x = 300$ m no indica si existen una, dos, o tres cifras significativas; no sabemos si los ceros conllevan informa-

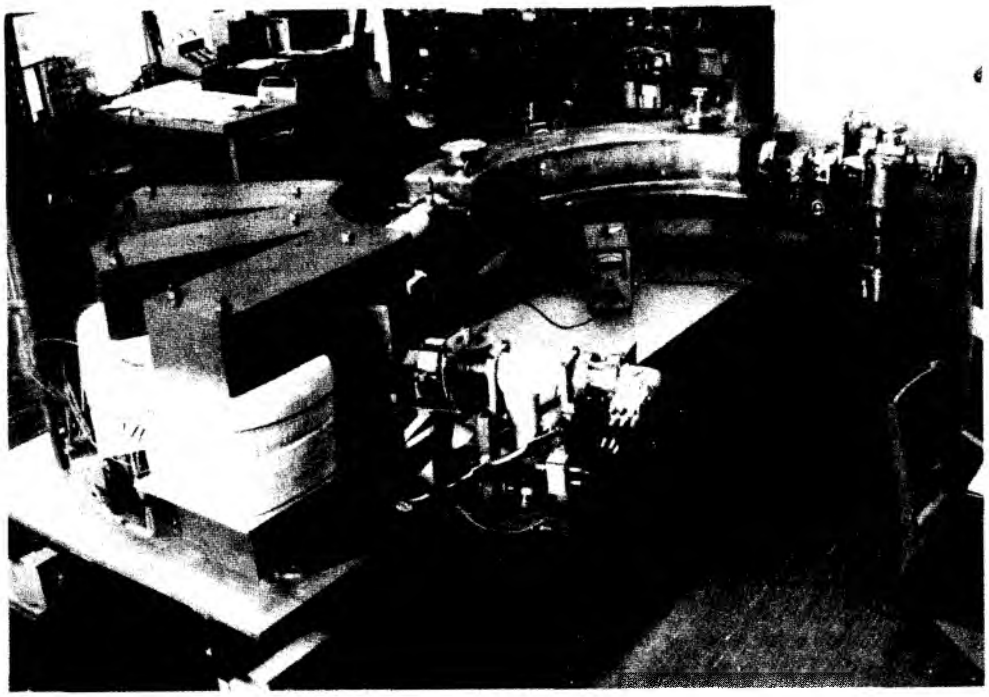


**Figura 6** Espectrómetro de masa de alta resolución, en la Universidad de Manitoba. Los instrumentos de este tipo se usan para obtener masas atómicas precisas tales como las listadas en la tabla 6. El trabajo en este laboratorio se halla respaldado por el Consejo Nacional de Investigación (National Research Council), de Canadá.

**TABLA 6** MEDIDAS DE ALGUNAS MASAS ATÓMICAS

| *Isótopo* | *Masa (u)* | *Incertidumbre (u)* |
|---|---|---|
| $^{1}H$ | 1.00782504 | 0.00000001 |
| $^{12}C$ | 12.00000000 | (exactamente) |
| $^{64}Cu$ | 63.9297656 | 0.0000017 |
| $^{102}Ag$ | 101.91195 | 0.00012 |
| $^{137}Cs$ | 136.907073 | 0.000006 |
| $^{190}Pt$ | 189.959917 | 0.000007 |
| $^{238}Pu$ | 238.0495546 | 0.0000024 |

ción o simplemente sirven como ocupantes de un lugar. En cambio, deberíamos escribir $x = 3 \times 10^2$ ó $3.0 \times 10^2$ o $3.00 \times 10^2$ para especificar la precisión con mayor claridad.

*Regla 2* Cuando se multiplica o se divide, conserve un número de cifras significativas en el producto o en el cociente no mayor al número de cifras significativas en el menos preciso de los factores. Es decir,

$$2.3 \times 3.14159 = 7.2$$

De vez en cuando, es necesario un poco de buen juicio cuando se aplica esta regla:

$$9.8 \times 1.03 = 10.1$$

porque, aun cuando 9.8 tiene técnicamente sólo dos cifras significativas, está muy cerca de ser un número con tres cifras significativas. El producto debería entonces estar expresado con tres cifras significativas.

*Regla 3* Al sumar o al restar, el dígito menos significativo de la suma o de la diferencia ocupa la misma posición relativa que el dígito menos significativo de las cantidades que son sumadas o restadas. En este caso, el *número* de cifras significativas no es importante; la *posición* es lo que importa. Por ejemplo, supongamos que queremos hallar la masa total de tres objetos como sigue:

$$\begin{array}{r} 103.\mathbf{9} \text{ kg} \\ 2.\mathbf{1}0 \text{ kg} \\ 0.\mathbf{3}19 \text{ kg} \\ \hline 106.\mathbf{3}19 \text{ ó } 106.\mathbf{3} \text{ kg} \end{array}$$

Se muestra en **negritas** el dígito menos significativo o primero en duda. Según la regla 1, deberíamos incluir solamente un dígito dudoso; así, el resultado debería expresarse como 106.3 kg, ya que si el "3" es dudoso, entonces el "19" siguiente no nos da información y resulta inútil.

**Problema muestra 3** Deseamos pesar nuestro gato, pero sólo disponemos de una báscula casera de plataforma ordinaria. Es una báscula digital, que muestra el peso en un número entero de libras. Usaremos, por lo tanto, el siguiente esquema: determinamos que nuestro propio peso es de 119 libras, y después tomamos con nosotros al gato y determinamos que nuestro peso combinado es de 128 libras. ¿Cuál es la incertidumbre fraccionaria o en porcentaje de nuestro peso y del peso del gato?

**Solución** El dígito menos significativo es el dígito de las unidades y, por lo tanto, nuestro peso tiene una incertidumbre de

una libra aproximadamente. Esto es, la báscula indicaría 119 lb para cualquier peso entre 118.5 lb y 119.5 lb. La incertidumbre fraccionaria es, por lo tanto, de

$$\frac{1\text{ lb}}{119\text{ lb}} = 0.008 \text{ ó } 0.8\%$$

El peso del gato es de 128 lb - 119 lb = 9 lb. Sin embargo, la incertidumbre en el peso del gato es todavía alrededor de 1 lb, de modo que la incertidumbre fraccionaria será de

$$\frac{1\text{ lb}}{9\text{ lb}} = 0.11 = 11\%$$

Si bien la incertidumbre *absoluta* en nuestro peso y en el peso del gato es la misma (1 lb), la incertidumbre *relativa* en nuestro peso es un orden de magnitud más pequeña que la incertidumbre relativa en el peso del gato. Si tratásemos de pesar un gatito de 1 lb por este método, la incertidumbre relativa en su peso sería del 100%. Esto ilustra un peligro que ocurre comúnmente en la resta de dos miembros que son casi iguales: la incertidumbre relativa o el porcentaje de incertidumbre en la diferencia puede ser muy grande.

## 1-7 ANÁLISIS DIMENSIONAL

Asociada con cada cantidad medida o calculada hay una *dimensión*. Por ejemplo, tanto la absorción del sonido en un recinto cerrado como la probabilidad de que ocurran reacciones nucleares tienen las dimensiones de un área. Las unidades en las que se expresan las cantidades no afectan la dimensión de las cantidades: un área sigue siendo un área, esté expresada en $m^2$ o en $pies^2$ o en acres, o en sabinos (unidad de absorción acústica), o en barns (reacciones nucleares).

De igual manera que definimos a nuestros patrones de medición anteriormente en este capítulo como cantidades fundamentales, podemos elegir un juego de dimensiones fundamentales basadas en patrones de medición independientes. En cantidades mecánicas, masa, longitud, y tiempo son elementales e independientes, así que pueden servir como dimensiones fundamentales. Están representadas respectivamente por M, L, y T.

Toda ecuación debe ser *dimensionalmente compatible*, esto es, las dimensiones en ambos lados deben ser las mismas. La atención a las dimensiones puede a menudo evitar que se cometan errores al escribir las ecuaciones. Por ejemplo, la distancia $x$ cubierta en un tiempo $t$ por un objeto que comienza desde el reposo y que al moverse, está sometido a una aceleración constante $a$, será, según demostraremos en el capítulo siguiente, $x = \frac{1}{2}at^2$. La aceleración se mide en unidades de $m/s^2$. Usamos paréntesis angulares [ ] para denotar "la dimensión de", de modo que $[x] = L$ o $[t] = T$. Se deduce que $[a] = L/T^2$ o $LT^{-2}$. Manteniendo las unidades (y, por tanto la dimensión) de la aceleración que deseamos, nunca caeremos en el error de escribir $x = \frac{1}{2}at$, o bien $x = \frac{1}{2}at^3$.

El análisis de las dimensiones puede a menudo ayudar en el trabajo con ecuaciones. Los dos ejemplos muestra siguientes ilustran este procedimiento.

**Problema muestra 4** Para mantener a un objeto que se mueve en círculo a velocidad constante se requiere una fuerza llamada "fuerza centrípeta". (El movimiento circular se estudia en el capítulo 4.) Haga un análisis dimensional de la fuerza centrípeta.

**Solución** Comencemos por preguntar "¿de cuántas variables mecánicas podría depender la fuerza centrípeta $F$?" El objeto en movimiento tiene sólo tres propiedades que son igualmente importantes: su masa $m$, su velocidad $v$, y el radio $r$ de su trayectoria circular. La fuerza centrípeta $F$ deberá darse, aparte de cualesquiera constantes sin dimensión, por una ecuación de la forma

$$F \propto m^a v^b r^c$$

donde el símbolo $\propto$ significa que "es proporcional a", y $a$, $b$ y $c$ son exponentes numéricos que deben ser determinados por el análisis de las dimensiones. Como escribimos en la sección 1-2 (y como se estudiará en el capítulo 5), la fuerza tiene unidades de $kg \cdot m/s^2$ y, por lo tanto, sus dimensiones son $[F] = MLT^{-2}$. Podemos, por lo tanto, escribir la ecuación de la fuerza centrípeta en función de sus dimensiones así:

$$[F] = [m^a]\,[v^b]\,[r^c]$$
$$MLT^{-2} = M^a\,(L/T)^b L^c$$
$$= M^a L^{b+c} T^{-b}.$$

La consistencia dimensional significa que las dimensiones fundamentales deben ser las mismas en cada lado. Así, ponemos en la ecuación los exponentes,

exponentes de M: $a = 1$;

exponentes de T: $b = 2$;

exponentes de L: $b + c = 1$, de modo que $c = -1$.

La expresión resultante es

$$F \propto \frac{mv^2}{r}.$$

La expresión real para la fuerza centrípeta, derivada de las leyes de Newton y de la geometría del movimiento circular, es $F = mv^2/r$. ¡El análisis dimensional nos da la dependencia exacta de las variables mecánicas! Esto es un acontecimiento feliz, en verdad porque el análisis dimensional no puede decirnos nada con respecto a las constantes que no tienen dimensión. En este caso sucede que la constante es 1.

**Problema muestra 5** Un hito importante en la evolución del universo, justo después de la Gran Explosión es el tiempo Planck $t_p$, cuyo valor depende de tres constantes fundamentales: (1) la velocidad de la luz (la constante fundamental de la relatividad), $c = 3.00 \times 10^8$ m/s; (2) la constante de gravitación

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECAS
MONTEVIDEO - URUGUAY



de Newton (la constante fundamental de la gravedad), $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{s}^2 \cdot \text{kg}$; y (3) la constante de Planck (la constante fundamental de la mecánica cuántica), $h = 6.63 \times 10^{-34}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$. Con base en un análisis dimensional, halle el valor del tiempo Planck.

**Solución** Usando las unidades dadas para las tres constantes, podemos obtener sus dimensiones:

$$[c] = [\text{m/s}] = \text{LT}^{-1}$$
$$[G] = [\text{m}^3/\text{s}^2 \cdot \text{kg}] = \text{L}^3\text{T}^{-2}\text{M}^{-1}$$
$$[h] = [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}] = \text{ML}^2\text{T}^{-1}$$

Hagamos que el tiempo Planck dependa de estas constantes:

$$t_P \propto c^i G^j h^k,$$

donde $i, j$ y $k$ son exponentes a determinar. Las dimensiones de esta expresión son:

$$[t_P] = [c^i]\,[G^j]\,[h^k]$$
$$\text{T} = (\text{LT}^{-1})^i\,(\text{L}^3\text{T}^{-2}\text{M}^{-1})^j\,(\text{ML}^2\text{T}^{-1})^k$$
$$= \text{L}^{i+3j+2k}\text{T}^{-i-2j-k}\text{M}^{-j+k}.$$

Igualando las potencias en ambos lados nos da

$$\text{exponentes de L:}\quad 0 = i + 3j + 2k$$
$$\text{exponentes de T:}\quad 1 = -i - 2j - k$$
$$\text{exponentes de M:}\quad 0 = -j + k$$

y resolviendo estas tres ecuaciones para las tres incógnitas, hallamos que

$$i = -\tfrac{5}{2}, \qquad j = \tfrac{1}{2}, \qquad k = \tfrac{1}{2}.$$

Así,

$$t_P \propto c^{-5/2} G^{1/2} h^{1/2}$$
$$= \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{s}^2 \cdot \text{kg})(6.63 \times 10^{-34}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})}{(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^5}}$$
$$= 1.35 \times 10^{-43}\ \text{s}.$$

Como se ha definido comúnmente, el tiempo Planck difiere de este valor por un factor de $(2\pi)^{-1/2}$. Tales factores sin dimensión no pueden hallarse por medio de esta técnica.

De manera similar, podemos determinar la longitud Planck y la masa Planck, las cuales tienen también interpretaciones muy fundamentales (véanse los problemas 41 y 42).

## PREGUNTAS

1. "Una vez que hemos adoptado un patrón, por el simple hecho de ser un 'patrón' ya es invariable. ¿Cómo criticaría usted esta aseveración?
2. Enliste otras características, además de la accesibilidad y la invariabilidad, que se consideren deseables como patrón físico.
3. ¿Puede usted imaginar un sistema de unidades básicas (tabla 1) en el que no se incluya el tiempo?
4. De las siete unidades básicas enlistadas en la tabla 1, sólo una (el kilogramo) tiene un prefijo (véase la tabla 2). ¿Sería conveniente redefinir la masa de ese cilindro de platino-iridio en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas como 1 g en lugar de 1 kg?
5. ¿Qué significa el prefijo "micro" en el concepto "horno de microondas"? Se ha propuesto que los alimentos que han sido irradiados con rayos gamma para prolongar su vida en la estantería lleven una marca que indique que han sido sometidos a picoondas. ¿Qué se supone que significa esto?
6. Muchos investigadores calificados, basándose en la evidencia, creen en la realidad de la percepción extrasensorial. Suponiendo que la PES sea realmente un hecho natural, ¿qué cantidad o cantidades físicas buscaría para definir o describir este fenómeno cuantitativamente?
7. Según el punto de vista adoptado por algunos físicos y filósofos, si no podemos describir los procedimientos para determinar una cantidad física decimos que la cantidad no es detectable y debería abandonarse por no tener una realidad física. No todos los científicos aceptan este punto de vista. En su opinión, ¿cuáles son los méritos e inconvenientes de este punto de vista?
8. Nombre varios fenómenos repetitivos que ocurren en la naturaleza y que sirvan como patrones de tiempo razonables.
9. ¿Podría definirse "1 segundo" como una pulsación del actual presidente de la Asociación Americana de Profesores de Física? Galileo usó su pulso como un dispositivo de tiempo en alguno de sus trabajos. ¿Por qué es mejor una definición basada en el reloj atómico?
10. ¿Qué criterios debe satisfacer un buen reloj?
11. Por lo que usted sabe sobre los péndulos, cite los inconvenientes de usar el periodo de un péndulo como patrón de tiempo.
12. El 30 de junio de 1981 el minuto que transcurrió entre las 10:59 y las 11:00 de la mañana fue arbitrariamente alargado para contener 61 s. El último día de 1989 fue también prolongado en 1 s. Un *segundo intercalado* así se introduce a veces para compensar el hecho de que, medida por nuestro patrón atómico de tiempo, la velocidad de rotación

de la Tierra decrece lentamente. ¿Por qué es deseable ajustar nuestros relojes de este modo?

13. Una estación de radio se anuncia "en el 89.5 de su carátula de FM". ¿Qué significa este número?
14. ¿Por qué no hay unidades básicas para área y para volumen en el sistema SI?
15. El metro fue originalmente una diezmillonésima parte de la distancia del Polo Norte al Ecuador medida sobre el meridiano que pasa por París. Esta definición no coincide con la barra del metro patrón en un 0.023%. ¿Significa esto que la barra del metro patrón es imprecisa en ese porcentaje?
16. ¿Puede la longitud medirse a lo largo de una línea curva? Si se puede, ¿cómo?
17. Cuando la barra metro fue adoptada como el patrón de longitud, se especificó su temperatura. ¿Puede ser llamada la longitud una propiedad fundamental si otra cantidad física, como es la temperatura, debe especificarse para elegir un patrón?
18. Al redefinir al metro en función de la velocidad de la luz, ¿por qué los delegados a la Conferencia General de Pesas y Medidas de 1983 no simplificaron el asunto definiendo que la velocidad de la luz es de $3 \times 10^8$ m/s exactamente? Por lo mismo, ¿por qué no definieron que es de 1 m/s exactamente? ¿Estaban abiertas para ellos ambas posibilidades de hacerlo? De ser así, ¿por qué las rechazaron?
19. Sugiera una manera de medir (*a*) el radio de la Tierra, (*b*) la distancia entre el Sol y la Tierra y (*c*) el radio del Sol.
20. Sugiera una manera de medir (*a*) el espesor de una hoja de papel, (*b*) el espesor de la pared de una burbuja de jabón y (*c*) el diámetro de un átomo.
21. Si alguien le dijera que cada dimensión de cada objeto se había contraído a la mitad de su valor original durante la noche, ¿cómo podría usted refutar tal aseveración?
22. ¿Es el patrón kilogramo de masa actual accesible, invariable, reproducible e indestructible? ¿Es sencillo para efectos de comparación? ¿Sería mejor un patrón atómico en todos los aspectos? ¿Por qué no adoptamos un patrón atómico, como lo hacemos para la longitud y el tiempo?
23. ¿Por qué hallamos útil tener dos patrones de masa, el kilogramo y el átomo de $^{12}C$?
24. Cómo obtener la relación entre las masas del kilogramo patrón y del átomo de $^{12}C$?
25. Sugiera modos prácticos por los cuales puedan ser determinadas las masas de los diversos objetos listados en la tabla 5.
26. Sugiera objetos cuyas masas entren, dentro de la amplia gama de la tabla 5, entre la de un trasatlántico y la Luna, y calcule sus masas.
27. Las críticas sobre el sistema métrico a menudo opacan su adopción diciendo cosas tales como: "En vez de comprar 1 lb de mantequilla tendrás ahora que pedir 0.454 kg de mantequilla". El argumento es que la vida será, de esta manera, más complicada. ¿Cómo podría usted rebatir esto?

## PROBLEMAS

### *Sección 1-2 El Sistema Internacional de Unidades*

1. Use los prefijos de la tabla 2 para expresar (*a*) $10^6$ teléfonos; (*b*) $10^{-6}$ teléfonos; (*c*) $10^1$ tarjetas; (*d*) $10^9$ esquilones; (*e*) $10^{12}$ toros; (*f*) $10^{-1}$ compañeros; (*g*) $10^{-2}$ pezuñas; (*h*) $10^{-9}$ Nannettes; (*i*) $10^{-12}$ rechiflas; (*j*) $10^{-18}$ muchachos; (*k*) $2 \times 10^2$ asociados; (*l*) $2 \times 10^3$ cenzontles. Ahora que ya percibió la idea, invente unas cuantas expresiones similares. (Véase la pág. 61 de *A Random Walk in Science*, compilado por R. L. Weber; Crane, Russak & Co., Nueva York, 1974.)
2. Algunos de los prefijos de las unidades SI se han infiltrado en el lenguaje cotidiano. (*a*) ¿Cuál es el equivalente semanal de un salario anual de 36K (= 36 k$)? (*b*) Una lotería ofrece 10 megadólares como premio mayor, pagadero durante 20 años. ¿Por cuánto es el cheque recibido cada mes? (*c*) El disco duro de una computadora tiene una capacidad de 30 MB (= 30 megabytes o millones de caracteres). A razón de 8 caracteres/palabra, ¿cuántas palabras puede almacenar? En términos de computación, *kilo* significa 1024 ($= 2^{10}$), no 1000.

### *Sección 1-3 El patrón de tiempo*

3. Enrico Fermi dijo una vez que el periodo de una clase estándar (50 min) es de cerca de 1 microcenturia. ¿Qué tan larga es una microcenturia en minutos, y cuál es la diferencia porcentual con la aproximación de Fermi?
4. Nueva York dista de Los Angeles aproximadamente 3000 mi; la diferencia de tiempo entre estas dos ciudades es de 3 h. Calcule la circunferencia de la Tierra.
5. Una sustitución conveniente del número de segundos en un año es $\pi \times 10^7$. Dentro de qué porcentaje de error es esto correcto?
6. Poco después de la Revolución Francesa y como parte de la introdución del sistema métrico, la Convención Nacional Revolucionaria hizo un intento por introducir el tiempo decimal. En este plan, que no tuvo éxito, el día (comenzando a la media noche) se dividió en 10 horas decimales que constaban de 100 minutos decimales cada una. Las manecillas de un reloj decimal de bolsillo que aún se conserva están detenidas en 8 horas decimales, 22.8 minutos decimales. ¿Qué hora es? Véase la figura 7.

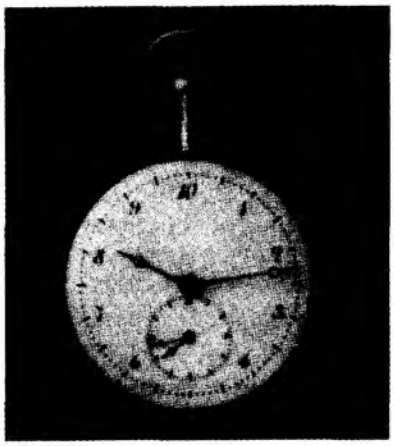


**Figura 7** Problema 6.

7. (*a*) Una unidad de tiempo a veces usada en la física microscópica es el *trémolo*. Un trémolo es igual a $10^{-8}$ s. ¿Hay más trémolos en un segundo que segundos en un año? (*b*) El ser humano ha existido desde hace $10^6$ años, mientras que el universo tiene una edad de $10^{10}$ años aproximadamente. Si la edad del universo fuera de 1 día, ¿cuántos segundos de existencia tendría el ser humano?
8. En dos carriles *diferentes*, los ganadores de la carrera de una milla hicieron un tiempo de 3 min 58.05 s y 3 min 58.20 s, respectivamente. Con objeto de concluir que el corredor con el tiempo más corto fue realmente más rápido, ¿cuál es el error máximo tolerable, en pies, al determinar las distancias?
9. Un cierto reloj de péndulo (con una carátula de 12 h) se adelanta 1 min/día. Después de poner el reloj en la hora correcta, cuánto tiempo debemos esperar hasta que indique nuevamente la hora correcta?
10. En un laboratorio están siendo probados cinco relojes. Exactamente al mediodía, determinado por la señal de tiempo de la WWV, en los días sucesivos de una semana los relojes indican lo que se muestra en la tabla inferior.

    ¿Cómo podrían disponerse estos cinco relojes en el orden de su valor relativo como buenos cronómetros? Justifique la elección.
11. La edad del universo es de alrededor de $5 \times 10^{17}$ s; la pulsación de luz más corta producida en un laboratorio (1990) duró sólo $6 \times 10^{-15}$ s (véase la tabla 3). Identifique un intervalo de tiempo físicamente significativo de aproximadamente la mitad de estos dos tiempos en una escala logarítmica.
12. Suponiendo que la longitud del día crezca uniformemente 0.001 s en un siglo, calcule el efecto acumulativo sobre la medición del tiempo en 20 siglos. Tal disminución de la rotación de la Tierra está indicada por observaciones de la frecuencia que ocurren los eclipses solares durante este periodo.
13. El tiempo que tarda la Luna en regresar a una posición determinada según se observa contra el fondo de las estrellas fijas, 27.3 días, se llama *mes sideral*. El intervalo de tiempo entre fases idénticas de la Luna se llama *mes lunar*. El mes lunar es más largo que el mes sideral. ¿Por qué y por cuánto?

### *Sección 1-4 El patrón de longitud*

14. Un muchacho francés, Pierre, que se cartea con otro muchacho de Estados Unidos, John, escribe a éste diciendo que mide 1.9 m de altura. ¿Cuál es su altura en unidades inglesas?
15. (*a*) En las pistas de carreras se usan tanto 100 yardas como 100 metros como distancias para carreras cortas y rápidas. Cuál es más larga? ¿Por cuántos metros es más larga? ¿Por cuántos pies? (*b*) ¿Se mantienen registros de pista y campo para la milla y para la llamada milla métrica (1500 metros). Compare estas distancias.
16. La estabilidad del reloj de cesio usado como un patrón atómico del tiempo es tal que dos relojes de cesio adelantarán o atrasarán 1 s uno con respecto al otro en alrededor de 300,000 años. Si esta misma precisión fuera aplicada a la distancia entre Nueva York y San Francisco (2572 mi), ¿en cuánto se diferenciarían las mediciones sucesivas de esta distancia?
17. La Antártida tiene una forma casi semicircular con un radio de 2000 km. El espesor promedio de la capa de hielo es de 3000 m. ¿Cuántos centímetros cúbicos de hielo contiene la Antártida? (Desprecie la curvatura de la Tierra.)
18. Una unidad de área, a menudo usada al expresar áreas de terreno, es la *hectárea*, que se define como $10^4$ m$^2$. Una mina de carbón a cielo abierto consume 77 hectáreas de terreno con una profundidad de 26 m cada año. ¿Qué volumen de tierra, en kilómetros cúbicos, es retirada en este tiempo?
19. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio $6.37 \times 10$ m$^6$. (*a*) ¿Cuál es su circunferencia en kilómetros? (*b*) ¿Cuál es su área superficial en kilómetros cuadrados? (*c*) ¿Cuál es su volumen en kilómetros cúbicos?
20. A continuación se dan las velocidades máximas aproximadas de varios animales, pero en unidades de velocidad diferentes. Convierta estos datos a m/s, y después dispon-

| *Reloj* | *Dom.* | *Lun.* | *Mar.* | *Miér.* | *Jue.* | *Vie.* | *Sáb.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 12:36:40 | 12:36:56 | 12:37:12 | 12:37:27 | 12:37:44 | 12:37:59 | 12:38:14 |
| B | 11:59:59 | 12:00:02 | 11:59:57 | 12:00:07 | 12:00:02 | 11:59:56 | 12:00:03 |
| C | 15:50:45 | 15:51:43 | 15:52:41 | 15:53:39 | 15:54:37 | 15:55:35 | 15:56:33 |
| D | 12:03:59 | 12:02:52 | 12:01:45 | 12:00:38 | 11:59:31 | 11:58:24 | 11:57:17 |
| E | 12:03:59 | 12:02:49 | 12:01:54 | 12:01:52 | 12:01:32 | 12:01:22 | 12:01:12 |

ga a los animales en orden creciente de su velocidad máxima: la ardilla, 19 km/h; el conejo, 30 nudos; el caracol, 0.030 mi/h; la araña, 1.8 pies/s; el leopardo, 1.9 km/min; un ser humano, 1000 cm/s; el zorro, 1100 m/min; el león, 1900 km/día.

21. Cierto vehículo espacial tiene una velocidad de 19,200 mi/h. ¿Cuál es su velocidad en años-luz por siglo?
22. Un automóvil nuevo está equipado con un tablero de instrumentos de "tiempo real" que incluye el consumo de combustible. Un interruptor permite al conductor cambiar a voluntad entre unidades británicas y unidades SI. Sin embargo, la representación británica muestra mi/gal mientras que la versión SI lo hace a la inversa, L/km. ¿Qué lectura SI corresponde a 30.0 mi/gal?
23. Las distancias astronómicas son tan grandes comparadas con las terrestres que se emplean unidades de longitud mucho mayores para facilitar la comprensión de las distancias relativas de los objetos astronómicos. Una *unidad astronómica* (UA) es igual a la distancia promedio de la Tierra al Sol, $1.50 \times 10^8$ km. Un *parsec* (pc) es la distancia a la cual 1 UA subtendería un ángulo de 1 segundo de arco. Un *año-luz* (al) es la distancia que la luz cubriría en 1 año, viajando a través del vacío a una velocidad de $3.00 \times 10^5$ km/s. (*a*) Exprese la distancia de la Tierra al Sol en parsecs y en años-luz. (*b*) Exprese un año-luz y un parsec en kilómetros. Aunque el año-luz se usa mucho en la escritura popular, el parsec es la unidad usada profesionalmente por los astrónomos.
24. El radio efectivo de un protón es de alrededor $1 \times 10^{-15}$ m; el radio del universo observable (dado por la distancia al cuásar observable más lejano) es de $2 \times 10^{26}$ (véase la tabla 4). Identifique una distancia físicamente significativa que sea aproximadamente la mitad entre estos dos extremos en una escala logarítmica.
25. La distancia promedio entre el Sol y la Tierra es de 390 veces la distancia promedio entre la Luna y la Tierra. Consideremos ahora un eclipse total de Sol (la Luna entre la Tierra y el Sol; véase la figura 8) y calcule (*a*) la relación entre los diámetros del Sol y de la Luna, y (*b*) la razón entre los volúmenes del Sol y de la Luna. (*c*) El ángulo interceptado en el ojo por la Luna es de 0.52° y la distancia entre la Tierra y la Luna es de $3.82 \times 10^5$ km. Calcule el díametro de la Luna.

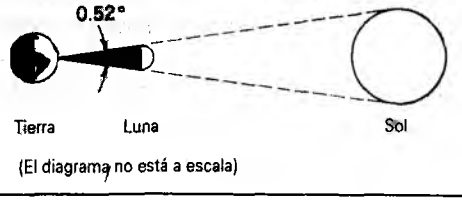



**Figura 8** Problema 25.

26. El navegante del buque petrolero *Exxon Valdez* usa los satélites del Sistema de ubicación global (GPS/NAVSTAR) para hallar la latitud y la longitud (véase la figura 9). Éstas son de 43° 36'25.3" N y 77° 31'48.2" W. Si la precisión de estas determinaciones es de ±0.5", ¿cuál es la incertidumbre en la posición del petrolero medida a lo largo de (*a*) una línea norte-sur (meridiano de longitud) y (*b*) una línea este-oeste (paralelo de latitud)? (*c*) ¿Dónde está el petrolero?

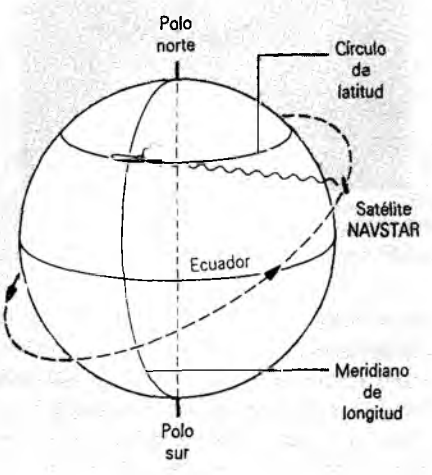



**Figura 9** Problema 26.

### *Sección 1-5 El patrón de masa*

27. Usando las conversiones y los datos que aparecen en el capítulo, determine el número de átomos de hidrógeno necesario para obtener 1.00 kg de hidrógeno.
28. Una molécula de agua ($H_2O$) contiene dos átomos de hidrógeno y un átomo de oxígeno. Un átomo de hidrógeno tiene una masa de 1.0 u y un átomo de oxígeno tiene una masa de 16 u. (*a*) ¿Cuál es la masa en kilogramos de una molécula de agua? (*b*) ¿Cuántas moléculas de agua hay en los océanos del mundo? Los océanos tienen una masa total de $1.4 \times 10^{21}$ kg.
29. En el continente europeo una "libra" es medio kilogramo. ¿Cuál es mejor compra, una libra de café en París por $3.00, o una libra de café en Nueva York por $2.40?
30. Una sala tiene las dimensiones 21 ft × 13 ft × 12 ft. ¿Cuál es la masa de aire que contiene? La densidad del aire a la temperatura ambiente y la presión atmosférica normal es de 1.21 kg/m$^3$.
31. La longitud del borde de un terrón de azúcar típico es de 1 cm. Si usted tuviera una caja cúbica conteniendo 1 mol de cubos de azúcar, ¿cuál sería la longitud de su borde?
32. Una persona sometida a dieta pierde 2.3 kg (correspondientes a unas 5 lb) por semana. Exprese la tasa de pérdida de masa en miligramos por segundo.
33. Supongamos que nos toma 12 h drenar un recipiente con 5700 m$^3$ de agua. ¿Cuál es la tasa del flujo de masa (en kg/s) de agua del recipiente? La densidad del agua es de 1000 kg/m$^3$.
34. Los granos de arena fina de una playa de California tienen un radio promedio de 50 μm. ¿Qué masa de arena tendría

un área total de su superficie igual al área de la superficie de un cubo que tenga exactamente 1 m de arista? La arena es un bióxido de silicio, 1 $m^3$ de la cual tiene una masa de 2600 kg.

**35.** El kilogramo patrón (véase la figura 5) tiene la forma de un cilindro circular con su altura igual a su diámetro. Demuestre que, en un cilindro circular del volumen fijado, esta igualdad da el área superficial más pequeña, haciendo así mínimos los efectos de la *contaminación* y el *desgaste* de la superficie.

**36.** La distancia entre átomos vecinos, o entre moléculas, de una sustancia sólida puede ser estimada calculando al doble el radio de una esfera con un volumen igual al volumen por átomo del material. Calcule la distancia entre átomos vecinos en (*a*) el hierro, y (*b*) el sodio. Las densidades del hierro y del sodio son de 7870 kg/$m^3$ y 1013 kg/$m^3$, respectivamente; la masa de un átomo de hierro es de $9.27 \times 10^{-26}$ kg, y la masa de un átomo de sodio es de $3.82 \times 10^{-26}$ kg.

### *Sección 1-6 Precisión y cifras significativas*

37. En el periodo 1960-1983, se definió que el metro tenía 1,650,763.73 longitudes de onda de una cierta luz anaranjada emitida por átomos de criptón. Calcule la distancia en nanómetros que corresponde a una longitud de onda. Exprese el resultado usando el número apropiado de cifras significativas.

**38.** (*a*) Evalúe 37.76 + 0.132 con el número correcto de cifras significativas. (*b*) Evalúe 16.264 - 16.26325 con el número correcto de cifras significativas.

**39.** Una placa rectangular de metal tiene una longitud de 8.43 cm y una anchura de 5.12 cm. Calcule el área de la placa con el número correcto de cifras significativas. (*b*) Una placa circular de metal tiene un radio de 3.7 cm. Calcule el área de la placa con el número correcto de cifras significativas.

### *Sección 1-7 Análisis dimensional*

**40.** La roca porosa a través de la cual se mueve el agua subterránea es llamada manto acuífero. El volumen $V$ de agua que, en un tiempo $t$, se mueve a través de un área $A$ de la sección transversal del manto acuífero está dado por

$$\frac{V}{t} = KA\frac{H}{L},$$

donde $H$ es el declive del manto acuífero a lo largo de la distancia horizontal $L$ (véase la figura 10). Esta relación se llama ley de Darcy. La cantidad $K$ es la conductividad hidráulica del manto acuífero. ¿Cuáles son las unidades SI de $K$?

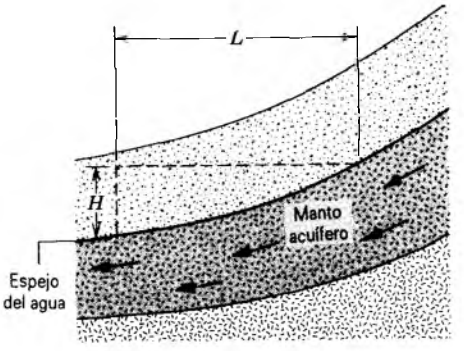



**Figura 10** Problema 40

**41.** En el problema muestra 5, las constantes $h$, $G$, y $c$ fueron combinadas para obtener una cantidad de las dimensiones de tiempo. Repita la derivación para obtener una cantidad con las dimensiones de longitud, y evalúe el resultado numéricamente. No tome en cuenta ninguna constantes sin dimensión. Ésta es la *longitud Planck*, es decir, el tamaño del universo observable en el tiempo Planck.

**42.** Repita el procedimiento del problema 41 para obtener una cantidad con las dimensiones de masa. Esto da la *masa Planck*, es decir, la masa del universo observable en el tiempo Planck.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

054353

# CAPÍTULO 2

# MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL

*La mecánica, la más antigua de las ciencias físicas, es el estudio del movimiento de los objetos. El cálculo de la trayectoria de una bola de béisbol o de una sonda espacial enviada a Marte figuran entre los problemas de los que se ocupa, así como el análisis de la trayectoria de las partículas elementales que se forman en las colisiones en nuestros grandes aceleradores. Cuando* describimos *el movimiento, estamos tratando la parte de la mecánica llamada* cinemática *(del griego kinema, que significa movimiento, y de donde viene también "cinema"). Cuando analizamos las* causas *del movimiento entramos en el terreno de la* dinámica *(de la palabra griega dynamis, fuerza, como en "dinamita"). En este capítulo, trataremos únicamente de la cinemática en una dimensión. Los dos capítulos siguientes extienden estos resultados a dos y a tres dimensiones, y en el capítulo 5 iniciaremos el estudio de la dinámica.*

## 2-1 CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

Para iniciar nuestro estudio de la cinemática, elegimos un caso simple: una partícula que se mueve en línea recta. Elegimos el movimiento en línea recta porque nos permite introducir algunos de los conceptos básicos de la cinemática, tales como velocidad y aceleración, sin la complejidad matemática de los vectores, los cuales se usan con frecuencia para analizar el movimiento bidimensional y tridimensional. Sin embargo, dentro de esta limitación, podemos considerar una amplia gama de situaciones físicas: la caída de una piedra, la aceleración de un tren, el frenado de un automóvil, el deslizamiento de un disco de goma en el hockey sobre hielo, el traslado de una caja en una rampa, el movimiento rápido de un electrón dentro de un tubo de rayos X, etc. El estado del movimiento puede cambiar (el disco de goma usado en el hockey sobre hielo debe ser golpeado antes de que se deslice) y su dirección puede cambiar (la piedra puede ser arrojada hacia arriba antes de que caiga), pero el movimiento debe ser confinado a una simple línea.

También simplificaremos esta exposición considerando el movimiento de una *partícula* únicamente. Esto es, trataremos a un objeto complejo como si fuera un simple punto de masa. Esto nos permite despreciar todos los movimientos internos posibles, por ejemplo, el movimiento de rotación del objeto (el cual consideraremos en los capítulos 11 a 13) o la vibración de sus partes (capítulo 15). Para el caso que nos ocupa, todas las partes del objeto se mueven exactamente de la misma manera. El giro de una rueda no satisface esta restricción, porque un punto de la llanta se mueve de un modo diferente a un punto del eje. (El *deslizamiento* de la rueda, en cambio, sí la satisface. Entonces la rueda, lo mismo que otros objetos materiales, podría ser considerada como una partícula en ciertos cálculos pero no en otros.) En tanto que nos conciernan solamente las variables cinemáticas, no existe razón para no considerar sobre la misma base la marcha de un tren que la de un electrón como ejemplos del movimiento de una *partícula*.

Dentro de estas limitaciones, consideraremos todas las clases de movimiento posibles. Las partículas pueden acelerar, decelerar, e incluso detener e invertir su movimiento. Buscaremos una descripción del movimiento que incluya cualquiera de estas posibilidades.

## 2-2 DESCRIPCIONES DEL MOVIMIENTO

Describiremos el movimiento de una partícula de dos maneras: con ecuaciones matemáticas y con gráficas. Cualquier manera es apropiada para el estudio de la cine-

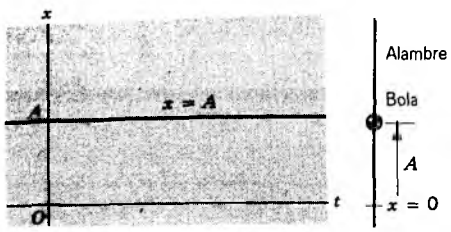



**Figura 1** Una bola perforada se desliza libremente a lo largo de un alambre en una dimensión; la dirección del movimiento es arbitraria y no necesariamente vertical. En este caso la bola está en reposo en el punto $A$ de la coordenada $x$, y su "movimiento" se halla descrito por la línea recta horizontal $x = A$.

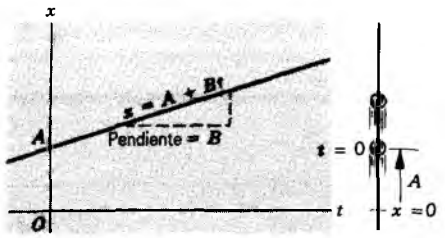



**Figura 2** Una bola que se desliza a lo largo de un alambre en una dimensión se mueve a velocidad constante $B$ en la dirección positiva $x$; comienza en el tiempo 0 en el punto $A$ sobre la coordenada $x$. Su movimiento está descrito por la línea $x = A + Bt$.

mática, y comenzaremos usando ambos métodos. El enfoque matemático es usualmente mejor para resolver problemas, porque permite más precisión que el método gráfico. El método gráfico es útil porque a menudo provee más introspección física que un grupo de ecuaciones matemáticas.

Puede obtenerse una descripción completa del movimiento de una partícula si conocemos la dependencia matemática de su posición $x$ (relativa a un origen elegido de un marco de referencia en particular) en el tiempo $t$ en todo momento. Ésta es precisamente la función $x(t)$. Aquí presentamos algunas clases de movimiento posibles junto con las funciones y las gráficas que las describen:

**1.** *Ningún movimiento en absoluto.* Aquí la partícula ocupa la posición $A$ en la coordenada en todo momento:

$$x(t) = A. \tag{1}$$

En la figura 1 se presenta una gráfica de este "movimiento". Para el objeto de estas ilustraciones, imaginemos la partícula descrita por la gráfica como una bolita perforada que se desliza sin fricción por un alambre largo. En este caso la bolita está en reposo en la ubicación $x = A$. Nótese que hemos trazado la gráfica con $x$ como la variable dependiente (sobre el eje vertical) y $t$ como la variable independiente (sobre el eje horizontal).

**2.** *Movimiento a velocidad constante.* La razón de movimiento de una partícula se describe por su *velocidad*. En el movimiento unidimensional, la velocidad puede ser o bien positiva, si la partícula se mueve en la dirección en que $x$ crece, o bien negativa, si se mueve en la dirección opuesta. Otra medida de la razón de movimiento de una partícula es la magnitud de la velocidad de la partícula. La magnitud de la velocidad es siempre positiva y no conlleva una información direccional.

En el caso del movimiento a velocidad constante, la posición de trazado en la gráfica contra el tiempo es una línea recta con una pendiente constante. En cálculo aprendimos que la *pendiente* de cualquier función nos habla de su *cantidad de cambio*. Aquí la cantidad de cambio de la posición es la velocidad, y cuanto más acentuada sea la pendiente de la gráfica, mayor será la velocidad. Matemáticamente, tenemos que

$$x(t) = A + Bt, \tag{2}$$

que es la forma acostumbrada de la expresión de una línea recta (más comúnmente expresada como $y = mx + b$) de pendiente $B$.

La ilustración gráfica de la figura 2 muestra a la partícula en la posición $x = A$ en el tiempo $t = 0$. Se está moviendo con rapidez constante en la dirección creciente de $x$. Su velocidad es, entonces, positiva, como lo indica la pendiente positiva.

**3.** *Movimiento acelerado.* En este caso la velocidad está cambiando (la aceleración se define como la razón de cambio de la velocidad), y por lo tanto la pendiente cambiará también. Estas gráficas son, entonces líneas curvas más bien que rectas. Dos ejemplos son:

$$x(t) = A + Bt + Ct^2, \tag{3}$$

$$x(t) = A \cos \omega t. \tag{4}$$

En el primer caso, suponiendo que $C > 0$, la pendiente aumenta en forma continua al moverse la partícula más y más rápidamente (Fig. 3a). En el segundo caso, la partícula oscila entre $x = +A$ y $x = -A$ (Fig. 3b), y su velocidad cambia de la posición positiva a la negativa al cambiar de signo la pendiente.

A menudo, las descripciones completas del movimiento son más complejas que las ilustraciones sencillas que hemos llevado a cabo. Aquí se citan algunos ejemplos:

**4.** *Aceleración y frenado en un automóvil.* Un automóvil parte del reposo y acelera hasta determinada veloci-

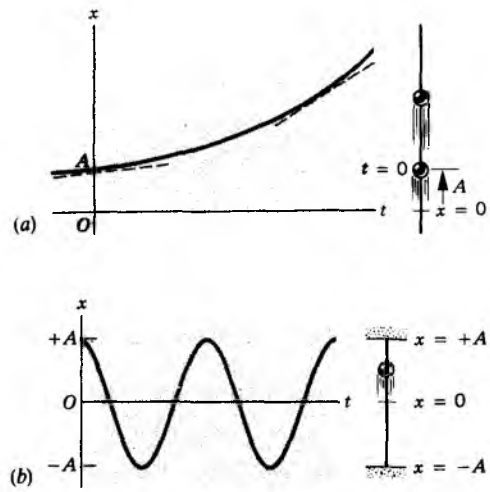



**Figura 3** (*a*) Una bola deslizándose a lo largo de un alambre unidimensionalmente se mueve en la dirección positiva $x$ a una velocidad constantemente creciente. La velocidad es igual a la pendiente de la curva que describe el movimiento de la partícula; se puede ver cómo la pendiente de la curva crece en forma continua. (*b*) Una bola deslizándose a lo largo de un alambre unidimensionalmente oscila entre $x = +A$ y $x = -A$.

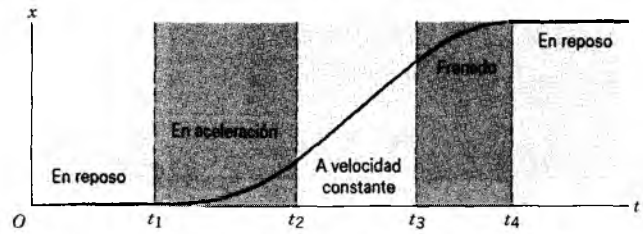



**Figura 4** La curva describe a un automóvil que está en reposo desde $t = 0$ hasta $t = t_1$, en cuyo tiempo comienza a acelerar. En $t = t_2$ para de acelerar y comienza a moverse a velocidad constante. Los frenos actúan en el tiempo $t = t_3$, y la velocidad decrece gradualmente hasta que llega a 0 en el tiempo $t = t_4$.

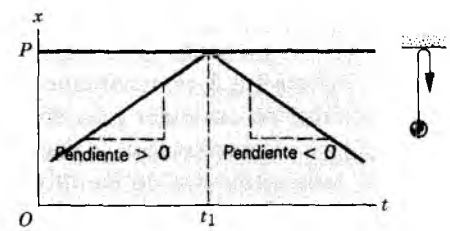



**Figura 5** Un disco de goma de hockey se mueve sobre el hielo a velocidad constante cuando choca con una pared rígida en $x = P$ en el tiempo $t_1$, después de lo cual se aleja de la pared a una velocidad igual en magnitud pero opuesta en dirección. El movimiento del disco de goma se da unidimensionalmente. Para un objeto en rebote real, el punto agudo en $x(t)$ estaría ligeramente redondeado.

dad. Luego se mueve durante un tiempo a velocidad constante, después del cual se aplican los frenos, trayendo al automóvil de nuevo al reposo. La figura 4 muestra el movimiento. Ninguna ecuación matemática única describe el movimiento; podríamos usar expresiones de la forma de la ecuación 1 para las partes del movimiento en reposo, y una expresión de la forma de la ecuación 3 para la parte de la aceleración; una de la forma de la ecuación 2 para la parte con velocidad constante y, finalmente, otra, también de la forma de la ecuación 3, para la parte de frenado.

Nótese que la gráfica tiene dos características: $(x)t$ es continua (la gráfica no se rompe) y la pendiente es continua (no hay puntos agudos). Esperamos que $x(t)$ sea siempre continua, de otro modo el automóvil desaparecería en un punto y reaparecería en otro. Los picos de la gráfica, como veremos más tarde, significan que la velocidad cambia *instantáneamente* de un valor a otro. Esto, por supuesto, no es una situación completamente física, pero a menudo es una buena aproximación a tal situación.

**5.** *Rebote de un disco de goma.* Un disco de goma de los que se usan en el hockey se desliza en el hielo a velocidad constante, choca con la pared, y luego rebota en la dirección opuesta con la misma velocidad. La figura 5 muestra el movimiento donde se supone que el choque invierte instantáneamente al movimiento. En realidad, si examinamos con cuidado el "punto", hallaremos que no es agudo sino ligeramente redondeado, a consecuencia de la elasticidad de la pared y del disco de goma.

**6.** *Una bola pegajosa de arcilla.* Un estudiante arroja hacia arriba una bola de arcilla; el punto de liberación está sobre la cabeza del estudiante. La bola se eleva a cierta altura, luego cae y se pega al piso. La figura 6 describe el movimiento. La pendiente en $t = 0$ representa la velocidad inicial con la cual fue arrojada la arcilla hacia arriba. La velocidad pasa a través de cero en la parte superior de la trayectoria (donde la pendiente es cero), y luego la arcilla se mueve hacia abajo a velocidad creciente. Cuando toca el suelo, súbitamente llega al reposo y su velocidad es cero.

Recuérdese que las gráficas mostradas en esta sección son representaciones del movimiento, no trazos de las trayectorias reales seguidas por las partículas. En la figura 6, por ejemplo, la partícula se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la misma línea; no sigue la trayectoria curva que se muestra en la figura.

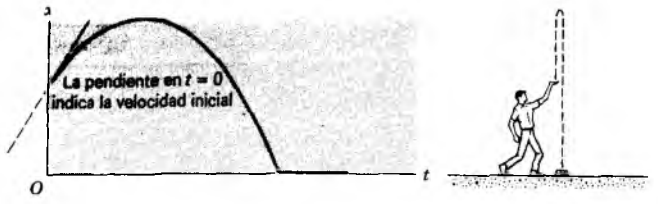



**Figura 6.** Una bola de arcilla es arrojada hacia arriba, se eleva a cierta altura, y luego cae al suelo. Al chocar con el suelo queda en reposo. La curva describe su movimiento. En realidad, el punto abrupto en $x(t)$ estaría ligeramente redondeado.

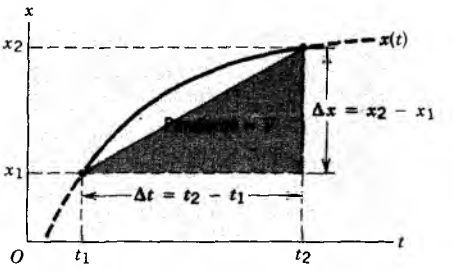



**Figura 7** La velocidad promedio en el intervalo $\Delta t$ entre $t_1$ y $t_2$ se determina por el desplazamiento $\Delta x$ durante el intervalo; la forma real de la curva $x(t)$ en el intervalo no es de consecuencia en la determinación de la velocidad promedio.

## 2-3 VELOCIDAD PROMEDIO

Si el movimiento de una partícula estuviera descrito por gráficas como las figuras 1 ó 2, no tendríamos problema en obtener la velocidad en cualquier intervalo de tiempo: es constante e igual a la pendiente de la línea. En casos más complicados, tales como los de las figuras 3 a 6, donde la velocidad cambia, es conveniente definir la *velocidad media* o *velocidad promedio* $\bar{v}$. (Una barra sobre el símbolo en *cualquier* cantidad física indica un valor promedio de esa cantidad.)

Supongamos, como se indica en la figura 7, que la partícula está en un punto $x_1$ en el tiempo $t_1$ y luego se mueve hasta el punto $x_2$ en el tiempo $t_2$. La velocidad promedio en el intervalo se define así:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \tag{5}$$

donde

$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{6}$$

y

$$\Delta t = t_2 - t_1. \tag{7}$$

Aquí $\Delta x$ es el *desplazamiento* (esto es, el cambio de posición) que ocurre durante el *intervalo de tiempo* $\Delta t$. En la figura 7 puede verse que $\bar{v}$ es simplemente la pendiente de la línea recta que conecta a los puntos extremos del intervalo.

La velocidad promedio nos proporciona el comportamiento promedio durante el intervalo de tiempo $\Delta t$. *El comportamiento real entre $x_1$ y $x_2$ no interesa para el cálculo de la velocidad promedio.* Cualquier detalle del movimiento particular entre $x_1$ y $x_2$ se pierde cuando tomamos el promedio.

Si suponemos que nuestros relojes están siempre marchando hacia adelante ($t_2 > t_1$), entonces el signo de $\bar{v}$ está determinado por el signo de $\Delta x = x_2 - x_1$. Si $\bar{v}$ es positiva, entonces, en promedio, la partícula se mueve de modo que $x$ aumenta con el tiempo. (Puede moverse hacia atrás un tanto en el intervalo, pero acaba con una coordenada $x$ más grande que cuando comenzó.) Si $\bar{v}$ es negativa, entonces, en promedio, la partícula se mueve hacia atrás. En particular, nótese que de acuerdo con esta definición de $v$, la velocidad promedio es cero en cualquier viaje en el que se retorne al punto de partida, no importa qué tan rápido se haya podido mover en cualquier segmento en particular, porque el desplazamiento será cero. En el conteo del tiempo desde la línea de arranque hasta la meta, la velocidad promedio de un corredor de Indianápolis 500 ¡es cero!

**Problema muestra 1** Usted maneja su BMW por una carretera recta durante 5.2 mi a 43 mi/h, en cuyo punto se queda sin gasolina. Camina 1.2 millas hacia adelante, hasta la estación de gasolina más próxima, durante 27 min. ¿Cuál fue la velocidad promedio desde el momento en que arrancó con su automóvil hasta el momento en que llegó a la estación de gasolina?

**Solución.** Se puede hallar la velocidad promedio por la ecuación 5 si se conocen tanto $\Delta x$, la distancia neta que fue cubierta (el desplazamiento), como $\Delta t$, el tiempo transcurrido correspondiente. Estas cantidades son:

$$\Delta x = 5.2 \text{ mi} + 1.2 \text{ mi} = 6.4 \text{ mi}$$

y

$$\Delta t = \frac{5.2 \text{ mi}}{43 \text{ mi/h}} + 27 \text{ min}$$
$$= 7.3 \text{ min} + 27 \text{ min} = 34 \text{ min} = 0.57 \text{ h}.$$

Entonces, según la ecuación 5 tendremos que

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6.4 \text{ mi}}{0.57 \text{ h}} = 11.2 \text{ mi/h}.$$

La gráfica de $x(t)$ de la figura 8 ayuda a visualizar el problema. Los puntos $O$ y $P$ definen el intervalo en el que queremos hallar la velocidad promedio, siendo esta cantidad la pendiente de la línea recta que une a estos puntos.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACIÓN Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



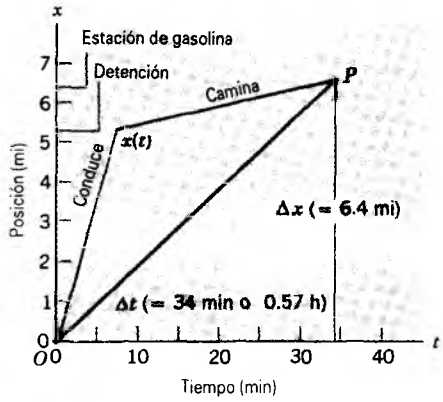



**Figura 8** Problema muestra 1. Las líneas de "conduce" y "camina" muestran movimientos a velocidades constantes diferentes en las dos porciones del viaje. La velocidad promedio es la pendiente de la línea *OP*.

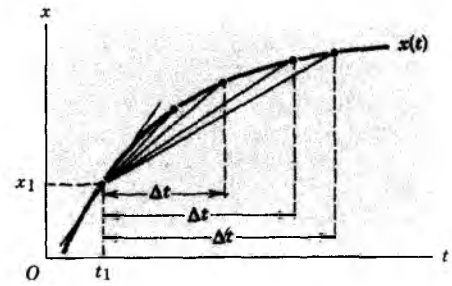



**Figura 9** El intervalo $\Delta t$ crece menos en este caso ya que mantenemos a $t_1$ fijo y nos movemos al otro punto extremo $t_2$ más cercano a $t_1$. En el límite, el intervalo tiende a cero y la cuerda se vuelve una tangente.

## 2-4 VELOCIDAD INSTANTÁNEA

La velocidad promedio puede ser útil al considerar el comportamiento total de una partícula durante cierto intervalo, pero para describir los *detalles* de su movimiento la velocidad promedio no es particularmente útil. Sería más apropiado obtener una función matemática $v(t)$, la cual da la velocidad en cualquier punto durante el movimiento. Ésta es la *velocidad instantánea*; de ahora en adelante, cuando usemos el término "velocidad" entenderemos que significa velocidad instantánea.

Supongamos que tratamos de calcular la velocidad promedio, como se muestra en la figura 9, cuando el intervalo $\Delta t$ se vuelve cada vez más pequeño. En este caso límite, en que $\Delta t \to 0$, la línea que une a los puntos extremos del intervalo se aproxima a la tangente de la curva $x(t)$ en un punto, y la velocidad promedio se aproxima a la pendiente de $x(t)$, la cual define la velocidad instantánea en ese punto:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{8}$$

El lado derecho de la ecuación 8 está en la forma de la *derivada* de $x(t)$ con respecto a $t$, o sea $dx/dt$. Entonces

$$v = \frac{dx}{dt}. \tag{9}$$

La velocidad (instantánea) es precisamente la cantidad del cambio de posición con el tiempo.

La tabla 1 ofrece un ejemplo de cómo converge el proceso límite hacia el valor instantáneo. Los datos de la tabla 1 se calcularon usando $x(t) = 3.000 + 1.000t + 2.000t^2$, estando $t$ en segundos y $x$ en metros. Hemos elegido mantener al punto $(t_1, x_1)$ fijo y mover el punto $(t_1, x_1)$ gradualmente hacia $(t_1, x_1)$ para simular el proceso límite. El límite parece tender al valor $v = 5.0$ m/s en $t_1 = 1.0$ s; diferenciando la expresión de arriba para $x(t)$, hallaremos la expresión de la velocidad instantánea:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3.000 + 1.000t + 2.000t^2)$$
$$= 0 + 1.000 + 2(2.000t) = 1.000 + 4.000t,$$

la cual verdaderamente da el valor de 5.000 m/s para $t = 1.000$ s. Claramente, el valor promedio converge hacia el valor instantáneo según se vuelve más pequeño el intervalo.

**TABLA 1** EL PROCESO LÍMITE

| *Punto inicial* | | *Punto final* | | *Intervalos* | | *Velocidad promedio* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$(m) | $t_1$(s) | $x_2$(m) | $t_2$(s) | $\Delta x$(m) | $\Delta t$(s) | (m/s) |
| 6.000 | 1.000 | 13.000 | 2.000 | 7.000 | 1.000 | 7.00 |
| 6.000 | 1.000 | 9.000 | 1.500 | 3.000 | 0.500 | 6.00 |
| 6.000 | 1.000 | 8.320 | 1.400 | 2.320 | 0.400 | 5.80 |
| 6.000 | 1.000 | 7.375 | 1.250 | 1.375 | 0.250 | 5.50 |
| 6.000 | 1.000 | 7.080 | 1.200 | 1.080 | 0.200 | 5.40 |
| 6.000 | 1.000 | 6.520 | 1.100 | 0.520 | 0.100 | 5.20 |
| 6.000 | 1.000 | 6.255 | 1.050 | 0.255 | 0.050 | 5.1 |
| 6.000 | 1.000 | 6.152 | 1.030 | 0.152 | 0.030 | 5.1 |
| 6.000 | 1.000 | 6.050 | 1.010 | 0.050 | 0.010 | 5.0 |

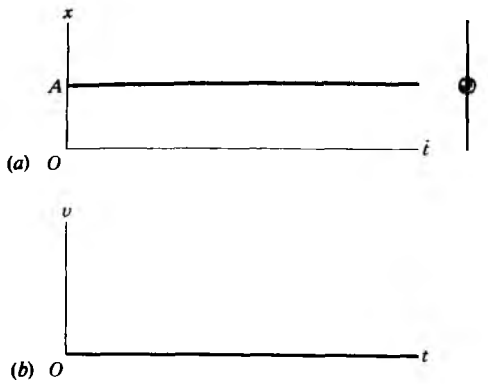



**Figura 10** (*a*) La posición y (*b*) la velocidad de una bola perforada en reposo en un alambre en $x = A$.

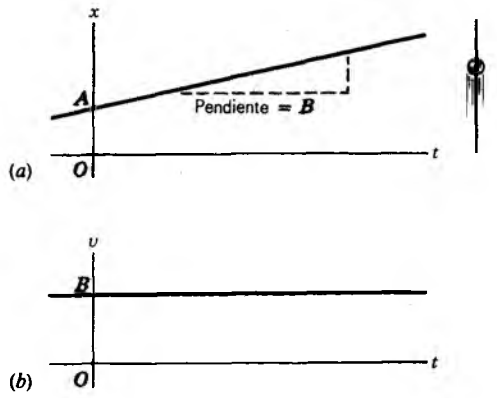



**Figura 11** (*a*) La posición y (*b*) la velocidad de una bola perforada que se desliza unidimensionalmente a lo largo de un alambre con velocidad constante. La velocidad es igual a la pendiente $B$ de la gráfica de $x(t)$. La gráfica de $v(t)$ es la línea horizontal $v = B$.

Así pues, dada cualquier $x(t)$, podemos hallar $v(t)$ diferenciando. Gráficamente, podemos evaluar (punto por punto) la pendiente de $x(t)$ para trazar $v(t)$. Revisemos ahora los ejemplos de la sección 2-2, de los cuales los primeros tres tratan de una bola perforada que se desliza a lo largo de un alambre recto largo:

**1.** *Ningún movimiento en absoluto.* De la ecuación 1, $x(t) = A$ y entonces

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 0, \tag{10}$$

porque la derivada de cualquier constante es cero. La figura 10 muestra a $x(t)$ junto con $v(t)$.

**2.** *Movimiento a velocidad constante.* Con $x(t) = A + Bt$ de la ecuación 2, hallamos que

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt) = 0 + B. \tag{11}$$

La velocidad instantánea (constante) es $B$, como se muestra en la figura 11.

**3.** *Movimiento acelerado.* Usando la ecuación 3, $x(t) = A + Bt + Ct^2$, tenemos que

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt + Ct^2) = 0 + B + 2Ct. \tag{12}$$

La velocidad cambia con el tiempo; si $C > 0$, la velocidad *aumenta* con el tiempo. La figura 12 muestra a $x(t)$ y a $v(t)$.

**4.** *Un automóvil que acelera y frena.* Sin escribir $x(t)$, podemos trazar la gráfica de $v(t)$ estudiando la figura 4. En el primer intervalo, el automóvil está en reposo y $v = 0$. En el siguiente intervalo, el automóvil está acelerando y $v(t)$ tiene la forma de la ecuación 12. En el intervalo a velocidad constante, $v$ = constante (igual a su valor al final del intervalo de aceleración), y por lo tanto $C = 0$ en este

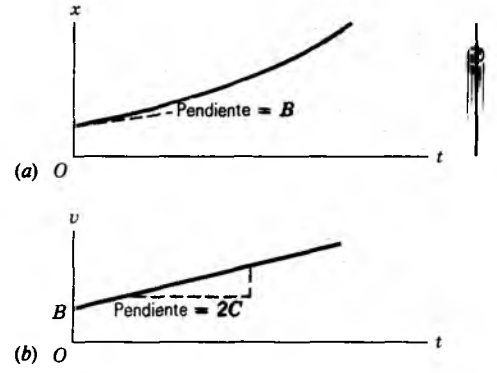



**Figura 12** (*a*) La posición y (*b*) la velocidad de una bola perforada acelerada que se desliza unidimensionalmente a lo largo de un alambre. La velocidad aumenta con el tiempo, como se indica por la pendiente creciente de $x(t)$ y también por el aumento lineal de $v(t)$.

intervalo. Finalmente, en la fase de frenado, $v(t)$ nuevamente tiene la forma de la ecuación 12 pero ahora con $C < 0$ (pendiente negativa). La figura 13 muestra un trazado del movimiento.

En la realidad, no podemos saltar súbitamente de un estado de reposo a un estado de movimiento acelerado, o de un estado de aceleración a otro de velocidad constante. En términos de la gráfica de la figura 13, las esquinas agudas en el trazo de $v(t)$ estarían redondeadas para un automóvil real, y la ecuación de movimiento sería más complicada que la ecuación 12. Para simplificar continuamos suponiendo el comportamiento idealizado que se muestra en la figura 13.

**5.** *El rebote de un disco de goma.* Aquí tenemos una velocidad constante antes del rebote y una velocidad igual pero opuesta (negativa) después del rebote. La figura 14

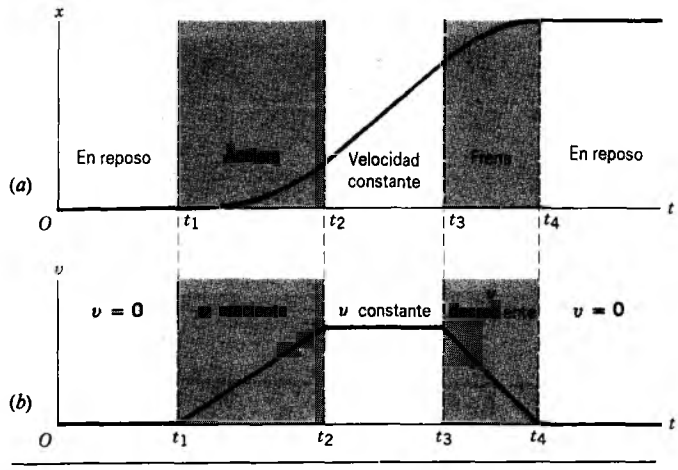



**Figura 13** (*a*) La posición y (*b*) la velocidad de un automóvil que arranca del reposo, luego aumenta su velocidad durante un tiempo, después se mueve por un tiempo a velocidad constante, y finalmente disminuye su velocidad hasta llegar nuevamente al reposo. La gráfica inferior muestra a $v(t)$ correspondiendo exactamente con la gráfica $x(t)$ de arriba y en la figura 4. Para un automóvil real, los cambios en la velocidad deben ser suaves en lugar de súbitos, de modo que las puntas agudas de la gráfica $v(t)$ estarían redondeadas.

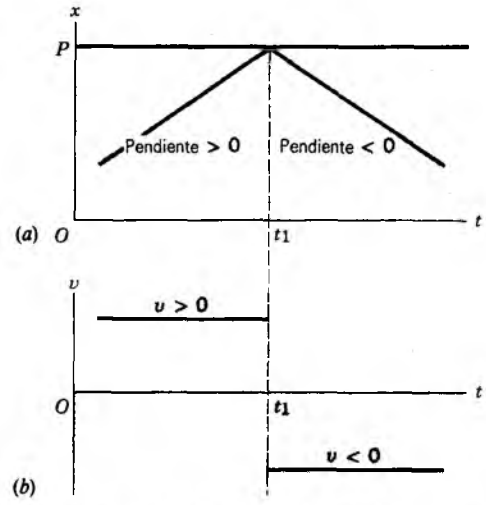



**Figura 14** (*a*) La posición y (*b*) la velocidad de un disco de goma de hockey rebotando en una superficie dura. En $t = t_1$, la velocidad cambia "instantáneamente" de signo en esta gráfica idealizada, aunque en la realidad la velocidad cambiaría durante cierto intervalo pequeño (pero distinto de cero) y la punta aguda en la gráfica $x(t)$ estaría correspondientemente redondeada.

muestra a $v(t)$. Nótese que la "punta" en la gráfica $x(t)$ produce una discontinuidad en la gráfica $v(t)$, nada de lo cual ocurriría para objetos reales.

6. *Una bola pegajosa de arcilla.* Aquí, como se muestra en la figura 15, la arcilla arranca de una posición inicial $y$ (arbitrariamente elegimos que la dirección hacia arriba sea positiva), pero su velocidad disminuye. Su movimiento se describiría con una ecuación similar a la ecuación 12, pero con $C < 0$. En la cima de su movimiento $v = 0$, de modo que la línea $v(t)$ debe cruzar al eje en ese punto. Cuando la bola choca con el suelo, $v$ llega instantáneamente a cero. (Una vez más, una "punta" de la gráfica $x(t)$ produce una discontinuidad en $v(t)$; en la realidad la punta estaría redondeada y no habría discontinuidad.)

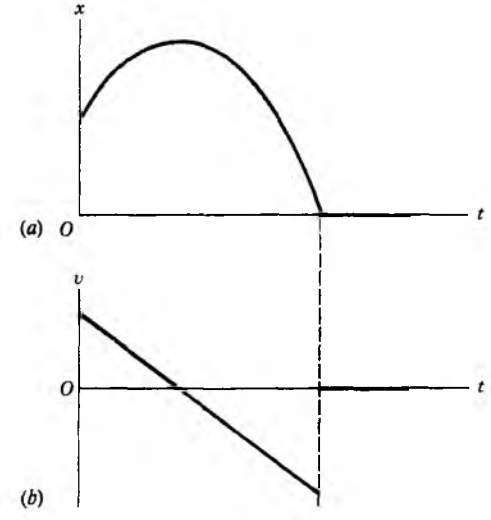



**Figura 15** (*a*) La posición y (*b*) la velocidad de la bola de arcilla lanzada, como en la figura 6. En realidad, la velocidad no puede cambiar instantáneamente de un valor distinto de cero al valor cero, y la elevación vertical en $v(t)$ cuando la bola golpea al suelo sería más gradual.

## 2-5 MOVIMIENTO ACELERADO

Como ya hemos visto (figuras 12, 13 y 15), la velocidad de una partícula puede cambiar con el tiempo según procede el movimiento. Este cambio de velocidad con el tiempo se llama *aceleración*. En analogía con la ecuación 5, podemos calcular una aceleración promedio por el cambio en la velocidad $\Delta v = v_2 - v_1$ en el intervalo $\Delta t$:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad (13)$$

La aceleración tiene unidades de velocidad divididas entre el tiempo, por ejemplo, metros por segundo por segundo, escrito en $m/s^2$.

Como fue el caso con la velocidad promedio $\bar{v}$, la aceleración promedio $\bar{a}$ no nos dice nada acerca de la variación de $\bar{v}(t)$ con $t$ durante el intervalo $\Delta t$. Depende sólo del cambio neto de la velocidad durante el intervalo. Si $\bar{a}$ es evaluada como una constante (posiblemente cero) en

tales intervalos, entonces podemos concluir que tenemos una aceleración constante. En este caso, el cambio en la velocidad es el mismo en todos los intervalos de la misma duración. Por ejemplo, la aceleración producida por la gravedad de la Tierra es (como se discutirá más adelante en este capítulo) casi constante cerca de la superficie de la Tierra y tiene el valor 9.8 m/s$^2$ . La velocidad de un objeto en su caída cambia en 9.8 m/s cada segundo, aumentando 9.8 m/s en el primer segundo, luego otros 9.8 m/s en el siguiente segundo, y así sucesivamente.

Si el cambio de la velocidad en intervalos de tiempo sucesivos de igual longitud no es la misma, entonces tenemos un caso de aceleración variable. En tales casos es útil definir la aceleración instantánea:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

o sea

$$a = \frac{dv}{dt}, \qquad (14)$$

en analogía con la ecuación 9 para la velocidad instantánea.

Nótese que la aceleración puede ser positiva o negativa independientemente de si $v$ es positiva o negativa: por ejemplo, podemos tener una $a$ positiva con una $v$ negativa. La aceleración $a$ da el *cambio* de velocidad; el cambio puede ser un aumento o una disminución para una velocidad ya sea positiva o negativa. Por ejemplo, un elevador que se mueve hacia arriba (lo cual hemos tomado como la dirección de la velocidad positiva) puede acelerar hacia arriba ($a > 0$) y moverse más aprisa o acelerar hacia abajo ($a < 0$) y moverse más despacio (pero todavía en la dirección hacia arriba). Cuando se mueve hacia abajo ($v < 0$), puede acelerar hacia abajo ($a < 0$) y moverse más aprisa, o acelerar hacia arriba ($a > 0$) y moverse más despacio. Cuando la aceleración y la velocidad tienen signos opuestos, de modo que la rapidez (la magnitud de la velocidad) esté decreciendo, nos referimos a ello como una *deceleración.*

La aceleración definida por la ecuación 14 es justamente la pendiente de la gráfica $v(t)$. Si $v(t)$ es constante, entonces $a = 0$; si $v(t)$ es una línea recta, entonces $a$ es una constante igual a la pendiente de la línea. Si $v(t)$ es una curva, entonces $a$ será alguna función de $t$, obtenida hallando la derivada de $v(t)$.

Podemos ahora incluir la aceleracion en las gráficas de las figuras 10 a 15. Como ejemplo, mostraremos el caso de la aceleración y el frenado de un automóvil (Fig. 16). Los restantes ejemplos se dejan al estudiante como ejercicios.

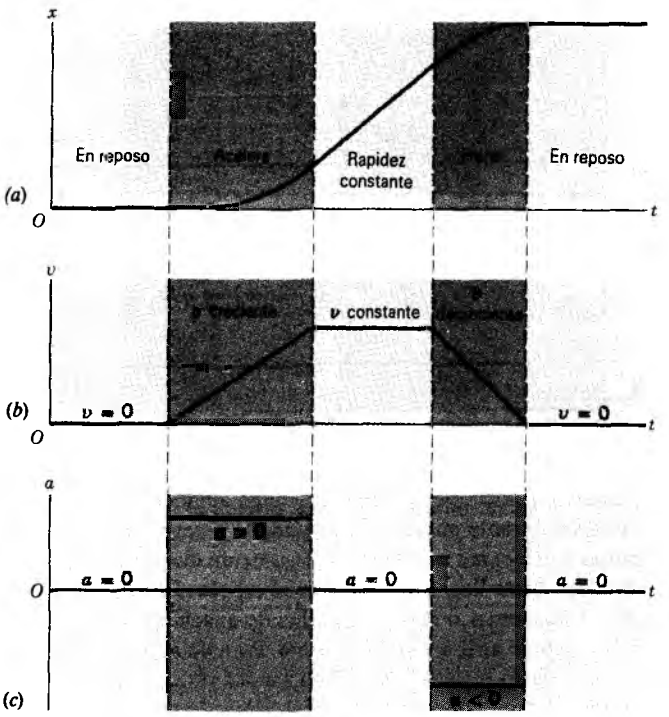



**Figura 16** (*a*) La posición, (*b*) la velocidad, y (*c*) la aceleración de un automóvil que arranca del reposo, acelera durante un intervalo, luego se mueve a velocidad constante, y luego frena con una aceleración negativa para llegar de nuevo al reposo. En realidad, no podemos cambiar instantáneamente la aceleración de un automóvil de un valor a otro; tanto $a(t)$ como $v(t)$ serían, en un automóvil real, suaves y continuas. Los segmentos planos $a(t)$ estarían conectados por curvas suaves, y las puntas agudas de $v(t)$ estarían redondeadas.

**Problema muestra 2** La figura 17*a* muestra seis "instantáneas" sucesivas de una partícula que se mueve a lo largo del eje $x$. En $t = 0$ está en la posición $x = +1.00$ m a la derecha del origen; en $t = 2.5$ s ha llegado al reposo para $x = +5.00$ m; en $t = 4.0$ s ha regresado a $x = 1.4$ m. La figura 17*b* es un trazado de la posición $x$ contra el tiempo $t$ de este movimiento, y las figuras 17c y 17d muestran la velocidad y la aceleración correspondientes de la partícula. (*a*) Halle la velocidad promedio para los intervalos $AD$ y $DF$. (*b*) Calcule la pendiente de $x(t)$ en los puntos $B$ y $F$ y compare con los puntos correspondientes de la curva $v(t)$. (*c*) Halle la aceleración promedio en los intervalos $AD$ y $AF$. (*d*) Calcule la pendiente de $v(t)$ en el punto $D$ y compare con el valor de $a(t)$ correspondiente.

**Solución.** (*a*) Según la ecuación 5,

$$\bar{v}_{AD} = \frac{\Delta x_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{x_D - x_A}{t_D - t_A} = \frac{5.0 \text{ m} - 1.0 \text{ m}}{2.5 \text{ s} - 0.0 \text{ s}}$$

$$= \frac{4.0 \text{ m}}{2.5 \text{ s}} = +1.6 \text{ m/s},$$

$$\bar{v}_{DF} = \frac{\Delta x_{DF}}{\Delta t_{DF}} = \frac{x_F - x_D}{t_F - t_D} = \frac{1.4 \text{ m} - 5.0 \text{ m}}{4.0 \text{ s} - 2.5 \text{ s}}$$

$$= \frac{-3.6 \text{ m}}{1.5 \text{ s}} = -2.4 \text{ m/s}.$$

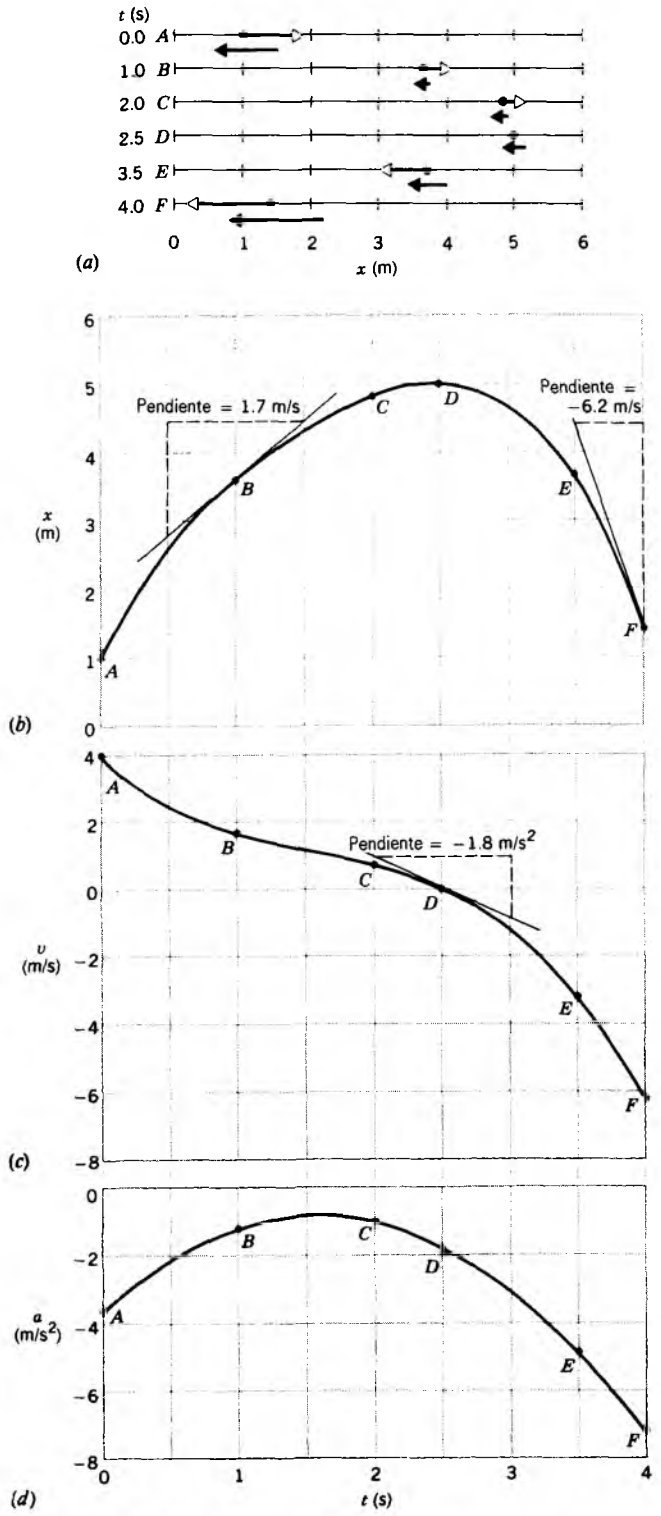



**Figura 17** Problema muestra 2. (*a*) Seis "instantáneas" consecutivas de una partícula que se mueve a lo largo del eje *x*. La flecha que atraviesa la partícula muestra su velocidad instantánea, y la flecha *abajo* de la partícula muestra su aceleración instantánea. (*b*) Una gráfica de $x(t)$ para el movimiento de la partícula. Los seis puntos de *A* a *F* corresponden a las seis instantáneas. (*c*) Un trazado de $v(t)$. (*d*) Una pendiente de $a(t)$.

El signo positivo de $\bar{v}_{AD}$ nos dice que, en el promedio, la partícula se mueve en la dirección creciente de *x* (esto es, a la derecha en la figura 17*a*) durante el intervalo *AD*. El signo negativo de $\bar{v}_{DF}$ nos dice que la partícula, en el promedio, se está moviendo en la dirección decreciente de *x* (a la izquierda de la figura 17*a*) durante el intervalo *DF*.

(*b*) Por las tangentes a $x(t)$ trazadas en los puntos *B* y *F* en la figura 17*b* calculamos lo siguiente:

$$\text{punto } B; \quad \text{pendiente} = \frac{4.5\text{ m} - 2.8\text{ m}}{1.5\text{ s} - 0.5\text{ s}} = \frac{1.7\text{ m}}{1.0\text{ s}} = +1.7\text{ m/s},$$

$$\text{punto } F; \quad \text{pendiente} = \frac{1.4\text{ m} - 4.5\text{ m}}{4.0\text{ s} - 3.5\text{ s}} = \frac{-3.1\text{ m}}{0.5\text{ s}} = -6.2\text{ m/s}.$$

De $v(t)$ en los puntos *B* y *F* de la figura 17*c* calculamos que $v_B = +1.7$ m/s y $v_F = -6.2$ m/s, de acuerdo con las pendientes de $x(t)$. Como se esperaba, $v(t) = dx/dt$.

(*c*) De la ecuación 13,

$$\bar{a}_{AD} = \frac{\Delta v_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{v_D - v_A}{t_D - t_A} = \frac{0.0\text{ m/s} - 4.0\text{ m/s}}{2.5\text{ s} - 0.0\text{ s}}$$
$$= \frac{-4.0\text{ m/s}}{2.5\text{ s}} = -1.6\text{ m/s}^2,$$
$$\bar{a}_{AF} = \frac{\Delta v_{AF}}{\Delta t_{AF}} = \frac{v_F - v_A}{t_F - t_A} = \frac{-6.2\text{ m/s} - 4.0\text{ m/s}}{4.0\text{ s} - 0.0\text{ s}}$$
$$= \frac{-10.2\text{ m/s}}{4.0\text{ s}} = -2.6\text{ m/s}^2.$$

(*d*) De la línea tangente trazada para $v(t)$ en *D*, calculamos lo siguiente:

$$\text{pendiente} = \frac{-0.9\text{ m/s} - 0.9\text{ m/s}}{3.0\text{ s} - 2.0\text{ s}} = \frac{-1.8\text{ m/s}}{1.0\text{ s}} = -1.8\text{ m/s}^2.$$

En el punto *D* de la gráfica $a(t)$ vemos que $a_D = -1.8$ m/s². Entonces $a = dv/dt$. Examinando la gráfica $v(t)$ de la figura 17*c*, vemos que su pendiente es negativa en todos los tiempos cubiertos por la gráfica, y entonces $a(t)$ sería negativa. La figura 17*d* lo confirma.

## 2-6 MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CONSTANTE

Es bastante común encontrar movimiento con aceleración constante (o casi constante): los ejemplos ya citados de objetos que caen cerca de la superficie de la Tierra o el frenado de un automóvil son típicos. En esta sección deducimos un grupo de resultados útiles para este caso especial. Sin embargo, conviene tener en cuenta que ésta es una situación especial y que los resultados no son aplicables a los casos en los que *a* no sea constante. Ejemplos de casos con aceleración no constante incluyen la lenteja de un péndulo en movimiento, un cohete lanzado hacia la órbita de la Tierra, y una gota de lluvia que cae contra la resistencia del aire.

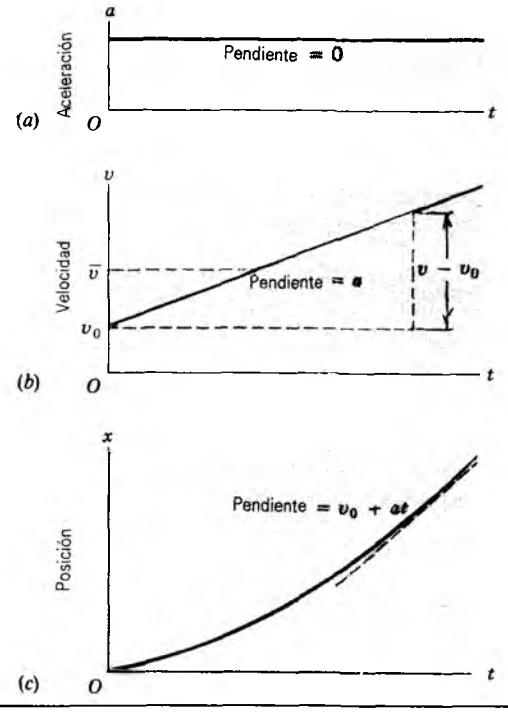



**Figura 18** (*a*) La aceleración constante de una partícula, igual a la pendiente (constante) de $v(t)$. (*b*) Su velocidad $v(t)$, dada en cada punto por la pendiente de la curva $x(t)$. Se indica la velocidad promedio $\bar{v}$, que en el caso de la aceleración constante es igual al promedio de $v$ y $v_0$. (*c*) La posición $x(t)$ de una partícula que se mueve con aceleración constante. La curva está trazada para la posición inicial $x_0 = 0$.

Supongamos que $a$ representa la aceleración constante, trazada en la figura 18*a*. (Si $a$ es realmente constante, las aceleraciones promedio e instantánea son idénticas, y podemos usar las fórmulas derivadas previamente para cada caso.) Un objeto arranca con velocidad $v_0$ en el tiempo $t = 0$, y en un tiempo $t$ posterior tiene una velocidad $v$. La ecuación 13 resulta, para este intervalo de tiempo,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0},$$

o sea

$$v = v_0 + at. \tag{15}$$

Este importante resultado nos permite hallar la velocidad de todos los tiempos posteriores. La ecuación 15 da la velocidad como una función del tiempo, lo que podría escribirse como $v(t)$, pero que usualmente escribimos simplemente como $v$. Nótese que la ecuación 15 está en la forma de $y = mx + b$, la cual describe la gráfica de una línea recta. Aquí $a$ es la pendiente, como ya hemos explicado, y $v_0$ es la intersección (el valor de $v$ en $t = 0$). Esta línea recta está trazada en la figura 18*b*.

Para completar el análisis de la cinemática de la aceleración constante, debemos hallar la dependencia de la posición $x$ en el tiempo. Para esto necesitamos una expresión para la velocidad promedio en el intervalo. Si la gráfica de $v$ contra $t$ es una línea recta (véase la figura 18*b*), entonces el promedio o valor medio de $v$ ocurre a medio camino a través del intervalo y es igual al promedio o media de los dos puntos extremos en el tiempo 0 y en el tiempo $t$:

$$\bar{v} = \tfrac{1}{2}(v + v_0). \tag{16}$$

Usando la ecuación 15 para eliminar $v$, obtenemos

$$\bar{v} = v_0 + \tfrac{1}{2}at. \tag{17}$$

Usando ahora la ecuación 5, que define la velocidad promedio, y suponiendo que la partícula se mueve de la posición $x_0$ en el tiempo 0 a la posición $x$ en el tiempo $t$, la velocidad promedio puede escribirse

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - 0}. \tag{18}$$

Combinando las ecuaciones 17 y 18, obtenemos el resultado deseado para $x(t)$:

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2. \tag{19}$$

Dados el valor de $a$ y las *condiciones iniciales* $x_0$ y $v_0$ (esto es, la posición y la velocidad en $t = 0$), la ecuación 19 nos permite entonces hallar la posición $x$ de todos los tiempos posteriores, lo cual es la meta de nuestro análisis cinemático. La distancia neta viajada desde el punto de partida, $x - x_0$, suele llamarse *desplazamiento*. Por conveniencia, a menudo elegimos el origen de las coordenadas de manera que $x_0 = 0$. La figura 18*c* muestra el trazado de $x$ contra $t$ para este caso.

Nótese que hay cuatro variables ($x$, $v$, $a$, $t$) y dos condiciones iniciales ($x_0$, $v_0$). Las ecuaciones 15 a 19 están escritas en la forma acostumbrada para el análisis de cinemática como un problema de *valor inicial*: dada la situación física (esto es, la aceleración $a$) y las condiciones iniciales ($x_0$ y $v_0$), podemos hallar $v$ y $x$ para todos los $t$. Sin embargo, el problema puede plantearse, por lo general, en una forma diferente. Por ejemplo, dada la aceleración $a$, ¿a través de qué distancia (en lugar de "por cuánto tiempo") debe moverse la partícula para que su velocidad cambie de $v_0$ a $v$? Aquí no entra el tiempo, y así podemos tratar las ecuaciones 15 y 19 como ecuaciones algebraicas y eliminar la variable indeseable $t$ entre ellas:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \tag{20}$$

Eliminando otras variables o parámetros, podemos obtener las ecuaciones 21 y 22, las cuales se muestran en la

**TABLA 2** ECUACIONES PARA EL MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CONSTANTE†

| *Número de la ecuación* | *Ecuación* | *Contenido* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x$ | $v_0$ | $v$ | $a$ | $t$ |
| 15 | $v = v_0 + at$ | × | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 19 | $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ | ✓ | ✓ | × | ✓ | ✓ |
| 20 | $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | × |
| 21 | $x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$ | ✓ | ✓ | ✓ | × | ✓ |
| 22 | $x = x_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$ | ✓ | × | ✓ | ✓ | ✓ |

† Asegúrese de que la aceleración es constante antes de usar las ecuaciones de esta tabla.

tabla 2 con el grupo completo de ecuaciones cinemáticas para la aceleración constante.

Podemos verificar que la ecuación 19 es el resultado cinemático correcto por diferenciación, lo cual nos dará la velocidad $v$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2) = v_0 + at = v.$$

La cual nos da, en efecto, el resultado esperado.

Al usar las ecuaciones de la tabla 2 para resolver un problema, puede elegirse el *origen del sistema de coordenadas* en cualquier ubicación conveniente. Las cuatro ecuaciones de la tabla 2 que dependen de $x$ dependen también de $x_0$ y, de hecho, siempre dependen de la diferencia $x - x_0$. Usualmente el origen se elige para hacer a $x_0 = 0$, de modo que las ecuaciones resulten un tanto simplificadas. Puede también elegirse cualquier *dirección del eje de coordenadas* como positiva. Una vez que ha sido elegida una dirección en particular para designarla como positiva, entonces todos los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones en esa dirección serán positivas, y las de la dirección opuesta serán negativas. La elección del *origen* y la *dirección* del eje de coordenadas deben permanecer sin cambio durante la solución de cualquier problema en particular.

**Problema muestra 3** Usted frena su Porsche desde la velocidad de 85 km/h (unas 53 mi/h, por supuesto, bastante más abajo del límite de velocidad) hasta 45 km/h en una distancia de 105 m. (*a*) ¿Cuál es la aceleración, suponiendo que sea constante en el intervalo? (*b*) ¿Qué tanto tiempo transcurrió durante el intervalo? (*c*) Si usted fuera a continuar frenando con la misma aceleración, ¿qué tanto tiempo le tomaría detenerse y qué distancia adicional tendría que cubrir?

**Solución.** (*a*) Seleccionemos primero que la dirección positiva será la dirección de la velocidad, y elijamos el origen de modo que $x_0 = 0$ cuando comienza a frenar. Hemos dado la velocidad inicial $v_0 = 85$ km/h en el tiempo $t = 0$, y sabemos que la velocidad final es $v = +45$ km/h en el tiempo $t$ (que no conocemos) siendo el desplazamiento +0.105 km. Necesitamos una ecuación que incluya la aceleración desconocida que buscamos, pero en la que no intervenga el tiempo. La ecuación 20 es nuestra elección, y resolvemos para obtener $a$:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{(45\text{ km/h})^2 - (85\text{ km/h})^2}{2(0.105\text{ km})}$$
$$= -2.48 \times 10^4\text{ km/h}^2 = -1.91\text{ m/s}^2.$$

La aceleración resulta ser negativa, lo que significa que es opuesta a la dirección que habíamos elegido como positiva.

(*b*) Necesitamos una ecuación que no incluya a la aceleración, lo que nos permite hallar el tiempo a partir de los datos originales. En la tabla 2 vemos que la ecuación 21 cumple, y resolvemos para obtener $t$:

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_0 + v} = \frac{2(0.105\text{ km})}{85\text{ km/h} + 45\text{ km/h}} = 1.62 \times 10^{-3}\text{ h} = 5.8\text{ s}.$$

Hemos seleccionado para esta parte una ecuación que no incluye a la aceleración, porque de otro modo al resolver la parte (*b*) se introduciría un error que pudiera haberse cometido al resolver la parte (*a*). Cuando se resuelvan partes independientes de un problema, es una buena práctica retornar siempre a los datos originales, de ser ello posible.

(*c*) Ahora que ya conocemos la aceleración, buscaremos el tiempo $t$ para que el automóvil pase de $v_0 = 85$ km/h a $v = 0$. La ecuación 15 es la elegida para hallar $t$:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 85\text{ km/h}}{-2.48 \times 10^4\text{ km/h}^2} = 3.43 \times 10^{-3}\text{ h} = 12.3\text{ s}.$$

El automóvil se detendrá en 12.3 s después de haber comenzado a frenar, o en 6.5 s (= 12.3 s - 5.8 s) después de haber alcanzado la velocidad de 45 km/h.

Para hallar la distancia, podemos usar la ecuación 20:

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (85\text{ km/h})^2}{2(-2.48 \times 10^4\text{ km/h}^2)} = 0.146\text{ km} = 146\text{ m}.$$

La distancia adicional viajada entre el punto en el cual $v = 45$ km/h y el punto en el cual $v = 0$ es 146 m - 105 m = 41 m.

**Problema muestra 4** Una partícula alfa (el núcleo de un átomo de helio) viaja a lo largo de un tubo hueco recto de 2.0 m de longitud que forma parte de un acelerador de partículas. (*a*) Si suponemos una aceleración uniforme, ¿cuál es la aceleración de la partícula, si entra a una velocidad de $1.0 \times 10^4$ m/s y sale a $5.0 \times 10^6$ m/s? (*b*) ¿Qué tanto tiempo estuvo en el tubo?

**Solución.** (*a*) Elegimos un eje $x$ paralelo al tubo, siendo la dirección positiva aquella en la cual se está moviendo la partícula, y hallándose su origen en la entrada del tubo. Hemos dado $v_0$, $v$, y $x$, y buscamos $a$. Reescribiendo la ecuación 20, con $x_0 = 0$,

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x}$$
$$= \frac{(5.0 \times 10^6 \text{ m/s})^2 - (1.0 \times 10^4 \text{ m/s})^2}{2(2.0 \text{ m})}$$
$$= +6.3 \times 10^{12} \text{ m/s}^2.$$

(*b*) Aquí usamos la ecuación 21 resolviendo para $t$ con $x_0 = 0$, lo cual nos da

$$t = \frac{2x}{v_0 + v} = \frac{2(2.0 \text{ m})}{1.0 \times 10^4 \text{ m/s} + 5.0 \times 10^6 \text{ m/s}}$$
$$= 8.0 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.80 \ \mu\text{s}.$$

## 2-7 CUERPOS EN CAÍDA LIBRE

El ejemplo más común del movimiento con (casi) aceleración constante es la de un cuerpo que cae hacia la Tierra. Si permitimos que un cuerpo caiga en un vacío, de modo que la resistencia del aire no afecte su movimiento, encontraremos un hecho notable: *todos los cuerpos, independientemente de su tamaño, forma, o composición, caen con la misma aceleración en la misma región vecina a la superficie de la Tierra.* Esta aceleración, denotada por el símbolo $g$, se llama *aceleración en caída libre* (o, a veces, *aceleración debida a la gravedad*). Aunque la aceleración depende de la distancia desde el centro de la Tierra (como veremos en el capítulo 16), si la distancia de la caída es pequeña comparada con el radio de la Tierra (6400 km) podemos considerar a la aceleración como constante durante la caída.

Cerca de la superficie de la Tierra la magnitud de $g$ es aproximadamente 9.8 m/s$^2$, un valor que usaremos a través del texto a no ser que se especifique otra cosa. La dirección de la aceleración en caída libre en un punto determina lo que queremos significar con las palabras "hacia abajo" en ese punto.

Si bien hablamos de cuerpos *en caída*, los cuerpos con movimiento hacia arriba experimentan la misma aceleración en caída libre (en magnitud y en dirección). Esto es, sin importar que la velocidad de la partícula sea hacia arriba o hacia abajo, la dirección de su aceleración bajo la influencia de la gravedad de la Tierra es siempre hacia abajo.

El valor exacto de la aceleración en caída libre varía con la latitud y con la altitud. Hay también variaciones significativas causadas por diferencias en la densidad local de la corteza terrestre. Estudiaremos estas variaciones en el capítulo 16.

Las ecuaciones de la tabla 2, que fueron derivadas para el caso de una aceleración constante, pueden ser aplicadas a la caída libre. Con este fin, hacemos primero dos pequeños cambios: (1) Marcamos la dirección de la caída libre como el eje $y$ y tomamos como positiva la dirección hacia arriba. Más adelante, en el capítulo 4, consideraremos el movimiento en dos dimensiones, y desearemos marcar el movimiento horizontal como $x$. (2) Reemplazamos en la tabla 2 a la aceleración constante $a$ por $-g$, puesto que nuestra elección de la dirección positiva $y$ como "hacia arriba" significa que la aceleración es negativa. A causa de que decidimos que la aceleración (hacia abajo) fuera $-g$, $g$ es un número *positivo*.

Con estos pequeños cambios, las ecuaciones de la tabla 2 resultan ser

$$v = v_0 - gt, \tag{23}$$

$$y = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2, \tag{24}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0), \tag{25}$$

$$y = y_0 + \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t, \tag{26}$$

y

$$y = y_0 + vt + \tfrac{1}{2} g t^2. \tag{27}$$

**Problema muestra 5** Un cuerpo se deja caer libremente desde el reposo. Determine la posición y la velocidad del cuerpo después de que han transcurrido 1.0, 2.0, 3.0, y 4.0 s.

**Solución** Elegimos al punto de partida como el origen. Conocemos la rapidez inicial (cero) y la aceleración, y se nos da el tiempo. Para hallar la posición, usamos la ecuación 24 con $y_0 = 0$ y $v_0 = 0$:

$$y = -\tfrac{1}{2} g t^2.$$

Poniendo $t = 1.0$ s, obtenemos

$$y = -\tfrac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s})^2 = -4.9 \text{ m}.$$

Para hallar la velocidad, usaremos la ecuación 23, una vez más con $v_0 = 0$:

$$v = -gt = -(9.8 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s}) = -9.8 \text{ m/s}.$$

Después de caer durante 1.0 s, el cuerpo está a 4.9 m *abajo* ($y$ es negativa) de su punto de arranque y se mueve *hacia abajo* ($v$ es negativa) a una velocidad de 9.8 m/s. Continuando de esta manera, podemos hallar las posiciones y velocidades en $t = 2.0$, 3.0, y 4.0 s, las cuales se muestran en la figura 19.

**Problema muestra 6** Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo a una velocidad de 25.2 m/s. (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a su punto más elevado? (*b*) ¿A qué altura se eleva? (*c*) ¿En cuánto tiempo estará a 27.0 m sobre el suelo?

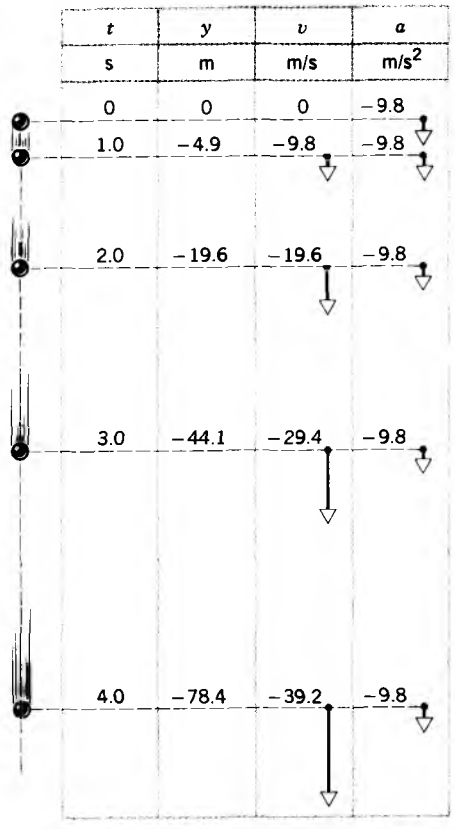



**Figura 19** Problema muestra 5. Se muestran la altura, la velocidad y la aceleración de un cuerpo en caída libre.

**Solución** (*a*) En su punto más elevado su velocidad pasa por el valor cero. Dadas $v_0$ y $v$ (= 0), deseamos hallar $t$ y, por lo tanto, elegimos la ecuación 23, con la cual resolvemos para $t$:

$$t = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{25.2 \text{ m/s} - 0}{9.8 \text{ m/s}^2} = 2.57 \text{ s}.$$

(*b*) Usemos solamente los datos originales en esta parte, para evitar que se introduzca algún error que pudiéramos haber cometido en la parte (*a*). La ecuación 25, con $y_0$ asignada como 0, nos permite resolver para $y$ cuando conocemos las otras cantidades:

$$y = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{(25.2 \text{ m/s})^2 - 0}{2(9.8 \text{ m/s}^2)} = 32.4 \text{ m}.$$

(*c*) La ecuación 24 es útil para este caso, porque $t$ es la única incógnita. Puesto que deseamos resolver para $t$, reescribamos la ecuación 24, con $y_0$ = 0, en la forma usual de una ecuación cuadrática:

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - v_0 t + y = 0$$

$$\tfrac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)t^2 - (25.2 \text{ m/s})t + 27.0 \text{ m} = 0.$$

Usando la fórmula cuadrática, hallamos que las soluciones son $t$ = 1.52 s y $t$ = 3.62 s. En $t$ = 1.52 s, la velocidad de la pelota es

$$v = v_0 - gt = 25.2 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2)(1.52 \text{ s}) = 10.3 \text{ m/s}.$$

En $t$ = 3.62 s, la velocidad es

$$v = v_0 - gt = 25.2 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2)(3.62 \text{ s}) = -10.3 \text{ m/s}.$$

Las dos velocidades tienen magnitudes idénticas pero direcciones opuestas. Deberemos de convencernos de que, en ausencia de la resistencia del aire, la pelota invierte el mismo tiempo para elevarse a su máxima altura que para bajar la misma distancia y que, en cada punto, tendrá la misma velocidad para ir hacia arriba que para caer hacia abajo. Nótese que la respuesta a la parte (*a*) para el tiempo que le toma llegar al punto más elevado, 2.57 s, es exactamente el punto medio entre los dos tiempos hallados en la parte (*c*). ¿Puede usted explicar esto? ¿Puede usted predecir cualitativamente el efecto de la resistencia del aire en los tiempos de subida y de caída?

**Problema muestra 7** Un cohete es lanzado desde el reposo en una base submarina situada a 125 m bajo la superficie de un volumen de agua. Se mueve verticalmente hacia arriba con una aceleración desconocida pero que se supone constante (el efecto combinado de sus motores, la gravedad de la Tierra, y la flotabilidad y arrastre del agua), y llega a la superficie en un tiempo de 2.15 s. Cuando traspasa la superficie sus motores se apagan automáticamente (para hacer más difícil su detección) y continúa elevándose. ¿A qué altura máxima llegará? (Desprecie cualquier efecto en la superficie).

**Solución** Como con cualquier proyectil en caída libre, podríamos analizar el movimiento del cohete durante la porción de su movimiento en el aire si conociéramos la velocidad inicial de esa parte del movimiento. El plan de ataque en este problema es, por lo tanto, analizar la porción del movimiento bajo el agua para hallar la velocidad cuando el cohete llega a la superficie, y luego tratar esta velocidad como la velocidad inicial de la porción en caída libre. Estas partes deben hacerse separadamente, porque la aceleración cambia en la superficie del agua.

Para el movimiento bajo el agua, conocemos el desplazamiento, el tiempo, y la velocidad inicial (cero). La aceleración no es necesaria, pero deseamos conocer la velocidad final; la ecuación 21 de la tabla 2 proporciona la relación adecuada:

$$v = \frac{2(y - y_0)}{t} = \frac{2(125 \text{ m})}{2.15 \text{ s}} = 116 \text{ m/s}.$$

La velocidad en la superficie es de 116 m/s hacia arriba. Analizamos ahora la porción de caída libre del movimiento hacia arriba, considerando que esta velocidad es la velocidad *inicial*. Usamos la ecuación 25 para la caída libre y, como es usual, hallamos la altura máxima buscando el punto en el cual la velocidad llega a cero:

$$y - y_0 = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{(116 \text{ m/s})^2 - 0}{2(9.8 \text{ m/s}^2)} = 687 \text{ m}.$$

Para verificar su comprensión del problema, deberá usted dibujar gráficas de $y(t)$ $v(t)$, y $a(t)$ de manera similar a la figura 16. Asegúrese de tener en mente qué variables varían de manera continua y suave, y cuáles no lo hacen así en este problema idealizado. ¿En qué diferiría un cohete real de este cuadro?

## 2-8 GALILEO Y LA CAÍDA LIBRE *(Opcional)*

La naturaleza del movimiento de un objeto al caer era en la antigüedad un tema de interés en la filosofía natural. Aristóteles

afirmaba que "el movimiento hacia abajo... de cualquier cuerpo dotado de peso es más rápido en proporción a su tamaño". Esto es, los objetos más pesados caen más rápidamente. Muchos siglos más tarde, Galileo Galilei (1564-1642) hizo la aseveración correcta: "si pudiéramos eliminar totalmente la resistencia del medio, todos los objetos caerían a igual velocidad". En los últimos años de su vida, Galileo escribió el tratado titulado *Diálogos concernientes a dos nuevas ciencias* en el cual detallaba sus estudios sobre el movimiento.

La creencia de Aristóteles de que un objeto más pesado caería más aprisa es un punto de vista ampliamente generalizado. Ello parece recibir el apoyo de una bien conocida conferencia en la cual se demostraba que cuando una pelota y una hoja de papel se dejan caer en el mismo instante, la bola llega al suelo mucho antes que el papel. Sin embargo, si el conferencista arruga primero fuertemente el papel y luego repite la demostración, tanto la pelota como el papel golpean el suelo esencialmente al mismo tiempo. En el caso anterior, es el efecto de la mayor resistencia del aire lo que hace que el papel caiga más lentamente que la pelota. En el último caso, el efecto de la resistencia sobre el papel se reduce y es casi el mismo para ambos cuerpos, de modo que caen aproximadamente a la misma velocidad. Por supuesto, que podemos hacer una prueba directa si dejamos caer los cuerpos en el vacío. Aun en vacíos parciales fácilmente obtenidos podemos demostrar que una pluma y una bola de plomo miles de veces más pesada caen a velocidades que son prácticamente indistinguibles entre sí. En 1971, el astronauta David Scott soltó una pluma y un martillo de geólogo en la Luna (sin atmósfera), observando que (dentro del error experimental de su observación) llegaban a la superficie lunar al mismo tiempo.

Sin embargo, en tiempos de Galileo no había una manera eficaz de obtener un vacío parcial, ni existía el equipo para medir el tiempo de cuerpos en caída libre con la precisión suficiente para obtener datos numéricos confiables. (La conocida historia acerca de que Galileo dejó caer dos objetos desde la torre de Pisa y observó su caída comprobando que llegaban al suelo al mismo tiempo es casi con seguridad sólo una leyenda. Dada la altura de la torre y los objetos que se dice usó Galileo, el objeto más grande y más pesado habría alcanzado el suelo entre uno y varios metros antes que el objeto más ligero, debido a los efectos de la resistencia del aire. Así pues, Galileo habría parecido demostrar que Aristóteles ¡tenía razón, después de todo!) Sin embargo, Galileo comprobó su resultado usando una bola que rodara hacia abajo en un plano inclinado. Demostró primero que la cinemática de una bola que rodaba hacia abajo en un plano inclinado era la misma que la de una bola en caída libre. El plano inclinado sirvió únicamente para reducir el efecto de aceleración de la gravedad de la Tierra, haciendo por lo tanto más lento el movimiento, de manera que pudieran hacerse las mediciones con mayor facilidad. Más aún, a velocidades lentas la resistencia del aire es mucho menos importante.

Galileo encontró con sus experimentos que las distancias recorridas en intervalos de tiempo consecutivos eran proporcionales a los número impares 1, 3, 5, 7, ... etc. Las distancias totales para intervalos consecutivos eran entonces proporcionales a 1, 1 + 3 (= 4), 1 + 3 + 5 (= 9), 1 + 3 + 5 + 7 (=16), y así sucesivamente, esto es, a los cuadrados de los enteros 1,2,3,4, y así sucesivamente. Pero si la distancia cubierta es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido, entonces la ganancia en velocidad es directamente proporcional al tiempo transcurrido, un resultado que se mantiene *sólo* en el caso de la aceleración constante. Finalmente, Galileo encontró que se mantenían los mismos resultados cualquiera que fuese la masa de la bola y, por lo tanto, en nuestra terminología, la aceleración en caída libre es independiente de la masa del objeto. ■

## 2-9 MEDICIÓN DE LA ACELERACIÓN EN CAÍDA LIBRE *(Opcional)*

La medición de $g$ es un ejercicio común en los laboratorios de física introductorios. Puede hacerse simplemente tomando el tiempo de un objeto en caída libre que se suelta desde el reposo a lo largo de una distancia medida. La ecuación 24 da $g$ directamente. Aun con el equipo relativamente tosco normalmente encontrado en los laboratorios para estudiantes, es posible obtener una precisión de alrededor del 1%. Un mejor método consiste en el uso de un péndulo, cuya fuerza impulsora es la atracción de la Tierra sobre el peso suspendido. Como demostramos en el capítulo 15, el valor de $g$ puede ser hallado midiendo el periodo de oscilación de un péndulo de longitud conocida. Tomando el tiempo de muchas oscilaciones, puede hallarse un valor preciso para el periodo, y aun usando el equipo típico de un laboratorio para estudiantes no es difícil de obtener una precisión del 0.1%. Este nivel de precisión es suficiente para observar la variación de $g$ entre el nivel del mar y una montaña elevada (de 3 km o 10,000 ft), o entre el ecuador y los polos de la Tierra.

Durante varios siglos se utilizó el método del péndulo para mediciones precisas de $g$, y la precisión final fue de aproximadamente 1 parte en $10^6$, suficiente para detectar variaciones de $g$ desde un piso de un edificio al piso siguiente. Los métodos del péndulo se limitan a esta precisión por la incertidumbre del comportamiento real en el punto de pivoteo, lo cual hace difícil determinar la longitud con mayor precisión. Recientemente, en sus intentos para mejorar la precisión de $g$, los investigadores han retornado al método de la caída libre para la medición de $g$, la cual a través de las técnicas modernas del interferómetro de láser ha llegado a alrededor de 1 parte en $10^9$. Este método es suficiente para observar el cambio de la gravedad de la Tierra en una distancia vertical de 1 cm; en forma equivalente, tal medición de la gravedad ¡puede detectar el cambio gravitatorio provocado por un científico que se halle de pie a 1 m del aparato!

La obtención de tal precisión constituye un tributo notable a las técnicas experimentales más cuidadosas. Por ejemplo, uno podría suponer que para eliminar los efectos de la resistencia del aire en la caída libre el objeto debe dejarse caer en el vacío. Esto, en efecto, es así, pero aun los mejores vacíos actualmente obtenibles en el laboratorio no son suficientemente buenos para obtener un nivel de precisión de $10^9$ en la medición de $g$. Para reducir los efectos de la pequeñísima cantidad de gas residual presente aun al alto vacío, el objeto en caída libre se coloca dentro de una caja evacuada, la cual también se deja caer. La pequeña cantidad de gas residual es acarreada por la caja al caer, y a causa de que el gas cae con el objeto no ofrece resistencia alguna a la caída libre.

La figura 20 muestra una representación del aparato de caída libre desarrollado por el Dr. James E. Faller y sus colegas en el Joint Institute for Laboratory Astrophysics, en Boulder, Colorado. El objeto que cae es un prisma reflector, el cual es en esencia un prisma de cristal que tiene una capa reflejante en las tres caras perpendiculares. Este dispositivo tiene la útil propiedad de que la luz que incide en el prisma desde cualquier dirección interior se refleja en la dirección exactamente opuesta. (Un conjunto de tales reflectores fue colocado en la Luna por los astronautas del Apolo; se han reflejado rayos láser de la Luna a la Tierra para medir con precisión la distancia Tierra-Luna.) Un rayo láser se refleja del objeto que cae y se hace que los rayos incidente y reflejado interfieran entre sí de modo que continuamente se refuercen y luego se cancelen según cae el objeto. La distancia de la caída entre cancelaciones es la longitud de onda de la luz, y la distancia total de la caída puede

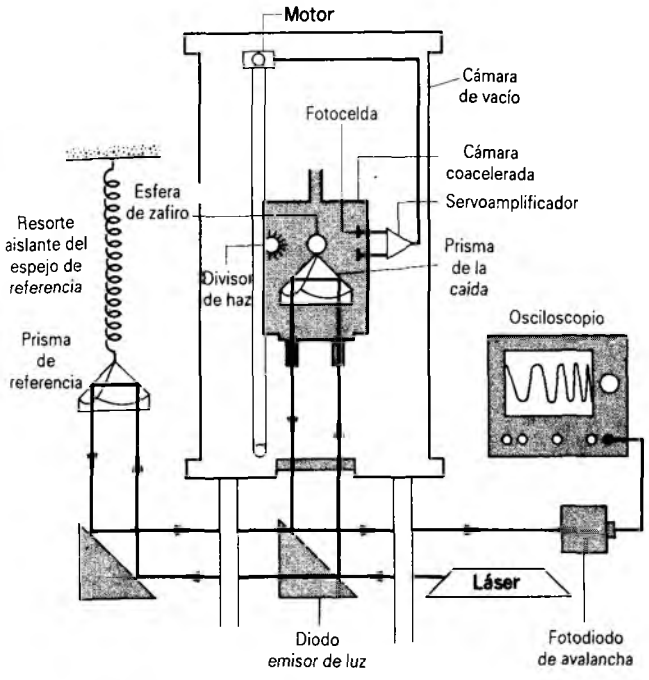



**Figura 20** Diagrama del aparato de caída libre. El osciloscopio registra el patrón de cambio de las cancelaciones y los refuerzos cuando el rayo láser reflejado por el prisma de la caída se recombina con el rayo de la arista del prisma de referencia. Un motor impulsa a la cámara de coaceleración hacia abajo de modo que caiga con el prisma. Para una descripción de este aparato y un estudio de las mediciones de $g$, véase "Ballistic Methods of Measuring $g$" por J. E. Faller e I. Marson, *Metrologia*, vol. 25 (1988), pág. 49.

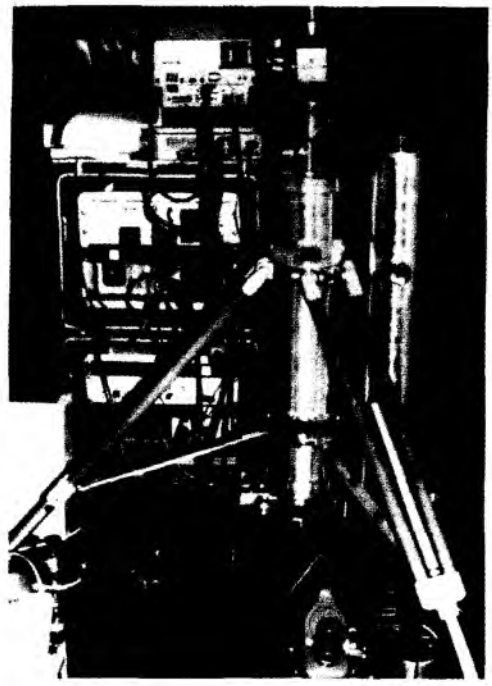


**Figura 21** Una fotografía del aparato de caída libre de la figura 20. El aparato es fácilmente portátil, de modo que $g$ pueda ser medida en lugares remotos.

medirse con una precisión de una pequeña fracción de la longitud de onda de la luz, simplemente contando el número de cancelaciones. Simultáneamente, el tiempo entre cancelaciones se mide con un reloj atómico. Así pues, la distancia y el tiempo son medidos en forma simultánea, justo como lo podría usted hacer en un laboratorio introductorio de física. En la figura 21 se muestra una fotografía de este notable aparato.

La construcción de los medidores de la gravedad más precisos tiene importantes consecuencias prácticas. Un mapa de la gravedad de la Tierra puede ayudar en la búsqueda de petróleo o de minerales (véase la figura 5 del capítulo 16). Los cambios en la corteza de la tierra con el tiempo pueden ser observados por su efecto sobre $g$, haciendo posible el monitoreo de los movimientos de placas y de la actividad sísmica. Tales variaciones de la gravedad en la superficie de la Tierra pueden afectar las órbitas de los satélites y las trayectorias de los proyectiles balísticos. Desde el punto de vista de la ciencia básica, las mediciones precisas de $g$ proporcionan pruebas detalladas de nuestra comprensión de la teoría de la gravitación, creada por Isaac Newton hace más de tres siglos. ■

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

## PREGUNTAS

1. ¿Puede la velocidad de una partícula ser siempre negativa? De ser así, dé un ejemplo; si no, explique por qué.
2. Un conejo se mueve a cada segundo la mitad de la distancia que media desde su nariz hasta una lechuga. ¿Llegará el conejo a la lechuga alguna vez? ¿Cuál es el valor límite de la velocidad promedio del conejo? Dibuje gráficas que muestren la velocidad y la posición del conejo en el transcurso del tiempo.
3. La *velocidad promedio* puede significar la magnitud de la velocidad promedio. Otro significado, más común, que se le da es que la velocidad promedio es la longitud total de la trayectoria recorrida dividida por el tiempo transcurrido. ¿Son diferentes estos significados? Dé un ejemplo que respalde la respuesta.
4. Un automóvil de carreras, en una prueba de dos vueltas para calificar, recorre la primera vuelta a una velocidad

promedio de 90 mi/h. El conductor quiere acelerar durante la segunda vuelta de modo que la velocidad promedio de las dos vueltas sea de 180 mi/h. Demuestre que no podrá hacerlo.

5. Roberto le gana a Judith por 10 m en una carrera de los 100 metros. Roberto, queriendo darle a Judith una oportunidad igual, acuerda correr con ella de nuevo pero arrancar desde 10 m atrás de la línea de arranque. Le da esto a Judith, en realidad una oportunidad igual?
6. Cuando la velocidad es constante, ¿puede la velocidad promedio en cualquier intervalo de tiempo diferir de la velocidad instantántea en cualquier instante? De ser así, dé un ejemplo; si no, explique por qué.
7. ¿Puede la velocidad promedio de una partícula que se mueve a lo largo del eje $x$ ser alguna vez $\frac{1}{2}(v_0 + v)$ si la aceleración no es uniforme? Demuestre su respuesta mediante gráficas.
8. ¿Puede el velocímetro de un automóvil registrar la velocidad como la hemos definido?
9. (*a*) ¿Puede un objeto tener velocidad cero y aun así acelerar? (*b*) ¿Puede un objeto tener una velocidad constante al mismo tiempo que una rapidez variable? En cada caso, dé un ejemplo en caso de que la respuesta sea afirmativa; explique por qué, si la respuesta es que no.
10. ¿Puede la velocidad de un objeto invertir la dirección cuando su aceleración es constante? De ser así, dé un ejemplo; si no, explique por qué.
11. La figura 30 muestra al coronel John P. Stapp en su trineo cohete al frenar; véase el problema 34. (*a*) Su cuerpo es un acelerómetro, no un taquímetro (medidor de la velocidad). Explique. (*b*) ¿Puede usted saber la dirección de la aceleración a partir de la figura?
12. ¿Puede un objeto aumentar su velocidad mientras su aceleración decrece? De ser así, dé un ejemplo; si no, explique por qué.
13. De las siguientes situaciones, ¿cuál es imposible? (*a*) Un cuerpo tiene velocidad este y aceleración este; (*b*) un cuerpo tiene velocidad este y aceleración oeste; (*c*) un cuerpo tiene velocidad cero, y la aceleración distinta de cero; (*d*) un cuerpo tiene aceleración constante pero su velocidad es variable: (*e*) un cuerpo tiene velocidad constante y aceleración variable.
14. ¿Cuáles serían algunos ejemplos de caídas de objetos en los que no sería razonable despreciar la resistencia del aire?
15. La figura 22 muestra una torre para la fabricación de perdigones en Baltimore, Maryland, en Estados Unidos. Fue construida en 1829 y usada para fabricar perdigones de plomo mediante el derramamiento del plomo fundido a través de un cedazo desde la parte superior de la torre. Los perdigones se solidifican al tiempo que caen en un tanque de agua situado en el fondo de la torre a 230 ft de profundidad. ¿Cuáles son las ventajas de fabricar perdigones de este modo?
16. Una persona de pie en el borde de un acantilado a cierta altura sobre el nivel del suelo arroja una pelota hacia arriba a una velocidad inicial $v$ y luego arroja otra pelota hacia abajo con la misma velocidad inicial. ¿Cuál de ellas, si hay alguna, tiene la velocidad mayor cuando llegue al suelo? Desprecie la resistencia del aire.



**Figura 22** Pregunta 15

17. ¿Cuál es la aceleración hacia abajo de un proyectil que sea disparado desde un cohete que acelera hacia arriba a razón de 9.8 m/s$^2$?
18. La ecuación 19 para la aceleración constante nos dice que si una partícula es lanzada desde el reposo ($v_0 = 0$) a $x_0 = 0$ en el tiempo $t = 0$ está en la posición $x$ en dos tiempos diferentes, digamos $+\sqrt{2x/a}$ y $-\sqrt{2x/a}$. ¿Cuál es el significado de la raíz negativa de esta ecuación cuadrática?
19. En otro planeta, el valor de $g$ es la mitad del valor en la Tierra. ¿Cuánto es el tiempo que necesita un objeto para caer al suelo partiendo del reposo en relación con el tiempo requerido para caer la misma distancia en la Tierra?
20. (*a*) Una piedra es arrojada hacia arriba con una cierta velocidad en un planeta en donde la aceleración en caída libre es el doble que en la Tierra. ¿Qué tan alto se elevaría en comparación con la altura a la que lo haría en la Tierra? (*b*) Si la velocidad inicial se duplicara, ¿qué cambio significaría?
21. Consideremos una pelota que es arrojada verticalmente hacia arriba. Tomando en cuenta la resistencia del aire.

¿Cree usted que el tiempo durante el cual se eleva la pelota es más largo o más corto que el tiempo durante el cual cae? ¿Por qué?

**22.** Elabore una gráfica cualitativa de la rapidez $v$ versus el tiempo $t$ para la caída de un objeto (*a*) despreciando la resistencia del aire, y (*b*) si la resistencia del aire no puede despreciarse.

**23.** Una segunda bola se deja caer en el tiro de un elevador 1 s después de haberse dejado caer la primera. (*a*) ¿Qué pasa con la distancia entre una y otra a medida que pasa el tiempo? (*b*) ¿Cómo cambia la relación $v_1/v_2$ de la velocidad de la primera bola y la velocidad de la segunda con el paso del tiempo? Desprecie la resistencia del aire, y dé respuestas cualitativas.

**24.** Repita la pregunta 23 tomando en cuenta la resistencia del aire. Una vez más, dé respuestas cualitativas.

**25.** Si $m$ es una piedra ligera y $M$ es una piedra pesada, según Aristóteles $M$ caería más rápidamente que $m$. Galileo intentó demostrar que la creencia de Aristóteles era lógicamente inconsistente con el siguiente argumento. Átense $m$ y $M$ juntas formando una piedra doble. Así, al caer, $m$ debería retrasar la caída de $M$, puesto que tiende a caer más lentamente, y la combinación caería más rápido que $m$ pero más lentamente que $M$; sin embargo, según Aristóteles el doble cuerpo $(M + m)$ es más pesado que $M$ y, por lo tanto, debería caer más rápido que $M$. Si aceptamos el razonamiento de Galileo como correcto, ¿podemos concluir que $M$ y $m$ deben caer a la misma velocidad? ¿Qué experimento sería necesario en este caso? Si usted cree que el razonamiento de Galileo es incorrecto, explique por qué.

**26.** ¿Qué les pasaría a nuestras ecuaciones cinemáticas (véase la tabla 2) bajo la operación de una inversión del tiempo, es decir, reemplazando a $t$ por $-t$? Explique.

**27.** Esperamos que una relación realmente general, tal como las de la tabla 2, sea válida sin importar la elección del sistema de coordenadas. Al exigir que las ecuaciones generales sean dimensionalmente compatibles nos aseguramos de que las ecuaciones sean válidas cualquiera que sea la elección de las unidades. ¿Hay alguna necesidad, entonces, de sistemas de unidades o de coordenadas?

## PROBLEMAS

### *Sección 2-3 Velocidad promedio*

**1.** ¿A qué distancia viaja hacia adelante un automóvil que se mueve a razón de 55 mi/h (= 88 km/h) durante 1 s de tiempo, que es lo que le toma ver un accidente al lado de la carretera?

**2.** El lanzador de los Medias Rojas de Boston, Roger Clemens, lanzó una bola rápida a una velocidad horizontal de 160 km/h, según fue verificado con una pistola de radar. ¿Qué tanto le tomó a la bola llegar a la base de meta, que está a una distancia de 18.4 m?

**3.** La figura 23 muestra la relación entre la edad, en millones de años, del sedimento más antiguo y la distancia, en kilómetros, a la que fue hallado el sedimento desde un arrecife en particular en el océano. El material del lecho marino se desprende de este arrecife y se aleja de él a una velocidad aproximadamente uniforme. Halle la velocidad, en centímetros por año, a la que este material se aleja del arrecife.

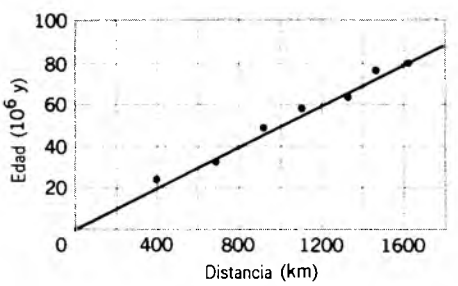



**Figura 23** Problema 3.

**4.** Carl Lewis corre los 100 metros planos en aproximadamente 10 s, y Bill Rodgers corre el maratón (26 mi, 385 yd) en aproximadamente 2 h 10 min. (*a*) ¿Cuáles son sus promedios de velocidad? (*b*) Si Carl Lewis pudiera mantener la velocidad de su carrera durante un maratón, ¿cúanto le tomaría llegar a la meta?

**5.** Durante muchos meses un bien conocido físico de alta energía se trasladaba semanalmente entre Boston, Massachusetts y Ginebra, Suiza, ciudades que están separadas por una distancia de 4000 mi. ¿Cuál fue la velocidad promedio del físico durante esa época? ¿Le sorprende que no se necesite saber la velocidad del aeroplano para resolver este problema?

**6.** El límite legal de velocidad en una autopista se cambia de 55 mi/h (= 88.5 km/h) a 65 mi/h (= 104.6 km/h). ¿Cuánto tiempo ahorrará cualquiera viajando a velocidad más alta desde la entrada en Buffalo a la salida en la ciudad de Nueva York de la autopista estatal de Nueva York en este tramo de carretera de 435 mi (= 700 km)?

**7.** Usted viaja en la carretera interestatal 10 de San Antonio a Houston, la mitad del *tiempo* a 35 mi/h (56.3 km/h) y la otra mitad a 55 mi/h (= 88.5 km/h). En el viaje de regreso usted viaja la mitad de la *distancia* a 35 mi/h y la otra mitad a 55 mi/h. ¿Cuál es la velocidad promedio (*a*) de San Antonio a Houston, (*b*) de Houston a San Antonio, y (*c*) para todo el viaje?

**8.** Un avión de propulsión a chorro (jet) de alto desempeño, que realiza maniobras para evitar el radar, está en vuelo horizontal a 35 m sobre el nivel del terreno. Súbitamente, el avión encuentra que el terreno sube cuesta arriba en 4.3°,

una cantidad difícil de detectar; véase la figura 24. ¿Cuánto tiempo tiene el piloto para hacer una corrección si ha de evitar que el avión toque el terreno? La velocidad del aire es de 1300 km/h.

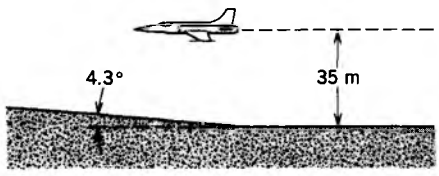



**Figura 24** Problema 8.

9. La posición de un objeto que se mueve en línea recta está dada por $x = 3t - 4t^2 + t^3$, donde $x$ está en metros y $t$ está en segundos. (*a*) ¿Cuál es la posición del objeto en $t$ = 0,1,2,3 y 4 s? (*b*) ¿Cuál es el desplazamiento del objeto entre $t = 0$ y $t = 2$ s? ¿Y entre $t = 0$ y $t = 4$ s? ¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo de tiempo entre $t = 2$ y $t = 4$ s? ¿Y desde $t = 0$ hasta $t = 3$ s?
10. Un automóvil sube una pendiente a la velocidad constante de 40 km/h y retorna cuesta abajo a la velocidad de 60 km/h. Calcule la velocidad promedio del viaje redondo.
11. Calcule la velocidad promedio en los dos casos siguientes: (*a*) *Usted camina 240 ft a razón de 4 ft/s y luego corre* 240 ft a razón de 10 ft/s a lo largo de una pista recta. (*b*) Usted camina durante 1.0 min a razón de 4 ft/s y luego corre durante 1.0 min a razón de 10 ft/s a lo largo de una pista recta.
12. Dos trenes, cada uno a una velocidad de 34 km/h, corren uno hacia el otro en la misma vía recta. Un pájaro que puede volar a 58 km/h vuela saliendo del frente de un tren cuando los trenes están separados por una distancia de 102 km y va directamente hacia el otro tren. Al llegar al otro tren vuela de regreso hasta el primer tren, y así sucesivamente. (*a*) ¿Cuántos viajes podrá hacer el pájaro de un tren a otro antes de que los trenes choquen? (*b*) ¿Cuál es la distancia total que recorre volando el pájaro?

### *Sección 2-4 Velocidad instantánea*

13. La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje $x$ está dada en centímetros por $x = 9.75 + 1.50t^3$, donde $t$ está en segundos. Considere el intervalo de tiempo de $t = 2$ a $t = 3$ y calcule (*a*) la velocidad promedio; (*b*) la velocidad instantánea en $t = 2$ s; (*c*) la velocidad instantánea en $t = 3$ s; (*d*) la velocidad instantánea en $t = 2.5$ s; y (*e*) la velocidad instantánea cuando la partícula está a medio camino entre sus posiciones en $t = 2$ y $t = 3$ s.
14. ¿Qué distancia recorre en 16 s el corredor cuya gráfica velocidad-tiempo se muestra en la figura 25?

### *Sección 2-5 Movimiento acelerado*

15. Cuál es la aceleración en $t = 11$ s del corredor del problema 14?

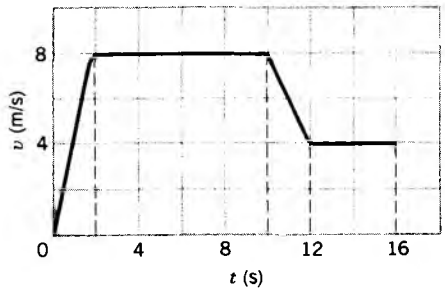



**Figura 25** Problemas 14 y 15.

16. Una partícula tenía una velocidad de 18 m/s en dirección $+x$, y 2.4 s más tarde su velocidad era de 30 m/s en dirección opuesta. ¿Cuál fue la aceleración promedio de la partícula durante este intervalo de 2.4 s?
17. Un objeto se mueve en línea recta según se describe en la gráfica velocidad-tiempo de la figura 26. Trace una gráfica que represente la aceleración del objeto en función del tiempo.

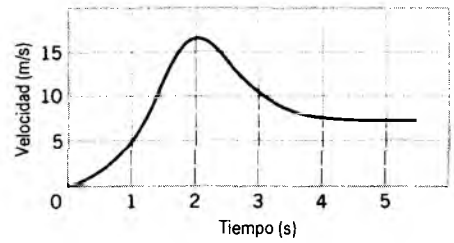



**Figura 26** Problema 17.

18. La gráfica de $x$ contra $t$ de la figura 27a es de una partícula que se mueve en línea recta. (*a*) Determine para cada intervalo si la velocidad $v$ es +, −, ó 0, y si la aceleración $a$ es +, −, ó 0. Los intervalos son *OA*, *AB*, *BC*, y *CD*. (*b*) Según la curva, ¿existe un intervalo en el cual la aceleración sea obviamente no constante? (Desprecie el comportamiento en los extremos de los intervalos.)
19. Responda las preguntas anteriores para el movimiento descrito por la gráfica de la figura 27*b*.
20. Una partícula se mueve a lo largo del eje $x$ con un desplazamiento contra tiempo como se muestra en la figura 28. Esboce las curvas de velocidad contra tiempo y de aceleración contra tiempo para este movimiento.
21. Para cada una de las situaciones siguientes, trace una gráfica que sea una descripción posible de la posición en función del tiempo de una partícula que se mueve a lo largo del eje $x$. En $t = 1$ s, la partícula tiene (*a*) velocidad cero y aceleración positiva; (*b*) velocidad cero y aceleración negativa; (*c*) velocidad negativa y aceleración positiva; (*d*) velocidad negativa y aceleración negativa. (*e*) ¿En cuál de estas situaciones aumentará la velocidad de esta partícula en $t = 1$ s?
22. Si la posición de un objeto está dada por $x = 2t^3$, donde $x$ está en metros y $t$ en segundos, halle (*a*) la velocidad

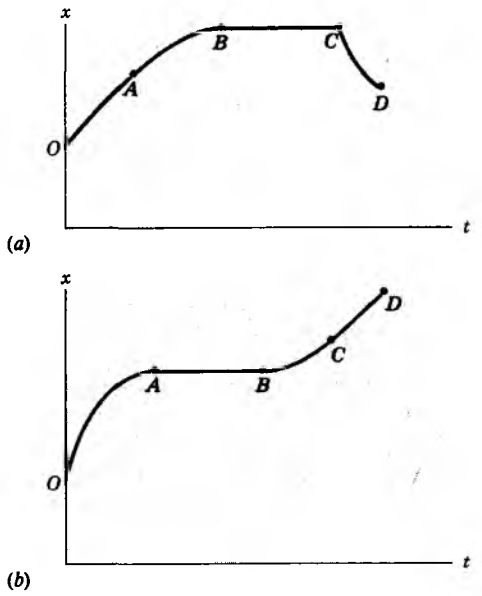



**Figura 27** (*a*) Problema 18 y (*b*) problema 19.

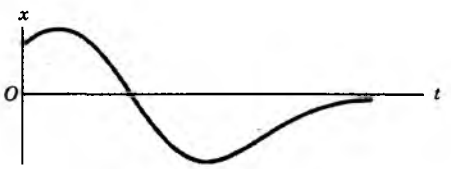



**Figura 28** Problema 20.

promedio y la aceleracion promedio entre $t = 1$ y $t = 2$ s, y (*b*) las velocidades instantáneas y las aceleraciones instantáneas en $t = 1$ y $t = 2$ s. (*c*) Compare las cantidades promedio e instantánea y en cada caso explique por qué la mayor es mayor.

**23.** Una partícula se mueve a lo largo del eje $x$ según la ecuación $x = 50t + 10t^2$, donde $x$ está en metros y $t$ en segundos. Calcule (*a*) la velocidad promedio de la partícula durante los primeros 3 s de movimiento, (*b*) la velocidad instantánea de la partícula en $t = 3$ s, y (*c*) la aceleración instantánea de la partícula en $t = 3$ s.

**24.** Un hombre está quieto desde $t = 0$ hasta $t = 5$ min; de $t = 5$ a $t = 10$ min camina vivamente en línea recta a una velocidad constante de 2.2 m/s. ¿Cuáles son su velocidad promedio y su aceleración promedio durante los intervalos de tiempo (*a*) de 2 min a 8 min, y (*b*) de 3 min a 9 min?

**25.** Una partícula qu. se mueve a lo largo del eje $x$ positivo tiene las siguientes posiciones en tiempos diversos:

| $x$ (m) | 0.080 | 0.050 | 0.040 | 0.050 | 0.080 | 0.13 | 0.20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ (s) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

(*a*) Trace el desplazamiento (no la posición) contra el tiempo. (*b*) Halle la velocidad promedio de la partícula en los intervalos de 0 a 1 s, de 0 a 2 s, de 0 a 3 s, de 0 a 4 s. (*c*) Halle la pendiente de la curva trazada en la parte (*a*) en los puntos $t = 0, 1, 2, 3, 4$, y 5 s. (*d*) Trace la pendiente (¿en unidades?) contra el tiempo. (*e*) Partiendo de la curva de la parte (*d*) determine la aceleración de la partícula en los tiempos $t = 2, 3$, y 4 s.

**26.** La posición de una partícula a lo largo del eje $x$ depende del tiempo de acuerdo con la ecuación

$$x = At^2 - Bt^3,$$

donde $x$ está en metros y $t$ en segundos. (*a*) ¿Qué unidades SI deberán tener $A$ y $B$? Para lo siguiente, haga que sus valores numéricos en unidades SI sean 3 y 1, respectivamente. (*b*) ¿En qué tiempo llegará la partícula a su posición $x$ positiva máxima? (*c*) ¿Qué longitud de trayectoria cubre la partícula en los primeros 4 s? (*d*) ¿Cuál es su desplazamiento durante los primeros 4 s? (*e*) Cuál es la velocidad de la partícula al final de cada uno de los primeros cuatro segundos? (*f*) ¿Cuál es la aceleración de la partícula al final de cada uno de los primeros cuatro segundos? (*g*) ¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo de tiempo de $t = 2$ a $t = 4$ s?

**27.** Un electrón que arranca desde el reposo tiene una aceleración que aumenta linealmente con el tiempo, esto es, $a = kt$, donde $k$ (1.50 m/s$^2$)/s o 1.50 m/s$^3$. (*a*) Trace $a$ contra $t$ durante el primer intervalo de 10 s. (*b*) A partir de la curva de la parte (*a*) trace la curva $v$ contra $t$ correspondiente y calcule la velocidad del electrón 5 s después de haber comenzado el movimiento. (*c*) A partir de la curva $v$ contra $t$ de la parte (*b*) trace la curva $x$ contra $t$ correspondiente y calcule qué tanto se ha movido el electrón durante los primeros 5 s de su movimiento.

**28.** En una galería de juegos de video, un punto está programado para moverse a través de la pantalla de acuerdo a $x = 9.00t - 0.750t^3$, donde $x$ es la distancia en centímetros medida desde el borde izquierdo de la pantalla y $t$ es el tiempo en segundos. Cuando el punto llega al borde de la pantalla, ya sea en $x = 0$ o en $x = 15$ cm, comienza de nuevo. (*a*) ¿En qué tiempo después del arranque llega el punto instantáneamente al reposo? (*b*) ¿Cuándo ocurre esto? (*c*) ¿Cuál es su aceleración cuando esto ocurre? (*d*) ¿En qué dirección se mueve en el siguiente instante después de llegar al reposo? (*e*) ¿Cuándo se sale de la pantalla?

### *Sección 2-6 Movimiento con aceleración constante*

**29.** Un jumbo de propulsión a chorro necesita alcanzar una velocidad de 360 km/h (= 224 mi/h) sobre la pista para despegar. Suponiendo una aceleración constante y una pista de 1.8 km (= 1.1 mi) de longitud, ¿qué aceleración mínima se requiere partiendo del reposo?

**30.** Un vehículo cohete se mueve en el espacio libre con una aceleración constante igual a 9.8 m/s$^2$. (*a*) Si arranca del reposo, ¿qué tanto le tomará adquirir una velocidad de un décimo de la velocidad de la luz? (*b*) ¿Qué tan lejos viajará al hacerlo así? (La velocidad de la luz es de $3.0 \times 10^8$ m/s).

**31.** La cabeza de una serpiente de cascabel puede acelerar a razón de 50 m/s$^2$ al atacar a su víctima. Si un automóvil lo hiciera también, ¿cuánto le tomaría llegar a una velocidad de 100 km/h desde el reposo?

**32.** Un muon (una partícula elemental) es disparado a una velocidad inicial de $5.20 \times 10^6$ m/s a una región donde un

campo eléctrico produce una aceleración de $1.30 \times 10^{14}$ m/s² en dirección contraria a la velocidad inicial. ¿Qué distancia recorrerá el muon antes de llegar al reposo?

**33.** Un electrón con velocidad inicial $v_0 = 1.5 \times 10^5$ m/s entra en una región de 1.2 cm de longitud donde es eléctricamente acelerado (véase la figura 29). Sale con una velocidad $v = 5.8 \times 10^6$ m/s. Cuál fue su aceleración, suponiendo que haya sido constante? (Tal proceso ocurre en el cañón de electrones de un tubo de rayos catódicos, usado en receptores de televisión y en terminales de video.)

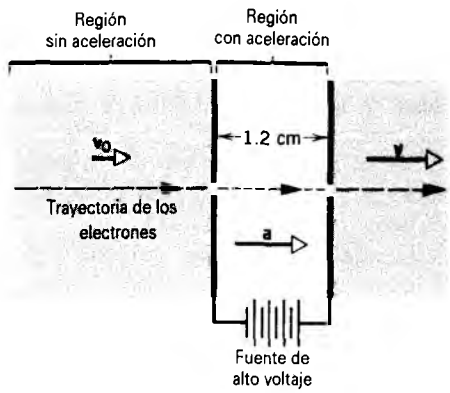



**Figura 29** Problema 33.

**34.** El coronel John P. Stapp estableció un record mundial de velocidad cuando, el 19 de marzo de 1954, rodó un trineo autopropulsado que se movió en los carriles a razón de 1020 km/h. Él y su trineo llegaron a un alto total en 1.4 s; véase la figura 30. ¿Qué aceleración experimentó? Exprese la respuesta en términos de $g$ (= 9.8 m/s²), la aceleración debida a la gravedad. (Nótese que su cuerpo actúa como un acelerómetro, y no como un velocímetro.)



**Figura 30** Problema 34.

**35.** Los frenos de su automóvil son capaces de crear una desaceleración de 17 ft/s². Si usted va a 85 mi/h y de pronto ve a un patrullero, ¿cuál es el tiempo mínimo en el cual puede usted hacer que su automóvil baje a la velocidad límite de 55 mi/h?

**36.** En una carretera seca, un automóvil con buenas llantas puede frenar con una deceleración de 11.0 mi/h · s (4.92 m/s²). (*a*) ¿Qué tanto tiempo le toma a tal automóvil, que inicialmente viajaba a 55 mi/h (= 24.6 m/s), llegar al reposo? (*b*) ¿Qué tan lejos viajó en ese tiempo?

**37.** Una flecha es disparada hacia arriba en el aire y a su regreso golpea el suelo a 260 ft/s, enterrándose 9 in en el terreno. Halle (*a*) la aceleración (supuesta como constante) requerida para detener la flecha, y (*b*) el tiempo necesario para que el terreno la detenga.

**38.** Supongamos que le piden a usted que asesore a un abogado en relación a la física implicada en uno de sus casos. La pregunta es si un conductor se había excedido del límite de velocidad de 30 mi/h antes de hacer una parada de emergencia, con los frenos accionados a fondo y las llantas patinando. La longitud de las marcas del patinaje sobre la carretera fue 19.2 ft. El oficial de la policía supuso que la deceleración máxima del automóvil no superaría la aceleración de un cuerpo en caída libre (= 32 ft/s²) y no impuso una multa al conductor. ¿Estaba excediéndose de la velocidad permitida? Explíquelo.

**39.** Un tren partió del reposo y se movió con aceleración constante. En un momento dado estaba viajando a 33.0 m/s, y 160 m más adelante lo estaba haciendo a 54.0 m/s. Calcule (*a*) la aceleración, (*b*) el tiempo requerido para recorrer 160 m, (*c*) el tiempo requerido para que alcance una velocidad de 33.0 m/s, y (*d*) la distancia recorrida desde el reposo hasta el momento en que el tren tuvo una velocidad de 33.0 m/s.

**40.** Un autómovil que se mueve con aceleración constante cubre la distancia entre dos puntos que distan entre sí 58.0 m en 6.20 s. Su velocidad cuando pasa por el segundo punto es de 15.0 m/s. (*a*) ¿Cuál es la velocidad en el primer punto? (*b*) ¿Cuál es su aceleración? (*c*) ¿A qué distancia previa al primer punto estaba el autómovil en reposo?

**41.** Un tren subterráneo acelera desde el reposo en una estación ($a$ = +1.20 m/s²) durante la primera mitad de la distancia a la siguiente estación y luego decelera hasta el reposo ($a$ = -1.20 m/s²) en la segunda mitad de la distancia. La distancia entre las estaciones es de 1.10 km. Halle (*a*) el tiempo de viaje entre estaciones y (*b*) la velocidad máxima del tren.

**42.** La cabina de un elevador en el hotel Marquis Marriott, de Nueva York (véase la figura 31) tiene un recorrido total de 624 ft. Su velocidad máxima es de 1000 ft/min y su aceleración (constante) es de 4.00 ft/s². (*a*) ¿Qué tan lejos se mueve mientras acelera a toda velocidad desde el reposo? (*b*) ¿Qué tiempo le toma hacer la carrera, comenzando y terminando en reposo?

**43.** Cuando un conductor detiene su automóvil lo más súbitamente posible, la distancia de parada puede ser vista como la suma de una "distancia de reacción", la cual es la velocidad inicial multiplicada por el tiempo de reacción, y la "distancia de frenado", la cual es la distancia cubierta durante el frenado. La tabla siguiente da los valores típicos:

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



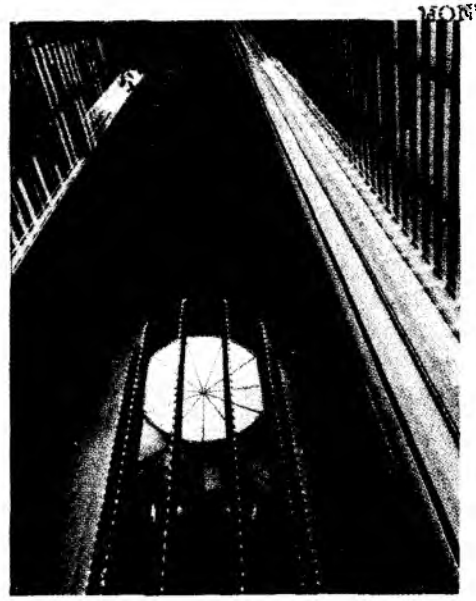


**Figura 31** Problema 42.

| *Velocidad inicial* (m/s) | *Distancia de acción* (m) | *Distancia de frenado* (m) | *Distancia de tensión* (m) |
|---|---|---|---|
| 10 | 7.5 | 5.0 | 12.5 |
| 20 | 15 | 20 | 35 |
| 30 | 22.5 | 45 | 67.5 |

(*a*) ¿Qué tiempo de reacción se supone que tiene el conductor? (*b*) ¿Cuál es la distancia de frenado del automóvil si la velocidad inicial es de 25 m/s?

**44.** En una trampa de velocidad, dos tiras activadas por presión están situadas a una distancia de 110 m cruzando una carretera en la cual el límite de velocidad es 90 km/h. Mientras viaja a 120 km/h, un conductor advierte una patrulla justo cuando activa la primera tira y reduce su marcha. ¿Qué deceleración es necesaria para que la velocidad promedio del automóvil esté dentro del límite de velocidad cuando el automóvil cruce la segunda tira?

**45.** En el instante en que un semáforo cambia a luz verde, un automóvil arranca con una aceleración constante de 2.2 m/s². En el mismo instante un camión, que viaja a una velocidad constante de 9.5 m/s, alcanza y pasa al automóvil. (*a*) ¿A qué distancia del punto de arranque el automóvil alcanzaría al camión? (*b*) ¿A qué velocidad está viajando el automóvil en ese instante? (Es instructivo trazar una gráfica cualitativa de $x$ contra $t$ para cada vehículo.)

**46.** El maquinista de un tren que se mueve a una velocidad $v_1$ advierte la presencia de un tren de carga a una distancia $d$ adelante de él que se mueve en la misma vía y en la misma dirección a una velocidad más lenta $v_2$. Acciona los frenos e imprime en su tren una deceleración constante $a$. Demuestre que

$$\text{si } d > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a} \text{ no habrá una colisión;}$$

$$\text{si } d < \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a} \text{ habrá una colisión.}$$

(Es instructivo trazar una gráfica cualitativa de $x$ contra $t$ para cada tren.)

**47.** Un automóvil que viaja a 35 mi/h (= 56 km/h) está a 110 ft (= 34 m) de una barrera cuando el conductor pisa de golpe los frenos. Cuatro segundos más tarde el automóvil golpea la barrera. (*a*) ¿Cuál fue la deceleración constante del automóvil antes del impacto? (*b*) ¿A qué velocidad viajaba el carro en el momento del impacto?

**48.** Un corredor, en una carrera de 100 m, acelera desde el reposo hasta la velocidad máxima a razón de 2.80 m/s² y mantiene esa velocidad hasta el final de la pista. (*a*) ¿Qué tiempo transcurrió? (*b*) ¿Qué distancia recorrió el corredor durante la fase de aceleración si el tiempo total en la pista fue de 12.2 s?

**49.** El manual del conductor establece que un automóvil con buenos frenos que vaya a 50 mi/h puede parar en una distancia de 186 ft. La distancia correspondiente a 30 mi/h es de 80 ft. Suponga que el tiempo de reacción del conductor, durante el cual la aceleración es de cero, y la aceleración después de que accionó los frenos son iguales para las dos velocidades. Calcule (*a*) el tiempo de reacción del conductor, y (*b*) la aceleración.

### *Sección 2-7 Cuerpos en caída libre*

**50.** Caen gotas de lluvia desde una nube situada a 1700 m sobre la superficie del suelo. Si no fueran retenidas por la resistencia del aire, ¿a qué velocidad descenderían las gotas cuando llegan al suelo? ¿Sería seguro caminar en el exterior durante una tormenta?

**51.** Un cable que soporta a un elevador desocupado de una construcción se rompe cuando el elevador está en reposo en la parte más alta de un edificio de 120 m de altura. (*a*) ¿A qué velocidad golpearía el elevador el terreno? (*b*) ¿Cuánto tiempo transcurrió en la caída? (*c*) ¿Cuál era su velocidad cuando pasó por el punto intermedio de su carrera hacia abajo? (*d*) ¿Durante cuánto tiempo estuvo cayendo cuando pasó por el punto intermedio?

**52.** En una obra en construcción una llave Stillson golpea el terreno a una velocidad de 24.0 m/s. (*a*) ¿Desde qué altura cayó inadvertidamente? (*b*) ¿Cuánto tiempo estuvo en el aire?

**53.** (*a*) ¿A qué velocidad debe ser arrojada una pelota verticalmente hacia arriba con objeto de que llegue a una altura máxima de 53.7 m? (*b*) ¿Cuánto tiempo estuvo en el aire?

**54.** Una roca es arrojada desde un acantilado de 100 m de altura, ¿Cuánto tiempo tarda en caer (*a*) los primeros 50.0 m y (*b*) los segundos 50.0 m?

**55.** Unos exploradores del espacio "aterrizan" en un planeta de nuestro sistema solar. Ellos observan que una pequeña roca lanzada verticalmente hacia arriba a razón de 14.6 m/s tarda 7.72 s en regresar al suelo. ¿En qué planeta aterrizaron? (*Sugerencia*: Véase el apéndice C.)

**56.** Una pelota es arrojada verticalmente a una velocidad inicial de 20.5 m/s desde una altura de 58.8 m. (*a*) ¿Cuál será su velocidad justo antes de que llegue al suelo? (*b*) ¿Qué tanto tiempo le tomó a la pelota llegar al suelo? (*c*) ¿Cuáles serían las respuestas a (*a*) y a (*b*) si la pelota

fuera lanzada directamente hacia arriba desde la misma altura y a la misma velocidad inicial?

**57.** La figura 32 muestra un aparato sencillo para medir el tiempo de reacción. Consta de una tira de cartulina marcada con una escala y dos puntos grandes. Un amigo sostiene la tira entre los dedos pulgar e índice en el punto superior y usted coloca sus dedos pulgar e índice en el punto inferior, teniendo cuidado de no tocar la tira. Su amigo suelta la tira, y usted trata de pescarla tan pronto como sea posible cuando ve que empieza a caer. La marca situada en el lugar en que usted pesca la tira da el tiempo de reacción. ¿A qué distancia del punto inferior se ponen las marcas de 50-, 100-, 200-, y 250-ms?

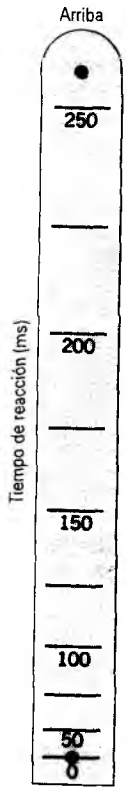



**Figura 32** Problema 57.

**58.** Una pelota arrojada hacia arriba tarda 2.25 s en llegar a una altura de 36.8 m. (*a*) ¿Cuál fue su velocidad inicial? (*b*) ¿Cuál es su velocidad a esta altura? (c) ¿Cuánta más altura alcanzará la pelota?

**59.** Mientras pensaba en Isaac Newton, una persona parada en un puente sobre una carretera deja caer inadvertidamente una manzana desde la barandilla justo cuando el extremo frontal de un camión pasa directamente abajo de la barandilla. Si el vehículo se está moviendo a 55 km/h (= 34 mi/h) y tiene una longitud de 12 m (= 39 ft), ¿qué tanto más arriba del camión deberá estar la barandilla si la manzana no logra golpear la parte trasera del camión?

**60.** Un cohete es disparado verticalmente y asciende con una aceleración vertical constante de 20 m/s$^2$ durante 1.0 min. Su combustible se agota entonces totalmente y continúa como una partícula en caída libre. (*a*) ¿Cuál es la altitud máxima alcanzada? (*b*) ¿Cuál es el tiempo total transcurrido desde el despegue hasta que el cohete regresa a la Tierra? (Desprecie las variaciones de $g$ con la altitud).

**61.** Un jugador de baloncesto, a punto de "encestar" la pelota, salta 76 cm verticalmente. ¿Cuánto tiempo invierte el jugador (*a*) en los últimos 15 cm de su salto y (*b*) en los primeros 15 cm de su salto? Ayuda esto a explicar el por qué estos jugadores parecen quedar suspendidos en el aire en la cima de sus saltos? Véase la figura 33.

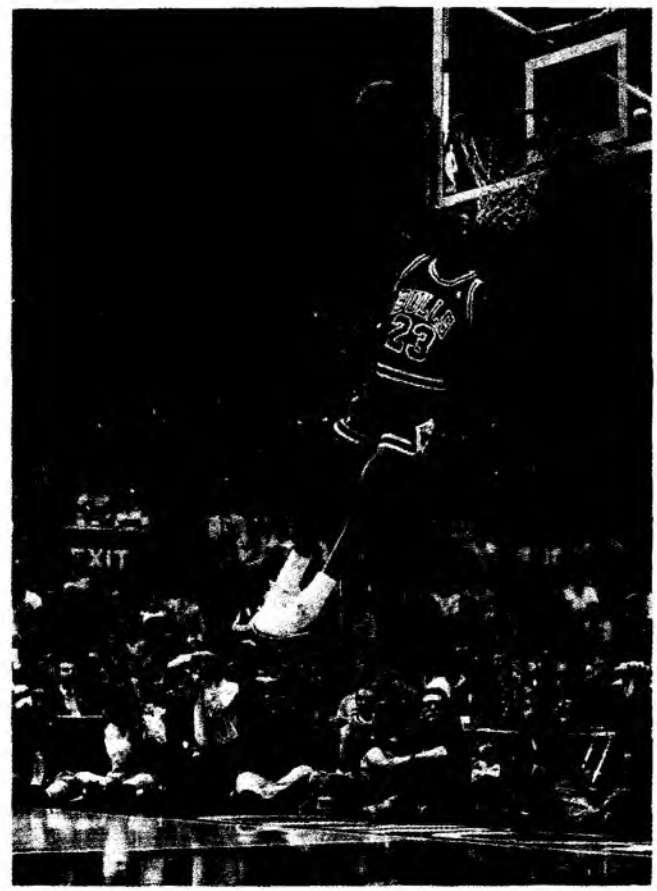


**Figura 33** Problema 61.

**62.** Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba. En su trayecto pasa el punto $A$ a una velocidad $v$, y el punto $B$, 3.00 m más alto que $A$, a velocidad $v/2$. Calcule (*a*) la velocidad $v$ y (*b*) la altura máxima alcanzada por la piedra arriba del punto $B$.

**63.** De la boca de una regadera gotea agua en el piso 200 cm más abajo. Las gotas caen a intervalos de tiempo regulares, la primera gota golpea el piso en el instante en que la cuarta gota comienza a caer. Hallar la ubicación de cada una de las otras gotas cuando una de ellas llega al suelo.

**64.** La instalación para la investigación de la gravedad cero (the Zero Gravity Research Facility), en el Centro Lewis de investigación de la NASA, incluye una torre de caída de 145 m. Ésta es una torre vertical evacuada en la cual,

entre otras posibilidades, puede dejarse caer una esfera de 1 m de diámetro que contiene un paquete experimental. (*a*) ¿Cuánto tiempo está este paquete experimental en caída libre? (*b*) ¿Cuál es su velocidad en la parte inferior de la torre? (*c*) En la parte inferior de la torre, la esfera experimenta una aceleración promedio de $25g$ cuando su velocidad se reduce a cero. ¿Qué distancia ha recorrido al llegar al reposo?

**65.** Una bola se deja caer desde una altura de 2.2 m y rebota a una altura de 1.9 m sobre el suelo. Suponga que la bola está en contacto con el suelo durante 96 ms y determine la aceleración promedio (en magnitud y dirección) de la bola durante su contacto con el suelo.

**66.** Una mujer cayó 144 ft desde la cima de un edificio, "aterrizando" sobre una caja de ventilación de metal, la cual se hundió a una profundidad de 18 in. Ella sobrevivió sin daños serios. ¿Qué aceleración (se supone uniforme) experimentó durante la colisión? Exprese su respuesta en términos de $g$.

**67.** Si un objeto viaja la mitad de su trayectoria total en el último segundo de su caída desde el reposo, halle (*a*) el tiempo y (*b*) la altura de su caída. Explique la solución físicamente inaceptable de la ecuación cuadrática del tiempo.

**68.** Dos objetos comienzan una caída libre desde el reposo partiendo de la misma altura con 1.00 s de diferencia. En cuánto tiempo después de que el primer objeto comenzó a caer estarán los dos objetos separados a una distancia de 10.0 m?

**69.** Como se ve en la figura 34, Clara salta desde un puente, seguida de cerca por Jaime. ¿Cuánto tiempo esperó Jaime después de que Clara saltó? Suponga que Jaime tiene una altura de 170 cm y que el nivel desde el que saltaron está arriba de la fotografía. Haga mediciones escalares directamente en la fotografía.



**Figura 34** Problema 69.

**70.** Un globo está ascendiendo a razón de 12.4 m/s a una altura de 81.3 m sobre el nivel del suelo cuando se deja caer desde él un bulto. (*a*) ¿A qué velocidad golpea el bulto el suelo? (*b*) ¿Cuánto tiempo le tomó llegar al suelo?

**71.** Una paracaidista, después de saltar, cae 52.0 m sin fricción. Cuando se abre el paracaídas, ella decelera a razón de 2.10 m/s$^2$ y llega al suelo a una velocidad de 2.90 m/s. (*a*) ¿Cuánto tiempo estuvo la paracaidista en el aire? (*b*) ¿A qué altura comenzó la caída?

**72.** Una bola de plomo se deja caer en una alberca desde un trampolín a 2.6 m sobre el agua. Golpea el agua con una cierta velocidad y luego se hunde hasta el fondo con esta misma velocidad constante. Llega al fondo 0.97 s después de que se ha dejado caer. (*a*) ¿Qué profundidad tiene la alberca? (*b*) ¿Supongamos que se deja drenar toda el agua de la alberca. La bola es arrojada de nuevo desde el trampolín de modo que, otra vez, llega al fondo en 0.97 s. ¿Cuál es la velocidad inicial de la bola?

**73.** En el Laboratorio Nacional de Física de Inglaterra se hizo una medición de la aceleración $g$ arrojando una bola de vidrio hacia arriba en un tubo evacuado y dejándola regresar, como en la figura 35. Sea $\Delta t_L$ el intervalo de tiempo entre los dos pasos a través del nivel inferior, $\Delta t_U$ el intervalo de tiempo entre los dos pasos a través del nivel superior, y $H$ la distancia entre los dos niveles. Demuestre que

$$g = \frac{8H}{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2}.$$

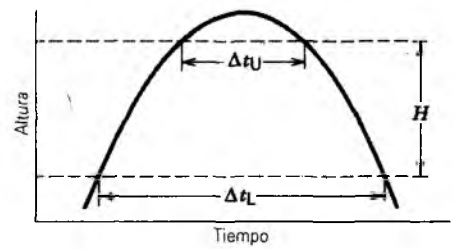



**Figura 35** Problema 73.

**74.** Una bola de acero se deja caer desde el techo de un edificio (la velocidad inicial de la bola es cero). Un observador parado enfrente de una ventana de 120 cm de altura nota que a la bola le toma 0.125 s caer desde la parte superior de la ventana a la parte inferior. La bola continúa cayendo, choca en forma completamente elástica con una acera horizontal, y reaparece en la parte baja de la ventana 2.0 s después de haber pasado por allí en su ruta de caída. ¿Cuál es la altura del edificio? (La bola tendría la misma velocidad en un punto yendo hacia arriba que la que tenía yendo hacia abajo después de una colisión completamente elástica.)

**75.** Un perro ve una maceta de flores subir y luego bajar a través de una ventana de 1.1 m de altura. Si el tiempo total en que la maceta está a la vista es de 0.74 s, halle la altura por sobre el dintel de la ventana a la que se eleva la maceta.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

# CAPÍTULO 3

# VECTORES

*Muchas de las leyes de la física implican no sólo relaciones algebraicas entre cantidades, sino también relaciones geométricas. Por ejemplo, imaginemos una peonza que gira rápidamente alrededor de su eje, mientras que el propio eje de rotación gira lentamente con respecto a la vertical. Esta relación geométrica es complicada para representarla por medio de ecuaciones algebraicas. Sin embargo, si usamos vectores para representar las variables físicas, una sola ecuación es suficiente para explicar el comportamiento. Los vectores permiten esta economía de expresión en numerosas leyes de la física. A veces la forma vectorial de una ley física nos permite ver relaciones o simetrías que de otro modo estarían veladas por una ecuación algebraica engorrosa.*

*En este capítulo exploraremos alguna de las propiedades y usos de los vectores e introduciremos las operaciones matemáticas en las que intervienen vectores. En el proceso aprenderemos que los símbolos familiares de la aritmética, tales como +, −, y ×, tienen significados diferentes cuando se aplican a los vectores.*

## 3-1 VECTORES Y ESCALARES

Al cambio de posición de una partícula se le llama *desplazamiento*. Si una partícula se mueve de la posición $A$ a la posición $B$ (Fig. 1*a*), podemos representar su desplazamiento trazando una línea desde $A$ hasta $B$. La dirección del desplazamiento puede indicarse poniendo una punta de flecha en $B$ para indicar que el desplazamiento fue *desde A hasta B*. La trayectoria de la partícula no necesita ser necesariamente una línea recta de $A$ a $B$; la flecha representa sólo el efecto neto del movimiento, no el movimiento real.

En la figura 1*b*, por ejemplo, hemos trazado una trayectoria real seguida por una partícula que va desde $A$ hasta $B$. La trayectoria no es la misma que el desplazamiento $AB$. Si fuesemos a tomar instantáneas de la partícula cuando estaba en $A$ y, más tarde, cuando estaba en alguna posición intermedia $P$, podríamos obtener el vector $AP$ del desplazamiento, que representa el efecto neto del movimiento durante este intervalo, aun cuando no conociéramos la trayectoria real entre esos puntos. Más aún, un desplazamiento tal como $A'B'$, (Fig. 1*a*), que sea paralelo a $AB$, dirigido similarmente, e igual en longitud a $AB$, representa el mismo *cambio* en la posición que $AB$. No hacemos distinción entre estos dos desplazamientos. Un desplazamiento se caracteriza, por lo tanto, por una *longitud* y una *dirección*.

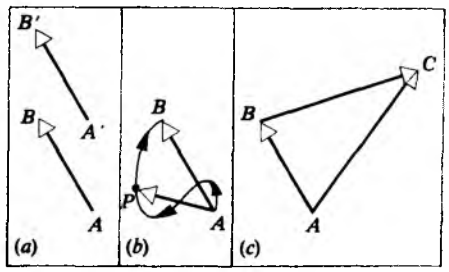



**Figura 1** Vectores de desplazamiento. (*a*) Los vectores $AB$ y $A'B'$ son idénticos, puesto que tienen la misma longitud y apuntan en la misma dirección. (*b*) La *trayectoria* real de la partícula al moverse de $A$ a $B$ puede ser la curva que se muestra; el *desplazamiento* es el vector $AB$. En el punto intermedio $P$, el desplazamiento es el vector $AP$. (*c*) Después del desplazamiento $AB$, la partícula experimenta otro desplazamiento $BC$. El efecto neto de los dos desplazamientos es el vector $AC$.

De manera similar, podemos representar un desplazamiento siguiente desde $B$ hasta $C$ (Fig. 1*c*). El efecto neto

de los dos desplazamientos es el mismo que un desplazamiento de *A* a *C*. Hablamos entonces de *AC* como la *suma* o *resultante* de los desplazamientos *AB* y *BC*. Nótese que esta suma no es una suma algebraica y que un número solo no puede especificarla en forma única.

Las cantidades que se comportan como desplazamientos se llaman *vectores*. (La palabra *vector* significa *portador* en latín. Los biólogos usan el término *vector* para significar un insecto, un animal u otro agente que *porta* una causa de enfermedad de un organismo a otro.) Los vectores, entonces, son cantidades que tienen tanto magnitud como dirección y que siguen ciertas reglas de combinación, que describiremos a continuación. El vector de desplazamiento es un prototipo conveniente. Algunas otras cantidades físicas que se representan por vectores son: fuerza, velocidad, aceleración, campo eléctrico y campo magnético. Muchas de las leyes de la física pueden ser expresadas en forma compacta por el uso de vectores, y las derivaciones que implican estas leyes a menudo se simplifican notablemente cuando lo hacemos.

Las cantidades que pueden ser especificadas completamente por un número y una unidad y que, por lo tanto, tienen sólo magnitud se llaman *escalares*. Algunas cantidades físicas escalares son: masa, longitud, tiempo, densidad, energía y temperatura. Los escalares pueden ser manipulados por las reglas del álgebra ordinaria.

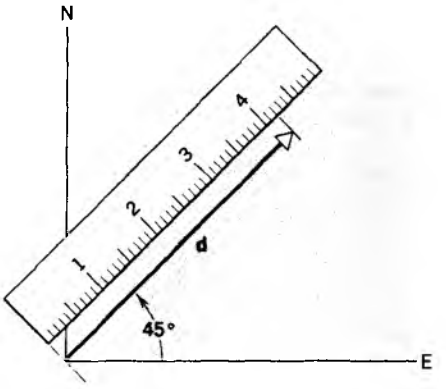



**Figura 2** El vector **d** representa un desplazamiento de magnitud 42 m (en una escala en la cual 10 m = 1 cm) en una dirección de 45° al NE.

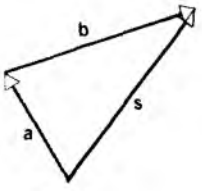



**Figura 3** La suma vectorial **a** + **b** = **s**. Compare con la figura 1*c*.

## 3-2 SUMA DE VECTORES: MÉTODO GRÁFICO

Para representar un vector en un diagrama trazamos una flecha. Elegimos que la longitud de la flecha sea proporcional a la magnitud del vector (esto es, elegimos una escala), y elegimos que la dirección de la flecha sea la dirección del vector, con la punta indicando el sentido de la dirección. Por ejemplo, un desplazamiento de 42 m en una dirección nordeste estaría representada en una escala de 1 cm por 10 m por una flecha de 4.2 cm de longitud, dibujada en un ángulo de 45° sobre una línea que apunte al este con la punta de flecha en el extremo superior derecho (Fig. 2). El vector se representa usualmente en un texto impreso por un símbolo en negritas, tal como **d**. En la escritura manual ponemos una flecha sobre el símbolo para denotar la cantidad vectorial, tal como $\vec{d}$.

Por lo general, nos interesamos sólo en la magnitud (o longitud) del vector y no en su dirección. La magnitud de **d** se escribe a veces como $|\mathbf{d}|$; con mayor frecuencia representamos la magnitud únicamente por el símbolo *d* en itálicas. El símbolo en negritas quiere significar ambas propiedades del vector, magnitud y dirección. En la escritura manual, la magnitud del vector se representa por el símbolo sin la flecha.

Consideremos ahora la figura 3 en la que hemos redibujado y reetiquetado los fectores de la figura 1*c*. La relación entre estos vectores puede escribirse así:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{s}. \qquad (1)$$

Las reglas a seguir al ejecutar esta adición vectorial gráficamente son éstas: (1) En un diagrama dibujado a escala trazar el vector **a** con su dirección propia en el sistema de coordenadas. (2) Dibujar **b** a la misma escala con la cola en la punta de **a**, asegurándose de que **b** tenga su misma dirección propia (por lo general diferente de la dirección de **a**). (3) Dibujar una línea desde la cola de **a** hasta la punta de **b** para construir el vector suma **s**. Si los vectores estuviesen representando desplazamientos, entonces **s** sería un desplazamiento equivalente en longitud y dirección a los desplazamientos sucesivos **a** y **b**. Este procedimiento puede ser generalizado para obtener la suma de cualquier número de vectores.

Puesto que los vectores difieren de los números ordinarios, esperamos reglas diferentes para su manipulación. El símbolo "+" de la ecuación 1 tiene un significado diferente de su significado en aritmética o en álgebra escalar. Nos dice que llevaremos a cabo un juego diferente de operaciones.

Tras una inspección cuidadosa de la figura 4 podemos deducir dos propiedades importantes de la adición de vectores:

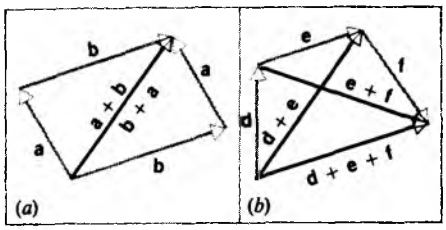



**Figura 4** (*a*) La ley conmutativa para la adición vectorial, la cual establece que **a** + **b** = **b** + **a**. (*b*) La ley asociativa, la cual establece que **d** + (**e** + **f**) = (**d** + **e**) + **f**.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad \text{(ley conmutativa)} \tag{2}$$

y

$$\mathbf{d} + (\mathbf{e} + \mathbf{f}) = (\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{f} \quad \text{(ley asociativa).} \tag{3}$$

Estas leyes aseguran que no hay diferencia alguna en el orden o agrupamiento en que sumemos los vectores; la suma es la misma. A este respecto, la adición vectorial y la adición escalar siguen las mismas reglas.

Al inspeccionar la figura 4*b* vemos cómo se usa el método gráfico para hallar la suma de más de dos vectores, en este caso **d** + **e** + **f**. Cada vector sucesivo es colocado con su cola en la punta del anterior. El vector que representa a la suma se dibuja después desde la cola del primer vector a la punta del último.

La operación de sustracción (resta) puede ser incluida en nuestra álgebra vectorial definiendo el negativo de un vector como otro vector de igual magnitud pero de dirección opuesta. Así,

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \tag{4}$$

como se muestra en la figura 5. Aquí -**b** significa un vector con la misma magnitud que **b** pero que apunta en dirección opuesta. Se deduce de la ecuación 4 que **a** - **a** = **a** + (-**a**) = 0,

No olvide que, aunque hemos usado los desplazamientos para ilustrar estas operaciones, las reglas se aplican a *todas* las cantidades vectoriales tales como velocidades y fuerzas.

## 3-3 COMPONENTES DE VECTORES

Aun cuando hemos definido la adición vectorial con el método gráfico, ello no es muy útil para vectores en tres dimensiones. A menudo es hasta inconveniente para el caso bidimensional. Otra manera de sumar vectores es el método analítico, que implica la resolución de un vector en componentes con respecto a un sistema de coordenadas en particular.

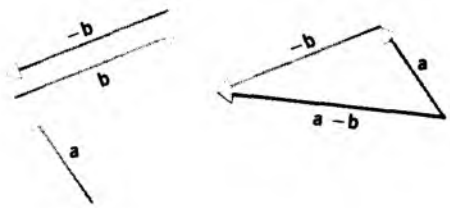



**Figura 5** La resta vectorial **a** - **b** = **a** +(-**b**).

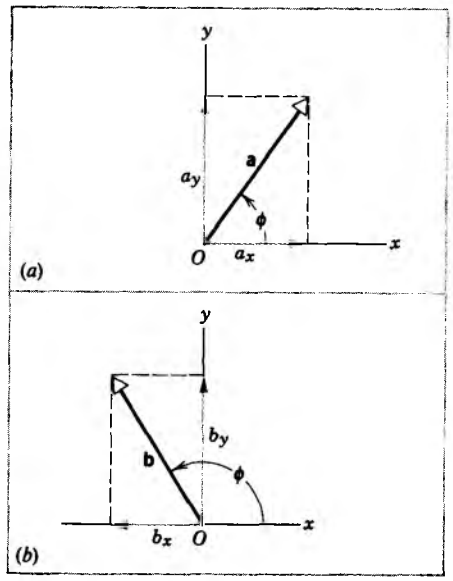



**Figura 6** (*a*) El vector **a** tiene una componente $a_x$ en la dirección $x$ y una componente $a_y$ en la dirección $y$. (*b*) El vector **b** tiene una componente $x$ negativa.

La figura 6*a* muestra un vector **a** cuya cola ha sido situada en el origen de un sistema rectangular de coordenadas. Si dibujamos líneas perpendiculares desde la punta de **a** a los ejes, las cantidades $a_x$ y $a_y$ se llaman *componentes* (cartesianas) del vector **a**. El proceso se llama *resolución de un vector en sus componentes*. El vector **a** está especificado en forma única y completa por estas componentes; dadas $a_x$ y $a_y$ podríamos reconstruir inmediatamente el vector **a**.

Las componentes de un vector pueden ser positivas, negativas, o cero. La figura 6*b* muestra un vector **b** que tiene a $b_x < 0$ y a $b_y > 0$.

En la figura 6*a* las componentes $a_x$ y $a_y$ se hallan fácilmente por

$$a_x = a \cos \phi \quad \text{y} \quad a_y = a \operatorname{sen} \phi, \tag{5}$$

donde $\phi$ es el ángulo que el vector **a** forma con el eje $x$ positivo. Como se muestra en la figura 6, los signos algebraicos de las componentes de un vector dependen del cuadrante en que se encuentra el ángulo $\phi$. Por ejemplo, cuando está entre 90° y 180°, como en la figura 6*b*, el vector

siempre tiene una componente $x$ negativa y una componente $y$ positiva. Las componentes de un vector se comportan como cantidades escalares porque, en cualquier sistema de coordenadas en particular, sólo se necesita un número con un signo algebraico para especificarlas.

Una vez que un vector queda resuelto en sus componentes, las componentes mismas pueden utilizarse para especificar al vector. En lugar de los dos números $a$ (magnitud del vector) y $\phi$ (dirección del vector relativa al eje $x$), podemos ahora tener los dos números $a_x$ y $a_y$. Podemos ir y venir entre la descripción de un vector en términos de sus componentes ($a_x$ y $a_y$) y la descripción equivalente en términos de la magnitud y la dirección ($a$ y $\phi$). Para obtener $a$ y $\phi$ a partir de $a_x$ y $a_y$, notamos en la figura 6*a* que

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{6a}$$

y

$$\tan \phi = a_y/a_x. \tag{6b}$$

El cuadrante en que se encuentra $\phi$ se determina a partir de los signos de $a_x$ y de $a_y$.

En tres dimensiones el proceso trabaja de manera similar: se dibujan líneas perpendiculares desde la punta de un vector a los tres ejes de coordenadas $x$, $y$, y $z$. La figura 7 muestra la manera como suele dibujarse para reconocer más facilmente a las componentes; la componente (a veces llamada *proyección*) de **a** en el plano $xy$ se dibuja primero, y luego desde su punta podemos hallar las componentes individuales $a_x$ y $a_y$. Podríamos obtener exactamente las mismas componentes $x$ y $y$ si trabajásemos directamente con el vector **a** en lugar de hacerlo con su proyección $xy$, pero el dibujo no sería tan claro. De la geometría de la figura 7, podemos deducir que las componentes del vector **a** son

$$a_x = a \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad a_y = a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad \text{y}$$
$$a_z = a \cos \theta. \tag{7}$$

Cuando se resuelve un vector en sus componentes conviene a veces introducir un vector de longitud unitaria en una dirección determinada. Conviene también dibujar vectores unitarios a lo largo de los ejes de coordenadas elegidos en particular. En el sistema de coordenadas rectangulares se emplean por lo general los símbolos **i**, **j**, y **k** como vectores unitarios en las direcciones positivas de $x$, $y$, y $z$, respectivamente (véase la Fig. 8). En la notación de escritura manual, los vectores unitarios se usan a menudo con un acento circunflejo o "sombrerillo", como en $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$.

Nótese que **i**, **j**, y **k** no necesitan estar ubicados en el origen. Como todos los vectores, pueden ser trasladados a cualquier lugar en el espacio de las coordenadas en tanto que sus direcciones con respecto a los ejes de coordenadas no sean cambiadas.

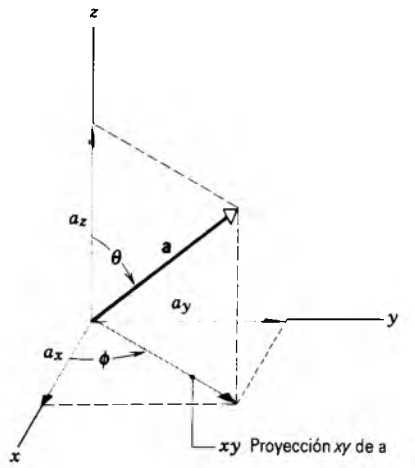



**Figura 7** Un vector **a** en tres dimensiones con componentes $a_x$, $a_y$, y $a_z$. Las componentes $x$ y $y$ se hallan convenientemente dibujando primero la proyección $xy$ de **a**. El ángulo $\theta$ entre **a** y el eje $z$ se llama *ángulo polar*. El ángulo $\phi$ en el plano $xy$ entre la proyección de **a** y el eje $x$ se llama *ángulo azimutal*. El ángulo azimutal tiene el mismo significado aquí que en la figura 6.

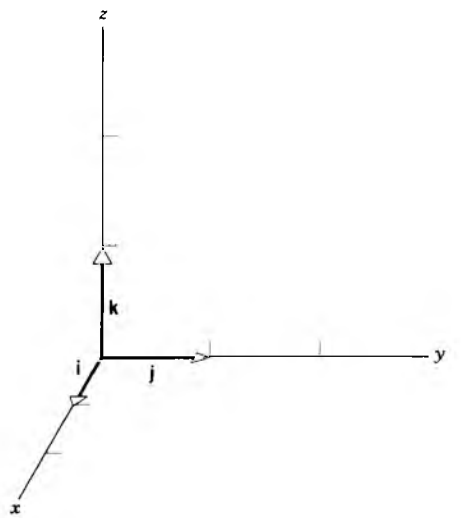



**Figura 8** Los vectores unitarios **i**, **j**, y **k** se usan para especificar los ejes $x$, $y$, y $z$, respectivamente. Cada vector carece de dimensión y tiene una longitud de la unidad.

En general, un vector **a** en un sistema de coordenadas tridimensional puede escribirse en términos de sus componentes y los vectores unitarios como

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \tag{8a}$$

o en dos dimensiones como

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}. \tag{8b}$$

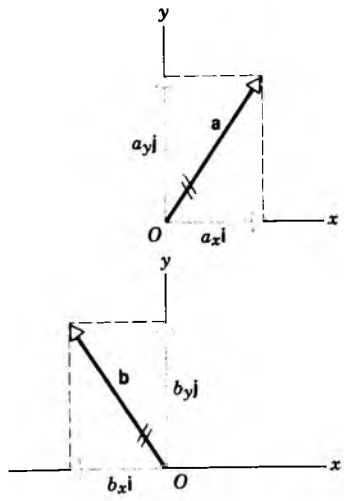



**Figura 9** Las componentes *vectoriales* de **a** y de **b**. En cualquier situación física que involucre a vectores, obtenemos el mismo resultado, ya sea que usemos el vector propio, tal como **a**, o sus dos componentes vectoriales, $a_x$**i** y $a_y$**j**. El efecto del vector solo **a** es equivalente al efecto neto de los dos vectores $a_x$**i** y $a_y$**j**. Cuando se haya reemplazado un vector con sus componentes vectoriales, es útil trazar una línea doble a través del vector original como se muestra; esto ayuda a no considerar ya más al vector original.

La relación vectorial de la ecuación 8*b* es equivalente a las relaciones escalares de la ecuación 6. Cada ecuación relaciona el vector (**a**, o $a$ y $\phi$) con sus componentes ($a_x$ y $a_y$). A veces llamamos a cantidades tales como $a_x$**i** y $a_y$**j** de la ecuación 8*b* las *componentes vectoriales* de **a**. La figura 9 muestra los vectores **a** y **b** trazados en términos de sus componentes vectoriales. Muchos problemas físicos en que intervienen vectores pueden ser simplificados reemplazando un vector por sus componentes vectoriales. Esto es, la acción de una cantidad representada como un vector puede ser reemplazada por las acciones de sus componentes vectoriales. Cuando sea necesario, nos referiremos de manera explícita a las *componentes vectoriales*, mientras que la palabra *componente* en sí continúa refiriéndose a las cantidades escalares $a_x$ y $a_y$.

### Otros sistemas de coordenadas *(Opcional)*

Para el análisis de ciertas situaciones físicas pueden ser apropiadas muchas otras variedades de sistemas de coordenadas. Por ejemplo, el sistema de coordenadas bidimensional *xy* puede cambiarse de dos maneras: (1) moviendo el origen a otra ubicación en el plano *xy*, lo cual se llama *traslación* del sistema de coordenadas, o (2) pivoteando los ejes *xy* con respecto al origen fijado, lo cual es una *rotación* del sistema de coordenadas. En ambas operaciones mantenemos al vector fijo y movemos los ejes de coordenadas. La figura 10 muestra el efecto de estos dos cambios. En el caso mostrado en la figura 10*a*, las componentes no han cambiado, pero en el caso mostrado en la figura 10*b* las componentes sí cambian.

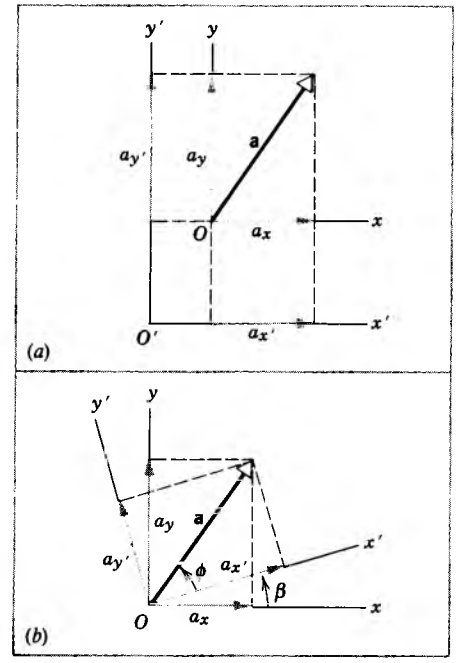



**Figura 10** (*a*) El origen *O* del sistema de coordenadas de la Fig. 6*a* se ha movido o *trasladado* a la nueva posición *O*′. Las componentes *x* y *y* de **a** son idénticas a las componentes *x*′ y *y*′. (*b*) Los ejes *x* y *y* han sido girados en el ángulo $\beta$. Las componentes *x*′ y *y*′ son diferentes a las componentes *x* y *y* (nótese que la componente *y*′ es ahora más pequeña que la componente *x*′, mientras que en la figura 6*a* la componente *y* era más grande que la componente *x*), pero *el vector* **a** *no ha cambiado*. ¿En qué ángulo tendrían que girarse los ejes de coordenadas para hacer que la componente *y*′ sea cero?

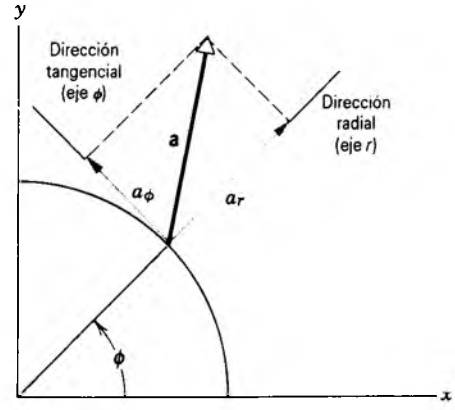



**Figura 11** El vector **a** se resuelve en sus componentes radial y tangencial. Estas componentes tendrán aplicaciones importantes cuando hablemos del movimiento circular en los capítulos 4 y 11.

Cuando la situación física que estemos analizando tenga ciertas simetrías, puede ser una ventaja elegir un sistema de coordenadas diferente para resolver un vector en sus componentes. Por ejemplo, podríamos escoger las direcciones radial y

tangencial de las coordenadas polares planas, mostradas en la figura 11. En este caso, hallamos las componentes sobre los ejes de coordenadas justamente como lo hicimos en el sistema *xyz* ordinario: dibujamos una perpendicular desde la punta del vector a cada eje de coordenadas.

Las extensiones tridimensionales de la figura 11 ( coordenadas polares esféricas o cilíndricas) son, en muchos casos importantes, muy superiores a los sistemas de coordenadas cartesianas para el análisis de problemas físicos. Por ejemplo, la fuerza de gravitación ejercida por la Tierra sobre objetos distantes tiene la simetría de una esfera, y entonces sus propiedades se describen más sencillamente en coordenadas polares esféricas. La fuerza magnética que ejerce un alambre recto y largo conductor de corriente tiene la simetría de un cilindro y queda, por lo tanto, descrito de manera mucho más sencilla en coordenadas polares cilíndricas. ■

## 3-4 SUMA DE VECTORES: MÉTODO DE LAS COMPONENTES

Ahora que hemos mostrado cómo resolver vectores en sus componentes, podemos considerar la suma de vectores por un método analítico.

Sea **s** la suma de los vectores **a** y **b**, o

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \tag{9}$$

Si dos vectores, tales como **s** y **a** + **b** han de ser iguales, deben tener la misma magnitud y apuntar en la misma dirección. Esto solamente puede suceder si sus componentes correspondientes son iguales. Recalcamos esta importante conclusión:

*Dos vectores son iguales entre sí solamente si sus componentes correspondientes son iguales.*

Para los vectores de la ecuación 9, podemos escribir:

$$\begin{aligned} s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} \\ &= (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{10}$$

Igualando las componentes $x$ en ambos lados de la ecuación 10 nos da:

$$s_x = a_x + b_x, \tag{11a}$$

e igualando las componentes $y$ nos da:

$$s_y = a_y + b_y. \tag{11b}$$

Estas dos ecuaciones algebraicas, operadas juntas, son equivalentes a la relación del vector solo de la ecuación 9.

En lugar de especificar las componentes de **s**, podemos dar su longitud y dirección:

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2} \tag{12a}$$

y

$$\tan\phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{a_y + b_y}{a_x + b_x}. \tag{12b}$$

He aquí la regla para sumar vectores por este método. (1) Resolver cada vector en sus componentes, manteniendo el curso del signo algebraico de cada componente. (2) Sumar las componentes de cada eje de coordenadas, tomando en cuenta el signo algebraico. (3) Las sumas así obtenidas son las componentes del vector suma. Una vez que conozcamos las componentes del vector suma, podemos reconstruir fácilmente a ese vector en el espacio.

La ventaja del método de separar a los vectores en sus componentes, en lugar de sumarlos directamente haciendo uso de relaciones trigonométricas apropiadas, es que siempre tratamos con ángulos rectos y así simplificamos los cálculos.

Al sumar vectores por el método de las componentes, la elección de los ejes de coordenadas determinan qué tan sencillo será el proceso. A veces, las componentes de los vectores con respecto a un juego de ejes en particular son conocidas desde el comienzo, de modo que la elección de los ejes es obvia. Otras veces una elección juiciosa de los ejes puede simplificar en forma considerable el trabajo de resolución de los vectores en sus componentes. Por ejemplo, los ejes pueden ser orientados de modo que cuando menos uno de los vectores sea paralelo a un eje; las componentes de ese vector a lo largo de los otros ejes serán entonces cero.

**Problema muestra 1** Un aeroplano viaja 209 km en línea recta formando un ángulo de 22.5° al NE. ¿A qué distancia al norte y a qué distancia al este viajó el aeroplano desde el punto de partida?

**Solución** Elegimos que la dirección $x$ positiva sea este y que la dirección $y$ positiva sea norte. Enseguida, trazamos un vector de desplazamiento (Fig. 12) desde el origen (punto de partida), formando un ángulo de 22.5° con el eje $y$ (norte) inclinado a lo largo de la dirección $x$ positiva (este). La longitud del vector representa una magnitud de 209 km. Si llamamos a este vector **d**, entonces $d_x$ da la distancia viajada hacia el este del punto de partida y $d_y$ da la distancia viajada hacia el norte del punto de partida. Tendremos que

$$\phi = 90.0° - 22.5° = 67.5°,$$

de modo que (véanse las ecuaciones 5)

$$d_x = d\cos\phi = (209\text{ km})(\cos 67.5°) = 80.0\text{ km},$$

y

$$d_y = d\,\text{sen}\,\phi = (209\text{ km})(\text{sen } 67.5°) = 193\text{ km}.$$

En este problema hemos usado componentes cartesianas, aun cuando la superficie de la Tierra es curva y, por lo tanto, no cartesiana. Por ejemplo, un aeroplano que parta del Ecuador y

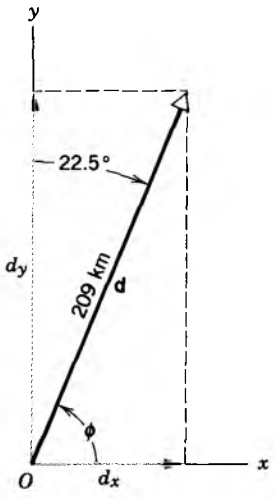



**Figura 12** Problema muestra 1.

vuele hacia el noreste eventualmente irá al norte de su punto de partida, lo cual nunca ocurre en un sistema de coordenadas planas. De igual forma, dos aeroplanos que partan de diferentes puntos del Ecuador y vuelen hacia el norte a la misma velocidad a lo largo de trayectorias paralelas eventualmente chocarán en el Polo Norte. Esto también sería imposible en un sistema de coordenadas planas. Si restringimos nuestros cálculos a distancias que sean pequeñas con respecto al radio de la Tierra (6400 km), podemos usar con seguridad el sistema de coordenadas cartesianas para analizar los desplazamientos sobre la superficie de la Tierra.

**Problema muestra 2** Un automóvil viaja hacia el este en una carretera a nivel durante 32 km. Después da vuelta hacia el norte en una intersección y viaja 47 km antes de detenerse. Hallar el desplazamiento resultante del automóvil.

**Solución** Elegimos un sistema de coordenadas fijo con respecto a la Tierra, con la dirección $x$ positiva apuntando hacia el este y la dirección $y$ positiva apuntando hacia el norte. Los dos desplazamientos sucesivos, **a** y **b**, se trazan como se muestra en la figura 13. El desplazamiento resultante **s** se obtiene de $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Puesto que **b** no tiene componente $x$ y **a** no tiene componente $y$, obtenemos (véanse las ecuaciones 11)

$$s_x = a_x + b_x = 32 \text{ km} + 0 = 32 \text{ km},$$
$$s_y = a_y + b_y = 0 + 47 \text{ km} = 47 \text{ km}.$$

La magnitud y la dirección de **s** son, entonces (véanse las ecuaciones 12)

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(32 \text{ km})^2 + (47 \text{ km})^2} = 57 \text{ km},$$

$$\tan \phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{47 \text{ km}}{32 \text{ km}} = 1.47, \qquad \phi = \tan^{-1}(1.47) = 56°.$$

El vector de desplazamiento resultante **s** tiene una magnitud de 57 km y forma un ángulo de 56° al noreste.

**Problema muestra 3** Tres vectores coplanares están expresados con respecto a un cierto sistema de coordenadas rectangulares como sigue:

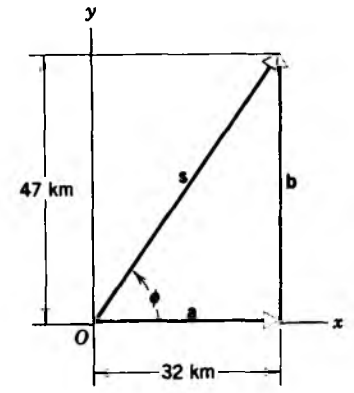



**Figura 13** Problema muestra 2.

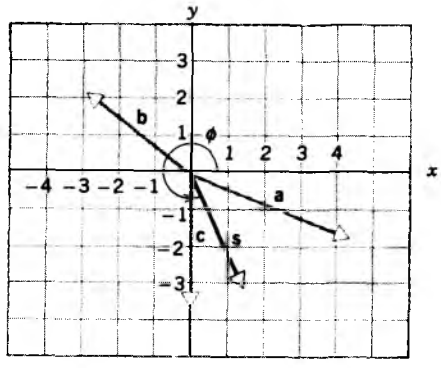



**Figura 14** Problema muestra 3.

$$\mathbf{a} = 4.3\mathbf{i} - 1.7\mathbf{j},$$
$$\mathbf{b} = -2.9\mathbf{i} + 2.2\mathbf{j},$$

y

$$\mathbf{c} = -3.6\mathbf{j},$$

donde las componentes están dadas en unidades arbitrarias. Halle el vector **s** que sea la suma de estos vectores.

**Solución** Generalizando las ecuaciones 11 al caso de tres vectores, tenemos que

$$s_x = a_x + b_x + c_x = 4.3 - 2.9 + 0 = 1.4,$$

y

$$s_y = a_y + b_y + c_y = -1.7 + 2.2 - 3.6 = -3.1.$$

Entonces

$$\mathbf{s} = s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} = 1.4\mathbf{i} - 3.1\mathbf{j}.$$

La figura 14 muestra los cuatro vectores. A partir de las ecuaciones 6 podemos calcular que la magnitud de **s** es 3.4 y que el ángulo $\phi$ que **s** forma con el eje $x$ positivo, medido en sentido antihorario de ese eje, es

$$\phi = \tan^{-1}(-3.1/1.4) = 294°.$$

La mayoría de las calculadoras de bolsillo dan ángulos entre + 90° y -90° para la tangente del arco. En este caso, -66° (que nos da la calculadora) es equivalente a 294°. Sin embargo, obtendríamos el mismo ángulo si pidiéramos $\tan^{-1}(3.1/-1.4)$, lo cual nos daría un ángulo en el segundo cuadrante (superior izquierdo). Dibujando un diagrama similar a la figura 14 podemos evitar graves equivocaciones y, de ser necesario, puede convertirse el valor de la calculadora en un resultado en el cuadrante correcto usando la identidad $\tan(-\phi) = \tan(180° - \phi)$.

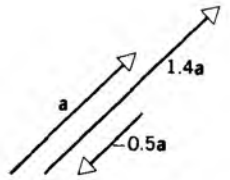



**Figura 15** La multiplicación de un vector **a** por un escalar $c$ da un vector $c\mathbf{a}$ cuya magnitud es $c$ veces la magnitud de **a**. El vector $c\mathbf{a}$ tendrá la misma dirección de **a** si $c$ es positivo y la dirección opuesta si $c$ es negativo . Los ejemplos ilustrados son para $c = +1.4$ y $c = -0.5$.

## 3-5 MULTIPLICACIÓN DE VECTORES

Cuando sumamos cantidades escalares, los sumandos deben tener las mismas dimensiones, y la suma tendrá igualmente las mismas dimensiones. La misma regla se aplica a la suma de cantidades vectoriales. Por otra parte, podemos multiplicar cantidades escalares de dimensiones diferentes y obtener un producto de dimensiones posiblemente diferentes de cualquiera de las cantidades que han sido multiplicadas, por ejemplo distancia = velocidad × tiempo.

Como con los escalares, los vectores de diferentes clases pueden multiplicarse por otro para generar cantidades de dimensiones físicas nuevas. A causa de que los vectores tienen tanto dirección como magnitud, el vector de multiplicación no puede seguir exactamente las mismas reglas que las reglas algebraicas de la multiplicación escalar. Debemos establecer nuevas reglas de multiplicación para los vectores.

Consideramos útil definir tres clases de operaciones de multiplicación con vectores: (1) multiplicación de un vector por un escalar, (2) multiplicación de dos vectores de modo tal que den por resultado un escalar, y (3) multiplicación de dos vectores de modo tal que den por resultado otro vector. Existen aún otras posibilidades que no consideraremos aquí.

1. *Multiplicación de un vector por un escalar.* La multiplicación de un vector por un escalar tiene un significado sencillo: el producto de un escalar $c$ y un vector **a**, escrito $c\mathbf{a}$, se define que es un nuevo vector cuya magnitud es $c$ multiplicado por la magnitud de **a**. El nuevo vector tiene la misma dirección que **a** si $c$ es positivo y la dirección opuesta si $c$ es negativo, como se muestra en la figura 15. Para dividir un vector por un escalar simplemente multiplicamos el vector por el recíproco del escalar. A menudo el escalar no es un número puro sino una cantidad física con dimensiones y unidades.

2. *Multiplicación de dos vectores para dar por resultado un escalar.* El *producto escalar* de dos vectores **a** y **b**, escrito como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, se define como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi, \tag{13}$$

donde $a$ es la magnitud del vector **a**, $b$ es la magnitud del vector **b**, y $\cos \phi$ es el coseno del ángulo $\phi$ entre los dos vectores (véase la Fig. 16). A causa de la notación, $\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ se llama también el producto punto de **a** y **b** y se le dice "**a** punto **b**". El producto punto es independiente de la elección de los ejes de coordenadas.

Puesto que $a$ y $b$ son escalares y $\cos \phi$ es un número puro, el producto escalar de dos vectores es un escalar. El producto escalar de dos vectores puede ser visto como el producto de la magnitud de un vector y la componente del otro vector en la dirección del primero, como en la figura 16. El producto escalar puede expresarse en forma correspondiente ya sea como $a(b \cos \phi)$ o como $b(a \cos \phi)$.

Podríamos haber definido que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es cualquier operación, por ejemplo, $a^{1/3}\, b^{1/4} \tan(\phi/2)$, pero resultaría que esto no tiene uso para nosotros en física. Con nuestra definición del producto escalar, un número de cantidades físicas importantes puede ser descrito como el producto escalar de dos vectores. Algunos de ellos son el trabajo mecánico, la energía potencial de gravitación, el potencial eléctrico, la potencia eléctrica y la densidad de la energía electromagnética. Más adelante, definiremos estas cantidades físicas en términos de los productos escalares de dos vectores.

Si dos vectores son perpendiculares, su producto punto se desvanece. Usando la definición del producto punto, podemos derivar las siguientes relaciones para los vectores unitarios cartesianos **i**, **j**, y **k**:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Con estas relaciones, podemos hallar (véase el problema 35) una forma alternativa para el producto punto de dos vectores **a** y **b** en un sistema tridimensional de coordenadas $xyz$ en términos de sus componentes:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{15}$$

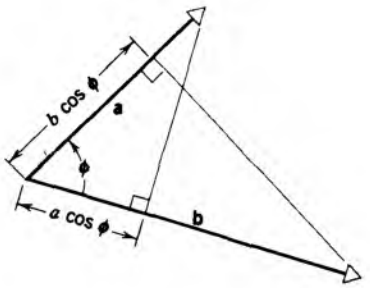



**Figura 16** El producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (= $ab \cos \phi$) es el producto de la magnitud de un vector (por ejemplo, $a$) y la componente del otro vector en la dirección del primero ($b \cos \phi$).

3. *Multiplicación de dos vectores para dar como resultado otro vector.* El *producto vectorial* de dos vectores **a** y **b** se escribe como $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y es otro vector **c**, donde $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. La *magnitud* de **c** se define como

$$c = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \operatorname{sen} \phi, \qquad (16)$$

donde $\phi$ es el ángulo (más pequeño) entre **a** y **b**. Existen dos ángulos diferentes entre **a** y **b**: $\phi$ como en la figura 16 y $2\pi - \phi$. En la multiplicación vectorial siempre elegimos el más pequeño de estos ángulos. En la ecuación 13 para el producto escalar, no importa cuál escojamos, porque $\cos(2\pi - \phi) = \cos \phi$. Sin embargo, sí importa en la ecuación 16, porque $\operatorname{sen}(2\pi - \phi) = -\operatorname{sen} \phi$.

A causa de la notación, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se llama siempre el producto cruz de **a** y **b** y nos referimos a él como dice "**a** cruz **b**".

La *dirección* de **c**, el producto vectorial de **a** y **b**, se define como perpendicular al plano formado por **a** y **b**. Para especificar el sentido del vector **c** nos referiremos a la figura 17. Dibujamos los vectores **a** y **b** intersecándose en sus colas, imaginando un eje perpendicular al plano de **a** y **b** a través de su origen. Doblamos hacia adentro ahora los dedos *de la mano derecha* alrededor de este eje y empujamos al vector **a** hacia el vector **b** a través del ángulo más pequeño entre ellos con las puntas de los dedos, manteniendo el pulgar extendido; la dirección del pulgar da entonces la dirección del vector producto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Este procedimiento describe una convención. Los dos vectores **a** y **b** forman un plano, y existen dos direcciones (opuestas) para un vector **c** que sea perpendicular al plano. Nuestra elección se basa en la convención de la mano derecha. (Una convención de la mano izquierda nos daría la dirección opuesta para el vector producto.)

Si $\phi$ es 90°, entonces **a**, **b**, y **c** (= $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$) están todos en ángulos rectos entre sí y dan las direcciones de un sistema tridimensional de coordenadas de mano derecha.

Nótese que $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ no es el mismo vector que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, de modo que el orden de los factores es importante en un producto vectorial. Esto no sucede así en el caso de los escalares porque el orden de los factores en álgebra o en aritmética no afecta al producto resultante. En realidad, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$, como se muestra en la figura 17. Esto puede deducirse del hecho de que la magnitud $ab$ sen $\phi$ es igual a la magnitud $ba$ sen $\phi$, pero la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es opuesta a la de $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. El producto cruz, como hemos ya definido, es independiente de la elección de los ejes de coordenadas.

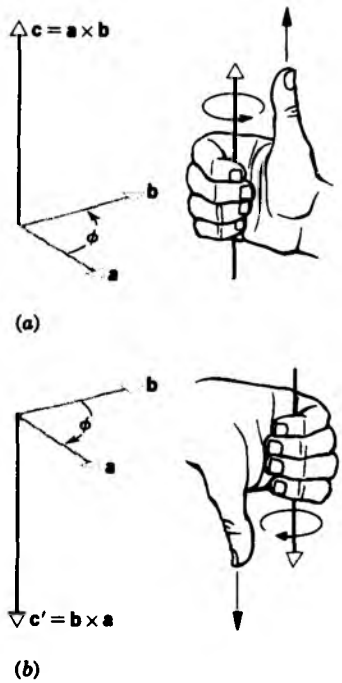



**Figura 17** La regla de la mano derecha para los productos vectoriales. (*a*) Girar el vector **a** hacia el vector **b** con los dedos de la mano derecha. El pulgar muestra la dirección de **c**. (*b*) Invirtiendo el procedimiento se demuestra que $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Los tres vectores cartesianos unitarios **i**, **j**, y **k** de un sistema de coordenadas de mano derecha están relacionados por el producto cruz $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. (Esto, de hecho, define lo que queremos significar por sistema de mano derecha. A menos que se indique lo contrario, usaremos siempre sistemas de coordenadas de mano derecha.) Manteniendo **a i**, **j**, y **k** en el mismo orden cíclico podemos también escribir $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$. Si cambiamos el orden entra un signo menos; por ejemplo, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$. El producto cruz de dos vectores unitarios iguales cualesquiera se desvanece ($\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$), como lo hace el producto cruz de cualquier vector consigo mismo ($\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$). Con estas relaciones para los productos cruz de vectores unitarios iguales o diferentes, podemos demostrar que (véase el problema 36)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}. \qquad (17)$$

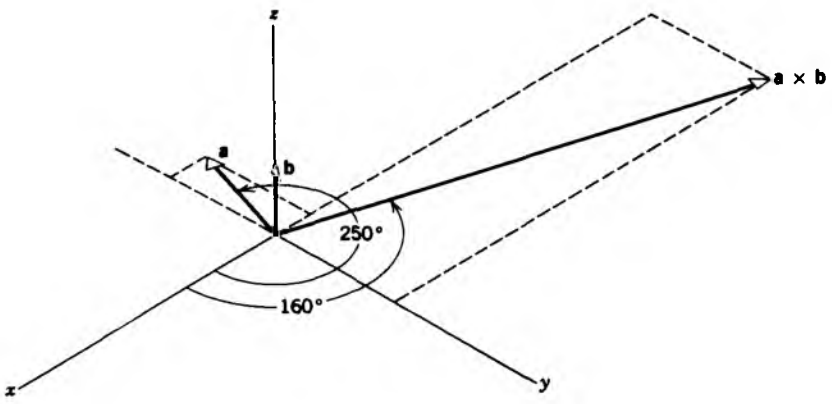



**Figura 18** Problema muestra 4.

La razón para definir el producto vectorial de esta manera es que ha demostrado ser muy útil en física. A menudo encontramos cantidades físicas que son vectores cuyo producto, definido como antes, es una cantidad vectorial con un significado físico importante. Algunos ejemplos de cantidades físicas que son productos vectoriales son el momento de torsión o torca, el momento angular, la fuerza sobre una carga que se mueve en un campo magnético, y el flujo de energía electromagnética. Tales cantidades se estudiarán más adelante, y señalaremos su conexión con el vector producto de dos vectores.

**Productos generalizados de vectores *(opcional)***

El producto escalar es el producto más sencillo de dos vectores. El orden de la multiplicación no altera el producto. El producto vector es el siguiente caso más sencillo. Aquí el orden de multiplicación sí altera el producto, pero sólo por un factor de menos uno, lo cual implica una dirección inversa. Otros productos de vectores son útiles pero más complicados. Por ejemplo, un *tensor* puede ser generado multiplicando cada una de las tres componentes de un vector por las tres componentes de otro vector. Por lo tanto, el tensor (del segundo rango) tiene nueve números asociados; el vector, tres, y el escalar sólo uno. Algunas cantidades físicas que pueden ser representadas por tensores son el esfuerzo mecánico y eléctrico, la inercia de rotación y la deformación. Existen cantidades físicas todavía más complejas. En este libro, sin embargo, nos ocuparemos solamente de escalares y vectores. ■

**Problema muestra 4** Cierto vector **a** en el plano *xy* está dirigido 250° en el sentido antihorario del eje positivo *x* y tiene una magnitud de 7.4 unidades. El vector **b** tiene una magnitud de 5.0 unidades y su dirección es paralela al eje *z*. Calcule (*a*) el producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y (*b*) el producto vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

**Solución** (*a*) A causa de que **a** y **b** son perpendiculares entre sí, el ángulo $\phi$ entre ellos es 90° y $\cos \phi = \cos 90° = 0$. Por lo tanto, según la ecuación 13, el producto escalar es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi = ab \cos 90° = (7.4)(5.0)(0) = 0,$$

que coincide con el hecho de que ningún vector tiene una componente en la dirección del otro.

(*b*) La *magnitud* del vector producto es, según la ecuación 16,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \operatorname{sen} \phi = (7.4)(5.0)\operatorname{sen} 90° = 37.$$

La *dirección* del vector producto es perpendicular al plano formado por **a** y **b**. Por lo tanto, como se muestra en la figura 18, se halla en el plano *xy* (perpendicular a **b**) a un ángulo de 250° - 90° = 160° del eje *x* positivo (perpendicular a **a** de acuerdo con la regla de la mano derecha).

Podemos hallar las componentes de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ usando la ecuación 17. Primero necesitamos las componentes de **a** y de **b**:

$$\begin{aligned} a_x &= 7.4 \cos 250° = -2.5, & b_x &= 0, \\ a_y &= 7.4 \operatorname{sen} 250° = -7.0, & b_y &= 0, \\ a_z &= 0; & b_z &= 5.0. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= [(-7.0)(5.0) - (0)(0)]\mathbf{i} + [(0)(0) - (-2.5)(5.0)]\,\mathbf{j} \\ &\quad + [(-2.5)(0) - (-7.0)(0)]\mathbf{k} \\ &= -35\mathbf{i} + 13\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Lo que corresponde a la magnitud y la dirección mostradas en la figura 18.

## 3-6 LAS LEYES VECTORIALES EN LA FÍSICA* *(Opcional)*

Refiriéndonos a la figura 10*b*, podemos demostrar (véase problema 51) que las componentes del vector de desplazamiento **a** del sistema de coordenadas en rotación (*x'y'*) están relacionadas con las del sistema original (*xy*) según

$$a_{x'} = a_x \cos \beta + a_y \operatorname{sen} \beta \qquad (18a)$$

$$a_{y'} = -a_x \operatorname{sen} \beta + a_y \cos \beta, \qquad (18b)$$

donde $\beta$ es el ángulo según el cual han sido rotados los ejes de coordenadas.

Las ecuaciones 18 son ejemplos de ecuaciones de *transformación*, que relacionan las componentes del vector de despla-

* El material de esta sección puede omitirse sin pérdida de la continuidad.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



zamiento en un sistema de coordenadas con sus componentes en cualquier sistema de rotación. Podemos usar estas ecuaciones para formular una definición más general y rigurosa del vector, al cual hasta ahora hemos definido como una cantidad física que tiene tanto magnitud como dirección y que obedece a ciertas reglas de combinación. Podemos ahora sustituir aquella definición por otra más específica:

> *En toda cantidad física (velocidad o fuerza, por ejemplo) que vaya a ser representada por un vector, las componentes de esa cantidad deben transformarse bajo rotación según las reglas dadas en las ecuaciones 18.*

Aunque las ecuaciones 18 son válidas para vectores en el espacio bidimensional, pueden ser generalizadas a tres dimensiones. El caso bidimensional, sin embargo, ilustra todos los conceptos esenciales.

Como se indicó en la figura 10, un vector no cambia, o es *invariante*, cuando los ejes de coordenadas son trasladados o rotados. Ciertas cantidades físicas tienen esta misma propiedad; en el caso de la velocidad, por ejemplo, mediríamos el mismo valor para la velocidad de un automóvil que pasa delante de nosotros que lo haría el vecino que vive en la casa que está al otro lado de la calle (¡siempre y cuando ambas casas estén en reposo en relación una con la otra!). Las cantidades que tienen estas propiedades y que obedecen a las leyes de la aritmética vectorial dadas en este capítulo, se representan como vectores. Entre estas cantidades están la velocidad, la aceleración, la fuerza, el ímpetu, el momento angular, y los campos eléctrico y magnético. Las ecuaciones que relacionan estas cantidades son ecuaciones vectoriales; ejemplos de ecuaciones vectoriales son $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = s$ (un escalar), $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = 6\mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, etc. Por otra parte, muchas cantidades físicas están bien descritas por escalares y ecuaciones escalares: temperatura, presión, masa, energía, y tiempo. Una de las características de las ecuaciones vectoriales es que no sólo indican la relación matemática entre cantidades físicas sino también la relación geométrica. Consideremos algunos ejemplos de ecuaciones que desarrollaremos y estudiaremos ampliamente más adelante en este texto; aquí sólo presentamos la ecuaciones como ejemplos de las formas básicas.

Comencemos con la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (véase el capítulo 5), que da la fuerza $\mathbf{F}$ que debe actuar sobre una partícula de masa $m$ para dotarla de una aceleración $\mathbf{a}$. En el lado derecho tenemos el escalar masa multiplicado por el vector aceleración, y en el lado izquierdo tenemos el vector fuerza. La ecuación parece sencilla, pero es rica en contenido. Llevando a cabo la multiplicación e igualando las componentes, descubrimos en realidad *tres* ecuaciones independientes: $F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$, y $F_z = ma_z$. Cada una de estas ecuaciones puede ser resuelta por separado al estudiar cómo responde la partícula a la fuerza. Así, la componente $y$ de la fuerza, por ejemplo, no tiene absolutamente ningún efecto sobre las componentes $x$ o $z$ de la aceleración. En forma equivalente, podríamos decir que la dirección de la aceleración de un sistema está determinada por la dirección de la fuerza que actúa sobre él (porque al multiplicar un vector por un escalar positivo da un vector en la misma dirección). Usaremos este hecho en el próximo capítulo cuando analicemos el movimiento bidimensional de proyectiles que se mueven bajo la influencia de la gravedad.

Las leyes que involucran a productos escalares surgen en varios contextos diferentes. Nuestro primer ejemplo viene de la definición del trabajo mecánico $W$, un escalar, que es efectuado por una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un sistema produciendo un desplazamiento $\mathbf{d}$: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = Fd \cos \phi$ (véase el capítulo 7). En este caso, la fuerza no necesita ser precisamente paralela al desplazamiento; imaginemos, por ejemplo, que estamos jalando un trineo a lo largo del terreno con un cable que pasa por nuestro hombro. El desplazamiento sería horizontal, pero la fuerza (que se ejerce a lo largo del cable) tendrá componentes tanto horizontal como vertical. Nótese que de acuerdo con las relaciones geométricas ilustradas en la figura 16, sólo la componente de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{d}$ (que es $F \cos \phi$) contribuirá al trabajo efectuado realmente. Una vez más, la ecuación del vector conlleva información acerca de una relación geométrica.

Un ejemplo de una ley física que involucra a un producto vectorial puede consistir en la ecuación $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (véase el capítulo 34), la cual da la fuerza $\mathbf{F}$ experimentada por una carga eléctrica $q$ al moverse con velocidad $\mathbf{v}$ a través de un campo magnético $\mathbf{B}$. La naturaleza geométrica de la fuerza, determinada por la ecuación vectorial, es responsable de que las trayectorias de las partículas pasen a ser órbitas circulares, como en los grandes aceleradores de partículas, como los ciclotrones. Nótese que la fuerza está siempre en ángulo recto tanto con la velocidad como con la dirección del campo magnético. Sin la ecuación vectorial tendríamos dificultad para entender la base de este comportamiento.

Las leyes físicas que están representadas por ecuaciones vectoriales son universales e independientes de cualquier elección particular del sistema de coordenadas. Específicamente, si fuésemos a examinar el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético a partir de dos sistemas de coordenadas, uno de los cuales estuviese rotado con respecto al otro, hallaríamos ciertamente que los vectores $\mathbf{F}$ (fuerza), $\mathbf{v}$ (velocidad), y $\mathbf{B}$ (campo magnético) tienen componentes diferentes en el sistema rotado (como en la Fig. 10*b*), pero los observadores en ambos sistemas estarían de acuerdo en la forma de la ley física. Esto es, en el sistema rotado los vectores transformados deben satisfacer $\mathbf{F}' = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$.

Esta propiedad de transformación es una de las maneras de comportamiento inteligente de la naturaleza; de esas que solemos dar por hecho, porque pensamos que la naturaleza *debe* comportarse así. Con la excepción de los efectos puramente locales, por ejemplo: la fuerza eléctrica entre dos electrones separados por cierta distancia *no debería* depender de si la separación se midió de norte a sur o de este a oeste. No es demasiado difícil imaginar un universo que no se comporte tan bien; la longitud de un vector, por ejemplo, podría cambiar cuando lo trasladamos o lo hacemos rotar. Los físicos y los matemáticos han especulado sobre por qué nuestro universo tiene estas simetrías particulares, tales como la traslación y la rotación, y han aprendido que existen relaciones fascinantes entre las simetrías de la naturaleza y ciertas cantidades que se *conservan* (esto es, su magnitud total no cambia) en los procesos físicos. Por ejemplo, la invariancia de las leyes físicas bajo la simetría de la *traslación en el tiempo* (esto es, si una ley sirve para los lunes también sirve para los martes) conduce directamente a la ley de la conservación de la energía.

## Simetría de reflexión, vectores polares, y vectores axiales

Existe otra clase de transformación que es bastante diferente de la traslación y de la rotación. Esta transformación implica invertir el sistema de coordenadas, esto es, $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, y $z \rightarrow -z$. En efecto, todo el sistema se refleja a través del origen.

Superficialmente, podríamos esperar que, para esta transformación, todo lo que tendríamos que hacer en nuestras ecuaciones es reemplazar cada componente de un vector por su negativo. (Los escalares no se ven afectados por esta inversión.)

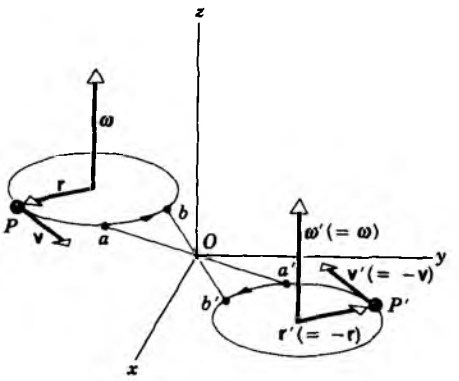



**Figura 19** Una partícula $P$ moviéndose en círculo es representada por el vector de la velocidad angular $\omega$. Si todas las coordenadas se reflejan respecto al origen $O$, la partícula "reflejada" $P'$ gira en un círculo y está representada por el vector de la velocidad angular $\omega'$.

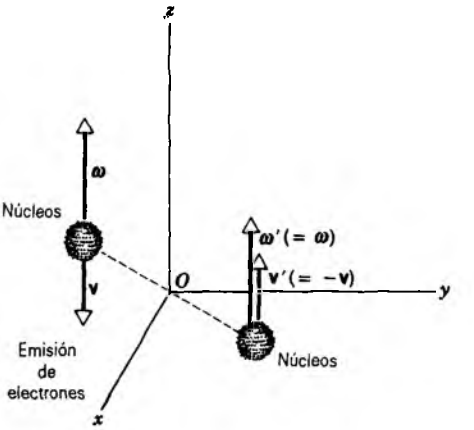



**Figura 20** Un grupo de núcleos girando, representado por un vector de velocidad angular $\omega$, emite electrones preferentemente en dirección opuesta a $\omega$. En la versión reflejada del experimento, los electrones se emitirán paralelos a $\omega'$. El experimento y su imagen reflejada se ven bastante diferentes entre sí, mostrando que la simetría de la reflexión se viola por estas desintegraciones.

Después de todo, si invertimos el eje $x$ sin cambiar el vector **a**, entonces, claramente $a_x \rightarrow -a_x$. Así, en lugar de dibujar un sistema de coordenadas invertido, lo que necesitamos hacer es trazar el vector **−a** en el sistema de coordenadas original. Estas imposiciones son del todo correctas para una clase grande de cantidades físicas que representamos con vectores: la velocidad, la aceleración, la fuerza, el ímpetu lineal, el campo eléctrico. A tales vectores "bien comportados" se les da el nombre genérico de *vectores polares*.

Otra clase de vectores no sigue este tipo de comportamiento bajo la inversión. Por ejemplo, como se ilustra en la figura 19, a menudo es útil representar a una partícula que se mueve en círculo por un vector $\omega$ de *velocidad angular*. La magnitud de $\omega$ dice en efecto lo rápido que está girando la partícula, y la dirección de $\omega$ es perpendicular al plano del círculo determinado por la regla de la mano derecha. (Si doblamos hacia adentro los dedos de la mano derecha en dirección del movimiento de la partícula, el pulgar extendido apunta en la dirección de $\omega$.)

Consideremos ahora la situación cuando la órbita de la partícula se invierte o se refleja a través del origen, como en la figura 19. El vector **r** que ubica a la partícula $P$ en relación con el centro del círculo se transforma a $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$, y la velocidad se convierte en $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$. Cuando la partícula original se mueve de $a$ a $b$, la partícula reflejada se mueve de $a'$ a $b'$. El sentido o dirección de la rotación (ya sea en sentido de las manecillas del reloj o en sentido antihorario) no cambia, y así $\omega' = \omega$. Entonces, a diferencia de los vectores polares **r** y **v**, la velocidad angular *no cambia* de signo cuando las coordenadas se han invertido. A tal vector se le llama *axial* o *seudovector*; la torca y el campo magnético son otros ejemplos de éste.

Los vectores **r**, **v**, y $\omega$ se relacionan por el producto cruz $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, tema que estudiaremos cuando consideremos el movimiento de rotación en el capítulo 11. Si los tres vectores cambian de signo en la inversión, entonces las relaciones entre los vectores reflejados serían $-\mathbf{v} = (-\omega) \times -(\mathbf{r}) = \omega \times \mathbf{r}$. Esto es una contradicción, ya que $\omega \times \mathbf{r}$ no puede ser $-\mathbf{v}$ y **v** a la vez (a no ser que **v** sea cero, lo cual no es el caso aquí). Así, la transformación $\omega' = \omega$ es absolutamente necesaria, con objeto de que la relación física $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ tenga la misma forma $\mathbf{v}' = \omega' \times \mathbf{r}'$ en el sistema reflejado. Esto es lo que significa la invariancia de una ley física frente a una cierta transformación del sistema de coordenadas. Esto es, si escribimos una ecuación para una ley física en un sistema de coordenadas, transformamos cada vector correspondiente a las coordenadas transformadas, y sustituimos los vectores transformados en la ley física, el resultado sería una ecuación de forma idéntica a la original.

Hasta alrededor de 1956, se creía que todas las leyes físicas no sufrían cambios por inversiones como la de la figura 19 (ni tampoco por rotaciones o por traslaciones). Sin embargo, en 1956 se descubrió que la simetría de la inversión se violaba en cierto tipo de desintegraciones radiactivas llamadas desintegraciones beta, en las cuales son emitidos electrones por el núcleo atómico. Los núcleos giran en sus ejes como pequeños trompos (o peonzas), y es posible asignar a cada núcleo un vector como $\omega$ que represente su rotación. En el experimento de desintegración beta, se estudió la dirección de la emisión de electrones con relación a la dirección de $\omega$ (Fig. 20). Si se emitían números iguales de electrones paralelos a $\omega$ y antiparalelos a $\omega$, entonces el experimento de reflexión se vería exactamente como el original y la simetría de la inversión sería válida. Se descubrió que casi todos los electrones eran emitidos en oposición a $\omega$, de modo que en el experimento de reflexión se emitirían más electrones a lo largo de $\omega$ (porque **v** cambia de signo en la reflexión, mientras que $\omega$ no cambia). El experimento difiere de la imagen de un espejo; se encontró que la simetría de la inversión y la ley de conservación asociada llamada *conservación de la paridad* no eran válidas en este caso.*

Este experimento comenzó a revolucionar nuestro pensamiento con respecto a los procesos fundamentales, y proporcionó una clave esencial con respecto a la naturaleza de la ley física que es responsable del proceso de desintegración beta, una de las cuatro fuerzas básicas. Fue el preludio de una serie de experimentos que han revelado otras relaciones entre las propiedades de la transformación, los principios de la invariancia, y las simetrías. ■

* Véase *the New Ambidextrous Universe*, por Martin Gardner (W. H. Freeman and Company, 1990).

## PREGUNTAS

1. En 1969, tres astronautas del Apolo salieron de Cabo Cañaveral, fueron a la Luna y regresaron, cayendo en el agua en un lugar de acuatizaje elegido en el océano Pacífico; véase la figura 21. Un almirante les dio el adiós en la base y luego zarpó al océano Pacífico en un portaviones para recogerlos. Compare los desplazamientos de los astronautas y del almirante.

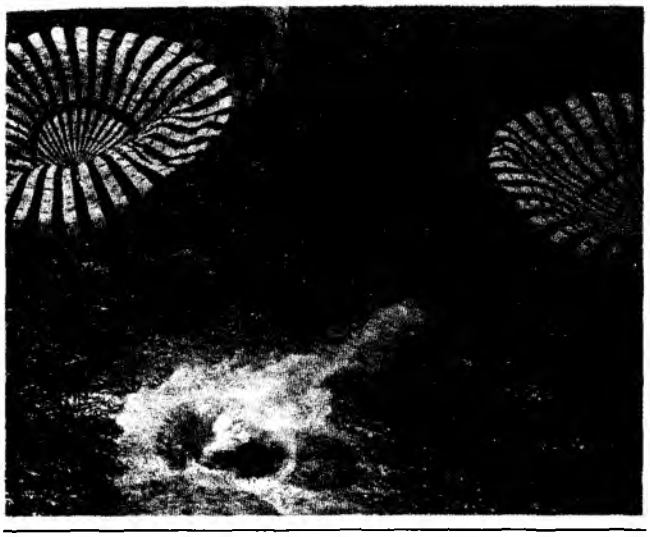


**Figura 21** Pregunta 1.

2. Un perro corre 100 m hacia el sur, 100 m hacia el este, y 100 m al norte, terminando en el punto de arranque, por lo que su desplazamiento de todo el viaje es igual a cero. ¿Dónde está su punto de arranque? Una respuesta clara es que en el Polo Norte; pero hay otra solución, localizada cerca del Polo Sur. Descríbala.
3. ¿Pueden combinarse dos vectores que tengan diferentes magnitudes para dar una resultante de cero? ¿Y tres vectores?
4. ¿Puede tener un vector una magnitud cero si una de sus componentes no es cero?
5. ¿Puede ser la suma de las magnitudes de dos vectores alguna vez igual a la magnitud de la suma de estos dos vectores?
6. ¿Puede ser la magnitud de la diferencia entre dos vectores alguna vez mayor que la magnitud de cualquiera de ellos? ¿Puede ser mayor que la magnitud de su suma? Dé ejemplos.
7. Supongamos que $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$. ¿Significa esto que debemos tener ya sea $d \geq d_1$, o $d \geq d_2$? Si no, explique por qué.
8. Si tres vectores se suman para ser cero, deben estar todos en el mismo plano. Haga que esto parezca razonable.
9. ¿Tienen unidades los vectores unitarios **i**, **j**, y **k**?
10. Explique en qué sentido una ecuación vectorial contiene más información que una cantidad escalar.
11. Nombre varias cantidades escalares. ¿Depende el valor de una cantidad escalar del sistema de coordenadas elegido?
12. Usted puede ordenar acontecimientos en el tiempo. Por ejemplo, el suceso *b* debe preceder al suceso *c* pero seguir del *a*, dándonos un orden de tiempo de los acontecimientos *a*, *b*, *c*. Por lo tanto, existe un sentido del tiempo, distinguiendo el pasado, el presente, y el futuro. ¿Es el tiempo, por lo tanto, un vector? Si no, ¿por qué no?
13. Se aplican las leyes conmutativa y asociativa a la resta de vectores?
14. ¿Puede ser un producto escalar una cantidad negativa?
15. (*a*) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, ¿se deduce que **a** y **b** son perpendiculares entre sí? (*b*) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, ¿se deduce que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?
16. Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, ¿deben **a** y **b** ser paralelos entre sí? ¿Es verdad lo recíproco?
17. Un vector **a** yace paralelo al eje de rotación de la Tierra, apuntando de sur a norte. Un segundo vector **b** apunta verticalmente hacia arriba hacia donde usted se encuentra. ¿Cuál es la dirección del vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$? ¿En qué lugares de la superficie de la Tierra es la magnitud $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ un máximo? ¿Y un mínimo?
18. ¿Debe usted especificar un sistema de coordenadas cuando (*a*) suma dos vectores, (*b*) forma su producto escalar, (*c*) forma su producto vectorial, o (*d*) halla sus componentes?
19. (*a*) Demuestre que si todas las componentes de un vector invierten su dirección, entonces el propio vector invierte su dirección. (*b*) Demuestre que si las componentes de los dos vectores que forman un vector producto se invierten, entonces el vector producto no cambia. (*c*) ¿Es un vector producto, entonces, un vector?
20. Hemos estudiado la adición, la resta y la multiplicación de vectores. ¿Por qué supone usted que no hemos estudiado la división de vectores? ¿Es posible definir tal operación?
21. ¿Es convencional usar, como lo hicimos, la regla de la mano derecha en el álgebra vectorial? ¿Qué cambios se requerirían si se adoptase en su lugar una convención de la mano izquierda?
22. (*a*) Convénzase usted mismo de que el producto vectorial de dos vectores polares es un vector axial. (*b*) ¿Cuál es el producto vectorial de un vector polar por un vector axial?

## PROBLEMAS

*Sección 3-2 Suma de vectores: método gráfico*

1. Considere dos desplazamientos, uno de magnitud 3 m y otro de magnitud 4 m. Muestre cómo pueden combinarse los vectores de desplazamiento para obtener un desplazamiento resultante de magnitud (*a*) 7 m, (*b*) 1 m, y (*c*) 5 m.

2. ¿Cuáles son las propiedades de dos vectores **a** y **b** tales que (*a*) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ y $a + b = c$; (*b*) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$; (*c*) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ y $a^2 + b^2 = c^2$?
3. Una mujer camina 250 m en dirección 35° NE, y luego 170 m hacia el este. (*a*) Usando métodos gráficos, halle su desplazamiento final a partir del punto de arranque. (*b*) Compare la magnitud de su desplazamiento con la distancia que recorrió.
4. Una persona camina con el siguiente esquema: 3.1 km norte, luego 2.4 km oeste, y finalmente 5.2 km sur. (*a*) Construya el diagrama vectorial que representa a este movimiento. (*b*) ¿Qué tan lejos y en qué dirección volaría un pájaro en línea recta para llegar al mismo punto final?
5. Se suman dos vectores **a** y **b**. Muestre gráficamente con diagramas vectoriales que la magnitud de la resultante no puede ser mayor que $a + b$ ni menor que $|a - b|$, donde las barras verticales significan un valor absoluto.
6. Un automóvil recorre hacia el este una distancia de 54 km, luego al norte 32 km y luego en dirección 28° NE durante 27 km. Dibuje el diagrama vectorial y determine el desplazamiento total del automóvil desde el punto de arranque.
7. El vector **a** tiene una magnitud de 5.2 unidades y está dirigido hacia el este. El vector **b** tiene una magnitud de 4.3 unidades y está dirigido 35° NO. Construyendo los diagramas vectoriales, halle las magnitudes y direcciones de (*a*) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, y (*b*) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.
8. Un golfista ejecuta tres golpes para meter la bola en el hoyo cuando está en el green. El primer golpe desplaza a la bola 12 ft N, el segundo 6 ft SE, y el tercero 3 ft SO. ¿Qué desplazamiento se necesitaría para meter la bola en el hoyo al primer golpe? Trace el diagrama vectorial.
9. Hay un robo en un banco del centro de Boston (véase el mapa de la Fig. 22). Para eludir a la policía, los ladrones escapan en un helicóptero, haciendo tres vuelos sucesivos descritos por los desplazamientos siguientes: 20 mi, 45° SE; 33 mi, 26° al NO; 16 mi, 18° SE. Al final del tercer vuelo son capturados. ¿En qué ciudad fueron aprehendidos? (Use el método gráfico para sumar estos desplazamientos en el mapa.)

### *Sección 3-3 Componentes de vectores*

10. (*a*) ¿Cuáles son las componentes de un vector **a** en el plano *xy* si su dirección es 252° a antihorario del eje *x* positivo y su magnitud es de 7.34 unidades? (*b*) La componente *x* de cierto vector es de −25 unidades y la componente *y* es de +43 unidades. ¿Cuál es la magnitud del vector y el ángulo entre su dirección y el eje *x* positivo?
11. Una pieza pesada de maquinaria es elevada y deslizada a lo largo de 13 m en un plano inclinado orientado a 22° de la horizontal, como se muestra en la figura 23. (*a*) ¿A qué altura de su posición original es levantada? (*b*) ¿A qué distancia se movió horizontalmente?
12. La manecilla minutera de un reloj de pared mide 11.3 cm del eje a la punta. ¿Cuál es el vector del desplazamiento de su punta (*a*) desde un cuarto de hora hasta la media hora, (*b*) en la siguiente media hora, y (*c*) en la siguiente hora?

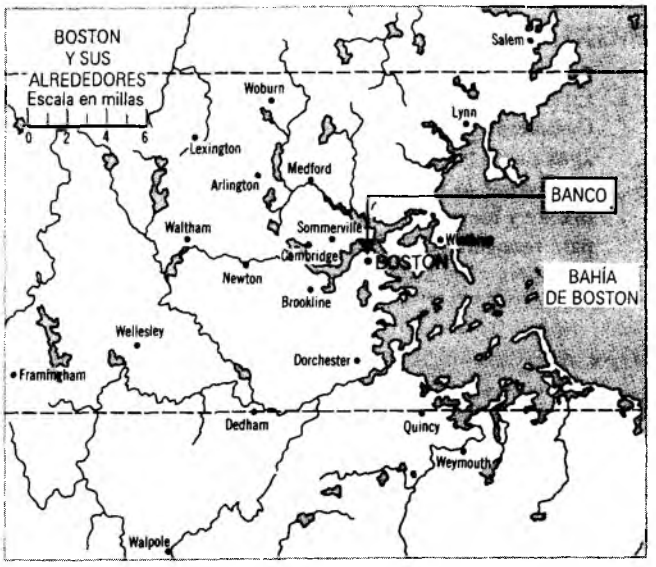



**Figura 22** Problema 9.

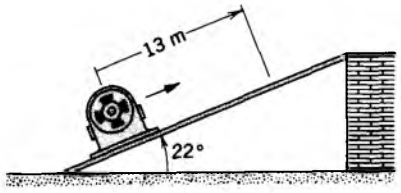



**Figura 23** Problema 11.

13. Una persona desea llegar a un punto que está a 3.42 km de su ubicación actual y en una dirección de 35.0° NE. Sin embargo, debe caminar a lo largo de calles que van ya sea de norte a sur o de este a oeste. ¿Cuál es la distancia mínima que podría caminar para llegar a su destino?
14. Un barco se dispone a zarpar hacia un punto situado a 124 km al norte. Una tormenta inesperada empuja al barco hasta un punto a 72.6 km al norte y 31.4 km al este de su punto de arranque. ¿Qué distancia, y en qué dirección, debe ahora navegar para llegar a su destino original?
15. Las *fallas* de las rocas son roturas a lo largo de las cuales se han movido las caras opuestas de la masa rocosa, paralelas a la superficie de fractura. Este movimiento está a menudo acompañado de terremotos. En la figura 24 los puntos *A* y *B* coincidían antes de la falla. La componente del desplazamiento neto *AB* paralela a una línea horizontal en la superficie de la falla se llama *salto de la dislocación* (*AC*). La componente del desplazamiento neto a lo largo de la línea con mayor pendiente del plano de la falla es la *brecha de la dislocación* (*AD*). (*a*) ¿Cuál es la desviación neta si el salto de la dislocación es de 22 m y la brecha de la dislocación es de 17 m? (*b*) Si el plano de la falla está inclinado a 52° de la horizontal, ¿cuál es el desplazamiento *vertical* neto de *B* como resultado de la falla en (*a*)?
16. Una rueda de radio de 45 cm gira sin resbalamiento a lo largo de un piso horizontal, como se muestra en la figura 25. *P* es un punto pintado sobre la llanta de la rueda. En

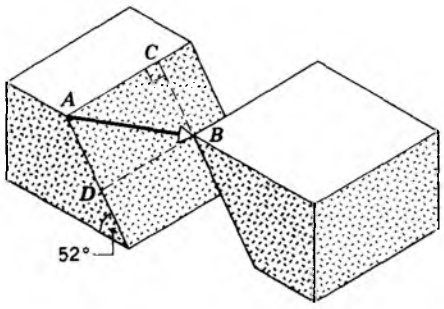



**Figura 24** Problema 15.

el tiempo $t_1$, $P$ está en el punto de contacto entre la rueda y el piso. En un tiempo $t_2$ posterior, la rueda ha rodado a la mitad de una vuelta. ¿Cuál es el desplazamiento de $P$ durante el intervalo?

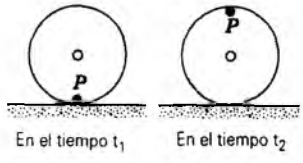



**Figura 25** Problema 16.

**17.** Una habitación tiene las dimensiones de 10 ft × 12 ft × 14 ft. Una mosca que sale de una esquina termina su vuelo en la esquina diametralmente opuesta. (*a*) Halle el vector del desplazamiento en un marco con los ejes de coordenadas paralelos a las aristas de la habitación. (*b*) ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento? (*c*) ¿Podría la longitud de la trayectoria viajada por la mosca ser menor que esta distancia? ¿Mayor que esta distancia? ¿Igual a esta distancia? (*d*) Si la mosca caminara en lugar de volar, ¿cuál sería la longitud de la trayectoria más corta que puede recorrer?

***Sección 3-4 Suma de vectores: método de las componentes***

**18.** (*a*) ¿Cuál es la suma, en la notación del vector unitario, de los dos vectores $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$? (*b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de $\mathbf{a} + \mathbf{b}$?

**19.** Dos vectores están dados por $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Halle (*a*) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (*b*) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, y (*c*) un vector $\mathbf{c}$ tal que $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$.

**20.** Dados dos vectores, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, halle las magnitudes y direcciones (con el eje $+x$) de (*a*) $\mathbf{a}$, (*b*) $\mathbf{b}$, (*c*) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (*d*) $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, y (*e*) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

**21.** (*a*) Un hombre sale de la puerta frontal, camina 1400 m E, 2100 m N, y luego saca un centavo de su bolsillo y lo suelta desde un acantilado de 48 m de altura. En un sistema de coordenadas en el cual los ejes $x$, $y$, y $z$ positivos apunten al este, al norte, y hacia arriba, estando el origen en la ubicación del centavo según el hombre sale de su puerta frontal, escriba una expresión, usando vectores unitarios, para el desplazamiento del centavo. (*b*) El hombre regresa a su puerta frontal, siguiendo una trayectoria diferente en el viaje de regreso. ¿Cuál es su desplazamiento resultante para el viaje redondo?

**22.** Una partícula experimenta tres desplazamientos sucesivos en un plano, como sigue: 4.13 m SO, 5.26 m E, y 5.94 m en una dirección de 64.0° NE. Elija el eje $x$ apuntando al este y el eje $y$ apuntando hacia el norte, y halle (*a*) las componentes de cada desplazamiento, (*b*) las componentes del desplazamiento resultante, (*c*) la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante, y (*d*) el desplazamiento que se requeriría para traer de nuevo a la partícula hasta el punto del arranque.

**23.** Dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tienen magnitudes iguales de 12.7 unidades. Están orientados como se muestra en la figura 26 y su vector suma es $\mathbf{r}$. Halle (*a*) las componentes $x$ y $y$ de $\mathbf{r}$, (*b*) la magnitud de $\mathbf{r}$, y (*c*) el ángulo que forma $\mathbf{r}$ con el eje $+x$.

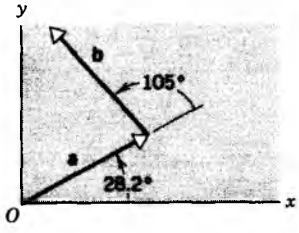



**Figura 26** Problema 23.

**24.** Una estación de radar detecta a un cohete que se aproxima desde el este. En el primer contacto, la distancia al cohete es de 12,000 ft a 40.0° sobre el horizonte. El cohete es rastreado durante otros 123° en el plano este-oeste, siendo la distancia del contacto final de 25,800 ft (véase la Fig. 27). Halle el desplazamiento del cohete durante el periodo de contacto del radar.

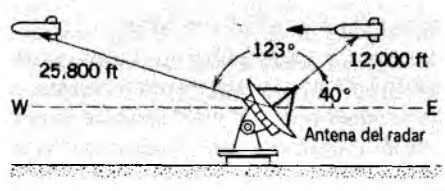



**Figura 27** Problema 24.

**25.** Dos vectores de magnitudes $a$ y $b$ forman un ángulo $\theta$ entre sí cuando son situados cola con cola. Pruebe, tomando componentes a lo largo de dos ejes perpendiculares, que la magnitud de su suma es

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}.$$

**26.** Pruebe que dos vectores deben tener magnitudes iguales si su suma es perpendicular a su diferencia.

**27.** (*a*) Usando vectores unitarios a lo largo de tres aristas de un cubo, exprese las diagonales (las líneas de una esquina a otra a través del centro del cubo) de un cubo en términos de sus aristas, las cuales tienen una longitud $a$. (*b*) Determine los ángulos formados por las diagonales con las aristas adyacentes. (*c*) Determine la longitud de las diagonales.

**28.** Un turista vuela de Washington, DC a Manila. (*a*) Describa el vector de desplazamiento. (*b*) ¿Cuál es su magnitud? La latitud y la longitud de las dos ciudades es de 39° N, 77° O y 15° N, 121° E. (*Sugerencia:* véase la Fig. 7 y las Ecs. 7. Haga que el eje $z$ esté a lo largo del eje de rotación de la Tierra, de modo que $\theta = 90° -$ latitud y $\phi =$ longitud. El radio de la Tierra es de 6370 km.)

**29.** Sea $N$ un entero mayor que 1; entonces

$$\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{N} + \cos\frac{4\pi}{N} + \cdots + \cos(N-1)\frac{2\pi}{N} = 0;$$

esto es,

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \cos\frac{2\pi n}{N} = 0.$$

También

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \operatorname{sen}\frac{2\pi n}{N} = 0.$$

Pruebe estos dos planteamientos considerando la suma de $N$ vectores de igual longitud, formando cada vector un ángulo de $2\ \pi/N$ con el precedente.

### *Sección 3-5 Multiplicación de vectores*

**30.** Un vector **d** tiene una magnitud de 2.6 m y apunta hacia el norte. ¿Cuáles son las magnitudes y las direcciones de los vectores (*a*) $-\mathbf{d}$, (*b*) $\mathbf{d}/2.0$, (*c*) $-2.5\mathbf{d}$, y (*d*) $5.0\mathbf{d}$?

**31.** Demuestre para cualquier vector **a** que (*a*) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$ y (*b*) $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0$.

**32.** Un vector **a** de 12 unidades de magnitud y otro vector **b** de 5.8 unidades de magnitud apuntan en direcciones que difieren en 55°. Halle (*a*) el producto escalar de los dos vectores y (*b*) el producto vectorial.

**33.** Dos vectores, **r** y **s**, se hallan en el plano $xy$. Sus magnitudes son 4.5 y 7.3 unidades, respectivamente, mientras que sus direcciones son 320° y 85° medidas en sentido antihorario desde el eje $x$ positivo. ¿Cuáles son los valores de (*a*) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$ y (*b*) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$?

**34.** Halle (*a*) "norte" cruz "oeste", (*b*) "abajo" punto "sur", (*c*) "este" cruz "arriba", (*d*) "oeste" punto "oeste", y (*e*) "sur" cruz "sur". Haga que cada vector tenga una magnitud unitaria.

**35.** Dados dos vectores, $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, demuestre que el producto escalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ está dado en términos de las componentes por la ecuación 15.

**36.** Dados dos vectores, $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, Pruebe que el producto vectorial $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ está dado en términos de las componentes por la ecuación 17.

**37.** Demuestre que $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ puede ser expresada por un determinante de $3\times 3$ tal como

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

**38.** Use las ecuaciones 13 y 15 para calcular el ángulo entre los dos vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

**39.** Tres vectores están dados por $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, y $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Halle (*a*) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, (*b*) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, y (*c*) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

**40.** (*a*) Calcule $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, donde $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}\ 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, y $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. (*b*) Calcule el ángulo entre **r** y el eje $+z$. (*c*) Halle el ángulo entre **a** y **b**.

**41.** Tres vectores suman cero, como en el triángulo rectángulo de la figura 28. Calcule (*a*) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, (*b*) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, y (*c*) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$.

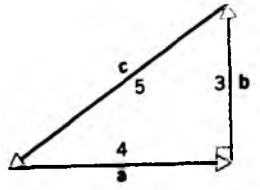



**Figura 28** Problemas 41 y 42.

**42.** Tres vectores suman cero, como en la figura 28. Calcule (*a*) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, (*b*) $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, y (*c*) $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$.

**43.** El vector **a** está en el plano $yz$ a 63.0° del eje $+y$ con una componente $z$ positiva y tiene una magnitud de 3.20 unidades. El vector **b** se halla en el plano $xz$ a 48.0° del eje $+x$ con una componente $z$ positiva y tiene una magnitud de 1.40 unidades. Halle (*a*) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, (*b*) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, y (*c*) el ángulo entre **a** y **b**.

**44.** (*a*) Hemos visto que la ley conmutativa *no* se aplica a los productos vectoriales; esto es, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ no es igual a $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. Demuestre que la ley conmutativa *sí* se aplica a los productos escalares; esto es, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$. (*b*) Demuestre que la ley distributiva se aplica tanto a los productos escalares como a los productos vectoriales; esto es, demuestre que

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

y que

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}.$$

(*c*) ¿Se aplica la ley asociativa a los productos vectoriales, esto es, es $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ igual a $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$? (*d*) ¿Tiene algún sentido hablar de una ley asociativa para los productos escalares?

**45.** Demuestre que el área del triángulo contenido entre los vectores **a** y **b** (Fig. 29) es $\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$, donde las barras verticales significan una magnitud.

**46.** Demuestre que la magnitud de un producto vectorial da numéricamente el área del paralelogramo formado por los dos vectores componentes como lados (véase la Fig. 29). ¿Sugiere esto cómo un elemento de área orientado en el espacio estaría representado por un vector?

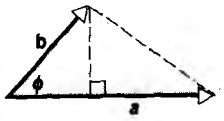



**Figura 29** Problemas 45 y 46.

**47.** Demuestre que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ es igual en magnitud al volumen del paralelepípedo formado sobre los tres vectores **a**, **b**, y **c** como se muestra en la figura 30.

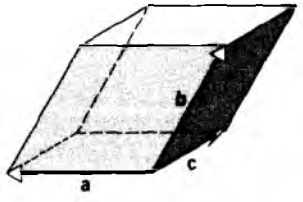



**Figura 30** Problema 47.

**48.** Dos vectores **a** y **b** tienen componentes, en unidades arbitrarias, $a_x = 3.2$, $a_y = 1.6$; $b_x = 0.50$, $b_y = 4.5$. (*a*) Halle el ángulo entre **a** y **b**. (*b*) Halle las componentes de un vector **c** que sea perpendicular a **a**, esté en el plano *xy*, y tenga una magnitud de 5.0 unidades.

**49.** Halle los ángulos entre las diagonales del cuerpo de un cubo. Véase el problema 27.

**50.** Los tres vectores que se muestran en la figura 31 tienen magnitudes $a = 3$, $b = 4$ y $c = 10$. (*a*) Calcule las componentes *x* y *y* de estos vectores. (*b*) Halle los números *p* y *q* tales que $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$.

### *Sección 3-6 Leyes vectoriales en la física*

**51.** Use la figura 10*b* para derivar las ecuaciones 18.

**52.** Un vector **a** con una magnitud de 17 m está dirigido 56° en sentido antihorario del eje $+x$, como se muestra en la figura 32. (*a*) ¿Cuáles son las componentes $a_x$ y $a_y$ del vector? (*b*) Un segundo sistema de coordenadas está inclinado en 18° con respecto al primero. ¿Cuáles son las componentes $a_{x'}$ y $a_{y'}$ en este sistema "primo" de coordenadas?

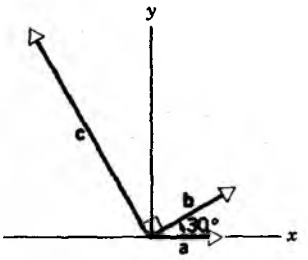



**Figura 31** Problema 50.

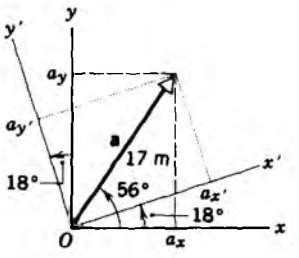



**Figura 32** Problema 52.

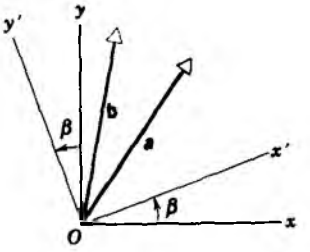



**Figura 33** Problema 53.

**53.** La figura 33 muestra dos vectores **a** y **b** y dos sistemas de coordenadas que difieren en que los ejes *x* y *x'* y los ejes *y* y *y'* forman cada uno un ángulo $\beta$ con el otro. Pruebe analíticamente que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ tiene la misma magnitud y dirección sin importar qué sistema se haya usado para llevar a cabo el análisis. (*Sugerencia*: Use las Ecs. 18).

# CAPÍTULO 4

# MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL Y TRIDIMENSIONAL

*Este capítulo presenta una combinación o síntesis de los conceptos desarrollados en los capítulos 2 y 3. Continuaremos ahora describiendo el movimiento de una partícula en términos de su posición, velocidad, y aceleración, como lo hicimos en el capítulo 2. Sin embargo, eliminamos la restricción impuesta en el capítulo 2 de que la partícula se mueve sólo en línea recta. Ahora permitimos que la partícula se mueva a través de un sistema de coordenadas tridimensional ordinario. El hecho de tener en cuenta las componentes* x, y, *y* z *del movimiento se simplifica grandemente al usar una notación basada en los vectores. Vemos que las ecuaciones cinemáticas del capítulo 2 pueden aplicarse en el caso general simplemente reemplazando a la variable unidimensional con el vector correspondiente. Se tratan dos conocidos ejemplos del movimiento como aplicaciones de la técnicas vectoriales: un proyectil disparado bajo la acción de la gravedad terrestre con componentes de la velocidad tanto horizontal como vertical, y un objeto que se mueve en una trayectoria circular.*

## 4-1 POSICIÓN, VELOCIDAD, Y ACELERACIÓN

La figura 1 muestra una partícula en el tiempo $t$ que se mueve en una trayectoria curva en tres dimensiones. Su *posición*, o desplazamiento desde el origen, está medida por el vector **r**. La *velocidad* está indicada por el vector **v** el cual, como demostraremos enseguida, debe ser tangente a la trayectoria de la partícula. La *aceleración* está indicada por el vector **a**, cuya dirección, como veremos explícitamente más adelante, no guarda en lo general ninguna relación única con la posición de la partícula o la dirección de **v**.

En coordenadas cartesianas, la partícula se localiza por $x$, $y$, y $z$, las cuales son las componentes del vector **r** que da la posición de la partícula:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{1}$$

Supongamos que la partícula se mueve de una posición $\mathbf{r}_1$ en el tiempo $t_1$ a la posición $\mathbf{r}_2$ en el tiempo $t_2$, como se muestra en la figura 2*a*. Su desplazamiento (cambio de posición) en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ es el *vector* $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, y la velocidad promedio **v** en el intervalo $\Delta t$ es

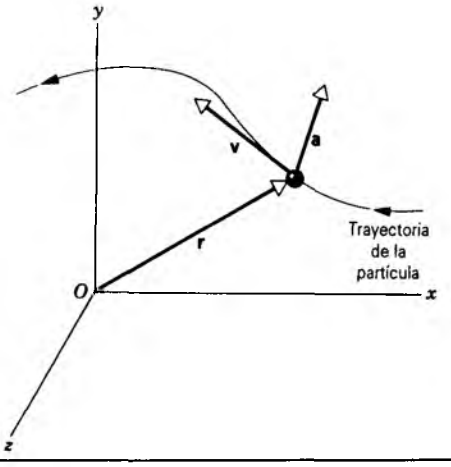



**Figura 1** Vectores de posición, velocidad, y aceleración de una partícula que se mueve en una trayectoria arbitraria. Las longitudes relativas de los tres vectores son independientes entre sí, como lo son sus direcciones relativas.

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{2}$$

En la ecuación 2, el vector $\Delta\mathbf{r}$ está multiplicado por el escalar $1/\Delta t$ para dar el vector $\bar{\mathbf{v}}$. Entonces $\bar{\mathbf{v}}$ debe tener la misma dirección que $\Delta\mathbf{r}$.

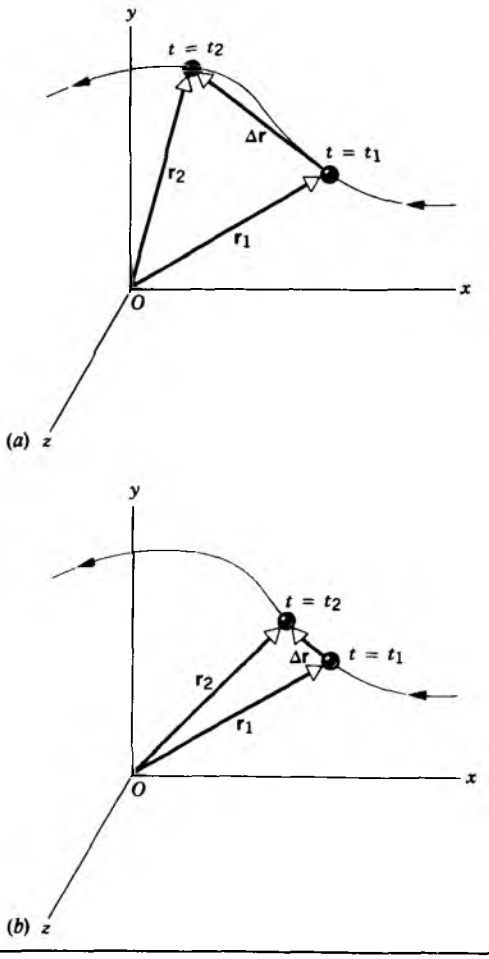



**Figura 2** (*a*) en el intervalo $\Delta t$ de $t_1$ a $t_2$, la partícula se mueve de la posición $\mathbf{r}_1$ a la posición $\mathbf{r}_2$. Su desplazamiento en ese intervalo es $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. (*b*) A medida que decrece el intervalo, el vector desplazamiento tiende a la trayectoria real de la partícula.

Nótese que los tres vectores, $\mathbf{r}_1$, $\Delta\mathbf{r}$, y $\mathbf{r}_2$ guardan la misma relación que los tres vectores **a**, **b**, y **s** de la figura 3 del capítulo 3. Esto es, usando el método gráfico de sumar cabeza-en-cola, $\Delta\mathbf{r}$ sumada a $\mathbf{r}_1$ da la resultante $\mathbf{r}_2$. Así, $\mathbf{r}_2 = \Delta\mathbf{r} + \mathbf{r}_1$, y, por lo tanto, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Cuando se reduce el intervalo $\Delta t$, el vector $\Delta\mathbf{r}$ tiende a la trayectoria real (como en la figura 2*b*), y resulta tangente a la trayectoria en el límite $\Delta t \to 0$, en cuyo caso la velocidad promedio tiende a la velocidad instantánea **v**:

$$\mathbf{v} = \lim \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{3}$$

Por una extensión razonable de nuestra primera definición de la derivada (véase la Ec. 8 del capítulo 2), escribimos la cantidad del lado derecho de la ecuación 3 como la derivada del vector **r** respecto al tiempo:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{4}$$

Al igual que el vector $\Delta\mathbf{r}$ en el límite $\Delta t \to 0$, *el vector* **v** *es tangente a la trayectoria de la partícula en cualquier punto del movimiento.*

La ecuación 4, como todas las ecuaciones vectoriales, es equivalente a tres ecuaciones escalares. Para explorar esto, escribimos **v** en términos de sus componentes y los sustituimos en la ecuación 4 en lugar de **r** de la ecuación 1:

$$v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

$$= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}. \tag{5}$$

Ya que dos vectores sólo pueden ser iguales si sus componentes correspondientes son iguales, al comparar los lados izquierdo y derecho de la ecuación 5 vemos que

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{6}$$

Para resumir, la sola relación vectorial de la ecuación 4 es totalmente equivalente a las tres relaciones escalares de la ecuación 6.

Extenderemos ahora directamente estos conceptos a la aceleración, como lo hicimos en la sección 2-5. La aceleración promedio es

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}, \tag{7}$$

y la aceleración instantánea se obtiene del límite cuando tiende a cero el intervalo de tiempo:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{8}$$

Una vez más, la cantidad de la derecha puede expresarse como una derivada respecto al tiempo, y así

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{9}$$

donde, otra vez igualando componentes,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{10}$$

Nótese que las ecuaciones vectoriales sirven tanto para simplificar la notación (la ecuación 9, por ejemplo, representa las tres relaciones dadas como ecuación 10) como para separar las componentes ($a_x$, por ejemplo, no tiene efecto sobre $v_y$ o sobre $v_z$).

Igualmente, note de la ecuación 9 que, a causa de que **v** es un vector que tiene tanto dirección como magnitud, un cambio en la *dirección* de la velocidad puede producir una aceleración, aun si la magnitud de la velocidad no cambia. El movimiento a velocidad constante puede ser un movimiento acelerado. Esto es, puesto que $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, las componentes pueden cambiar de tal manera que la magnitud de **v** permanezca constante. El ejemplo más conocido de este caso es el movimiento circular uniforme, que estudiaremos en la sección 4-4.

**Problema muestra 1** Una partícula se mueve en un plano $xy$ de modo tal que sus coordenadas $x$ y $y$ varían con el tiempo de acuerdo con $x(t) = t^3 - 32t$ y $y(t) = 5t^2 + 12$. Aquí $x$ y $y$ están en unidades de metros cuando $t$ está en unidades de segundos. Halle la posición, la velocidad, y la aceleración de la partícula cuando $t = 3$ s.

**Solución** La posición está dada por la ecuación 1, e insertando las expresiones dadas para $x(t)$ y $y(t)$, obtenemos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (t^3 - 32t)\mathbf{i} + (5t^2 + 12)\mathbf{j}.$$

Evaluando esta expresión para $t = 3$ s nos da

$$\mathbf{r} = -69\mathbf{i} + 57\mathbf{j},$$

donde las componentes están en unidades de metros.

Las componentes de la velocidad se hallan de la ecuación 6:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 32t) = 3t^2 - 32,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 + 12) = 10t.$$

Usando la ecuación 5, obtenemos

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = (3t^2 - 32)\mathbf{i} + 10t\mathbf{j},$$

y para $t = 3$ s hallamos a

$$\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$$

en unidades de m/s.

Las componentes de la aceleración son:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 32) = 6t,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(10t) = 10.$$

La aceleración para $t = 3$ s es

$$\mathbf{a} = 18\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$$

en unidades de m/s$^2$.

La figura 3 muestra la trayectoria de la partícula desde $t = 0$ hasta $t = 4$ s. Se han trazado en ella los vectores de posición, velocidad, y aceleración para $t = 3$ s. Nótese que $\mathbf{v}$ es tangente a la trayectoria para $t = 3$ s, y también que la dirección de $\mathbf{a}$ no tiene una relación partícular con la dirección ya sea de $\mathbf{r}$ o de $\mathbf{v}$.

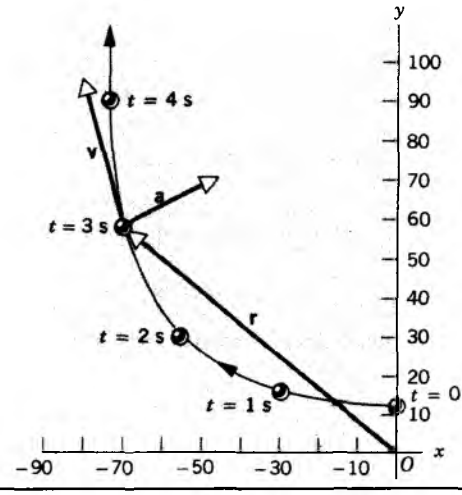



**Figura 3** Problema muestra 1. Se muestra la trayectoria de una partícula en movimiento, y se indican sus posiciones para $t = 0$, 1, 2, 3, y 4 s. Para $t = 3$ s, se muestran los vectores que representan su posición, su velocidad, y su aceleración. Nótese que no existe una relación particular entre las direcciones de $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, y $\mathbf{a}$.

## 4-2 MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CONSTANTE

Consideraremos ahora el caso especial del movimiento con aceleración constante. Al moverse la partícula, la aceleración $\mathbf{a}$ no varía ni en magnitud ni en dirección. Por lo tanto, las componentes de $\mathbf{a}$ tampoco varían. Tenemos entonces una situación que puede describirse como la suma de tres componentes del movimiento que se presentan en forma simultánea con una aceleración constante a lo largo de cada una de las tres direcciones perpendiculares. La partícula se mueve, en general, a lo largo de una trayectoria curva. Esto puede ser así, aun si una de las componentes de la aceleración, digamos $a_x$, es cero, ya que entonces la componente correspondiente de la velocidad, digamos $v_x$, tiene un valor constante que pudiera *no ser* cero. Un ejemplo de esta última situación es el movimiento de un proyectil que sigue una trayectoria curva en un plano vertical y, despreciando los efectos de la resistencia del aire, está sujeto a una aceleración constante $\mathbf{g}$ dirigida hacia abajo a lo largo del eje vertical solamente.

Podemos obtener las ecuaciones generales para el movimiento con $\mathbf{a}$ constante simplemente haciendo que

$$a_x = \text{constante}, \quad a_y = \text{constante}, \quad \text{y} \quad a_z = \text{constante}$$

La partícula comienza en $t = 0$ con una posición inicial $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ y una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_{x0}\mathbf{i} + v_{y0}\mathbf{j} + v_{z0}\mathbf{k}$. Procedamos ahora como lo hicimos en la sección 2-6 y desarrollemos, en analogía con la ecuación 15 del capítulo 2, tres ecuaciones escalares: $v_x = v_{x0} + a_x t$, $v_y = v_{y0} + a_y t$, y $v_z = v_{z0} + a_z t$, las cuales escribimos como la ecuación vectorial única

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t. \tag{11}$$

Cuando usemos ésta o cualquier otra ecuación vectorial, recordemos que representa a tres ecuaciones escalares independientes.

El segundo término del lado derecho de la ecuación 11 implica la multiplicación de un vector por un escalar. Como discutimos en la sección 3-5, esto da un vector de

**TABLA 1** ECUACIONES VECTORIALES PARA EL MOVIMIENTO CON ACELERACION CONSTANTE

| *Número de la ecuación* | *Ecuación* | *Contiene* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\mathbf{r}$ | $\mathbf{v}_0$ | $\mathbf{v}$ | $\mathbf{a}$ | $t$ |
| 11 | $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$ | × | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 12 | $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ | ✓ | ✓ | × | ✓ | ✓ |
| 13† | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | × |
| 14 | $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v})t$ | ✓ | ✓ | ✓ | × | ✓ |
| 15 | $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t - \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ | ✓ | × | ✓ | ✓ | ✓ |

† Esta ecuación incluye el producto escalar o producto punto de dos vectores, que ya hemos visto en la sección 3-5.

longitud *at* que apunta en la misma dirección que el vector original **a**.

Continuando como lo hicimos en la sección 2-6, podemos desarrollar cinco ecuaciones que describan el movimiento en tres dimensiones con aceleración constante. Estas cinco ecuaciones se muestran en la tabla 1, la cual deberá compararse con las cinco ecuaciones unidimensionales correspondientes en la tabla 2 del capítulo 2. Con excepción de la ecuación 13, que incluye vectores aunque es una ecuación escalar, cada ecuación de la tabla 1 representa a tres ecuaciones escalares independientes. Las componentes $x$ de las ecuaciones 11, 12, 14, y 15 son precisamente las ecuaciones correspondientes listadas en la tabla 2 del capítulo 2. Ya que la ecuación 13 es una ecuación escalar, *no tiene componente x (o cualquier otra).*

**Problema muestra 2** Un esquiador desciende por una pendiente plana de la ladera de una montaña. La pendiente de descenso (norte-sur) forma un ángulo de 10° con la horizontal. Un viento que sopla desde el oeste da al esquiador una aceleración lateral de 0.54 m/s² (véase la Fig. 4). En la esquina noroeste de la pendiente, el esquiador sale con una componente de la velocidad de 9.0 m/s cuesta abajo y una componente lateral de cero. La pendiente sin fricción tiene 125 m de longitud y 25 m de ancho. (*a*) ¿Dónde deja el esquiador la pendiente? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del esquiador en este punto? (*Sugerencia*: La aceleración gravitatoria a lo largo de un plano que se inclina en un ángulo $\theta$ es $g$ sen $\theta$.)

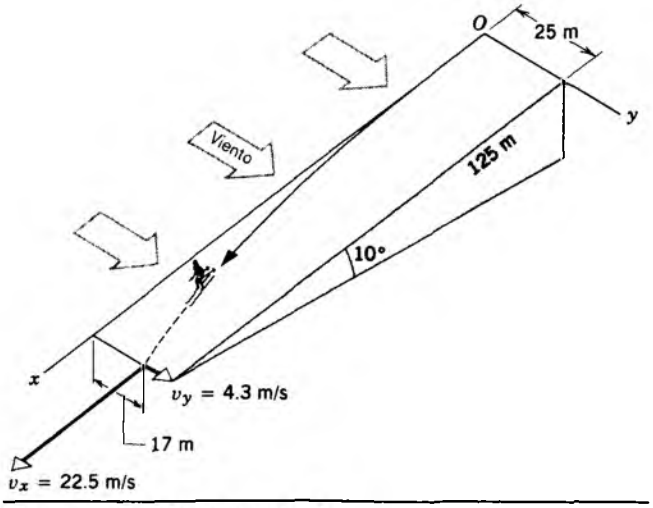



**Figura 4** Problema muestra 2.

**Solución** (*a*) Elijamos el origen en la esquina noroeste, con el eje $x$ cuesta abajo y el eje $y$ lateral. Las componentes de la aceleración son

$$a_x = g \text{ sen } 10° = 1.70 \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = 0.54 \text{ m/s}^2.$$

Nótese que estas componentes son evaluadas independientemente. La componente $a_x$ es la aceleración cuesta abajo que resultaría aun si no hubiese viento lateral, y similarmente $a_y$ es la aceleración lateral que resultaría del viento, aun cuando no hubiese una pendiente. El manejo de estas dos componentes de manera independiente es la esencia de la aritmética vectorial.

Tomemos $t = 0$ como el tiempo en que el esquiador se empuja, y se nos da que $v_{x0} = 9.0$ m/s y que $v_{y0} = 0$. Entonces

$$v_x = v_{x0} + a_x t = 9.0 \text{ m/s} + (1.70 \text{ m/s}^2)t,$$

$$v_y = v_{y0} + a_y t = 0 + (0.54 \text{ m/s}^2)t,$$

$$x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = 0 + (9.0 \text{ m/s})t + (0.85 \text{ m/s}^2)t^2,$$

$$y = y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + (0.27 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Suponemos por ahora que el esquiador llega al fondo de la pendiente antes de dejar el borde lateral. (Podemos comprobar esta hipótesis más adelante.) Primero hallamos el tiempo en que esto ocurre (esto es, cuando $x = 125$ m):

$$125 \text{ m} = (9.0 \text{ m/s})t + (0.85 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Resolviendo la cuadrática, tenemos que $t = 7.94$ s o $-18.5$ s. Considerando por el momento sólo la raíz positiva, evaluamos la coordenada $y$ correspondiente:

$$y = (0.27 \text{ m/s}^2)t^2 = (0.27 \text{ m/s}^2)(7.94 \text{ s})^2 = 17.0 \text{ m}.$$

El desplazamiento lateral de 17.0 m es realmente menor que la anchura de la pendiente (25 m), como hemos supuesto. El esquiador, por lo tanto, deja el fondo de la pendiente en un punto a 17.0 m del borde oeste.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



(*b*) Las componentes de la velocidad pueden obtenerse directamente para $t = 7.94$ s:

$$v_x = 9.0 \text{ m/s} + (1.70 \text{ m/s}^2)(7.94 \text{ s}) = 22.5 \text{ m/s},$$

$$v_y = (0.54 \text{ m/s}^2)(7.94 \text{ s}) = 4.3 \text{ m/s}.$$

Nótese que para resolver este problema hemos elegido que los ejes $x$ y $y$ estén en el plano de la pendiente, reduciendo por lo tanto un problema tridimensional a dos dimensiones. De haber escogido trabajar en un sistema de coordenadas en que el plano $xy$ fuera horizontal y el eje $z$ fuera vertical, la aceleración tendría tres componentes y el problema habría sido más complicado. Al resolver problemas, usualmente estamos en libertad de elegir la dirección de los ejes de coordenadas y la ubicación del origen a nuestra conveniencia, siempre que mantengamos de manera fija nuestra elección a través de toda la solución del problema.

¿Qué pasa con la raíz negativa, $t = -18.5$ s? Escribimos nuestras ecuaciones originales del movimiento comenzando en el tiempo 0, de modo que son tiempos positivos aquellos que describen el movimiento siguiente del esquiador al bajar la pendiente, y los tiempos negativos deben, por lo tanto, describir el movimiento del esquiador *antes* de pasar por la esquina de la pendiente que definimos como el origen. La solución negativa nos recuerda que pudiera haber habido una trayectoria previa que el esquiador pudiera haber seguido para pasar a través del origen en $t = 0$ con la velocidad correcta. Durante esta parte previa del movimiento, el esquiador habría pasado a través de $x = 125$ m (presumiblemente ¡esquiando cuesta arriba!) a los 18.5 s antes de llegar a la esquina noroeste. Calcule los componentes de la velocidad para $t = -18.5$ s y halle lo concerniente al movimiento del esquiador durante ese tiempo. ¿Cuál debería haber sido la coordenada $y$ correspondiente a $t = -18.5$ s? ¿Es esto razonable? ¿Cuáles hubieran sido las coordenadas $x$ y $y$ mínimas alcanzadas durante el tiempo entre $t = -18.5$ s y $t = 0$?

La solución matemática de un problema físico a menudo tiene un resultado inesperado, tal como el tiempo negativo en este ejemplo. Si supusiéramos en este problema que el movimiento del esquiador empezó en $t = 0$, la raíz negativa carecería de interés para nosotros, pero siempre es una buena práctica examinar el significado físico de tales soluciones cuando éstas aparecen.

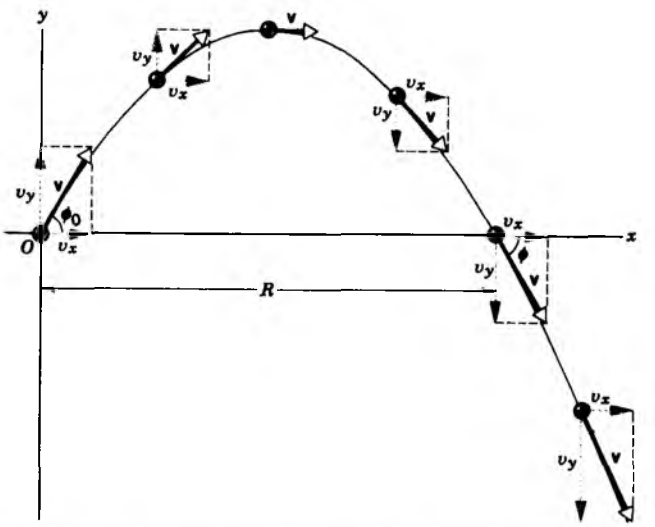



**Figura 5** La trayectoria de un proyectil, mostrando la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y sus componentes así como también la velocidad $\mathbf{v}$ y sus componentes en cinco tiempos posteriores. Nótese que $v_x = v_{x0}$ durante el vuelo. La distancia horizontal $R$ es el alcance del proyectil.

## 4-3 MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Un ejemplo de movimiento con aceleración constante es el movimiento de un proyectil. Se trata del movimiento bidimensional de una partícula lanzada oblicuamente en el aire. El movimiento ideal de una pelota de béisbol o de una pelota de golf es un ejemplo del movimiento de un proyectil. Suponemos por ahora que podemos despreciar el efecto del aire en este movimiento. En el capítulo 6 consideraremos el efecto (a menudo considerable) de la resistencia del aire en el movimiento de un proyectil.

El movimiento de un proyectil es aquél de aceleración constante $\mathbf{g}$, dirigido hacia abajo. Aun cuando puede haber una componente horizontal de la velocidad, no hay una componente horizontal de la aceleración. Si elegimos un sistema de coordenadas con el eje $y$ positivo verticalmente hacia arriba, podemos poner $a_y = -g$ (como en el capítulo 2, $g$ es siempre un número *positivo*) y $a_x = 0$. Más aún, suponemos que $\mathbf{v}_0$ está en el plano $xy$, de modo que $v_{z0} = 0$. Puesto que $a_z$ es también 0, la componente de la ecuación 11 nos dice que $\mathbf{v}_z$ es cero en todo momento y podemos, por tanto, centrar nuestra atención a lo que sucede en el plano $xy$.

Elijamos además que el origen de nuestro sistema de coordenadas sea el punto en el cual el proyectil comienza su vuelo (véase la Fig. 5). Por lo tanto, el origen es el punto en que la pelota deja la mano del lanzador, por ejemplo. Esta elección del origen implica que $x_0 = y_0 = 0$. La velocidad en $t = 0$, el instante en que el proyectil comienza su vuelo, es $\mathbf{v}_0$, que forma un ángulo $\phi_0$ con la dirección $x$ positiva. Las componentes $x$ y $y$ de $\mathbf{v}_0$ (véase la Fig. 5) son, entonces,

$$v_{x0} = v_0 \cos \phi_0 \quad \text{y} \quad v_{y0} = v_0 \operatorname{sen} \phi_0. \tag{16}$$

Ya que no hay una componente horizontal de la aceleración, la componente horizontal de la velocidad es constante. Para la componente $x$ de la ecuación 11 establecemos que $a_x = 0$ y $v_{x0} = v_0 \cos \phi_0$, obteniendo

$$v_x = v_{x0} + a_x t = v_0 \cos \phi_0. \tag{17}$$

*La componente horizontal de la velocidad retiene su valor inicial durante el vuelo.*

La componente vertical de la velocidad cambia con el tiempo debido a la aceleración constante hacia abajo. En

la ecuación 11, tomamos a las componentes $y$ y establecemos que $a_y = -g$ y $v_{y0} = v_0 \operatorname{sen} \phi_0$, de modo que

$$v_y = v_{y0} + a_y t = v_0 \operatorname{sen} \phi_0 - gt. \tag{18}$$

La componente vertical de la velocidad es la de la caída libre. (En efecto, si viéramos el movimiento de la figura 5 desde un marco de referencia que se mueva a la derecha con una velocidad $v_{x0}$, el movimiento sería el de un objeto lanzado vertical hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 \operatorname{sen} \phi_0$.)

La magnitud del vector resultante de la velocidad en cualquier instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{19}$$

El ángulo $\phi$ que el vector de la velocidad forma con la horizontal en ese instante está dado por

$$\tan \phi = \frac{v_y}{v_x}. \tag{20}$$

El vector velocidad es tangente a la trayectoria de la partícula en todo punto, como se muestra en la figura 5.

La coordenada $x$ de la posición de la partícula en cualquier momento, obtenida de la componente $x$ de la ecuación 12 (véase la tabla 1), con $x_0 = 0$, $a_x = 0$, y $v_{x0} = v_0 \cos \phi_0$, es

$$x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = (v_0 \cos \phi_0)t. \tag{21}$$

La coordenada $y$, obtenida de la componente $y$ de la ecuación 12 con $y_0 = 0$, $a_y = -g$, y $v_{y0} = v_0 \operatorname{sen} \phi_0$, es

$$y = y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = (v_0 \operatorname{sen} \phi_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{22}$$

Las ecuaciones 21 y 22 nos dan $x$ y $y$ en función del parámetro común $t$, el tiempo de vuelo. Combinándolas y eliminando a $t$ de ellas, obtenemos

$$y = (\tan \phi_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \phi_0)^2} x^2, \tag{23}$$

la cual relaciona a $y$ con $x$ y es la ecuación de la *trayectoria* del proyectil. Puesto que $v_0$, $\phi_0$, y $g$ son constantes, esta ecuación tiene la forma

$$y = bx - cx^2,$$

que es la ecuación de una parábola. De aquí que la trayectoria de un proyectil sea parabólica, como lo mostramos en la figura 5.

El *alcance horizontal* $R$ del proyectil, como se muestra en la figura 5, se define como la distancia a lo largo de la horizontal cuando el proyectil retorna al nivel desde el cual fue lanzado. Podemos hallar el alcance poniendo $y = 0$ en la ecuación 23. Cuando $x = 0$ surge una solución inmediata; la otra nos da el alcance:

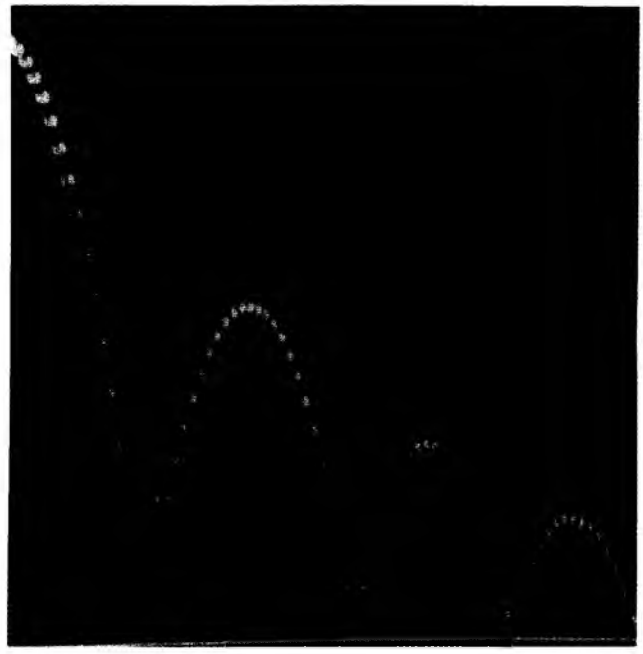


**Figura 6** Una fotografía estroboscópica de una pelota de golf (que entra a la foto desde la izquierda) rebotando sobre una superficie dura. Entre los impactos, la pelota muestra la trayectoria parabólica característica del movimiento de un proyectil. ¿Por qué supone usted que la altura de los rebotes sucesivos está decreciendo? (Los capítulos 8 y 10 pueden dar la respuesta.)

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen} \phi_0 \cos \phi_0$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\phi_0, \tag{24}$$

usando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$. Nótese que, para una velocidad inicial dada, obtenemos el alcance máximo cuando $\phi_0 = 45°$, que es cuando $\operatorname{sen} 2\phi_0 = 1$.

Las soluciones que hemos obtenido representan una visión idealizada del movimiento de un proyectil. Hemos considerado un efecto importante: la gravedad; pero existe otro factor en el movimiento de un proyectil que a menudo es importante, y es la resistencia del aire. La resistencia del aire es un ejemplo de una fuerza dependiente de la velocidad; cuanto mayor sea la velocidad mayor será el efecto desacelerante de la resistencia del aire. A baja velocidad, el efecto de la resistencia del aire es usualmente despreciable, pero a alta velocidad la trayectoria de un proyectil ya no describe una parábola, como en la ecuación 23, y el alcance puede ser considerablemente menor que el dado por la ecuación 24. En el capítulo 6 consideraremos los efectos de la resistencia del aire; por ahora supondremos que las ecuaciones derivadas en esta sección describen adecuadamente el movimiento de los proyectiles.

La figura 6 muestra un ejemplo de la trayectoria de un proyectil que no es afectado severamente por la resisten-

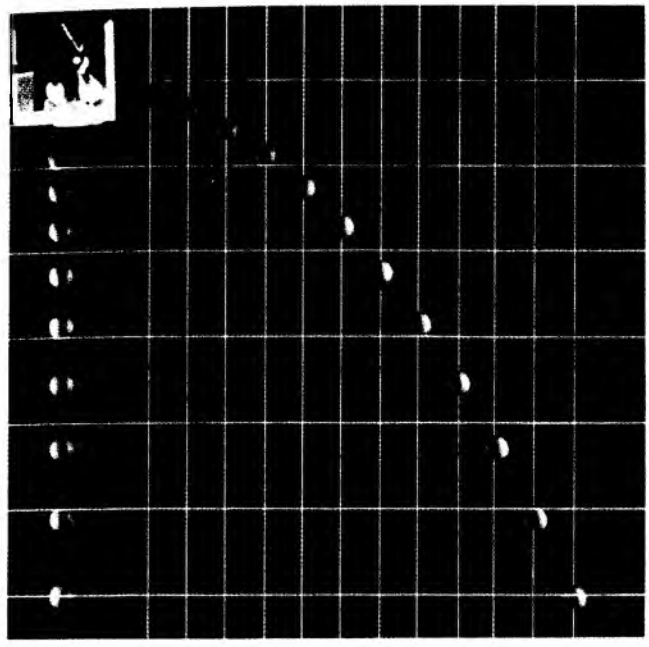


**Figura 7** La bola I se deja caer desde el reposo en el mismo instante en que la bola II es disparada hacia la derecha. Nótese que ambas bolas caen a exactamente la misma tasa; el movimiento horizontal de la bola II no afecta su tasa vertical de caída. En esta fotografía estroboscópica, las exposiciones fueron tomadas a intervalos de 1/30 s. ¿Parece ser constante la velocidad horizontal de la bola II?

cia del aire. La trayectoria ciertamente parece de forma parabólica. La figura 7 muestra una comparación de los movimientos de un proyectil disparado horizontalmente y otro dejado caer en forma simultánea en caída libre. Aquí pueden verse directa las predicciones de las ecuaciones 21 y 22 cuando $\phi_0 = 0$. Nótese que (1) el movimiento horizontal del primer proyectil responde realmente a la ecuación 21: su coordenada $x$ aumenta cantidades iguales en intervalos de tiempo iguales, independientemente del movimiento en $y$, y (2) los movimientos $y$ de los dos proyectiles son idénticos: los aumentos verticales de la posición de los dos proyectiles es la misma, independientemente del movimiento horizontal de uno de ellos.

## Disparo hacia un blanco en caída

En una magnífica demostración durante una conferencia, una pistola de aire es apuntada hacia un blanco elevado, el cual se deja caer en caída libre por un mecanismo de disparo mientras la "bala" sale de la boca del arma. Independientemente de la velocidad inicial de la bala, siempre da en el blanco mientras éste cae.

La manera más sencilla de entender esto es la siguiente. Si no existiera la aceleración debida a la gravedad, el

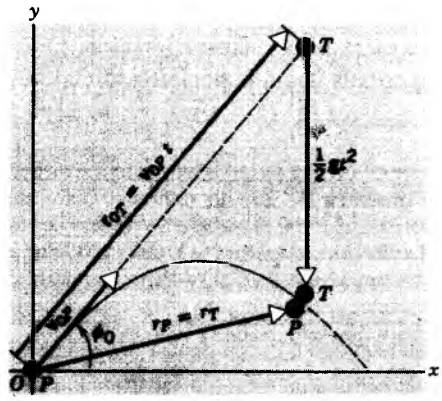



**Figura 8** En el movimiento de un proyectil, su desplazamiento desde el origen para cualquier tiempo $t$ puede considerarse como la suma de dos vectores: $\mathbf{v}_{0P}t$, dirigido a lo largo de $\mathbf{v}_{0P}$, y $\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$, dirigido hacia abajo.

blanco no caería y la bala se movería a lo largo de la línea de mira directa hacia el blanco (Fig. 8). El efecto de la gravedad es causar que cada cuerpo acelere hacia abajo a la misma tasa desde la posición que de otro modo habría tenido. Por lo tanto, en el tiempo $t$, la bala caerá a una distancia de $\frac{1}{2}gt^2$ desde la posición que tendría a lo largo de la línea de mira y el blanco caería la misma distancia desde su posición inicial. Cuando la bala alcanza la línea de caída del blanco, estará a la misma distancia abajo de la posición inicial del blanco, y de aquí la colisión. Si la bala se mueve más rápido de lo que se muestra en la figura ($v_0$ más grande), tendría un alcance mayor y cruzaría la línea de caída en un punto más alto; pero puesto que llega allí más pronto, el blanco caerá una distancia correspondiente más pequeña en el mismo tiempo y chocará con ella. Un argumento similar sirve también para velocidades más lentas.

Para un análisis equivalente, usemos la ecuación 12

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

para describir las posiciones del proyectil y del blanco en cualquier tiempo $t$. Para el proyectil $P$, $\mathbf{r}_0 = 0$ y $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, y tendremos que

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{v}_{0P}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2.$$

Para el blanco $T$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{0T}$, $\mathbf{v}_0 = 0$, y $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, conduciendo a

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{0T} + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2.$$

Si hay una colisión, debemos tener que $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_T$. La inspección demuestra que esto siempre ocurrirá en un tiempo $t$ dado por $\mathbf{r}_{0T} = \mathbf{v}_{0P}t$, esto es, en el tiempo $t(= r_{0T}/v_{0T})$ que le tomaría a un proyectil no acelerado viajar a la posición del blanco a lo largo de la línea de mira. A causa de que multiplicar un vector por un escalar nos da otro vector en

la misma dirección, la ecuación $\mathbf{r}_{0T} = \mathbf{v}_{0P}t$ nos dice que $\mathbf{r}_{0T}$ y $\mathbf{v}_{0P}$ deben estar en la misma dirección. Esto es, el arma debe ser apuntada hacia la posición inicial del blanco.

**Problema muestra 3** En un concurso para dejar caer un paquete sobre un blanco, el aeroplano de uno de los concursantes está volando horizontalmente a una velocidad constante de 155 km/h y a una altura de 225 m hacia un punto directamente arriba del blanco. ¿A qué ángulo de mira $\alpha$ debería ser soltado el paquete para que éste dé en el blanco (Fig. 9)?

**Solución** Elegimos un marco de referencia fijo con respecto a la Tierra, siendo su origen $O$ el punto de liberación. El movimiento del paquete en el momento de la liberación es el mismo que el del aeroplano. Por tanto, la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ del paquete es horizontal y su magnitud es 155 km/h. El ángulo de proyección $\phi_0$ es cero.

Hallamos el tiempo de la caída por medio de la ecuación 22. Con $\phi_0 = 0$ y $y = -225$ m esto nos da

$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}} = \sqrt{-\frac{(2)(-225\text{ m})}{9.8\text{ m/s}^2}} = 6.78\text{ s}.$$

Nótese que el tiempo de caída no depende de la velocidad del aeroplano con una proyección horizontal. (Véase, sin embargo, el problema 38.)

La distancia horizontal recorrida por el paquete en este tiempo está dada por la ecuación 21:

$$x = v_{x0}t = (155\text{ km/h})(1\text{ h}/3600\text{ s})(6.78\text{ s})$$
$$= 0.292\text{ km} = 292\text{ m},$$

de modo que el ángulo de mira (Fig. 9) sería

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x}{|y|} = \tan^{-1}\frac{292\text{ m}}{225\text{ m}} = 52°.$$

¿Parecerá parabólico el movimiento del paquete cuando es visto desde un marco de referencia fijo respecto al aeroplano? (¿Puede *usted recordar haber visto películas en que las bombas* caían desde un aeroplano, tomadas por una cámara, ya sea desde ese aeroplano o desde otro aeroplano que volara en un curso paralelo con la misma velocidad?)

**Problema muestra 4** Un jugador de fútbol soccer patea un balón con un ángulo de 36° respecto a la horizontal y una velocidad inicial de 15.5 m/s. Suponiendo que el balón se mueva en un plano vertical, halle (*a*) el tiempo $t_1$ en que el balón llega al punto más alto de su trayectoria, (*b*) su altura máxima, (*c*) su alcance y tiempo de vuelo, y (*d*) su velocidad cuando llega al suelo.

**Solución** (*a*) En el punto más alto, la componente vertical de la velocidad $v_y$ es cero. Resolviendo la ecuación 18 para $t$, obtenemos:

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\phi_0 - v_y}{g}.$$

Con

$$v_y = 0, \qquad v_0 = 15.5\text{ m/s}, \qquad \phi_0 = 36°, \qquad g = 9.8\text{ m/s}^2,$$

tenemos que

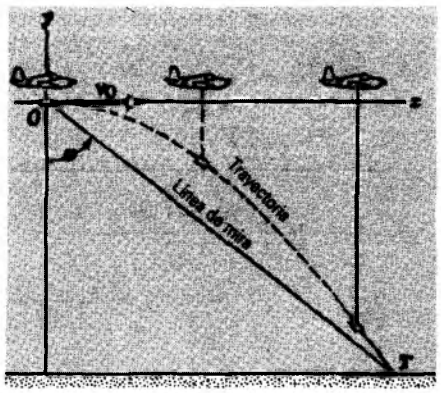



**Figura 9** Problema muestra 3.

$$t_1 = \frac{(15.5\text{ m/s})(\operatorname{sen}36°)}{9.8\text{ m/s}^2} = 0.93\text{ s}.$$

(*b*) La altura máxima es alcanzada en $t = 0.93$ s. Usando la ecuación 22,

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\phi_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

tenemos

$$y_{\text{máx}} = (15.5\text{ m/s})(\operatorname{sen}36°)(0.93\text{ s}) - \tfrac{1}{2}(9.8\text{ m/s}^2)(0.93\text{ s})^2$$
$$= 4.2\text{ m}$$

(*c*) El alcance $R$ puede ser obtenido por la ecuación 24:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}2\phi_0 = \frac{(15.5\text{ m/s})^2}{9.8\text{ m/s}^2}\operatorname{sen}72° = 23.3\text{ m}.$$

Ponemos $y = 0$ en la ecuación 22 y hallamos el tiempo $t_2$ en que el balón retorna al suelo. Obtenemos

$$t_2 = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\phi_0}{g} = \frac{2(15.5\text{ m/s})(\operatorname{sen}36°)}{9.8\text{ m/s}^2} = 1.86\text{ s}.$$

Nótese que $t_2 = 2t_1$, lo cual debe ocurrir porque se requiere el mismo tiempo para que el balón suba (llegue a su máxima altura desde el suelo) que el requerido para que el balón baje (llegue al suelo desde su máxima altura).

Podemos verificar estos resultados para que exista compatibilidad con $x = x_0 + v_{x0}t$. Cuando $t = t_2$, $x$ será igual a $R$. Entonces, según la ecuación 21, $R = v_{x0}t_2 = (v_0 \cos\phi_0 t_2) = 23.3$ m, como se esperaba.

(*d*) Para hallar la velocidad del balón cuando llegue al suelo, usemos la ecuación 17 para obtener $v_x$, la cual permanece constante durante todo el trayecto:

$$v_x = v_0 \cos\phi_0 = (15.5\text{ m/s})(\cos 36°) = 12.5\text{ m/s},$$

y, según la ecuación 18, obtenemos $v_y$ para $t = t_2$.

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\phi_0 - gt = (15.5\text{ m/s})(\operatorname{sen}36°) - (9.8\text{ m/s}^2)(1.86\text{ s})$$
$$= -9.1\text{ m/s}.$$

Así pues, la velocidad tiene una magnitud dada por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(12.5\text{ m/s})^2 + (-9.1\text{ m/s})^2} = 15.5\text{ m/s},$$

y una dirección dada por

$$\tan \phi = v_y/v_x = -9.1/12.5,$$

de manera que $\phi = -36°$, o sea 36° en el sentido horario del eje $x$. Nótese que $\phi = -\phi_0$, como esperábamos de la simetría (Fig. 5).

La velocidad final resulta ser igual a la velocidad inicial. ¿Puede usted explicarlo? ¿Es una coincidencia?

## 4-4 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En el movimiento de proyectiles la aceleración es constante tanto en magnitud como en dirección, pero la velocidad cambia tanto en magnitud como en dirección. Examinaremos ahora el caso especial en que una partícula se mueve a *velocidad* constante en una trayectoria circular. Como veremos, tanto la velocidad como la aceleración son de magnitud constante, pero ambas cambian de dirección continuamente. Esta situación se llama *movimiento circular uniforme*. Entre los ejemplos de esta clase de movimiento se incluyen a los satélites de la Tierra y a puntos de rotores que giran, tales como ventiladores, discos de fonógrafo y discos de computadora. De hecho, hasta el punto en que podemos vernos a nosotros mismos como partículas, participamos en un movimiento circular uniforme a causa de la rotación de la Tierra.

En la figura 10a se muestra la situación. Sea $P_1$ la posición de la partícula en el tiempo $t_1$ y $P_2$ su posición en el tiempo $t_2 = t_1 + \Delta t$. La velocidad en $P_1$ es $\mathbf{v}_1$, un vector tangente a la curva en $P_1$. La velocidad en $P_2$ es $\mathbf{v}_2$, un vector tangente a la curva en $P_2$. Los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ tienen la misma magnitud $v$, ya que la velocidad es constante, pero sus direcciones son diferentes. La longitud de la trayectoria descrita durante $\Delta t$ es la longitud del arco $P_1P_2$, que es igual a $r\phi$ (donde $\phi$ está medido en radianes) y también a $v\,\Delta t$. Entonces tenemos que

$$r\theta = v\,\Delta t. \tag{25}$$

Podemos ahora trazar a los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, como en la figura 10*b*, de modo que se originen en un punto común. Tenemos la libertad de hacerlo en tanto que la magnitud y la dirección de cada vector sean las mismas que en la figura 10*a*. La figura 10*b* nos permite ver claramente el *cambio en la velocidad* al moverse la partícula desde $P_1$ hasta $P_2$. Este cambio, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \Delta\mathbf{v}$, es el vector que debe sumarse a $\mathbf{v}_1$ para obtener $\mathbf{v}_2$. Si representamos el cambio en la velocidad en el intervalo $P_1P_2$ trazando $\Delta\mathbf{v}$ desde el punto medio del arco $P_1P_2$, entonces $\Delta\mathbf{v}$ apuntaría hacia el centro del círculo.

Ahora el triángulo $OQ_1Q_2$ formado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, y $\Delta\mathbf{v}$ es semejante al triángulo $CP_1P_2$ (Fig. 10*c*) formado por la cuerda $P_1P_2$ y los radios $CP_1$ y $CP_2$. Esto se debe a que ambos son triángulos isósceles que tienen el mismo ángulo en el vértice; el ángulo $\theta$ entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es el mismo que el ángulo $P_1CP_2$ porque $\mathbf{v}_1$ es perpendicular a $CP_1$ y $\mathbf{v}_2$ es perpendicular a $CP_2$. Trazando una bisectriz del ángulo $\theta$ en la figura 10*b*, hallamos que

$$\tfrac{1}{2}\Delta v = v \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}. \tag{26}$$

Expresemos ahora la magnitud de la aceleración promedio en el intervalo usando los resultados obtenidos en las ecuaciones 25 y 26 para $\Delta v$ y $\Delta t$:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v \operatorname{sen}(\theta/2)}{r\theta/v} = \frac{v^2}{r}\frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\theta/2}. \tag{27}$$

Ahora deseamos hallar la aceleración instantánea tomando el límite de esta expresión como $\Delta t \to 0$. Cuando $\Delta t$ es muy pequeña, el ángulo $\theta$ es pequeño. En este caso podemos usar la *aproximación de un ángulo pequeño*, $\operatorname{sen} x \approx x$. (Esto es válido *solamente* cuando el ángulo está en radianes; por ejemplo, cuando $x = 5° = 0.0873$ rad, $\operatorname{sen} x = 0.0872$.) Entonces, para ángulos pequeños $\operatorname{sen}(\theta/2) \approx \theta/2$, y la segunda fracción del lado derecho de la ecuación 27 tiende a 1. Nótese también que, en la primera fracción del lado derecho de la ecuación 27, ni $v$ ni $r$ dependen de $\Delta t$ y así el valor de esta fracción no es afectado por el límite. Por lo tanto, podemos obtener para la magnitud de la aceleración instantánea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v^2}{r}\frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\theta/2} = \frac{v^2}{r}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\theta/2}$$

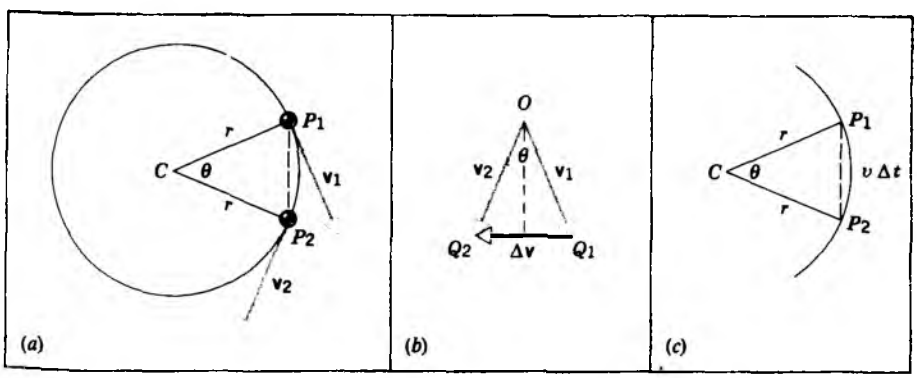



**Figura 10** Movimiento circular uniforme. (*a*) La partícula viaja alrededor de un círculo con velocidad constante. Se muestra su velocidad en dos puntos $P_1$ y $P_2$. (*b*) El cambio de velocidad, que va de $P_1$ a $P_2$, es $\Delta\mathbf{v}$. (*c*) La partícula viaja a lo largo del arco $P_1P_2$ durante el tiempo $\Delta t$.

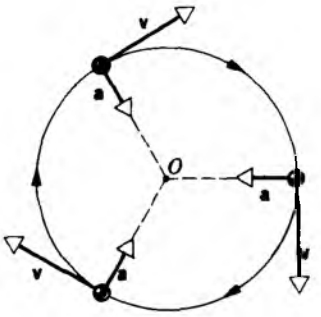



**Figura 11** En el movimiento circular uniforme, la aceleración **a** está siempre dirigida hacia el centro del círculo y, por lo tanto, siempre es perpendicular a **v**.

o sea, usando la aproximación del ángulo pequeño para reemplazar al límite restante por 1,

$$a = \frac{v^2}{r}. \tag{28}$$

Ya que la dirección de la aceleración promedio es la misma que la de $\Delta\mathbf{v}$, la dirección de **a** está siempre dirigida hacia el centro del círculo o del arco circular en el que se mueve la partícula.

La figura 11 muestra la relación instantánea entre **v** y **a** en varios puntos del movimiento. La magnitud de **v** es constante, pero su dirección cambia continuamente. Esto da lugar a una aceleración **a**, que es también constante en su magnitud pero cambia continuamente de dirección. La velocidad **v** es siempre tangente al círculo en dirección del movimiento; la aceleración **a** está siempre dirigida radialmente hacia adentro. Debido a esto, **a** se llama aceleración radial, o *centrípeta*. Centrípeta significa "que busca el centro". En la siguiente sección se da una derivación de la ecuación 28 usando vectores unitarios.

Tanto en caída libre como en el movimiento de un proyectil, **a** tiene magnitud y dirección constantes, y podemos usar las ecuaciones desarrolladas para la aceleración constante. No podemos usar estas ecuaciones para el movimiento circular uniforme porque **a** varía de dirección y, por lo tanto, no es constante.

Las unidades de la aceleración centrípeta son las mismas que las de una aceleración como consecuencia de un cambio en la magnitud de una velocidad. Dimensionalmente, tenemos que

$$[a] = \frac{[v^2]}{[r]} = \frac{(\mathrm{L/T})^2}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2},$$

las cuales son las dimensiones usuales de la aceleración. Las unidades pueden ser, por lo tanto, $\mathrm{m/s^2}$, $\mathrm{km/h^2}$, o unidades similares de dimensión $\mathrm{L/T^2}$.

La aceleración que resulta de un cambio en la dirección de una velocidad es tan real y tan acelerada en esencia como la que resulta de un cambio en la magnitud de una velocidad. Por definición, la aceleración es la rapidez de cambio de su velocidad con el tiempo, y la velocidad, por ser un vector, puede cambiar tanto en dirección como en magnitud. Si una cantidad física es un vector, sus aspectos direccionales no pueden ser ignorados, ya que esos efectos probarán ser en todos sentidos tan importantes y reales como los producidos por lo cambios en la magnitud.

Vale la pena recalcar en este momento que no se necesita que haya algún movimiento en la dirección de una aceleración y que, en lo general, no existe una relación fija entre las direcciones de **a** y de **v**. En la figura 12 se dan ejemplos en los que el ángulo entre **v** y **a** varía desde 0 hasta 180°. Sólo en un caso, $\theta = 0°$, está el movimiento en la dirección de **a**.

**Problema muestra 5** La Luna gira alrededor de la Tierra, haciendo una revolución completa en 27.3 días. Supongamos que la órbita es circular y que tiene un radio de 238,000 millas. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de la Luna hacia la Tierra?

**Solución** Tenemos que $r = 238{,}000$ millas $= 3.82 \times 10^8$ m. El tiempo de una revolución completa, llamado periodo, es $T = 27.3$ d $= 2.36 \times 10^6$s. La velocidad de la Luna (supuesta como constante) es, por lo tanto,

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(3.82 \times 10^8 \text{ m})}{2.36 \times 10^6 \text{ s}} = 1018 \text{ m/s}.$$

La aceleración centrípeta es

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(1018 \text{ m/s})^2}{3.82 \times 10^8 \text{ m}}$$
$$= 0.00271 \text{ m/s}^2, \quad \text{o tan sólo } 2.76 \times 10^{-4}\, g_n.$$

Aquí $g_n$ (= 9.80665 $\mathrm{m/s^2}$) es un valor patrón de $g$ aceptado internacional. Representa el valor aproximado de la aceleración en caída libre al nivel del mar y a una latitud de 45°. Este valor patrón se usa a menudo como una medida alternativa de la aceleración. Por ejemplo, la aceleración experimentada por los pilotos de aviones de propulsión a chorro o por los parroquianos en los juegos de un parque de diversiones se expresa a menudo de esta manera.

**Problema muestra 6** Calcule la velocidad de un satélite de la Tierra, suponiendo que está viajando a una altitud $h$ de 210 km, donde $g = 9.2$ $\mathrm{m/s^2}$. (Este valor es menor que 9.8 $\mathrm{m/s^2}$, porque $g$ decrece con la altitud sobre la Tierra, como estudiaremos en el capítulo 16). El radio $R$ de la Tierra es de 6370 km.

**Solución** Al igual que cualquier objeto libre cercano a la superficie de la Tierra, el satélite tiene una aceleración $g$ hacia el centro de la Tierra. Es esta aceleración, junto con su velocidad tangencial, la que causa que siga una trayectoria circular. De aquí que la aceleración centrípeta sea $g$, y según la ecuación 28, $a = v^2/r$, tenemos que, para $a = g$ y $r = R + h$,

$$g = \frac{v^2}{R + h}$$

o sea

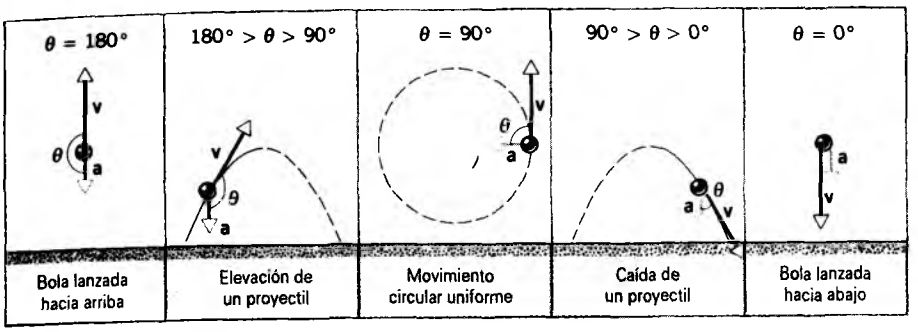



**Figura 12** La relación geométrica entre **v** y **a** para varios movimientos.

$$v = \sqrt{(R+h)g} = \sqrt{(6580\text{ km})(9.2\text{ m/s}^2)(10^3\text{ m/km})}$$
$$= 7780\text{ m/s} \quad \text{ó} \quad 17{,}400\text{ mi/h}.$$

A esta velocidad, el satélite requiere 1.48 h para completar una órbita.

## 4-5 VECTORES DE VELOCIDAD Y DE ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR *(Opcional)**

Como dedujimos en la sección anterior, una partícula que se mueva a velocidad constante a lo largo de un arco de un círculo experimenta una aceleración centrípeta. Aun cuando su velocidad no sea constante, todavía debe de tener una aceleración centrípeta, pero también tendrá una aceleración tangencial que cause un cambio en su velocidad tangencial. Los métodos vectoriales son útiles para relacionar las velocidades y las aceleraciones y para determinar la dirección de la aceleración resultante.

Comenzaremos por rederivar la ecuación 28 para la aceleración centrípeta a velocidad constante usando técnicas vectoriales más generales. La figura 13 muestra una partícula en movimiento circular uniforme con respecto al origen $O$ de un marco de referencia. Para este movimiento las coordenadas polares planas $r$ y $\phi$ son más útiles que las coordenadas rectangulares $x$ y $y$ porque $r$ permanece constante a través del movimiento y $\phi$ aumenta de una manera lineal simple con el tiempo; el comportamiento de $x$ y $y$ durante tal movimiento es más complejo. Los dos sistemas de coordenadas se relacionan por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \phi = \tan^{-1}(y/x) \tag{29}$$

o por las relaciones recíprocas

$$x = r\cos\phi \quad \text{y} \quad y = r\,\text{sen}\,\phi. \tag{30}$$

En los sistemas de coordenadas rectangulares usamos los vectores unitarios **i** y **j** para describir al movimiento en el plano $xy$. Aquí encontramos más conveniente introducir dos nuevos vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$. Éstos, como **i** y **j**, tienen longitud unitaria y carecen de dimensiones; designan a la dirección solamente.

El vector unitario $\mathbf{u}_r$ en cualquier punto está en la dirección de **r** creciente en ese punto. Está dirigido radial hacia afuera del origen. El vector unitario $\mathbf{u}_\phi$ en cualquier punto está en la dirección $\phi$ creciente en ese punto. Es siempre tangente a un círculo con el punto como centro en dirección antihorario. Como muestra, la figura 13*a*, $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ forman ángulos rectos entre sí. Los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ difieren de los vectores **i** y **j** en que las direcciones de $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ varían de punto a punto en el plano; los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ *no son*, entonces, vectores constantes. Por tanto, cuando tomemos derivadas de expresiones que impliquen a vectores unitarios, **i** y **j** pueden ser tratados como constantes, pero $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ no pueden serlo.

En términos de los vectores unitarios **i** y **j**, podemos escribir los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ (véase la Fig. 13*b*) así:

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i}\cos\phi + \mathbf{j}\,\text{sen}\,\phi, \tag{31}$$

$$\mathbf{u}_\phi = \mathbf{i}\cos(\phi + \pi/2) + \mathbf{j}\,\text{sen}(\phi + \pi/2)$$
$$= -\mathbf{i}\,\text{sen}\,\phi + \mathbf{j}\cos\phi. \tag{32}$$

Al escribir términos tales como $\mathbf{i}\cos\phi$, estamos multiplicando un vector por un escalar, y el orden de la multiplicación no es importante. Podríamos igual expresar este término como $(\cos\phi)\mathbf{i}$.

Si la partícula se mueve en un círculo a una velocidad constante, no tiene una componente radial de la velocidad, y el vector de velocidad está en la dirección de $\mathbf{u}_\phi$. Más aún, la

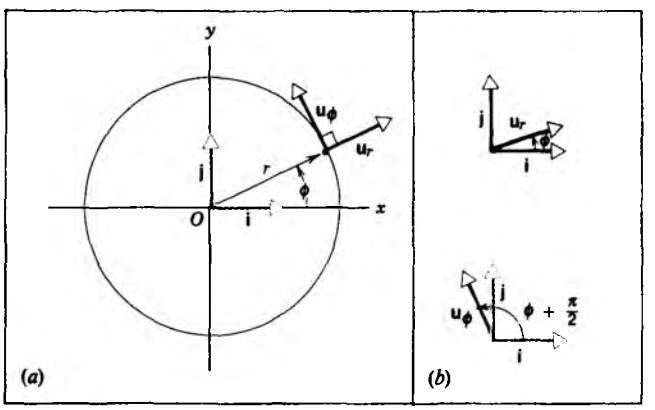



**Figura 13** (*a*) Una partícula que se mueve en sentido antihorario en un círculo de radio $r$. (*b*) Los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ y su relación con **i** y con **j**.

* El material de esta sección puede omitirse o dejarse para más adelante, cuando estudiemos el movimiento de rotación en el capítulo 11.

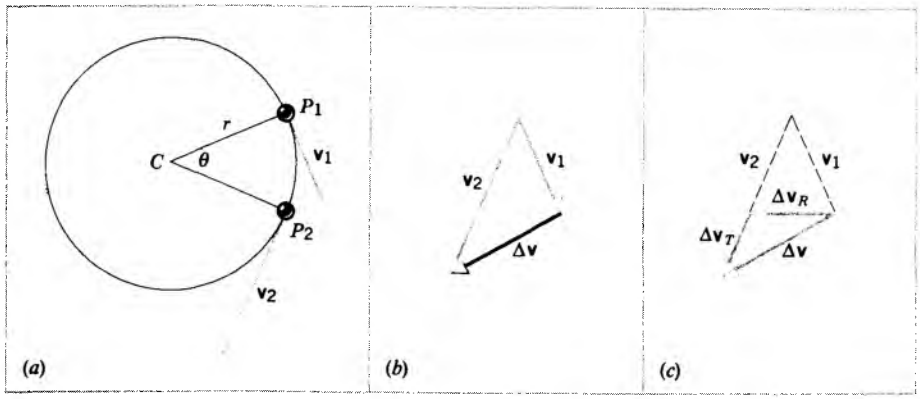



**Figura 14** (*a*) En el movimiento circular no uniforme la velocidad es variable. (*b*) El cambio de la velocidad $\Delta\mathbf{v}$ al ir de $P_1$ a $P_2$. (*c*) Existen dos partes para $\Delta\mathbf{v}$: $\Delta\mathbf{v}_R$, causada por el cambio en la dirección de **v**, y $\Delta\mathbf{v}_T$, causada por el cambio en la magnitud de **v**. En el límite $\Delta t \to 0$, $\Delta\mathbf{v}_R$ apunta hacia el centro $C$ del círculo y $\Delta\mathbf{v}_T$ es tangente a la trayectoria circular.

magnitud de la velocidad es precisamente la velocidad constante $v$, y, por lo tanto, podemos escribir que

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_\phi. \tag{33}$$

Esto es, **v** es tangente al círculo y de magnitud constante pero de dirección cambiante.

La aceleración se deduce ahora directa:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{u}_\phi) = v\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt}. \tag{34}$$

Nótese que la velocidad constante $v$ pasa por la diferenciación. Para hallar la derivada del vector unitario $\mathbf{u}_\phi$, usamos la ecuación 32:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} &= -\mathbf{i}\frac{d(\operatorname{sen}\phi)}{dt} + \mathbf{j}\frac{d(\cos\phi)}{dt} \\ &= -\mathbf{i}\cos\phi\frac{d\phi}{dt} - \mathbf{j}\operatorname{sen}\phi\frac{d\phi}{dt} \\ &= (-\mathbf{i}\cos\phi - \mathbf{j}\operatorname{sen}\phi)\frac{d\phi}{dt} \\ &= -\mathbf{u}_r\frac{d\phi}{dt}.\end{aligned} \tag{35}$$

Nótese que en la última etapa hemos usado la ecuación 31. Así,

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r v\frac{d\phi}{dt}. \tag{36}$$

La partícula se mueve uniforme alrededor del círculo, y así $d\phi/dt$ es precisamente la distancia angular cubierta en una revolución (2 $\pi$ radianes) dividida por el tiempo de una revolución (la distancia $2\pi r$ dividida por la velocidad $v$):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi}{2\pi r/v} = \frac{v}{r}. \tag{37}$$

Por último, sustituyendo la eccuación 37 en la ecuación 36, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= -\mathbf{u}_r v\frac{v}{r} \\ &= -\mathbf{u}_r\frac{v^2}{r}.\end{aligned} \tag{38}$$

Esta ecuación nos dice que la aceleración tiene la magnitud constante de $v^2/r$, como obtuvimos en la ecuación 28, y que apunta radialmente hacia adentro (esto es, opuesta a $\mathbf{u}_r$). Como la partícula viaja alrededor del círculo, las direcciones de $\mathbf{u}_r$ y de **a** cambian con relación a los ejes de coordenadas $xy$ porque la dirección radial cambia.

## Aceleración tangencial en el movimiento circular

Consideraremos ahora el caso más general del movimiento circular en el que la velocidad $v$ de la partícula en movimiento *no es* constante. De nuevo usaremos métodos vectoriales en coordenadas polares planas.

Como antes, la velocidad está dada por la ecuación 33, o sea

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_\phi$$

excepto que, en este caso no solamente $\mathbf{u}_\phi$ sino también la magnitud $v$ varía con el tiempo. Recordando la fórmula para la derivada de un producto, obtenemos para la aceleración:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{u}_\phi)}{dt} = v\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} + \mathbf{u}_\phi\frac{dv}{dt}. \tag{39}$$

La ecuación 34 no incluyó al segundo término del lado derecho de la ecuación 39 porque se supuso que $v$ era constante. El primer término del lado derecho de la ecuación 39 se reduce, como hemos derivado arriba, a $-\mathbf{u}_r(v^2/r)$. Podemos ahora escribir la ecuación 39 así:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r a_R + \mathbf{u}_\phi a_T, \tag{40}$$

en la cual $a_R = v^2/r$) y $a_T = dv/dt$. El primer término, $-\mathbf{u}_r a_R$, es la componente vectorial de **a** dirigida radialmente hacia el centro del círculo y surge como consecuencia de un cambio en la *dirección* de la velocidad en movimiento circular (véase la Fig. 14). El vector $\mathbf{a}_R$ y su magnitud $a_R$ se llaman ambos *aceleración centrípeta*. El segundo término, $\mathbf{u}\phi a_T$, es la componente vectorial de **a** que es tangente a la trayectoria de la partícula y proviene de un cambio en la *magnitud* de la velocidad en movimiento circular (véase la Fig. 14). Al vector $\mathbf{a}_T$ y a su magnitud $a_T$ se les llama (a ambos) *aceleración tangencial*.

La magnitud de la aceleración instantánea es

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2}. \tag{41}$$

Si la velocidad es constante, entonces $a_T = dv/dt = 0$ y la ecuación 40 se reduce a la ecuación 38. Cuando la velocidad $v$ no es constante, $a_T$ no es cero y $a_R$ varía de punto a punto. La velocidad $v$ puede estar cambiando de tal manera que $a_T$ no sea constante, y entonces tanto $a_T$ como $a_R$ pueden variar de punto a punto.

La figura 15 muestra el rastro dejado en una cámara de burbujas de hidrógeno líquido por un electrón energético que forma una espiral hacia adentro. El electrón disminuye su paso a través del líquido de la cámara de modo que su velocidad $v$ disminuye continuamente. Así, existe en cada punto una acele-

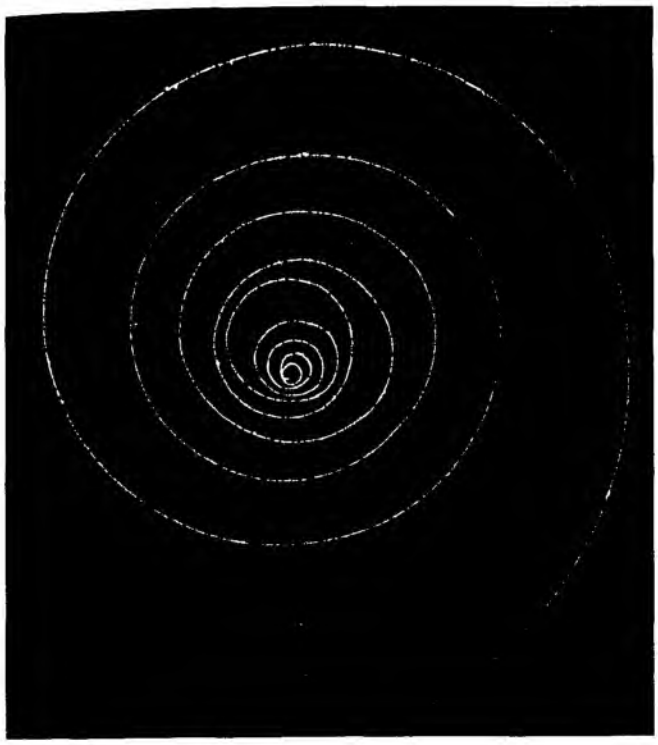


**Figura 15** Rastro dejado en una cámara de burbujas de hidrógeno líquido por un electrón. Existe una aceleración radial, causada por un campo magnético, que tiende a producir una trayectoria circular, pero a causa de que el electrón también va aminorando el paso a causa de las colisiones con los átomos de hidrógeno, experimenta también una aceleración tangencial. La trayectoria resultante es una espiral.

ración tangencial $a_T$ dada por $dv/dt$. Aun cuando el electrón no está viajando en una trayectoria circular, pequeños arcos de la espiral se parecen mucho a los arcos de un círculo con un radio $r$ dado. La aceleración centrípeta $a$ en cualquier punto está entonces dada por $v^2/r$, donde $r$ es el radio de la trayectoria en el punto en cuestión; tanto $v$ como $r$ resultan más pequeñas al perder energía la partícula. La aceleración radial del electrón se produce por un campo magnético presente en la cámara de burbujas y forma ángulos rectos con el plano de la figura 15 (véase el capítulo 34). ■

## 4-6 MOVIMIENTO RELATIVO

Supongamos que usted va en un automóvil que corre en una carretera recta a una velocidad constante de 55 mi/h. Los demás pasajeros que van con usted se mueven a la misma velocidad; aun cuando ésta, con relación al terreno, es de 55 mi/h, su velocidad con relación a usted es cero. En el automóvil usted podría llevar a cabo una serie normal de experimentos de física que no se verían afectados por el movimiento uniforme del automóvil. Por ejemplo, podría lanzar directa hacia arriba una pelota (en su marco de referencia), y observaría que cae directa hacia abajo. La pelota tiene un movimiento horizontal (a causa del movimiento del automóvil), pero usted tiene el mismo movimiento horizontal y no existe un movimiento horizontal *relativo*.

Para un observador en tierra, sin embargo, el resultado es diferente. La pelota tiene una componente horizontal hacia el frente de velocidad igual a 55 mi/h y una componente vertical del movimiento que usted le dio. Sabemos que un proyectil dentro de la gravedad con tales componentes de la velocidad sigue una trayectoria parabólica. Usted y el observador en tierra usarían por lo tanto ecuaciones diferentes para describir el movimiento, pero usted estaría en concordancia con las leyes físicas seguidas por la pelota; por ejemplo, los dos deducirían el mismo valor de la aceleración en caída libre.

Si después otro automóvil corre a su lado y lo rebasa a una velocidad constante de 57 mi/h, usted observaría que este automóvil (en relación con su propio marco de referencia) se mueve lenta hacia adelante de usted a razón de 2 mi/h (= 57 mi/h - 55 mi/h). Dejemos de lado los accidentes externos, es decir, el escenario que recorren, el aire quieto contra el que tropieza el automóvil en movimiento, las ondulaciones del camino, y el ruido del motor, y consideremos únicamente a los dos automóviles. Usted no tendría manera de decidir cuál de ellos se está moviendo "realmente". Por ejemplo, el automóvil que le rebasa pudiera estar en reposo y usted pudiera estar moviéndose hacia atrás a razón de 2 mi/h; el resultado observado sería el mismo.

En esta sección consideraremos la descripción del movimiento de una sola partícula por dos observadores que estén en movimiento uniforme entre sí. Los dos observadores pudieran ser, por ejemplo, una persona que viaja en un automóvil a velocidad constante a lo largo de una recta larga de una carretera y otra persona que está parada en el terreno. La partícula que ambos están observando pudiera ser una bola arrojada en el aire o en otro automóvil en movimiento.

Llamaremos a estos dos observadores $S$ y $S'$. Cada uno tiene un marco de referencia correspondiente que está unido a un sistema de coordenadas cartesianas. Por conveniencia, suponemos que los observadores están ubicados en los orígenes de sus respectivos sistemas de coordenadas. Hacemos sólo una restricción en esta situación: *la velocidad relativa entre $S$ y $S'$ debe ser una constante*. Nos referimos aquí a constante en magnitud y en dirección. Nótese que esta restricción no incluye al movimiento de la partícula que está siendo observada por $S$ y por $S'$. La partícula no tiene necesariamente que estar moviéndose a velocidad constante, y además la partícula bien pudiera estar acelerando.

La figura 16 muestra, en un tiempo partícular $t$, los dos sistemas de coordenadas que pertenecen a $S$ y a $S'$. Con el fin de simplificar, consideraremos al movimiento en dos

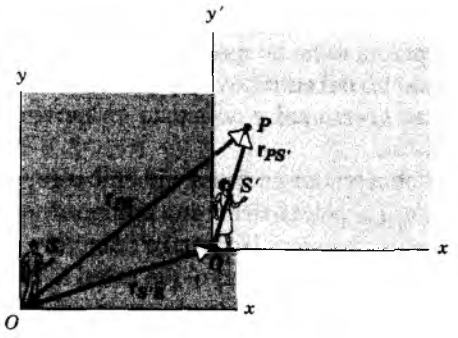



**Figura 16** Los observadores $S$ y $S'$, que se están moviendo uno con respecto al otro, observan a la misma partícula $P$ en movimiento. En el tiempo mostrado, ellos miden la posición de la partícula con respecto a los orígenes de sus sistemas de coordenadas, cuyas medidas son $\mathbf{r}_{PS}$ y $\mathbf{r}_{PS'}$, respectivamente. En ese mismo instante, el observador $S$ mide la posición de $S'$ con respecto al origen $O$, la cual es $\mathbf{r}_{S'S}$.

dimensiones solamente, los planos comunes $xy$ y $x'y'$ que se muestran en la figura 16. El origen del sistema $S'$ está ubicado con respecto al origen del sistema $S$ por el vector $\mathbf{r}_{S'S}$. Nótese en particular el orden de los subíndices que usamos para marcar al vector: el primer subíndice indica el sistema que está siendo ubicado (en este caso, el sistema de coordenadas de $S'$) y el segundo subíndice indica el sistema con respecto al cual hacemos la ubicación (en este caso, el sistema de coordenadas de $S$). El vector $\mathbf{r}_{S'S}$ se leería entonces como "la posición de $S'$ con respecto a $S$."

La figura 16 muestra también a una partícula $P$ en los planos comunes $xy$ y $x'y'$. Tanto $S$ como $S'$ ubican a la partícula $P$ con respecto a sus sistemas de coordenadas. De acuerdo con $S$, la partícula $P$ está en la posición indicada por el vector $\mathbf{r}_{PS}$, mientras que de acuerdo con $S'$ la partícula $P$ está en $\mathbf{r}_{PS'}$. De la figura 16 podemos deducir la siguiente relación entre los tres vectores:

$$\mathbf{r}_{PS} = \mathbf{r}_{S'S} + \mathbf{r}_{PS'} = \mathbf{r}_{PS'} + \mathbf{r}_{S'S}, \tag{42}$$

donde hemos empleado la ley conmutativa de la suma de vectores para intercambiar el orden de los dos vectores. De nuevo, es preciso prestar mucha atención al orden de los subíndices. En palabras, la ecuación 42 nos dice: "la posición de $P$ medida por $S$ es igual a la posición de $P$ medida por $S'$ más la posición de $S'$ medida por $S$."

Supongamos que la partícula $P$ se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{PS'}$ de acuerdo con $S'$. ¿Qué velocidad de la partícula mediría $S$? Para responder a esta pregunta, sólo necesitamos tomar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 42, lo cual da

$$\frac{d\mathbf{r}_{PS}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{PS'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{S'S}}{dt}.$$

La razón de cambio de la posición de cada vector da la velocidad correspondiente, de modo que

$$\mathbf{v}_{PS} = \mathbf{v}_{PS'} + \mathbf{v}_{S'S}. \tag{43}$$

Entonces, en cualquier instante, la velocidad de $P$ según es medida por $S$ es igual a la velocidad de $P$ medida por $S'$ más la velocidad relativa de $S'$ con respecto a $S$. Aunque hemos ilustrado las ecuaciones 42 y 43 para el movimiento en dos dimensiones, su aplicación corresponde igualmente bien en tres dimensiones.

La ecuación 43 es una ley de la *transformación de velocidades*. Nos permite transformar una medición de velocidad hecha por un observador en un marco de referencia, digamos $S'$, en otro marco de referencia, digamos $S$, siempre y cuando conozcamos la velocidad relativa entre los dos marcos de referencia. Es una ley basada firmemente tanto en el sentido común de la experiencia cotidiana como en los conceptos de espacio y tiempo que son esenciales en la física clásica de Galileo y de Newton. De hecho, la ecuación 43 se llama a menudo la *forma galileana de la ley de la transformación de velocidades.*

Consideraremos aquí sólo el caso especial muy importante en que los dos marcos de referencia se están moviendo a velocidad constante uno con respecto al otro. Esto es, $\mathbf{v}_{S'S}$ es constante tanto en magnitud como en dirección. Las velocidades $\mathbf{v}_{PS}$ y $\mathbf{v}_{PS'}$, que $S$ y $S'$ miden para la partícula $P$ pudieran no ser constantes y, por supuesto, no serían, en lo general, iguales una a la otra. Sin embargo, si uno de los observadores, digamos $S'$, mide una velocidad que sea constante en el tiempo, entonces ambos términos del lado derecho de la ecuación 43 son independientes del tiempo y, por lo tanto, el lado izquierdo de la ecuación 43 debe también ser independiente del tiempo. Entonces, si un observador concluye que la partícula se mueve a velocidad constante, entonces los demás observadores concluyen lo mismo, siempre y cuando ellos estén en marcos de referencia que se muevan a velocidad constante con respecto al marco del primer observador.

Un resultado aun más significativo se obtiene al diferenciar la ecuación 43:

$$\frac{d\mathbf{v}_{PS}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{PS'}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{S'S}}{dt}. \tag{44}$$

El último término de la ecuación 44 se anula, porque suponemos que la velocidad relativa de los dos marcos de referencia es una constante. Entonces

$$\frac{d\mathbf{v}_{PS}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{PS'}}{dt}.$$

Reemplazando estas dos derivadas de la velocidad con las aceleraciones correspondientes, obtenemos

$$\mathbf{a}_{PS} = \mathbf{a}_{PS'}. \tag{45}$$

Las aceleraciones de $P$ medidas por los dos observadores, ¡son idénticas!

En el siguiente capítulo hallaremos que la aceleración es fundamental en el comportamiento dinámico de un objeto según la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, la cual relaciona a la fuerza $\mathbf{F}$, a la masa $m$, y a la aceleración $\mathbf{a}$. La ecuación 45 fue derivada en la circunstancia especial de que los marcos de referencia $S$ y $S'$ se mueven a una velocidad relativa que es constante tanto en magnitud como en dirección. Tales marcos, que pueden moverse uno con relación al otro pero en los cuales todos los observadores hallan el mismo valor para la aceleración de una partícula dada en movimiento, se llaman *marcos de referencia inerciales*. En el siguiente capítulo veremos que son especialmente importantes porque las leyes del movimiento de Newton se cumplen sólo en tales marcos.

He aquí un ejemplo de una ley de física que puede ser usada para probar los marcos de referencia inerciales. Ate una masa a un extremo de una cuerda y mantenga el otro extremo de la cuerda de modo que la masa cuelgue libremente. La atracción de la gravedad de la Tierra sobre la masa tira de ella hacia el centro de la Tierra; la dirección de la cuerda puede usarse para definir un eje vertical. Ensaye ahora el experimento en su automóvil cuando se mueve en línea recta a una velocidad constante de 55 mi/h. El resultado es el mismo: la cuerda cuelga en la misma dirección vertical. El automóvil, como el terreno, es un marco de referencia inercial. Si usted ensaya de nuevo el experimento cuando el automóvil esté acelerando, frenando, o tomando una curva, la cuerda se desvía de la vertical. Estos marcos acelerados (aun con aceleración centrípeta) son marcos no inerciales.

En realidad, la Tierra es un marco de referencia inercial sólo aproximadamente. A causa de la rotación de la Tierra sobre su eje, dos observadores en diferentes latitudes tienen una velocidad tangencial relativa que cambia su dirección con la rotación. Éste es un efecto pequeño y es despreciable en la mayoría de las circunstancias, aunque debe tomarse en cuenta en los trabajos de precisión y puede tener incalculables consecuencias en circunstancia a gran escala. Por ejemplo, la naturaleza no inercial del marco de referencia de la superficie de la Tierra causa la rotación de los vientos con respecto a un centro de alta o de baja presión que puede producir tormentas severas y destructivas. En la sección 6-8 estudiaremos otras consecuencias de hacer observaciones en marcos de referencia no inerciales.

**Problema muestra 7** (*a*) La brújula de un aeroplano indica que va directo al este; el indicador de la velocidad del aire marca 215 km/h. Un viento continuo de 65 km/h está soplando directo al norte. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del aeroplano con respecto a tierra? (*b*) Si el piloto desea volar directo al este, ¿hacia dónde debe enfilar? Esto es, ¿qué deberá leerse en la brújula?

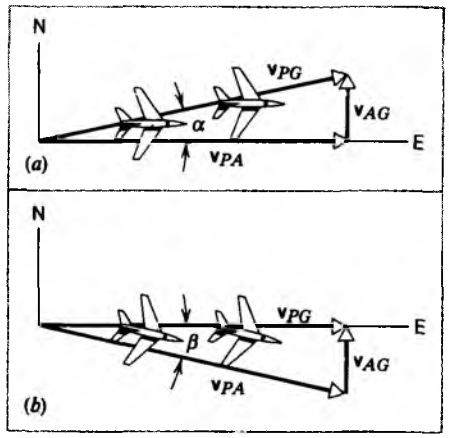



**Figura 17** Problema muestra 7. (*a*) Un aeroplano, que vuela hacia el este, es empujado por el viento hacia el norte. (*b*) Para viajar hacia el este, el aeroplano debe volar hacia el viento.

**Solución** (*a*) En este problema la "partícula" en movimiento es el aeroplano $P$. Existen dos marcos de referencia, el suelo ($G$) y el aire ($A$). Hagamos que el suelo sea nuestro sistema $S$ y que el aire sea el sistema $S'$, y por un simple cambio de notación, podemos reescribir la ecuación 43 así:

$$\mathbf{v}_{PG} = \mathbf{v}_{PA} + \mathbf{v}_{AG}.$$

La figura 17*a* muestra estos vectores, los cuales forman un triángulo rectángulo. Los términos son, en secuencia, la velocidad del aeroplano con respecto al suelo, la velocidad del aeroplano con respecto al aire, y la velocidad del aire con respecto al suelo (esto es, la velocidad del viento). Nótese la orientación del aeroplano, que es congruente con la lectura directo al este en la brújula.

La magnitud de la velocidad del suelo se halla de

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 + v_{AG}^2} = \sqrt{(215 \text{ km/h})^2 + (65 \text{ km/h})^2} = 225 \text{ km/h}.$$

El ángulo en la figura 17*a* se deduce de

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \tan^{-1} \frac{65 \text{ km/h}}{215 \text{ km/h}} = 16.8°.$$

Entonces, con respecto al suelo, el aeroplano está volando a 225 km/h en una dirección 16.8° NE. Nótese que la velocidad respecto al suelo es mayor que la velocidad respecto al aire.

(*b*) En este caso el piloto debe volar hacia el viento de modo que la velocidad del aeroplano con respecto a tierra apunte hacia el este. El viento permanece sin cambio y el diagrama vectorial que representa a la ecuación 43 es el que se muestra en la figura 17*b*. Nótese que los tres vectores todavía forman un triángulo rectángulo, como lo hicieron en la figura 17*a*, pero en este caso la hipotenusa es $v_{PA}$ en lugar de $v_{PG}$.

La velocidad del piloto respecto al suelo es ahora

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 - v_{AG}^2} = \sqrt{(215 \text{ km/h})^2 - (65 \text{ km/h})^2} = 205 \text{ km/h}.$$

Como lo indica la orientación del aeroplano en la figura 17*b*, el piloto debe volar hacia el viento según un ángulo $\beta$ dado por

$$\beta = \text{sen}^{-1} \frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \text{sen}^{-1} \frac{65 \text{ km/h}}{215 \text{ km/h}} = 17.6°.$$

Nótese que, volando hacia el viento como el piloto lo ha hecho, la velocidad respecto al terreno es ahora menor que la velocidad respecto al aire.

### Movimiento relativo a alta velocidad *(Opcional)*

Los argumentos anteriores acerca del movimiento relativo forman la piedra angular de la mecánica newtoniana, que comenzaremos a estudiar en el capítulo 5. No imponen una restricción en la velocidad relativa de los marcos de referencia (mientras sea constante) o en la velocidad del objeto que está siendo observado. Dos siglos después de Newton, Albert Einstein trató de imaginar el resultado de aplicar la ecuación 43 a un rayo de luz que viaja a una velocidad de $c$ = 299,792,458 m/s en el vacío. Supongamos que el observador $S'$ está viendo un rayo de luz que viaja a razón de $c$ en la dirección $x'$ positiva. Hagamos que $S'$ se mueva con relación a $S$, de nuevo en la dirección $x'$ positiva, a una velocidad $v_{S'S}$ = 1 m/s. ¿Qué velocidad observaría $S$ para el rayo de luz? La mecánica newtoniana respondería de acuerdo con la ecuación 43: $v_{PS}$ = 299,792,458 m/s + 1 m/s = 299,792,459 m/s.

Einstein estudió a fondo sus libros de texto de física. Sabía lo que la mecánica newtoniana tenía que decir acerca de los observadores en movimiento relativo, mirando a los rayos de luz. También sabía que un rayo de luz no es un objeto ordinario en movimiento. Un rayo de luz viaja de una manera especial. La luz es una radiación electromagnética y puede ser analizada en términos de los campos magnético y eléctrico que la constituyen. Un campo eléctrico en movimiento crea un campo magnético, y un campo magnético en movimiento crea a su vez un campo eléctrico. Así, los campos eléctrico y magnético de la luz en movimiento esencialmente se autogeneran conforme el rayo viaja. Si la ecuación 43 fuera válida para los rayos de luz, razonó Einstein, el observador $S$ podría emitir un rayo de luz en dirección $x$ con velocidad $c$, y el observador $S'$ podría viajar en dirección $x$ relativa a $S$ a razón de $v_{S'S} = c$ y atrapar al rayo de luz. Precisamente, como en el caso de un automóvil que viajaba a su lado a la misma velocidad que el automóvil de usted, al observador $S'$ le parecería que el rayo de luz está en reposo. Para Einstein esto fue una terrible contradicción: ¿cómo podía un rayo de luz, el cual está constituido fundamentalmente de campos electromagnéticos *en movimiento*, ser alguna vez observado "en reposo"?

Einstein propuso lo que para él era una solución obvia a este dilema: ningún rayo de luz puede jamás ser observado "en reposo". Por lo tanto, se debe deducir absolutamente que la ecuación 43 es errónea cuando se aplica a velocidades cercanas a $c$. Einstein llegó todavía un paso más adelante: afirmó que tanto $S$ como $S'$ deben medir precisamente el mismo valor que el de la velocidad de la luz, *¡sin importar cuáles sean sus velocidades relativas!* Esta aseveración parece contraria al sentido común y a las predicciones de la ecuación 43; si dos observadores se están moviendo a una velocidad relativa de 0.9999999$c$, ¿cómo pueden ambos medir la misma velocidad de $c$ para un rayo de luz emitido por uno de ellos?

Dejaremos hasta el capítulo 21 la descripción matemática completa de cómo sucede esto; por ahora, daremos una pista breve en el caso especial de que todas las velocidades sean en la dirección $x$ (ó $x'$). He aquí ahora el resultado de Einstein para la transformación de las velocidades:

$$v_{PS} = \frac{v_{PS'} + v_{S'S}}{1 + v_{PS'}v_{S'S}/c^2}. \qquad (46)$$

Nótese la belleza de este resultado. Cuando $v_{PS'}$ y $v_{S'S}$ son pequeñas (comparadas con $c$), el denominador de la ecuación 46 es muy cercano a 1 y la ecuación 46 se reduce a la ecuación 43. Con una velocidad baja, la transformación galileana de la velocidad arroja resultados aceptables. Cuando $v_{PS'} = c$ ($S'$ está observando un rayo de luz) entonces la ecuación 46 da $v_{PS} = c$ *no importa cuál sea el valor de* $v_{S'S}$. Todos los observadores miden el mismo valor en la velocidad de un rayo de luz, no importa cuáles sean sus velocidades relativas.

La aseveración de Einstein, y la cinemática y la mecánica que se deducen de ella, no requieren que abandonemos la física newtoniana. En su lugar, nos advierte que restrinjamos nuestros cálculos newtonianos a velocidades muy pequeñas en comparación con $c$. Para los objetos en movimiento que normalmente encontramos, vamos bien sin esta restricción. Aun un cohete de alta velocidad ($v = 10^4$ m/s), uno de los artefactos más rápidos construidos por el ser humano, tiene una velocidad que es mucho menor que $c$ ($3 \times 10^8$ m/s), de modo que podemos usar con seguridad la fórmula galileana sin un error significativo. Las partículas tales como los electrones o los protones pueden, sin embargo, ser aceleradas a velocidades que están muy cerca de $c$. A estas altas velocidades, debe usarse una nueva clase de física, con nuevas ecuaciones de cinemática y de dinámica. Esta nueva física es la base de la teoría especial de la relatividad, que estudiaremos más a fondo en el capítulo 21. ■

## PREGUNTAS

1. ¿Puede la aceleración de un cuerpo cambiar su dirección sin haber un cambio de dirección en la velocidad?
2. Sean **v** y **a** representantes de la velocidad y de la aceleración, respectivamente, de un automóvil. Describa las circunstancias en que (*a*) **v** y **a** son paralelos; (*b*) **v** y **a** son antiparalelos; (*c*) **v** y **a** son perpendiculares entre sí; (*d*) **v** es cero pero **a** no lo es; (*a*) **a** es cero pero **v** no lo es.
3. En salto de anchura, llamado a veces salto largo, ¿tiene importancia qué tan alto se salte? ¿Qué factores determinan el trecho del salto?
4. ¿Por qué el electrón de un haz de un cañón de electrones cae a causa de la gravedad tanto como una molécula de agua en el chorro de una manguera? Supóngase un movimiento inicial horizontal en cada caso.
5. ¿En qué punto o puntos de su trayectoria tiene un proyectil su mínima velocidad? ¿Y su máxima?
6. La figura 18 muestra la trayectoria seguida por un *Learjet* de la NASA en una carrera diseñada para simular las condiciones de baja gravedad durante un corto periodo de tiempo. Dé un argumento que demuestre que, si el aero-

plano sigue una trayectoria parabólica partícular, los pasajeros experimentarán la sensación de ingravidez.

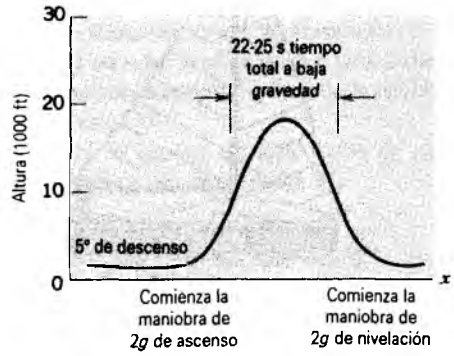



**Figura 18** Pregunta 6

7. Un obús es disparado *desde el nivel* del terreno. El ángulo de disparo que producirá el alcance más largo es menor de 45°; esto es, una trayectoria más plana tiene un alcance más largo. Explique por qué.
8. Consideremos un proyectil en la cima de su trayectoria. (*a*) ¿Cuál es su velocidad en términos de $v_0$ y $\phi_0$? (*b*) ¿Cuál es su aceleración? (*c*) ¿Cómo se relaciona la dirección de su aceleración con la de su velocidad?
9. En la figura 19 se muestran las trayectorias de tres balones pateados. Escoja la trayectoria para la cual (*a*) el tiempo de vuelo es el menor, (*b*) la componente vertical de la velocidad al patearlo es la más grande, (*b*) la componente horizontal de la velocidad al patearlo es la más grande, y (*d*) la velocidad de despegue es la menor. Desprecie la resistencia del aire.

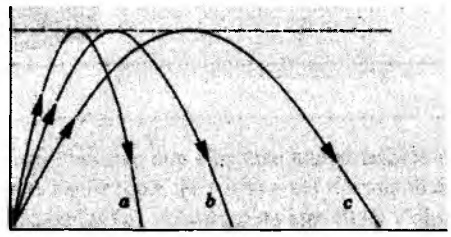



**Figura 19** Pregunta 9.

10. Un rifle es apuntado estando su cañón horizontal. Demuestre que, para el mismo alcance, el disparo será demasiado alto cuando se disparare ya sea cuesta arriba o cuesta abajo. (Véase "A Puzzle in Elementary Ballistics", por Ole Anton Haugland, *The Physics Teacher*, abril de 1983, p.246).
11. En su libro *Sport Science*, Peter Brancazio, refiriéndose a proyectiles tales como pelotas de béisbol y de golf, escribe: "En igualdad de condiciones, un proyectil viajará más lejos en un día caluroso que en un día frío, más lejos en una altitud elevada que al nivel del mar, más lejos en aire húmedo que en aire seco". ¿Cómo puede usted explicar estas afirmaciones?
12. Una gráfica de altura contra tiempo de un objeto lanzado vertical hacia arriba es una parábola. La trayectoria de un proyectil, lanzado hacia arriba pero no verticalmente hacia arriba, es también una parábola. ¿Es esto una coincidencia? Justifique su respuesta.
13. Las piezas de artillería de largo alcance no se colocan en el ángulo de "alcance máximo" de 45°, sino en ángulos de elevación más grandes, en el intervalo de 55° a 65°. ¿Qué hay de malo con los 45°?
14. En el movimiento de proyectiles en que la resistencia del aire sea despreciable, ¿es alguna vez necesario considerar el movimiento tridimensional en lugar del bidimensional?
15. ¿Es posible acelerar cuando se está viajando a velocidad constante? ¿Es posible rodear una curva con aceleración cero? ¿Y con aceleración constante?
16. Describa cualitativamente la aceleración que actúa sobre un abalorio que, deslizándose a lo largo de un alambre sin fricción, se mueve hacia adentro a velocidad constante a lo largo de una espiral.
17. Demuestre que, tomando en cuenta la rotación y la revolución de la Tierra, un libro que está sobre la mesa se mueve más rápido durante la noche que durante el día. ¿En qué marco de referencia es verdad esta aseveración?
18. Un aviador, al salir después de descender en picada, sigue el arco de un círculo y se dice que "se salió a 3*g*" al salir del clavado. Explique lo que significa esto.
19. Podría estar representada la aceleración de un proyectil en términos de una componente radial y una componente tangencial en cada punto del movimiento? De ser así, ¿existe alguna ventaja con esta representación?
20. Una tubería de forma rectangular con esquinas redondeadas se coloca en un plano vertical, como se muestra en la figura 20. Se introducen dos bolas de acero en la esquina superior derecha. Una viaja por el conducto *AB* y la otra por el conducto *CD*. ¿Cuál llegará más pronto a la esquina inferior izquierda?
21. Si la aceleración de un cuerpo es constante en un marco de referencia dado, ¿es necesaria constante en cualquier otro marco de referencia?
22. Un muchacho que está sentado en un carro de ferrocarril que se mueve a velocidad constante arroja una pelota al aire directa hacia arriba. ¿Caerá la pelota detrás de él? ¿Enfrente de él? ¿En sus manos? ¿Qué sucede si el carro acelera hacia adelante o pasa por una curva cuando la pelota está en el aire?
23. Una mujer que está en la plataforma trasera de un tren que se mueve a velocidad constante deja caer una moneda mientras se inclina sobre el barandal. Describir la trayectoria de la moneda según la ve (*a*) la mujer que va en el tren, (*b*) una persona que está parada sobre el suelo cerca de la vía, y (*c*) una persona que viaja en un segundo tren que se mueve en la dirección opuesta al primer tren por una vía paralela.
24. Un elevador está descendiendo a velocidad constante. Un pasajero deja caer una moneda al suelo. ¿Qué ace-

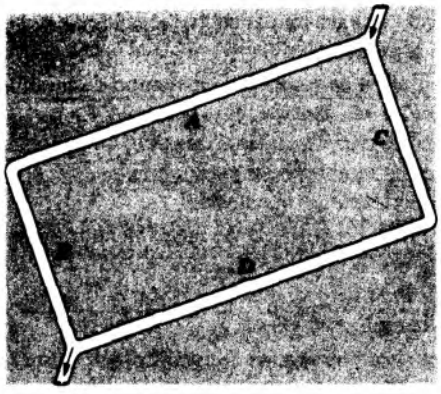


**Figura 20** Pregunta 20.

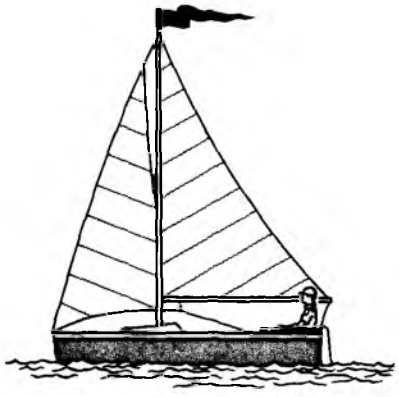


**Figura 21** Pregunta 28.

leración observarían en la moneda (*a*) el pasajero y (*b*) una persona en reposo con respecto al pozo o base del elevador.

**25.** Se está recogiendo agua en una cubeta a partir de una salida estable de una llave. ¿Cambiará la razón a la que se está llenando la cubeta si comienza a soplar un viento horizontal estable?

**26.** Un autobús tiene un parabrisas vertical y viaja bajo la lluvia a una velocidad $v_b$. Las gotas de lluvia caen verticalmente con una velocidad terminal $v_t$. ¿Con qué ángulo golpean las gotas de lluvia al parabrisas?

**27.** Durante una lluvia estable las gotas están cayendo verticalmente. Con objeto de ir bajo la lluvia de un lugar a otro de manera tal que se tope con el menor número de gotas de lluvia, ¿se movería usted a la mayor velocidad posible, a la menor velocidad posible, o a una velocidad intermedia? (Véase "An Optimal Speed for Traversing a Constant Rain", por S. A. Stern, *American Journal of Physics*, Septiembre de 1983, pág. 815).

**28.** ¿Cuál es el error de la figura 21? El bote está navegando con el viento.

**29.** *La transformación galileana de la velocidad*, ecuación 43, es tan instintivamente conocida en la experiencia cotidiana que a veces se asegura que "es obviamente correcta, no requiere ser demostrada". Muchas refutaciones de la teoría de la relatividad así llamadas se han basado en esta afirmación. ¿Cómo podría usted refutar a alguien que hiciera tal afirmación?

## PROBLEMAS

### *Sección 4-1 Posición, velocidad, y aceleración*

**1.** Un aeroplano vuela 410 mi al este desde la ciudad *A* hasta la ciudad *B* en 45 min y luego 820 mi al sur desde la ciudad *B* hasta la ciudad C en 1 h 30 min. (*a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del vector de desplazamiento que representa a la totalidad del viaje? ¿Cuáles son (*b*) el vector de la velocidad promedio y (*c*) la velocidad promedio del viaje?

**2.** La posición de una partícula que se mueve en un plano *xy* está dada por $\mathbf{r} = (2t^3 - 5t)\mathbf{i} + (6 - 7t^4)\mathbf{j}$. Aquí *r* está en metros y *t* está en segundos. Calcule (*a*) **r**, (*b*) **v**, y (*c*) **a** cuando $t = 2$ s.

**3.** En 3 h 24 min, un globo va a la deriva 8.7 km N, 9.7 km E, y 2.9 km en elevación desde el punto de salida sobre el suelo. Halle (*a*) la magnitud de su velocidad promedio y (*b*) el ángulo que su velocidad promedio forma con la horizontal.

**4.** La velocidad de una partícula que se mueve en el plano *xy* está dada por $\mathbf{v} = (6t - 4t^2)\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$. Aquí **v** está en metros por segundo y $t(>0)$ está en segundos. (*a*) ¿Cuál es la aceleración cuando $t = 3$ s? (*b*) ¿Cuándo, si alguna vez, es la aceleración cero? (*c*) ¿Cuándo (si sucede) es cero la velocidad? (*d*) ¿Cuándo (si sucede) es la rapidez igual a 10 m/s?

### *Sección 4-2 Movimiento con aceleración constante*

**5.** En un tubo de rayos catódicos se proyecta un haz de electrones horizontalmente a una velocidad de $9.6 \times 10^8$ cm/s a una región entre un par de placas horizontales de 2.3 cm de longitud. Un campo eléctrico entre las placas causa una aceleración constante de los electrones hacia abajo con magnitud de $9.4 \times 10^{16}$ cm/s$^2$. Halle (*a*) el tiempo requerido para que los electrones pasen a través de las placas, (*b*) el desplazamiento vertical del haz al pasar por

las placas, y (*c*) las componentes horizontal y vertical de la velocidad del rayo cuando emerge de las placas.

6. Un velero sobre hielo se desliza sobre la superficie de un lago congelado con una aceleración constante producida por el viento. En cierto momento su velocidad es $6.30\mathbf{i} - 8.42\mathbf{j}$ en m/s. Tres segundos más tarde el velero se detiene instantáneamente. ¿Cuál es la aceleración durante este intervalo?
7. Una partícula se mueve de modo que su posición en función del tiempo es, en unidades SI,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

Escriba las expresiones para (*a*) su velocidad y (*b*) su aceleración, ambas en función del tiempo. (*c*) ¿Cuál es la forma de la trayectoria de la partícula?

8. Una partícula sale del origen en $t = 0$ a una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = 3.6\mathbf{i}$, en m/s. Experimenta una aceleración constante $\mathbf{a} = -1.2\mathbf{i} - 1.4\mathbf{j}$, en m/s². (*a*) ¿En qué tiempo llega la partícula a su coordenada $x$ máxima? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en ese momento? (*c*) ¿Dónde está la partícula en ese momento?
9. Una partícula $A$ se mueve a lo largo de la línea $y = d$ (30 m) con una velocidad constante $\mathbf{v}(v = 3.0$ m/s) dirigida paralelamente al eje $x'$ positivo (Fig. 22). Una segunda partícula $B$ comienza en el origen con velocidad cero y aceleración constante $\mathbf{a}$ ($a = 0.40$ m/s²) en el mismo instante en que la partícula $A$ pasa el eje $y$. ¿Qué ángulo $\theta$ entre $\mathbf{a}$ y el eje $y$ positivo resultaría en una colisión entre estas dos partículas?

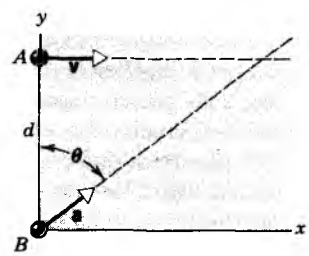



**Figura 22** Problema 9.

10. Una pelota se deja caer desde una altura de 39.0 m. El viento está soplando horizontalmente e imparte una aceleración constante de 1.20 m/s a la pelota. (*a*) Demuestre que la trayectoria de la pelota es una línea recta y halle los valores de $R$ y de $\theta$ en la figura 23. (*b*) ¿Qué tanto tiempo le toma a la pelota llegar al suelo? (*c*) ¿A qué velocidad golpea la pelota al suelo?

### *Sección 4-3 Movimiento de proyectiles*

11. Una pelota rueda fuera del borde de una mesa horizontal de 4.23 ft de altura. Golpea al suelo en un punto 5.11 ft horizontalmente lejos del borde de la mesa. (*a*) ¿Durante cuánto tiempo estuvo la pelota en el aire? (*b*) ¿Cuál era su velocidad en el instante en que dejó la mesa?

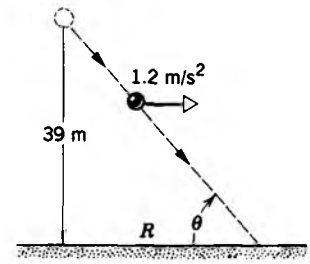



**Figura 23** Problema 10.

12. Los electrones, como todas las formas de materia, caen bajo la influencia de la gravedad. Si un electrón es proyectado horizontalmente a una velocidad de $3.0 \times 10^7$ m/s (un décimo de la velocidad de la luz), ¿qué tan lejos caerá al atravesar 1 m de distancia horizontal?
13. Un dardo es arrojado horizontalmente hacia el centro del blanco, punto $P$ del tablero, con una velocidad inicial de 10 m/s. Se clava en el punto $Q$ del aro exterior, verticalmente abajo de $P$, 0.19 s más tarde; véase la figura 24. (*a*) ¿Cuál es la distancia $PQ$? (*b*) ¿A qué distancia del tablero estaba parado el jugador?




**Figura 24** Problema 13.

14. Un rifle se apunta horizontalmente hacia un blanco alejado 130 m. La bala golpea el blanco 0.75 in abajo del punto de mira. (*a*) ¿Cuál es el tiempo de trayecto de la bala? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la bala en la boca del arma?
15. Un proyectil se dispara horizontalmente desde un cañón ubicado a 45.0 m sobre un plano horizontal con una velocidad en la boca del cañón de 250 m/s. (*a*) ¿Cuánto tiempo permanece el proyectil en el aire? (*b*) ¿A qué distancia horizontal golpea el suelo? (*c*) ¿Cuál es la magnitud de la componente vertical de su velocidad al golpear el suelo?
16. Una bola de béisbol deja la mano del lanzador horizontalmente a una velocidad de 92 mi/h. La distancia al bateador es de 60.0 ft. (*a*) ¿Cuánto tiempo le toma a la bola viajar los primeros 30.0 ft horizontalmente? ¿Los segundos 30 ft? (*b*) ¿A qué distancia cae la bola bajo la acción de la gravedad durante los primeros 30.0 ft de su viaje horizontal? (*c*) ¿Durante los segundos 30.0 ft? (*d*) ¿Por qué no son

iguales estas cantidades? Desprecie los efectos de la resistencia del aire.

**17.** En una historia de detectives, un cuerpo es hallado a 15 ft afuera de la base de un edificio y abajo de una ventana situada a 80 ft de altura. ¿Cree usted que la muerte fue accidental o que no? ¿Por qué?

**18.** Usted arroja una pelota desde un acantilado a una velocidad inicial de 15 m/s y con un ángulo de 20° abajo de la horizontal. Halle (*a*) su desplazamiento horizontal, y (*b*) su desplazamiento vertical 2.3 s más tarde.

**19.** Usted arroja una pelota a una velocidad de 25.3 m/s y un ángulo de 42.0° arriba de la horizontal directa hacia una pared como se muestra en la figura 25. La pared está a 21.8 m del punto de salida de la pelota. (*a*) ¿Cuánto tiempo estuvo la pelota en el aire antes de que golpee a la pared? (*b*) ¿A qué distancia arriba del punto de salida golpea la pelota a la pared? (*c*) ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de su velocidad cuando golpea a la pared? (*d*) ¿Ha pasado el punto más elevado de su trayectoria cuando la golpea?

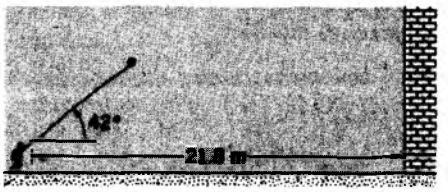



**Figura 25** Problema 19.

**20.** Demuestre que la altura máxima alcanzada por un proyectil es $y_{máx} = (v_0 \text{sen}\, \phi_0)^2 / 2g$.

**21.** (*a*) Pruebe que para un proyectil disparado desde la superficie a nivel del terreno con un ángulo $\phi_0$ arriba de la horizontal, la razón de la altura máxima $H$ y el alcance $R$ está dada por $H/R = \frac{1}{4}\tan \phi_0$. (*b*) Halle el ángulo de proyección para el cual la altura máxima y el alcance horizontal son iguales. Véase la figura 26.

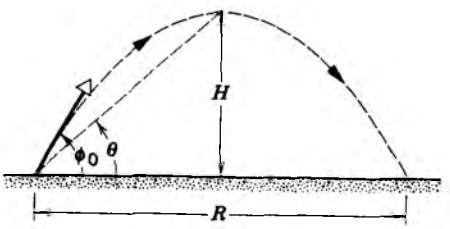



**Figura 26** Problemas 21 y 22.

**22.** Un proyectil se dispara desde la superficie de un suelo nivelado con un ángulo $\phi_0$ sobre la horizontal. (*a*) Demuestre que el ángulo de elevación $\theta$ del punto más elevado tal como se le ve desde el punto de disparo se relaciona con $\phi_0$ según $\tan \theta = \frac{1}{2} \tan \phi_0$. Véase la figura 26. (*b*) Calcule $\theta$ para $\phi_0 = 45°$.

**23.** Una piedra es proyectada a una velocidad inicial de 120 ft/s en una dirección 62° sobre la horizontal, hacia un acantilado de altura $h$, como se muestra en la figura 27. La piedra golpea al terreno en $A$ 5.5 s después del lanzamiento. Halle (*a*) la altura $h$ del acantilado, (*b*) la velocidad de la piedra en el momento antes de que se impacte en $A$, y (*c*) la altura máxima $H$ alcanzada sobre el suelo.

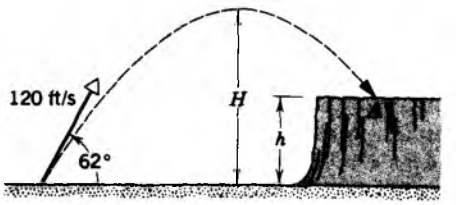



**Figura 27** Problema 23.

**24.** En ocasión de las Olimpíadas de 1968 en la ciudad de México, Bob Beamon rompió el record de salto largo con un salto de 8.90 m. Suponga que su velocidad inicial en el punto de separación del suelo era 9.50 m/s, casi igual a la de un corredor veloz. ¿Qué tan cerca estuvo este atleta de primera clase de llegar al alcance máximo posible en ausencia de una resistencia del aire? El valor de $g$ en la ciudad de México es de 9.78 m/s$^2$.

**25.** En el problema muestra 3, halle (*a*) la velocidad del paquete cuando golpea al blanco y (*b*) el ángulo del impacto con la vertical. (*c*) ¿Por qué el ángulo del impacto no es igual al ángulo de mira?

**26.** En el libro de Galileo *Dos ciencias nuevas* el sabio afirma que "para elevaciones [ángulos de proyección] que excedan o no lleguen a 45° por cantidades iguales, los alcances son iguales". (*a*) Pruebe esta aseveración (véase la Fig. 28). (*b*) Para una velocidad inicial de 30.0 m/s y un alcance de 20.0 m, halle los dos ángulos posibles de elevación de la proyección.

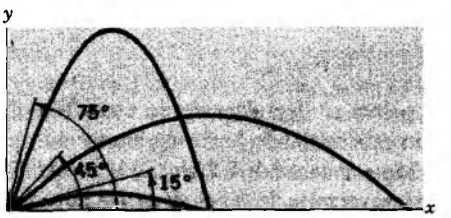



**Figura 28** Problema 26.

**27.** Un malabarista maneja cinco bolas en movimiento, lanzando cada una secuencialmente hacia arriba a una distancia de 3.0 m. (*a*) Determine el intervalo de tiempo entre dos lanzamientos sucesivos. (*b*) De las posiciones de las otras bolas en el instante en que una llega a su mano. (Desprecie el tiempo tomado para transferir la bola de una mano a la otra.)

**28.** Un rifle dispara una bala a una velocidad en la boca de 1500 ft/s a un blanco situado a 150 ft. ¿A qué altura del blanco debe ser apuntado el rifle para que la bala dé en el blanco?

**29.** Una pelota rueda desde lo alto de una escalera con una velocidad horizontal de magnitud 5.0 ft/s. Los escalones tienen 8.0 in de altura y 8.0 in de ancho. ¿En qué escalón golpeará primero la pelota?

**30.** Una pelota se arroja desde el terreno hacia el aire. A una altura de 9.1 m se observa que la velocidad es $\mathbf{v} = 7.6\mathbf{i} + 6.1\mathbf{j}$, en m/s (eje $x$ horizontal, eje $y$ vertical y hacia arriba). (*a*) ¿A qué altura máxima se elevará la pelota? (*b*) ¿Cuál será la distancia horizontal recorrida por la pelota? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de la pelota (magnitud y dirección) en el instante anterior de que golpee el suelo?

**31.** Si el montículo del lanzador está a 1.25 ft sobre el campo de béisbol, ¿puede un lanzador lanzar una bola rápida horizontalmente a 92.0 mi/h y aun así entrar en la zona de "strike" sobre la base que está a 60.5 ft de distancia? Suponga que, para obtener un strike, la bola debe entrar a una altura de 1.30 ft pero no mayor de 3.60 ft.

**32.** De acuerdo con la ecuación 24, el alcance de un proyectil no depende solamente de $v_0$ y de $\phi_0$ sino también del valor $g$ de la aceleración de gravitación, la cual varía de lugar a lugar. En 1936, Jesse Owens estableció un récord mundial de salto largo de 8.09 m en los Juegos Olímpicos de Berlín ($g = 9.8128$ m/s$^2$). Suponiendo los mismos valores de $v_0$ y de $\phi_0$, ¿en cuánto habría diferido su récord de haber competido en Melbourne ($g = 9.7999$ m/s$^2$) en 1956? (Relacionado con esto véase "The Earth's Gravity", por Weikko A. Heiskanen, *Scientific American*, Septiembre de 1955, pág. 164.)

**33.** Durante las erupciones volcánicas pueden ser proyectados por el volcán gruesos trozos de roca; estos proyectiles se llaman *bloques volcánicos*. La figura 29 muestra una sección transversal del Monte Fuji, en Japón. (*a*) ¿A qué velocidad inicial tendría que ser arrojado de la boca $A$ del volcán uno de estos bloques, formando 35° con la horizontal, con objeto de caer en el pie $B$ del volcán? (*b*) ¿Cuál es el tiempo de recorrido en el espacio?

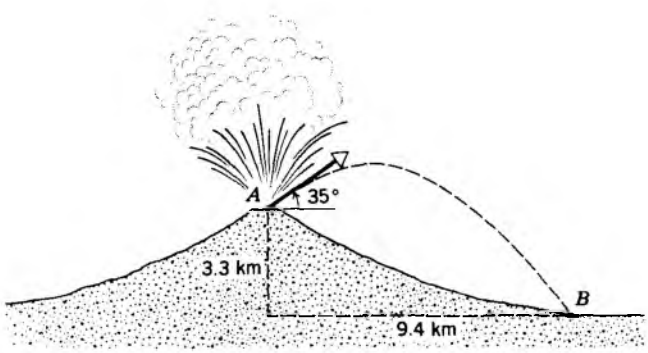



**Figura 29** Problema 33.

**34.** Un jugador de tercera base quiere lanzar a la primera base, que dista 127 ft. Su mejor velocidad de tiro es de 85 mi/h. (*a*) Si la bola deja su mano a 3.0 ft sobre el suelo en una dirección horizontal, ¿qué sucederá? (*b*) ¿Con qué ángulo de elevación deberá el jugador de tercera base lanzar la bola si se desea que el jugador en primera base la atrape? Suponga que el guante del jugador en primera base está también a 3.0 ft sobre el terreno. (*c*) ¿Cuál será el tiempo del recorrido?

**35.** ¿A qué velocidad inicial deberá el jugador de baloncesto lanzar la pelota, formando 55° con la horizontal, para encestar el tiro de castigo, como se muestra en la figura 30? El aro de la cesta tiene un diámetro de 18 in. Obtenga otros datos de la figura 30.

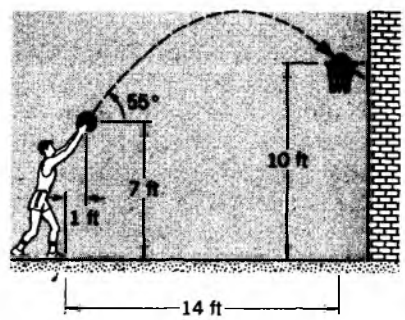



**Figura 30** Problema 35.

**36.** Un jugador de futbol patea la pelota para que tenga un "tiempo de suspensión" (tiempo de recorrido) de 4.50 s y aterrice a 50 yardas (= 45.7 m) de distancia. Si la pelota abandona el pie del jugador a 5.0 ft (= 1.52 m) de altura sobre el terreno, ¿cuál es su velocidad inicial (magnitud y dirección)?

**37.** Cierto aeroplano tiene una velocidad de 180 mi/h y baja en picada con un ángulo de 27° abajo de la horizontal cuando emite una señal de radar. La distancia horizontal entre el punto de emisión de la señal y el punto en que la señal golpea el suelo es de 2300 ft. (*a*) ¿Cuánto tiempo estará la señal en el aire? (*b*) ¿A qué altura estaba el aeroplano cuando se emitió la señal de radar? Véase la figura 31.

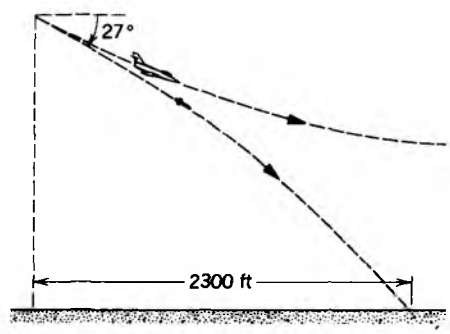



**Figura 31** Problema 37.

**38.** Un bombardero en picada, clavándose con un ángulo de 56.0° con la vertical, suelta una bomba a una altitud de

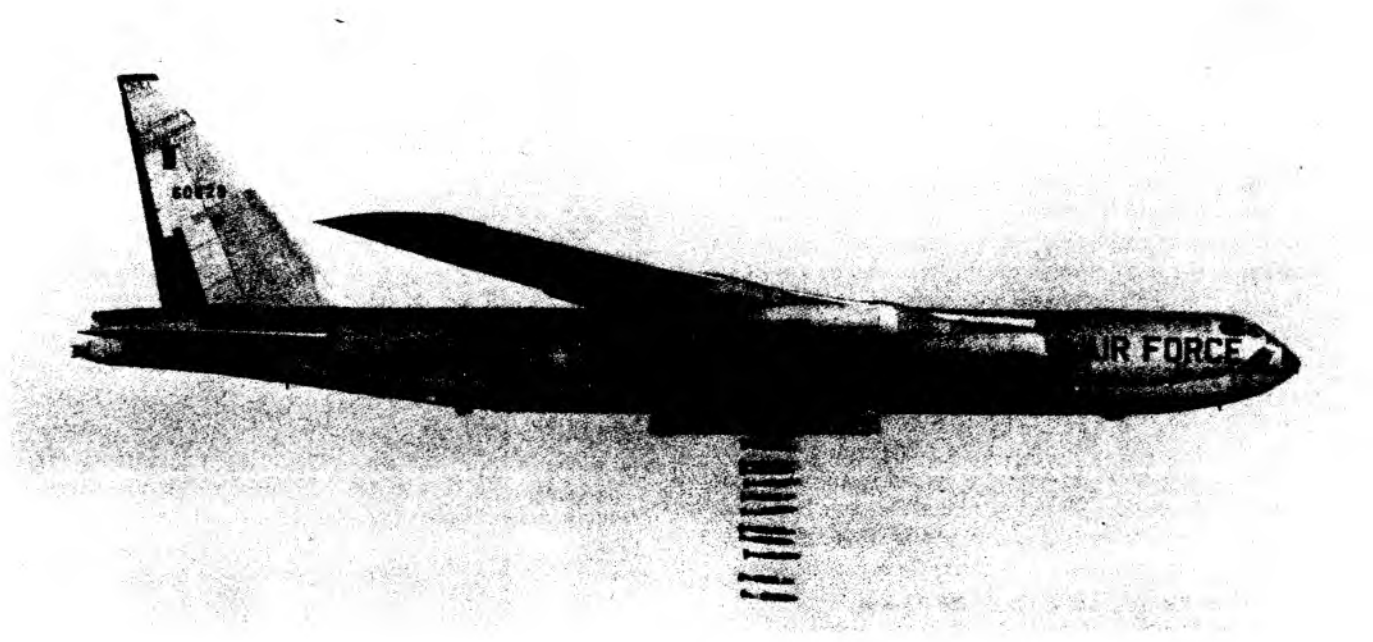



**Figura 32** Problema 39.

730 m. La bomba llega al suelo 5.10 s más tarde, fallando el blanco. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del bombardero? (*b*) ¿A qué distancia viaja la bomba horizontalmente durante su recorrido? (*c*) ¿Cuáles eran las componentes horizontal y vertical de su velocidad en el momento antes de que toque el suelo? (*d*) ¿Con qué velocidad y ángulo con la vertical cayó la bomba al suelo?

**39.** El B-52 que se muestra en la figura 32 tiene una longitud de 49 m y está viajando a una velocidad de 820 km/h (= 510 mi) sobre un objetivo. ¿Qué tan apartados entre sí estarán los cráteres que formen las bombas? Haga usted las mediciones que necesite directamente de la figura. Suponga que no hay viento y desprecie la resistencia del aire. ¿Cómo afectaría la resistencia del aire a su respuesta?

**40.** Una pelota de fútbol es pateada con una velocidad inicial de 64 ft/s y un ángulo de proyección de 42° sobre la horizontal. Un receptor en la línea de gol situada a 65 yardas en la dirección de la patada comienza a correr para atrapar a la pelota en ese instante. ¿Cuál debe ser su velocidad promedio si tiene que atrapar la pelota en el momento antes de que llegue al suelo? Desprecie la resistencia del aire.

**41.** (*a*) Durante una partida de tenis, un jugador sirve a 23.6 m/s (según registra una pistola de radar), dejando la pelota a la raqueta a 2.37 m sobre la superficie de la cancha, horizontalmente. ¿Por cuánto deberá la pelota salvar la red, que está a 12 m de distancia y tiene 0.90 m de altura? (*b*) Supóngase que el jugador sirve la pelota como antes excepto que la pelota deja la raqueta a 5.0° abajo de la horizontal. ¿Pasará esta vez la pelota sobre la red sin tocarla?

**42.** Un bateador golpea una bola lanzada a una altura de 4.0 ft sobre el suelo de modo que su ángulo de proyección es de 45° y el alcance horizontal es de 350 ft. La bola viaja hacia la línea izquierda del campo donde hay una barda de 24 ft de altura que se ubica a 320 ft de la placa de "home". ¿Pasará la bola por encima de la barda? De hacerlo, ¿por cuánto?

**43.** El pateador de un equipo de fútbol americano puede dar a la pelota una velocidad inicial de 25 m/s. ¿Dentro de qué zona angular deberá ser pateada la pelota si el pateador debe apenas anotar un gol de campo desde un punto situado a 50 m enfrente de los postes de gol cuya barra horizontal está a 3.44 m sobre el terreno?

**44.** Un cañón está listo para disparar proyectiles con una velocidad inicial $v_0$ directamente sobre la ladera de una colina con un ángulo de elevación $\alpha$, como se muestra en la figura 33. ¿A qué ángulo a partir de la horizontal deberá ser apuntado el cañón para obtener el alcance máximo posible $R$ sobre la ladera de la colina?

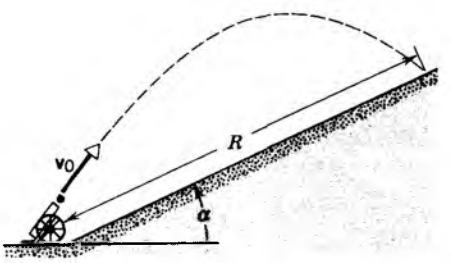



**Figura 33** Problema 44.

**45.** En un juego de béisbol un bateador envía la bola a una altura de 4.60 ft sobre el suelo de modo que su ángulo de proyección es de 52.0° con la horizontal. La bola aterriza

en el graderío, a 39.0 ft arriba de la parte inferior; véase la figura 34. El graderío tiene una pendiente de 28.0° y los asientos inferiores están a una distancia de 358 ft de la placa de "home". Calcule la velocidad con que la bola dejó el bate. (Desprecie la resistencia del aire.)

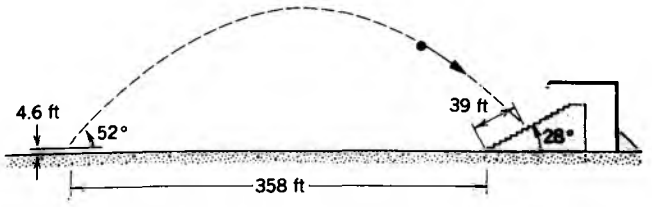



**Figura 34** Problema 45.

**46.** Se lanzan proyectiles a una distancia horizontal $R$ del borde de un acantilado de altura $h$ de manera tal que aterrizan a una distancia horizontal $x$ del fondo del acantilado. Si queremos que $x$ sea tan pequeña como es posible, ¿cómo ajustaríamos $\phi_0$ y $v_0$, suponiendo que $v_0$ pueda ser variada desde cero hasta un valor máximo finito $v_{máx}$ y que $\phi_0$ puede ser variado continuamente? Sólo se permite una colisión con el suelo; véase la figura 35.

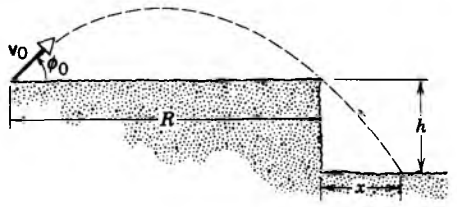



**Figura 35** Problema 46.

**47.** Una observadora de radar en tierra está "vigilando" la aproximación de un proyectil. En cierto instante tiene la siguiente información: el proyectil está a su máxima altitud y se mueve horizontalmente con velocidad $v$; la distancia en línea recta al proyectil es $L$; la línea de mira al proyectil está en un ángulo $\theta$ sobre la horizontal. (*a*) Halle la distancia $D$ entre la observadora y el punto de impacto del proyectil. $D$ tiene que ser expresado en términos de las cantidades observadas $v$, $L$, $\theta$, y el valor de $g$ conocido. Suponga una Tierra plana; suponga también que la observadora está en el plano de la trayectoria del proyectil. (*b*) ¿Cómo puede decirse si el proyectil pasará sobre la cabeza de la observadora o chocará contra el suelo antes de alcanzarla?

**48.** Un cohete se dispara desde el reposo y se mueve en línea recta a 70.0° sobre la horizontal con una aceleración de 46.0 m/s². Después de 30.0 s de vuelo impulsado, los motores se apagan y el cohete sigue una trayectoria parabólica hasta caer de nuevo en tierra (véase la figura 36). (*a*) Halle el tiempo de vuelo desde el disparo hasta el impacto. (*b*) ¿Cuál será la altitud máxima alcanzada? (*c*) ¿Cuál es la distancia desde la rampa de lanzamiento hasta el punto del impacto? (Desprecie la variación de $g$ con la altitud.)

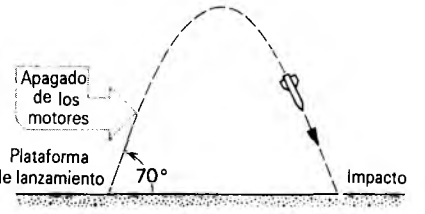



**Figura 36** Problema 48.

**49.** Un cañón antitanques está ubicado en el borde de una meseta a una altura de 60.0 m sobre la llanura que la rodea (véase la Fig. 37). La cuadrilla del cañón avista un tanque enemigo estacionado en la llanura a una distancia horizontal de 2.20 km del cañón. En el mismo instante, la tripulación del tanque ve el cañón y comienza a escapar en línea recta de éste con una aceleración de 0.900 m/s². Si el cañón antitanques dispara un obús con una velocidad de salida de 240 m/s y un ángulo de elevación de 10.0° sobre la horizontal, ¿cuánto tiempo esperarán los operarios del cañón antes de disparar para darle al tanque?

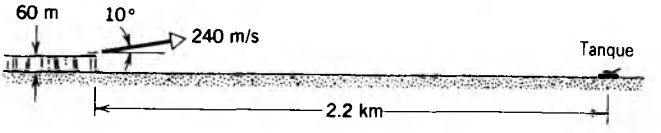



**Figura 37** Problema 49.

**50.** ¿Cuál es la altura vertical máxima a la cual un jugador de béisbol debe lanzar una bola si puede alcanzar una distancia de 60.0 m? Suponga que la bola es lanzada a una altura de 1.60 m a la misma velocidad en ambos casos.

### *Sección 4-4 Movimiento circular uniforme*

**51.** En el modelo Bohr del átomo de hidrógeno, un electrón gira alrededor de un protón en una órbita circular de $5.29 \times 10^{-11}$ m de radio con una velocidad de $2.18 \times 10^6$ m/s. ¿Cuál es la aceleración del electrón en este modelo del átomo de hidrógeno?

**52.** Un astronauta está girando en una centrífuga de 5.2 m de radio. (*a*) ¿Cuál es su velocidad si la aceleración es de 6.8 $g$? (*b*) ¿Cuántas revoluciones por minuto se requieren para producir esta aceleración?

**53.** Un satélite de la Tierra se mueve en una órbita circular situada a 640 km sobre la superficie de la Tierra. El tiempo para una revolución es de 98.0 min. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del satélite? (*b*) ¿Cuál es la aceleración en caída libre en la órbita?

**54.** Una rueda de feria Ferris tiene un radio de 15 m y completa cinco vueltas sobre su eje horizontal a cada minuto. (*a*) ¿Cuál es la aceleración, magnitud y dirección, de un pasajero en el punto más alto? (*b*) ¿Cuál es la aceleración en el punto más bajo?

**55.** Un abanico que está girando completa 1200 revoluciones cada minuto. Consideremos un punto en la punta de un aspa, la cual tiene un radio de 0.15 m. (*a*) ¿A qué distancia se mueve el punto en una revolución? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del punto? (*c*) ¿Cuál es su aceleración?

**56.** El tren rápido conocido como el TGV Atlantique (Train Grande Vitesse) que corre desde el sur de París hasta Le Mans, en Francia, tiene una rapidez máxima de 310 km/h. (*a*) Si el tren toma una curva a esta velocidad y la aceleración experimentada por los pasajeros ha de estar limitada a 0.05 *g*, ¿cuál es el radio de curvatura de la vía más pequeña que puede tolerarse? (*b*) Si existe una curva con un radio de 0.94 km, ¿A qué valor deberá disminur su velocidad?

**57.** Se cree que ciertas estrellas neutrón (estrellas extremadamente densas) giran a alrededor de 1 rev/s. Si una estrella tal tiene un radio de 20 km (valor típico), (*a*) ¿cuál es la velocidad de un punto situado en el ecuador de la estrella y (*b*) ¿cuál es la aceleración centrípeta de ese punto?

**58.** Una partícula *P* viaja a velocidad constante en un círculo de 3.0 m de radio y completa una revolución en 20 s (Fig. 38). La partícula pasa por el punto *O* en $t = 0$. Con respecto al origen *O*, halle (*a*) la magnitud y dirección de los vectores que describan su posición 5.0, 7.5, y 10 s más tarde; (*b*) la magnitud y dirección del desplazamiento en el intervalo de 5.0 s desde el quinto segundo hasta el décimo; (*c*) el vector de la velocidad promedio en este intervalo; (*d*) el vector de la velocidad instantánea al comienzo y al final de este intervalo, y (*e*) el vector de la aceleración instantánea al comienzo y al final de este intervalo. Mida los ángulos en sentido antihorario desde el eje *x*.

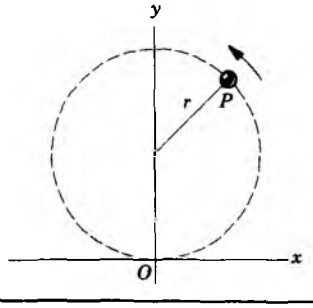



**Figura 38** Problema 58.

**59.** Una partícula en movimiento circular uniforme con respecto al origen *O* tiene una velocidad $v$. (*a*) Demuestre que el tiempo $\delta t$ requerido para que pase a través de un desplazamiento angular $\Delta\theta$ está dado por

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v}\frac{\Delta\theta}{360^\circ},$$

donde $\Delta\phi$ está en grados y *r* es el radio del círculo. (*b*) Refiérase a la Fig. 39 y, tomando las componentes *x* y *y* de las velocidades en los puntos 1 y 2, demuestre que $\bar{a}_x = 0$ y $\bar{a}_y = -0.9v^2/r$, para un par de puntos simétricos con respecto al eje *y* siendo $\theta = 90$. (*c*) Demuestre que si $\Delta\theta = 30°$, $\bar{a}_x = 0$ y $\bar{a}_y = -0.99v^2/r$. (*d*) Demuestre que $\bar{a}_y \to -v^2/r$ según $\Delta\theta \to 0$ y que la simetría circular requiere esta respuesta para cada punto del círculo.

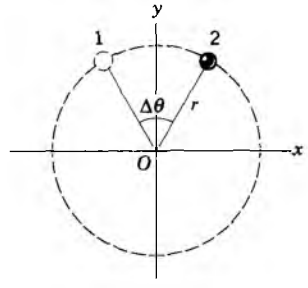



**Figura 39** Problema 59

**60.** Un niño hace girar a una piedra en un círculo horizontal situado a 1.9 m sobre el suelo por medio de una cuerda de 1.4 m de longitud. La cuerda se rompe, y la piedra sale disparada horizontalmente, golpeando el suelo a 11 m de distancia. ¿Cuál fue la aceleración centrípeta de la piedra mientras estaba en movimiento circular?

**61.** (*a*) Use los datos del apéndice C para calcular la relación de las aceleraciones centrípetas de la Tierra y de Saturno debidas a sus revoluciones alrededor del Sol. Suponga que ambos planetas se mueven en órbitas circulares a velocidad constante. (*b*) ¿Cuál es la razón de las distancias de estos dos planetas al Sol? (*c*) Compare las respuestas de las partes (*a*) y (*b*) y sugiera una relación sencilla entre la aceleración centrípeta y la distancia al Sol. Compruebe sus hipótesis calculando las mismas razones para otro par de planetas.

**62.** (*a*) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un objeto situado en el ecuador de la Tierra debido a la rotación de la misma? (*b*) ¿Cuál tendría que ser el periodo de rotación de la Tierra para que los objetos situados en el ecuador tuvieran una aceleración centrípeta igual a 9.8 m/s²?

**63.** Calcule la aceleración de una persona situada en la latitud 40° debida a la rotación de la Tierra.

**64.** Una mujer de 1.6 metros de talla permanece de pie en la latitud 50° durante 24 h. (*a*) Durante este intervalo, ¿qué tanto más se mueve en comparación con las plantas de sus pies? (*b*) ¿Cuánto más grande es la aceleración de su cabeza que la aceleración de las plantas de los pies? Considere solamente los efectos asociados con la rotación de la Tierra.

### *Sección 4-5 Vectores de velocidad y de aceleración en el movimiento circular*

**65.** Una partícula está viajando en una trayectoria circular de 3.64 m de radio. En cierto instante, la partícula se mueve a razón de 17.4 m/s, y su aceleración forma un ángulo de 22.0° en dirección al centro del círculo según se ve desde la partícula (véase la figura 40). ¿A qué tasa está creciendo la velocidad de la partícula? (*b*) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración?

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



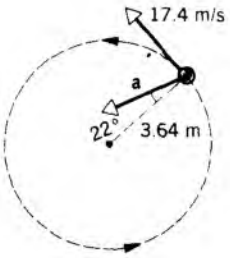



**Figura 40** Problema 65.

**66.** Una partícula se mueve en un plano de acuerdo a

$$x = R \operatorname{sen} \omega t + \omega R t,$$

$$y = R \cos \omega t + R,$$

donde $\omega$ y $R$ son constantes. Esta curva, llamada *cicloide*, es la trayectoria trazada por un punto de la llanta de una rueda que gira sin resbalamiento a lo largo del eje $x$. (*a*) Trace la trayectoria. (*b*) Calcule la velocidad y la aceleración instantáneas cuando la partícula está en el valor de $y$ máximo y mínimo.

***Sección 4-6 Movimiento relativo***

**67.** Una persona asciende por una escalera mecánica quieta de 15 m de longitud en 90 s. Estando de pie en la misma escalera, ahora en movimiento, la persona es transportada en 60 s. ¿Cuánto tiempo le tomaría a esa persona ascender por la escalera en movimiento? ¿Depende la respuesta de la longitud de la escalera?

**68.** La terminal del aeropuerto de Ginebra, Suiza, tiene un "pasillo móvil" para hacer más rápido el tránsito de los pasajeros en un corredor largo. Pedro, que camina por el corredor pero no utiliza el pasillo móvil, emplea 150 s para atravesarlo. Pablo, quien simplemente va de pie en el pasillo móvil, cubre la misma distancia en 70 s. María no sólo usa el pasillo móvil sino que camina a lo largo de él. ¿Cuánto tiempo emplea María? Suponga que Pedro y María caminan a la misma velocidad.

**69.** Un vuelo transcontinental de 2700 mi está programado con un tiempo 50 min más largo cuando vaya hacia el oeste que hacia el este. La velocidad del aeroplano de propulsión a chorro en el aire es de 600 mi/h. ¿Qué hipótesis deberán hacerse sobre la velocidad de la corriente de viento del chorro del aeroplano, ya sea del este o del oeste, al preparar la bitácora?

**70.** Está nevando verticalmente a una velocidad constante de 7.8 m/s. (*a*) ¿Con qué ángulo con respecto a la vertical y (*b*) a qué velocidad parecen estar cayendo los copos de nieve según los ve el conductor de un automóvil que viaja en una carretera recta a una velocidad de 55 km/h?

**71.** Un tren viaja hacia el sur a razón de 28 m/s (con relación al terreno) bajo una lluvia que se inclina hacia el sur por el soplo del viento. La trayectoria de cada gota de lluvia forma un ángulo de 64° con la vertical, según lo aprecia un observador que se halla quieto en el suelo. Sin embargo, otro observador que viaja en un tren ve las trayectorias de la lluvia perfectamente verticales a través del vidrio de la ventana. Determine la velocidad de las gotas de lluvia con relación a tierra.

**72.** En un gran almacén un comprador se halla de pie sobre la escalera mecánica que asciende; la escalera se mueve a un ángulo de 42° sobre la horizontal y a una velocidad de 0.75 m/s. El comprador se cruza con su hija, la cual va de pie en una escalera, idéntica adyacente, que desciende. (Véase la figura 41). Halle la velocidad del comprador respecto a su hija.

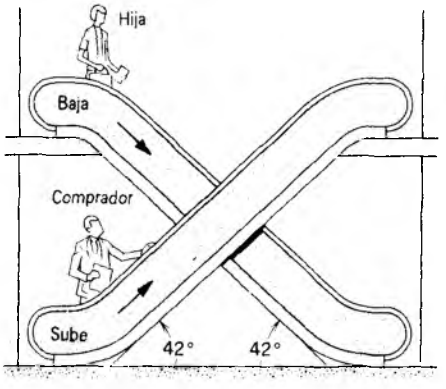



**Figura 41** Problema 72.

**73.** Un piloto debe viajar hacia el este desde $A$ hasta $B$ y luego regresan de nuevo a $A$ hacia el oeste. La velocidad del aeroplano en el aire es **v** y la velocidad del aire con respecto al suelo es **u**. La distancia entre $A$ y $B$ es $l$ y la velocidad del aeroplano en el aire es constante. (*a*) Si $u = 0$ (aire quieto), demuestre que el tiempo del viaje redondo es $t_0 = 2l/v$. (*b*) Suponga que la velocidad del aire va hacia al este (u oeste). Demuestre que el tiempo del viaje redondo es, entonces,

$$t_E = \frac{t_0}{1 - u^2/v^2}.$$

(*c*) Suponga que la velocidad del aire es hacia el norte (o hacia el sur). Demuestre que el tiempo del viaje redondo es, entonces,

$$t_N = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}.$$

(*d*) En las partes (*b*) y (*c*), ¿debemos suponer que $u < v$? ¿Por qué?

**74.** Dos carreteras se intersecan, como se ve en la Fig. 42. En el instante mostrado, una patrulla $P$ está a 41 m de la intersección y moviéndose a razón de 76 km/h. El motorista $M$ está a 57 m de la intersección y moviéndose a razón de 62 km/h. En este momento, ¿cuál es la velocidad (magnitud y ángulo con la línea de mira) del motorista con respecto a la patrulla?

**75.** Un helicóptero está volando en línea recta sobre el nivel del campo a una velocidad constante de 6.2 m/s y una altitud constante de 9.5 m. Un paquete es arrojado

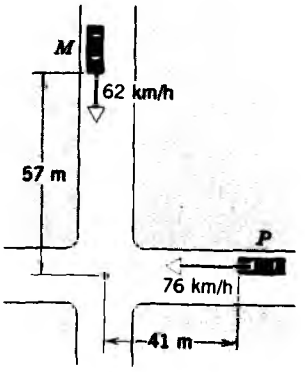



**Figura 42** Problema 74.

horizontalmente desde el helicóptero con una velocidad inicial de 12 m/s en relación al helicóptero, y en dirección opuesta al movimiento del helicóptero. (*a*) Halle la velocidad inicial del paquete con relación al terreno. (*b*) ¿Cuál es la distancia horizontal entre el helicóptero y el paquete en el instante en que el paquete golpea el terreno? (*c*) ¿Qué ángulo forma el vector velocidad del paquete con el terreno en el instante anterior al impacto, visto desde el suelo? (*d*) ¿Y tal como se vería desde el helicóptero?

**76.** Un elevador asciende con una aceleración de 4.0 ft/s². En el instante en que su velocidad es de 8.0 ft/s, un tornillo suelto cae desde el techo del elevador hasta el piso, que está a 9.0 ft de distancia. Calcule (*a*) el tiempo que le tomó al tornillo viajar desde el techo al piso, y (*b*) la distancia que ha caído en relación al tiro del elevador.

**77.** Un avión ligero alcanza una velocidad en el aire de 480 km/h. El piloto se dispone a salir hacia un destino situado a 810 km al norte, pero descubre que el avión debe enfilar a 21° NE para volar hacia allí directamente. El avión llega en 1.9 h. ¿Cuál fue el vector de la velocidad del viento?

**78.** La Policía estatal de Nueva Hampshire utiliza aviones para controlar los límites de velocidad en la carretera. Supongamos que uno de los aeroplanos tiene una velocidad de 135 mi/h en aire quieto. Está volando directo al norte de modo que en todo momento está sobre una carretera norte-sur. Un observador en tierra le dice por radio al piloto que está soplando un viento de 70 mi/h pero descuida darle la dirección del viento. El piloto observa que a pesar del viento el aeroplano puede viajar 135 mi a lo largo de la carretera en 1 h. En otras palabras, la velocidad en el suelo es la misma que si no hubiese viento. (*a*) ¿Cuál es la dirección del viento? (*b*) ¿Cuál es la dirección del aeroplano, esto es, el ángulo entre su eje y la carretera?

**79.** Una mujer puede remar en un bote a razón de 4.0 mi/h en aguas tranquilas. (*a*) Si está cruzando un río donde la corriente es de 2.0 mi/h, ¿hacia qué dirección deberá llevar su bote si quiere llegar a un punto directamente opuesto a su punto de arranque? (*b*) Si el río tiene una anchura de 4.0 mi, ¿cuánto tiempo le tomará cruzar el río? (*c*) ¿Cuánto tiempo le tomará remar 2.0 mi *río abajo* y luego regresar a su punto de arranque? (*d*) ¿En qué dirección deberá enfilar a su bote si desea cruzar en el tiempo más corto posible? ¿Cuál es ese tiempo?

**80.** Un carro de carga de madera se está moviendo en una vía del ferrocarril a una velocidad $v_1$. Un tirador apostado dispara una bala (velocidad inicial $v_2$) hacia él con un rifle de alto poder. La bala traspasa ambas paredes del carro, estando los orificios de entrada y salida exactamente opuestos entre sí según se ven desde adentro del carro. ¿Desde qué dirección, respecto a la vía, se hizo el disparo? Suponga que la bala no se desvía después de entrar al carro, pero que su velocidad disminuye en un 20%. Tome $v_1$ = 85 km/h y $v_2$ = 650 m/s. (¿Le sorprende que no necesite conocer la anchura del carro de carga?).

**81.** Un hombre desea cruzar un río de 500 m de anchura. Su velocidad al remar (en relación al agua) es de 3.0 km/h. El río fluye a una velocidad de 2.0 km/h. La velocidad a la que camina el hombre en la orilla es de 5.0 km/h. (*a*) Halle la trayectoria (remo y caminata combinadas) que tomaría para llegar al punto directamente opuesto a su punto de partida en el tiempo más corto. (*b*) ¿Cuánto tiempo le tomaría?

**82.** Un buque de guerra navega directo al este a razón de 24 km/h. Un submarino que está a 4.0 km de distancia dispara un torpedo que tiene una velocidad de 50 km/h (véase la Fig. 43). Si la orientación del buque según se ve desde el submarino es de 20° NE, (*a*) ¿en qué dirección debería ser disparado el torpedo para que alcance al buque, y (*b*) cuál sería el tiempo de viaje del torpedo hasta alcanzar al buque?

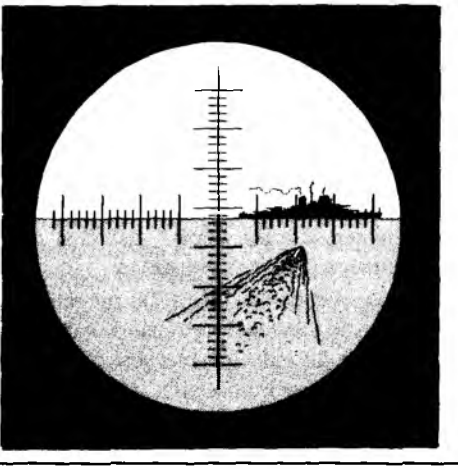


**Figura 43** Problema 82.

**83.** Un electrón se mueve a una velocidad de 0.42 *c* con respecto al observador *B*. El observador *B* se mueve a una velocidad de 0.63 *c* con respecto al observador *A*, en la misma dirección que el electrón. ¿Qué velocidad del electrón mide el observador *A*?

**84.** La galaxia Alfa se aleja de nosotros a una velocidad de 0.350 *c*. Por otra parte la galaxia Beta, localizada precisamente en la dirección opuesta, está alejándose de nosotros a la misma velocidad. ¿Qué velocidad de alejamiento

percibiría un observador que estuviera en la galaxia Alfa (*a*) de nuestra galaxia y (*b*) de la galaxia Beta?

### *Proyectos para la computadora*

**85.** Una computadora puede generar una tabla de coordenadas, componentes de la velocidad, y componentes de la aceleración de un objeto en tiempos especificados. La tabla puede ser consultada luego para hallar cantidades interesantes, tales como el punto más elevado de una trayectoria, el tiempo de aterrizaje, etc. Escriba un programa o diseñe una hoja de cálculo para las coordenadas y las componentes de la velocidad de un proyectil al final de cada intervalo de tiempo $\Delta t$ desde el tiempo $t_1$ hasta el tiempo $t_2$, suponiendo que el proyectil parte desde el origen en el tiempo $t = 0$. Esto es, la computadora deberá evaluar $x = v_0 t \cos \theta_0$, $y = v_0 t \operatorname{sen} \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$, $v_x = v_0 \cos \theta_0$ y $v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt$ para $t = t_1, t_1 + \Delta t, t_1 + 2\,\Delta t, \ldots, t_1 + N\,\Delta t$. Comience con los valores de $v_0$, $\theta_0$, $t_1$, $\Delta t$, y $N$. Disponga el programa de modo que puedan ser cambiados fácilmente $t_1$, $\Delta t$, y $N$ en corridas siguientes sin realimentar con los valores de otras cantidades. Pruebe el programa resolviendo el problema siguiente. Compare los resultados con los obtenidos de las expresiones algebraicas apropiadas.

Un proyectil es disparado sobre el nivel del suelo con $v = 50$ m/s a 25° sobre la horizontal. (*a*) Evaluar $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, y $v_y(t)$ al final de cada 0.1 s desde $t = 0$ hasta $t = 4.5$ s. (*b*) Halle los dos valores del tiempo entre los cuales estará el proyectil en el punto más elevado de su trayectoria. Corra de nuevo su trayectoria. Corra de nuevo el programa con $t_1$ igual al primero de estos tiempos y $\Delta t = 0.005$ s. Use la tabla para calcular las coordenadas del punto más elevado con 2 cifras significativas. (*c*) Use la misma técnica para hallar el tiempo, las coordenadas y las componentes de la velocidad cuando el proyectil retorna a la altura del disparo.

**86.** Una partícula se mueve en el plano $xy$ sujeta a la aceleración $a_x = -1.7$ y $a_y = -0.45$. (En este problema, todas las dimensiones están en centrímetros y todos los tiempos en segundos.) En $t = 0$, la partícula pasa por el punto $x = 1$, $y = 10$ moviéndose a velocidad $v_x = 10$ y $v_y = 2$. Escriba un programa para la computadora que tabule las siguientes variables que describen el movimiento de la partícula cuando está en el primer cuadrante (arriba a la derecha) solamente: $t, x, y, r, \phi(= \tan^{-1} y/x)$, $v_x$, $v_y$, $v$, $\theta(= \tan^{-1} v_y/v_x)$. Use la tabla de valores para responder a las siguientes preguntas. De todas las respuestas con 3 cifras significativas. Algunas preguntas pueden tener más de una respuesta. (*a*) ¿En qué tiempo y en qué lugar deja la partícula al primer cuadrante? (*b*) ¿Cuál es la distancia máxima de la partícula desde el origen, y cuál es su rapidez en ese tiempo? (*c*) ¿En qué dirección se está moviendo la partícula cuando su velocidad sea 2.00? (*d*) ¿Dónde cruza la partícula a la línea a 45° que bisecta al cuadrante?

**87.** Las coordenadas de un objeto que viaja uniformemente en un círculo de radio $R$ están dadas por $x = R \cos \omega t$ y $y = R \operatorname{sen} \omega t$, donde $\omega$ es una constante y el ángulo $\omega t$ está en radianes. Escriba un programa para la computadora o diseñe una hoja de cálculo para la velocidad promedio en el intervalo de tiempo desde $t_0$ hasta $t_0 + \Delta t$. Tome $R = 1.5$ m y $\omega = 5.0$ rad/s y calcule $\bar{v}_x = [x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)]/\Delta t$ y $\bar{v}_y = [y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)]/\Delta t$. Disponga el programa para que fácilmente vuelva a correrse con valores de $t_0$ y de $\Delta t$ diferentes. La pérdida de significación se reduce si todas las variables son de precisión doble.

(*a*) Tome $t_0 = 1$ s. Calcule $x$, $y$, $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$, y $x\bar{v}_x + y\bar{v}_y$. La última cantidad es el producto escalar de los vectores de posición y de la velocidad promedio. Es cero si son perpendiculares entre sí. Repita ahora los cálculos con $\Delta t = 0.1$, 0.01, 0.001, y 0.0001 s. Nótese que las componentes de $\bar{\mathbf{v}}$ tienden a los valores de límite, las componentes de la velocidad instantánea $\mathbf{v}$, y que $\bar{\mathbf{v}}$ se va volviendo más cercanamente perpendicular al vector de posición (esto es, más cercanamente tangente al círculo). Como puede ser demostrado por diferenciación directa, las componentes de $\mathbf{v}$ están dadas por $v_x = -\omega R \operatorname{sen} \omega t$ y $v_y = \omega R \cos \omega t$. Calcule estas expresiones para ver con qué precisión estimó a $\mathbf{v}$. (*b*) Revise ahora el programa para que calcule las componentes de la aceleración promedio: $\bar{a}_x = [v_x(t_0 + \Delta t) - v_x(t_0)]/\Delta t$ y $\bar{a}_y = [v_y(t_0 + \Delta t) - v_y(t_0)]/\Delta t$. Use $v_x(t) = -\omega R \operatorname{sen} \omega t$ y $v_y(t) = \omega R \cos \omega t$. Calcule también $x\bar{a}_y + y\bar{a}_x$. Ésta es la magnitud del producto vectorial de los vectores de posición y de la aceleración promedio. Es cero si son paralelos. Lleve a cabo el cálculo para $t_0 = 1$ s y $\Delta t = 1$, 0.1, 0.01, 0.001, y 0.0001 s. Nótese que $\mathbf{a}$ tiende a un valor límite, la aceleración instantánea $\mathbf{a}$, y que se vuelve más cercanamente paralela al vector de posición. Las componentes de $\mathbf{a}$ están dadas por $a_x = -\omega^2 R \cos \omega t$ y $a_y = -\omega^2 R \operatorname{sen} \omega t$. Calcule estas expresiones y compare los resultados con las estimaciones generadas por su programa. Verifique también que los resultados generados por su programa predigan que $a = v^2/R$ para la magnitud de la aceleración.

# CAPÍTULO 5

# FUERZA Y LAS LEYES DE NEWTON

*En los capítulos 2 y 4 hemos estudiado el movimiento de una partícula. No nos preguntábamos entonces qué es lo que "causaba" el movimiento; simplemente lo describíamos en función de los vectores* **r**, **v**, *y* **a**. *En este capítulo y en el próximo, discutiremos las* causas *del movimiento, un campo de estudio llamado* dinámica.

*El enfoque de la* dinámica *tal y como nosotros la consideramos en este capítulo y en el próximo, recibe el nombre de* mecánica clásica, *fue desarrollada y éxitosamente probada en los siglos XVII y XVIII. En nuestro siglo, nuevas teorías (la relatividad especial y general, y la mecánica cuántica) han descubierto ciertas áreas alejadas de nuestras experiencias ordinarias en que la mecánica clásica no consigue dar predicciones que estén de acuerdo con el experimento, pero estas nuevas teorías reducen a la mecánica clásica a los límites de los objetos ordinarios.*

*Sin tener que recurrir a la relatividad especial o general o a la mecánica cuántica, podemos construir grandes rascacielos y estudiar las propiedades de los materiales de construcción; construir aeroplanos que puedan transportar a cientos de personas y volar alrededor del mundo; y enviar al espacio sondas en misiones complejas a los cometas, los planetas, y aún más allá. De todo esto trata la mecánica clásica.*

## 5-1 MECÁNICA CLÁSICA

Centraremos nuestra atención en el movimiento de un cuerpo en particular. Éste interactúa con los cuerpos que lo rodean (su *entorno*) de modo que su velocidad cambia: se produce una aceleración. La tabla 1 muestra algunos movimientos acelerados comunes y el entorno responsable, en su mayoría, de la aceleración. El problema central de la mecánica clásica es éste: (1) Se nos da un cuerpo cuyas características (masa, volumen, carga eléctrica, etc.) conocemos. (2) Situamos a este cuerpo, en una posición inicial conocida y con una velocidad inicial también conocida, en un entorno del cual tenemos una descripción completa. (3) Cuál es el movimiento siguiente que tendrá el cuerpo?

**TABLA 1** ALGUNOS MOVIMIENTOS ACELERADOS Y SUS CAUSAS

| *Objeto* | *Cambio en el movimiento* | *Causa principal (entorno)* |
|---|---|---|
| Manzana | Cae del árbol | Gravedad (Tierra) |
| Bola de billar | Rebota contra otra | Otra bola, la mesa, la gravedad (Tierra) |
| Esquiador | Se desliza cuesta abajo | La gravedad (Tierra), fricción (la nieve), resistencia del aire |
| Haz de electrones (aparato de TV) | Enfoque y deflexión | Campos electromagnéticos (imanes y diferencias de voltaje) |
| Cometa Halley | Viaje redondo a través del sistema solar | Gravedad (del Sol) |

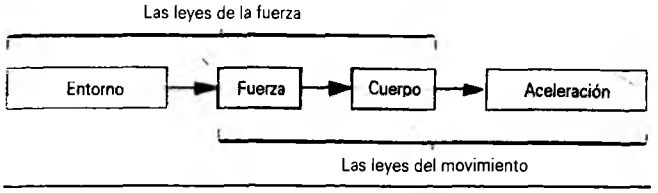



**Figura 1** Nuestro programa de mecánica. Las tres casillas de la izquierda sugieren que la fuerza es una interacción entre un cuerpo y su entorno. Las tres casillas de la derecha sugieren que una fuerza que actúe sobre un cuerpo lo acelerará.

En capítulos anteriores, hemos tratado a los objetos físicos como *partículas*, esto es, como cuerpos cuya estructura interna o sus movimientos internos pueden ser dejados de lado y cuyas partes se mueven todas exactamente de la misma manera. Al estudiar la interacción de un cuerpo y su entorno, por lo general debemos considerar objetos grandes cuyas diferentes partes puedan interactuar con el entorno en modos distintos. Por ejemplo, un trabajador empuja un cajón pesado sobre una superficie rugosa. El obrero empuja sobre uno de los lados verticales del cajón, en tanto que su base horizontal experimenta el efecto retardante de la fricción con el piso. La superficie frontal puede incluso experimentar la resistencia del aire.

Más adelante trataremos a fondo la mecánica de los cuerpos extensos. Por ahora continuaremos suponiendo que todas las partes del cuerpo se mueven de la misma manera, de modo que podamos tratar al cuerpo como una partícula. Con esta suposición, no importa en qué parte del cuerpo actúe el entorno; nuestra principal preocupación es el *efecto neto* del entorno.

Este problema de la mecánica clásica fue resuelto, al menos para una gran veriedad de entornos, por Isaac Newton (1642-1727) cuando promulgó sus leyes del movimiento y formuló su ley de la gravitación universal. El procedimiento para resolver este problema, en términos de nuestro actual marco de referencia de la mecánica clásica, es como sigue: (1) Introducimos el concepto de *fuerza* **F** (la cual consideraremos por ahora como un empujón o un jalón), y la definimos en función de la aceleración a que experimenta determinado cuerpo estándar. (2) Desarrollamos un procedimiento para asignar una *masa m* a un cuerpo de modo que podamos entender el hecho de que diferentes cuerpos experimentan diferentes aceleraciones en el mismo entorno. (3) Finalmente, tratamos de hallar maneras de calcular las fuerzas que actúan sobre los cuerpos a partir de las propiedades del cuerpo y de su entorno; esto es, buscamos las *leyes de la fuerza*. La fuerza, que es básicamente un medio de relacionar al entorno con el movimiento del cuerpo, aparece tanto en las leyes del movimiento (que nos dicen qué aceleración experimentará un cuerpo bajo la acción de una fuerza dada) y en las leyes de fuerza (que nos dicen cómo calcular la fuerza que actúa sobre un cuerpo dado en un entorno determinado). Las leyes del movimiento y las leyes de la fuerza, juntas, constituyen las leyes de la mecánica, como lo sugiere la figura 1.

Este programa de la mecánica no puede ser probado por partes. Debemos verlo como una unidad y juzgarlo como exitoso si podemos decir "sí" a estas dos preguntas: (1) ¿Las predicciones del programa concuerdan con el experimento? (2) ¿Tienen las leyes de la fuerza una forma sencilla? Será el broche de oro de la mecánica newtoniana el hecho de que podamos contestar afirmativamente a cada una de estas preguntas.

## 5-2 PRIMERA LEY DE NEWTON

Durante siglos el problema del movimiento y sus causas fue un tema central de la filosofía natural, un primer apelativo de lo que ahora llamamos física. Sin embargo, el progreso extraordinario se llevó a cabo en los tiempos de Galileo y de Newton. Isaac Newton, nacido en Inglaterra en el año de la muerte de Galileo, es el arquitecto principal de la mecánica clásica. Él logró cristalizar las ideas de Galileo y de otros que le precedieron. Sus tres leyes del movimiento fueron presentadas primero (en 1686) en su *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, obra que suele llamarse también *Principia*.

Antes de Galileo la mayoría de los filósofos pensaban que se necesitaba cierta influencia o "fuerza" para mantener a un cuerpo en movimiento. Ellos pensaban que un cuerpo estaba en su "estado natural" cuando estaba en reposo. Por ejemplo, creían que si un cuerpo se mueve en línea recta a velocidad constante tenía que haber algún agente externo que lo impulsara en forma continua; de lo contrario, de manera "natural" dejaría de moverse.

Si quisiéramos probar estas ideas de manera experimental, tendríamos que hallar primero una forma de liberar a un cuerpo de todas las influencias de su entorno o de todas las fuerzas. Esto es difícil de lograr, pero en ciertos casos podemos hacer que las fuerzas sean muy pequeñas. Si estudiamos el movimiento al hacer más y más pequeñas las fuerzas, tendremos alguna idea de cómo sería el movimiento si las fuerzas externas fuesen realmente cero.

Coloquemos a nuestro cuerpo de prueba, digamos un bloque, sobre un plano horizontal rígido. Si hacemos que el bloque se deslice a lo largo de este plano, notaremos que gradualmente irá más despacio hasta detenerse. De hecho, esta observación se usó para basar la idea de que el movimiento se detenía cuando la fuerza externa, en este caso la mano que inicialmente impulsó al bloque, se retiraba. Sin embargo, podemos argumentar, en contra de esta idea, como sigue. Repitamos nuestro experimento, usando ahora un bloque más liso y un plano más liso

también aplicando un lubricante. Observamos que la velocidad disminuye más lentamente que antes. Usemos bloques y superficies todavía más lisos y mejores lubricantes. Hallaremos que el bloque disminuye su velocidad en una cantidad más y más notable y viaja más lejos cada vez antes de llegar al reposo. Podríamos haber experimentado con una pista de aire, en la cual puedan flotar los objetos sobre una capa delgada de aire; tal dispositivo se acerca al límite de fricción nula, ya que con un ligero golpecito sobre uno de los deslizadores puede ponerlo en movimiento a lo largo de la pista a una velocidad baja y casi constante. Podemos ahora extrapolar y decir que, si pudiese ser eliminada toda fricción, el cuerpo continuaría indefinidamente en línea recta a velocidad constante. Se necesitaría una fuerza externa para poner al cuerpo en movimiento, pero *ninguna fuerza externa para mantener al cuerpo en movimiento a velocidad constante.*

Es difícil hallar una situación en la cual ninguna fuerza externa actúe sobre un cuerpo. La fuerza de la gravedad actuará sobre un objeto en o cerca de la Tierra, y fuerzas resistivas tales como la fricción o la resistencia del aire se oponen al movimiento en el suelo o en el aire. Afortunadamente, no necesitamos ir al vacío del espacio distante para estudiar el movimiento libre de una fuerza externa porque, al menos en lo que concierne al movimiento de traslación total de un cuerpo, *no hay distinción entre un cuerpo sobre el cual no actúe una fuerza externa y un cuerpo sobre el cual la suma o resultante de todas las fuerzas externas sea cero.* Usualmente nos referimos a la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo como la fuerza "neta". Por ejemplo, el empuje de nuestra mano sobre el bloque al deslizarse puede ejercer una fuerza que contrarreste a la fuerza de fricción que actúa sobre el bloque, y una fuerza hacia arriba del plano horizontal contrarrestaría a la fuerza de la gravedad. La fuerza neta sobre el bloque puede entonces ser cero, y el bloque puede moverse a velocidad constante.

Este principio fue adoptado por Newton como la primera de sus tres leyes del movimiento:

> *Considérese un cuerpo sobre el cual no actúe alguna fuerza neta. Si el cuerpo está en reposo, permanecerá en reposo. Si el cuerpo está moviéndose a velocidad constante, continuará haciéndolo así.*

La primera ley de Newton es un verdadero enunciado acerca de los marcos de referencia. En general, la aceleración de un cuerpo depende del marco de referencia con relación al cual se mide. Sin embargo, las leyes de la mecánica clásica son válidas solamente en un cierta serie de marcos de referencia, es decir, de aquellos para los cuales todos los observadores medirían *la misma* aceleración en un cuerpo en movimiento. La primera ley de Newton nos ayuda a identificar esta familia de marcos de referencia si la expresamos como sigue:

> *Si la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es cero, entonces es posible hallar un conjunto de marcos de referencia en los cuales ese cuerpo no tenga aceleración.*

La tendencia de un cuerpo a permanecer en reposo o en un movimiento lineal uniforme se llama *inercia*, y la primera ley de Newton suele llamarse también *la ley de la inercia*. Los marcos de referencia a los cuales se aplica se llaman *marcos inerciales*, como ya hemos visto en la sección 4-6. Como el lector recordará, los observadores en diferentes marcos de referencia inerciales (que se muevan a velocidad constante en relación uno con otro) miden todos el mismo valor de la aceleración. Entonces, no existe un marco único en el que la aceleración sea cero; existe un conjunto de marcos inerciales en los cuales la aceleración es cero.

Para probar si un marco de referencia en particular es un marco inercial, situamos un cuerpo de prueba en reposo dentro del marco y nos aseguramos de que no exista ninguna fuerza neta actuando sobre él. Si el cuerpo no permanece en reposo, el marco no es un marco inercial. Asimismo, podemos situar al cuerpo (de nuevo no sujeto a ninguna fuerza neta) en movimiento a velocidad constante; si su velocidad cambia, ya sea en magnitud o en dirección, el marco no es un marco inercial. Un marco en el que estas pruebas hayan pasado en todas sus partes es un marco inercial. Una vez que hayamos encontrado un marco inercial, es fácil encontrar muchos más, porque un marco de referencia que se mueva a velocidad constante en relación a un marco inercial es también un marco inercial.

En este libro casi siempre aplicamos las leyes de la mecánica clásica desde el punto de vista de un observador en un marco inercial. Ocasionalmente, estudiaremos problemas que incluyan a observadores en marcos de referencia no inerciales, tales como un automóvil en aceleración, un tiovivo que gira, o un satélite en órbita. Aun cuando la Tierra esté girando, en la mayoría de los casos prácticos puede considerarse que un marco de referencia unido a la Tierra es aproximadamente un marco de referencia inercial. En aplicaciones a gran escala, tales como el análisis de la trayectoria de los cohetes balísticos (misiles) o en el estudio de los vientos y de las corrientes oceánicas, es importante el carácter no inercial de la Tierra en rotación.

Nótese que no existe en la primera ley una distinción entre un cuerpo en reposo y uno que se mueva a velocidad constante. Ambos movimientos son "naturales" si la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo es cero. Esto resulta claro cuando un cuerpo en reposo situado en un marco inercial es visto desde un segundo marco inercial, esto es, cuando un marco se mueva a velocidad constante con respecto al primero. Un observador en el primer marco encuentra que el cuerpo está en reposo; un observador en el segundo marco encuentra que el mismo cuerpo se mueve a veloci-

dad constante. Ambos observadores encuentran que el cuerpo no tiene aceleración, esto es, no cambia su velocidad, y ambos pueden concluir de la primera ley que no actúa sobre el cuerpo una fuerza neta.

Si existe una interacción mutua neta entre el cuerpo y los objetos presentes en el entorno, el efecto puede ser un cambio en el estado "natural" del movimiento del cuerpo. Para investigar esto, debemos ahora examinar cuidadosamente el concepto de fuerza.

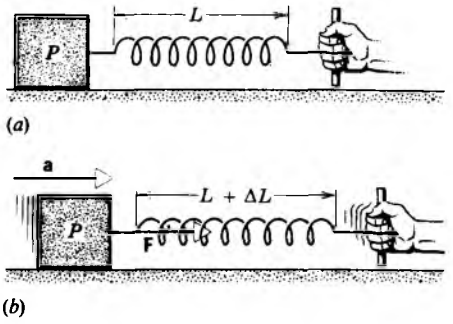



**Figura 2** (*a*) Una "partícula" *P* (el kilogramo estándar) en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. (*b*) El cuerpo es acelerado jalando el resorte hacia la derecha.

## 5-3 FUERZA

Desarrollaremos nuestro concepto de fuerza definiéndolo operacionalmente. En el lenguaje cotidiano, una fuerza es un empuje o un jalón. Para medir tales fuerzas en forma cuantitativa, las expresamos en términos de la aceleración que determinado cuerpo estándar experimenta en respuesta a esa fuerza.

Como cuerpo normal encontramos conveniente emplear (o mejor, ¡imaginar que lo empleamos!) el kilogramo estándar (véase la Fig. 5 del capítulo 1). A este cuerpo se le ha asignado, por definición, una masa $m_0$ de 1 kg exactamente. Más tarde describiremos cómo se asignan las masas a otros cuerpos.

Para tener un entorno que ejerza una fuerza, situamos al cuerpo estándar sobre una mesa horizontal que tenga una fricción despreciable y le unimos un resorte. Mantenemos el otro extremo del resorte en la mano, como en la figura 2*a*. Ahora jalamos del resorte horizontalmente hacia la derecha de modo que, por ensayo y error, podamos dar al cuerpo estándar una aceleración constante medida de 1 m/s$^2$ exactamente. Entonces afirmamos, a modo de definición, que el resorte (que es el cuerpo significativo dentro del entorno) está ejerciendo sobre el kilogramo estándar una fuerza constante cuya magnitud llamaremos "1 newton" (abreviado, 1 N). Observamos que, al impartir esta fuerza, el resorte se estira una cantidad $\Delta L$ sobre su longitud $L$ normal no extendido, como muestra la figura 2*b*.

Podemos repetir el experimento, ya sea estirando más el resorte o usando un resorte más rígido, de modo que midamos una aceleración de 2 m/s$^2$ en el cuerpo estándar. Declaramos ahora que el resorte está ejerciendo una fuerza de 2 N sobre el cuerpo estándar. En general, si observamos que este cuerpo estándar en particular tiene una aceleración $a$ en un entorno determinado, podemos entonces decir que el entorno está ejerciendo una fuerza $F$ sobre el cuerpo estándar de 1 kg, donde $F$ (en newton) es numéricamente igual a $a$ (en m/s$^2$).

Veamos ahora si la fuerza, tal como la hemos definido, es una cantidad *vectorial*. En la figura 2*b* asignamos una magnitud a la fuerza $F$, y es fácil asignarle también una dirección, esto es, la dirección de la aceleración que la fuerza produce. Sin embargo, ser un vector no es suficiente para que una cantidad tenga magnitud y dirección; debe también obedecer las leyes de la suma de vectores descritas en el capítulo 3. Si las fuerzas, tal como las definimos, obedecen realmente a estas leyes, es algo que sólo podemos aprender mediante la experimentación.

Ejerzamos una fuerza de 4 N a lo largo del eje $x$ y una fuerza de 3 N a lo largo del eje $y$. Apliquemos estas fuerzas primero por separado y luego simultáneamente al cuerpo estándar situado, como antes, sobre una superficie horizontal carente de fricción. ¿Cuál será la aceleración del cuerpo estándar? Hallaremos por experimentación que la fuerza de 4 N en la dirección $x$ produjo una aceleración de 4 m/s$^2$ en la dirección $x$, y que la fuerza de 3 N en la dirección $y$ produjo una aceleración de 3 m/s$^2$ en la dirección $y$ (Fig. 3*a*). Cuando las fuerzas se aplican simultáneamente, como se muestra en la figura 3*b*, hallamos que la aceleración es de 5 m/s$^2$ dirigida a lo largo de una línea que forma un ángulo de 37° con el eje $x$. Ésta es la misma aceleración que sería producida si el cuerpo estándar estuviera experimentando una fuerza de 5 N en esa dirección. Este mismo resultado puede ser obtenido si primero sumamos vectorialmente las fuerzas de 4 N y de 3 N (Fig. 3*c*) a una resultante de 5 N dirigida a 37° del eje $x$, y luego aplicamos esa simple fuerza neta de 5 N al cuerpo. Los experimentos de esta clase demuestran sin lugar a dudas que las fuerzas son vectores: tienen magnitud y dirección, y *se suman* de acuerdo con la ley de la suma de vectores.

Obsérvese que disponemos de dos métodos de análisis, los cuales producirían resultados idénticos: (1) Hallar la aceleración producida por cada fuerza separada, y sumar vectorialmente las aceleraciones resultantes. (2) Sumar las fuerzas vectorialmente a una sola resultante, y luego hallar la aceleración cuando esa sola fuerza neta se ejerce en el cuerpo.

## 5-4 MASA

En la sección 5-3 consideramos solamente las aceleraciones dadas a un cuerpo en particular, el kilogramo estándar.

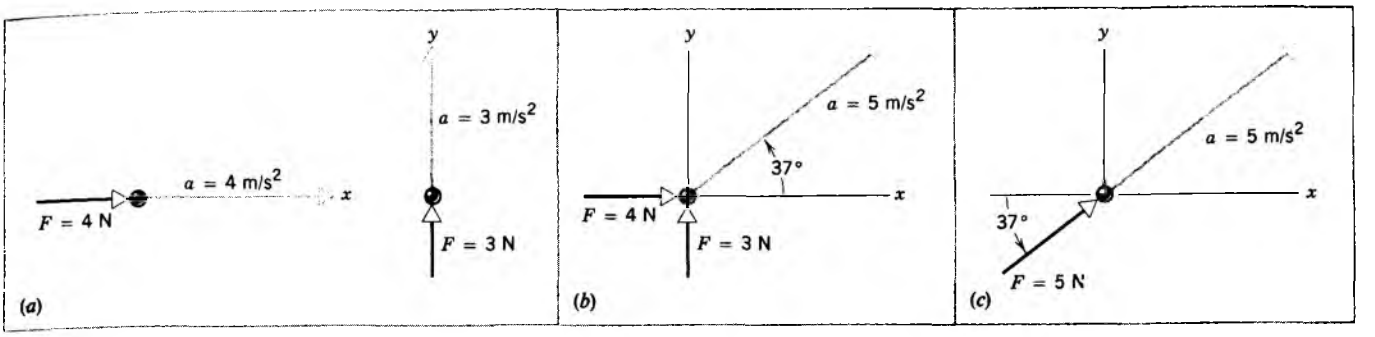



**Figura 3** (*a*) Una fuerza de 4 N en dirección $x$ produce una aceleración de 4 m/s² en dirección $x$, y una fuerza de 3 N en dirección $y$ produce una aceleración de 3 m/s² en dirección $y$. (*b*) Cuando las fuerzas se aplican simultáneamente, la aceleración resultante es de 5 m/s² en la dirección mostrada. (*c*) La misma aceleración puede ser producida por una sola fuerza de 5 N en la dirección mostrada.

Nos fue posible por tanto definir a las fuerzas cuantitativamente. ¿Qué efecto causarían esas fuerzas sobre otros cuerpos? Ya que nuestro cuerpo estándar fue escogido arbitrariamente en el primer lugar, sabemos que para cualquier cuerpo dado la aceleración será directamente proporcional a la fuerza aplicada. La pregunta significativa resultante es, entonces: ¿Qué efecto tendría *la misma fuerza* sobre *cuerpos diferentes*?

La experiencia cotidiana nos da una respuesta cualitativa. La misma fuerza producirá aceleraciones diferentes sobre cuerpos diferentes. Una bola de béisbol será acelerada más por una fuerza dada de lo que lo sería un automóvil. Con objeto de obtener una respuesta cuantitativa a esta pregunta, necesitamos un método para medir la masa, *la propiedad de un cuerpo que determina su resistencia a un cambio en su movimiento.*

Unamos un resorte a nuestro cuerpo estándar (el kilogramo estándar, al cual asignamos arbitrariamente una masa de $m_0 = 1$ kg, exactamente) y démosle una aceleración $a_0$ de, digamos, 2.00 m/s² usando el método de la figura 2*b*. Midamos cuidadosamente la extensión $\Delta L$ del resorte asociada a la fuerza que el resorte está ejerciendo sobre el bloque.

Unamos ahora dos cuerpos estándar idénticos al resorte y apliquemos la misma fuerza que antes (esto es, jalemos de los dos cuerpos hasta que el resorte se estire la misma cantidad $\Delta L$). Medimos la aceleración de los dos cuerpos, y obtenemos el valor de 1.00 m/s². Si usáramos tres cuerpos estándar idénticos y aplicásemos la misma fuerza, obtendríamos una aceleración de 0.667 m/s².

A partir de estas observaciones parece que, para una fuerza dada, cuanto más grande sea la masa menor será la aceleración. Más precisamente, concluimos de tales experimentos que *la aceleración producida por una fuerza dada es inversamente proporcional a la masa que es acelerada.* Otra manera de decir esto sería: *la masa de un cuerpo es inversamente proporcional a la aceleración que recibe por la aplicación de una fuerza dada.* La masa de un cuerpo puede entonces considerarse como *una medida cuantitativa de la resistencia de un cuerpo a la aceleración producida por una fuerza dada.*

Esta observación nos da una manera directa de comparar las masas de cuerpos diferentes: simplemente comparamos las aceleraciones medidas por la aplicación de una fuerza determinada a cada cuerpo. La razón de las masas de los dos cuerpos es entonces la misma que la razón *inversa* de las aceleraciones dadas a estos cuerpos por esa fuerza, o sea

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1} \quad \text{(actuando la misma fuerza } F\text{)}.$$

Aquí estamos comparando la aceleración $a_1$ del cuerpo de masa desconocida $m_1$ con la aceleración $a_0$ impartida al cuerpo estándar de masa $m_0$.

Por ejemplo, supongamos como antes que usamos una fuerza que produzca una aceleración de 2.00 m/s² sobre el cuerpo estándar. Aplicamos la misma fuerza (estirando el resorte en la misma cantidad $\Delta L$) a un cuerpo de masa desconocida $m_1$, y medimos una aceleración $a_1$ de, digamos, 0.50 m/s². Podemos entonces resolver para la masa desconocida, lo cual nos da

$$m_1 = m_0\left(\frac{a_0}{a_1}\right) = (1.00 \text{ kg})\left(\frac{2.00 \text{ m/s}^2}{0.50 \text{ m/s}^2}\right) = 4.00 \text{ kg}.$$

El segundo cuerpo, que tiene solamente un cuarto de la aceleración del primer cuerpo cuando actúa sobre él la misma fuerza, tiene cuatro veces la masa del primer cuerpo. Esto ilustra la relación inversa entre masa y aceleración para una fuerza dada.

Repitamos ahora el experimento anterior sobre los mismos dos cuerpos usando una fuerza común $F'$ diferente a la usada anteriormente. Esta fuerza dará al cuerpo estándar una aceleración de $a_0'$ y al cuerpo desconocido una aceleración de $a_1'$. De nuestra medición hallaríamos que la

razón de las aceleraciones, $a_0'/a_1'$, es la misma que en el experimento previo, es decir,

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_0'}{a_1'}.$$

Por ejemplo, apliquemos una fuerza más grande de modo que la extensión del resorte sea de $1.5\Delta L$. Hallaríamos entonces que la masa estándar $m_0$ se acelera a razón de 3.00 m/s² y que la masa desconocida $m_1$ se acelera a razón de 0.75 m/s². Deduciríamos que la masa desconocida es

$$m_1 = m_0\left(\frac{a_0'}{a_1'}\right) = (1.00\text{ kg})\left(\frac{3.00\text{ m/s}^2}{0.75\text{ m/s}^2}\right) = 4.00\text{ kg}.$$

Obtenemos el mismo valor para la masa desconocida $m_1$, no importa cuál sea el valor de la fuerza común. La razón de las masas $m_1/m_0$ es independiente de la fuerza común empleada; la masa es una propiedad fundamental del objeto, sin relación alguna con el valor de la fuerza usada para comparar a la masa desconocida con la masa estándar. En efecto, este procedimiento nos permite medir la masa por comparación con el kilogramo estándar.

Podemos extender este procedimiento a una comparación directa de las masas de dos cuerpos cualesquiera. Por ejemplo, usemos primero nuestro procedimiento previo para comparar a un segundo cuerpo arbitrario con el cuerpo estándar, y determinemos entonces su masa, digamos $m_2$. Podemos ahora comparar a los dos cuerpos arbitrarios, $m_2$ y $m_1$, directamente, y obtener las aceleraciones $a_2''$ y $a_1''$ cuando es aplicada la misma fuerza $F''$. La razón de las masas, definida como es usual por

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1''}{a_2''} \quad \text{(actuando la misma fuerza)},$$

resulta tener el mismo valor que el que obtuvimos usando las masas $m_2$ y $m_1$ determinadas previamente por comparación directa con el estándar.

Podemos demostrar, en otro experimento más de este tipo, que si los objetos de masa $m_1$ y $m_2$ se unen entre sí, se comportan mecánicamente como un solo objeto de masa $(m_1 + m_2)$. En otras palabras, *las masas se suman como (y son) cantidades escalares.*

Un ejemplo práctico del uso de esta técnica (asignar masas por comparación de las aceleraciones relativas producidas por una fuerza dada) consiste en la medición precisa de las masas de los átomos. La fuerza en este caso es una fuerza magnética de desviación y la aceleración es centrípeta, pero el principio es exactamente el mismo. Para una fuerza magnética común que actúe sobre dos átomos, la razón de sus masas es igual a la razón inversa de sus aceleraciones. La medición de la desviación, como en el espectrómetro de masas mostrado en la figura 6 del capítulo 1, nos permite la medición precisa de las razones de masa, y la definición de $^{12}C$ como el estándar permite entonces la obtención de valores precisos de las masas, tales como los mostrados en la tabla 6 del capítulo 1.

## 5-5 SEGUNDA LEY DE NEWTON

Podemos ahora resumir todos los experimentos y definiciones descritos anteriormente en una ecuación, la ecuación fundamental de la mecánica clásica,

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \qquad (1)$$

En esta ecuación $\Sigma\,\mathbf{F}$ es la *suma* (vectorial) *de todas* las fuerzas *que actúan sobre* el cuerpo, $m$ es la masa del cuerpo, y $\mathbf{a}$ es su aceleración (vectorial). Usualmente nos referiremos a $\Sigma\,\mathbf{F}$ como la fuerza *resultante*, o fuerza *neta*.

La ecuación (1) es un enunciado de la segunda ley de Newton. Si la escribimos en la forma $\mathbf{a} = (\Sigma\,\mathbf{F})/m$, podremos ver fácilmente que la aceleración del cuerpo es, en magnitud, directamente proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre él en dirección paralela a esta fuerza. Vemos también que la aceleración, para una fuerza dada, es inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

Obsérvese que la primera ley del movimiento parece estar contenida en la segunda ley como un caso especial, ya que si $\Sigma\,\mathbf{F} = 0$, entonces $\mathbf{a} = 0$. En otras palabras, si la fuerza resultante sobre un cuerpo es cero, la aceleración del cuerpo es cero y el cuerpo se mueve a velocidad constante, como nos dice la primera ley. Sin embargo, la primera ley tiene un papel independiente e importante para definir marcos de referencia inerciales. Sin esa definición, no nos sería posible elegir los marcos de referencia a los cuales aplicar la segunda ley. Por lo tanto, necesitamos *ambas leyes* para un sistema de mecánica completo.

La ecuación (1) es una ecuación vectorial. Como en el caso de todas las ecuaciones vectoriales, podemos escribir esta simple ecuación vectorial como tres ecuaciones escalares,

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y, \quad \text{y} \quad \sum F_z = ma_z, \quad (2)$$

que relacionan a las componentes $x$, $y$, y $z$ de la fuerza resultante ( $\Sigma\,F_x$, $\Sigma\,F_y$, y $\Sigma\,F_z$) con las componentes $x$, $y$, y $z$ de la aceleración ($a_x$, $a_y$, y $a_z$) para la masa $m$. Debería recalcarse que $\Sigma\,F_x$ es la suma *algebraica* de las componentes $x$ de *todas* las fuerzas, $\Sigma\,F_y$ es la suma *algebraica* de las componentes $y$ de *todas* las fuerzas, y $\Sigma\,F_z$ es la suma *algebraica* de las componentes $z$ de *todas* las fuerzas que actúan sobre $m$. Al practicar la suma algebraica, deben tomarse en cuenta los signos de las componentes (esto es, las direcciones relativas de las fuerzas).

Al analizar situaciones que empleen la segunda ley de Newton, es de ayuda trazar un diagrama que muestre al cuerpo en cuestión como una partícula y que muestre igualmente a todas las fuerzas como vectores que actúan sobre la partícula. A un diagrama así se le llama *diagrama del cuerpo libre* y constituye un primer paso esencial tanto

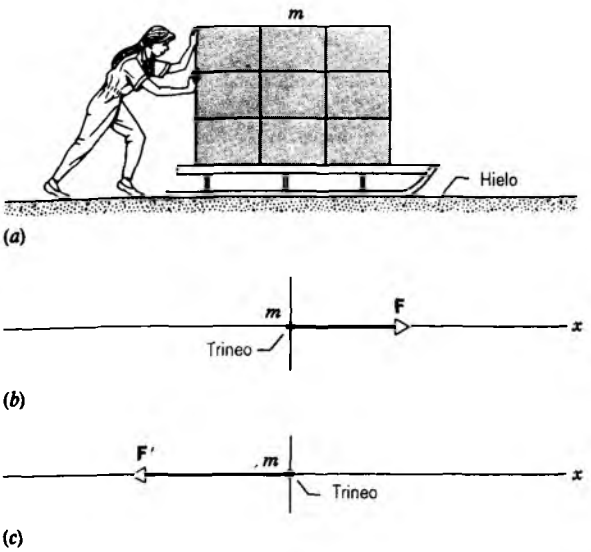



**Figura 4** Problemas muestra 1 y 2. (*a*) Una estudiante empuja un trineo cargado sobre una superficie sin fricción. (*b*) Un diagrama del cuerpo libre, que muestra al trineo como una "partícula" y a la fuerza que actúa sobre él. (*c*) Un segundo diagrama del cuerpo libre, que muestra a la fuerza que actúa cuando la estudiante empuja en dirección opuesta.

en el análisis de un problema como en la visualización de la situación física.

**Problema muestra 1** Una estudiante empuja un trineo cargado cuya masa $m$ es de 240 kg a través de una distancia $d$ de 2.3 m sobre la superficie sin fricción de un lago helado. Ella ejerce una fuerza horizontal constante $F$ de 130 N (= 29 lb) cuando lo hace; véase la figura 4*a*. Si el trineo parte del reposo, ¿cuál es su velocidad final?

**Solución** Como lo muestra la figura 4*b*, trazamos un eje horizontal $x$, hacemos que la dirección creciente de $x$ sea hacia la derecha, y tratamos al trineo como una partícula. La figura 4*b* es un diagrama *parcial* del cuerpo libre. Al trazar diagramas del cuerpo libre, siempre es importante incluir a *todas* las fuerzas que actúan sobre la partícula, pero aquí hemos omitido a dos fuerzas verticales que veremos más adelante en este capítulo y que no afectan a nuestra solución. Supongamos que la fuerza $F$ ejercida por la estudiante es la única fuerza horizontal que actúa sobre el trineo. Podemos entonces hallar la aceleración del trineo por la segunda ley de Newton, es decir,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{130 \text{ N}}{240 \text{ kg}} = 0.54 \text{ m/s}^2.$$

A causa de que la aceleración es constante, podemos usar la ecuación 20 del capítulo 2 [$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$] para hallar la velocidad final. Poniendo $v_0 = 0$ y $x - x_0 = d$ y resolviendo para $v$, obtenemos

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{(2)(0.54 \text{ m/s}^2)(2.3 \text{ m})} = 1.6 \text{ m/s}.$$

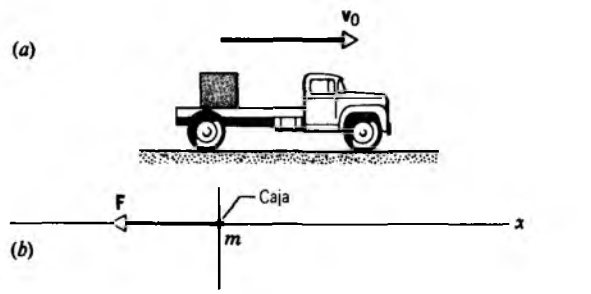



**Figura 5** Problema muestra 3. (*a*) Una caja sobre un camión que está reduciendo su marcha. (*b*) El diagrama del cuerpo libre de la caja.

La fuerza, la aceleración, el desplazamiento, y la velocidad final del trineo son todas positivas, lo que significa que apuntan hacia la derecha en la figura 4*b*.

Obsérvese que para continuar aplicando la fuerza constante, la estudiante tendría que correr más y más aprisa para mantenerse a la par con el trineo que acelera. Eventualmente, la velocidad del trineo superaría a la velocidad más alta a la cual puede correr la estudiante, por lo que la estudiante ya no podría aplicar una fuerza al trineo por más tiempo. El trineo continuaría (en ausencia de la fricción) deslizándose a una velocidad constante.

**Problema muestra 2** La estudiante del problema muestra 1 quiere invertir la dirección de la velocidad del trineo en 4.5 s. ¿Con qué fuerza constante deberá empujar al trineo para conseguirlo?

**Solución** Hallemos la aceleración (constante) usando la ecuación 15 del capítulo 2 ($v = v_0 + at$). Resolviendo para $a$ tenemos que

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(-1.6 \text{ m/s}) - (1.6 \text{ m/s})}{4.5 \text{ s}} = -0.71 \text{ m/s}^2.$$

Esta magnitud es más grande que la aceleración del problema muestra 1 (0.54 m/s$^2$) lo que nos lleva a concluir que la estudiante tendrá que empujar más fuerte esta vez. Hallamos esta fuerza $F'$ (constante) según

$$F' = ma = (240 \text{ kg})(-0.71 \text{ m/s}^2)$$
$$= -170 \text{ N} (= -38 \text{ lb}).$$

El signo negativo demuestra que la estudiante está empujando al trineo en dirección de $x$ decreciente, es decir, hacia la izquierda como lo muestra el diagrama del cuerpo libre de la figura 4*c*.

**Problema muestra 3** Una caja cuya masa $m$ es de 360 kg reposa sobre la plataforma de un camión que se mueve a una velocidad $v_0$ de 120 km/h, como en la figura 5*a*. El conductor acciona los frenos y reduce la velocidad $v$ a 62 km/h en 17 s. ¿Qué fuerza (supuesta como constante) actúa sobre la caja durante este tiempo? Suponga que la caja no se desliza en la plataforma del camión.

**Solución** Primero hallamos la aceleración (constante) de la caja. Resolviendo la ecuación 15 del capítulo 2 ($v = v_0 + at$) para $a$ nos da

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(62 \text{ km/h}) - (120 \text{ km/h})}{17 \text{ s}}$$
$$= \left(-3.41 \frac{\text{km}}{\text{h} \cdot \text{s}}\right)\left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right)\left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right) = -0.95 \text{ m/s}^2.$$

Ya que hemos tomado la derecha como el sentido positivo de la dirección horizontal, el vector aceleración debe apuntar hacia la izquierda.

La fuerza sobre la caja responde a la segunda ley de Newton:

$$F = ma$$
$$= (360 \text{ kg})(-0.95 \text{ m/s}^2) = -340 \text{ N}.$$

Esta fuerza actúa en la misma dirección de la aceleración, es decir, hacia la izquierda en la figura 5*b*. La fuerza debe ejercerla un agente externo, como son las fajas u otros medios mecánicos usados para sujetarla a la plataforma del camión. Si la caja no se sujeta, entonces la fricción entre la caja y la plataforma del camión debe proporcionar la fuerza necesaria. Si no existe la suficiente fricción como para proveer una fuerza de 340 N, la caja se deslizará sobre la plataforma porque, como lo puede medir un observador parado en el suelo, la caja desacelerará con más lentitud que el camión.

## 5-6 TERCERA LEY DE NEWTON

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo resultan de otros cuerpos que conforman su entorno. Si examinamos a las fuerzas que actúan sobre un segundo cuerpo, uno anteriormente considerado como parte del entorno, entonces el primer cuerpo es parte del entorno del segundo cuerpo y es, en parte, responsable de las fuerzas que actúan sobre el segundo cuerpo. Toda fuerza es por lo tanto parte de la interacción mutua entre *dos* cuerpos. Hallamos experimentalmente que cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre un segundo cuerpo, el segundo cuerpo siempre ejerce una fuerza sobre el primero. Más aún, hallamos que estas fuerzas son *siempre* iguales en magnitud pero opuestas en dirección. Una fuerza aislada es por lo tanto, algo imposible.

Supongamos que esto no fuera así. Consideremos a dos cuerpos aislados *A* y *B*, y supongamos que el cuerpo *A* ejerce una fuerza sobre el cuerpo *B*, mientras que ninguna fuerza se ejerce por *B* sobre *A*. La fuerza total sobre la combinación *A* + *B* no es cero, y la masa combinada debe acelerarse. Si una situación tal pudiera ocurrir, entonces tendríamos una fuente de energía sin límite que podría impulsar a *A* + *B* a través del espacio sin costo: los veleros podrían ser impulsados por pasajeros que soplaran sobre las velas, y los vehículos espaciales podrían ser acelerados por los astronautas que empujarían las paredes. La imposibilidad de estas acciones es una consecuencia de la tercera ley de Newton.

Arbitrariamente, llamamos a una de las fuerzas de la interacción mutua entre dos cuerpos la fuerza de "acción", y a la otra la denominamos fuerza de "reacción". La tercera ley de Newton puede entonces ser establecida en la forma tradicional:

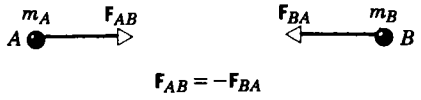



**Figura 6** Tercera ley de Newton. El cuerpo *A* ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{BA}$ sobre el cuerpo *B*. El cuerpo *B* debe entonces ejercer una fuerza $\mathbf{F}_{AB}$ sobre el cuerpo *A*, y $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$.

*A cada acción corresponde una reacción igual y opuesta.*

Una versión más moderna de la tercera ley pertenece a la fuerza mutua ejercida por dos cuerpos uno sobre el otro:

*Cuando dos cuerpos ejercen fuerzas mutuas entre sí, las dos fuerzas son siempre de igual magnitud y de dirección opuesta.*

Formalmente (véase la Fig. 6) hagamos que el cuerpo *A* ejerza una fuerza $\mathbf{F}_{BA}$ sobre el cuerpo *B*; el experimento demuestra entonces que el cuerpo *B* ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{AB}$ sobre el cuerpo *A*. (Nótese el orden de los subíndices; la fuerza se ejerce *sobre* el cuerpo representado por el primer subíndice *por* el cuerpo representado por el segundo.) En términos de una ecuación vectorial,

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}. \tag{3}$$

Es importante recordar que las fuerzas de acción y reacción siempre actúan sobre cuerpos *diferentes*, como nos lo indican los primeros subíndices diferentes. Si actuaran sobre el mismo cuerpo, no existiría fuerza neta sobre ese cuerpo ni movimiento acelerado.

Cuando un bate de béisbol golpea a la pelota, el bate ejerce una fuerza sobre la pelota (la acción), y la pelota ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el bate. Cuando un jugador de fútbol soccer patea la pelota, el pie ejerce una fuerza sobre la pelota (la acción), y la pelota ejerce una fuerza de reacción opuesta en el pie. Si usted trata de empujar un automóvil parado, podrá comprobar que éste ejerce presión hacia usted. En cada caso las fuerzas de acción y de reacción actúan sobre diferentes cuerpos. Si nuestro propósito consistiera en el estudio de la dinámica de un cuerpo, como la pelota de béibol, por ejemplo, consideraríamos únicamente una fuerza del par acción-reacción; en cuanto a la otra, es percibida por un cuerpo diferente y sólo se consideraría si estuviéramos estudiando la dinámica de ese cuerpo.

Los siguientes ejemplos ilustran aplicaciones de la tercera ley.

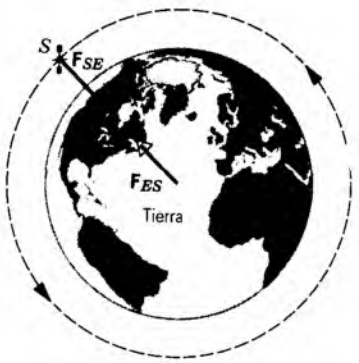



**Figura 7** Un satélite en órbita alrededor de la Tierra. Las fuerzas mostradas son el par acción-reacción. Nótese que actúan sobre cuerpos diferentes.

**1.** *Un satélite en órbita.* La figura 7 ilustra la órbita de un satélite alrededor de la Tierra. La única fuerza que actúa sobre él es $\mathbf{F}_{SE}$, la fuerza ejercida *sobre* el satélite por la atracción gravitatoria de la Tierra. ¿Dónde está la fuerza de reacción correspondiente? Es $\mathbf{F}_{ES}$, la fuerza que actúa sobre la Tierra debida a la atracción gravitatoria del satélite.

Podría pensarse que el pequeño satélite no ejerce mucha atracción gravitatoria sobre la Tierra pero sí lo hace, exactamente como lo enuncia la tercera ley de Newton. Esto es, al considerar solamente las magnitudes, $F_{ES} = F_{SE}$. (Recuérdese que la magnitud de cualquier cantidad vectorial es siempre positiva.) La fuerza $\mathbf{F}_{ES}$ hace que la Tierra se acelere, pero, a causa de la gran masa de la Tierra, su aceleración es tan pequeña que no puede ser detectada fácilmente.

**2.** *Un libro puesto sobre una mesa.* La figura 8*a* muestra un libro puesto sobre una mesa. La Tierra tira del libro hacia abajo con una fuerza $\mathbf{F}_{BE}$. El libro no se acelera porque esta fuerza es cancelada por la fuerza de contacto $\mathbf{F}_{BT}$, igual y opuesta, que ejerce la mesa sobre el libro.

Aun cuando $\mathbf{F}_{BE}$ y $\mathbf{F}_{BT}$ son de igual magnitud y de dirección opuesta, *no* constituyen un par acción-reacción. ¿Por qué no? *Porque actúan sobre el mismo cuerpo: el libro.* Se anulan entre sí y, por lo tanto, afirman el hecho de que el libro no acelere.

Cada una de estas fuerzas debe entonces tener una fuerza de reacción correspondiente en algún lugar. ¿Dónde están? La reacción a $\mathbf{F}_{BE}$ es $\mathbf{F}_{EB}$, la fuerza (gravitatoria) con la que el libro atrae a la Tierra. Mostramos este par acción-reacción en la figura 8*b*.

La figura 8*c* muestra la fuerza de reacción a $\mathbf{F}_{BT}$. Es $\mathbf{F}_{BT}$, la fuerza de contacto sobre la mesa debida al libro. Los pares acción-reacción que actúan sobre el libro en este problema, y los cuerpos sobre los que actúan, son:

$$\text{primer par: } \mathbf{F}_{BE} = -\mathbf{F}_{EB} \text{ (libro y Tierra)}$$

y

$$\text{segundo par: } \mathbf{F}_{BT} = -\mathbf{F}_{TB} \text{ (libro y mesa).}$$

**3.** *Empujando una fila de cajas.* La figura 9 muestra a un obrero *W* empujando dos cajas, cada una de las cuales descansa sobre un carrito que puede rodar con fricción despreciable. El obrero ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{1W}$ sobre la caja 1, la cual a su vez empuja contra el obrero con una fuerza de reacción $\mathbf{F}_{W1}$. La caja 1 empuja sobre la caja 2 con una fuerza $\mathbf{F}_{21}$, y la caja 2 empuja contra la caja 1 con una fuerza $\mathbf{F}_{12}$. (Nótese que el obrero no ejerce fuerza sobre la caja 2 directamente.) Para moverse hacia adelante, el obrero debe empujar a su vez contra el suelo. El obrero ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{GW}$ sobre el suelo, y la fuerza de reacción del suelo sobre el obrero, $\mathbf{F}_{WG}$, empuja al obrero hacia adelante. La figura muestra tres pares de acción-reacción:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad \text{(caja 1 y caja 2),}$$

$$\mathbf{F}_{1W} = -\mathbf{F}_{W1} \quad \text{(obrero y caja 1),}$$

$$\mathbf{F}_{WG} = -\mathbf{F}_{GW} \quad \text{(obrero y suelo).}$$

La aceleración de la caja 2 se determina, de acuerdo con la segunda ley de Newton, por la fuerza neta aplicada a ella:

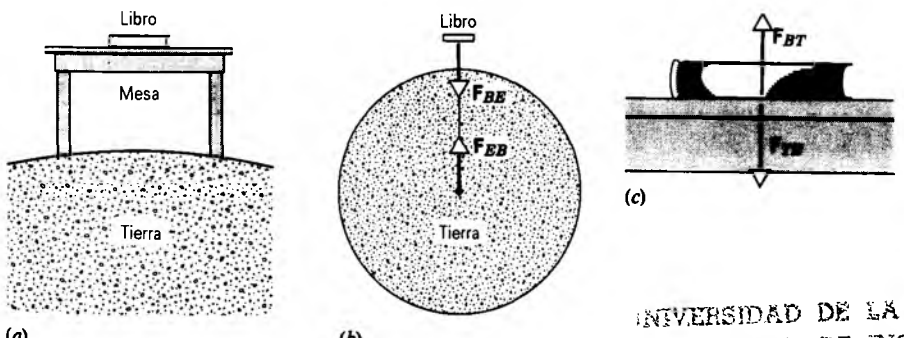



**Figura 8** (*a*) Un libro puesto sobre una mesa, la cual a su vez está sobre la Tierra. (*b*) El libro y la Tierra ejercen fuerzas gravitatorias entre sí, formando un par acción-reacción. (*c*) La mesa y el libro ejercen fuerzas de contacto de acción-reacción entre sí.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

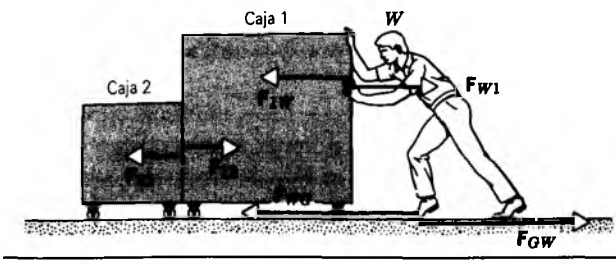



**Figura 9** Un obrero empuja una caja 1, la cual a su vez empuja a la caja 2. Las cajas están sobre ruedas que se mueven libremente, de modo que no existe fricción entre las cajas y el suelo.

$$F_{21} = m_2 a_2.$$

La fuerza neta sobre la caja 1 determina su aceleración,

$$F_{1W} - F_{12} = m_1 a_1,$$

donde hemos escrito la suma vectorial de las fuerzas como la diferencia de sus magnitudes, porque actúan sobre la caja 1 en direcciones opuestas. Si las dos cajas permanecen en contacto, sus aceleraciones deben ser iguales. Si $a$ representa la aceleración común y sumamos las ecuaciones, nos da

$$F_{1W} = (m_1 + m_2)a.$$

Si consideramos que las cajas 1 y 2 son un mismo objeto de masa $m_1 + m_2$ resultaría esta misma ecuación. La fuerza externa neta que actúa sobre el objeto combinado es $F_{1W}$. Las dos fuerzas de contacto que existen en la frontera entre las cajas 1 y 2 no aparecen en la ecuación que describe al objeto *combinado*. Como tampoco aparecen las fuerzas atómicas internas que unen al objeto; cada fuerza interna forma un par acción-reacción que actúa sobre partes separadas (átomos individuales, quizá) y tales pares suman cero al sumar entre sí las partes separadas que forman la combinación total.

Nótese que en este ejemplo el obrero es el agente activo responsable del movimiento, pero es la fuerza de reacción del suelo la que lo hace posible. Si no hubiese fricción entre los zapatos del obrero y el suelo, el obrero no podría mover el sistema hacia adelante.

4. *Un bloque colgado de un resorte.* La figura 10*a* nos muestra un bloque en reposo que cuelga de un resorte, estando su otro extremo fijo en el techo. Las fuerzas sobre el bloque, mostradas por separado en la figura 10*b*, son su peso **W** (que actúa hacia abajo) y la fuerza **F** ejercida por el resorte (que actúa hacia arriba). El bloque está en reposo bajo la influencia de estas fuerzas, pero las fuerzas *no* son un par acción-reacción, porque, de nuevo, actúan sobre el mismo cuerpo. La fuerza de reacción al peso **W** es la

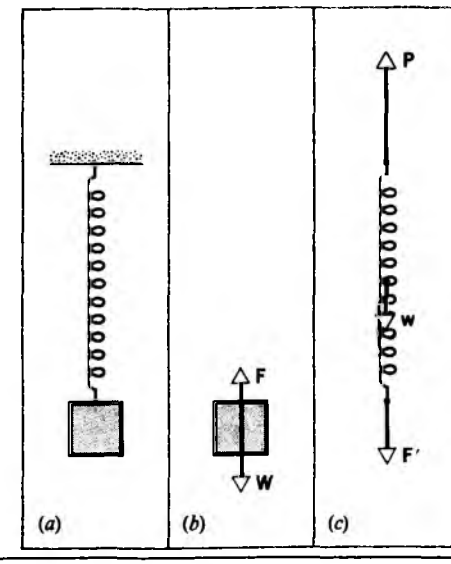



**Figura 10** (*a*) Un bloque en reposo colgado del techo por un resorte estirado. (*b*) Las fuerzas sobre el bloque. (c) Las fuerzas sobre el resorte.

fuerza gravitatoria que el bloque ejerce sobre la Tierra, fuerza que no se muestra.

La fuerza de reacción a **F** (la fuerza ejercida *sobre* el bloque *por* el resorte) *es la fuerza ejercida por* el bloque *sobre* el resorte. Para mostrar esta fuerza, ilustramos en la figura 10*c* las fuerzas que actúan sobre el resorte. Estas fuerzas incluyen la reacción a **F**, la cual mostramos como una fuerza **F'** (= -**F**) que actúa hacia abajo, el peso **w** del resorte (generalmente despreciable), y el jalón **P** hacia arriba del techo. Si el resorte está en reposo, la fuerza neta debe ser cero: **P** + **w** + **F'** = 0.

La fuerza de reacción a **P** actúa *sobre* el techo. Puesto que en este diagrama no estamos mostrando al techo como un cuerpo independiente, la reacción a **P** no aparece.

## 5-7 UNIDADES DE FUERZA

Como todas la ecuaciones, la segunda ley de Newton ($F = ma$) debe ser dimensionalmente consistente. En el lado derecho, las dimensiones son, recordando del capítulo 1 que [ ] denota *las dimensiones de*, $[m][a] = ML/T^2$, y por lo tanto éstas deben ser también las dimensiones de una fuerza:

$$[F] = ML/T^2.$$

No importa cuál sea el origen de la fuerza (gravitatoria, eléctrica, nuclear, o cualquiera otra) y no importa qué tan complicada sea la ecuación que describa a la fuerza, deben mantenerse para ella estas dimensiones.

En el sistema SI de unidades, la masa se mide en kg y la aceleración en $m/s^2$. Para impartir una aceleración de 1 $m/s^2$ a una masa de 1 kg se requiere una fuerza de 1 kg · $m/s^2$. A esta combinación de unidades, en cierta forma inconveniente, se le ha dado el nombre de newton (abreviado N):

$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2.$$

Si medimos la masa en kg y la aceleración en $m/s^2$, la segunda ley de Newton nos da la fuerza en N.

Existen otros dos sistemas de unidades de uso común, que son el sistema cegesimal cgs (centímetro-gramo-segundo) y el sistema inglés (o británico). En el sistema cgs, la masa se mide en gramos y la aceleración en $cm/s^2$. La unidad de fuerza en este sistema es la *dina* y equivale a g · $cm/s^2$. Puesto que 1 kg = $10^3$ g y 1 $m/s^2$ = 100 $cm/s^2$, se deduce que 1 N = $10^5$ dinas. Una dina es una unidad muy pequeña, aproximadamente igual al peso de un milímetro cúbico de agua. (Por el contrario, un newton es aproximadamente el peso de media taza de agua.)

En el sistema inglés, la fuerza se mide en libras y la aceleración en $pies/s^2$. En este sistema, la masa que es acelerada a razón de 1 $pie/s^2$ por una fuerza de 1 lb se llama *slug* (de la palabra *sluggish*, que significa lento o que no responde).

Ocasionalmente se encuentran otras variantes de estos sistemas básicos, pero estos tres son en mucho los más comunes. La tabla 2 resume estas unidades de fuerza comunes; en el apéndice G puede hallarse una lista más extensa.

**TABLA 2** UNIDADES DE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON

| *Sistema* | *Fuerza* | *Masa* | *Aceleración* |
|---|---|---|---|
| SI | newton (N) | kilogramo (kg) | $m/s^2$ |
| cgs | dina | gramo (g) | $cm/s^2$ |
| inglés | libra | slug | $pies/s^2$ |

## 5-8 PESO Y MASA

El *peso* de un cuerpo en la Tierra es la fuerza de gravedad ejercida sobre él por la Tierra. Como todas las fuerzas, el peso es una cantidad vectorial. La dirección de este vector es la dirección de la fuerza de la gravedad, esto es, hacia el centro de la Tierra. La magnitud del peso se expresa en unidades de fuerza, tales como libras, kilogramos o newtons.

Supongamos por el momento que la superficie de la Tierra proporciona un marco inercial de referencia suficientemente bueno. Soltemos a un cuerpo de masa $m$ cerca de la superficie de la Tierra y permitamos que caiga libremente bajo la influencia de la gravedad. Sólo una fuerza actuará sobre el cuerpo: su peso $W$. La aceleración del cuerpo es la aceleración de la caída libre, $g$. Aplicamos la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, a este cuerpo en caída libre sustituyendo a **W** por **F** y a **g** por **a**, lo cual nos da $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$. Tanto **W** como **g** son vectores dirigidos hacia el centro de la Tierra. Podemos entonces escribir que

$$W = mg, \qquad (4)$$

donde $W$ y $g$ son las magnitudes de los vectores de peso y de aceleración.

Por supuesto, no es necesario que un cuerpo esté cayendo para determinar su peso. Si un cuerpo está en reposo cerca de la superficie de la Tierra, entonces la segunda ley de Newton requiere que la fuerza neta sobre él sea cero. El peso $W = mg$ actúa sobre el cuerpo, y, por lo tanto, para que el cuerpo se mantenga en reposo debe de experimentar otra fuerza numéricamente igual a $mg$ pero que actúe en una dirección opuesta al peso. En la figura 10, el resorte suministra esta fuerza; la fuerza ejercida por el resorte sobre el cuerpo debe ser numéricamente igual a $mg$. En la figura 8, la mesa ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{BT}$ hacia arriba sobre el libro que lo mantenía en equilibrio; esta fuerza hacia arriba es de magnitud igual al peso $mg$.

Ya que **g** varía entre puntos distintos de la Tierra, **W**, que es el peso de un cuerpo de masa $m$, es diferente en localidades distintas. Así, el peso de un cuerpo de 1.00 kg de masa, en una localidad donde $g$ = 9.80 $m/s^2$, será 9.80 N; en una localidad donde $g$ = 9.78 $m/s^2$, el mismo cuerpo pesará 9.78 N. Si estos pesos fuesen determinados midiendo la cantidad de estiramiento necesaria en un resorte para equilibrarlos, la diferencia de peso del mismo cuerpo de 1 kg en dos localidades distintas se haría evidente en la distinta longitud de estiramiento del resorte de esas dos localidades. Por lo tanto, al contrario de la masa de un cuerpo, que es una propiedad *intrínseca* del cuerpo, el peso de un cuerpo depende de su ubicación en relación al centro de la Tierra. Como discutiremos en la sección siguiente, las básculas de resorte pueden marcar cantidades diferentes, pero las balanzas señalan lo mismo en diferentes localidades de la Tierra.

Ya que la Tierra está girando, su superficie no puede ser un marco inercial de referencia. Todos los marcos de referencia sobre la superficie de la Tierra son acelerados centrípetamente por la rotación. La aceleración en caída libre que medimos en este marco no inercial tiene por lo menos dos componentes: una que proviene de la atracción gravitatoria de la Tierra y otra de su rotación. El pequeño efecto de esta rotación consiste en el cambio de la aceleración en caída libre en un 0.3% aproximadamente con respecto a su valor en el ecuador, donde la aceleración centrípeta es la mayor, a su valor en los polos, donde la aceleración centrípeta se anula. Despreciamos esta pequeña contribución no inercial al peso por ahora, pero volve-

remos sobre ello en el capítulo 16. En la sección 6-8 se discuten otras contribuciones no inerciales a la fuerza sobre un cuerpo.

El peso de un cuerpo es cero en regiones del espacio donde los efectos de la gravitación son nulos, aunque las propiedades de un cuerpo que dependen de su masa, tales como su resistencia a ser acelerado, permanecen sin cambio con respecto a las mismas en la Tierra. En un vehículo espacial, libre de la influencia de la gravedad, levantar lentamente un bloque grande de plomo ($W = 0$) es un asunto sencillo, pero el astronauta sentiría una sensación de dolor en los dedos del pie si pateara el bloque ($m \neq 0$).

Requiere la misma fuerza acelerar un cuerpo en el espacio libre de gravedad que acelerarlo a lo largo de una superficie horizontal carente de fricción en la Tierra, ya que su masa es la misma en cada lugar. Pero se requiere una fuerza mayor para mantener a un cuerpo levantado contra la atracción de la Tierra en su superficie que la requerida en el espacio, porque su peso es distinto en cada lugar.

En localidades donde $g$ tenga un valor específico, la masa y el peso son proporcionales entre sí. A veces escribimos, por ejemplo, 1 kg "=" 2.2 lb, donde "=" significa que "es equivalente a". Ésta es una correspondencia numérica, no una ecuación real (¡porque las ecuaciones no puede igualar a cantidades con dimensiones diferentes!). Sería un poco como decir que 1 naranja "=" $x$ manzanas, donde $x$ pudiera tener un valor si estuviésemos discutiendo el costo y un valor muy diferente si estuviésemos discutiendo cuánto jugo producen.

La relación entre masa y peso es válida solamente para un valor específico de $g$, y, por lo tanto, debería de usarse con precaución. De otro modo, podríamos encontrarnos en una situación confusa o embarazosa. Por ejemplo, si usted algún día detuviera su nave espacial en un bien conocido restaurante de servicio rápido en la Luna y ordenara un hamburguesa de un cuarto de libra, le servirían un emparedado de casi 1 pie de diámetro. (La gravedad de la Luna es casi una sexta parte de la de la Tierra. En la Luna, 1 kg "=" 0.38 lb). Si usted coloca la misma orden sobre la superficie del Sol, su hamburguesa sería apenas de 1 pulgada de diámetro pero ¡muy cocida! (En el Sol, 1 Kg "=" 62 lb.) Obviamente, queremos ordenar nuestro alimento por cantidad de materia (masa), y no por peso. Una hamburguesa de 100 gramos (alrededor de $\frac{1}{4}$ de libra en la Tierra) debe tener el mismo tamaño en todos los lugares.

## Ingravidez

Las fotografías de astronautas en un vehículo espacial en órbita (como en la Fig. 11) los muestran flotando libremente en un estado usualmente llamado "ingravidez". Sin embargo, según nuestra definición de peso, no están del



**Figura 11** Los astronautas en el vehículo espacial están en un estado de caída libre, donde parecen flotar como si careciesen de peso.

todo carentes de peso; de hecho, su peso es sólo alrededor del 10% menos de lo que sería si estuviesen parados sobre la superficie de la Tierra. Esta reducción ocurre porque la gravedad de la Tierra se vuelve más débil con el aumento de altitud.

Se dice que los astronautas en órbita están en estado de "ingravidez" por dos razones: (1) Para un observador externo, los astronautas están en caída libre hacia el centro de la Tierra. Mantienen su altitud sólo porque su velocidad tangencial ha sido elegida de modo que la gravedad provea la aceleración centrípeta necesaria para un movimiento circular uniforme. (2) No existe un suelo en contacto con ellos y que los empuje hacia arriba.

Nuestra percepción psicológica del peso implica la fuerza con la que el piso nos empuja. Al flotar en el agua, nosotros percibimos menos nuestro propio peso (pero percibimos plenamente nuestra *masa*, por ejemplo, cuando tratamos de acelerarar nadando en el agua). Si estamos de pie en un ascensor mientras acelera, sentimos como si nuestro peso aumentara cuando el ascensor acelera hacia arriba y como si nuestro peso disminuyera cuando el ascensor acelera hacia abajo. Este efecto, que consideramos en el Problema muestra 7, es el resultado del aumento o disminución de la fuerza hacia arriba ejercida sobre nosotros por el suelo del ascensor.

La verdadera ingravidez sólo puede obtenerse en el espacio profundo, lejos de cualquier estrella o planeta, donde los astronautas flotarían libremente en una nave espacial a la deriva con los motores apagados. Si la nave estuviera girando sobre su eje, los astronautas que estuviesen parados perpendicularmente al eje de la superficie en rotación sentirían una "gravedad artificial", porque el piso estaría empujándolos para suministrar la fuerza centrípeta necesaria para que se muevan en un círculo. El empuje del suelo hacia arriba se percibe como el peso.

Si nos echamos en clavado o saltamos rebotando desde un trampolín, descendemos en caída libre mientras estamos en el aire; no existe una superficie que nos empuje y sentimos la "ingravidez". De igual manera, si estamos en caída libre cerca de la Tierra dentro de una cámara que esté también en caída libre, tampoco existe una superficie que nos empuje y podríamos considerarnos como "carentes de peso". Flotaríamos libremente dentro de la cámara. Tres ejemplos de tal situación son (1) el vehículo espacial en órbita discutido anteriormente, (2) la cabina de un elevador que cae después de haberse roto el cable de suspensión, y (3) un aeroplano en vuelo a lo largo de una trayectoria parabólica elegida. Supongamos que el aeroplano asciende de modo que en determinado tiempo se mueve hacia arriba a velocidad $v_0$ en una dirección que forme un ángulo $\phi_0$ sobre la horizontal. Si usted fuese un pasajero de ese aeroplano, y si en ese instante el aeroplano desapareciese súbitamente, usted seguiría la trayectoria parabólica de la caída libre dada por la ecuación 23 del capítulo 4. Si en lugar de ello, en ese mismo instante, el piloto dirige al aeroplano de modo que siga esa misma trayectoria, el aeroplano estará, en efecto, en caída libre y los objetos dentro de él flotarán libremente en un estado de "ingravidez". De hecho, este sistema se ha utilizado para entrenar a los astronautas a adaptarse a la "ingravidez" del vehículo espacial en órbita. En cada uno de estos tres casos, nuestro peso cambia sólo ligeramente con respecto al que tendría si estuviésemos parados sobre la superficie de la Tierra, pero la falta de un suelo que nos empuje nos lleva a tener la sensación de "no tener peso".

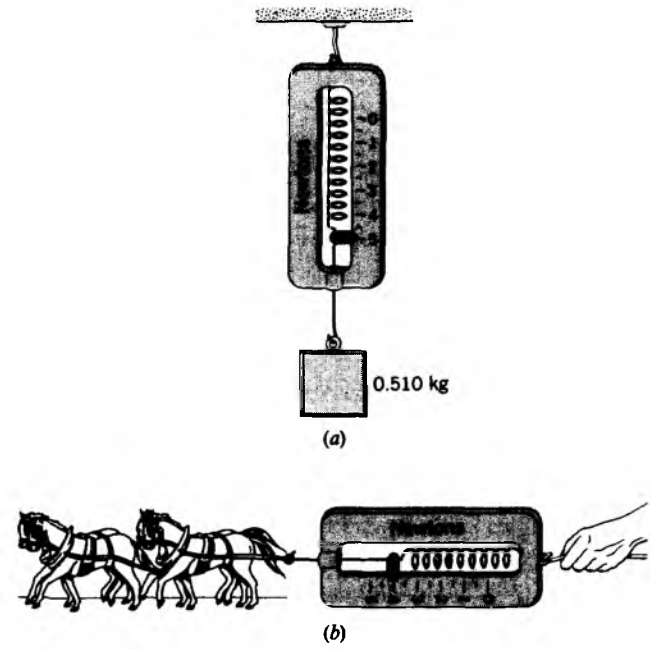



**Figura 12** (*a*) Una báscula de resorte puede ser calibrada, en una región donde $g$ sea conocida, colgando de ella una masa conocida y marcando la fuerza correspondiente al peso de la masa. En el caso que se muestra, una masa de 0.510 kg da $F = 5.00$ N cuando $g = 9.8$ m/s$^2$. (*b*) La escala calibrada puede entonces ser usada para medir una fuerza desconocida. Ésta es la base de operación de todas las básculas de resorte, tal como la medidora de peso en el correo, la báscula para pesar los productos en las tiendas de abarrotes, y la báscula del cuarto de baño.

## 5-9 MEDICIÓN DE FUERZAS

En la sección 5-3 hemos definido la fuerza por la medida de la aceleración impartida a un cuerpo estándar jalando de él con un resorte estirado. Podemos llamar a esto método dinámico para la medición de la fuerza. Aunque conveniente para la definición, no siempre resulta un método particularmente práctico para la medición de fuerzas. (La aceleración rara vez es fácil de medir.) Otro método para medir fuerzas se basa en la medición del cambio de forma o de tamaño de un cuerpo (digamos, un resorte) sobre el que se aplique la fuerza cuando el cuerpo no es acelerado. Éste es el método estático de medir fuerzas.

La base del método estático es que cuando un cuepo, bajo la acción de varias fuerzas, tiene una aceleración cero, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero. Esto no es más que, por supuesto, la segunda ley del movimiento. Una sola fuerza que actúa sobre un cuerpo produciría una aceleración; ésta aceleración puede llegar a ser cero si aplicamos otra fuerza al cuerpo de igual magnitud pero de dirección contraria. En la práctica buscamos mantener al cuerpo en reposo. Si ahora elegimos alguna fuerza como nuestra fuerza unitaria, estaríamos en la posición de medir fuerzas. Por ejemplo, la atracción de la Tierra sobre un cuerpo estándar en un punto en particular puede ser tomado como la unidad de fuerza.

Un instrumento comúnmente empleado para medir fuerzas de esta manera es la báscula de resorte (Fig. 12). Consta de un resorte enrrollado con una aguja en un extremo que se mueve sobre una escala de medidas. Una fuerza ejercida sobre la báscula cambia la longitud del resorte. Si un cuerpo que pesa 1.00 N ($m = 0.102$ kg, donde $g = 9.80$ m/s$^2$) se cuelga del resorte, éste se estira hasta que el jalón que ejerce sobre el cuerpo sea de igual magnitud pero de dirección opuesta a su peso. Puede hacerse una marca sobre la escala frente a la aguja y marcar "1.00-N de fuerza". Similarmente, pesos de 2.00-N, 3.00-N,... pueden suspenderse del resorte y hacer marcas correspondientes sobre la escala frente a la aguja en cada caso. De esta manera se calibra el resorte. Suponemos que la fuerza ejercida sobre el resorte es siempre la misma cuando la aguja se detiene en la misma posición. La

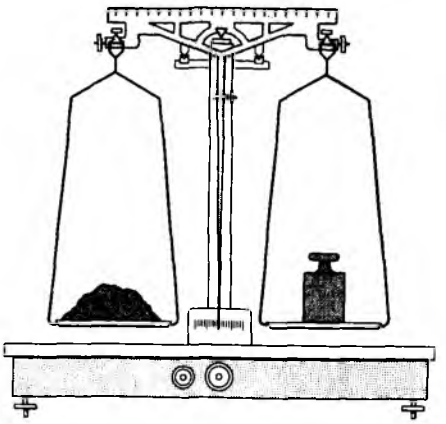


**Figura 13** La balanza de brazos iguales, que compara los pesos de distintas masas.

báscula calibrada puede usarse ahora como en la figura 12*b* para medir una fuerza desconocida, y no únicamente para medir la fuerza de atracción que la Tierra ejerce.

La balanza de brazos iguales (Fig. 13) proporciona otro método estático para medir una fuerza. La aplicación más común implica comparar pesos conocidos con pesos desconocidos; cuando los brazos se nivelan, los pesos deben ser iguales. Más aún, a causa de que $g$ es la misma para ambos brazos de la balanza, la igualdad de pesos implica la igualdad de masas. La balanza de brazos iguales determina entonces la igualdad relativa de las masas al pesarlas. (De hecho, las pesas conocidas que se suministran con tales balanzas están generalmente marcadas como masas en gramos.) Este sistema trabaja para cualquier valor de $g$ excepto cero; la balanza trabajaría igualmente bien para comparar masas en la Luna, pero no trabajaría en absoluto en el espacio libre de gravedad o en la ingravidez relativa de las órbitas de la Tierra.

## 5-10 APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

Si bien todo problema que debe resolverse por el uso de las leyes de Newton requiere un enfoque único, existen unas cuantas reglas generales que se aplican para determinar las soluciones a tales problemas. En esta sección presentamos las reglas e ilustramos su aplicación con varios ejemplos. La mejor manera de aprender las reglas es estudiar los ejemplos.

Los pasos básicos para aplicar las leyes de Newton son: (1) Identifique claramente el cuerpo que se va a analizar. A veces habrá dos o más de tales cuerpos; por lo general cada uno se trata independientemente. (2) Identifique el entorno en que serán ejercidas las fuerzas sobre el cuerpo (superficies, otros objetos, la Tierra, resortes, cuerdas, etc.) (3) Seleccione un marco inercial de referencia sin aceleración apropiado. (4) Elija un sistema de coordenadas (en el marco de referencia elegido) conveniente, localice el origen, y oriente los ejes para simplificar el problema tanto como sea posible. Con el cuidado apropiado, puede elegirse un sistema de coordenadas diferente para cada componente de un problema complejo. (5) Haga un diagrama del cuerpo libre, mostrando a cada objeto como una partícula y a todas las fuerzas que actúen sobre él. (6) Aplique ahora la segunda ley de Newton a cada componente de la fuerza y de la aceleración.

En los siguientes ejemplos, hacemos algunas hipótesis que simplifican el problema a costa de alguna realidad física. Los cuerpos son tratados como partículas, de modo que se considere que todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo lo hacen en un solo punto. Suponemos que todo movimiento carece de fricción. Suponemos también que todas las cuerdas carecen de masa (no se requiere una fuerza para acelerar las cuerdas) y son inextensibles (no se estiran, de modo que los objetos en movimiento lineal unidos por cuerdas tirantes tienen las mismas velocidades y aceleraciones). Las poleas carecen de masa (no se requiere fuerza para que giren) y sus bujes carecen de fricción. Todos los cuerpos son rígidos (no ocurren deformaciones bajo la carga, y las fuerzas a través de ellos se transmiten instantáneamente). A pesar de estas simplificaciones, los ejemplos nos introducen a las técnicas básicas del análisis dinámico. Más adelante en este texto, añadiremos nuevas técnicas que nos permitan ser más realistas en nuestro análisis de situaciones físicas. Por ejemplo, en el capítulo 6 mostramos cómo puede incluirse a la fricción en el análisis, y en el capítulo 12 mostramos cómo explicar la masa de una polea y la fricción de sus chumaceras. Por ahora, no tomaremos en cuenta estos por demás importantes efectos, de modo que podamos centrarnos en los métodos más básicos usados para resolver los problemas.

En el siguiente problema muestra, introducimos la *tensión* $T$, la fuerza con la cual una cuerda jala de los objetos unidos a ella. En cuerdas de espesor despreciable, la dirección de la tensión debe ser siempre paralela a la cuerda misma. (Esta afirmación no sirve para vigas gruesas y sólidas, como lo discutiremos en el capítulo 14.) En cuerdas de masa despreciable, la tensión se transmite uniformemente a lo largo de la cuerda y es la misma en cada extremo.

Microscópicamente, cada elemento de la cuerda jala del elemento inmediato a él (y es a su vez jalado *por* ese elemento, según la tercera ley de Newton). De esta manera la fuerza que jala de un extremo de la cuerda es transmitida al objeto situado al otro extremo. Cualquier elemento $i$ en particular de la cuerda experimenta una tensión $T$ que actuá en una dirección debida al elemento $i - 1$, y una tensión igual $T$ que actúa en dirección opuesta debida al elemento $i + 1$. Si fuésemos a cortar la cuerda en cualquier

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



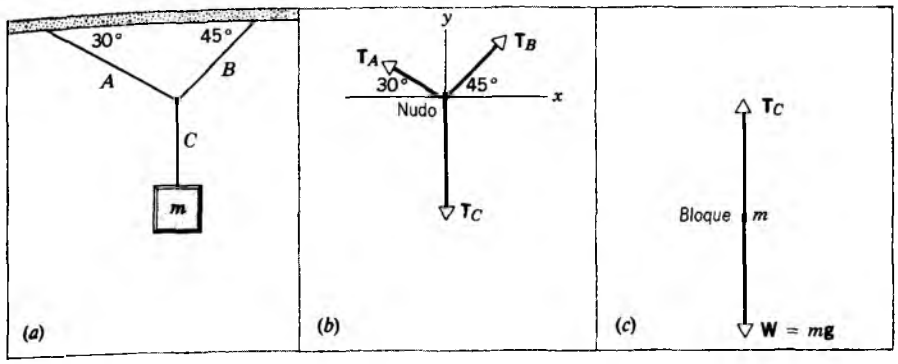



**Figura 14** Problema muestra 4. (*a*) Un bloque cuelga de tres cuerdas *A*, *B*, y *C*. (*b*) El diagrama del cuerpo libre del nudo que une a las cuerdas. (*c*) El diagrama del cuerpo libre del bloque.

punto y unir una báscula de resorte (calibrada como lo describimos en la sección 5-9) a los extremos cortados, la báscula de resorte leería la tensión $T$ directamente.

**Problema muestra 4** La figura 14*a* muestra un bloque de masa $m$ = 15.0 kg colgado de tres cuerdas. ¿Cuáles son las tensiones en las tres cuerdas?

**Solución** Consideremos que el nudo en el empalme de las tres cuerdas es "el cuerpo". La figura 14*b* muestra el diagrama del cuerpo libre del nudo, que permanece en reposo bajo la acción de las tres fuerzas $T_A$, $T_B$, y $T_C$, las cuales son las tensiones en las cuerdas. (Suponemos que, al igual que la cuerda, el nudo carece de masa, de modo que su peso no aparece en el diagrama). Eligiendo los ejes $x$ y $y$ como se muestra en la figura 14*b*, podemos resolver las fuerzas en sus componentes $x$ y $y$. Las componentes de la aceleración son cero, de modo que podemos escribir:

$$\text{componente } x: \quad \sum F_x = T_{Ax} + T_{Bx} = ma_x = 0,$$

$$\text{componente } y: \quad \sum F_y = T_{Ay} + T_{By} + T_{Cy} = ma_y = 0.$$

En la figura 14*b* vemos que

$$T_{Ax} = -T_A \cos 30° = -0.866T_A,$$

$$T_{Ay} = T_A \text{ sen } 30° = 0.500T_A,$$

$$T_{Bx} = T_B \cos 45° = 0.707T_B,$$

$$T_{By} = T_B \text{ sen } 45° = 0.707T_B,$$

y

$$T_{Cx} = 0,$$

$$T_{Cy} = -T_C.$$

Para continuar, examinemos el diagrama del cuerpo libre de la masa $m$, que se muestra en la figura 14*c*. Sólo entran las componentes $y$, y una vez más la aceleración es cero:

$$T_{Cy} - mg = ma_y = 0.$$

A causa de que $T_c$ tiene solamente una componente $y$, podemos escribir:

$$T_C = mg = (15.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 147 \text{ N}.$$

Podemos ahora reescribir las ecuaciones de las componentes $x$ y $y$ para las fuerzas que actúan en el nudo:

$$\text{componente } x: \quad -0.866T_A + 0.707T_B = 0,$$

$$\text{componente } y: \quad 0.500T_A + 0.707T_B - T_C = 0.$$

Sustituyendo el valor para $T_C$ y resolviendo las dos ecuaciones simultáneamente, hallamos que

$$T_A = 108 \text{ N},$$

$$T_B = 132 \text{ N}.$$

Compruebe estos resultados (tal como debe hacerse en todos los problemas) para ver si la suma vectorial de las tres fuerzas es en realidad cero.

En el siguiente problema muestra, introducimos otra clase de fuerza, la *fuerza normal N* ejercida por una superficie sobre un cuerpo. Consideremos el libro que está sobre la mesa que se ilustra en la figura 8. La Tierra ejerce una fuerza hacia abajo sobre el libro (su peso), pero el libro está en equilibrio, de modo que la fuerza total sobre él deberá ser cero. La otra fuerza que actúa sobre el libro es la fuerza normal hacia arriba ejercida por la mesa (indicada como $\mathbf{F}_{BT}$ en la figura 8). En efecto, esta fuerza mantiene al libro sobre la superficie de la mesa. En ausencia de la fricción, las superficies pueden ejercer solamente fuerzas normales, esto es, solamente fuerzas perpendiculares a la superficie. (Nótese que el libro ejerce también una fuerza normal hacia abajo sobre la mesa.)

Si fuesemos a situar nuestra mano sobre el libro y empujáramos hacia abajo con una fuerza $P$, el libro permanecería en equilibrio, de modo que la fuerza normal de la mesa sobre el libro aumentaría de acuerdo a ello, siendo en este caso igual a la suma del peso del libro y de la fuerza $P$. Si $P$ fuera suficientemente grande, excederíamos la capacidad de la mesa para proporcionar la fuerza normal hacia arriba, y el libro se rompería contra la cubierta de la mesa.

Las fuerzas de tensión y las fuerzas normales son ejemplos de *fuerzas de contacto*, en las que un cuerpo ejerce

una fuerza sobre otro en virtud del contacto entre ellos. Estas fuerzas se originan en los átomos del cuerpo, los cuales ejercen una fuerza sobre su otro átomo vecino. Las fuerzas de contacto pueden mantenerse solamente si no exceden a las fuerzas interatómicas; de otro modo se rompe la unión entre los átomos, y la cuerda o la superficie se rompe en pedazos.

**Problema muestra 5** Un trineo de masa $m$ = 7.5 kg es jalado a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por medio de una cuerda (Fig. 15). Se aplica a la cuerda una fuerza constante de $P$ = 21.0 N. Analice el movimiento si (*a*) la cuerda está horizontal y si (*b*) la cuerda forma un ángulo de $\theta$ = 15° con la horizontal.

**Solución** (*a*) En la figura 15b se muestra el diagrama del cuerpo libre con la cuerda horizontal. La superficie ejerce una fuerza $N$, la fuerza normal, sobre el trineo. Las fuerzas son analizadas en componentes y se emplea la segunda ley de Newton como sigue:

$$\text{componente } x: \quad \sum F_x = P = ma_x,$$

$$\text{componente } y: \quad \sum F_y = N - mg = ma_y.$$

Si no existe un movimiento vertical, el trineo permanecerá sobre la superficie y $a_y$ = 0. Así,

$$N = mg = (7.5 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 74 \text{ N}.$$

La aceleración horizontal es

$$a_x = \frac{P}{m} = \frac{21.0 \text{ N}}{7.5 \text{ kg}} = 2.80 \text{ m/s}^2.$$

Nótese que, si la superficie carece realmente de fricción, como lo hemos supuesto, la persona no puede continuar ejerciendo esta fuerza sobre el trineo por mucho tiempo. Después de 30 s con esta aceleración, el trineo se estaría moviendo a razón de ¡84 m/s o a 188 mi/h!

(*b*) El diagrama de cuerpo libre cuando la fuerza del jalón no es horizontal se muestra en la figura 15*c*, y las ecuaciones de las componentes toman entonces las formas siguientes:

$$\text{componente } x: \quad \sum F_x = P\cos\theta = ma_x,$$

$$\text{componente } y: \quad \sum F_y = N + P \text{ sen } \theta - mg = ma_y.$$

Supongamos por el momento que el trineo descansa sobre la superficie; esto es, que $a_y$ = 0. Entonces

$$N = mg - P \text{ sen } \theta = 74 \text{ N} - (21.0 \text{ N})(\text{sen } 15°) = 69 \text{ N},$$

$$a_x = \frac{P\cos\theta}{m} = \frac{(21.0 \text{ N})(\cos 15°)}{7.5 \text{ kg}} = 2.70 \text{ m/s}^2.$$

Una fuerza normal es siempre perpendicular a la superficie de contacto; con las coordenadas elegidas como en la figura 15*b*, $N$ debe ser positiva. Si aumentamos $P$ sen $\theta$, $N$ disminuirá y en algún punto sería cero. En ese punto el trineo abandonaría la superficie bajo la influencia de la componente hacia arriba de $P$, y necesitaríamos analizar su movimiento vertical. Con los valores de $P$ y de $\theta$ que hemos usado, el trineo permanece sobre la superficie y $a_y$ = 0.

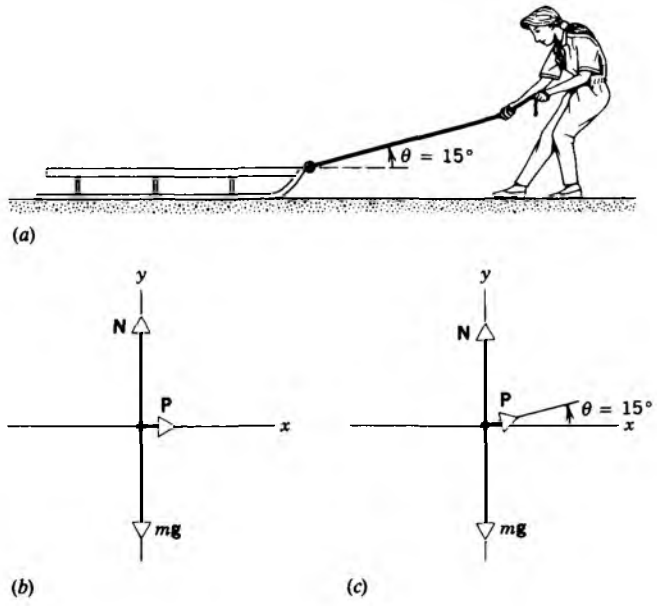



**Figura 15** Problema muestra 5. (*a*) Un trineo es jalado a lo largo de una superficie horizontal carente de fricción. (*b*) El diagrama del cuerpo libre del trineo cuando $\theta$ = 0°. (*c*) El diagrama del cuerpo libre del trineo cuando $\theta$ = 15°.

**Problema muestra 6** Un bloque de masa $m$ = 18.0 kg es mantenido en su lugar por una cuerda sobre un plano carente de fricción inclinado a un ángulo de 27° (véase la Fig. 16*a*). (*a*) Halle la tensión en la cuerda y la fuerza normal ejercida sobre el bloque por el plano inclinado. (*b*) Analice el movimiento siguiente tras haberse cortado la cuerda.

**Solución** (*a*) En la figura 16*b* se muestra el diagrama del cuerpo libre del bloque. El bloque es actuado por la fuerza normal $N$, por su peso $W = mg$, y por la tensión $T$ de la cuerda. Elegimos un sistema de coordenadas con el eje $x$ a lo largo del plano inclinado y el eje $y$ perpendicular al mismo. Con esta elección, dos de las fuerzas ($T$ y $N$) están ya resueltas en sus componentes, y el movimiento que eventualmente ocurriría a lo largo del plano tiene igualmente una sola componente.

En el caso estático no existe aceleración y las fuerzas deben sumar cero. El peso es resuelto en su componente $x(-mg \text{ sen } \theta)$ y su componente $y(-mg\cos\theta)$, y las ecuaciones de las fuerzas son las siguientes:

$$\text{componente } x: \quad \sum F_x = T - mg \text{ sen } \theta = ma_x = 0,$$

$$\text{componente } y: \quad \sum F_y = N - mg\cos\theta = ma_y = 0.$$

Examine estas ecuaciones. ¿Son razonables? ¿Qué sucede en el límite $\theta$ = 0°? Parece como si la tensión fuese cero. ¿Esperaría usted que la tensión fuese cero si el bloque estuviera descansando sobre una superficie horizontal? ¿Qué le sucede a la fuerza normal cuando $\theta$ = 0°? ¿Es esto razonable? ¿Qué les sucedería a $T$ y a $N$ en el límite de $\theta$ = 90°? Conviene que adquiera usted el hábito de hacerse preguntas como éstas antes de comenzar con el álgebra para hallar la solución. Si existe un error, ahora es el mejor momento para hallarlo y corregirlo.
Resolviendo las ecuaciones,

$$T = mg \text{ sen } \theta = (18.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(\text{sen } 27°) = 80 \text{ N},$$

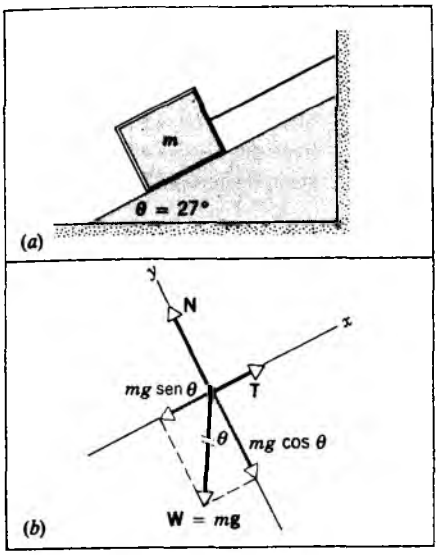



**Figura 16** Problema muestra 6. (*a*) Una masa *m* se halla suspendida en reposo por una cuerda sobre un plano inclinado carente de fricción. (*b*) El diagrama del cuerpo libre de *m*. Nótese que el sistema de coordenadas *xy* está inclinado de modo que el eje *x* sea paralelo al plano. El peso *mg* ha sido resuelto en sus componentes vectoriales.

$$N = mg \cos\theta = (18.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(\cos 27°) = 157 \text{ N}.$$

(*b*) Cuando se corta la cuerda, la tensión desaparece de las ecuaciones y el bloque deja de estar en equilibrio. La segunda ley de Newton nos da ahora lo siguiente:

componente *x*: $\sum F_x = -mg \text{ sen } \theta = ma_x,$

componente *y*: $\sum F_y = N - mg \cos\theta = ma_y.$

El corte de la cuerda no cambia el movimiento en la dirección *y* (¡el bloque no salta del plano!), de manera que $a_y = 0$ como antes y la fuerza normal es todavía igual a $mg \cos\theta$, ó 157 N. En la dirección *x*

$$a_x = -g \text{ sen } \theta = -(9.80 \text{ m/s}^2)(\text{sen } 27°) = -4.45 \text{ m/s}^2.$$

El signo menos demuestra que el bloque se acelera en dirección *x* negativa, esto es, hacia abajo del plano. Compruebe los límites $\theta = 0°$ y $\theta = 90°$. ¿Coinciden con nuestras expectativas?

**Problema muestra 7** Un pasajero de 72.2 kg de masa está viajando en un elevador mientras permanece de pie sobre una báscula de plataforma (Fig. 17*a*). ¿Qué indica la báscula cuando la cabina del elevador (*a*) desciende a velocidad constante y (*b*) asciende con una aceleración de 3.20 m/s²?

***Solución*** *Desarrollemos primero un resultado general válido* para cualquier aceleración vertical *a*. Elegimos que nuestro marco inercial de referencia esté fuera del elevador (el pozo o tiro del elevador, por ejemplo, que forma parte del edificio), porque un elevador en aceleración no es un marco inercial de referencia. Tanto *g* como *a* se miden por un observador situado en este marco externo. La figura 17*b* muestra el diagrama del cuerpo libre del pasajero. Existen la fuerza hacia abajo del peso

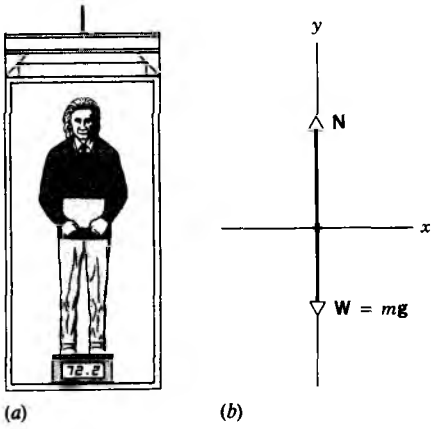



**Figura 17** Problema muestra 7. (*a*) Un pasajero viaja en la cabina de un elevador parado sobre una báscula. (*b*) El diagrama de cuerpo libre del pasajero. La fuerza normal *N* es ejercida por la báscula y es de igual magnitud que la lectura de la báscula. (Las básculas comerciales, como la que aquí se muestra, están calibradas para su lectura en kilogramos, en lugar de en newtons.)

y la fuerza normal hacia arriba ejercida por la báscula. La fuerza normal es ejercida *por* la báscula *sobre* el pasajero; la báscula indica la fuerza hacia abajo ejercida *por* el pasajero *sobre* la báscula. Según la tercera ley de Newton, éstas son de igual magnitud. Entonces, si podemos hallar la fuerza normal, tendremos la lectura de la báscula.

Del diagrama del cuerpo libre tenemos que

$$\sum F_y = N - mg = ma$$

o sea

$$N = m(g + a).$$

Cuando $a = 0$, ya sea que el elevador esté en reposo o moviéndose a velocidad constante, como en la parte (*a*), entonces

$$N = mg = (72.2 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 708 \text{ N } (= 159 \text{ lb}).$$

Cuando $a = 3.20 \text{ m/s}^2$, como en la parte (*b*) tenemos que

$$N = m(g + a) = (72.2 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2 + 3.20 \text{ m/s}^2)$$
$$= 939 \text{ N } (= 211 \text{ lb}).$$

La lectura de la báscula, que indica la fuerza normal con la que el piso está empujando al pasajero, aumenta cuando el elevador está acelerando hacia arriba (*a* es positiva como lo hemos definido por el sistema de coordenadas) y disminuye cuando está acelerando hacia abajo. En caída libre ($a = -g$) la lectura de la báscula será cero (no existe una fuerza normal).

## 5-11 MÁS APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

Aquí consideraremos algunas aplicaciones adicionales de las leyes de Newton. Estos ejemplos implican a varios

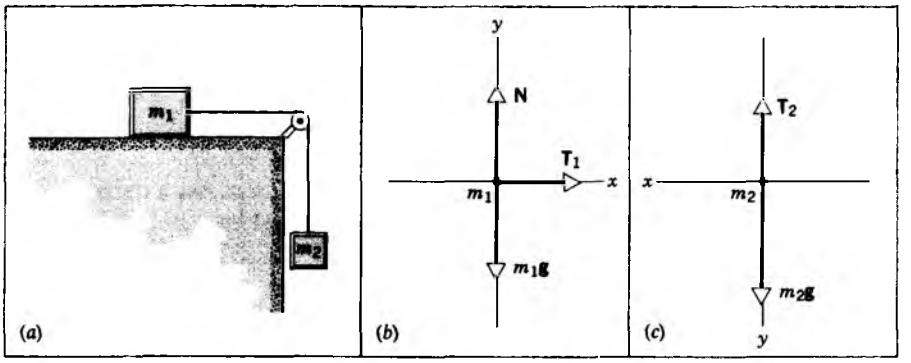



**Figura 18** Problema muestra 8. (*a*) El bloque $m_1$ es jalado a lo largo de una superficie horizontal por una cuerda que pasa por una polea y está unida al bloque $m_2$. (*b*) El diagrama del cuerpo libre del bloque $m_1$. (*c*) El diagrama del cuerpo libre del bloque $m_2$.

objetos que deben ser analizados por separado pero no precisamente en forma independiente, a causa de que el movimiento de un objeto está restringido por el movimiento de otro, tal como cuando están unidos entre sí por medio de una cuerda de longitud fija. Estudie estos ejemplos, y note las elecciones independientes de los sistemas de coordenadas usados para los objetos por separado.

**Problema muestra 8** La figura 18*a* muestra un bloque de masa $m_1$ sobre una superficie horizontal sin fricción. El bloque es jalado por una cuerda de masa despreciable que está unida a un bloque colgante de masa $m_2$. La cuerda pasa por una polea cuya masa es despreciable y cuyo eje gira con fricción despreciable. Halle la tensión en la cuerda y la aceleración de cada bloque.

**Solución** Este problema difiere de los considerados anteriormente en que están implicados dos objetos, en lugar de uno. Las figuras 18*b* y 18*c* muestran los diagramas del cuerpo libre de los objetos por separado. No es necesario elegir el mismo sistema de coordenadas para ambos objetos; en tanto seamos coherentes con cada subsistema, no importa cómo se definan los ejes individuales.

En el bloque 1 actúa una fuerza normal $N$, por gravedad, y por la tensión en la cuerda. Puesto que esperamos que el bloque 1 acelere hacia la derecha, lo elegimos para nuestra dirección $x$ positiva. También esperamos que el bloque 1 permanezca sobre la superficie horizontal, de modo que la componente $y$ de su aceleración sea cero. Las ecuaciones de las componentes según la segunda ley de Newton son, entonces, las siguientes:

$$\text{componente } x: \quad \sum F_x = T_1 = m_1 a_{1x},$$

$$\text{componente } y: \quad \sum F_y = N - m_1 g = m_1 a_{1y} = 0.$$

Para el bloque 2, elegimos que el eje $y$ sea vertical hacia abajo, que es la dirección de la aceleración que esperamos. No es necesario considerar componentes $x$ para el bloque 2, y la componente $y$ nos dará, según la segunda ley de Newton,

$$\sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a_{2y}.$$

Consideramos que la cuerda carece de masa, de modo que la fuerza neta sobre ella será cero. Las tensiones $T_1$ y $T_2$ ejercidas por la cuerda *sobre* los bloques resultan en iguales fuerzas de reacción $T_1$ y $T_2$ ejercidas *por* los bloques sobre la cuerda. Si la cuerda estuviera recta, el anulamiento de la fuerza neta sobre la cuerda requeriría que $T_1 = T_2$. La presencia de la polea ideal (sin masa y sin fricción) para cambiar la dirección de la tensión en la cuerda no cambia esta afirmación: la tensión tiene una magnitud común a lo largo de la longitud de la cuerda. Representaremos a la tensión común por la variable única $T$.

Si la cuerda es también inextensible (esto es, no se estira), entonces cualquier movimiento del bloque 1 en su dirección $x$ es igualado exactamente por un movimiento correspondiente del bloque 2 en su dirección $y$. En este caso las aceleraciones de los dos bloques son iguales. Llamemos $a$ a esta aceleración común. Tenemos ahora tres ecuaciones:

$$T = m_1 a,$$

$$N = m_1 g,$$

y

$$m_2 g - T = m_2 a.$$

Resolviendo la primera y la tercera simultáneamente nos da

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \tag{5}$$

y

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{6}$$

Es útil considerar los casos límites de estos resultados. ¿Qué sucede cuando $m_1$ es cero? Esperaríamos que la cuerda se afloje ($T = 0$) y $m$ caiga libremente ($a = g$). Las ecuaciones predicen correctamente estos límites. Cuando $m_2 = 0$, no existe una fuerza horizontal sobre el bloque 1 y no se acelera; de nueva cuenta, las ecuaciones dan la predicción correcta.

Nótese que $a < g$, como era de esperarse. También nótese que $T$ no es igual a $m_2 g$. Sólo si el bloque 2 estuviera colgando en equilibrio ($a = 0$) sería $T = m_2 g$. Si el bloque 2 acelera hacia abajo, entonces $T < m_2 g$; si acelera hacia arriba, entonces $T > m_2 g$.

¿Se comportan las ecuaciones 5 y 6 apropiadamente en el límite $g = 0$?

**Problema muestra 9** Consideremos dos masas distintas desiguales unidas por una cuerda que pasa por una polea ideal (cuya masa es despreciable y cuyos ejes giran con una fricción despreciable), como se muestra en la figura 19. (Este mecanis-

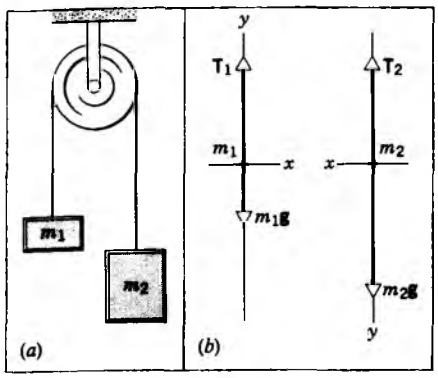



**Figura 19** Problema muestra 9. (*a*) Diagrama de la máquina de Atwood, que consta de dos masas suspendidas unidas por una cuerda que pasa por una polea. (*b*) Diagramas del cuerpo libre de $m_1$ y $m_2$.

mo se conoce también como *máquina de Atwood*).* Sea $m_2$ mayor que $m_1$. Halle la tensión en la cuerda y la aceleración de las masas.

**Solución** A causa de que hemos previsto que las masas tengan sólo aceleraciones verticales, elegimos que la dirección *y* positiva sea la dirección del movimiento de cada masa. Sólo se necesita considerar a las componentes *y*. En la figura 19*b* se muestran los diagramas del cuerpo libre, y las ecuaciones del movimiento serían las siguientes:

$$\text{bloque 1:} \quad \sum F_y = T_1 - m_1 g = m_1 a_1,$$

$$\text{bloque 2:} \quad \sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a_2,$$

donde $a_1$ y $a_2$ son las aceleraciones de $m_1$ y $m_2$, respectivamente. Como en el ejemplo anterior, si la cuerda carece de masa y no se estira, y si la polea carece de masa y de fricción, entonces $T_1 = T_2 = T$ y $a_1 = a_2 = a$. (Suponemos que esta polea ideal no cambia la magnitud de la tensión o de la aceleración de un lado de la cuerda al otro; su única función es cambiar sus direcciones.) Sustituyendo y resolviendo las dos ecuaciones simultáneamente, hallamos que

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g, \tag{7}$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{8}$$

Consideremos qué sucede en los casos límite $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, $g = 0$, y $m_1 = m_2$. Nótese que $m_1 g < T < m_2 g$, y asegúrese de que ha entendido por qué esto debe de ser así.

**Problema muestra 10** Consideremos el sistema mecánico mostrado en la figura 20*a*, donde $m_1 = 9.5$ kg, $m_2 = 2.6$ kg, y $\theta = 34°$. El sistema ha salido del reposo. Describa el movimiento.

**Solución** En las figuras 20*b* y 20*c* se muestran los diagramas del cuerpo libre para los bloques 1 y 2. Elegimos los sistemas de coordenadas como se muestra, de modo que un sistema de coordenadas sea paralelo a la aceleración prevista para cada cuerpo. Como en los ejemplos anteriores, esperamos que la tensión tenga un valor común y que el movimiento vertical de $m_2$ y el movimiento a lo largo del plano de $m_1$ pueda ser descrito por aceleraciones de la misma magnitud. Supongamos que $m_1$ se mueve en la dirección *x* positiva (si nuestra hipótesis es errónea, *a* resultará negativa). Para $m_1$, las ecuaciones de las componentes, según la segunda ley de Newton, son las siguientes:

$$\text{componente } x: \quad \sum F_x = T - m_1 g \operatorname{sen} \theta = m_1 a,$$

$$\text{componente } y: \quad \sum F_y = N - m_1 g \cos \theta = 0,$$

y para $m_2$,

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a.$$

Resolviendo simultáneamente tenemos que

$$a = \frac{m_2 - m_1 \operatorname{sen} \theta}{m_1 + m_2} g \tag{9}$$

y

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g(1 + \operatorname{sen} \theta). \tag{10}$$

Nótese que estos resultados duplican las ecuaciones 5 y 6 del problema muestra 8 si ponemos que $\theta = 0$ (de modo que el

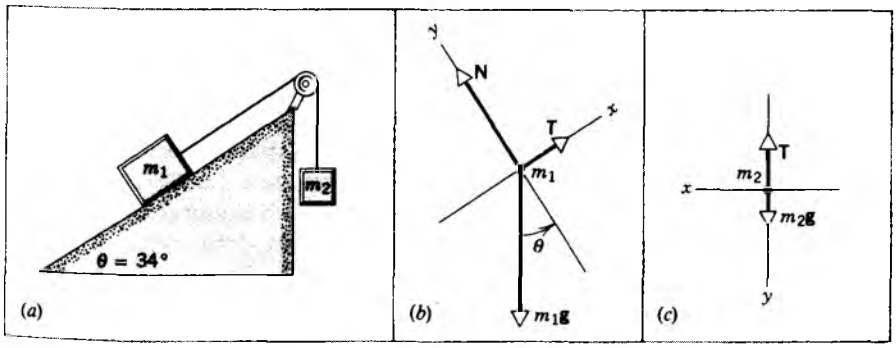



**Figura 20** Problema muestra 10. (*a*) El bloque $m_1$ se desliza sobre un plano inclinado sin fricción. El bloque $m_2$ cuelga de una cuerda unida a $m_1$. (*b*) Diagrama del cuerpo libre de $m_1$. (*c*) Diagrama del cuerpo libre de $m_2$.

* George Atwood (1745-1807) fue un matemático inglés que desarrolló este dispositivo en 1784 para demostrar las leyes del movimiento acelerado y medir *g*. Haciendo a la diferencia entre $m_1$ y $m_2$ pequeña, le fue posible "retardar" el efecto de la caída libre y medir el movimiento del peso en caída con un reloj de péndulo, la manera más precisa de medir intervalos de tiempo en aquella época.

bloque 1 se mueva horizontalmente) y las Ecs. 7 y 8 del problema muestra 9 si hacemos que $\theta = 90°$ (de modo que el bloque 1 se mueva verticalmente).

Poniéndolo en números, tenemos que

$$a = \frac{2.6\text{ kg} - (9.5\text{ kg})(\text{sen } 34°)}{9.5\text{ kg} + 2.6\text{ kg}}(9.80\text{ m/s}^2) = -2.2\text{ m/s}^2.$$

La aceleración resulta ser negativa, lo que significa que nuestra estimación inicial con respecto a la dirección del movimiento era errónea. El bloque 1 se desliza hacia abajo por el plano, y el bloque 2 se mueve hacia arriba. A causa de que en las ecuaciones dinámicas no intervienen fuerzas que dependan de la dirección del movimiento, esta estimación inicial incorrecta no tiene efecto sobre las ecuaciones y podemos aceptar el valor final como correcto. En general, éste no será el caso si consideramos fuerzas de fricción que actúen en oposición a la dirección del movimiento.

Para la tensión en la cuerda, hallamos que

$$T = \frac{(9.5\text{ kg})(2.6\text{ kg})}{9.5\text{ kg} + 2.6\text{ kg}}(9.80\text{ m/s}^2)(1 + \text{sen } 34°) = 31\text{ N}.$$

Este valor es mayor que el peso de $m_2$($m_2g$ = 26 N), lo cual es compatible con la aceleración de $m_2$, que es hacia arriba.

## PREGUNTAS

1. ¿Por qué caemos hacia adelante cuando un autobús en movimiento desacelera hasta detenerse y sentimos un impulso hacia atrás cuando acelera desde el reposo? Las personas que viajan de pie en el metro hallan a menudo conveniente situarse de frente al costado del carro cuando el tren arranca o se detiene y viendo hacia el frente o la parte trasera cuando el tren está corriendo a velocidad constante. ¿Por qué?
2. Un bloque de masa $m$ está suspendido del techo por un cordón $C$, y un cordón similar $D$ está atado a la base del bloque (Fig. 21). Explique lo siguiente: Si le damos un tirón súbito a $D$, se romperá, pero si jalamos uniformemente de $D$, $C$ se romperá.

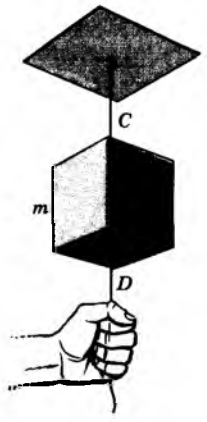



**Figura 21** Pregunta 2.

3. Rebata la afirmación, hecha a menudo, de que la masa de un cuerpo es una medida de la "cantidad de materia" que contiene.
4. Usando fuerza, longitud, y tiempo como cantidades fundamentales, ¿cuáles son las dimensiones de masa?
5. ¿Puede ser considerada la primera ley de Newton simplemente como el caso especial $\mathbf{a} = 0$ de la segunda ley? De ser así, ¿es realmente necesaria la primera ley? Discuta esto.
6. ¿Qué relación existe, si la hay, entre la fuerza que actúa sobre un objeto y la dirección en la que se mueve el objeto?
7. Suponga que un cuerpo sobre el que actúen exactamente dos fuerzas se acelera. ¿Se deduce entonces que (*a*) el cuerpo no podrá moverse a velocidad constante; (*b*) la velocidad nunca podrá ser cero; (*c*) la suma de las dos fuerzas no puede ser cero; (*d*) las dos fuerzas deben actuar en la misma línea?
8. En la figura 22 mostramos cuatro fuerzas que son de igual magnitud. ¿Qué combinación de tres de ellas, actuando juntas sobre la misma partícula, podría mantener a esa partícula en equilibrio?

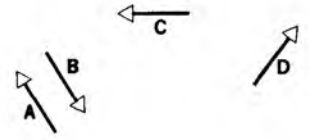



**Figura 22** Pregunta 8.

9. Un caballo es obligado a jalar una carreta. El caballo se niega a ello, apelando a la tercera ley de Newton como defensa: el jalón del caballo sobre la carreta es igual pero opuesto al jalón de la carreta sobre el caballo. Se pregunta el caballo: "Si yo no puedo nunca ejercer una fuerza mayor sobre la carreta de la que ésta ejerce sobre mí, ¿cómo puedo hacer que la carreta se mueva"? ¿Qué le contestaría usted?
10. Comente si los siguientes pares de fuerzas son ejemplos de acción-reacción: (*a*) La Tierra atrae a un ladrillo; el

ladrillo atrae a la Tierra. (*b*) Un aeroplano a hélice empuja el aire hacia la cola; el aire empuja al aeroplano hacia adelante. (*c*) Un caballo jala de una carreta, moviéndola; la carreta jala contra el caballo. (*d*) Un caballo jala de una carreta sin moverla; la carreta jala contra el caballo. (*e*) Un caballo jala de una carreta sin moverla; la Tierra ejerce una fuerza igual y opuesta sobre la carreta. (*f*) La Tierra jala a la carreta hacia abajo; el suelo empuja a la carreta hacia arriba con una fuerza igual y opuesta.

**11.** La siguiente aseveración es verdadera: explíquela. Dos equipos están contendiendo jalando de una cuerda; el equipo que empuje más duro (horizontalmente) contra el suelo gana.

**12.** Dos estudiantes tratan de romper una cuerda. Primero jalan uno contra el otro y fallan. Luego atan un extremo a una pared y jalan juntos. ¿Es éste procedimiento mejor que el primero? Explique su respuesta.

**13.** ¿Cuál es su masa en "slugs"? ¿Y su peso en newtons?

**14.** Un francés, al llenar un formulario, escribe "78 kg" en el espacio marcado Poids (peso). Sin embargo, el peso es una fuerza y el kilogramo es una unidad de masa. ¿Qué tienen los franceses (entre otros) en cuenta cuando usan unidades de masa para describir su peso? ¿Por qué no da su peso en newtons? ¿Cuántos newtons pesa el francés? ¿Y cuántas libras?

**15.** Comente las aseveraciones siguientes con respecto a masa y peso hechas en hojas de examen. (*a*) La masa y el peso son las mismas cantidades físicas expresadas en unidades diferentes. (*b*) La masa es una propiedad de un objeto aislado, mientras que el peso resulta de la interacción de dos objetos. (*c*) El peso de un objeto es proporcional a su masa. (*d*) La masa de un cuerpo varía con los cambios en su peso local.

**16.** Una fuerza horizontal actúa sobre un cuerpo que puede moverse libremente. ¿Puede producir una aceleración si la fuerza es menor que el peso de ese cuerpo?

**17.** ¿Por qué la aceleración de un objeto que cae libremente no depende del peso del objeto?

**18.** Describa varias maneras en las que usted podría, aun brevemente, experimentar una carencia de peso.

**19.** ¿En qué circunstancias sería cero su peso? ¿Depende su respuesta de la elección de un sistema de referencia?

**20.** El "brazo mecánico" de un vehículo espacial puede manejar un satélite de 2200 kg cuando se le extiende a 12 m (véase la Fig. 23). Sin embargo, en la Tierra, este sistema manipulador remoto (RMS) no puede soportar su propio peso. En la "ingravidez" de un vehículo espacial en órbita, ¿por qué ese sistema manipulador remoto tiene que poder ejercer una fuerza?

**21.** El manual del propietario de un automóvil sugiere que el cinturón de seguridad se ajuste perfectamente y que la almohadilla del asiento frontal *no sea* acomodada sobre la nuca sino de modo tal que "la parte superior de la almohadilla esté a nivel con la parte superior de las orejas". ¿Cómo apoyan las leyes de Newton a estas buenas recomendaciones?

**22.** Usted dispara una flecha al aire y la sigue con la vista a lo largo de una trayectoria parabólica hasta el suelo. Se da cuenta de que la flecha viaja de modo que siempre es tangente a su trayectoria. ¿Qué es lo que lo causa?



**Figura 23** Preguntas 20 y 26.

**23.** En una contienda para jalar de una cuerda tres hombres jalan de ella a la izquierda *A* y otros tres jalan a la derecha *B* con fuerzas de igual magnitud. Ahora se cuelga una pesa de 5 lb verticalmente en el centro de la cuerda. (*a*) ¿Pueden los hombres hacer que *AB* sea una horizontal? (*b*) De no ser así, explíque. Si pueden hacerlo, determine la magnitud de las fuerzas requeridas en *A* y en *B* para ello.

**24.** Un pájaro se posa sobre un alambre de telégrafo estirado. ¿Cambia por ello la tensión del alambre? De ser así, ¿en qué cantidad menor, igual, o mayor que el peso del pájaro?

**25.** Un cable sin masa pasa por una polea carente de fricción. Un chango se cuelga de un lado del cable y en el otro lado del cable hay un espejo colgado, que tiene el mismo peso que el chango y está situado a su mismo nivel. Puede el chango huir de su imagen en el espejo (*a*) trepando por el cable, (*b*) bajando por el cable, o (*c*) soltando el cable?

**26.** En noviembre de 1984 los astronautas Joe Allen y Dale Gardner recuperaron un satélite de comunicaciones Westar-6 de una órbita defectuosa y lo situaron dentro de la cabina de carga del vehículo espacial *Discovery* (véase la Fig. 23). Al describir la experiencia, Joe Allen dijo del satélite, "no es pesado; es masivo". ¿Qué quiso decir?

**27.** Usted es un astronauta que está en el salón de descanso de una estación espacial en órbita y quita la tapa de un tarro largo y delgado que contiene una sola aceituna. Describa diversas maneras (todas aprovechando la inercia ya sea de la aceituna o del tarro) para sacar la aceituna del tarro.

**28.** En la figura 24, una aguja ha sido colocada en cada extremo de un palo de escoba (descansando), las puntas de las agujas se apoyan en los bordes de unas copas llenas de vino. La persona golpea el palo de escoba con una barra mediante un golpe rápido y vigoroso. El palo de escoba se rompe y cae al suelo, pero las copas de vino permanecen en su lugar y no se derrama ni una gota de vino. Esta impresionante habilidad fue popular a finales del siglo pasado. ¿Qué razones físicas están detrás de élla? (Si usted trata de hacerlo, practique primero con latas de refresco vacías. Pensándolo bien, usted podría pedir a su profesor de física que haga el experimento, ¡a modo de demostración para la clase!)

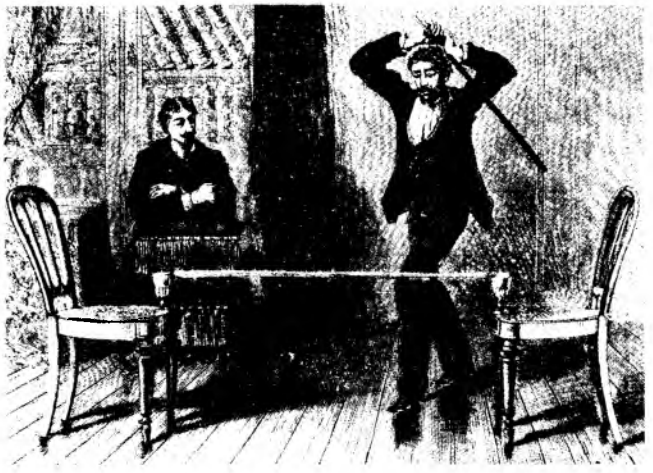


**Figura 24** Pregunta 28.




**Figura 25** Preguntas 36 y 37.

**29.** Un elevador está suspendido de un solo cable. No existe un contrapeso. El elevador recibe pasajeros en la planta baja y los lleva hasta el último piso, donde ellos se bajan. Otro grupo de pasajeros entra y son transportados hasta la planta baja. Durante este viaje redondo, ¿cuándo es la tensión del cable igual al peso del elevador más los pasajeros? ¿Cuándo es mayor? ¿Y cuándo menor?

**30.** Usted está en la plataforma de mando del taxi espacial *Discovery* en órbita y alguien le pasa dos bolas de madera, aparentemente idénticas. Una, sin embargo, tiene un núcleo de plomo y la otra no. Describa varias maneras de distinguirlas.

**31.** Usted está parado en la plataforma de una báscula grande de resorte y observa su peso. Después avanza un paso sobre la plataforma y observa que en la báscula señala menos de su peso al principio del paso y más de su peso al final del paso. Explique.

**32.** ¿Podría usted pesarse a sí mismo en un báscula cuya lectura máxima sea menor al peso de usted? Si puede hacerlo, ¿cómo?

**33.** Una pesa está colgada del techo de un elevador por un cordón. Partiendo de las siguientes condiciones, elija aquella en la cual la tensión del cordón sea mayor . . . o menor: (*a*) el elevador está en reposo; (*b*) el elevador sube a velocidad uniforme; (*c*) el elevador desciende a velocidad decreciente; (*d*) el elevador desciende a velocidad creciente.

**34.** Una mujer está de pie sobre una báscula de resortes en un elevador. ¿En cuál de los siguientes casos registraría la báscula una lectura mínima . . . o una lectura máxima?: (*a*) el elevador está quieto; (*b*) el cable del elevador se rompe; (*c*) el elevador acelera hacia arriba; (*d*) el elevador acelera hacia abajo; (e) el elevador se mueve a velocidad constante.

**35.** ¿A qué conclusión podría llegar un físico si dentro de un elevador permanecen en equilibrio dos masas distintas desiguales que cuelgan de una polea, esto es, no existe una tendencia de la polea a girar?

**36.** La figura 25 muestra al cometa Kohoutek tal como se le vio en 1973. Como todos los cometas, se mueve alrededor del Sol bajo la influencia de la fuerza de gravitación que el Sol ejerce sobre él. El núcleo del cometa es un núcleo relativamente masivo en una posición indicada por *P*. La cauda de un cometa se produce por la acción del viento solar, que consta de partículas cargadas que se extienden alejándose del Sol. Por inspección, ¿qué podría usted decir, si existe algo que lo aumente, con respecto a la dirección de la fuerza que actúa sobre el núcleo del cometa? ¿Qué nos diría acerca de la dirección en la que el núcleo es acelerado? ¿Qué acerca de la dirección en la que se está moviendo el cometa?

**37.** En general (véase la Fig. 25), los cometas tienen una cauda de polvo, que consiste en partículas de polvo impulsadas lejos del Sol por la presión de la luz del astro rey. ¿Por qué esta cauda tiene a menudo una forma curvada?

**38.** ¿Puede usted pensar en un fenómeno físico que involucre a la Tierra en el cual nuestro planeta no pueda ser tratado como una partícula?

## PROBLEMAS

### *Sección 5-5 Segunda ley de Newton*

**1.** Supongamos que la fuerza de gravedad del Sol cesara súbitamente, de modo que la Tierra resultara ser un objeto libre en lugar de estar confinada a la órbita del Sol. ¿Cuánto tiempo le tomaría a la Tierra llegar a una distancia del Sol igual al radio orbital actual de Plutón? (*Sugerencia*: En el apéndice C el lector encontrará datos necesarios.)

2. Un bloque de 5.5 kg está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. Es jalado con una fuerza horizontal constante de 3.8 N. (*a*) ¿Cuál es su aceleración? (*b*) ¿Cuánto tiempo debe ser jalado antes de que su velocidad sea de 5.2 m/s? (*c*) ¿Cuánto se aleja en este tiempo?
3. Un electrón viaja en línea recta desde el cátodo de un tubo de vacío hasta su ánodo, que está a 1.5 cm de distancia. Comienza con velocidad cero y llega al ánodo con una velocidad de $5.8 \times 10^6$ m/s. (*a*) Suponga constante a la aceleración y calcule la fuerza sobre el electrón. La masa del electrón es de $9.11 \times 10^{-31}$ kg. Esta fuerza es de origen eléctrico. (*b*) Calcule la fuerza de gravitación sobre el electrón.
4. Un neutrón viaja a una velocidad de $1.4 \times 10^7$ m/s. Las fuerzas nucleares son de un alcance muy corto, siendo esencialmente cero afuera del núcleo pero muy fuertes adentro. Si el neutrón es capturado y traído al reposo por un núcleo cuyo diámetro es de $1.0 \times 10^{-14}$ m, ¿cuál es la magnitud mínima de la fuerza, que se presume es constante, que actúa sobre este neutrón? La masa del neutrón es de $1.67 \times 10^{-27}$ kg.
5. En un juego de "jalar de la cuerda" modificado, dos personas jalan en direcciones opuestas, no de la cuerda, sino de un trineo de 25 kg que descansa sobre una calle cubierta de hielo. Si los participantes ejercen fuerzas de 90 N y 92 N, ¿Cuál es la aceleración del trineo?
6. El haz de luz de láser en un satélite golpea un objeto lanzado desde un proyectil balístico disparado accidentalmente (véase la Fig. 26). El haz ejerce una fuerza de $2.7 \times 10^{-5}$ N sobre el objetivo. Si el "tiempo de permanencia" del rayo sobre el objetivo es de 2.4 s, ¿en cuánto se desplazará el objeto si éste es (*a*) una cabeza explosiva de 280 kg y (*b*) un señuelo de 2.1 kg? (Estos desplazamientos pueden medirse observando el rayo reflejado.)

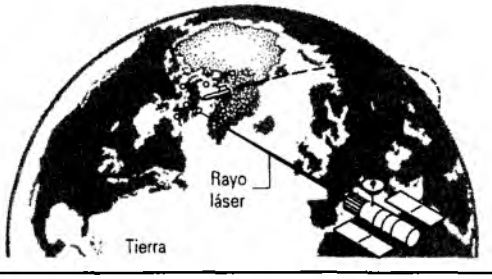



**Figura 26** Problema 6.

7. Un automóvil que viaja a razón de 53 km/h choca contra el pilar de un puente. Un pasajero que viaja en el automóvil se mueve hacia adelante una distancia de 65 cm (con respecto a la carretera) mientras es llevado al reposo por un cojín de aire inflado. ¿Qué fuerza (supuesta como constante) actúa sobre la parte superior del torso del pasajero, quien tiene una masa de 39 kg?
8. Un electrón es proyectado horizontalmente a una velocidad de $1.2 \times 10^7$ m/s dentro de un campo eléctrico que ejerce una fuerza vertical constante de $4.5 \times 10^{-16}$ N sobre él. La masa del electrón es de $9.11 \times 10^{-31}$ kg. Determine la distancia vertical en la que el electrón es desviado durante el tiempo en que se ha movido hacia el frente 33 mm horizontalmente.
9. El yate solar *Diana*, diseñado para navegar en el sistema solar usando la presión de la luz del Sol, tiene una vela con un área de 3.1 km$^2$ y una masa de 930 kg. Cerca de la órbita de la Tierra, el Sol puede ejercer una fuerza de radiación de 29 N sobre la vela. (*a*) ¿Cuál es la aceleración que tal fuerza impartiría al vehículo? (*b*) Una aceleración pequeña puede producir efectos grandes si actúa continuamente durante un periodo de tiempo suficientemente grande. Partiendo del reposo, ¿qué tan lejos se habría movido el vehículo después de 1 día en estas condiciones? (*c*) ¿Cuál sería entonces su velocidad? (Véase "The Wind from the Sun", un fascinante relato de ciencia-ficción por Arthur C. Clarke, sobre una carrera de yates solares.)
10. Un cuerpo de masa $m$ recibe la acción de dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ como se muestra en la figura 27. Si $m = 5.2$ kg, $F_1 = 3.7$ N, y $F_2 = 4.3$ N, halle el vector de aceleración del cuerpo.

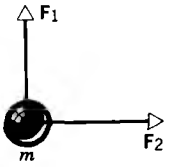



**Figura 27** Problema 10.

11. Un objeto de 8.5 kg pasa a través del origen con una velocidad de 42 m/s paralelo al eje $x$. Experimenta una fuerza constante de 19 N en dirección del eje $y$ positivo. Calcule (*a*) la velocidad y (*b*) la posición de la particula después de haber transcurrido 15 s.
12. Una cierta fuerza da al objeto $m_1$ una aceleración de 12.0 m/s$^2$. La misma fuerza da al objeto $m_2$ una aceleración de 3.30 m/s$^2$. ¿Qué aceleración daría la fuerza a un objeto cuya masa sea (*a*) la diferencia entre $m_1$ y $m_2$, y (*b*) la suma de $m_1$ y $m_2$?
13. (*a*) Despreciando las fuerzas de gravitación, ¿qué fuerza se requeriría para acelerar a una nave espacial de 1200 tons métricas desde el reposo hasta 1/10 de la velocidad de la luz en 3 días? ¿Y en 2 meses? (Una tonelada métrica = 1000 kg.) (*b*) Suponiendo que los motores se apaguen al alcanzar esa velocidad, ¿cuál sería el tiempo requerido para completar un viaje de 5 meses-luz para cada uno de estos casos? (Use 1 mes = 30 días.)

### *Sección 5-6 Tercera ley de Newton*

14. Dos bloques, con masas $m_1 = 4.6$ kg y $m_2 = 3.8$ kg, están unidos por un resorte ligero sobre una mesa horizontal sin fricción. En cierto instante, cuando $m_2$ tiene una aceleración $a_2 = 2.6$ m/s$^2$. (*a*) ¿Cuál es la fuerza sobre $m_2$ y (*b*) ¿cuál es la aceleración de $m_1$?

**15.** Una niña de 40 kg y un trineo de 8.4 kg están sobre la superficie de un lago congelado, separados uno del otro por una distancia de 15 m. Por medio de una cuerda, la niña ejerce una fuerza de 5.2 N sobre el trineo, jalándolo hacia ella. (*a*) ¿Cuál es la aceleración del trineo? (*b*) ¿Cuál es la aceleración de la niña? (*c*) ¿A qué distancia de la posición inicial de la niña se encontrarán, suponiendo que la fuerza permanezca constante? Suponga que no actúan fuerzas de fricción.

### *Sección 5-8 Peso y masa*

**16.** ¿Cuál será el peso en newton y la masa en kilogramos de (*a*) un saquito de azúcar de 5.00 lb, (*b*) un jugador de fútbol de 240 lb, y (*c*) un automóvil de 1.8 tons? (1 ton = 2000 lb).

**17.** ¿Cuáles son la masa y el peso de (*a*) un vehículo para nieve de 1420 lb, y (*b*) una bomba de calor de 412 kg?

**18.** Un viajero del espacio cuya masa es de 75.0 kg abandona la Tierra. Calcule su peso (*a*) en la Tierra, (*b*) en Marte, donde g = 3.72 m/s², y (*c*) en el espacio interplanetario. (*d*) ¿Cuál es su masa en cada uno de estos lugares?

**19.** Una cierta partícula tiene un peso de 26.0 N en un punto en donde la aceleración debida a la gravedad es de 9.80 m/s². (*a*) ¿Cuáles son el peso y la masa de la partícula en un punto en que la aceleración debida a la gravedad es de 4.60 m/s²? (*b*) ¿Cuáles son el peso y la masa de la partícula si se mueve hacia un punto en el espacio donde la fuerza de la gravitación es de cero?

**20.** Un aeroplano de 12,000 kg está volando a nivel con una velocidad de 870 km/h. ¿Cuál es la fuerza de sustentación dirigida hacia arriba que ejerce el aire sobre el aeroplano?

**21.** ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre un automóvil de 3900 lb que acelera a razón de 13 ft/s²?

**22.** Un trineo-cohete experimental de 523 kg puede ser acelerado desde el reposo hasta 1620 km/h en 1.82 s. ¿Cuál es la fuerza neta requerida?

**23.** Un avión de propulsión a chorro parte desde el reposo cuando está sobre la pista y acelera para el despegue a razón de 2.30 m/s² (= 7.55 ft/s²). Tiene dos motores, cada uno de los cuales ejerce un empuje de $1.40 \times 10$ N$^5$ (= 15.7 tons). ¿Cuál es el peso del avión?

### *Sección 5-10 Aplicaciones de las leyes de Newton*

**24.** (*a*) Dos pesas de 10 lb están unidas a una báscula de resorte como se muestra en la figura 28*a*. ¿Cuánto señala la báscula? (*b*) Una sola pesa de 10 lb está unida a una báscula de resorte la que a su vez está unida a una pared, como se muestra en la figura 28*b*. ¿Cuánto señala la báscula? (Desprecie el peso de la báscula.)

**25.** Una esfera cargada de $2.8 \times 10^{-4}$ kg de masa está suspendida de una cuerda. Una fuerza eléctrica actúa horizontalmente sobre la esfera de modo que la cuerda forme un ángulo de 33° con la vertical cuando está en reposo. Halle (*a*) la magnitud de la fuerza eléctrica, y (*b*) la tensión en la cuerda.

**26.** Un automóvil que se mueve inicialmente a una velocidad de 50 mi/h (≈ 80 km/h) y que pesa 3000 lb (≈ 13,000 N) es detenido a una distancia de 200 ft (≈ 61 m). Halle (*a*) la fuerza de frenado y (*b*) el tiempo requerido para que se detenga. Suponiendo la misma fuerza de frenado, halle (*c*) la distancia y (*d*) el tiempo requerido para que se detenga si el automóvil estuviera viajando a razón de 25 mi/h (≈ 40 km/h) inicialmente.

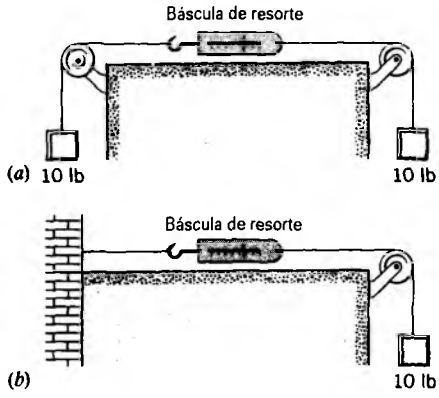



**Figura 28** Problema 24.

**27.** Un meteorito de 0.25 kg de masa cae verticalmente a través de la atmósfera de la Tierra con una aceleración de 9.2 m/s². Además de la gravedad, una fuerza retardante vertical (debida a la resistencia aerodinámica de la atmósfera) actúa sobre el meteorito. ¿Cuál es la magnitud de esta fuerza retardante? Véase la figura 29.



**Figura 29** Problema 27.

**28.** Un elevador que pesa 6200 lb se eleva mediante un cable con una aceleración de 3.8 ft/s². (*a*) ¿Cuál es la tensión en el cable? (*b*) ¿Cuál es la tensión cuando el elevador está

acelerando hacia abajo a razón de 3.8 ft/s² pero se mueve todavía hacia arriba?

**29.** Un hombre de 83 kg de masa (peso $mg$ = 180 lb) salta a un patio de concreto desde el borde de una ventana situada a sólo 0.48 m (= 1.6 ft) sobre el suelo, pero descuida doblar sus rodillas cuando aterriza, de modo que su movimiento es detenido en una distancia de alrededor de 2.2 in (= 0.87 pulg). (*a*) ¿Cuál es la aceleración promedio del hombre desde el momento en que sus pies tocan por primera vez el patio hasta el momento en que llega al reposo? (*b*) ¿Con qué fuerza promedio sacude a su estructura ósea este salto?

**30.** Un bloque es proyectado hacia arriba sobre un plano inclinado sin fricción a una velocidad $v_0$. El ángulo de inclinación es $\theta$. (*a*) ¿Cuánto avanza sobre el plano? (*b*) ¿Cuánto tiempo le toma llegar hasta allí? (*c*) ¿Cuál es su velocidad cuando regresa hasta la base? Halle las respuestas numéricas para $\theta = 35°$ y $v_0 = 8.2$ ft/s.

**31.** Una lámpara cuelga verticalmente de un cordón en un elevador en descenso. El elevador tiene una desceleración de 2.4 m/s² (= 7.9 ft/s²) antes de detenerse. (*a*) Si la tensión en el cordón es de 89 N (= 20 lb), ¿cuál es la masa de la lámpara? (*b*) ¿Cuál es la tensión en la cuerda cuando el elevador asciende con una aceleración de 2.4 m/s² (= 7.9 ft/s²)?

**32.** ¿Cuánta fuerza se necesita en el sedal para detener a un salmón de 19 lb que nada a razón de 9.2 ft/s en una distancia de 4.5 in?

**33.** Un bloque de 5.1 kg de peso es jalado a lo largo de un piso sin fricción por una cuerda que ejerce una fuerza $P$ = 12 N con un ángulo $\theta = 25°$ sobre la horizontal, como se muestra en la figura 30. (*a*) ¿Cuál es la aceleración del bloque? (*b*) La fuerza $P$ se incrementa lentamente. ¿Cuál es el valor de $P$ en el momento antes de que el bloque sea levantado del piso? (*c*) ¿Cuál es la aceleración del bloque antes de que sea levantado del piso?

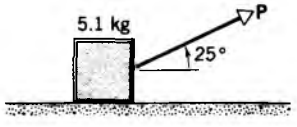



**Figura 30** Problema 33.

**34.** ¿Cómo podría un objeto de 100 lb ser bajado de un tejado usando una cuerda con una resistencia a la rotura de 87 lb sin que se rompa la cuerda?

**35.** Se deja caer un bloque desde el reposo en la parte superior de un plano inclinado sin fricción de 16 m de longitud. Llega a la base 4.2 s más tarde. Un segundo bloque es lanzado hacia arriba desde el fondo del plano en el instante en que el primer bloque es soltado de modo tal que regresa al fondo simultáneamente con el primer bloque. (*a*) Halle la aceleración de cada bloque sobre el plano inclinado. (*b*) ¿Cuál es la velocidad inicial del segundo bloque? (*c*) ¿Qué distancia recorre hacia arriba en el plano inclinado? (*d*) ¿Qué ángulo forma el plano con la horizontal?

**36.** Un obrero arrastra una caja por el piso de una fábrica jalando de una cuerda atada a la caja. El obrero ejerce una fuerza de 450 N sobre la cuerda, la cual está inclinada a 38.0° sobre la horizontal. El suelo ejerce una fuerza resistiva horizontal de 125 N, como se muestra en la figura 31. Calcule la aceleración de la caja (*a*) si su masa es de 96.0 kg y (*b*) si su peso es de 96.0 N.

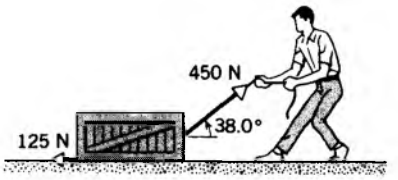



**Figura 31** Problema 36.

**37.** Un elevador y su carga tienen una masa combinada de 1600 kg. Halle la tensión en el cable de sustentación cuando el elevador, que originalmente se mueve hacia abajo a razón de 12.0 m/s, es traído al reposo con aceleración constante a una distancia de 42.0 m.

**38.** Un objeto cuelga de una balanza de resortes unida al techo de un elevador. La balanza señala 65 N cuando el elevador está quieto. (*a*) ¿Cuánto marca cuando el elevador se mueve hacia arriba a una velocidad constante de 7.6 m/s? (*b*) ¿Cuánto marca la balanza cuando el elevador se mueve hacia arriba a una velocidad de 7.6 m/s y desacelera a razón de 2.4 m/s²?

**39.** Una plomada, que consta de una pequeña pesa suspendida por un cordón de masa despreciable, cuelga del techo de un vagón de ferrocarril y actúa como un acelerómetro. (*a*) Demuestre que la expresión que relaciona a la aceleración horizontal $a$ del carro con el ángulo $\theta$ formado por el cordón con la vertical está dada por $a = g \tan \theta$. (*b*) Halle $a$ cuando $\theta = 20°$. (*c*) Halle $\theta$ cuando $a = 5.0$ ft/s².

**40.** Un motor a chorro de 1400 kg está afianzado al fuselaje de un avión de pasajeros por apenas tres pernos (que suele ser la práctica usual). Suponga que cada perno soporta un tercio de la carga. (*a*) Calcule la fuerza sobre cada perno cuando el avión espera en línea para que se le permita el despegue. (*b*) Durante el vuelo, el avión encuentra turbulencia, la cual imparte súbitamente al avión una aceleración vertical hacia arriba de 2.60 m/s². Calcule la fuerza sobre cada perno ahora. ¿Por qué se usan solamente tres pernos? Véase la figura 32.

**41.** Unos obreros están cargando un equipo en un elevador de carga en el último piso de un edificio. Sin embargo, sobrecargan el elevador y el cable desgastado se rompe violentamente. La masa del elevador cargado en el momento del accidente es de 1600 kg. Cuando el elevador cae, los rieles de guía ejercen una fuerza retardante constante de 3700 N sobre el elevador. ¿A qué velocidad golpea el elevador el fondo del tiro situado a 72 m hacia abajo?

**42.** Un automóvil de 1200 kg está siendo arrastrado por un plano inclinado a 18° por medio de un cable atado a la



**Figura 32** Problema 40.

parte trasera de un camión-grúa. El cable forma un ángulo de 27° con el plano inclinado. ¿Cuál es la mayor distancia que el automóvil puede ser arrastrado en los primeros 7.5 s después de arrancar desde el reposo si el cable tiene una resistencia a la rotura de 4.6 kN? Desprecie todas las fuerzas resistivas sobre el automóvil. Véase la figura 33.

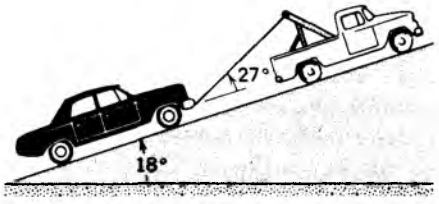



**Figura 33** Problema 42.

**43.** Una caja de 110 kg está siendo empujada a velocidad constante por la rampa de 34° que se muestra en la figura 34. (*a*) ¿Qué fuerza horizontal $F$ se requiere? (*b*) ¿Cuál es la fuerza ejercida por la rampa sobre la caja?

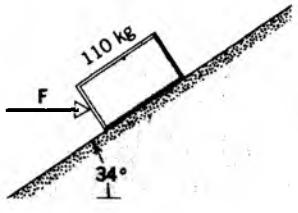



**Figura 34** Problema 43.

**44.** Un reciente avión a chorro de 26 tons de la fuerza aérea de Estados Unidos (Fig. 35) requiere una velocidad en el aire de 280 ft/s para el despegue. Su propio motor desarrolla un empuje de 24,000 lb. El avión va a despegar desde un portaviones con una pista de vuelo de 300 ft. ¿Qué fuerza debe ser ejercida por la catapulta del portaviones? Suponga que la catapulta y el motor del avión ejercen una fuerza constante a lo largo de los 300 ft del despegue.

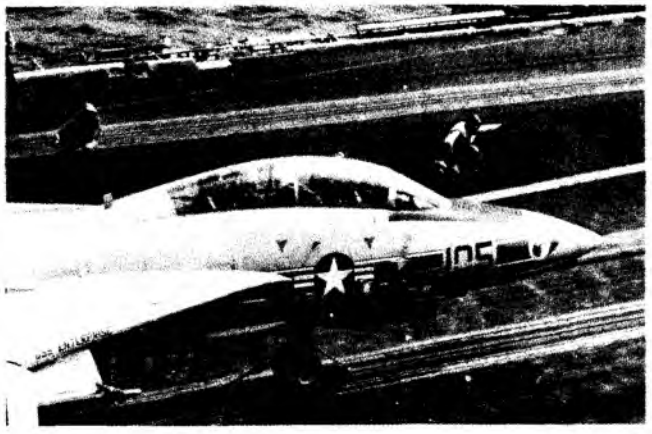


**Figura 35** Problema 44.

**45.** Una nave de descenso se aproxima a la superficie de Calisto, uno de los satélites (lunas) del planeta Júpiter (Fig. 36). Si el motor de la nave proporciona un empuje hacia arriba de 3260 N, la nave desciende a velocidad constante. Calisto no tiene atmósfera. Si el empuje hacia arriba es de 2200 N, la nave acelera hacia abajo a razón de 0.390 m/s$^2$. (*a*) ¿Cuál es el peso de la nave en descenso en la vecindad de la superficie de Calisto? (*b*) ¿Cuál es

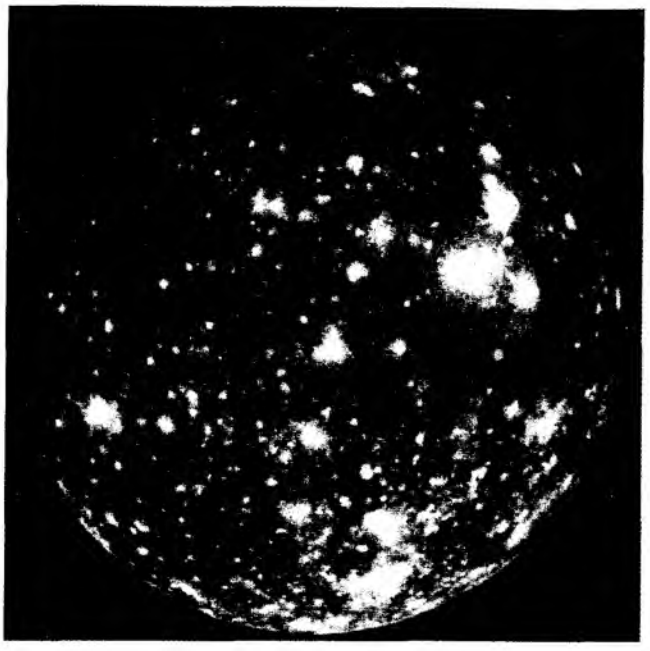


**Figura 36** Problema 45.

la masa de la nave? (*c*) ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad cerca de la superficie de Calisto?

**46.** Años atrás, las barcazas que viajaban por los canales eran arrastradas por caballos como se muestra en la figura 37. Supongamos que el caballo está ejerciendo una fuerza de 7900 N a un ángulo de 18° con la dirección del movimiento de la barcaza, la cual navega en línea recta por el canal. La masa de la barcaza es de 9500 kg y su aceleración es de 0.12 m/s$^2$. Calcule la fuerza ejercida por el agua sobre la barcaza.

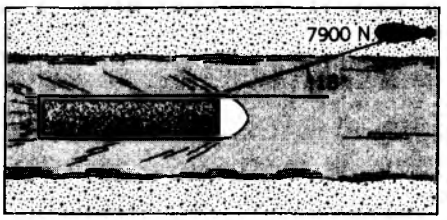



**Figura 37** Problema 46.

**47.** Un cohete y su carga útil tienen una masa total de 51,000 kg. ¿Cuál es el empuje del motor del cohete cuando (*a*) el cohete está "flotando" sobre la plataforma de lanzamiento, justo después del encendido, y (*b*) cuando el cohete está acelerando hacia arriba a razón de 18 m/s$^2$ ?

**48.** Un avión de combate a chorro despega a un ángulo de 27.0° con la horizontal, acelerando a 2.62 m/s$^2$. El peso del avión es de 79,300 N. Halle (*a*) el empuje *T* del motor del avión y (*b*) la fuerza ascensional *L* ejercida por el aire perpendicularmente a las alas; véase la figura 38. Desprecie la resistencia del aire.

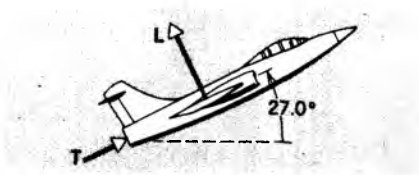



**Figura 38** Problema 48

**49.** Un globo de investigación con una masa total *M* está descendiendo verticalmente con una aceleración *a* hacia abajo (Véase la Fig. 39.) ¿Cuánto lastre debe ser arrojado de la canastilla para dar al globo una aceleración *a hacia arriba*, suponiendo que la fuerza ascensional del aire sobre el globo no cambie?

**50.** Un cohete con masa de 3030 kg se dispara estando en reposo desde el terreno con un ángulo de elevación de 58.0°. El motor ejerce un empuje de 61.2 kN a un ángulo constante de 58.0° con la horizontal durante 48.0 s y luego el motor se detiene. Desprecie la masa del combustible consumido y desprecie la fuerza aerodinámica de resistencia. Calcule (*a*) la altitud del cohete cuando el motor se detiene, y (*b*) la distancia total desde el punto de disparo hasta el impacto.

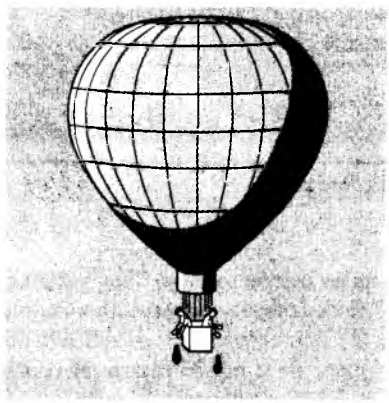


**Figura 39** Problema 49.

**51.** Un bloque, de masa *m*, se desliza hacia abajo en un plano inclinado sin fricción que forma un ángulo $\theta$ con el piso de un elevador. Halle su aceleración con relación al plano en los casos siguientes. (*a*) El elevador desciende a velocidad constante *v*. (*b*) El elevador asciende a velocidad constante *v*. (*c*) El elevador desciende con una aceleración *a*. (*d*) El elevador desciende con una deceleración *a*. (*e*) El cable del elevador se rompe. (*f*) En la parte (*c*) de arriba, cuál es la fuerza ejercida sobre el bloque por el plano inclinado?

***Sección 5-11 Más aplicaciones de las leyes de Newton***

**52.** Refiérase a la figura 18. Sea $m_1$ = 4.30 kg y $m_2$ = 1.80 kg. Halle (*a*) la aceleración de los dos bloques, y (*b*) la tensión en la cuerda.

**53.** Un hombre de 110 kg desciende al suelo desde una altura de 12 m sujetando una cuerda que pasa por una polea sin fricción atada a un saco de arena de 74 kg. (*a*) ¿A qué velocidad alcanza el hombre el suelo? (*b*) ¿Podría haber hecho algo para reducir la velocidad con que alcanza el suelo?

**54.** Un chango de 11 kg está trepando por una cuerda carente de masa que está unida a un tronco de 15 kg y pasa sobre una rama de un árbol (¡sin fricción!). ¿Con qué aceleración mínima deberá trepar el chango por la cuerda de modo que pueda elevar al tronco de 15 kg desde el suelo? Si, después de que el tronco se haya elevado, el chango deja de trepar y se cuelga de la cuerda, ¿cuál será ahora (*b*) la aceleración del chango y (*c*) la tensión en la cuerda?

**55.** Tres bloques están unidos como se muestra en la figura 40 sobre una mesa horizontal carente de fricción y son jalados hacia la derecha con una fuerza $T_3$ = 6.5 N. Si $m_1$ = 1.2 kg, $m_2$ = 2.4 kg, y $m_3$ = 3.1 kg, calcule (*a*) la aceleración del sistema y (*b*) las tensiones $T_1$ y $T_2$. Trace una analogía de los cuerpos que están siendo jalados en tándem, tal como si una locomotora jalara de un tren de carros acoplados.

**56.** Dos bloques están en contacto sobre una mesa carente de fricción. Se aplica una fuerza horizontal a un bloque, como

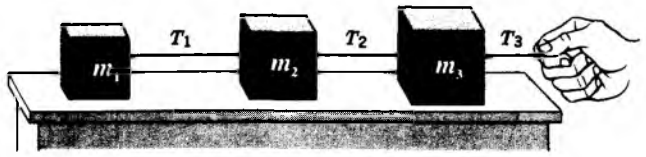



**Figura 40** Problema 55.

se muestra en la figura 41. (*a*) Si $m_1 = 2.3$ kg, $m_2 = 1.2$ kg, y $F = 3.2$ N, halle la fuerza de contacto entre los dos bloques. (*b*) Demuestre que si se aplica la misma fuerza $F$ a $m_2$ en lugar de a $m_1$, la fuerza de contacto entre los bloques es 2.1 N, el cual no es el mismo valor derivado en (*a*). Explique.

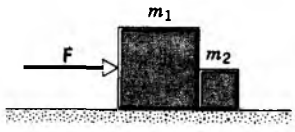



**Figura 41** Problema 56.

**57.** La figura 42 muestra tres cajas con masas $m_1 = 45.2$ kg, $m_2 = 22.8$ kg, y $m_3 = 34.3$ kg sobre una superficie horizontal carente de fricción. (*a*) ¿Qué fuerza horizontal $F$ se necesita para empujar las cajas hacia la derecha, como si fueran una sola unidad, con una aceleración de 1.32 m/s²? (*b*) Halle la fuerza ejercida por $m_2$ sobre $m_3$. (*c*) Y por $m_1$ sobre $m_2$.

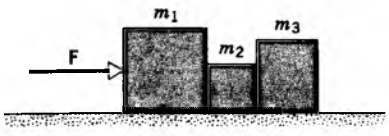



**Figura 42** Problema 57.

**58.** Una cadena que consta de cinco eslabones, cada uno con una masa de 100 g, se levanta verticalmente con una aceleración constante de 2.50 m/s², como se muestra en la figura 43. Halle (*a*) las fuerzas que actúan entre eslabones adyacentes, (*b*) la fuerza $F$ ejercida en el eslabón superior por el agente que eleva la cadena, y (*c*) la fuerza *neta* en cada eslabón.




**Figura 43** Problema 58.

**59.** Un bloque de masa $m_1 = 3.70$ kg está sobre un plano inclinado de ángulo $\theta = 28.0°$, y unido por una cuerda sobre una polea pequeña, sin fricción y sin masa, a un segundo bloque de masa $m_2 = 1.86$ kg que cuelga verticalmente (véase la figura 44), (*a*) ¿cuál es la aceleración de cada bloque? (*b*) Halle la tensión en la cuerda.

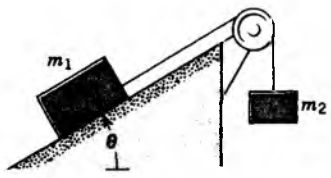



**Figura 44** Problema 59.

**60.** Un paracaidista de 77 kg experimenta una aceleración hacia abajo de 2.5 m/s² poco después de abrirse el paracaídas. La masa del paracaídas es de 5.2 kg. (*a*) Halle la fuerza hacia arriba ejercida en el paracaídas por el aire. (*b*) Calcule la fuerza hacia abajo ejercida por el paracaidista.

**61.** Un elevador consta de una cabina (*A*), el contrapeso (*B*), el mecanismo de maniobra (*C*), y el cable y las poleas que se muestran en la figura 45. La masa de la cabina es de 1000 kg y la masa del contrapeso es de 1400 kg. Desprecie la fricción y las masas del cable y de las poleas. El elevador acelera hacia arriba a razón de 2.30 m/s² y el contrapeso acelera hacia abajo en una cantidad igual. ¿Cuáles son los valores de las tensiones (*a*) $T_1$ y (*b*) $T_2$? (*c*) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre el cable por el mecanismo?

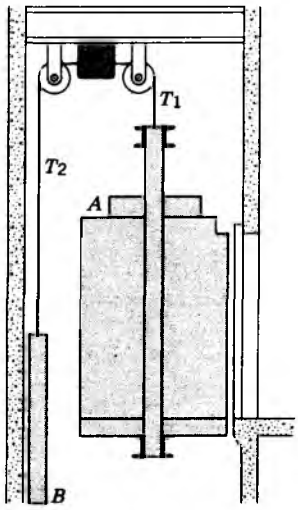



**Figura 45** Problema 61.

**62.** Un helicóptero de 15,000 kg está elevando un vehículo de 4500 kg con una aceleración hacia arriba de 1.4 m/s². Calcule (*a*) la fuerza vertical que el aire ejerce sobre las paletas del helicóptero, y (*b*) la tensión en el cable de soporte superior; véase la figura 46.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECAS
MONTEVIDEO - URUGUAY





**Figura 46** Problema 62.

**63.** Alguien ejerce una fuerza $F$ directamente hacia arriba sobre el eje de la polea que se muestra en la figura 47. Considere que la polea y el cable carecen de masa y que el buje carece de fricción. Dos objetos, $m_1$ de 1.2 kg de masa y $m_2$ de 1.9 kg de masa, están unidos como se muestra a los extremos opuestos del cable, el cual pasa sobre la polea. El objeto $m_2$ está en contacto con el piso. (*a*) ¿cuál es el valor más grande que la fuerza $F$ puede tener de modo que $m_2$ permanezca en reposo sobre el piso? (*b*) ¿Cuál es la tensión en el cable cuando la fuerza $F$ hacia arriba sea de 110 N? (*c*) Con la tensión determinada en la parte (*b*), ¿Cuál es la aceleración de $m_1$?

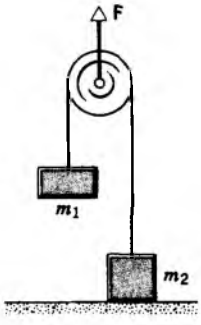



**Figura 47** Problema 63.

**64.** Dos partículas, cada una de masa $m$, están unidas por un cordel delgado de longitud $2L$, como se muestra en la figura 48. Una fuerza uniforme **F** se aplica en el punto medio del cordel ($x = 0$) formando un ángulo recto con la posición inicial del cordel. Demuestre que la aceleración de cada masa en dirección a 90° con **F** está dada por

$$a_x = \frac{F}{2m}\frac{x}{(L^2 - x^2)^{1/2}}$$

donde $x$ es la distancia perpendicular de una de las partículas desde la línea de acción de **F**. Discuta la situación cuando $x = L$.

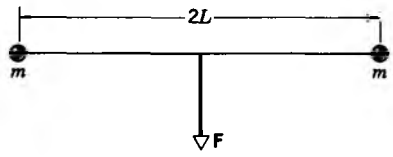



**Figura 48** Problema 64.

**65.** Un bloque de masa $M$ es jalado a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por un cable de masa $m$ como se muestra en la figura 49. Se aplica una fuerza horizontal **P** a un extremo del cable. (*a*) Demuestre que el cable *debe* combarse, aun cuando sólo sea en una cantidad imperceptible. Luego, suponiendo que la comba sea despreciable, halle (*b*) la aceleración del cable y del bloque, (*c*) la fuerza que el cable ejerce sobre el bloque, y (*d*) la tensión del cable en su punto medio.




**Figura 49** Problema 65.

**66.** La figura 50 muestra una sección de un sistema alpino de vagones movidos por la tracción de un cable. La masa máxima permitida de cada vagón con ocupantes es de 2800 kg. Los vagones, que viajan sobre un cable de soporte, son jalados por un segundo cable unido a cada torre. ¿Cuál es la diferencia de tensión entre secciones adyacentes del cable de tracción si los vagones son acelerados hacia arriba con una inclinación de 35° a razón de 0.81 m/s²?

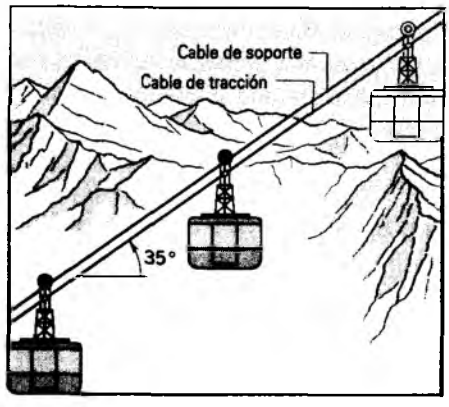



**Figura 50** Problema 66.

**67.** El hombre de la figura 51 pesa 180 lb; la plataforma y la polea sin fricción unida a ella pesan un total de 43 lb.



**Figura 51** Problema 67

Desprecie el peso del cable. ¿Con qué fuerza debe el hombre jalar del cable con objeto de elevarse a sí mismo y a la plataforma a razón de 1.2 $ft/s^2$?

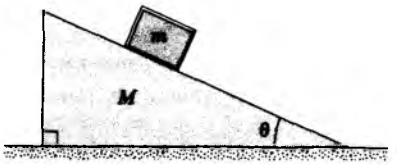



**Figura 52** Problema 68.

**68.** Una cuña en triángulo rectángulo de masa $M$ y ángulo $\theta$, que soporta un pequeño bloque de masa $m$ sobre su lado, descansa sobre una mesa horizontal, como se muestra en la figura 52. (*a*) ¿Qué aceleración horizontal $a$ deberá tener $M$ con relación a la mesa para mantener a $m$ estacionaria con respecto a la cuña, suponiendo contactos carentes de fricción? (*b*) ¿Qué fuerza horizontal **F** deberá ser aplicada al sistema para obtener este resultado, suponiendo que la cubierta de la mesa no tenga fricción? (*c*) Suponga que no se imprime fuerza alguna sobre $M$ y que ambas superficies carecen de fricción. Describa el movimiento resultante.

# CAPÍTULO 6

# DINÁMICA DE LAS PARTÍCULAS

*En el capítulo 5 estudiamos las leyes de Newton y dimos algunos ejemplos de sus aplicaciones. Estos ejemplos fueron simplificados en extremo, en forma deliberada con el fin de ilustrar la aplicación de las leyes. En el proceso de simplificación, tuvimos que pasar por alto algunos razonamientos físicos. Por ejemplo, un problema esencial en la mecánica, que concierne al diseño de sistemas mecánicos, lo constituye el tema de la fricción. Ninguno de los ejemplos considerados en el capítulo 5 dejó paso a la intervención de la fricción.*

*En este capítulo continuaremos con más aplicaciones de las leyes de Newton. Estudiaremos ahora las fuerzas de fricción y sus consecuencias. Discutiremos las fuerzas no constantes mostrando cómo resolver las ecuaciones del movimiento para tales fuerzas. Finalmente, demostraremos cómo el uso de un marco de referencia no inercial produce efectos que pueden ser analizados con la introducción de fuerzas inerciales o seudofuerzas que, en contraste con las fuerzas que discutimos en el capítulo 5, no son causadas por objetos específicos del entorno.*

## 6-1 LEYES DE LA FUERZA

Antes de regresar a las aplicaciones de las leyes de Newton, debemos tratar brevemente la naturaleza de las fuerzas en sí mismas. Hemos empleado las ecuaciones de movimiento para analizar y calcular los *efectos* de las fuerzas, pero éstas no nos dicen nada acerca de las *causas* de las fuerzas. Para entender qué produce una fuerza debemos tener una comprensión microscópica detallada de las interacciones mutuas de los objetos con su entorno. Al nivel más fundamental, la naturaleza parece actuar a través de un pequeño número de fuerzas fundamentales. Los físicos han identificado tradicionalmente cuatro fuerzas básicas: (1) *la fuerza de gravitación*, que se origina con la presencia de la materia (o, más en línea con la teoría general de la relatividad, la materia y la energía); (2) *la fuerza electromagnética*, que incluye las interacciones eléctricas y magnéticas básicas, y es responsable del enlace de los átomos y de la estructura de los sólidos; (3) *la fuerza nuclear débil*, que genera determinados procesos de desintegración radiactiva y ciertas reacciones entre las partículas más fundamentales, y (4) *la fuerza fuerte*, que opera entre las partículas fundamentales y es responsable de la estabilidad del núcleo.

En la escala más microscópica, por ejemplo, dos protones que apenas se toquen en sus superficies, estas fuerzas tendrían las intensidades relativas siguientes: fuerte (intensidad relativa = 1); electromagnética ($10^{-2}$); débil ($10^{-2}$); gravitatoria ($10^{-38}$). En la escala fundamental, la gravedad es sumamente débil y tiene efectos despreciables. Podemos tener cierta apreciación de la debilidad de la gravedad por algunos experimentos comunes, por ejemplo, levantar unos cuantos trozos de papel con un peine cargado electrostáticamente, o levantar unos cuantos clavos o clips de papelería con un imán. ¡La fuerza magnética de un imán pequeño es suficiente para superar la fuerza de gravitación ejercida por toda la Tierra sobre estos objetos!

La búsqueda de una simplificación mayor ha conducido a los físicos a tratar de reducir el número de fuerzas a menos, incluso, de cuatro. En 1967 se propuso una teoría según la cual las fuerzas débiles y las electromagnéticas podrían ser vistas como partes de una sola fuerza, llamada *fuerza electrodébil*. La combinación o *unificación* de estas dos fuerzas es similar a la unificación en el siglo XIX de la fuerza eléctrica y la fuerza magnética aisladas en una sola fuerza electromagnética. Han sido propuestas recientemente otras teorías, llamadas *teorías de la gran unificación*, que combinan a la fuerza fuerte y a la electrodébil

en un solo sistema, e incluso existen "teorías de todo" que intentan incluir también a la gravedad.

Una predicción de estas teorías es que el protón (la partícula nuclear cargada positivamente) no es estable sino que se desintegra en un periodo prolongado, de quizá $10^{33}$ años (realmente un tiempo muy largo, en comparación con la edad del Universo, $10^{10}$ años). Una manera de probar esta teoría es observar un conjunto de $10^{33}$ protones (equivalente a un cubo de agua de 50 pies de lado) durante un año para ver si uno de los protones se desintegra. Se necesitan de experimentos iguales a los de buscar una aguja en un pajar para probar estas exóticas teorías. En el capítulo 56 de la versión ampliada de este texto consideraremos otras especulaciones de este tipo.

Por fortuna, nuestro análisis de los sistemas mecánicos no necesita invocar tales teorías. De hecho, en todo lo que estudiamos sobre sistemas mecánicos ordinarios intervienen sólo dos fuerzas: la gravedad y el electromagnetismo. La fuerza gravitatoria es aparente en la atracción de los objetos por la Tierra, la cual les da su peso. La atracción gravitatoria mucho más débil de un objeto de laboratorio sobre otro es casi siempre despreciable.

Todas las demás fuerzas que consideramos de manera normal son esencialmente de origen electromagnético: las fuerzas de contacto, tal como la fuerza normal ejercida cuando un objeto empuja a otro, y la fuerza de fricción producida cuando una superficie frota contra otra; las fuerzas viscosas, tales como la resistencia del aire; las fuerzas de tensión, como la de un cable o una cuerda estirados; las fuerzas elásticas, como las de un resorte, y muchas otras. Microscópicamente, estas fuerzas se originan de las fuerzas entre los átomos. Por fortuna, cuando tratamos con sistemas mecánicos ordinarios podemos no tomar en cuenta la base microscópica y reemplazar la complicada subestructura con una sola fuerza efectiva de magnitud y dirección específicas.

## 6-2 FUERZAS DE FRICCIÓN*

Si lanzamos un bloque de masa $m$ a una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ a lo largo de una mesa horizontal larga, al final llegará al reposo. Esto significa que, mientras se está moviendo, experimenta una aceleración promedio $\bar{\mathbf{a}}$ que apunta en dirección opuesta a su movimiento. Si (en un marco inercial) vemos que un cuerpo es acelerado, siempre asociamos a una fuerza, definida por la segunda ley de Newton, con el movimiento. En este caso afirmamos que la mesa ejerce una fuerza de *fricción* sobre el bloque, cuyo valor promedio es $m\bar{\mathbf{a}}$. Generalmente aceptamos que la fricción significa una interacción de contacto entre sólidos. Los efectos de la fricción en los líquidos y los gases se describen en otros términos (véase la sección 6-7).

En realidad, cuando la superficie de un cuerpo se desliza sobre la de otro, los dos cuerpos ejercen una fuerza de fricción entre ellos. La fuerza de fricción de cada cuerpo es de dirección opuesta a su movimiento relativo al otro cuerpo. Las fuerzas de fricción se oponen automáticamente a este movimiento relativo y nunca contribuyen a él. Aun cuando no exista un movimiento relativo, pueden existir fuerzas de fricción entre superficies.

Aunque hasta ahora no hemos tenido en cuenta estos efectos, la fricción es muy importante en nuestras vidas cotidianas. Si se la dejara actuar sola, todas las flechas (ejes) dejarían de girar. En un automóvil se usa alrededor del 20% de la potencia del motor para contrarrestar las fuerzas de fricción. La fricción causa el desgaste y agarre de partes en movimiento, y se lleva a cabo un gran esfuerzo de ingeniería para reducirlas. Por otra parte, sin fricción no podríamos caminar; no podríamos sujetar un lápiz y si pudiésemos hacerlo, no podríamos escribir; el transporte sobre ruedas, tal como lo conocemos, no sería posible.

Queremos conocer cómo expresar las fuerzas de fricción en función de las propiedades del cuerpo y de su entorno; esto es, queremos conocer la ley de la fuerza para las fuerzas de fricción. En lo que sigue, consideraremos el deslizamiento (no el rodamiento) de una superficie seca (no lubricada) sobre otra. Como veremos más adelante, la fricción, vista a nivel microscópico, es un fenómeno muy complicado. Las leyes de la fuerza para una fricción seca, deslizante, son de carácter empírico y aproximadas en sus predicciones. No tienen la sencillez elegante y la precisión que encontramos en la ley de la fuerza de la gravitación (capítulo 16) o de la fuerza electrostática (capítulo 27). Sin embargo, es notable, considerando la enorme diversidad de superficies que uno encuentra, que muchos aspectos del comportamiento de la fricción puedan ser entendidos cualitativamente sobre la base de unos cuantos mecanismos simples.

Consideremos un bloque en reposo sobre una mesa horizontal, como en la figura 1*a*. Unámosle un resorte para medir la fuerza horizontal **F** requerida para poner al bloque en movimiento. Encontramos que el bloque no se mueve todavía cuando aplicamos una fuerza pequeña (Fig. 1*b*). Decimos que la fuerza que aplicamos está equilibrada por una fuerza de fricción **f** opuesta, ejercida sobre el bloque por la mesa, que actúa a lo largo de la superficie de contacto. Al aumentar la fuerza aplicada (Fig. 1*c*, *d*), hallamos alguna fuerza definida mediante la cual el bloque se "desprende" de la superficie y comienza a acelerar (Fig. 1*e*). Al reducir la fuerza una vez que se ha iniciado el movimiento, encontramos que es posible mantener al bloque en movimiento uniforme sin acelera-

* Para una buena referencia general sobre fricción, véase el artículo sobre este tema en la *Encyclopaedia Britannica*, 14a. edición.

ción (Fig. 1*f*). La figura 1*g* muestra los resultados de un experimento para medir la fuerza de fricción. Se aplica una fuerza **F** creciente en, aproximadamente, $t = 2$ s, después de lo cual la fuerza de fricción aumenta con la fuerza aplicada y el objeto permanece en reposo. En $t = 4$ s el objeto comienza súbitamente a moverse y la fuerza de fricción se vuelve constante, independientemente de la fuerza aplicada.

Las fuerzas de fricción que actúan entre superficies en reposo una respecto a la otra se llaman fuerzas de *fricción estática*. La fuerza máxima de fricción estática (correspondiente al pico en $t = 4$ s en la Fig. 1*g*) será la misma que la fuerza aplicada más pequeña necesaria para iniciar el movimiento. Una vez que se ha iniciado el movimiento, las fuerzas de fricción que actúan entre las superficies usualmente disminuyen de manera que sólo es necesaria una fuerza más pequeña para mantener un movimiento uniforme (correspondiente a la fuerza casi constante en $t > 4$ s en la Fig. 1*g*). Las fuerzas que actúan entre superficies en movimiento relativo se llaman fuerzas de *fricción cinética*.

La fuerza máxima de fricción estática entre cualquier par de superficies no lubricadas responde a estas dos leyes empíricas: (1) Es aproximadamente independiente del área de contacto dentro de límites amplios, y (2) es proporcional a la fuerza normal.* La fuerza normal se debe a las propiedades elásticas de los cuerpos en contacto (véase el capítulo 14). Estos cuerpos nunca son enteramente rígidos, y cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo que no puede moverse en dirección de la fuerza, el cuerpo empuja en contra para evitar ser estirado o deformado. En un bloque que está en reposo sobre una mesa horizontal o se desliza sobre ella, la fuerza normal es igual en magnitud al peso del bloque. Ya que el bloque no tiene aceleración vertical, la mesa debe ejercer una fuerza sobre el bloque dirigida hacia arriba, que es igual en magnitud al jalón hacia abajo de la Tierra sobre el bloque, esto es, igual al peso del bloque.

La razón entre la magnitud de la fuerza *máxima* de fricción estática y la magnitud de la fuerza normal se llama *coeficiente de fricción estática* de las superficies implicadas. Si $f_s$ representa la magnitud de la fuerza de fricción estática, podemos escribir que

$$f_s \leq \mu_s N, \qquad (1)$$

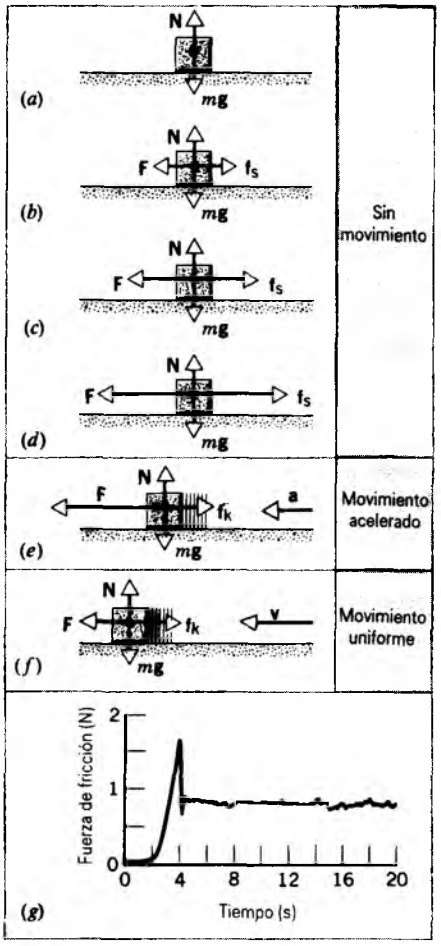



**Figura 1** (*a* – *d*) Una fuerza externa **F**, aplicada a un bloque en reposo, es contrarrestada por una fuerza de fricción **f** igual y opuesta. Al aumentar **F**, también aumenta **f**, hasta que **f** llega a cierto valor máximo. (*e*) El bloque se "desprende" entonces, acelerándose hacia la izquierda. (*f*) Si el bloque ha de moverse a velocidad constante, la fuerza aplicada **F** debe reducirse respecto al valor máximo que tenía justamente antes de que el bloque comenzara a moverse. (*g*) Resultados experimentales; aquí la fuerza aplicada **F** se aumenta desde el inicio de cero, aproximadamente en $t = 2$ s, y el movimiento comienza en forma súbita, aproximadamente en $t = 4$ s. Para detalles del experimento, véase "Undergraduate Computer-Interfacing Projects", por Joseph Priest y John Snyder, *The Physics Teacher*, Mayo 1987, pág. 303.

donde $\mu_s$ es el coeficiente de fricción estática y $N$ es la magnitud de la fuerza normal. El signo de igualdad se tiene sólo cuando $f_s$ alcance su valor máximo.

La fuerza de fricción cinética $f_k$ entre superficies secas no lubricadas, sigue las mismas leyes que las dos de fricción estática. (1) Es aproximadamente independiente del área de contacto dentro de límites amplios, y (2) es proporcional a la fuerza normal. La fuerza de fricción cinética es también razonablemente independiente de la velocidad relativa con la que las superficies se mueven entre sí.

* Las dos leyes de la fricción fueron descubiertas experimentalmente por Leonardo da Vinci (1452-1519). El enunciado de las dos leyes de Leonardo fue notable, teniendo en cuenta que llegó a su descubrimiento dos siglos antes de que Newton desarrollara los conceptos de fuerza. Las expresiones matemáticas de las leyes de la fricción y el concepto del coeficiente de fricción fueron desarrollados por Charles Augustin Coulomb (1736-1806), que es mejor conocido por sus estudios de electrostática (véase el capítulo 27).

La relación entre la magnitud de la fuerza de fricción cinética y la magnitud de la fuerza normal se llama *coeficiente de fricción cinética*. Si $f_k$ representa la magnitud de la fuerza de fricción cinética, entonces

$$f_k = \mu_k N, \tag{2}$$

donde $\mu_k$ es el coeficiente de fricción cinética.

Tanto $\mu_s$ como $\mu_k$ son constantes sin dimensión, siendo cada una la razón de (las magnitudes de) dos fuerzas. Por lo general, para determinado par de superficies $\mu_s > \mu_k$. Los valores reales de $\mu_s$ y de $\mu_k$ dependen de la naturaleza de las dos superficies en contacto. En la mayoría de los casos podemos considerarlas como constantes (para un par dado de superficies) dentro de la gama de fuerzas y velocidades que encontramos comúnmente. Tanto $\mu_s$ como $\mu_k$ pueden exceder la unidad, aunque por lo general son menores de 1. La tabla 1 muestra algunos valores representativos de $\mu_s$ y de $\mu_k$.

Nótese que las ecuaciones 1 y 2 son relaciones entre las *magnitudes solamente* de las fuerzas normal y de fricción. Estas fuerzas están siempre dirigidas perpendicularmente entre sí.

### La base microscópica de la fricción *(Opcional)*

En la escala atómica aun la superficie más finamente pulida está lejos de ser plana. La figura 2, por ejemplo, muestra un perfil real, muy aumentado, de una superficie de acero que podría ser considerada como muy pulida. Podríamos creer que cuando dos cuerpos están en contacto, el área microscópica de contacto real es mucho menor que el área verdadera de la superficie; en un caso particular estas áreas estarían fácilmente en una razón de $1:10^4$.

El área (microscópica) de contacto real es proporcional a la fuerza normal, porque los puntos de contacto se deforman plásticamente bajo los grandes esfuerzos que se desarrollan en ellos. Muchos puntos de contacto realmente resultan "soldados en frío". Este fenómeno, llamado *adhesión superficial*, ocurre a causa de que los puntos de contacto de las moléculas en lados opuestos de la superficie están tan próximos entre sí que ejercen fuerzas intermoleculares fuertes entre ellas.

**TABLA 1** COEFICIENTES DE FRICCIÓN†

| *Superficies* | $\mu_s$ | $\mu_k$ |
|---|---|---|
| Madera contra madera | 0.25-0.5 | 0.2 |
| Vidrio contra vidrio | 0.9-1.0 | 0.4 |
| Acero contra acero, superficies limpias | 0.6 | 0.6 |
| Acero contra acero, superficies lubricadas | 0.09 | 0.05 |
| Hule contra concreto seco | 1.0 | 0.8 |
| Madera encerada de un esquí contra nieve seca | 0.04 | 0.04 |
| Teflón contra Teflón | 0.04 | 0.04 |

† Los valores son aproximados y se dan sólo como estimaciones. Los coeficientes de fricción reales para cualquier par de superficies dependen de condiciones tales como la limpieza de las superficies, la temperatura, y la humedad.



**Figura 2** Una sección aumentada de una superficie de acero muy pulida. La escala vertical de las irregularidades de la superficie es de varios miles de diámetros atómicos. La sección ha sido cortada a un ángulo tal que la escala vertical resulta exagerada con respecto a la escala horizontal en un factor de 10.

Cuando un cuerpo (digamos, un metal) es arrastrado por encima de otro, la resistencia por fricción se asocia con la rotura de estos miles de pequeñísimas soldaduras, las cuales se vuelven a formar continuamente según va habiendo ocasión de nuevos contactos (véase la Fig. 3). Los experimentos de indicadores radiactivos han demostrado que, en el proceso de rotura, pequeños fragmentos de una superficie metálica pueden ser cortados y adherirse a la otra superficie. Si la velocidad relativa de las dos superficies es suficientemente grande, puede haber fusión local en ciertas áreas de contacto aun cuando la superficie, como un total, pueda sentirse sólo moderadamente tibia. El fenómeno de "pegarse y resbalar" es el causante de los ruidos que hacen las superficies secas cuando se deslizan una contra la otra como, por ejemplo, el chirrido de la tiza contra el pizarrón.*

El coeficiente de fricción depende de muchas variables, tales como la naturaleza de los materiales, el acabado de la superficie, las películas sobre la superficie, la temperatura y la cantidad de contaminación. Por ejemplo, si dos superficies de metal cuidadosamente limpias se sitúan en una cámara al alto vacío de modo que no se formen películas de óxido en ellas, el coeficiente de fricción se eleva a valores enormes y las superficies realmente se "sueldan" entre sí con firmeza. La admisión de una pequeña cantidad de aire a la cámara de modo que se puedan formar películas de óxido sobre las superficies opuestas reduce el coeficiente de fricción a su valor "normal".

La fuerza de fricción que se opone a un cuerpo que *rueda* sobre otro es mucho menor que en el movimiento deslizante; esto le da la ventaja a la rueda, que gira, sobre el trineo, que se desliza. Esta fricción reducida se debe en gran parte al hecho de que, al rodar, las soldaduras microscópicas de contacto se descascarillan en lugar de cortarse como en el caso de la fricción deslizante. Esto reduce la fuerza de fricción en un factor grande.

La resistencia al rozamiento en la fricción seca, delizante, puede reducirse considerablemente por medio de la lubricación. En una gruta en Egipto, un mural que data de 1900 A.C. muestra una gran estatua de piedra que es arrastrada sobre un vehículo a modo de trineo mientras el hombre enfrente del vehículo vierte aceite lubricante a su paso. Una técnica aún más eficaz consiste en introducir una capa de gas entre las superficies que se deslizan; dos ejemplos de ello son la mesa de aire del laboratorio y la chumacera soportada por gas. La fricción puede ser reducida aún más suspendiendo un objeto por medio de fuerzas magnéticas. Los trenes magnéticamente levitados que actualmente se hallan en desarrollo, tienen el potencial de viajar a alta velocidad, casi sin fricción. ■

* Véase, por ejemplo, "Stick and Slip", por Ernest Rabinowicz en *Scientific American*, Mayo 1956, pág. 109.

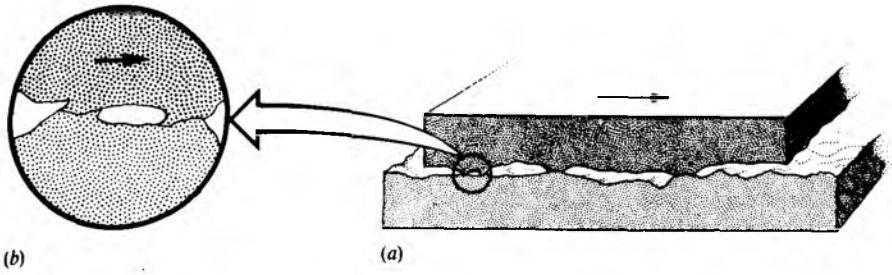



**Figura 3** El mecanismo de la fricción deslizante. (*a*) En esta vista aumentada, la superficie superior se desliza hacia la derecha sobre la superficie inferior. (*b*) Un detalle, mostrando dos puntos en donde ha ocurrido una soldadura en frío. La fuerza es necesaria para romper estas soldaduras y mantener el movimiento.

**Problema muestra 1** Un bloque está en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo $\theta$ con la horizontal, como en la figura 4*a*. Cuando el ángulo de inclinación se eleva, se halla que el deslizamiento apenas comienza a un ángulo de inclinación $\theta_s = 15°$. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano?

**Solución** En la figura 4*b* se muestran las fuerzas que actúan sobre el bloque, considerado como una partícula. El peso del bloque es $m\mathbf{g}$, la fuerza normal ejercida sobre el bloque por la superficie inclinada es $N$, y la fuerza de fricción ejercida por la superficie inclinada sobre el bloque es $\mathbf{f}_s$. Nótese que la fuerza resultante ejercida por la superficie inclinada sobre el bloque, $\mathbf{N} + \mathbf{f}_s$, ya no es perpendicular a la superficie de contacto, como lo sería en superficies carentes de fricción ($\mathbf{f}_s = 0$). El bloque está en reposo, de modo que la segunda ley de Newton da $\Sigma\mathbf{F} = 0$. Resolviendo las fuerzas en sus componentes $x$ y $y$ (a lo largo del plano y normal al plano, respectivamente), obtenemos que

$$\text{componente } x: \quad \sum F_x = f_s - mg \operatorname{sen} \theta = 0 \text{ ó } f_s = mg \operatorname{sen} \theta,$$

$$\text{componente } y: \quad \sum F_y = N - mg \cos \theta = 0 \text{ ó } N = mg \cos \theta.$$

En el ángulo $\theta_s$, cuando el deslizamiento apenas comienza, $f_s$ tiene su valor máximo y es igual a $\mu_s N$. Evaluando estas expresiones para $\theta_s$ y dividiendo una entre otra, obtenemos

$$\frac{f_s}{N} = \frac{mg \operatorname{sen} \theta_s}{mg \cos \theta_s} = \tan \theta_s$$

o sea

$$\mu_s = \tan \theta_s = \tan 15° = 0.27.$$

De aquí que la medición del ángulo de inclinación cuando el deslizamiento apenas comienza proporciona un método experimental sencillo para determinar el coeficiente de fricción estática entre dos superficies. Nótese que esta determinación es independiente del peso del objeto.

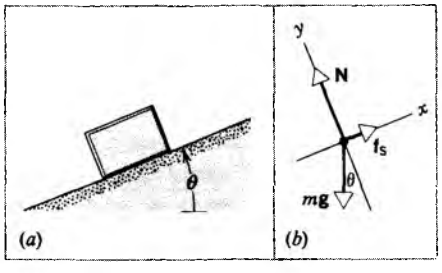



**Figura 4** Problema muestra 1. (*a*) Un bloque en reposo sobre un plano inclinado rugoso. (*b*) Un diagrama de cuerpo libre del bloque.

Podemos emplear argumentos similares para demostrar que el ángulo de inclinación $\theta_k$ requerido para mantener una *velocidad constante* del bloque al deslizarse por el plano, una vez que ha arrancado a causa de un golpecillo suave, está dado por

$$\mu_k = \tan \theta_k,$$

donde $\theta_k < \theta_s$. Con la ayuda de una regla para medir la tangente del ángulo de inclinación, podemos ahora determinar $\mu_s$ y $\mu_k$ para una moneda que se deslice a lo largo del libro de texto.

**Problema muestra 2** Consideremos un automóvil que se mueve a lo largo de una carretera recta horizontal a una velocidad $v_0$. Si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la carretera es $\mu_s$, ¿cuál es la distancia más corta en que puede ser detenido el automóvil?

**Solución** En la figura 5 se muestran las fuerzas que actúan sobre el automóvil. Se supone que el automóvil se está moviendo en dirección $x$ positiva. Si suponemos que $f_s$ es una fuerza constante, tendremos un movimiento de deceleración uniforme.

De la relación

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

con la posición inicial elegida, de modo que $x_0 = 0$ y a una velocidad final de $v = 0$, obtenemos

$$x = -\frac{v_0^2}{2a},$$

donde $x$ es la distancia de alto o parada en la que la velocidad cambia desde $v_0$ hasta 0. A causa de que $a$ es negativa, $x$ es positiva, tal como lo esperábamos.

Para determinar $a$, aplicamos la segunda ley de Newton con sus componentes asignadas de acuerdo a la figura 5*b*:

$$\text{componente } x: \quad \sum F_x = -f_s = ma \quad \text{o} \quad a = -f_s/m,$$

$$\text{componente } y: \quad \sum F_y = N - mg = 0 \quad \text{o} \quad N = mg,$$

de modo que

$$f_s = \mu_s N = \mu_s mg.$$

Sustituyendo esta cantidad en la expresión para $a$, hallamos que

$$a = -\frac{f_s}{m} = -\mu_s g.$$

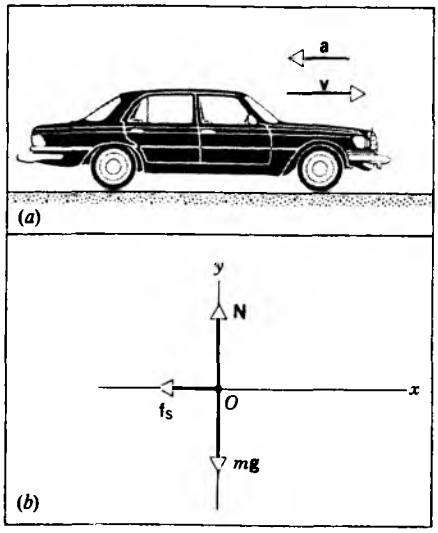



**Figura 5** Problema muestra 2. (*a*) Un automóvil decelerando. (*b*) Un diagrama de cuerpo libre del automóvil decelerando, considerado éste como una partícula. Por conveniencia, hacemos que todas las fuerzas actúen en un punto común. En realidad, las tres fuerzas mostradas son sumas de las fuerzas individuales que actúan sobre cada una de las cuatro llantas.

Entonces la distancia de parada es

$$x = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu_s g}.$$

Cuanto mayor sea la velocidad inicial, mayor será la distancia requerida para llevar al automóvil al reposo; de hecho, esta distancia varía con el cuadrado de la velocidad inicial. También, cuanto más grande sea el coeficiente de fricción estática entre las superficies, menor será la distancia requerida para llegar a detener el automóvil.

En este problema hemos empleado el coeficiente de fricción estática, en lugar del coeficiente de fricción cinética, porque suponemos que no existe deslizamiento entre las llantas y la carretera. Además, hemos supuesto que opera la fuerza de fricción estática máxima ($f_s = \mu_s N$) porque el problema busca la distancia más corta para detener al automóvil. Con una fuerza de fricción estática más pequeña la distancia para que se detenga sería obviamente mayor. La técnica de frenado correcta requerida aquí es mantener al automóvil justo a punto del patinaje. (Los automóviles equipados con sistemas de frenado anti-trabadura mantienen esta condición automáticamente.) Si la superficie es lisa y los frenos se accionan con fuerza, el automóvil puede patinar. En este caso $\mu_k$ reemplaza a $\mu_s$, y la distancia requerida para detenerse aumentaría porque $\mu_k$ es más pequeña que $\mu_s$.

Como un ejemplo específico, si $v_0$ = 60 mi/h = 27 m/s, y $\mu_s$ = 0.60 (un valor típico), obtenemos que

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} = \frac{(27\ \text{m/s})^2}{2(0.60)\,(9.8\ \text{m/s}^2)} = 62\ \text{m}.$$

Nótese que este resultado es independiente de la masa del automóvil. En los automóviles con la propulsión en las ruedas traseras y con el motor en el frente, es una práctica común "cargar el baúl" con objeto de aumentar la seguridad cuando se conduce sobre carreteras heladas. ¿Cómo puede ser esta práctica consistente con nuestro resultado de que la distancia de parada es independiente de la masa del automóvil? (*Sugerencia*: véase el problema 2.)

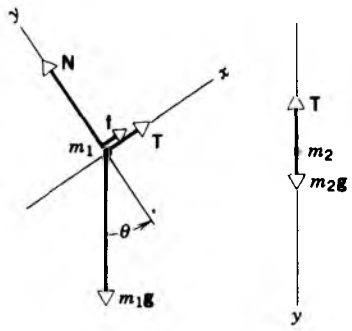



**Figura 6** Problema muestra 3. Los diagramas de cuerpo libre de la figura 20 del capítulo 5, en el caso de fricción a lo largo del plano.

**Problema muestra 3** Repita el problema muestra 10 del capítulo 5, teniendo en cuenta una fuerza de fricción entre el bloque 1 y el plano. Use los valores $\mu_s = 0.24$ y $\mu_k = 0.15$.

**Solución** Si suponemos, como lo aprendimos en la solución al problema muestra 10 del capítulo 5, que el bloque 1 se mueve hacia abajo por el plano, entonces la fuerza de fricción actúa sobre el plano. En la figura 6 se muestra el diagrama de cuerpo libre de $m_1$. Las ecuaciones de las componentes de $m_1$ según la segunda ley de Newton son ahora las siguientes:

componente $x$: $\sum F_x = T + f - m_1 g \operatorname{sen}\theta = m_1 a_{1x} = -m_1 a,$

componente $y$: $\sum F_y = N - m_1 g \cos\theta = m_1 a_{1y} = 0.$

Aquí hemos puesto explícitamente que $a_1$ esté en la dirección $x$ negativa (esto es, $a_{1x} = -a$). Hacemos un cambio similar en la ecuación para $m_2$:

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_{2y} = -m_2 a,$$

donde usamos que $a_{2y} = -a$, porque esperamos que el bloque 2 se mueva en la dirección $y$ negativa.

Poniendo $f = \mu_k N = \mu_k m_1 g \cos\theta$, tenemos, de la ecuación de la componente $x$ de $m_1$,

$$T + \mu_k m_1 g \cos\theta - m_1 g \operatorname{sen}\theta = -m_1 a.$$

Resolviendo estas dos últimas ecuaciones simultáneamente para las dos incógnitas $a$ y $T$, obtenemos

$$a = -g\frac{m_2 - m_1(\operatorname{sen}\theta - \mu_k \cos\theta)}{m_1 + m_2}, \tag{3}$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(1 + \operatorname{sen}\theta - \mu_k \cos\theta). \tag{4}$$

Nótese que, en el límite de $\mu_k \to 0$, las ecuaciones 3 y 4 se reducen a las eccuaciones 9 y 10 del problema muestra 10 en el

capítulo 5 (excepto por el signo de $a$, el cual hemos querido que esté en dirección opuesta en la solución de este problema).

Hallemos ahora los valores numéricos de $a$ y de $T$:

$$a = (-9.80 \text{ m/s}^2)\frac{2.6 \text{ kg} - 9.5 \text{ kg}(\text{ sen } 34° - 0.15 \cos 34°)}{2.6 \text{ kg} + 9.5 \text{ kg}}$$

$$= 1.2 \text{ m/s}^2,$$

$$T = \frac{(9.5 \text{ kg})(2.6 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{9.5 \text{ kg} + 2.6 \text{ kg}}(1 + \text{sen } 34° - 0.15 \cos 34°)$$

$$= 29 \text{ N}.$$

El valor positivo de $a$ es consistente con la manera en que establecimos nuestras ecuaciones; el bloque se mueve hacia abajo por el plano, como lo hizo en el problema muestra 10 del capítulo 5, pero con menos aceleración que lo hizo en el caso sin fricción (2.2 m/s$^2$).

La tensión en la cuerda es menor de lo que era en el caso sin fricción (31 N). El bloque 1 acelera menos rápidamente hacia abajo por el plano cuando existe fricción, de modo que no jala tan fuertemente de la cuerda amarrada al bloque 2.

Una pregunta adicional que merece ser contestada es si el sistema llegará a moverse. Esto es, ¿existe suficiente fuerza hacia abajo del plano para exceder la fricción estática e iniciar el movimiento? Cuando el sistema está inicialmente en reposo, la tensión en la cuerda es igual al peso de $m$, o sea (2.6 kg) (9.8 m/s$^2$) = 26 N. La fricción estática máxima, que se opone a la tendencia a moverse hacia abajo por el plano, es de $\mu_s N = \mu_s m_1 g \cos \theta$ = 19 N. La componente del peso de $m_1$ que actúa hacia abajo por el plano es $m_1 g$ sen $\theta$ = 52 N. Así, existe peso más que suficiente actuando hacia abajo por el plano (52 N) para superar el total de la tensión y de la fuerza estática de fricción (26 N + 19 N = 45 N), y el sistema realmente se moverá. Usted debería poder demostrar que si el coeficiente estático de la fricción es mayor de 0.34 entonces no existirá movimiento.

## 6-3 LA DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En la sección 4-4 hicimos notar que si un cuerpo se mueve a velocidad uniforme $v$ en un círculo o en un arco circular de radio $r$, experimenta una aceleración centrípeta **a** cuya magnitud es $v^2/r$. La dirección de **a** es siempre hacia el centro del círculo. Así pues, **a** es un vector variable porque, aun cuando su magnitud permanezca constante, su dirección cambia continuamente según progresa el movimiento. Quizá el lector desee revisar la figura 11 del capítulo 4, la cual muestra la relación vectorial entre **v** y **a** en el movimiento circular a velocidad constante.

Cada cuerpo acelerado debe tener una fuerza neta que actúa sobre él, de acuerdo con la segunda ley de Newton ($\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Entonces (suponiendo que estamos en un marco inercial), si vemos un cuerpo que experimente un movimiento circular uniforme, podemos estar seguros de que la magnitud de la fuerza neta $\Sigma \mathbf{F}$ que actúa sobre el cuerpo debe estar dada por

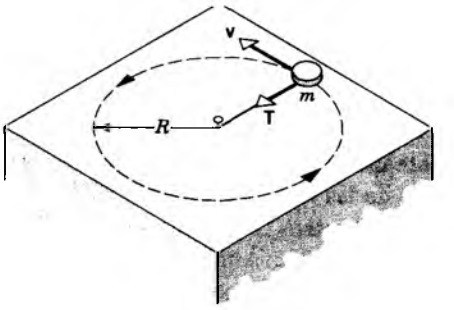



**Figura 7** Un disco de masa $m$ se mueve con velocidad constante en una trayectoria circular sobre una superficie horizontal sin fricción. La única fuerza horizontal que actúa sobre el disco es la tensión **T** con la que la cuerda jala al disco; **T** proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular. No se muestran las fuerzas verticales (**N** y $m\mathbf{g}$).

$$|\Sigma \mathbf{F}| = ma = \frac{mv^2}{r}. \tag{5}$$

El cuerpo *no está* en equilibrio porque la fuerza neta *no es* cero. La dirección de la fuerza neta $\Sigma \mathbf{F}$ en cualquier instante debe ser la dirección de **a** en ese instante, es decir, radialmente hacia dentro. Esta fuerza es proporcionada por un agente (o agentes) externo en el ambiente de la masa $m$ en aceleración.

Si el cuerpo en movimiento circular uniforme es un disco que se gira amarrado al extremo de una cuerda sobre una mesa horizontal sin fricción como en la figura 7, la fuerza neta sobre el disco es proporcionada por la tensión **T** en el cordel. Acelera al disco cambiando constantemente la dirección de su velocidad de modo que el disco se mueve en círculo. La dirección de **T** es siempre hacia el alfiler del centro, y su magnitud debe ser igual a $mv^2/R$.

Si la cuerda fuese cortada donde se une al disco, no existiría ninguna fuerza neta ejercida sobre éste. El disco entonces se movería a velocidad constante en línea recta a lo largo de la dirección de la tangente al círculo en el punto en el que se cortó la cuerda. El disco *no volará* radialmente hacia afuera o en una trayectoria curva, sino que seguirá exactamente la dirección de **v** en línea recta en el instante en que la cuerda se rompe.

Por lo tanto, para mantener al disco moviéndose en círculo, debe ser proporcionada una fuerza que jale de él *hacia el centro*. Las fuerzas responsables del movimiento circular uniforme se llaman fuerzas *centrípetas* porque están dirigidas "hacia el centro" del movimiento circular. Sin embargo, el hecho de catalogar a una fuerza como "centrípeta" significa simplemente que siempre apunta radialmente hacia adentro; el nombre no nos dice nada sobre la naturaleza de la fuerza o sobre el cuerpo que la ejerce. Así pues, en el disco giratorio de la figura 7, la fuerza centrípeta es una fuerza de tensión proporcionada por la cuerda; para la Luna que gira alrededor de la

Tierra la fuerza centrípeta es la atracción gravitatoria de la Tierra sobre la Luna; para un electrón que gira alrededor de un núcleo atómico la fuerza centrípeta es electrostática. La fuerza centrípeta no es una nueva clase de fuerza sino simplemente una manera de describir el comportamiento en el tiempo de las fuerzas que son atribuibles a cuerpos específicos en el mismo ambiente. Así, una fuerza puede ser centrípeta y elástica, centrípeta y gravitatoria, o centrípeta y electrostática, entre otras posibilidades.

Consideremos algunos ejemplos de fuerzas que actúan centrípetamente.

## El péndulo cónico

La figura 8 muestra un cuerpo pequeño de masa $m$ que gira en un círculo horizontal a velocidad constante $v$ en el extremo de una cuerda de longitud $L$. Al moverse el cuerpo alrededor, el cordón barre la superficie de un cono imaginario. Este dispositivo se llama *péndulo cónico*. Hallemos el tiempo requerido para una revolución completa del cuerpo.

Si el cordón forma un ángulo $\theta$ con la vertical, el radio de la trayectoria circular es $R = L$ sen $\theta$. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa $m$ son su peso $m\mathbf{g}$ y la tensión $\mathbf{T}$ de la cuerda, como se muestra en la figura 8*b*. En este caso la segunda ley de Newton da

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}.$$

Claramente, la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo no es cero, lo cual es como debería de ser porque se requiere una fuerza para mantener al cuerpo moviéndose en círculo a velocidad constante.

Podemos descomponer $\mathbf{T}$ en cualquier instante en una componente radial y otra vertical:

$$T_r = -T \text{ sen } \theta \quad \text{y} \quad T_z = T \cos \theta.$$

La componente radial es negativa si definimos que la dirección positiva es hacia afuera del eje.

Puesto que el cuerpo no tiene aceleración vertical, podemos escribir que la componente $z$ es, según la segunda ley de Newton,

$$\sum F_z = T_z - mg = 0,$$

o sea

$$T \cos \theta = mg.$$

La aceleración radial es $a_r = -v^2/R$, negativa porque actúa radialmente hacia adentro (opuesta a la dirección de $\mathbf{r}$, la cual tomamos como la dirección radial positiva). Esta aceleración es proporcionada por $T_r$, la componente

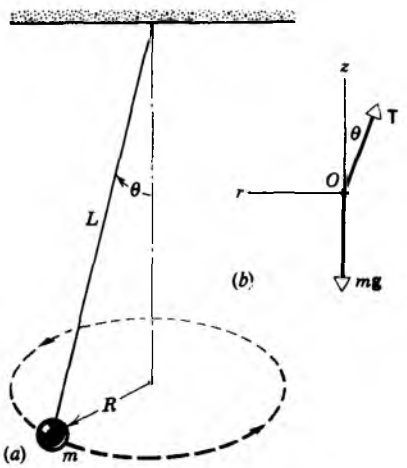



**Figura 8** El péndulo cónico. (*a*) Un cuerpo de masa $m$ suspendido de un cordón de longitud $L$ se mueve en círculo; el cordón describe un cono circular recto de semiángulo $\theta$. (*b*) Un diagrama de cuerpo libre del cuerpo.

radial de $\mathbf{T}$, la cual proporciona la fuerza centrípeta que actúa sobre $m$. Por lo tanto, de la componente radial de la segunda ley de Newton,

$$\sum F_r = T_r = ma_r,$$

o sea

$$-T \text{ sen } \theta = -mv^2/R.$$

Al dividir las ecuaciones de la componente radial y de la componente $z$, obtenemos

$$\frac{-T \text{ sen } \theta}{T \cos \theta} = \frac{-mv^2/R}{mg}$$

o bien, resolviendo para $v$,

$$v = \sqrt{Rg \tan \theta},$$

la cual da la velocidad constante del cuerpo. Si $t$ es el tiempo para una revolución completa del cuerpo, entonces

$$v = \frac{2\pi R}{t}$$

o sea

$$t = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg \tan \theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \tan \theta}}.$$

Pero $R = L$ sen $\theta$, de modo que

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}. \tag{6}$$

Esta ecuación da la razon entre $t$, $L$, y $\theta$. Nótese que $t$, llamada *periodo* del movimiento, no depende de $m$.

Si $L = 1.2$ m y $\theta = 25°$, ¿cuál es el periodo del movimiento? Tenemos que

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{(1.2 \text{ m})(\cos 25°)}{9.8 \text{ m/s}^2}} = 2.1 \text{ s}.$$

## El rotor

En muchos parques de diversión* podemos encontrar un aparato llamado rotor. Es un espacio cilíndrico hueco que gira con respecto al eje vertical central del cilindro. La persona que utiliza el juego, entra al aparato, cierra la puerta, y se pone de pie contra la pared. El aparato aumenta gradualmente su velocidad rotatoria desde el reposo hasta que, a una velocidad predeterminada, el piso se abre hacia abajo, quedando al descubierto un hondo agujero. La persona no cae sino que permanece "adherida" contra la pared del rotor. ¿Qué velocidad rotatoria mínima es necesaria para impedir la caída?

En la figura 9 se muestran las fuerzas que actúan sobre la persona. El peso de la persona es $m\mathbf{g}$, la fuerza de fricción estática entre la persona y la pared del aparato es $\mathbf{f}_s$, y $\mathbf{N}$ es la fuerza normal ejercida por la pared sobre la persona (la cual, como veremos, proporciona la fuerza centrípeta necesaria). Como lo hicimos en el cálculo anterior, descomponemos las fuerzas en sus componentes radial y vertical. Definimos al eje $z$ como positivo hacia arriba y, para que la persona no caiga, no debe haber aceleración en la dirección $z$. La componente $z$ de la segunda ley de Newton da

$$\sum F_z = f_s - mg = ma_z = 0.$$

Sea $R$ el radio del rotor y $v$ la velocidad tangencial de la persona. El pasajero experimenta una aceleración radial $-v^2/R$, y la componente radial de la segunda ley de Newton puede ser escrita entonces así:

$$\sum F_r = -N = ma_r = \frac{-mv^2}{R}.$$

Nótese que $N$ proporciona la fuerza centrípeta en este caso. Si $\mu_s$ es el coeficiente de la fricción estática entre la persona y la pared necesaria para impedir el deslizamiento, entonces $f_s = \mu_s N$ y hallamos que

$$f_s = mg = \mu_s N = \frac{\mu_s mv^2}{R}$$

o sea

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}}. \qquad (7)$$

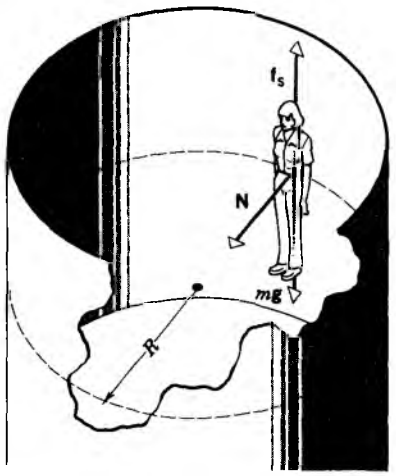



**Figura 9** El rotor. Se muestran las fuerzas que actúan sobre la persona.

Esta ecuación relaciona al coeficiente de fricción necesario para impedir el deslizamiento con la velocidad tangencial de un objeto sobre la pared. Nótese que el resultado no depende del peso de la persona.

Como práctica, el coeficiente de fricción entre el material textil de la ropa que viste el pasajero y la pared típica de un rotor (lona) es de alrededor de 0.40. Para un rotor típico el radio es de 2.0 m, de modo que $v$ debe ser alrededor de 7.0 m/s o más. La circunferencia de la trayectoria circular es $2\pi R = 12.6$ m, y a 7.0 m/s le toma un tiempo de $t = 12.6 \text{ m}/(7.0 \text{ m/s}) = 1.80$ s completar cada revolución. El aparato debe, por lo tanto, girar a razón de cuando menos 1/1.80 s = 0.56 revoluciones/s o alrededor de 33 rpm, la misma tasa de rotación que el plato de un fonógrafo.

## La curva peraltada

Hagamos que el bloque de la figura 10*a* represente a un automóvil o a un carro de ferrocarril que se mueve a velocidad constante $v$ sobre una vía *a nivel* en una curva que tenga un radio de curvatura $R$. En adición a las dos fuerzas verticales, es decir, el peso $m\mathbf{g}$ y la fuerza normal $\mathbf{N}$, debe actuar sobre el carro una fuerza horizontal $\mathbf{P}$. La fuerza $\mathbf{P}$ proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento en círculo. En el caso del automóvil esta fuerza es proporcionada por la fuerza lateral de fricción que ejerce la carretera sobre las llantas; en el caso del carro de ferrocarril la fuerza es proporcionada por los rieles al ejercer una fuerza lateral sobre el borde interior de las ruedas del carro. En aras de la seguridad, no podemos confiar en que cualquiera de estas fuerzas laterales sea lo suficientemente grande en todo momento, y ambas causan un desgaste innecesario. Por lo tanto, la

* Véase "Fear and Trembling at the Amusement Park", por John Roeder y Jearl Walker, en *Fundamentals of Physics*, 3a. ed., por David Halliday y Robert Resnick (Wiley, 1988).

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



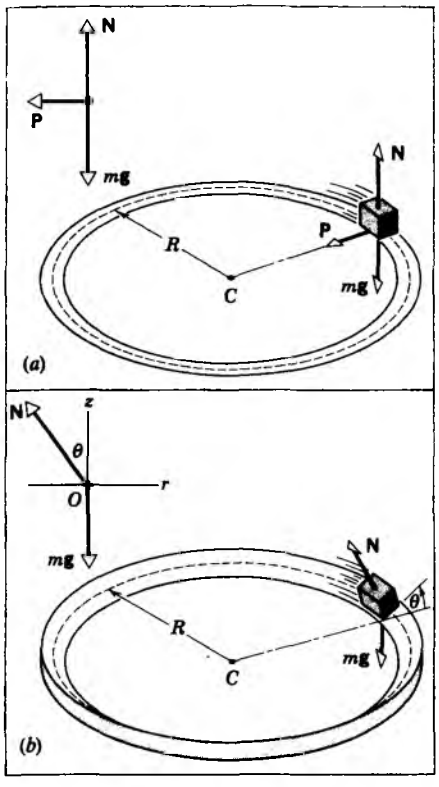



**Figura 10** (*a*) Una vía a nivel. Se muestra a la izquierda el diagrama de cuerpo libre del cuerpo en movimiento. La fuerza centrípeta debe ser proporcionada por la fricción entre las llantas y la vía. (*b*) Una vía peraltada. No es necesaria la fricción para tomar la curva con seguridad.

vía está *peraltada* en las curvas, como se muestra en la figura 10*b*. En este caso, la fuerza normal **N** no solamente tiene una componente vertical, como antes, sino también una componente horizontal que proporciona la fuerza centrípeta necesaria para un movimiento circular uniforme. Por lo tanto, no se necesita ninguna fuerza lateral adicional en una vía que esté apropiadamente peraltada para vehículos de determinada velocidad.

En ausencia de la fricción, el ángulo $\theta$ correcto de peralte puede obtenerse como sigue. Comenzamos, como es usual, con la segunda ley de Newton, y nos referimos al diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 10*b*. No existe una aceleración vertical, de modo que la componente vertical da

$$\sum F_z = N\cos\theta - mg = ma_z = 0.$$

La componente radial de la fuerza normal es $-N\cos\theta$, y la aceleración radial es $-v^2/R$. La componente radial de la segunda ley de Newton nos da, por lo tanto,

$$\sum F_r = -N\,\text{sen}\,\theta = ma_r = -mv^2/R.$$

Dividiendo estas dos ecuaciones, obtenemos

$$\tan\theta = v^2/Rg. \tag{8}$$

Nótese que el ángulo de peralte apropiado depende de la velocidad del carro y de la curvatura del camino. No depende de la masa del carro; para un ángulo de peralte determinado, todos los carros podrán viajar con seguridad. Para una curvatura determinada, el camino está peraltado a un ángulo correspondiente a una velocidad promedio esperada. A menudo las curvas se marcan con señales que anuncian la velocidad apropiada para la que el camino ha sido peraltado. Si los vehículos exceden esa velocidad, la fricción entre las llantas y el camino debe proporcionar la fuerza centrípeta adicional necesaria para tomar la curva con seguridad.

Compruebe la fórmula de peraltado para los casos límite $v = 0$, $R \to \infty$, $v$ grande, y $R$ pequeño. También, nótese que la ecuación 8, si se resuelve para $v$, da el mismo resultado que la que derivamos para la velocidad de la pesa de un péndulo cónico. Compare las figuras 8 y 10, observando sus semejanzas.

## 6-4 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO: FUERZAS CONSTANTES Y NO CONSTANTES*

Revisemos brevemente nuestro progreso en el estudio de la dinámica y de la cinemática. Nuestro objetivo final es describir cómo se mueve una partícula cuando actúan sobre ella un grupo de fuerzas. Esquemáticamente, el análisis (en una dimensión) puede ser representado como sigue:

$$\sum F \to a \to x(t),\ v(t).$$

Esto es, las leyes de Newton (como se describieron en el capítulo 5) nos proporcionan los medios para calcular la aceleración de una partícula a partir de la fuerza neta que actúa sobre ella. El siguiente paso es el matemático para obtener la posición y la velocidad (en todo tiempo $t$) a partir de la aceleración y la posición y velocidad iniciales.

Con excepción de la sección anterior sobre el movimiento circular, hasta ahora hemos considerado solamente fuerzas constantes (es decir, fuerzas que no dependen del tiempo, la velocidad, o la posición). Si la fuerza es constante, entonces la aceleración es constante, y para una aceleración constante las soluciones para $v(t)$ y $x(t)$ en una dimensión se obtienen fácilmente, como lo hicimos

* Las secciones 6-4 a 6-7 implican aspectos elementales del cálculo integral. El material de estas secciones puede omitirse o posponerse hasta que el estudiante esté más familiarizado con los métodos de la integración.

en la sección 2-6. Entonces nuestro análisis de las fuerzas constantes está completo.

Cuando las fuerzas no son constantes, todavía podemos usar las leyes de Newton para hallar la aceleración, pero ciertamente no podemos usar las fórmulas para la aceleración constante de la sección 2-6 para hallar $v(t)$ y $x(t)$. En su lugar, debemos remitirnos a los métodos que implican al cálculo integral.

Antes de aplicar nuestro análisis al caso de fuerzas no constantes, apliquemos el cálculo integral en el caso de fuerzas constantes y veamos cómo se obtienen los resultados de la sección 2-6. Supongamos que hemos hallado la aceleración $a$ (de las leyes de Newton) y que deseamos obtener $v(t)$ y $x(t)$. Comencemos con $a = dv/dt$, y así

$$dv = a\,dt. \tag{9}$$

Integramos ahora ambos lados. En el lado izquierdo, la velocidad es la variable de integración, con los límites de $v_0$ para el tiempo 0 y $v$ para el tiempo $t$. En la derecha, integramos sobre el tiempo entre 0 y $t$.

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt. \tag{10}$$

En el caso de la aceleración constante, $a$ sale de la integral de la derecha y obtenemos

$$v - v_0 = a\int_0^t dt \tag{11}$$

o sea

$$v(t) = v_0 + at \tag{12}$$

la cual es justamente la ecuación 15 del capítulo 2.

Continuando, hallamos $x(t)$ usando $v = dx/dt$ para tener otra integral:

$$dx = v\,dt = (v_0 + at)dt = v_0\,dt + at\,dt. \tag{13}$$

Integramos de la posición $x_0$ en el tiempo 0 a la posición $x$ en el tiempo $t$:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0\,dt + \int_0^t at\,dt, \tag{14}$$

y si $a$ es constante podemos de nuevo sacarla de la integral:

$$x - x_0 = v_0\int_0^t dt + a\int_0^t t\,dt$$

$$= v_0 t + a(\tfrac{1}{2}t^2)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2. \tag{15}$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación 19 del capítulo 2.

Si la aceleración no es constante, es más complicado evaluar las integrales. El hecho de que las integrales de las ecuaciones 10 y 14 obtengan funciones explícitas para $v(t)$ y $x(t)$ se llama enfoque *analítico* para resolver el problema. Una alternativa es el método *numérico*, mediante el cual podemos usar una computadora para evaluar las integrales, obteniendo no las funciones analíticas $v(t)$ y $x(t)$, sino los valores numéricos de $v$ y de $x$ para cualquier tiempo $t$. Esto puede hacerse a cualquier nivel de precisión deseado.

Las fuerzas constantes demuestran las aplicaciones de las leyes de Newton, y son ciertamente más fáciles de trabajar que las fuerzas no constantes. Es una fortuna que los problemas prácticos incluyan a menudo fuerzas que pueden ser consideradas bajo muchas circunstancias como aproximadamente constantes: la gravedad cerca de la superficie de la Tierra, las fuerzas de fricción, las fuerzas de tensión en cables, y tantas otras. Sin embargo, muchas situaciones físicas no quedan bien descritas por las fuerzas constantes, en cuyos casos debemos usar técnicas analíticas o numéricas para resolver el problema. He aquí algunos ejemplos de estas fuerzas:

1. *Fuerzas que dependen del tiempo.* En el capítulo 2 analizamos el frenado de un automóvil *suponiendo* que la aceleración era constante. En la práctica, rara vez es éste el caso. Bajo muchas circunstancias, especialmente a alta velocidad, solemos, por lo general, accionan los frenos lentamente al principio y luego con más fuerza cuando el auto se va deteniendo. La fuerza de frenado depende, por tanto, del tiempo durante el intervalo en que se detiene el automóvil; la función $a(t)$ dependerá de los detalles de cómo apliquemos los frenos.

Otro ejemplo de una fuerza que depende del tiempo ocurre en el caso de una onda que viaja a través de un medio. Consideremos una onda sonora en el aire, donde, para cualquier posición dada, la onda varía sinusoidalmente con el tiempo. La fuerza que actúa sobre cada una de las moléculas de aire por separado variará también sinusoidalmente con el tiempo, con la misma frecuencia que la onda. La aceleración de la partícula tendrá la misma dependencia del tiempo que la fuerza.

2. *Fuerzas que dependen de la velocidad.* Un ejemplo conocido de una fuerza dependiente de la velocidad es la fuerza de arrastre que experimenta un cuerpo que se mueve en un medio fluido tal como el aire o el agua. Esta fuerza de fricción aumenta con la velocidad. Usted habrá encontrado este efecto cuando trata de caminar en una alberca. Si camina lentamente, siente sólo una fuerza resistiva pequeña, pero si trata de caminar rápidamente, las fuerzas resistivas sobre sus piernas pueden ser bastante grandes. Cuanto más rápido trate de moverse, mayor será la fuerza de arrastre.

El movimiento de los proyectiles se ve extraordinariamente afectado por las fuerzas de arrastre, aun cuando en los capítulos 2 y 4 los tuvimos en cuenta en nuestro análisis de cuerpos en caída y proyectiles. Para una velo-

cidad inicial determinada, un proyectil tal como una bola de béisbol tiene un alcance en el aire de la mitad o menos del que se esperaría si nos basáramos en el análisis de la sección 4-3. Un cuerpo lanzado a una distancia grande no responderá a las ecuaciones de la caída libre de la sección 2-7, las cuales parecen permitir que su velocidad aumente sin límite. En su lugar, a medida que la velocidad aumenta lo hará también la fuerza de arrastre, la cual tiende a reducir o incluso impedir incrementos adicionales de la velocidad. De hecho, como veremos en la sección 6-7, la velocidad tiende a un límite (la *velocidad terminal*) más allá del cual no habrá una aceleración. (Para muchos objetos, este efecto ocurre sólo a una velocidad considerablemente alta, siguiendo luego caídas a través de distancias del orden de 100 m o más. Para una caída de 1 ó 2 metros en nuestros experimentos de laboratorio, el efecto es despreciable y podemos usar las ecuaciones de la sección 2-7 con confianza.)

3. *Fuerzas que dependen de la posición.* Un ejemplo familiar de una fuerza dependiente de la posición es la fuerza de restitución ejercida por un resorte estirado a una distancia $x$ de su longitud de equilibrio: $F = -kx$. La aceleración experimentada por un cuerpo de masa $m$ unido al resorte es, entonces, $a = F/m = -kx/m$. Si desplazamos al cuerpo una distancia $x$, experimenta una fuerza que tiende a regresarlo hacia su posición de equilibrio. Si soltamos el cuerpo, se mueve hacia la posición de equilibrio; al hacerlo, el desplazamiento $x$ disminuye, así como también la aceleración. Mientras pasa por la posición de equilibrio, su aceleración es instantáneamente cero, pero la aceleración aumenta en magnitud de nuevo mientras se mueve más allá de $x = 0$.

Las fuerzas dependientes de la posición se analizan con más facilidad usando técnicas de trabajo y energía, las cuales discutiremos en los capítulos 7 y 8. En las secciones próximas demostraremos algunos métodos que emplean las leyes de Newton para analizar situaciones donde aparecen fuerzas que dependen del tiempo y de la velocidad.

## 6-5 FUERZAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO: MÉTODOS ANALÍTICOS

Usando las leyes de Newton de la manera usual, con algunas de las fuerzas dependiendo del tiempo, obtenemos una aceleración $a(t)$ que depende del tiempo. En este caso podemos proceder exactamente como lo hicimos en la sección 6-4 para hallar la velocidad por integración directa. Recordando que $a = dv/dt$, escribimos que $dv = a(t)\,dt$ e integramos desde el tiempo $t = 0$, cuando la velocidad inicial es $v_0$, hasta el tiempo $t$, cuando la velocidad es $v$. Para simplificar suponemos que el movimiento está confinado a una dimensión, pero la extensión a tres dimensiones es fácil. Procedemos como sigue:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a(t)\,dt,$$

$$v - v_0 = \int_0^t a(t)\,dt,$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)\,dt. \tag{16}$$

Comparemos el grupo de ecuaciones de arriba con las ecuaciones 10 a 12; la única diferencia es que $a$ permanece dentro de la integral.

Una vez que tengamos a $v(t)$, podemos repetir el procedimiento para hallar a $x(t)$. Con $v = dx/dt$, tenemos que $dx = v(t)\,dt$, y llevando a cabo una integral similar desde el tiempo $t = 0$, cuando la partícula se localiza en $x_0$, hasta el tiempo $t$, cuando la posición es $x$, tendremos lo siguiente:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v(t)\,dt,$$

$$x - x_0 = \int_0^t v(t)\,dt,$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)\,dt. \tag{17}$$

Una vez más, comparemos con las ecuaciones 14 y 15 y notemos cómo la ecuación 17 se reduce a la ecuación 15 cuando $a$ sea constante.

**Problema muestra 4** Un automóvil se mueve a 105 km/h (unas 65 mi/h ó 29.2 m/s). El conductor comienza a accionar súbitamente los frenos, pero lo hace con fuerza creciente de modo que la deceleración aumenta con el tiempo de acuerdo con $a(t) = ct$, donde $c = -2.67\ \text{m/s}^3$. (*a*) ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que el automóvil llegue al reposo? (*b*) ¿Qué distancia recorre en el proceso?

**Solución** (*a*) Necesitamos una expresión para $v(t)$, de modo que podamos hallar el tiempo para el cual $v = 0$. Usando la ecuación 16 con $a(t) = ct$, tenemos que

$$v(t) = v_0 + \int_0^t ct\,dt = v_0 + \tfrac{1}{2}ct^2.$$

Haciendo que $v(t)$ sea igual a cero, podemos resolver para el tiempo $t_1$ en el cual el automóvil llega al reposo:

$$0 = v_0 + \tfrac{1}{2}ct_1^2,$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{-2v_0}{c}} = \sqrt{\frac{-2(29.2\ \text{m/s})}{-2.67\ \text{m/s}^3}} = 4.68\ \text{s}.$$

Al automóvil le toma 4.68 s llegar al reposo.

(*b*) Para hallar qué distancia recorre el automóvil, necesitamos una expresión para $x(t)$, para lo cual debemos integrar a $v(t)$ de acuerdo con la ecuación 17:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + \tfrac{1}{2}ct^2)\,dt = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{6}ct^3.$$

Con $t = t_1 = 4.68$ s, la distancia recorrida es (haciendo a $x_0$ igual a cero)

$$x(t_1) = 0 + (29.2 \text{ m/s})(4.68 \text{ s}) + \tfrac{1}{6}(-2.67 \text{ m/s}^3)(4.68 \text{ s})^3$$

$$= 91.0 \text{ m}.$$

La figura 11 muestra la dependencia del tiempo de $x$, $v$, y $a$. En contraste con el caso de la aceleración constante, $v(t)$ no es una línea recta.

Con este método de frenar, la mayoría del cambio de velocidad ocurre cerca del final del movimiento. El cambio de velocidad en el primer segundo después de haber aplicado los frenos es sólo de 1.3 m/s (unas 3 mi/h); en el último segundo, sin embargo, el cambio es de 11.2 m/s (unas 25 mi/h). (Recordemos que en el caso de la aceleración constante, el cambio de velocidad es el mismo en intervalos de tiempo iguales.) ¿Puede usted pensar en las ventajas de frenar de esta manera? ¿Existen también desventajas?

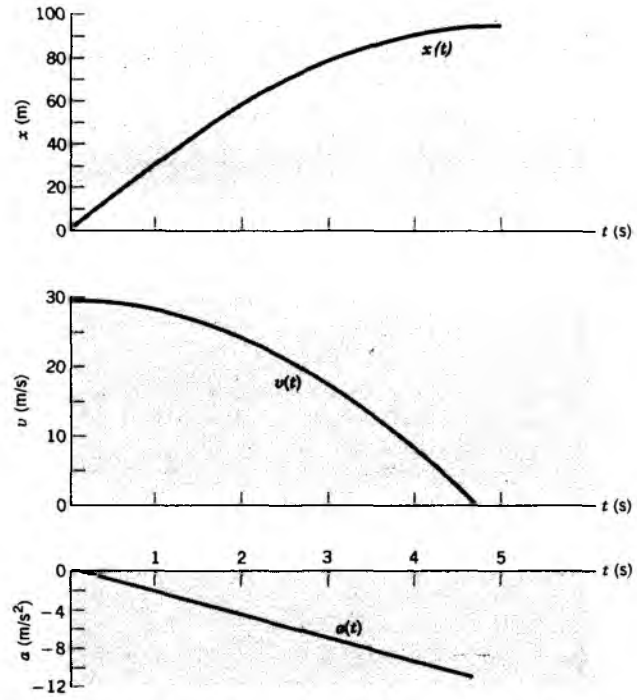



**Figura 11** Problema muestra 4. La posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ deducidas se muestran correspondiendo con $a(t)$, la cual varía linealmente con el tiempo.

## 6-6 FUERZAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO: MÉTODOS NUMÉRICOS *(Opcional)*

El procedimiento analítico descrito en la sección anterior nos permite en principio calcular $x(t)$ y $v(t)$ para cualquier $a(t)$ dada. Sin embargo, a menudo este método no es práctico ni deseable. Por ejemplo, puede no existir una forma analítica para las integrales, o quizá la forma es tan complicada que las soluciones no contribuyen a nuestra visión física del problema. Las técnicas numéricas ofrecen una alternativa conveniente a los métodos analíticos, y son, por supuesto, particularmente útiles en ejemplos en que no pueda usarse el método analítico.

En el método numérico, aproximamos el problema dividiendo el intervalo, sobre el que deseamos hallar la solución, en un número grande de intervalos pequeños. En cada intervalo aplicamos las ecuaciones de la aceleración constante, pero esa "constante" cambia de un intervalo al otro. Una elección conveniente para la aceleración constante en cada intervalo es la aceleración promedio en el intervalo.

Este método trabaja mejor, y da los resultados más precisos, si hacemos los intervalos tan pequeños como sea posible; cuanto más pequeño sea el intervalo, mejor se aproximará la aceleración promedio (constante) a la aceleración real. Por otra parte, cuando disminuimos el tamaño de los intervalos, debemos aumentar correspondientemente su número, y podemos por tanto necesitar hacer muchos cálculos repetitivos. Ésta es justamente la tarea que las computadoras hacen muy bien, y así este método de solución puede hacerse en una computadora a cualquier nivel de precisión deseado.

La figura 12 muestra gráficamente cómo se lleva a cabo este procedimiento en el caso del problema con aceleración variable que resolvimos en el problema muestra 4. La región entre $t = 0$ y $t = 5$ se divide en 10 intervalos pequeños, cada uno de anchura $\delta t = 0.5$ s. La función $a(t)$ es aproximada en cada intervalo por una constante diferente (la aceleración promedio, que en este caso lineal es también el valor de $a$ en el punto medio del intervalo). En el primer intervalo, la aceleración promedio se determina de los valores de $a$ en $t = 0$ y $t = 0.5$ s:

$$\bar{a}_1 = \tfrac{1}{2}[a(0) + a(0.5 \text{ s})] = \tfrac{1}{2}[0 + (-2.67 \text{ m/s}^3)(0.5 \text{ s})]$$

$$= -0.67 \text{ m/s}^2.$$

El cambio de la velocidad en el primer intervalo, $\delta v_1$, es aproximadamente

$$\delta v_1 = \bar{a}_1\,\delta t = (-0.67 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ s}) = -0.34 \text{ m/s},$$

y la velocidad en $t = 0.5$ s es, por lo tanto,

$$v_1 = v_0 + \delta v_1 = 29.2 \text{ m/s} - 0.34 \text{ m/s} = 28.9 \text{ m/s}.$$

Para hallar el desplazamiento durante el primer intervalo, primero hallamos la velocidad promedio durante ese intervalo:

$$\bar{v}_1 = \tfrac{1}{2}(v_0 + v_1) = \tfrac{1}{2}(29.2 \text{ m/s} + 28.9 \text{ m/s}) = 29.1 \text{ m/s},$$

y el desplazamiento $\delta x_1$ en ese intervalo es aproximadamente

$$\delta x_1 = \bar{v}_1\,\delta t = (29.1 \text{ m/s})(0.5 \text{ s}) = 14.6 \text{ m}.$$

Si asignamos el punto de partida como $x_0 = 0$, entonces la posición al final del primer intervalo es la siguiente:

$$x_1 = x_0 + \delta x_1 = 0 + 14.6 \text{ m} = 14.6 \text{ m}.$$

Los valores de $v_1$ y de $x_1$ están trazados para $t = 0.5$ s en la figura 12.

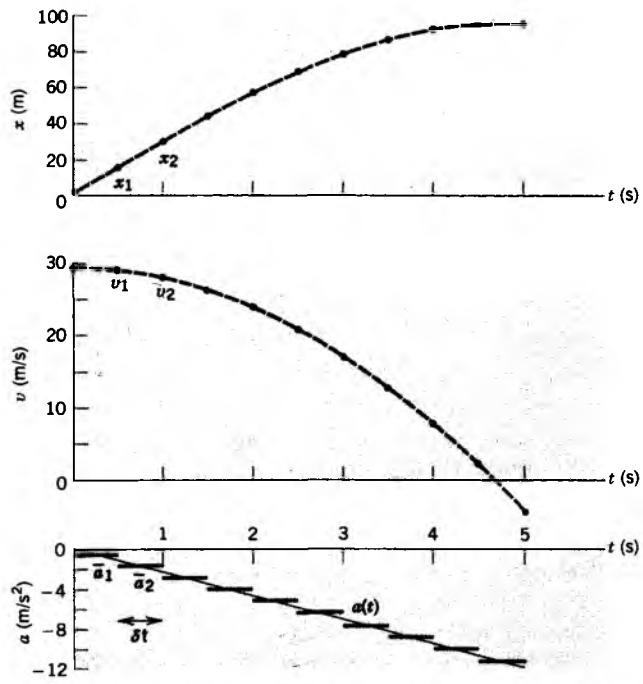



**Figura 12** Solución numérica (mostrada como puntos) al problema muestra 4; compare con la solución analítica (Fig. 11 y curvas con líneas entrecortadas). Se supone que la aceleración es constante para cada uno de los intervalos de 0.5 s, y que la posición y la velocidad pueden calcularse al final del intervalo, dando los puntos trazados. Tomando más intervalos (y más pequeños) nos daría más puntos y curvas menos pronunciadas para $x(t)$ y $v(t)$.

Nos movemos ahora al segundo intervalo y repetimos el procedimiento. Aquí la aceleración promedio es

$$\begin{aligned}\bar{a}_2 &= \tfrac{1}{2}[a(0.5\text{ s}) + a(1.0\text{ s})]\\ &= \tfrac{1}{2}[(-2.67\text{ m/s}^3)(0.5\text{ s}) + (-2.67\text{ m/s}^3)(1.0\text{ s})]\\ &= -2.00\text{ m/s}^2.\end{aligned}$$

Continuando como lo hicimos para el primer intervalo, en el segundo intervalo

$$\delta v_2 = \bar{a}_2\,\delta t = (-2.00\text{ m/s}^2)(0.5\text{ s}) = -1.0\text{ m/s},$$
$$v_2 = v_1 + \delta v_2 = 28.9\text{ m/s} - 1.0\text{ m/s} = 27.9\text{ m/s},$$

y

$$\bar{v}_2 = \tfrac{1}{2}(v_1 + v_2) = \tfrac{1}{2}(28.9\text{ m/s} + 27.9\text{ m/s}) = 28.4\text{ m/s},$$
$$\delta x_2 = \bar{v}_2\,\delta t = (28.4\text{ m/s})(0.5\text{ s}) = 14.2\text{ m},$$
$$x_2 = x_1 + \delta x_2 = 14.6\text{ m} + 14.2\text{ m} = 28.8\text{ m}.$$

Los valores de $v_2$ y de $x_2$ dan la velocidad y la posición al final del segundo intervalo, y están trazados para $t = 1.0$ s en la figura 12.

Continuando igual para los 10 intervalos, hallamos los puntos restantes trazados en la figura 12.

Al comparar las figuras 11 y 12, podemos ver lo bien que la solución numérica concuerda con la analítica, aun para tan pocos como 10 intervalos. Una computadora podría hacer fácilmente este cálculo para 100 o para 1000 intervalos, de modo que los puntos trazados para $x$ y para $v$ aparecerían casi como curvas lisas.

Interpolando entre los puntos finales de la velocidad del último intervalo, vemos que el automóvil se detiene en 4.7 s aproximadamente, tal como lo hallamos en la solución analítica. Al calcular la distancia viajada de la figura 12, hallamos alrededor de 91 m, nuevamente de acuerdo con el valor analítico.

El valor negativo hallado para $v$ al final del décimo intervalo no es, por supuesto, significativo en este problema: la situación dinámica original no permite valores negativos, porque al accionar los frenos no provoca que el automóvil se mueva hacia atrás. Es conveniente para nosotros continuar con el cálculo numérico hasta ese punto, para ayudarnos a analizar el último intervalo.

En el apéndice I, el lector encontrará un programa de computadora (en lenguaje BASIC), que puede hacer este cálculo. Mediante unos pequeños cambios en el programa, el lector puede hacer este tipo de cálculo para cualquier forma de $a(t)$. ■

## 6-7 FUERZAS DE ARRASTRE Y EL MOVIMIENTO DE PROYECTILES

La lluvia cae de las nubes cuya altura $h$ sobre el nivel del suelo es de unos 2 km. Utilizando nuestra ecuación para los cuerpos en caída libre (Ec. 25 del capítulo 2), sabremos que la lluvia caerá al suelo a una velocidad de $v = \sqrt{2gh} \approx 200$ m/s, o de alrededor de 440 mi/h. El impacto de un proyectil, incluso de las gotas de lluvia, a esta velocidad sería mortal; puesto que las gotas de lluvia se mueven a velocidades mucho más bajas, es obvio que hemos cometido un error en algún paso de nuestro cálculo.

El error acontece si no tomamos en cuenta el efecto que ejerce la fuerza de fricción del aire en las gotas de lluvia al caer. Esta fuerza de fricción es un ejemplo de la fuerza de arrastre que experimenta todo objeto que se mueve en un medio fluido. Las fuerzas de arrastre tienen efectos importantes en una gran cantidad de objetos, como las pelotas de béisbol, que se desvían en forma considerable de la trayectoria ideal de libre arrastre, o los esquiadores al descender por una ladera, quienes tratan de dar al cuerpo una posición aerodinámica con el fin de reducir la fuerza de arrastre. Estas fuerzas deben tomarse en cuenta en el diseño de aeronaves y embarcaciones. Desde el punto de vista de los cuerpos en caída, desde las gotas de lluvia hasta los paracaidistas las fuerzas de arrastre impiden que la velocidad crezca sin límite e imponen una velocidad máxima o *terminal* que puede ser alcanzada por un cuerpo al caer.

Una característica peculiar de las fuerzas de arrastre es que dependen de la velocidad: cuanto más aprisa se mueva el objeto, mayor será la fuerza de arrastre. Por lo tanto,

debemos usar métodos de cálculo con integrales para analizar la cinemática.

Cuando la fuerza, y por lo tanto la aceleración, es una función de la velocidad, los métodos de la sección 6-5 para las fuerzas dependientes del tiempo deben modificarse un tanto. Comenzamos, como lo hicimos en la ecuación 16, con $a = dv/dt$, pero ahora $a$ es una función de la velocidad, $a(v)$:

$$a(v) = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{a(v)} = dt.$$

Esto puede ahora ser integrado directamente:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)} = \int_0^t dt = t. \tag{18}$$

El lado izquierdo de la ecuación 18 da alguna función de $v$, por lo que la ecuación 18 es en efecto $t$ en función de $v$, o $t(v)$, en lugar de $v(t)$. A menudo nos es posible "invertir" este resultado para hallar $v(t)$, la cual es generalmente más util en los cálculos.

---

**Problema muestra 5** Supongamos que un objeto de masa $m$ que cae en el aire experimenta una fuerza de arrastre $D$ que aumenta *linealmente* con la velocidad,

$$D = bv,$$

y que actúa siempre en dirección opuesta a la velocidad. La constante $b$ depende de las propiedades del objeto (su tamaño y forma, por ejemplo) y de las propiedades del fluido (especialmente de su densidad). Halle la velocidad en función del tiempo, $v(t)$, para un objeto de masa $m$ que se deja caer desde el reposo.

**Solución** La figura 13 muestra el diagrama de cuerpo libre, el cual cambia con el tiempo porque $D$ varía con $v$. Cuando el objeto se deja caer, $D$ es cero (porque $v$ es cero), y $D$ aumenta con $v$. En cierto punto del movimiento $D = mg$ y el objeto no tiene una fuerza neta que actúe sobre él y, por lo tanto, no tiene aceleración, como en la figura 13*c*. A partir de este punto la velocidad permanece constante. Nuestra solución matemática mostraría esta propiedad.

La segunda ley de Newton para este problema es

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{D} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}.$$

Elegimos al eje $y$ hacia abajo, de modo que la componente vertical sea

$$\sum F_y = mg - bv = ma,$$

o bien

$$a = g - \frac{b}{m}v.$$

De esta expresión podemos ver que cuando $v$ aumenta, finalmente llegamos a alcanzar un punto donde el lado derecho se convierte en cero, cuando $bv/x = g$. En este punto $a = 0$, y

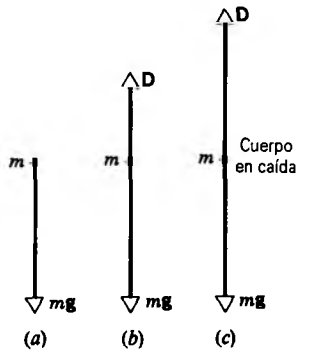



**Figura 13** Fuerzas que actúan sobre un cuerpo que cae en el aire. (*a*) En el instante que se deja caer, $v = 0$ y no existe fuerza de arrastre. (*b*) La fuerza de arrastre aumenta a medida que el cuerpo gana velocidad. (*c*) Finalmente la fuerza de arrastre se iguala al peso; durante cualquier tiempo posterior permanece igual al peso y el cuerpo cae a su velocidad terminal constante.

permanece cero durante el resto del movimiento, de modo que la velocidad permanece constante desde ese punto en adelante. Ésta es la velocidad terminal, $v_T = mg/b$.

Para hallar $v(t)$, usamos la ecuación 18 con $v_0 = 0$:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - (b/m)v} = t.$$

La integral puede ser escrita así:

$$-\frac{m}{b}\int_0^v \frac{-b\,dv}{mg - bv}$$

que es de la forma $\int du/u = \ln u$, donde $u = mg - bv$. Así,

$$-\frac{m}{b}\int_0^v \frac{-b\,dv}{mg - bv} = -\frac{m}{b}\ln(mg - bv)\Big|_0^v$$

$$= -\frac{m}{b}\ln(mg - bv) + \frac{m}{b}\ln(mg)$$

$$= -\frac{m}{b}\ln\left(\frac{mg - bv}{mg}\right) = t.$$

Esta expresión es una razón perfectamente aceptable entre $v$ y $t$, pero es un tanto más fácil de usar e interpretar si la invertimos para hallar $v(t)$:

$$\ln\left(\frac{mg - bv}{mg}\right) = -\frac{bt}{m}$$

$$\frac{mg - bv}{mg} = e^{-bt/m},$$

y finalmente, resolviendo para $v$,

$$v(t) = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}). \tag{19}$$

Cuando $t$ es pequeña (cerca del comienzo de la caída del proyectil), podemos aproximar la exponencial mediante $e^x \approx 1 + x$ para una $x$ pequeña ($x \ll 1$). Entonces

$$v(t) \approx \frac{mg}{b}\left[1 - \left(1 - \frac{bt}{m}\right)\right] = gt \quad \text{(pequeño } t\text{)}.$$

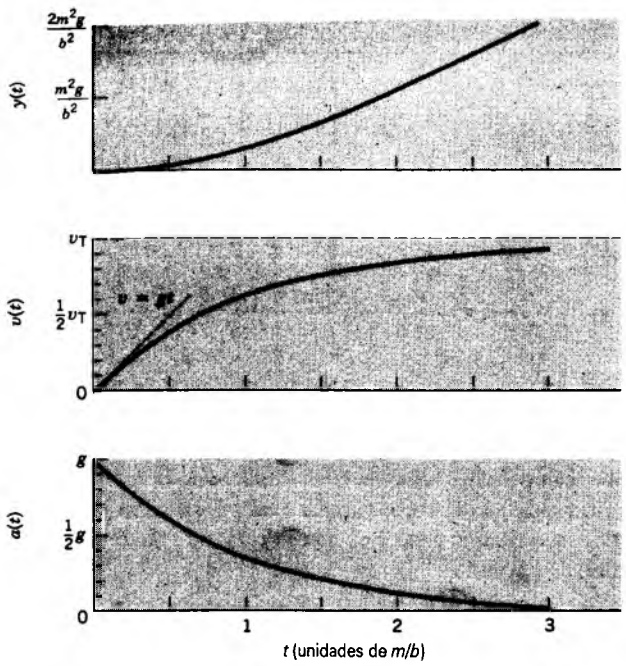



**Figura 14** Problema muestra 5. La posición, la velocidad y la aceleración de un cuerpo en caída libre sujeto a una fuerza de arrastre. Nótese que la aceleración comienza en $g$ y llega a ser cero; la velocidad comienza en cero y se aproxima a $v_T$.

Al principio del movimiento, antes de que la fuerza de arrastre haya aumentado significativamente, el objeto está muy cercano a una caída libre con una aceleración $g$.

Para un $t$ grande, la exponencial tiende a cero ($e^{-x} \to 0$ cuando $x \to \infty$). La velocidad tiende entonces a la velocidad terminal $v_T$:

$$v_T = \frac{mg}{b}. \tag{20}$$

Una vez que tenemos ya una expresión general para $v(t)$, podemos diferenciarla para hallar $a(t)$ y también integrarla para hallar $y(t)$. Se deja al estudiante hacer estos cálculos como ejercicio y comprobar los resultados para un $t$ pequeño y un $t$ grande (véase el problema 66). La figura 14 ilustra la dependencia del tiempo de $a$, $v$, y $y$.

Este ejemplo muestra una manera de analizar la fuerza de arrastre. Otro enfoque supone que $D$ es proporcional a $v^2$ en lugar de $v$. Se usan métodos similares para hallar las soluciones en ese caso, pero las matemáticas son algo más complicadas. En ese caso se obtiene también una velocidad terminal, aunque su expresión matemática es diferente de la derivada aquí.

A tabla 2 muestra valores típicos medidos de la velocidad terminal de diferentes objetos en el aire.

## Movimiento de un proyectil contra la resistencia del aire *(Opcional)*

Los cálculos con arrastre son también importantes en el movimiento bidimensional de los proyectiles. Una bola de béisbol, por ejemplo, deja el bate a una velocidad del orden de 100 mi/h

**TABLA 2** ALGUNAS VELOCIDADES TERMINALES EN EL AIRE

| *Objeto* | *Velocidad terminal* (m/s) | *95% de la distancia*† (m) |
|---|---|---|
| Obús de 16 lb | 145 | 2500 |
| Paracaidista en caída libre (típico) | 60 | 430 |
| Bola de béisbol | 42 | 210 |
| Pelota de tenis | 31 | 115 |
| Pelota de baloncesto | 20 | 47 |
| Pelota de ping-pong | 9 | 10 |
| Gota de lluvia (radio = 1.5 mm) | 7 | 6 |
| Paracaidista (típico) | 5 | 3 |

† Ésta es la distancia a la que debe caer el cuerpo desde el reposo hasta llegar al 95% de su velocidad terminal.
*Fuente*: Adaptada de *Sport Science*, por Peter J. Brancazio, Simon & Schuster Inc., Nueva York, © 1984.

ó 45 m/s. Ésta es realmente más grande que su velocidad terminal en el aire cuando se la deja caer desde el reposo (tabla 2). La fuerza de arrastre $D = bv$ puede calcularse de nuestra solución al problema muestra 5. De la ecuación 20 se desprende que la constante $b$ es el peso $mg$ de la bola de béisbol (alrededor de 1.4 N, correpondiente a una masa de 0.14 kg) dividida entre su velocidad terminal, 42 m/s. Entonces $b$ = 0.033 N/(m/s). Si la bola viaja a razón de 45 m/s, experimenta una fuerza de arrastre $bv$ de 1.5 N aproximadamente, que es mayor que su peso y, por lo tanto, tiene un efecto sustancial en su movimiento.

La figura 15 muestra el diagrama de cuerpo libre en un punto particular de la trayectoria de la bola de béisbol. Como todas las fuerzas de fricción, **D** está en dirección opuesta a **v**, y suponemos que no está soplando el viento. Si tomamos que $\mathbf{D} = -b\mathbf{v}$, podemos usar las leyes de Newton para hallar una solución analítica para la trayectoria, un ejemplo de lo cual se ilustra en la figura 16. Cuando la resistencia del aire es tenida en cuenta, el alcance se reduce de 179 m a 72 m y la altura máxima de 78 m a 48 m. Nótese también que la trayectoria ya no es simétrica respecto al máximo; el movimiendo descendente es mucho más empinado que el movimiento ascendente. Para $\phi_0 = 60°$, el

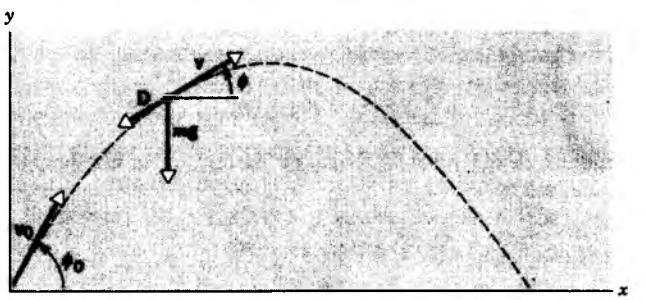



**Figura 15** Un proyectil en movimiento. El proyectil es lanzado a una velocidad $v_0$ y un ángulo $\phi_0$ con la horizontal. Cierto tiempo más tarde su velocidad es $v$ con el ángulo $\phi$. Se muestran el peso y la fuerza de arrastre (que siempre apunta en dirección opuesta a $v$) para ese momento.

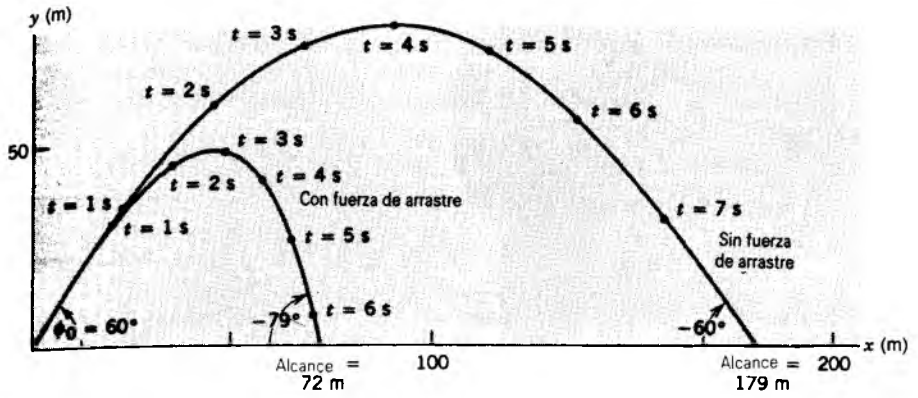



**Figura 16** Movimiento de proyectiles con y **sin** fuerza de arrastre, calculado para $v_0$ = 45 m/s y $\phi_0$ = 60°.

proyectil choca contra el suelo con un ángulo de -79°, mientras que en ausencia del arrastre chocaría con el terreno con un ángulo igual a $-\phi_0$.

La fuerza de arrastre depende de la velocidad del proyectil en aire en calma. Si sopla el viento, el cálculo debe cambiarse en consonancia, y el resultado será diferente.

Para otras elecciones (más realistas) de la fuerza de arrastre **D**, el cálculo debe hacerse numéricamente.* ■

## 6-8 MARCOS NO INERCIALES Y SEUDOFUERZAS *(Opcional)*

Hasta ahora hemos supuesto, en nuestro tratamiento de la mecánica clásica, que las mediciones y las observaciones se realizaron desde un marco de referencia inercial. Éste es uno del conjunto de marcos de referencia definidos por la primera ley de Newton, es decir, ese conjunto de marcos en que un cuerpo no está acelerado ($\mathbf{a} = 0$) si no existen cuerpos identificables en su entorno que produzcan la fuerza ($\Sigma \mathbf{F} = 0$). La elección de un marco de referencia la hacemos siempre nosotros, de modo que si elegimos marcos inerciales solamente, no restringimos en modo alguno nuestra posibilidad de aplicar la mecánica clásica a los fenómenos naturales.

Sin embargo, podemos, si lo hallamos conveniente, aplicar la mecánica clásica desde el punto de vista de un observador en un *marco no inercial*, esto es, un marco unido a un cuerpo que está acelerando tal como se ve desde un marco inercial. Los marcos definidos por un automóvil acelerando o un tiovivo de feria que gira son ejemplos de marcos no inerciales.

Para aplicar la mecánica clásica a marcos no inerciales debemos introducir fuerzas adicionales, conocidas como *seudofuerzas* (a veces llamadas fuerzas inerciales). Al contrario de las fuerzas que hemos examinado hasta ahora, no podemos asociar a las seudofuerzas con ningún objeto particular en el entorno del cuerpo sobre el cual actúen, y no podemos clasificarlas en ninguna de las categorías listadas en la sección 6-1. Más aún, si vemos al cuerpo desde un marco inercial, las seudofuerzas desaparecen. Las seudofuerzas son simplemente recursos que nos permiten aplicar la mecánica clásica de la manera normal a acontecimientos, si insistimos en ver estos acontecimientos desde un marco de referencia no inercial.

Como ejemplo, consideremos a un observador $S'$ que viaja en una vagoneta que se mueve a velocidad constante. La vagoneta contiene una pista aérea larga con un planeador de 0.25 kg carente de fricción que descansa en un extremo (Fig. 17*a*). El conductor de la vagoneta aplica los frenos, y la vagoneta comienza a decelerar. Un observador $S$ en tierra mide la aceleración constante de la vagoneta en -2.8 m/s$^2$. El observador $S'$ que viaja en la vagoneta está, por lo tanto, en un marco de referencia no inercial cuando la vagoneta comienza a decelerar. $S'$ observa que el planeador se mueve por la pista a una aceleración de +2.8 m/s$^2$. ¿Cómo podría cada observador usar la segunda ley de Newton para apreciar el movimiento del planeador?

Para el observador $S$ en tierra, el cual está en un marco de referencia inercial, el análisis es sencillo. El planeador, que se ha estado moviendo hacia adelante a velocidad constante antes de que la vagoneta comenzara a frenar, simplemente continúa haciéndolo. De acuerdo con $S$, el planeador no tiene aceleración y, por lo tanto, no necesita ninguna fuerza horizontal que actúe sobre él.

Sin embargo, el observador $S'$ ve que el planeador acelera y no puede hallar un objeto del entorno del planeador que ejerza una fuerza sobre él y le proporcione la aceleración hacia el frente observada. Para preservar la aplicabilidad de la segunda ley de Newton, $S'$ debe suponer que sobre el planeador actúa una seudofuerza. De acuerdo con $S'$, esta fuerza $\mathbf{F}'$ debe ser igual a $m\mathbf{a}'$, donde $\mathbf{a}'$ ($= -\mathbf{a}$) es la aceleración del planeador medida por $S'$. La magnitud de esta seudofuerza es

$$F' = ma' = (0.25 \text{ kg})(2.8 \text{ m/s}^2) = 0.70 \text{ N},$$

y su dirección es la misma que la de $\mathbf{a}'$, esto es, hacia el frente de la vagoneta. Esta fuerza, que es muy real desde el punto de vista de $S'$, no es aparente para el observador $S$ en tierra, quien no necesita introducirla para explicar el movimiento del planeador.

Una indicación de que las seudofuerzas son no newtonianas es que violan la tercera ley de Newton. Para aplicar esta ley, $S'$ debe hallar una fuerza de reacción ejercida *por* el planeador *sobre* algún otro cuerpo. No puede ser hallada tal fuerza de reacción y, por lo tanto, se viola la tercera ley de Newton.

* Se puede hallar más información sobre este cálculo en "Trajectory of a Fly Ball", de Peter J. Brancazio. *The Physics Teacher*, Enero 1985, pág. 20, y en su libro *SportScience* (Simon & Schuster Inc., 1984), que contiene muchas aplicaciones fascinantes de los principios de la física en los deportes. Véase también "Physics and Sports: the Aerodynamics of Projectiles", por Peter Brancazio, en *Fundamentals of Physics*, 3a. ed., por David Halliday y Robert Resnick (Wiley, 1988).

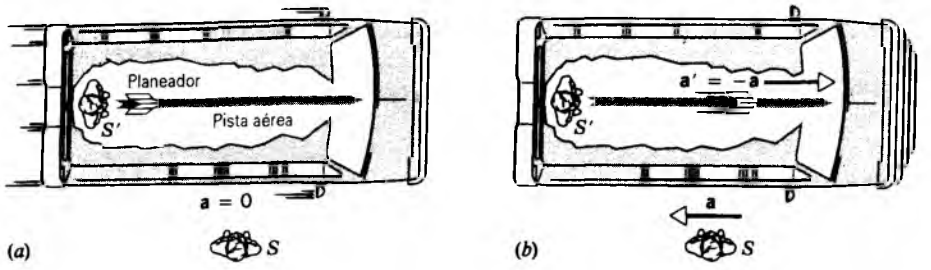



**Figura 17** (*a*) Un observador *S* en tierra ve al observador *S'* que viaja en una vagoneta a velocidad constante. Ambos observadores están en marcos de referencia inerciales. (*b*) La vagoneta frena con aceleración constante *a* según el observador *S*. El observador *S'*, ahora en un marco de referencia no inercial, ve al planeador que se mueve hacia adelante en su pista con aceleración constante $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}$. El observador *S'* aprecia este movimiento en función de una seudofuerza.

Las seudofuerzas son muy reales para aquellos que las experimentan. Imagínese que usted viaja en un automóvil que avanza por una curva a la izquierda. Para un observador en tierra, el automóvil está experimentando una aceleración centrípeta y, por lo tanto, constituye un marco de referencia no inercial. Si el automóvil tiene asientos de vinilo lisos, usted advertirá que resbala en el asiento hacia la derecha. Para el observador en tierra, que está en un marco inercial, esto es bastante natural: su cuerpo está simplemente tratando de obedecer a la primera ley de Newton y se mueve en línea recta, y es el automóvil el que se desliza hacia la izquierda por debajo de usted. Desde su punto de vista en el marco de referencia no inercial del automóvil, usted debe atribuir su movimiento de deslizamiento a una seudofuerza que jala de usted hacia la derecha. Este tipo de seudofuerza se llama *fuerza centrífuga*, o sea una fuerza dirigida *hacia fuera desde* el centro.

Si usted se sube a un tiovivo, estará nuevamente en un marco de referencia acelerado y, por lo tanto, no inercial, en el cual los objetos se moverán aparentemente hacia afuera del eje de rotación bajo la influencia de la fuerza centrífuga. Si usted sujeta una pelota en su mano, le parecerá que está en equilibrio, por estar la fuerza centrífuga hacia afuera equilibrada por la fuerza hacia adentro ejercida sobre la pelota por su mano. Para un observador en tierra, el cual está en un marco de referencia inercial, la pelota se está moviendo en un círculo, acelerando hacia el centro bajo la influencia de la fuerza *centrípeta* que usted ejerce sobre ella con su mano. Para el observador en tierra, no existe una fuerza centrífuga porque la pelota no está en equilibrio: está acelerada radialmente hacia adentro.

Las seudofuerzas pueden ser usadas como base de aparatos prácticos. Consideremos la centrifugadora, uno de los instrumentos de laboratorio más útiles. Al moverse rápidamente una mezcla de sustancias en círculo, las sustancias con mayor cantidad de masa experimentan una mayor fuerza centrífuga $mv^2/r$ y se mueven alejándose del eje de rotación. La centrifugadora usa entonces una seudofuerza para separar sustancias por su masa, precisamente como el espectrómetro de masas (secciones 1-5 y 5-4) usa una fuerza electromagnética para separar a los átomos por sus masas.

Otra seudofuerza es la llamada fuerza *Coriolis*. Supongamos que usted hace rodar a una pelota hacia adentro a velocidad constante siguiendo una línea radial pintada en el piso de un tiovivo que está girando. En el instante en que usted la suelta en el radio *r*, tiene precisamente la velocidad tangencial correcta (la misma que la de usted) del movimiento circular. A medida que se mueve hacia adentro tomará una velocidad tangencial más pequeña que mantenga su movimiento circular en la misma cantidad que su entorno inmediato. A causa de que no hay manera de que pierda su velocidad tangencial (suponemos poca fricción entre la pelota y el piso), se mueve un poco hacia adelante de la línea pintada que representa una velocidad rotacional uniforme. Esto es, en su marco de referencia no inercial en giro usted sugeriría que hay una seudofuerza lateral (una fuerza Coriolis) que hace que la pelota se desvíe poco a poco de la línea cuando rueda hacia adentro. Para un observador en tierra, en un marco inercial, no existe fuerza Coriolis alguna: la pelota se mueve en línea recta a una velocidad que es determinada por las componentes de su velocidad en el instante en que la soltó.

Quizá el ejemplo más conocido de los efectos de la fuerza Coriolis está en el movimiento de la atmósfera alrededor de centros de baja o de alta presión. La figura 18 muestra un diagrama de un centro de baja presión en el hemisferio norte. A causa de que la presión es más baja que la del entorno, el aire fluye radialmente hacia adentro en todas las direcciones. Al girar la Tierra (formando un marco no inercial), el efecto es similar al de la pelota en el tiovivo: el aire que viene desde el sur se mueve un tanto adelante de una línea imaginaria trazada sobre la Tierra que está girando, mientras que el aire del norte (como una pelota que rodara hacia afuera en el tiovivo) se atrasa un tanto con respecto a la misma línea. El efecto total es que el aire gira en dirección contraria a las manecillas del reloj alrededor del centro de baja presión. Este efecto Coriolis es, pues, el causante de la circulación de los vientos en un ciclón o en un huracán. En el hemisferio sur los efectos se invierten.

En el movimiento de obuses de artillería de largo alcance es necesario hacer correcciones por el efecto Coriolis de la rotación de la Tierra. Para un obús típico de 10 km de alcance, el efecto Coriolis puede causa una desviación de hasta 20 m. Tales correcciones se introducen en los programas de computación usados para controlar la puntería y el disparo de armas de largo alcance. Sin embargo, las cosas pueden fallar, según lo descubrió la Marina británica en una batalla de la Primera Guerra Mundial cerca de las islas Malvinas o Falkland. Sus manuales para el control del disparo fueron escritos para el hemisferio norte, y las islas Falkland están en el hemisferio sur, donde la corrección Coriolis debe hacerse en dirección opuesta. Los obuses británicos aterrizaban a unos 100 m de sus blancos, ¡porque la corrección por el efecto Coriolis se había hecho en la dirección contraria!

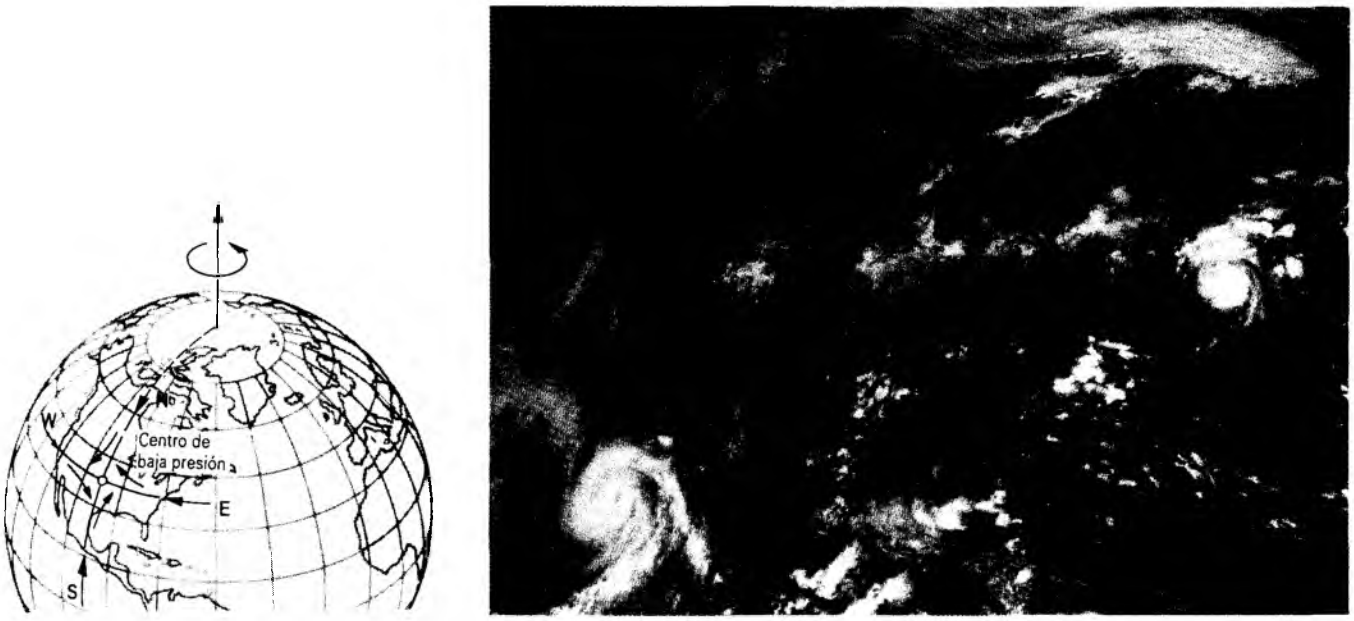



**Figura 18** Un centro de baja presión en la Tierra en rotación. Cuando el aire fluye hacia adentro, los observadores no inerciales situados en el hemisferio norte apreciarían un giro en sentido contrario a las manecillas del reloj. Un huracán (en la foto) es un centro de baja presión con tales características.

Así pues, en problemas mecánicos tenemos dos disyuntivas: (1) escoger un marco de referencia *inercial* y considerar fuerzas "reales" solamente, esto es, fuerzas que puedan ser asociadas con cuerpos definidos del entorno, o (2) escoger un marco de referencia *no inercial* y considerar no sólo las fuerzas "reales" sino también las seudofuerzas definidas apropiadamente. Aunque por lo general elegimos la primera alternativa, a veces elegimos la segunda; ambas son completamente equivalentes y la elección es sólo un asunto de conveniencia. ■

## 6-9 LIMITACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON *(Opcional)*

En los primeros seis capítulos hemos descrito un sistema para analizar el comportamiento mecánico con una gama de aplicaciones aparentemente vasta. Con poco más que las ecuaciones de las leyes de Newton podemos diseñar grandes rascacielos y puentes colgantes, o incluso planear la trayectoria de un vehículo espacial interplanetario (Fig. 19). La mecánica newtoniana, que proporcionó estas herramientas de cálculo, constituyó el primer desarrollo verdaderamente revolucionario de la física teórica.

He aquí un ejemplo de nuestra fe en las leyes de Newton. A menudo se observa que las galaxias y los agrupamientos de galaxias giran, y a partir de la observación podemos deducir la velocidad de la rotación. A partir de ello podemos calcular la cantidad de materia que debe estar presente en la galaxia o en el cúmulo de galaxias para que la gravedad proporcione la fuerza centrípeta que corresponde a la rotación observada. Empero, la cantidad de materia que observamos realmente con los telescopios es mucho menor de lo que sería de esperarse. Por lo tanto, ha sido propuesta la existencia de una "materia oscura" adicional que no puede ser vista con los telescopios pero que debe estar presente para proporcionar la fuerza de gravitación necesaria. Hasta ahora, no existe un candidato convincente para el tipo o naturaleza de esta materia oscura y, por lo tanto, han sido propuestas otras explicaciones para la aparente inconsistencia entre la cantidad de materia realmente observada en las galaxias y la cantidad que pensamos se necesita para satisfacer las leyes de Newton. Una explicación propuesta es que nuestros cálculos son incorrectos porque las leyes de Newton no son válidas a escala muy grande, esto es, cuando las aceleraciones son muy pequeñas (menos de unas cuantas veces $10^{-10}$ m/s$^2$). En particular, se ha propuesto que, para estas aceleraciones muy pequeñas, la fuerza sea proporcional a $a^2$ en lugar de $a$.

La figura 20 muestra los resultados de un experimento reportado recientemente y que prueba esta hipótesis. Si la fuerza dependiese de la aceleración con una potencia distinta a 1, los datos no caerían sobre una línea recta. De este experimento extremadamente preciso concluimos que para aceleraciones tan pequeñas como 10 m/s$^{-10}$ m/s$^2$, la fuerza es propocional a la aceleración y la segunda ley de Newton se cumple.

En nuestro siglo, hemos conocido otros tres desarrollos revolucionarios: la teoría especial de la relatividad de Einstein (1905), su teoría general de la relatividad (1915), y la mecánica cuántica (alrededor de 1925). La relatividad especial nos enseña que no podemos extrapolar el uso de las leyes de Newton a partículas que se mueven a una velocidad comparable a la velocidad de la luz. La teoría general de la relatividad demuestra que no podemos usar las leyes de Newton en la vecindad de una fuerza de gravitación muy fuerte. La mecánica cuántica nos enseña que no podemos extrapolar las leyes de Newton a elementos tan pequeños como los átomos.

La relatividad especial, que implica una visión notoriamente no newtoniana del espacio y el tiempo, puede aplicarse en todas las circunstancias, tanto para altas como para bajas velocidades. En el límite de las velocidades bajas, puede demostrarse que la dinámica de la relatividad especial se reduce directamente a las leyes de Newton. De manera similar, la relatividad general

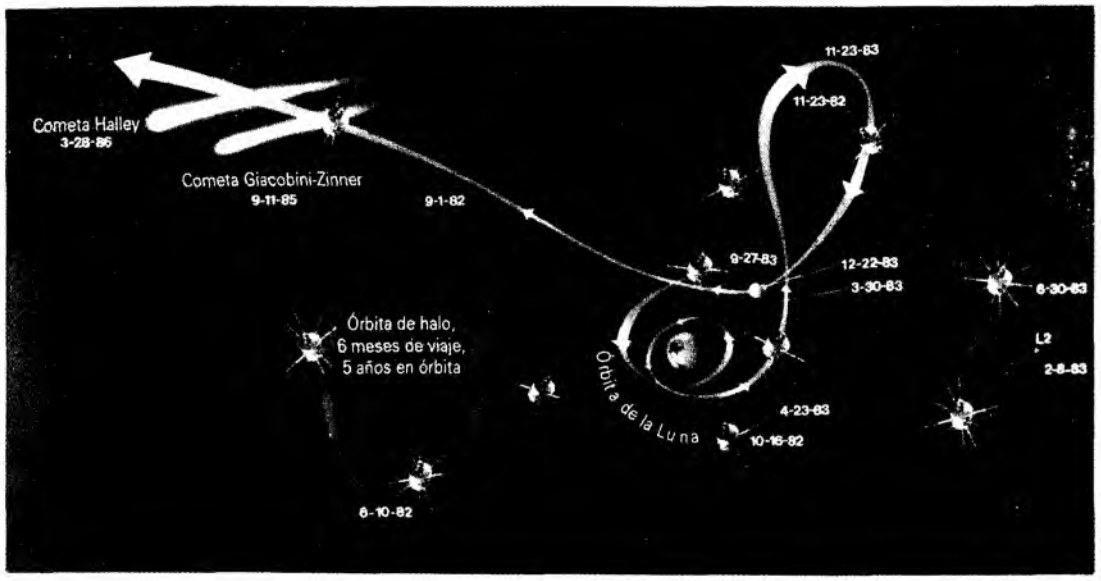



**Figura 19** Un triunfo de la mecánica newtoniana. Lanzado en 1978, el vehículo espacial International Planetary Explorer (Explorador planetario internacional) estuvo girando durante 4 años alrededor del punto $L_1$, analizando el viento solar. Luego exploró la cauda magnética de la Tierra desde una órbita situada en el lado de la noche; luego encontró la cauda del cometa Giacobini-Zinner en 1985 y pasó por el cometa Halley en 1986. Ahora en crucero interplanetario, retornará a la vecindad de la Tierra en el año 2012. Su viaje ha implicado hasta ahora 37 encendidos de sus motores y 5 vuelos en las cercanías de la Luna.

puede ser aplicada lo mismo a fuerzas de gravitación débiles que fuertes, pero sus ecuaciones se reducen a las leyes de Newton para las fuerzas débiles. La mecánica cuántica puede aplicarse a los átomos individuales, donde se predice un cierto comportamiento al azar, o a objetos ordinarios que contengan un número enorme de átomos, en cuyo caso el azar se promedia para dar nuevamente las leyes de Newton.

En la pasada década ha surgido otro desarrollo aparentemente revolucionario. Este nuevo desarrollo concierne a los sistemas




**Figura 20** Resultados de un experimento reciente para probar si la segunda ley de Newton es válida para aceleraciones pequeñas, menores de $10^{-9}$ m/s$^2$. La línea recta demuestra que la aceleración es proporcional a la fuerza aplicada hasta $10^{-10}$ m/s$^2$ y, por tanto, la ley de Newton es válida aun para esas pequeñísimas aceleraciones.

mecánicos cuyo comportamiento se describe como *caótico*. Uno de los pilares de las leyes de Newton es su posibilidad de predecir el comportamiento futuro de un sistema, si conocemos las fuerzas que actúan y el movimiento inicial. Por ejemplo, a partir de la posición y la velocidad iniciales de una sonda espacial que experimente fuerzas conocidas de gravitación desde el Sol y los planetas, podemos calcular su trayectoria exacta. Por otra parte, consideremos una ramita flotando en una corriente turbulenta. Aun cuando en todo momento actúan sobre ella fuerzas regidas por la mecánica newtoniana, su trayectoria corriente abajo es totalmente impredecible. Si se sueltan dos ramitas juntas en la corriente, pueden ser encontradas corriente abajo muy apartadas entre sí. Un tema particular de la dinámica caótica es que pequeños cambios en las condiciones iniciales de un problema pueden amplificarse extraordinariamente y causar diferencias sustanciales en las predicciones. La dinámica caótica es a menudo invocada en la predicción del tiempo, y se ha llegado a decir que el revoloteo de una mariposa en Japón puede estar relacionado con el desarrollo posterior de un huracán sobre el Golfo de México.

Tales movimientos caóticos ocurren no sólo en sistemas complejos como la corriente turbulenta sino también en sistemas físicos sencillos, como un péndulo, la llave o grifo del agua que gotea lentamente, o un circuito eléctrico oscilante. En la década de 1960 se descubrió que el comportamiento aparentemente caótico de estos sistemas encierra un orden y regularidad ocultos, cuyo estudio ha constituido el núcleo de una nueva rama de la ciencia, el *caos*.* Se han hallado aplicaciones de las

* Véase *Chaos—Making a New Science*, por James Gleick (Penguin Books,1987).

leyes del caos no sólo en sistemas físicos sino también en sistemas biológicos. Aun áreas de la ciencia social, tales como la economía y la dinámica de la población, muestran un comportamiento caótico.

Los cálculos que combinan la mecánica newtoniana de las partículas con la teoría del caos han demostrado que la órbita del planeta Plutón es caótica en una escala de tiempo de decenas de millones de años (un tiempo corto comparado con la edad del sistema solar, de alrededor de 4500 millones de años, pero un tiempo largo comparado con el periodo orbital de Plutón alrededor del Sol, de alrededor de 250 años). La teoría del caos ha sido también empleada para explicar dos propiedades del cinturón de asteroides (situado entre las órbitas de Marte y de Júpiter) que no podrían ser explicadas dentro del marco de la mecánica newtoniana convencional: (1) muchos asteroides se desvían de lo que deberían ser órbitas estables, algunos de ellos se vuelven meteoritos que llueven continuamente sobre la Tierra, y (2) dentro del cinturón de asteroides hay varios huecos vacíos donde el número de asteroides en órbita es pequeño o cero. Hace apenas una década que las computadoras de alta velocidad han permitido el seguimiento mediante cálculos detallados de la dinámica de tales sistemas, debido a las escalas de tiempo necesarias para observar este comportamiento inusual, y conforme se van haciendo cálculos adicionales continúan descubriéndose nuevas aplicaciones de este emocionante campo. ■

## PREGUNTAS

1. Existe un límite más allá del cual, al seguir puliendo una superficie, *aumenta* la resistencia por fricción en lugar de disminuir. Explique por qué.
2. Una caja, con un peso mayor que usted, descansa sobre un suelo rugoso. El coeficiente de fricción estática entre la caja y el suelo es el mismo que entre las suelas de sus zapatos y el suelo. ¿Puede usted empujar la caja a través del suelo? Véase la figura 21.

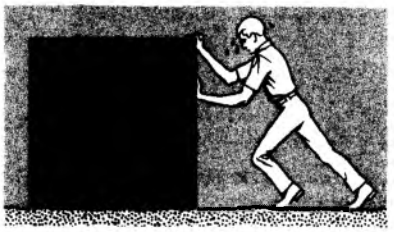


**Figura 21** Pregunta 2.

3. En el béisbol, un corredor puede por lo general llegar a una base más rápidamente corriendo que deslizándose. Explique por qué esto es así. ¿Por qué se deslizan, entonces?
4. ¿Cómo podría llegar una persona, que está en reposo sobre el hielo que cubre un estanque, completamente sin fricción, llegar a la orilla? ¿Podría hacerlo caminando, rodando, balanceando sus brazos, o pataleando? ¿Cómo podría colocarse una persona, en tal posición?
5. ¿Por qué las llantas de un automóvil se "agarran" a la carretera mejor sobre un terreno a nivel que cuando se sube o se baja una pendiente?
6. ¿Cuál es el propósito de las superficies curvas (llamadas spoilers), que se colocan en la parte trasera de los automóviles deportivos? Están diseñadas para que el flujo del aire, al pasar por ellas, ejerza una fuerza hacia abajo.
7. Dos superficies están en contacto, pero en reposo una respecto a la otra. Sin embargo, cada una ejerce una fuerza de fricción sobre la otra. Explíquelo.
8. Su automóvil patina en una carretera helada, cruzando la línea central. ¿Debería usted girar las ruedas frontales en dirección del resbalón o en la dirección opuesta (*a*) cuando quiere evitar un choque con otro automóvil que avanza en sentido opuesto y (*b*) cuando ningún otro automóvil está cerca pero usted quiere recuperar el control del volante? Suponga primero el impulso en las ruedas traseras y después en las delateras.
9. ¿Por qué los corredores de autos aumentan su velocidad al dar una curva?
10. Está usted piloteando un aeroplano a una altitud constante cuando desea hacer un giro de 90°. ¿Por qué se ladea para ello?
11. Cuando un perro mojado se sacude, salpica y moja a quien está cerca de él. ¿Por qué salpica el agua en esa dirección?
12. Habrá usted notado (Einstein así lo hizo) que cuando usted revuelve el té dentro de la taza, las hojas de té que flotan se acumulan en el centro de la taza en lugar de hacerlo en el borde exterior. ¿Puede usted explicar por qué? (Einstein pudo.)
13. Supongamos que usted necesita medir si la cubierta de una mesa en un tren es realmente horizontal. Si emplea un nivel de burbuja, ¿puede usted comprobarlo cuando el tren sube o baja una pendiente? ¿Cuando el tren recorre una curva? (*Sugerencia:* Existen dos componentes horizontales.)
14. En el péndulo cónico, ¿qué le pasa al periodo y a la velocidad cuando $\theta = 90°$? ¿Por qué no puede alcanzarse este ángulo físicamente? Explique el caso para $\theta = 0°$.
15. Se coloca una moneda sobre la tornamesa de un tocadiscos. El motor se pone en marcha pero, antes de que se alcance la velocidad de rotación final, la moneda sale despedida. Explique por qué.
16. Un auto está marchando sobre un camino rural que se parece a una montaña rusa. Si el auto viaja a velocidad

uniforme, compare la fuerza que ejerce sobre una sección horizontal del camino con la fuerza que ejerce sobre el camino en la cima de una colina y en la parte baja de la colina. Explique.

17. Usted conduce una vagoneta a velocidad uniforme a lo largo de una carretera recta. Un balón de playa descansa en el centro de la plataforma de la vagoneta y un globo lleno de helio flota sobre él, tocando el techo de la vagoneta. ¿Qué le sucede a cada uno si usted (*a*) toma una curva a velocidad constante o (*b*) acciona los frenos?
18. Explique cómo debe hacerse la elección del ángulo de tiro de un proyectil en función de la resistencia del aire para obtener el máximo alcance.
19. ¿Qué gotas de lluvia caen más aprisa: las pequeñas o las grandes?
20. La velocidad terminal de una bola de béisbol es de 95 mi/h. Sin embargo, las mediciones de la velocidad de las bolas lanzadas suelen superar esa velocidad, llegando a ser de más de 100 mi/h. ¿Cómo puede ser esto?
21. Describa el movimiento de un objeto disparado verticalmente hacia abajo a una velocidad inicial mayor que su velocidad terminal.
22. Un leño está flotando corriente abajo. ¿Cómo podría usted calcular la fuerza de arrastre que actúa sobre él?
23. Usted deja caer dos objetos de masas diferentes simultáneamente desde lo alto de una torre. Demuestre que, si usted supone que la resistencia del aire tiene el mismo valor constante para cada objeto, el que tiene una masa más grande llegará al suelo primero. ¿Qué tan buena es esta hipótesis?
24. ¿Por qué en la tabla 2 se lee "95% de la distancia" y no "100% de la distancia"?
25. ¿Cómo afecta la rotación de la Tierra al peso aparente de un objeto en el ecuador?
26. Explique por qué una plomada no cuelga exactamente en dirección de la atracción gravitatoria de la Tierra en la mayoría de las latitudes.
27. Los astronautas que se hallan en un taxi espacial en órbita quieren llevan un registro diario de su peso. ¿Puede usted imaginar cómo podrían hacerlo, considerando que "no tienen peso"?
28. Explique por qué la pregunta "¿Cuál es la velocidad lineal de un punto en el ecuador?" requiere hacerse teniendo en cuenta el marco de referencia empleado. Demuestre cómo cambia la respuesta si los marcos de referencia cambian también.
29. ¿Cuál es la diferencia entre los marcos de referencia inerciales y los que difieren solamente por una traslación o una rotación de los ejes?
30. Un pasajero situado en el asiento frontal de un automóvil se da cuenta de que se desliza hacia la puerta cuando el conductor toma súbitamente una curva hacia la izquierda. Describa las fuerzas sobre el pasajero y sobre el automóvil en ese instante si el movimiento es visto desde un marco de referencia (*a*) fijo en la Tierra y (*b*) fijo en el automóvil.
31. ¿Tiene usted que preocuparse del efecto Coriolis cuando juega tenis o golf? Si no, ¿por qué?
32. Supongamos que usted está parado en el balcón de una torre alta, mirando hacia el este. Deja caer un objeto de modo que llegue al suelo; véase la figura 22. Supongamos también que usted puede localizar el punto de impacto con mucha precisión. ¿Golpeará el objeto al suelo en *a*, verticalmente abajo del punto en que lo soltó, en *b* hacia el este, o en *c* hacia el oeste? El objeto se dejó caer desde el reposo; la Tierra gira de oeste a este.

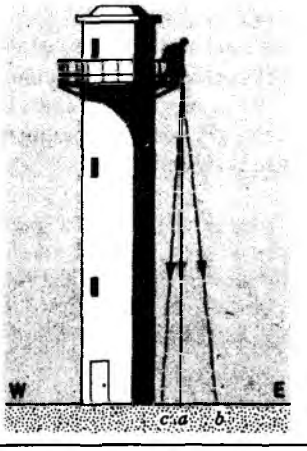



**Figura 22** Pregunta 32.

33. Demuestre con un argumento cualitativo que, a causa de la rotación de la Tierra, un viento en el hemisferio norte que sopla de norte a sur se desviará hacia la derecha. Qué pasa con un viento que esté soplando de sur a norte? ¿Cuál es la situación en el hemisferio sur?

## PROBLEMAS

### *Sección 6-2 Fuerzas de fricción*

1. El coeficiente de fricción estática entre el *teflón* y los huevos revueltos es de alrededor de 0.04. ¿Cuál es el ángulo más pequeño desde la horizontal que provocará que los huevos resbalen en el fondo de una sartén recubierta con teflón?
2. Suponga que sólo las ruedas traseras de un automóvil pueden acelerarlo, y que la mitad del peso total del automóvil lo soportan esas ruedas. (*a*) ¿Cuál es la aceleracion máxima posible si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la carretera es $\mu_s$? (*b*) Tome $\mu_s = 0.56$ y obtenga un valor numérico para esta aceleración.

3. ¿Cuál es la mayor aceleración a la que puede llegar un corredor si el coeficiente de fricción estática entre los zapatos y el camino es de 0.95?
4. Un jugador de béisbol (Fig. 23) con una masa de 79 kg, que se desliza hacia una base, es retenido por una fuerza de fricción de 470 N. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética entre el jugador y el terreno?



**Figura 23** Problema 4.

5. Se usa una barra horizontal para sostener un objeto de 75 kg entre dos muros, como se muestra en la figura 24. Las fuerzas iguales $F$ ejercidas por la barra contra los muros pueden cambiarse ajustando la longitud de la barra. Al sistema lo sostiene solamente la fricción entre los extremos de la barra y los muros. El coeficiente de fricción estática entre la barra y los muros es de 0.41. Halle el valor mínimo de las fuerzas $F$ para obtener el equilibrio.

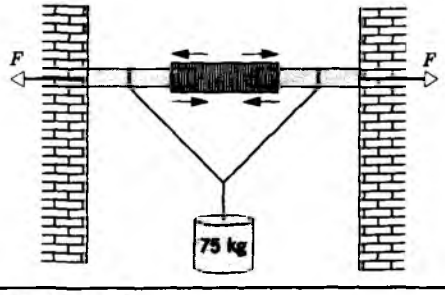



**Figura 24** Problema 5.

6. Un baúl de 53 lb (= 240 N) descansa sobre el suelo. El coeficiente de fricción estática entre el baúl y el suelo es de 0.41, mientras que el coeficiente de fricción cinética es de 0.32. (*a*) ¿Cuál es la fuerza horizontal mínima con la que una persona debe empujar al baúl para que comience a moverse? (*b*) Una vez que se está moviendo, ¿qué fuerza horizontal debe aplicar la persona para que el baúl siga moviéndose a velocidad constante? (*c*) Si, en su lugar, la persona continuara empujando con la fuerza empleada para iniciar el movimiento, ¿cuál sería la aceleración del baúl?
7. El coeficiente de fricción estática entre las llantas de un automóvil y una carretera seca es de 0.62. La masa del automóvil es de 1500 kg. ¿Cuál es la fuerza de frenado máxima obtenible (*a*) sobre una carretera a nivel y (*b*) sobre una bajada de 8.6°?
8. Una casa está construida en la cima de una colina que tiene un talud de 42°. Un desplome posterior del material de la superficie del talud indica que su gradiente debería ser reducido. Si el coeficiente de fricción de suelo contra suelo es de 0.55, ¿*en qué ángulo* $\phi$ adicional (véase la Fig. 25) debería ser corregida la superficie del talud?

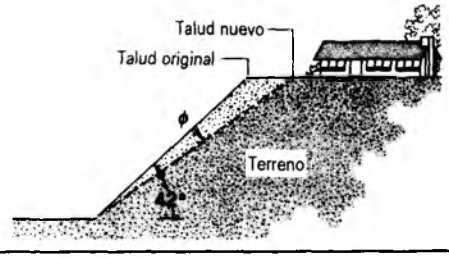



**Figura 25** Problema 8.

9. Una fuerza horizontal $F$ de 12 lb empuja a un bloque que pesa 5.0 lb contra una pared vertical (Fig. 26). El coeficiente de fricción estática entre la pared y el bloque es de 0.60 y el coeficiente de fricción cinética es de 0.40. Suponga que el bloque no se está moviendo inicialmente. (*a*) ¿Comenzará a moverse el bloque? (*b*) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre el bloque por la pared?

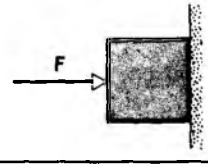



**Figura 26** Problema 9.

10. Una caja de 136 kg está en reposo sobre el suelo. Un hombre intenta empujarla por el suelo aplicando una fuerza de 412 N horizontalmente. (*a*) Tome el coeficiente de fricción estática entre la caja y el piso como de 0.37 y demuestre que la caja no se mueve. (*b*) Un segundo hombre ayuda a jalar de la caja. ¿Cuál es la fuerza vertical mínima que deberá aplicar para que la caja pueda moverse? (*c*) Si el segundo

hombre aplica una fuerza horizontal en lugar de vertical, ¿qué fuerza mínima, adicional a la fuerza de 412 N del primer hombre, deberá ejercer para hacer que se mueva la caja?

**11.** Un bloque de 7.96 kg descansa sobre un plano inclinado a 22° respecto a la horizontal, como lo muestra la figura 27. El coeficiente de fricción estática es de 0.25, mientras que el coeficiente de fricción cinética es de 0.15. (*a*) ¿Cuál es la fuerza $F$ mínima, paralela al plano, que impedirá que el bloque se deslice por el plano hacia abajo? (*b*) ¿Cuál es la fuerza $F$ necesaria para mover al bloque hacia arriba a velocidad constante?

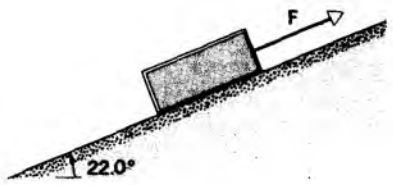



**Figura 27** Problema 11.

**12.** Un estudiante desea determinar los coeficientes de fricción estática y cinética entre una caja y un tablón. Coloca la caja sobre el tablón y gradualmente eleva un extremo del tablón. Cuando el ángulo de inclinación respecto a la horizontal alcanza 28.0°, la caja comienza a deslizarse y desciende 2.53 m por el tablón en 3.92 s. Halle los coeficientes de fricción.

**13.** Una persona desea apilar arena sobre un área circular en su patio. El radio del círculo es $R$. No debe apilarse arena en la parte de alrededor del círculo; véase la figura 28. Demuestre que el mayor volumen de arena que puede ser apilado de esta manera es $\pi\mu_s R^3/3$, donde $\mu_s$ es el coeficiente de fricción estática de arena contra arena. (El volumen de un cono es $Ah/3$, donde $A$ es el área de la base y $h$ es la altura.)

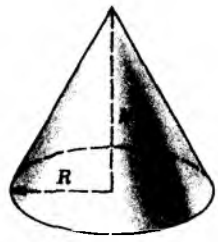



**Figura 28** Problema 13.

**14.** El calor de fricción generado por el esquí al moverse es el principal factor que promueve el deslizamiento al esquiar. El esquí se pega en el arranque, pero una vez en movimiento fundirá la nieve bajo él. El hecho de encerar el esquí lo hace repelente al agua y reduce la fricción con la película de agua. Una revista reporta que un nuevo tipo de esquí de plástico es aun más repelente al agua y que, en una pendiente suave de 230 m en los Alpes, un esquiador redujo su tiempo de 61 a 42 s con los nuevos esquíes. Suponiendo una pendiente de 3.0°, calcule el coeficiente de fricción cinética para cada caso.

**15.** Un bloque se desliza por un plano inclinado con un ángulo de pendiente $\theta$ a velocidad constante. Luego es lanzado hacia arriba por el mismo plano con una velocidad inicial $v_0$. (*a*) ¿A qué distancia subirá por el plano antes de llegar al reposo? (*b*) ¿Se deslizará de nuevo hacia abajo?

**16.** Un trozo de hielo se desliza desde el reposo por un plano inclinado rugoso de 33.0° en el doble del tiempo que le toma deslizarse por otro plano igual, pero sin fricción, de la misma longitud. Halle el coeficiente de fricción cinética entre el hielo y el plano inclinado rugoso.

**17.** En la figura 29, $A$ es un bloque de 4.4 kg y $B$ es un bloque de 2.6 kg. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre $A$ y la mesa son de 0.18 y 0.15. (*a*) Determine la masa mínima del bloque $C$ que debe colocarse sobre $A$ para evitar que se deslice. (*b*) El bloque $C$ es levantado súbitamente de $A$. ¿Cuál es la aceleración del bloque $A$?

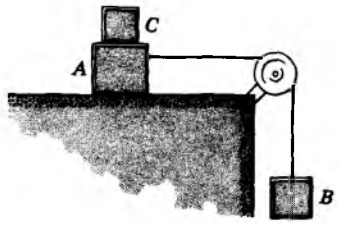



**Figura 29** Problema 17.

**18.** Un bloque de 4.8 kg que está sobre un plano inclinado a 39° recibe la acción de una fuerza horizontal de 46 N (véase la Fig. 30). El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es de 0.33. (*a*) ¿Cuál es la aceleración del bloque cuando se mueve hacia arriba por el plano? (*b*) Con la fuerza horizontal aplicada todavía, ¿qué tanto subirá el bloque por el plano si tiene una velocidad inicial hacia arriba de 4.3 m/s? (*c*) ¿Qué le sucede al bloque después de que ha llegado al punto más alto?

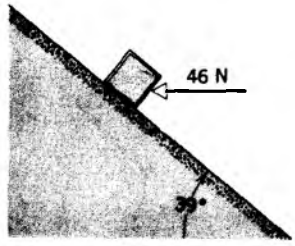



**Figura 30** Problema 18.

**19.** Un bloque de acero de 12 kg está en reposo sobre una mesa horizontal. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la mesa es de 0.52. (*a*) ¿Cuál es la magnitud de

la fuerza horizontal que haría que el bloque empezara a moverse? (*b*) ¿Cuál es la magnitud de una fuerza que actuase hacia arriba formando 62° con la horizontal que hiciera que el bloque inicie su movimiento? (*c*) Si la fuerza actúa hacia abajo formando un ángulo de 62° con la horizontal, ¿a qué magnitud puede llegar sin que haga que el bloque se mueva?

**20.** El mango de un trapeador de masa $m$ forma un ángulo $\theta$ con la dirección vertical; véase la figura 31. Sea $\mu_k$ el coeficiente de fricción cinética entre el trapeador y el piso y $\mu_s$ el coeficiente de fricción estática. Desprecie la masa del mango. (*a*) Halle la magnitud de la fuerza $F$ dirigida a lo largo del mango necesaria para deslizar al trapeador a velocidad uniforme por el piso. (*b*) Demuestre que si $\theta$ es más pequeño que cierto ángulo $\theta_0$, no puede hacerse que el trapeador se deslice por el piso, no importa qué tan grande sea la fuerza ejercida a lo largo del mango. ¿Cuál es el ángulo $\theta_0$?

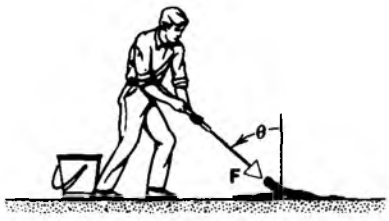



**Figura 31** Problema 20.

**21.** Un obrero arrastra una caja de 150 lb por un piso jalando de ella por medio de una cuerda inclinada a 17° con respecto a la horizontal. El coeficiente de fricción estática es de 0.52 y el coeficiente de fricción cinética es de 0.35. (*a*) ¿Qué tensión se requiere en la cuerda para hacer que la caja comience a moverse? (*b*) ¿Cuál es la aceleración inicial de la caja?

**22.** Un alambre se romperá cuando la tensión exceda de 1.22 kN. Si el alambre, no necesariamente horizontal, se emplea para arrastrar una caja por el piso, ¿cuál es el peso más grande que puede ser movido si el coeficiente de fricción estática es de 0.35?

**23.** La figura 32 muestra la sección ttransversal de un camino cortado en la ladera de una montaña. La línea llena $AA'$ representa un plano de estratificación débil en el cual es posible un deslizamiento. El bloque $B$ directamente arriba del camino está separado de la roca ladera arriba por una grieta grande (llamada *juntura*), de manera tal que sólo la fuerza de fricción entre el bloque y la probable superficie de falla impide el deslizamiento. La masa del bloque es de $1.8 \times 10^7$ kg, el ángulo de inclinación del plano de la falla es de 24°, y el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano es de 0.63. (*a*) Demuestre que el bloque no se deslizará. (*b*) En la juntura se filtra el agua, ejerciendo una fuerza hidrostática $F$ paralela a la inclinación del bloque. ¿Qué valor mínimo de $F$ provocaría un deslizamiento?

**24.** El bloque $B$ de la figura 33 pesa 712 N. El coeficiente de fricción estática entre el bloque $B$ y la mesa es de 0.25.

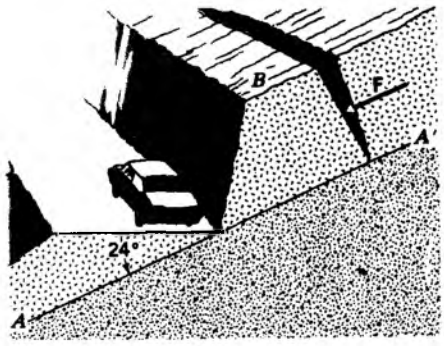



**Figura 32** Problema 23.

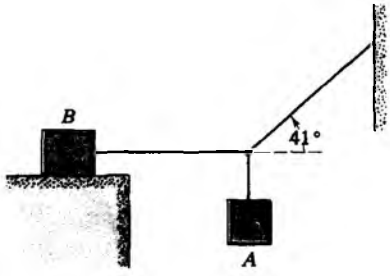



**Figura 33** Problema 24.

Halle el peso máximo del bloque $A$ con el que el sistema se mantendrá en equilibrio.

**25.** El bloque $m_1$ de la figura 34 tiene una masa de 4.20 kg y el bloque $m_2$ tiene una masa de 2.30 kg. El coeficiente de fricción cinética entre $m_2$ y el plano horizontal es de 0.47. El plano inclinado carece de fricción. Halle (*a*) la aceleración de los bloques y (*b*) la tensión en la cuerda.

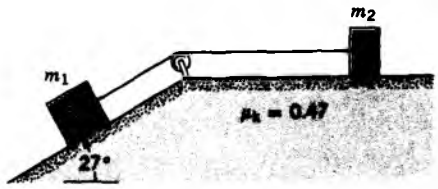



**Figura 34** Problema 25.

**26.** En la figura 35, el objeto $B$ pesa 94.0 lb y el objeto $A$ pesa 29.0 lb. Entre el objeto $B$ y el plano el coeficiente de fricción estática es de 0.56 y el coeficiente de fricción cinética es de 0.25. (*a*) Halle la aceleración del sistema si $B$ está inicialmente en reposo. (*b*) Halle la aceleración si $B$ se mueve por el plano hacia arriba. (*c*) ¿Cuál es la aceleración si $B$ se mueve por el plano hacia abajo? El plano tiene una inclinación de 42.0°.

**27.** Una caja se desliza hacia abajo por una canal inclinada y en ángulo recto como se muestra en la figura 36. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el material que componen la canal es $\mu_k$. Halle la aceleración de la caja.

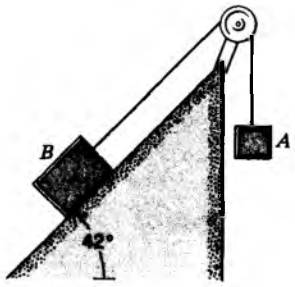



**Figura 35** Problema 26.




**Figura 36** Problema 27.

**28.** Los dos bloques, $m$ = 16 kg y $M$ = 88 kg, mostrados en la figura 37 pueden moverse libremente. El coeficiente de fricción estática entre los bloques es $\mu_s$ = 0.38, pero la superficie bajo $M$ carece de fricción. ¿Cuál es la fuerza horizontal mínima $F$ necesaria para mantener a $m$ contra $M$?

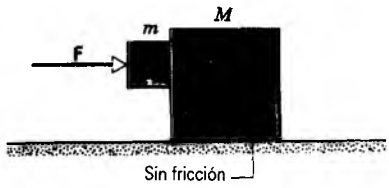



**Figura 37** Problema 28.

**29.** En la figura 38 se muestran dos objetos, con masas $m_1$ = 1.65 kg y $m_2$ = 3.22 kg, unidos por una varilla carente de masa paralela al plano inclinado por el que ambos se deslizan hacia abajo arrastrando $m_2$ a $m_1$. El ángulo del plano inclinado es $\theta$ = 29.5°. El coeficiente de fricción cinética entre $m_1$ y el plano inclinado es $\mu_1$ = 0.226; entre $m_2$ y el plano inclinado el coeficiente correspondiente es $\mu_2$ = 0.127. Calcule (*a*) la aceleración común de los dos objetos y (*b*) la tensión en la varilla. (*c*) ¿Cuáles serán las respuestas a (*a*) y (*b*) cuando $m_2$ arrastra a $m_1$?

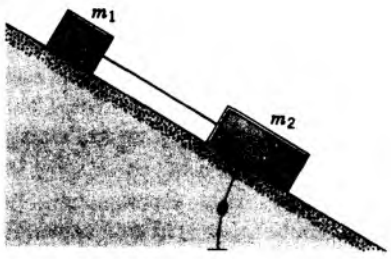



**Figura 38** Problema 29.

**30.** Un bloque de 4.40 kg está colocado sobre otro bloque de 5.50 kg. Con objeto de hacer que el bloque de arriba se deslice sobre el de abajo, que se mantiene fijo, debe aplicarse sobre el bloque de arriba una fuerza horizontal de 12.0 N. El conjunto de bloques es ahora situado sobre una mesa horizontal carente de fricción; véase la figura 39. Halle (*a*) la fuerza horizontal máxima $F$ que puede ser aplicada al bloque inferior de modo que ambos bloques se muevan juntos, (*b*) la aceleración resultante de los bloques, y (*c*) el coeficiente de fricción estática entre los bloques.

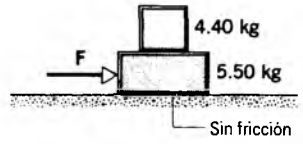



**Figura 39** Problema 30.

**31.** Una losa de 42 kg descansa sobre un piso sin fricción. Un bloque de 9.7 kg descansa a su vez sobre la losa, como en la figura 40. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la losa es de 0.53, mientras que el coeficiente de fricción cinética es de 0.38. El bloque de 9.7 kg recibe la acción de una fuerza horizontal de 110 N. ¿Cuáles son las aceleraciones resultantes de (*a*) el bloque y (*b*) la losa?

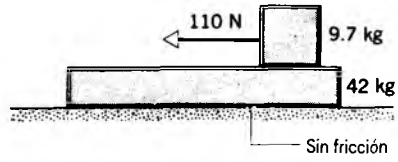



**Figura 40** Problema 31.

### *Sección 6.3 La dinámica del movimiento circular uniforme*

**32.** Durante una carrera olímpica de trineos, un equipo europeo toma una curva de 25 ft de radio a una velocidad de 60 mi/h. ¿Qué aceleración experimentan los contendientes (*a*) en ft/s² y (*b*) en unidades de $g$?

**33.** Un auto de 2400 lb (= 10.7 kN) que viaja a 30 mi/h (= 13.4 m/s) intenta tomar una curva no peraltada con un radio de 200 ft (= 61.0 m). (*a*) ¿Qué fuerza de fricción se requiere para mantener al auto en su trayectoria circular? (*b*) ¿Qué coeficiente de fricción estática mínimo se requiere entre las llantas y la carretera?

**34.** Una curva circular de una carretera está diseñada para un tráfico que transita a 60 km/h ( = 37 mi/h). (*a*) Si el radio de la curva es de 150 m (= 490 ft), ¿cuál es el ángulo correcto de peralte de la carretera? (*b*) Si la curva no estuviera peraltada, ¿cuál sería el coeficiente de fricción mínimo entre las llantas y la carretera que evitaría que el tráfico patine a esta velocidad?

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



**35.** Usted conduce un auto a una velocidad de 85 km/h cuando nota una barrera a través de la carretera a 62 m adelante. (*a*) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción estática entre las llantas y la carretera que le permitiría detenerse sin llegar a la barrera? (*b*) Suponga que conduce a 85 km/h en un gran estacionamiento vacío. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática mínimo que le permitiría hacer girar el auto en un círculo de 62 m de radio y, de esta manera, evitar el choque con un muro situado a 62 m más adelante?

**36.** Un *péndulo cónico* consta de un guijarro de 53 g atado a un cordel de 1.4 m. El guijarro oscila en un círculo de 25 cm de radio. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del guijarro? (*b*) ¿Cuál es su aceleración? (*c*) ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

**37.** Un ciclista (Fig. 41) viaja en un círculo de 25 m de radio a una velocidad constante de 8.7 m/s. La masa combinada de la bicicleta y el tripulante es de 85 kg. Calcule la fuerza (magnitud y ángulo con la vertical) ejercida por la pista sobre la bicicleta.



**Figura 41** Problema 37.

**38.** En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón gira en una órbita circular alrededor del núcleo. Si el radio es $5.3 \times 10^{-11}$ m y el electrón da $6.6 \times 10^{15}$ rev/s, Halle (*a*) la velocidad del electrón, (*b*) la aceleración del electrón, y (*c*) la fuerza que actúa sobre el electrón. (Esta fuerza es el resultado de la atracción entre el núcleo, cargado positivamente, y el electrón, cargado negativamente.)

**39.** Un niño coloca una canasta de merienda en el borde exterior de un tiovivo que tiene un radio de 4.6 m y gira una vez cada 24 s. ¿Qué tan grande deberá ser el coeficiente de fricción estática para que la canasta permanezca sobre el tiovivo?

**40.** Un disco de masa $m$ que está sobre una mesa sin fricción está atado a un cilindro colgante de masa $M$ por medio de un cordón que pasa por un orificio de la mesa (véase la Fig. 42). Halle la velocidad con que debe moverse el disco en un círculo de radio $r$ para que el cilindro permanezca en reposo.

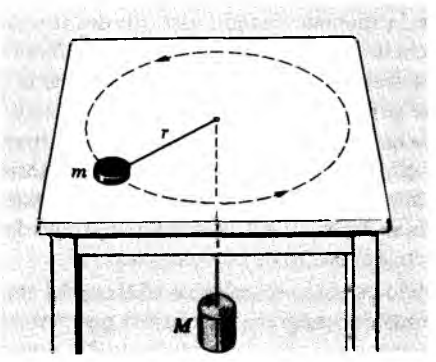



**Figura 42** Problema 40.

**41.** El manual del conductor afirma que un conductor que viaje a 48 km/h y quiera detenerse tan rápidamente como sea posible viajará 10 m antes de que ponga el pie sobre el freno. El auto viaja 21 m más antes de llegar al reposo. (*a*) ¿Qué coeficiente de fricción es supuesto en estos cálculos? (*b*) ¿Cuál es el radio mínimo para tomar una curva a 48 km/h sin patinar?

**42.** Una curva peraltada de una carretera circular está diseñada para que el tráfico se mueva a razón de 95 km/h. El radio de la curva es de 210 m. El tráfico se mueve a lo largo de la carretera a razón de 52 km/h en un día tormentoso. (*a*) ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo entre las llantas y la carretera que permita que los automóviles tomen la curva sin patinar? (*b*) Con este valor del coeficiente de fricción, ¿cuál es la velocidad mayor a la que puede ser tomada la curva sin que haya un patinaje?

**43.** Un estudiante de 150 lb que viaja en una rueda Ferris que gira uniformemente tiene un peso aparente de 125 lb en el punto más alto. (*a*) ¿Cuál es el peso aparente del estudiante en el punto más bajo? (*b*) ¿Cuál sería el peso aparente del estudiante en el punto más alto si la velocidad de la rueda Ferris se duplicara?

**44.** Un auto se mueve a velocidad constante sobre una carretera recta pero montañosa. Una sección tiene una cresta y un valle del mismo radio de 250 m; véase la figura 43. (*a*) Cuando el auto pasa sobre la cresta, la fuerza normal sobre el auto es un medio del peso de 16 kN del auto. ¿Cuál será la fuerza normal sobre el auto al pasar por el fondo del valle? (*b*) ¿Cuál es la velocidad máxima a que el auto puede moverse sin abandonar la carretera en la parte más alta de la cresta? (*c*) Moviéndose a la velocidad hallada en (*b*), ¿cuál sería la fuerza normal sobre el auto cuando se mueve por el fondo del valle?




**Figura 43** Problema 44.

**45.** Sobre una tornamesa horizontal y plana colocamos una pequeña moneda. Según se observa, la tornamesa da exactamente tres revoluciones en 3.3 s. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la moneda cuando gira sin deslizamiento a una distancia de 5.2 cm del centro de la tornamesa? (*b*) ¿Cuál es la aceleración (magnitud y dirección) de la moneda en la parte (*a*)? (*c*) ¿Cuál es la fuerza de fricción que actúa sobre la moneda en la parte (*a*) si la moneda tiene una masa de 1.7 g? (*d*) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre la moneda y la tornamesa si se observa que la moneda se desliza fuera de la tornamesa cuando está a más de 12 cm del centro de la tornamesa?

**46.** Un objeto pequeño se coloca a 13.0 cm del centro de una tornamesa de fonógrafo. Se observa que permanece sobre la tornamesa cuando gira a razón de $33\frac{1}{3}$ rev/min pero se desliza hacia afuera cuando gira a razón de 45.0 rev/min. ¿Entre qué límites deberá estar el coeficiente de fricción estática entre el objeto y la superficie de la tornamesa?

**47.** Un aeroplano está volando en un círculo horizontal a una velocidad de 482 km/h. Las alas del aeroplano están inclinadas a 38.2° respecto a la horizontal; véase la figura 44. Halle el radio del círculo en el cual está volando el aeroplano. Suponga que la fuerza centrípeta es proporcionada enteramente por la fuerza de ascenso perpendicular a la superficie de las alas.

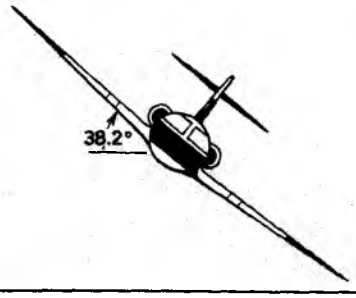



**Figura 44** Problema 47.

**48.** Un rabihorcado vuela remontándose en una trayectoria circular horizontal. Se estima que su ángulo de inclinación es de 25° y el pájaro emplea 13 s en completar un círculo. (*a*) ¿A qué velocidad está volando el pájaro? (*b*) ¿Cuál es el radio del círculo? (Véase "The Amateur Scientist", por Jearl Walker, *Scientific American*, Marzo 1985, pág. 122.)

**49.** Cierto cordón puede soportar una tensión máxima de 9.2 lb sin romperse. Un niño ata una piedra de 0.82 lb a un extremo y, manteniendo el otro extremo, hace girar a la piedra en un círculo vertical de 2.9 ft de radio, aumentando lentamente la velocidad hasta que el cordón se rompe. (*a*) ¿En qué lugar de su trayectoria está la piedra cuando se rompe el cordón? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la piedra al romperse el cordón?

**50.** Un modelo de aeroplano de 0.75 kg de masa, vuela a velocidad constante en un círculo horizontal en el extremo de un cordel de 33 m y a una altura de 18 m. El otro extremo del cordel está amarrado al suelo. El aeroplano da 4.4 rev/min y la fuerza ascensional es perpendicular a las alas sin peralte. (*a*) ¿Cuál es la aceleración del aeroplano? (*b*) ¿Cuál es la tensión en la cuerda? (*c*) ¿Cuál es la fuerza ascensional producida por las alas del aeroplano?

**51.** Supongamos que el kilogramo patrón pesaría exactamente 9.80 N al nivel del mar en el ecuador si la Tierra no girase. Entonces, tenga en cuenta el hecho de que la Tierra gira, de modo que este objeto se mueve en un círculo de 6370 km de radio (el radio de la Tierra) en un día. (*a*) Determine la fuerza centrípeta necesaria para mantener al kilogramo patrón en movimiento en su trayectoria circular. (*b*) Halle la fuerza ejercida por el kilogramo patrón sobre una báscula de resorte de la cual esté suspendido en el ecuador (su peso aparente).

**52.** Una bola de 1.34 kg está unida a una varilla vertical rígida por medio de dos cordones sin masa, cada uno de 1.70 m de longitud. Los cordones están unidos a la varilla con una separación entre sí de 1.7 m (aparte). El sistema está girando con respecto al eje de la varilla, quedando ambos cordones tirantes y formando un triángulo equilátero con la varilla, como se muestra en la figura 45. La tensión en el cordón superior es de 35.0 N. (*a*) Halle la tensión en el cordón inferior. (*b*) Calcule la fuerza neta sobre la bola en el instante mostrado en la figura. (*c*) ¿Cuál es la velocidad de la bola?

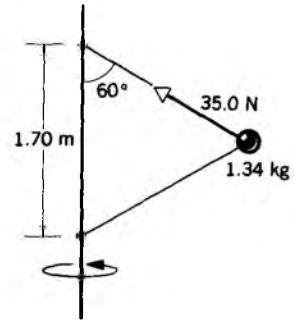



**Figura 45** Problema 52.

**53.** Un pequeñísimo cubo de masa $m$ se halla en el interior de un embudo (véase la Fig. 46) que gira alrededor de un eje vertical a una razón constante de $\nu$ revoluciones por segundo. La pared del embudo forma un ángulo $\theta$ con la horizontal. El coeficiente de fricción estática entre el cubo y el embudo es $\mu_s$ y el centro del cubo está a una distancia $r$ del eje de rotación. Halle (*a*) los valores mayor y (*b*) menor de $\nu$ para los cuales el cubo no se moverá con respecto al embudo.

**54.** A causa de la rotación de la Tierra, una plomada puede no colgar exactamente en la dirección de la fuerza de gravedad de la Tierra sobre la plomada, sino que se

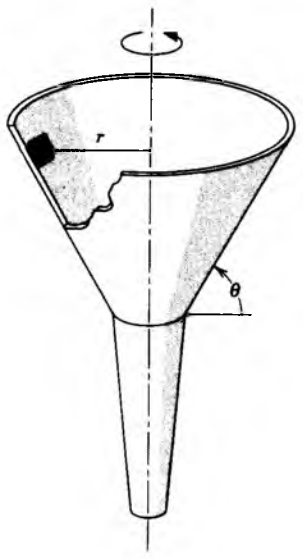



**Figura 46** Problema 53.

desvía ligeramente de esa dirección. (*a*) Demuestre que la desviación $\theta$ en radianes en un punto con latitud $L$ está dado por

donde $R$ es el radio de la Tierra y $T$ es el periodo de la rotación de la Tierra. (*b*) ¿En qué latitud adquiere la desviación un máximo? ¿De cuánto es esta desviación? (*c*) ¿Cuál es la desviación en los polos? ¿Y en el ecuador?

### *Sección 6-5 Fuerzas dependientes del tiempo: métodos analíticos*

**55.** La posición de una partícula de 2.17 kg de masa que viaje en línea recta está dada por

$$x = 0.179t^4 - 2.08t^2 + 17.1.$$

donde $x$ está en metros y $t$ está en segundos. Halle (*a*) la velocidad, (*b*) la aceleración, y (*c*) la fuerza sobre la partícula en el tiempo $t = 7.18$ s.

**56.** Una partícula de masa $m$ está sujeta a una fuerza neta $\mathbf{F}(t)$ dada por

$$\mathbf{F}(t) = F_0 \qquad \mathbf{i}$$

esto es, $F(t)$ es igual a $F_0$ en $t = 0$ y disminuye linealmente hasta cero en el tiempo $T$. La partícula pasa por el origen $x = 0$ con una velocidad $v_0\mathbf{i}$. Demuestre que en el instante $t = T$ en que $F(t)$ se anula, la velocidad $v$ y la distancia $x$ recorrida están dadas por

$$v(T) = v_0 + \tfrac{1}{2}a_0 T,$$

$$x(T) = v_0 T + \tfrac{1}{2}a_0 T^2$$

donde $a_0 = F_0/m$ es la aceleración inicial. Compare estos resultados con las ecuaciones 15 y 19 del capítulo 2.

**57.** Una partícula de masa $m$ está en reposo en $x = 0$. Al tiempo $t = 0$ se aplica una fuerza dada por $F = F_0e^{-t/T}$ en la dirección $+x$; $F_0$ y $T$ son constantes. Cuando $t = T$ se retira la fuerza. En este instante en que la fuerza se retira, (*a*) ¿cuál es la velocidad de la partícula, y (*d*) dónde está?

### *Sección 6-7 Fuerzas de arrastre y el movimiento de proyectiles*

**58.** Un pequeño guijarro de 150 g está a 3.4 km de profundidad en el océano y cae a una velocidad terminal constante de 25 m/s. ¿Qué fuerza ejerce el agua sobre el guijarro al caer?

**59.** Un objeto se deja caer desde el reposo. Halle la velocidad terminal suponiendo que la fuerza de arrastre está dada por $D = bv^2$.

**60.** ¿Cuánto tiempo le toma al objeto del problema muestra 5 llegar a la mitad de su velocidad terminal?

**61.** A partir de la tabla 2, calcule el valor de $b$ para la gota de agua, suponiendo que la fuerza de arrastre está dada por $D = bv$. La densidad del agua es de 1.0 g/cm$^3$.

**62.** Una locomotora acelera a un tren de 23 vagones a lo largo de una vía a nivel. Cada vagón tiene una masa de 48.6 tons métricas y está sujeto a una fuerza de arrastre $f = 243v$, donde $v$ es la velocidad en m/s y la fuerza $f$ está en N. En el instante en que la velocidad del tren es de 34.5 km/h, la aceleración es de 0.182 m/s$^2$. (*a*) Calcule la tensión en el cople situado entre el primer vagón y la locomotora. (*b*) Suponga que esta tensión es la fuerza mayor que la locomotora puede ejercer sobre el tren. ¿Cuál, entonces, es la mayor pendiente en la que la locomotora pueda jalar al tren a razón de 34.5 km/h? (1 ton métrica = 1000 kg.)

**63.** Un globo aerostático desciende en aire tranquilo a una velocidad constante de 1.88 m/s. El peso total del globo, incluyendo la carga útil, es de 10.8 kN. Se ejerce sobre el globo una fuerza ascensional constante de 10.3 kN. El aire ejerce también una fuerza de arrastre dada por $D = bv^2$, donde $v$ es la velocidad del globo y $b$ es una constante. La tripulación arroja 26.5 kg del lastre. ¿Cuál será la velocidad constante de descenso del globo?

**64.** Repita el problema 63, pero esta vez suponga que la fuerza de arrastre está dada por $D = bv$. Nótese que la constante $b$ deberá ser reevaluada.

**65.** Una barcaza de masa $m$ está navegando por un canal a velocidad $v_i$ cuando sus motores se detienen. La fuerza de arrastre $D$ en el agua está dada por $D = bv$. (*a*) Halle la expresión del tiempo requerido para que la barcaza reduzca su velocidad a $v_f$. (*b*) Evalúe numéricamente el tiempo para que una barcaza de 970 kg, que navega inicialmente a razón de 32 km/h, reduzca su velocidad a 8.3 km/h; el valor de $b$ es de 68 N · s/m.

**66.** Consideremos la caída del objeto del problema muestra 5. (*a*) Halle la aceleración en función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración en un $t$ pequeño; en un $t$ grande? (*b*) Halle la distancia recorrida por el objeto en su caída, en función del tiempo.

**67.** Suponiendo que la fuerza de arrastre $D$ esté dada por $D = bv$. (*a*) Demuestre que la distancia $y_{95}$ a través de la cual debe caer un objeto desde el reposo hasta alcanzar el 95% de su velocidad terminal está dada por

$$y_{95} = (v_T^2/g)(\ln 20 - \tfrac{19}{20})$$

donde $v_T$ es la velocidad terminal. (*Sugerencia*: Use el resultado de $y(t)$ obtenido en el problema 66.) (*b*) Usando la velocidad terminal de 42 m/s para la bola de béisbol dada en la tabla 2, calcule la distancia al 95%. ¿Por qué no concuerda este resultado con el valor listado en la tabla 2?

***Proyectos para la computadora***

**68.** La sección 6-6 describe una técnica numérica para integrar la segunda ley de Newton y obtener una tabla que dé la posición y la velocidad de un objeto en una secuencia de tiempos. Divida el periodo desde algún tiempo inicial $t_0$ a algún tiempo final $t_f$ en $N$ intervalos pequeños $\Delta t$. Si $x_b$, $v_b$, y $F_b$ son la coordenada, la velocidad, y la fuerza del inicio de un intervalo, entonces $x_e = x_b + v_b\Delta t$ y $v_e = v_b + (F_b/m)\Delta t$ dan las estimaciones de la coordenada y la velocidad al final. Estos valores se usan después como la coordenada y la velocidad al inicio del intervalo siguiente. Cuanto más pequeño sea $\Delta t$, mejor será la estimación, pero $\Delta t$ no podrá ser demasiado pequeño o, de lo contrario, se perderán cifras significativas durante el cálculo. La fuerza puede ser una función de la posición, de la velocidad y del tiempo. La función explícita se determina por la situación física, y una vez que es conocida se usan los valores de $x_b$, $v_b$, y $t_b$ para evaluar $F_b$. Escriba un programa para la computadora o diseñe una hoja de cálculo para llevar a cabo la integración. Usted alimentará con $x_0$, $v_0$, $t_0$, $\Delta t$, y $N$. He aquí un ejemplo a tratar.

Una persona, comenzando desde el reposo, empuja una caja a lo largo de un piso rugoso con una fuerza dada por $F = 200e^{-0.15t}$, donde $F$ está en newton y $t$ en segundos. La fuerza disminuye exponencialmente porque la persona se cansa. En tanto que la caja se mueve, una fuerza de fricción constante de 80 N se opone al movimiento. (*a*) ¿Cuánto tarda, después de haber arrancado, en detenerse la caja? (*b*) ¿A qué distancia llega? Obtenga una precisión de 2 cifras significativas.

Para propósitos de integración divida el tiempo entre $t = 0$ y $t = 15$ s en 1500 intervalos de 0.01 s de duración cada uno. No es necesario exhibir o imprimir la coordenada y la velocidad al final de cada intervalo. En la primera corrida, exhiba los resultados al final de cada 100 intervalos. En corridas posteriores quizá desee usted exhibir los resultados para intervalos más pequeños dentro de un margen limitado. Una vez que se ha generado la tabla de resultados, busque los dos valores de la velocidad que encierran a $v_e = 0$. Si los valores de $x$ son iguales a 2 cifras significativas, habrá usted terminado. Si no lo son, repita el cálculo con un intervalo de exhibición menor, o quizá con un intervalo de integración menor.

**69.** Una pelota de 150 g se lanza directamente hacia arriba desde el borde de un acantilado a una velocidad inicial de 25 m/s. En el trayecto hacia abajo no toca el borde del acantilado y continúa cayendo al terreno que se encuentra 300 m más abajo. Además de estar sujeta a la fuerza de la gravedad, lo está a una fuerza de resistencia del aire dada por $F_D = -0.0150v$, donde $F_D$ está en newton y $v$ está en m/s. (*a*) ¿Cuánto tiempo está la pelota en el aire? (*b*) ¿Cuál es su velocidad justamente antes de que alcance el terreno? (*c*) ¿Cuál es la razón de esta velocidad y su velocidad terminal?

Use un programa de computación o una hoja de cálculo para integrar la segunda ley de Newton (para sugerencias, véase la sección 6-6 y el problema anterior). Use un intervalo de integración de 0.001 s y exhiba la coordenada y la velocidad para cada 0.1 s desde $t = 0$ hasta $t = 12$ s. Esto daría una precisión de 2 cifras significativas.

**70.** Un proyectil de 2.5 kg se dispara desde el suelo a una velocidad inicial de 150 m/s, y un ángulo de 40° sobre la horizontal. Además de la fuerza de la gravedad está sujeto a una fuerza de resistencia del aire $\mathbf{F}_D = -0.30\mathbf{v}$, donde $\mathbf{F}_D$ está en newton y $\mathbf{v}$ en m/s. Integre numéricamente la segunda ley de Newton desde $t = 0$ (el momento del disparo) hasta $t = 20$ s. Tome un intervalo de integración de 0.001 s pero muestre resultados para cada 0.5 s. Deberá considerar tanto las coordenadas $x$ y $y$ como las componentes de la velocidad. Use $a_x = -(b/m)v_x$ y $a_y = -g-(b/m)v_y$, donde $b$ es el coeficiente de arrastre. Vea los proyectos de computación anteriores. (*a*) Trace la trayectoria $y$ contra $x$ desde el disparo hasta el tiempo en que el proyectil cae al suelo. Nótese que la trayectoria no es simétrica con respecto al punto más alto como lo sería si la resistencia del aire no existiera. Use la gráfica o lista de valores para calcular: (*b*) el tiempo en que el proyectil alcanza el punto más alto de su trayectoria y las coordenadas de ese punto; (*c*) el tiempo en que aterriza, su alcance, y su velocidad justo antes de aterrizar. (*d*) Compare estas cantidades con los valores que tendría si no hubiese una resistencia del aire. ¿Cómo influye la resistencia del aire en la altura del punto más alto? ¿Cómo influye en el alcance? Cómo influye en la velocidad del momento del impacto?

**71.** La resistencia del aire puede influir significativamente en el ángulo de disparo para el cual un proyectil tenga el alcance máximo. Para ver esta influencia considere un proyectil de 2.5 kg disparado desde el suelo con una velocidad inicial de 150 m/s y suponga que la fuerza del aire está dada por $\mathbf{F}_D = -0.30\mathbf{v}$, donde $\mathbf{F}_D$ está en newton y $\mathbf{v}$ está en m/s. Para cada uno de los ángulos de disparo 25°, 30°, 35°, y 40°, integre numéricamente la segunda ley de Newton con un intervalo de integración de 0.001 s. Muestre los resultados para cada 0.5 s desde $t = 0$ (el momento del disparo) hasta $t = 25$ s. Véanse los proyectos de computación anteriores. Use los resultados para calcular el alcance. ¿Para cuál de estos ángulos de disparo es más grande el alcance?

**72.** La velocidad de un proyectil sujeto a la resistencia del aire se acerca a su velocidad terminal. Suponga que la fuerza neta está dada por $-mg\mathbf{j}-b\mathbf{v}$, donde $b$ es el coeficiente de arrastre y se elige que el eje $y$ sea positivo en dirección hacia arriba. A la velocidad terminal $\mathbf{v}_T$ la fuerza neta se anula, de modo que $\mathbf{v}_T = -(mg/b)\mathbf{j}$. Nótese que no tiene una

componente horizontal. El proyectil cae finalmente directo hacia abajo.

Para "observar" a un proyectil que se acerca a su velocidad terminal puede usarse un programa de computadora o una hoja de cálculo. Considere un proyectil de 2.5 kg disparado a una velocidad inicial de 150 m/s, a un ángulo de 40° sobre la horizontal. Sea $b$ = 0.50 kg/s el coeficiente de arrastre. Integre numéricamente la segunda ley de Newton y muestre los resultados para cada 0.5 s desde $t$ = 0 (el momento del disparo) hasta el tiempo en que la componente $y$ de la velocidad sea un 90% de $v_T$. Trace $v_x(t)$ y $v_y(t)$ en la misma gráfica. Nótese que $v_x$ tiende a 0 cuando $v_y$ se aproxima a $v_T$.

**73.** Cuando el efecto del aire sobre un proyectil se toma en cuenta, las coordenadas están dadas por

$$x(t) = (v_{0x}/b)(1 - e^{-bt})$$
$$y(t) = (1/b^2)(g + bv_{0y})(1 - e^{-bt}) - (g/b)t,$$

donde se elige que la dirección de $y$ positiva sea hacia arriba y el origen sea el punto de disparo. El coeficiente de arrastre $b$ nos habla de la fuerza de interacción entre el aire y el proyectil. Diferencie las expresiones de las coordenadas para demostrar que las componentes de la velocidad están dadas por $v_x = v_{0x}e^{-bt}$ y $v_y = (1/b)(g + bv_{0y})e^{-bt} - g/b$ y que las componentes de la aceleración están dadas por $a_x = -bv_{0x}e^{-bt}$ y $a_y = -(g + bv_{0y})e^{-bt}$. Escriba un programa de computación o una hoja de cálculo para calcular las coordenadas, las componentes de la velocidad, y las componentes de la aceleración al final de cada intervalo de tiempo de duración $\Delta t$ desde el tiempo $t_1$ hasta el tiempo $t_2$.

Use ahora el programa para investigar la influencia del aire sobre un proyectil disparado desde el suelo con una velocidad inicial de 50 m/s, y un ángulo de elevación de 25° sobre la horizontal. (*a*) Sea $b$ = 0.10 $s^{-1}$ y use el programa para hallar las coordenadas del punto más elevado, la velocidad, y la aceleración cuando el proyectil está allí. Comience usando el programa para evaluar las coordenadas, la velocidad, y la aceleración al final de cada 0.1 s desde $t$ = 0 hasta $t$ = 4.5 s. Para obtener una precisión de 2 cifras significativas puede hacerse más corto el intervalo en las series posteriores. Una vez que se haya obtenido una respuesta nótese que el punto más elevado se alcanza en menos tiempo que en ausencia de resistencia del aire, que el punto más elevado es más bajo y más cercano al punto de disparo, y que la velocidad es menor. (*b*) Para ver si la tendencia continúa, repita el cálculo con $b$ = 0.20 $s^{-1}$. (*c*) ¿Cómo es afectado por el aire el alcance del proyectil? Sea $b$ = 0.10 $s^{-1}$ y use el programa para hallar el alcance (el valor de $x$ cuando $y$ = 0). Repita con $b$ = 0.20 $s^{-1}$. (*d*) ¿Cómo afecta el aire a la velocidad, justo antes del aterrizaje? Use el programa con $b$ = 0.10 $s^{-1}$, luego con 0.20 $s^{-1}$. Recuérdese que, en ausencia de arrastre, cada componente de la velocidad tiene el mismo valor que en el momento del disparo. (*e*) Nótese que las ecuaciones predicen que $a_x = -bv_x$ y $a_y = -g - bv_y$. Use estas relaciones para explicar por qué $a_y = -g$ en el punto más elevado; por qué $a_x$ no es cero en ningún momento, y por qué $a_y$ disminuye de magnitud, justo antes del aterrizaje, si $b$ aumenta.

# CAPÍTULO 7

# TRABAJO Y ENERGÍA

*Un problema fundamental de la dinámica de las partículas es hallar cómo se mueve una partícula, dadas las fuerzas que actúan sobre ella. Por "cómo se mueve una particula" queremos referirnos a cómo varía su posición con el tiempo. En los dos capítulos anteriores hemos resuelto este problema para el caso especial de una fuerza constante, en que pueden usarse las fórmulas de la aceleración constante para hallar* $\mathbf{r}(t)$*, completando la solución del problema.*

*Sin embargo, el problema es, más difícil cuando la fuerza que actúa sobre una partícula y, por lo tanto, su aceleración, no son constantes. Podemos resolver estos problemas por métodos de integración, como se ilustró en las secciones 6-5 y 6-7, respectivamente, para fuerzas que dependen del tiempo y de la velocidad. En este capítulo extendemos el análisis a fuerzas que dependen de la posición de la partícula, como la fuerza de gravitación ejercida por la Tierra sobre cualquier objeto cercano y la fuerza ejercida por un resorte estirado sobre un cuerpo al cual esté unido. Este análisis nos conduce a los conceptos de* trabajo *y* energía cinética *y al desarrollo del* teorema trabajo-energía, *que es el tema central de este capítulo. En el capítulo 8 consideraremos una visión más amplia de la energía, incorporada a la ley de conservación de la energía, concepto éste que ha desempeñado un papel importante en el desarrollo de la física.*

## 7-1 TRABAJO EFECTUADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Consideremos una partícula sobre la que actúe una fuerza constante **F**, y supongamos el caso más sencillo en el que el movimiento tiene lugar en línea recta en dirección de la fuerza. En tal situación definimos al *trabajo W efectuado por la fuerza sobre la partícula* como el producto de la magnitud de la fuerza $F$ y la magnitud del desplazamiento $s$ a través del cual actúa la fuerza. Escribiremos esto así:

$$W = Fs. \tag{1}$$

En un caso más general, la fuerza constante que actúa sobre una partícula puede no actuar en la dirección en que se mueve la partícula. En este caso definimos al trabajo efectuado por la fuerza sobre la partícula como el producto de la componente de la fuerza a lo largo de la línea del movimiento y la magnitud del desplazamiento $s$. En la figura 1, una partícula experimenta una fuerza constante **F** que forma un ángulo $\phi$ con la dirección del desplazamiento **s** de la partícula. El trabajo $W$ efectuado por **F** durante este desplazamiento es, de acuerdo con nuestra definición,

$$W = (F \cos \phi)s. \tag{2}$$

Por supuesto, pueden también actuar otras fuerzas sobre la partícula. La ecuación 2 se refiere solamente al trabajo efectuado sobre la partícula por una fuerza **F** determinada. El trabajo efectuado sobre la partícula por otras fuerzas debe calcularse por separado. Para hallar el trabajo total efectuado sobre la partícula, sumamos los valores del trabajo efectuado por todas las fuerzas por separado. (Alternativamente, como discutiremos en la sección 7-4, podemos primero hallar la fuerza neta sobre

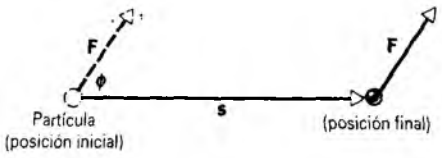



**Figura 1** Una fuerza **F** actúa sobre una partícula cuando experimenta un desplazamiento **s**. La componente de **F** que efectúa el trabajo sobre la partícula es $F\cos$ . El trabajo efectuado por la fuerza **F** sobre la partícula es $Fs\cos\phi$, lo cual puede también escribirse como $\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$.

la partícula y luego calcular el trabajo que efectuaría una sola fuerza igual a la fuerza neta. Los dos métodos de hallar el trabajo efectuado sobre una partícula son equivalentes, y siempre arrojan el mismo resultado para el trabajo efectuado sobre la partícula.)

Cuando $\phi$ es cero, el trabajo efectuado por **F** es, simplemente, $Fs$, de acuerdo con la ecuación 1. Entonces, cuando una fuerza horizontal mueve a un cuerpo horizontalmente, o cuando una fuerza vertical levante a un cuerpo verticalmente, el trabajo efectuado por la fuerza es el producto de la magnitud de la fuerza por la distancia que recorrió. Cuando $\phi$ es 90°, la fuerza no tiene componente en la dirección del movimiento. Esa fuerza no efectúa, entonces, ningún trabajo sobre el cuerpo. Por ejemplo, un levantador de pesas (Fig. 2) efectúa un trabajo para levantar las pesas desde el suelo, pero no efectúa ningún trabajo cuando las mantiene en alto (porque no existe desplazamiento). Si transportara las pesas sobre su cabeza cuando camina, nuevamente no efectuaría ningún trabajo sobre ellas conforme a nuestra definición de trabajo, suponiendo que no exista un desplazamiento



**Figura 2** El levantador de pesas ejerce una gran fuerza sobre las pesas, pero en el instante mostrado no está efectuando ningún trabajo porque las está manteniendo fijas. Existe una fuerza pero no un desplazamiento. Por supuesto, él ha efectuado ya cierto trabajo para haberlas levantado desde el suelo hasta esa altura.

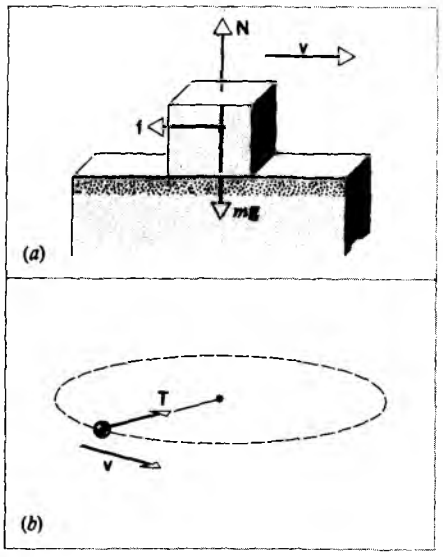



**Figura 3** No todas las fuerzas aplicadas a un cuerpo efectúan necesariamente un trabajo, aun cuando el cuerpo esté en movimiento. En (*a*), el peso y la fuerza normal no trabajan, porque son perpendiculares al desplazamiento (que está en la dirección de la velocidad **v**). El trabajo lo efectúa la fuerza de fricción. En (*b*), donde se muestra un cuerpo unido a un cordón mientras gira en un círculo horizontal, la tensión **T** en el cordón no efectúa ningún trabajo sobre el cuerpo, porque no tiene una componente en la dirección del desplazamiento.

vertical, porque la fuerza vertical que ejerce sería perpendicular al desplazamiento horizontal. La figura 3 muestra otros ejemplos de fuerzas aplicadas a un cuerpo y que realizan trabajo sobre él.

Nótese que podemos escribir la ecuación 2 ya sea como $(F\cos\phi)s$ o como $F(s\cos\phi)$. Esto sugiere que el trabajo puede calcularse de dos maneras diferentes, que dan el mismo resultado: ya sea que multipliquemos la magnitud del desplazamiento por la componente de la fuerza en dirección del desplazamiento, o que multipliquemos la magnitud de la fuerza por la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza. Cualquiera de las formas nos recuerda una parte importante de la definición de trabajo: debe existir una componente de **s** en la dirección de **F**, y debe existir una componente de **F** en la dirección de **s** (Fig. 4).

El trabajo es una cantidad *escalar*, aunque las dos cantidades involucradas en su definición, fuerza y desplazamiento, sean vectores. En la sección 3-5 definimos al *producto escalar* de dos vectores como la cantidad escalar que hallamos cuando multiplicamos la magnitud de un vector por la componente de un segundo vector a lo largo de la dirección del primero. La ecuación 2 muestra que el trabajo se calcula exactamente de esta manera, de modo que el trabajo debe de ser expresable como un producto

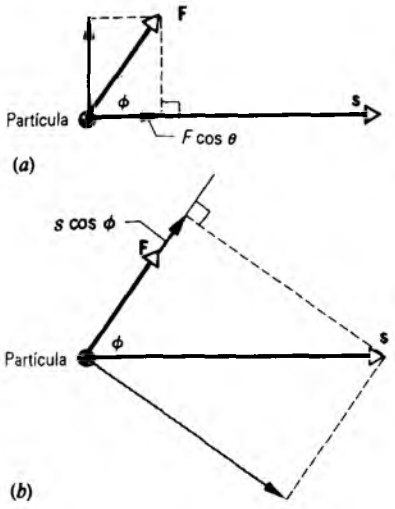



**Figura 4** (*a*) El trabajo $W$ interpretado como $W = (s)(F \cos \phi)$. (*b*) El trabajo $W$ interpretado como $W = (F)(s \cos \phi)$.

escalar. Comparando la ecuación 2 con la ecuación 13 del capítulo 3, hallamos que podemos expresar el trabajo como

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}, \tag{3}$$

donde el punto indica un producto escalar (o producto punto).

El trabajo puede ser positivo o negativo. Si una fuerza tiene una componente opuesta a la dirección del movimiento, el trabajo efectuado por esa fuerza es negativo. Esto corresponde a un ángulo obtuso entre los vectores de fuerza y de desplazamiento. Por ejemplo, cuando bajamos un objeto al suelo, el trabajo efectuado sobre el objeto por la fuerza que la mano ejerce hacia arriba al sostener al objeto, es negativo. En este caso $\phi$ es 180°, ya que **F** apunta hacia arriba y **s** apunta hacia abajo. (La fuerza gravitatoria, en este caso, efectúa un trabajo positivo cuando el objeto se mueve hacia abajo.)

Aun cuando la fuerza **F** es una invariante, independiente tanto en magnitud como en dirección de nuestra elección de marcos inerciales, el desplazamiento **s** *no lo es*. Dependiendo del marco inercial desde el que se efectúe la medición, un observador podría medir en esencia cualquier magnitud y dirección para el desplazamiento **s**. Entonces, observadores en marcos inerciales diferentes, que estuvieran de acuerdo sobre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, no lo estarían en la evaluación del trabajo efectuado por esas mismas fuerzas. Diferentes observadores podrían encontrar que el trabajo es positivo, negativo, e incluso cero. Exploramos este punto más adelante, en la sección 7-6.

El trabajo, como lo hemos definido por la ecuación 3, prueba ser un concepto muy útil en física. Nuestra definición especial de la palabra "trabajo" no corresponde al uso coloquial del término. Esto puede prestarse a confusión. Una persona que sostiene una pesa pesada en reposo en el aire puede estar trabajando arduamente en el sentido fisiológico, pero desde el punto de vista de la física esa persona no está realizando trabajo alguno sobre las pesas. Y decimos así porque la fuerza aplicada no causa ningún desplazamiento de las pesas.

Si, por otra parte, consideramos que el levantador de pesas es un sistema de partículas (lo cual trataremos en el capítulo 9), hallamos que, microscópicamente, se está efectuando en verdad un trabajo. Un músculo no es un soporte sólido y no puede sostener una carga de manera estática. Cada una de las fibras musculares se relajan y contraen repetidamente y, si analizamos la situación de esta manera, hallamos que realmente se está efectuando un trabajo en cada contracción. Ello se debe a que el levantador de pesas se llega a cansar al soportar las pesas. En este capítulo no consideraremos este trabajo "interno". La palabra *trabajo* es usada sólo en el sentido estricto de la ecuación 3, de modo que verdaderamente se anula en el caso de que no exista un desplazamiento de la partícula sobre la que actúa la fuerza.

La unidad de trabajo se determina a partir del trabajo efectuado por una fuerza unitaria al mover a un cuerpo a través de una distancia unitaria en dirección de la fuerza. La unidad de trabajo en el SI es 1 *newton-metro*, llamado también 1 *joule* (abreviado **J**). En el sistema inglés la unidad de trabajo es la libra-pie. En el sistema cgs la unidad de trabajo es 1 dina-centímetro, llamada también 1 erg. Usando las relaciones entre el newton, la dina y la libra, y entre el metro, el centímetro, y el pie, obtenemos que 1 joule = $10^7$ ergs = 0.7376 ft · lb.

Una unidad de trabajo conveniente al tratar con partículas atómicas o subatómicas es el *electronvolt* (abreviado eV), donde 1 eV = $1.60 \times 10^{-19}$ **J**. El trabajo necesario para retirar un electrón exterior de un átomo tiene una magnitud típica de varios eV. El trabajo necesario para remover un protón o un neutrón de un núcleo tiene una magnitud típica de varios MeV ($10^6$ eV).

**Problema muestra 1** Un bloque de masa $m$ = 11.7 kg va a ser empujado una distancia $s$ = 4.65 m a lo largo de un plano inclinado de modo tal que en el proceso se eleva una distancia $h$ = 2.86 m (Fig. 5*a*). Suponiendo superficies sin fricción, calcule cuánto trabajo tendría que llevarse a cabo si se aplica una fuerza paralela al plano inclinado para empujar al bloque hacia arriba a velocidad constante.

**Solución** En la figura 5*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre del bloque. Debemos primero hallar $P$, la magnitud de la fuerza que empuja al bloque hacia arriba en el plano inclinado. Ya que el movimiento no es acelerado (se nos dice que la velocidad es constante), la fuerza neta paralela al plano debe ser cero. Si elegimos al eje $x$ paralelo al plano, con la dirección positiva hacia arriba, tendremos, según la segunda ley de Newton,

$$\text{componente } x: \quad P - mg \operatorname{sen} \theta = 0,$$

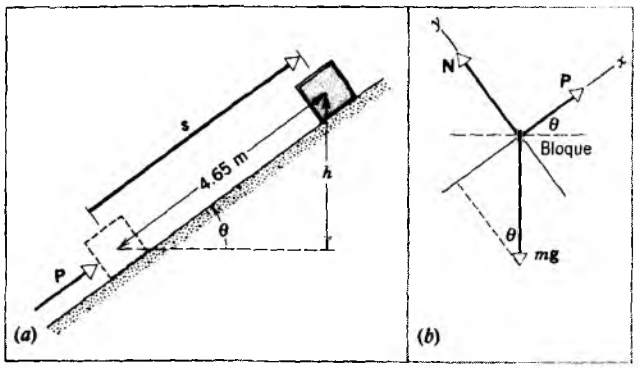



**Figura 5** Problema muestra 1. (*a*) Una fuerza **P** mueve a un bloque hacia arriba en un plano inclinado, siendo s el desplazamiento. (*b*) Un diagrama de cuerpo libre para el bloque.

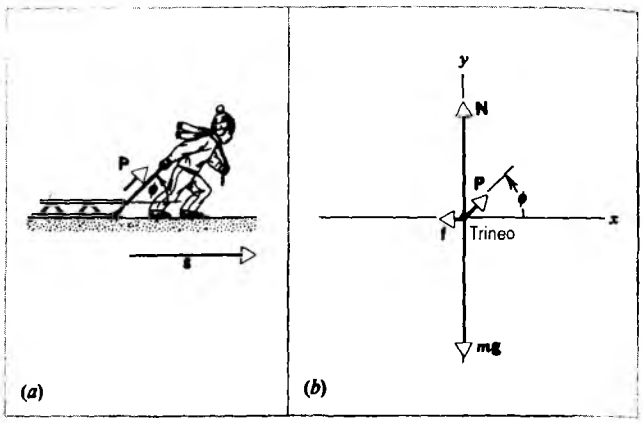



**Figura 6** Problema muestra 2. (*a*) Un niño desplaza un trineo una cantidad s jalando de él con una fuerza **P** por medio de una cuerda que forma un ángulo $\phi$ con la horizontal. (*b*) Un diagrama de cuerpo libre para el trineo.

o sea

$$P = mg \text{ sen } \theta = (11.7 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)\left(\frac{2.86 \text{ m}}{4.65 \text{ m}}\right) = 70.5 \text{ N}.$$

Entonces, el trabajo efectuado por **P**, según la ecuación 3 con $\phi = 0^0$, es

$$W = \mathbf{P}\cdot\mathbf{s} = Ps \cos 0° = Ps = (70.5 \text{ N})(4.65 \text{ m}) = 328 \text{ J}.$$

Nótese que el ángulo $\phi$ (= $0^0$) usado en esta expresión es el ángulo entre la fuerza aplicada y el desplazamiento del bloque, siendo ambos paralelos al plano inclinado. El ángulo $\phi$ no debe ser confundido con el ángulo $\theta$ del plano inclinado.

Si fuésemos a elevar el bloque verticalmente a velocidad constante sin usar el plano inclinado, el trabajo que haríamos sería la fuerza vertical, la cual es igual a *mg* multiplicado por la distancia vertical *h*, o sea

$$W = mgh = (11.7 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(2.86 \text{ m}) = 328 \text{ J},$$

lo mismo que antes. La única diferencia es que el plano inclinado permite utilizar una fuerza más pequeña ($P$ = 70.5 N) que la que se necesitaría sin el plano ($mg$ = 115 N). Por otra parte, debemos empujar el bloque por el plano inclinado una *distancia* mayor (4.65 m) de lo que lo haríamos al elevarlo directamente (2.86 m).

**Problema muestra 2** Un niño arrastra un trineo de 5.6 kg una distancia de $s$ = 12 m a velocidad constante a lo largo de una superficie horizontal. ¿Qué trabajo hace el niño sobre el trineo si el coeficiente de fricción cinética $\mu_k$ es 0.20 y la cuerda forma un ángulo de $\phi$ = 45° con la horizontal?

**Solución** En la figura 6*a* se muestra la situación y en la figura 6*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre con las fuerzas que actúan sobre el trineo. **P** es el jalón del niño, *mg* es el peso del trineo, **f** es la fuerza de fricción, y **N** es la fuerza normal ejercida por la superficie contra el trineo. El trabajo efectuado por el niño sobre el trineo es

$$W = \mathbf{P}\cdot\mathbf{s} = Ps \cos \phi.$$

Para evaluar esto debemos primero determinar $P$, cuyo valor no se nos ha dado. Para obtener $P$ nos referimos al diagrama de cuerpo libre de la figura 6*b*.

El trineo no es acelerado, de modo que de la segunda ley de Newton obtendremos lo siguiente:

$$\text{componente } x: \quad P \cos \phi - f = 0,$$

$$\text{componente } y: \quad P \text{ sen } \phi + N - mg = 0.$$

Sabemos que $f$ y $N$ están relacionadas por

$$f = \mu_k N.$$

Estas tres ecuaciones contienen tres incógnitas: $P$, $f$, y $N$. Para hallar $P$ eliminamos a $f$ y $N$ de estas ecuaciones y resolvemos la ecuación restante para $P$. Verifique que

$$P = \frac{\mu_k mg}{\cos \phi + \mu_k \text{ sen } \phi}.$$

Con $\mu_k$ = 0.20, $mg$ = (5.6 kg)(9.8 m/s$^2$) = 55 N, y $\phi$ = 45° obtenemos

$$P = \frac{(0.20)(55 \text{ N})}{\cos 45° + (0.20)(\text{sen } 45°)} = 13 \text{ N}.$$

Entonces con $s$ = 12 m, el trabajo efectuado por el niño sobre el trineo es

$$W = Ps \cos \phi = (13 \text{ N})(12 \text{ m})(\cos 45°) = 110 \text{ J}.$$

La componente vertical del jalón **P** no realiza trabajo sobre el trineo. Sin embargo, nótese que reduce la fuerza normal entre el trineo y la superficie ($N = mg - P \text{ sen } \phi$) y, por lo tanto, reduce la magnitud de la fuerza de fricción ($f = \mu_k N$).

¿Realizaría el niño más trabajo, menos trabajo, o la misma cantidad de trabajo sobre el trineo si $P$ se aplicara horizontalmente en lugar de a 45° con la horizontal? Alguna de las demás fuerzas sobre el trineo efectúa trabajo sobre él?

## 7-2 TRABAJO EFECTUADO POR UNA FUERZA VARIABLE: CASO UNIDIMENSIONAL

Consideremos ahora el trabajo efectuado por una fuerza que no sea constante. Hagamos que la fuerza actúe solamente en una dirección, la cual tomaremos como la dirección $x$, y hagamos que varíe su magnitud con $x$ de acuerdo con la función $F(x)$. Supongamos que un cuerpo que se mueve en la dirección $x$ reciba la acción de esta fuerza. ¿Cuál es el trabajo efectuado por esta fuerza variable si el cuerpo se mueve desde la posición inicial $x_i$ a la posición final $x_f$?

En la figura 7 trazamos la gráfica de $F$ contra $x$. Dividamos el desplazamiento total en un número $N$ de intervalos pequeños de anchura igual $\delta x$ (Fig. 7*a*). Consideremos el primer intervalo, en el cual existe un pequeño desplazamiento $\delta x$ desde $x_i$ hasta $x_i + \delta x$. Durante este pequeño desplazamiento la fuerza $F(x)$ tiene un valor $F_1$ casi constante, y la pequeña cantidad de trabajo $\delta W_1$ que se efectúa en ese intervalo es, aproximadamente,

$$\delta W_1 = F_1\, \delta x. \tag{4}$$

De igual manera, durante el segundo intervalo existe un pequeño desplazamiento desde $x_i + \delta x$ hasta $x_i + 2\delta x$, y la fuerza $F(x)$ tiene un valor $F_2$ casi constante. El trabajo efectuado por la fuerza en el segundo intervalo es, aproximadamente, $\delta W_2 = F_2 \delta_x$. El trabajo total $W$ efectuado por $F(x)$ para desplazar al cuerpo desde $x_i$ hasta $x_f$ es, aproximadamente, la suma de un gran número de términos como los de la ecuación 4, donde $F$ tiene un valor diferente para cada término. De aquí que

$$\begin{aligned} W &= \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 + \cdots \\ &= F_1\, \delta x + F_2\, \delta x + F_3\, \delta x + \cdots \end{aligned}$$

o sea

$$W = \sum_{n=1}^{N} F_n\, \delta x, \tag{5}$$

donde la letra griega sigma ($\Sigma$) significa la suma de todos los intervalos $N$ desde $x_i$ hasta $x_f$.

Para llevar a cabo una aproximación mejor podemos dividir el desplazamiento total desde $x_i$ hasta $x_f$ en un número mayor de intervalos, como en la figura 7*b*, de modo que $\delta x$ sea más pequeña y el valor de $F_n$ en cada intervalo sea más típico de la fuerza dentro del intervalo. Está claro que podemos obtener cada vez mejores aproximaciones tomando $\delta x$ más pequeño cada vez, con el fin de tener un mayor número de intervalos. Podemos obtener un resultado exacto para el trabajo efectuado por $F$ si hacemos que $\delta x$ tienda a cero y el número $N$ de intervalos tienda al infinito. De aquí que el resultado exacto sea

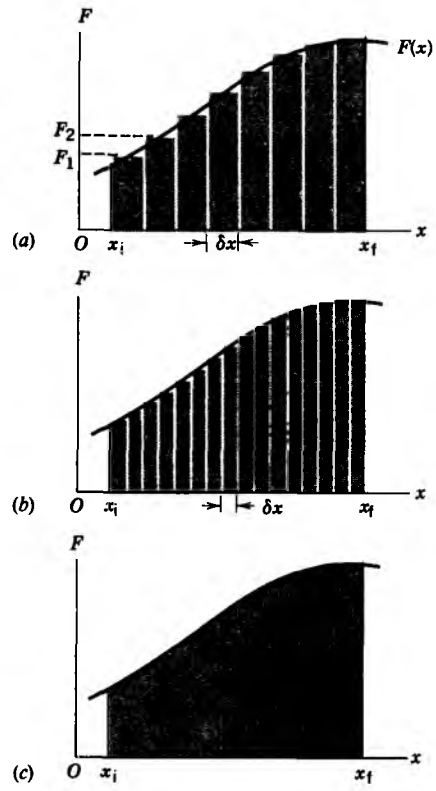



**Figura 7** (*a*) El área bajo la curva de la fuerza variable unidimensional $F(x)$ es aproximada al dividir la región entre los límites $x_i$ y $x_f$ en un número de intervalos de anchura $\delta x$. La suma de las áreas de las fajas rectangulares es aproximadamente igual al área bajo la curva. (*b*) Una aproximación mejor se obtiene usando un número mayor de fajas más angostas. (*c*) El área real se obtiene en el límite $\delta x \to 0$.

$$W = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{n=1}^{N} F_n\, \delta x. \tag{6}$$

La relación

$$\lim_{\delta x \to 0} \sum F_n\, \delta x = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx,$$

según lo habrá usted aprendido en su curso de cálculo, define a la integral de $F$ con respecto a $x$ desde $x_i$ hasta $x_f$. Numéricamente, esta cantidad es exactamente igual al área entre la curva de la fuerza y el eje $x$ entre los límites $x_i$ y $x_f$ (Fig. 7*c*). De aquí que una integral pueda ser interpretada gráficamente como un área. El símbolo $\int$ es una S (de suma) distorsionada y simboliza el proceso de la integración. Podemos escribir el trabajo total efectuado por $F$ al desplazar un cuerpo desde $x_i$ hasta $x_f$ así:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx. \tag{7}$$

Puesto que hemos eliminado la notación vectorial de esta ecuación unidimensional, debemos tener sumo cui-

dado al poner el signo de $F$, que es positivo si $F$ está en la dirección de $x$ creciente y negativo si $F$ está en la dirección de $x$ decreciente.

Como un ejemplo de una fuerza variable, consideremos un resorte que actúe sobre una partícula de masa $m$ (Fig. 8). La partícula se mueve en dirección horizontal, la cual tomamos que sea la dirección $x$, con el origen ($x = 0$) representando la posición de la partícula cuando el resorte está relajado (Fig. 8*a*). Sobre la partícula actúa una fuerza externa $F_{ext}$ en dirección opuesta a la fuerza del resorte. Suponemos que la fuerza externa es siempre aproximadamente igual a la fuerza del resorte, de modo que la partícula esté en equilibrio en todo momento ($a = 0$).

Sea desplazada la partícula una distancia $x$ desde su posición original en $x = 0$ (Fig. 8*b*). Si el agente externo ejerce una fuerza $F_{ext}$ sobre la partícula, el resorte ejercerá una fuerza opuesta $F_s$. Esta fuerza está dada con bastante aproximación por

$$F_s = -kx, \tag{8}$$

donde $k$ es una constante positiva, llamada la *constante de fuerza* del resorte. La constante $k$ es una medida de la fuerza necesaria para producir un estiramiento determinado del resorte; los resortes más rígidos tienen los valores de $k$ mayores. La ecuación 8 es la *ley de la fuerza* para los resortes, y se la conoce como *ley de Hooke*. El signo menos en la ecuación 8 nos advierte que la dirección de la fuerza ejercida por el resorte se opone siempre a la dirección del desplazamiento de la partícula. Cuando el resorte se estira, $x > 0$ y $F_s$ es negativa; cuando el resorte se comprime, $x < 0$ y $F_s$ es positiva. La fuerza ejercida por el resorte es una *fuerza de restitución*: tiende siempre a *restablecer* a la partícula a su posición en $x = 0$. Los resortes más reales obedecen a la ecuación 8 razonablemente bien siempre y cuando no los estiremos más allá de una cantidad límite.

Consideremos primero el trabajo efectuado *sobre* la partícula *por* el resorte cuando la partícula se mueve desde la posición inicial $x_i$ hasta la posición final $x_f$. Usamos la ecuación 7 con la fuerza $F_s$:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2. \tag{9}$$

El signo del trabajo efectuado por el resorte sobre la partícula es positivo si $x_i^2 > x_f^2$ (esto es, si la magnitud del desplazamiento inicial de la partícula es mayor que la de su desplazamiento final). Nótese que el resorte efectúa trabajo *positivo* cuando actúa para restablecer a la partícula en su posición en $x = 0$. Si la magnitud del desplazamiento inicial es más pequeña que la del desplazamiento final, el resorte efectúa trabajo *negativo* sobre la partícula.

Si estamos interesados en conocer el trabajo efectuado por el resorte sobre la partícula cuando la partícula se mueve desde su posición original en $x = 0$ a lo largo de un desplazamiento $x$, hacemos que $x_i = 0$ y $x_f = x$ y obtendremos

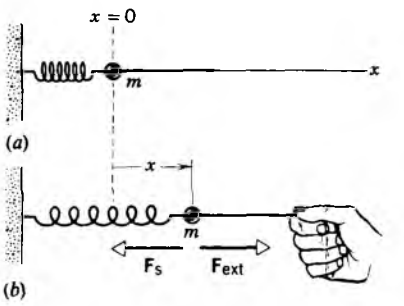



**Figura 8** (*a*) Una partícula de masa $m$ está unida a un resorte, el cual está en la posición relajada. (*b*) La partícula se desplaza una distancia $x$, donde hay dos fuerzas que actúan sobre ella, la fuerza de restitución del resorte y el jalón de un agente externo.

$$W_s = \int_0^x (-kx)\,dx = -\tfrac{1}{2}kx^2. \tag{10}$$

Nótese que el trabajo efectuado por el resorte cuando se halla comprimido a lo largo de un desplazamiento $x$ es el mismo que el efectuado en la posición de extendido a lo largo de $x$, porque el desplazamiento $x$ está elevado al cuadrado en la ecuación 10; cualquier signo de $x$ dará un valor positivo para $x^2$ y un valor negativo para $W_s$.

¿Qué tanto trabajo efectúa el *agente externo* cuando la partícula se mueve desde $x_i = 0$ hasta $x_f = x$? Para mantener a la partícula en equilibrio, la fuerza externa $F_{ext}$ debe ser de igual magnitud que la fuerza del resorte pero de signo opuesto, de modo que $F_{ext} = +kx$. Repitiendo el cálculo como en la ecuación 10 para el trabajo efectuado por el agente externo nos da

$$W_{ext} = +\tfrac{1}{2}kx^2. \tag{11}$$

Nótese que ésta es, exactamente, la negativa de la ecuación 10.

Podemos también hallar $W_s$ y $W_{ext}$ calculando el área entre la curva fuerza-desplazamiento apropiada y el eje $x$ desde $x = 0$ hasta un valor arbitrario de $x$. En la figura 9 las dos rectas con pendiente que pasan a través del origen son gráficas de la fuerza externa contra el desplazamiento ($F_{ext} = +kx$) y la fuerza del resorte contra el desplazamiento ($F_s = -kx$). El lado derecho de la gráfica ($x > 0$) corresponde al estiramiento del resorte y el lado izquierdo ($x < 0$) a la compresión.

Al *estirar* el resorte, el trabajo efectuado por la fuerza externa es positivo y está representado por el triángulo superior de la derecha en la figura 9, marcado $W_{ext}$. La base de este triángulo es $+x$ y su altura es $+kx$; por lo tanto, su área es

$$\tfrac{1}{2}(+x)(+kx) = +\tfrac{1}{2}kx^2$$

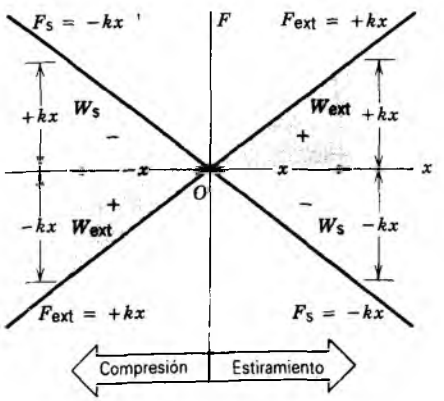



**Figura 9** El trabajo $W_s$ efectuado por la fuerza del resorte está representado por las áreas negativas (de sombreado suave), y el trabajo $W_{ext}$ efectuado por la fuerza externa, que está en equilibrio con la fuerza del resorte, está representado por las áreas positivas (de sombreado intenso). Ya sea que el resorte esté estirado ($x > 0$), o comprimido ($x < 0$), $W_s$ es negativo y $W_{ext}$ es positivo.

de acuerdo con la ecuación 11. Cuando el resorte es estirado, el trabajo efectuado por la fuerza del resorte es negativo y está representado por el triángulo inferior marcado $W_s$ en el lado derecho de la figura 9; puede demostrarse por medio de un argumento geométrico similar que este triángulo tiene un área de $-\frac{1}{2}kx^2$, de acuerdo con la ecuación 10

Al *comprimir* el resorte, como se muestra en el lado izquierdo de la figura 9, el trabajo $W_{ext}$ efectuado por el agente externo es todavía positivo, y el trabajo $W_s$ efectuado por el resorte es todavía negativo, justo como lo esperamos de los signos de las fuerzas y del desplazamiento.

**Problema muestra 3** Un resorte cuelga verticalmente en equilibrio. Un bloque de masa $m = 6.40$ kg está unido al resorte, pero el bloque es sostenido en su lugar de modo que al principio el resorte no se estire. Ahora la mano que sostiene al bloque desciende lentamente, permitiendo que el bloque descienda a velocidad constante hasta que alcance el equilibrio, en cuyo punto se retira la mano. Una medición demuestra que el resorte se ha estirado una distancia $s = 0.124$ m respecto a su longitud de equilibrio previa. Halle el trabajo efectuado sobre el bloque en este proceso por (*a*) la gravedad, (*b*) el resorte, y (*c*) la mano.

**Solución** No se nos da la constante de fuerza del resorte, pero podemos hallarla porque sabemos que en la posición estirada el bloque está en equilibrio por la fuerza hacia arriba del resorte y la fuerza hacia abajo de la gravedad:

$$\sum F = mg - ks = 0.$$

Aquí hemos elegido la dirección hacia abajo como positiva. Resolviendo para $k$ hallamos que

$$k = mg/s = (6.40 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)/(0.124 \text{ m}) = 506 \text{ N/m}.$$

Para hallar el trabajo efectuado por la gravedad, $W_g$, advertimos que la fuerza de la gravedad es una fuerza constante, y que la fuerza y el desplazamiento son paralelos, de modo que podemos usar la ecuación 1:

$$W_g = Fs = mgs = (6.40 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(0.124 \text{ m}) = +7.78 \text{ J}.$$

Éste es positivo, porque la fuerza y el desplazamiento están en la misma dirección. Para hallar el trabajo $W_s$ efectuado por el resorte, usamos la ecuación 10 con $x = s$:

$$W_s = -\tfrac{1}{2}ks^2 = -\tfrac{1}{2}(506 \text{ N/m})(0.124 \text{ m})^2 = -3.89 \text{ J}.$$

Éste es negativo, porque la fuerza y el desplazamiento están en direcciones opuestas.

Una manera de hallar el trabajo $W_h$ efectuado por la mano es hallar la fuerza ejercida por la mano cuando el bloque desciende. Si el bloque está en equilibrio durante todo el proceso, entonces puede hallarse la fuerza $F_h$ hacia arriba ejercida por la mano a partir de la segunda ley de Newton con $a = 0$:

$$\sum F = -kx - F_h + mg = 0,$$

o sea

$$F_h = mg - kx.$$

El trabajo puede ser hallado a partir de una integral de la forma de la ecuación 7, con un signo negativo introducido para indicar que la fuerza se opone al desplazamiento:

$$W_h = -\int_0^s F_h\,dx = -\int_0^s (mg - kx)\,dx = -mgs + \tfrac{1}{2}ks^2$$
$$= -mgs + \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{s}\right)s^2 = -\tfrac{1}{2}mgs = -3.89 \text{ J}.$$

Una manera más sencilla de obtener este resultado es reconocer que si el bloque (al que tratamos como partícula) desciende lenta y uniformemente, entonces la fuerza neta es cero, y, por lo tanto, el trabajo total efectuado por todas las fuerzas que actúan sobre la partícula debe ser cero:

$$W_{neto} = W_s + W_g + W_h = 0,$$
$$W_h = -W_s - W_g = -(-3.89 \text{ J}) - 7.78 \text{ J} = -3.89 \text{ J}.$$

Nótese que el trabajo efectuado por la mano es igual al trabajo efectuado por el resorte.

## 7-3 TRABAJO EFECTUADO POR UNA FUERZA VARIABLE: CASO BIDIMENSIONAL *(Opcional)*

La fuerza **F** que actúa sobre una partícula puede variar tanto en dirección como en magnitud, y la partícula puede moverse a lo largo de una trayectoria curva. Para calcular el trabajo en este caso general dividimos la trayectoria en un número grande de desplazamientos pequeños $\delta\mathbf{s}$, cada uno tangente a la trayectoria en dirección del movimiento. La figura 10 muestra dos desplazamientos escogidos para una situación particular; muestra también a la fuerza **F** y al ángulo $\phi$ entre **F** y $\phi\mathbf{s}$ en cada ubicación. Podemos hallar la cantidad de trabajo $\delta W$ efectuado sobre la partícula durante un desplazamiento $\delta\mathbf{s}$ de

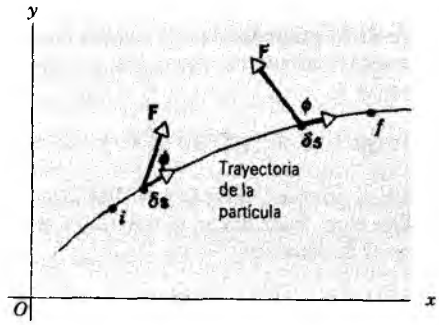



**Figura 10** Una partícula se mueve desde el punto *i* hasta el punto *f* a lo largo de la trayectoria mostrada. Durante este movimiento actúa sobre ella una fuerza **F** que varía tanto en magnitud como en dirección. Cuando $\delta s \to 0$, sustituimos al intervalo por *ds*, la cual está en la dirección de la velocidad instantánea y, por lo tanto, tangente a la trayectoria.

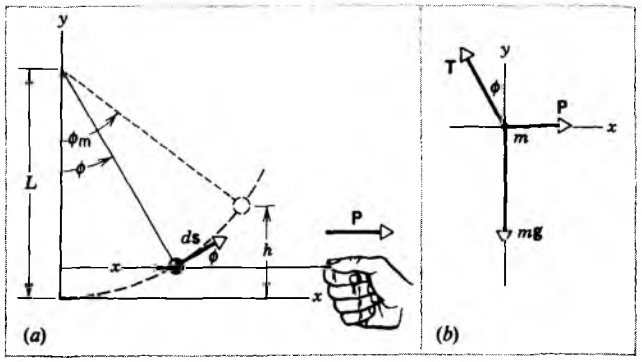



**Figura 11** Problema muestra 4. (*a*) Una partícula está suspendida de un cordón de longitud *L* y es jalada lateralmente por una fuerza horizontal *P*. El ángulo máximo alcanzado es $\phi_m$. (*b*) Un diagrama de cuerpo libre de la partícula.

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s} = F \cos \phi \, \delta s. \tag{12}$$

Aquí **F** es la fuerza en el punto donde se inicia $\delta$**s**. El trabajo efectuado por la fuerza variable **F** sobre la partícula cuando ésta se mueve desde *i* hasta *f* en la figura 10 se halla aproximadamente sumando los elementos del trabajo sobre cada uno de los segmentos lineales que forman la trayectoria desde *i* hasta *f*. Si los segmentos lineales $\delta$**s** resultan infinitesimalmente pequeños, pueden ser sustituidos por diferenciales *d***s** y la suma de todos los segmentos lineales puede ser sustituida por una integral, como en la ecuación 7. El trabajo efectuado se halla, entonces, de

$$W = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_i^f F \cos \phi \, ds. \tag{13}$$

No podemos evaluar esta integral hasta que podamos decir cómo varían en la ecuación 13 $F$ y $\phi$ entre punto y punto a lo largo de la trayectoria; ambos son funciones de las coordenadas $x$ y $y$ de la partícula en la figura 10.

Podemos obtener una expresión equivalente a la ecuación 13 escribiendo **F** y *d***s** en términos de sus componentes. Entonces $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$ y $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$, de modo que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x\,dx + F_y\,dy$. En esta evaluación recordemos que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ y que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$ (véase la Ec. 14, capítulo 3). Sustituyendo este resultado en la ecuación 13, obtenemos

$$W = \int_i^f (F_x\,dx + F_y\,dy). \tag{14}$$

Las integrales como éstas de las ecuaciones 13 y 14 se llaman *integrales de línea*; para evaluarlas debemos saber cómo varían $F \cos \phi$ o $F_x$ y $F_y$ cuando la partícula se va moviendo a lo largo de una línea determinada. La extensión de la ecuación 14 al caso tridimensional es sencilla.

**Problema muestra 4** Un objeto pequeño de masa $m$ está suspendido de un cordón de longitud $L$. El objeto es jalado lateralmente por una fuerza $P$ siempre horizontal, hasta que el cordón forma un ángulo $\phi_m$ con la vertical (Fig. 11*a*). El desplazamiento se lleva a cabo de forma tan lenta que podemos ver al sistema como si estuviera en equilibrio durante el proceso. Halle el trabajo efectuado por todas las fuerzas que actúan sobre el objeto.

**Solución** El movimiento tiene lugar a lo largo de un arco de radio $L$, y el desplazamiento *d***s** se da siempre a lo largo del arco. En un punto intermedio del movimiento, el cordón forma un ángulo $\phi$ con la vertical, y según el diagrama de cuerpo libre de la figura 11*b* vemos que, aplicando la segunda ley de Newton,

$$\text{componente } x: \quad P - T \operatorname{sen} \phi = 0,$$

$$\text{componente } y: \quad T \cos \phi - mg = 0.$$

Combinando estas dos ecuaciones para eliminar a $T$, hallamos que

$$P = mg \tan \phi.$$

Puesto que $P$ actúa solamente en dirección $x$, podemos usar la Ec. 14 con $F_x = P$ y $F_y = 0$ para hallar el trabajo efectuado por $P$. Entonces

$$W_P = \int P\,dx = \int_0^{\phi_m} mg \tan \phi \, dx.$$

Para efectuar la integral sobre $\phi$, debemos tener una sola variable en la integración; elegimos definir a $x$ en términos de $\phi$. En una posición intermedia arbitraria, cuando la coordenada horizontal es $x$, vemos que $x = L \operatorname{sen} \phi$ y entonces $dx = L \cos \phi \, d\phi$. Sustituyendo por $dx$, podremos ahora llevar a cabo la integración:

$$W_P = \int_0^{\phi_m} mg \tan \phi \, (L \cos \phi \, d\phi)$$

$$= mgL \int_0^{\phi_m} \operatorname{sen} \phi \, d\phi = mgL(-\cos \phi) \Big|_0^{\phi_m}$$

$$= mgL(1 - \cos \phi_m).$$

En la figura 11*a* podemos ver que $h = L(1 - \cos \phi_m)$, y entonces

$$W_P = mgh.$$

El trabajo $W_g$ efectuado por la fuerza de la gravedad (constante) $mg$ puede ser evaluado usando una técnica similar basada

en la ecuación 14 (tomando $F_x = 0, F_y = -mg$) para dar $W_g = -mgh$ (véase el problema 16). El signo menos se debe a que la dirección del desplazamiento vertical es en sentido opuesto a la dirección de la fuerza de la gravedad. El trabajo $W_T$ efectuado por la tensión del cordón es cero, porque **T** es perpendicular al desplazamiento $d\mathbf{s}$ en cada punto del movimiento. Ahora podemos ver que el trabajo total es cero: $W_{neto} = W_p + W_g + W_T = mgh - mgh + 0 = 0$, consistente con el hecho de que la fuerza neta sobre la partícula es siempre cero durante el movimiento.

Nótese que en este problema el trabajo (positivo) efectuado por la fuerza horizontal **P** cancela, en efecto, el trabajo (negativo) efectuado por la fuerza vertical $m\mathbf{g}$. Esto puede ocurrir porque el trabajo es una cantidad *escalar*: no tiene dirección ni componentes. El movimiento de la partícula depende del trabajo *total* efectuado sobre ella, el cual es la suma escalar de los valores del trabajo asociados con cada una de las fuerzas individuales. ■

## 7-4 ENERGÍA CINÉTICA Y EL TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

En esta sección consideraremos el efecto del trabajo sobre el movimiento de una partícula. Una fuerza no equilibrada aplicada a una partícula cambiará ciertamente el estado del movimiento de la partícula. La segunda ley de Newton nos proporciona un modo de analizar este cambio de movimiento. Consideraremos ahora un enfoque diferente que, finalmente, nos dé el mismo resultado que las leyes de Newton pero que a menudo es más sencillo de aplicar. Nos conduce también a una de las muchas e importantes *leyes de conservación* que desempeñan un papel tan importante en la interpretación de los procesos físicos.

En esta discusión consideraremos no el trabajo efectuado sobre una partícula por una sola fuerza sino el trabajo neto $W_{neto}$ efectuado por todas las fuerzas que actúen sobre la partícula. Existen dos maneras de hallar el trabajo neto. La primera es hallar la fuerza neta, esto es, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula,

$$\mathbf{F}_{net} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots, \tag{15}$$

y tratar esta fuerza neta como una única fuerza al calcular el trabajo según la ecuación 7 en una dimensión o según la ecuación 13 en más de una dimensión. Por el segundo método, calculamos el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan en la partícula,

$$W_1 = \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s}, \qquad W_2 = \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s},$$
$$W_3 = \int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s}, \cdots,$$

y luego, puesto que el trabajo es un escalar, podemos sumar el trabajo hecho por cada fuerza para hallar el trabajo neto:

$$W_{neto} = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots. \tag{16}$$

Ambos métodos arrojan iguales resultados y por cuál de ellos nos inclinemos, constituye una cuestión de mera convención.

Sabemos que una fuerza neta desequilibrada aplicada a una partícula cambiará su estado de movimiento al acelerarla, digamos de una velocidad inicial $v_i$ a una velocidad final $v_f$. ¿Cuál es el efecto del trabajo hecho sobre la partícula por esta fuerza neta desequilibrada?

Veremos primero la respuesta a esta pregunta en el caso de una fuerza constante en una dimensión. Bajo la influencia de esta fuerza, la partícula se mueve de $x_i$ a $x_f$, y acelera de manera uniforme de $v_i$ hasta $v_f$. El trabajo hecho es

$$W_{neto} = F_{neto}(x_f - x_i) = ma(x_f - x_i).$$

Puesto que la aceleración $a$ es constante, podemos usar la ecuación 20 del capítulo 2, expresada como $v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$ para obtener

$$W_{neto} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2. \tag{17}$$

Es decir, el resultado del trabajo neto en la partícula ha consistido en producir un cambio en el valor de la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ desde el punto i al punto f. Esta cantidad se denomina *energía cinética* $K$ de la partícula, con la definición

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2. \tag{18}$$

En términos de la energía cinética $K$, podemos reescribir la ecuación 17 así:

$$W_{neto} = K_f - K_i = \Delta K. \tag{19}$$

La ecuación 19 es la representación matemática de un importante resultado llamado *teorema trabajo-energía*, el cual, en palabras, puede enunciarse como sigue:

> *El trabajo neto efectuado por las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual al cambio en la energía cinética de la partícula.*

Aun cuando lo hemos derivado para el caso de una fuerza resultante constante, el teorema trabajo-energía es válido en general también para fuerzas no constantes. Posteriormente en esta misma sección, daremos una demostración general para fuerzas no constantes.

Al igual que el trabajo, la energía cinética es una cantidad escalar; a diferencia del trabajo, la energía cinética nunca es negativa. Ya hemos mencionado que el trabajo depende de la elección del marco de referencia y, por lo tanto, no debe sorprendernos que la energía cinética lo sea también. Por supuesto, ya sabemos que observadores en marcos inerciales diferentes diferirán en sus mediciones de la velocidad, y, por lo tanto, diferirán también en la asignación de las energías cinéticas a las partículas. Aunque los observadores no concuerden en los números que

asignen al trabajo y a la energía cinética, sin embargo, hallarán que la misma relación se mantiene entre estas cantidades, es decir, $W_{neto} = \Delta K$.

Para que la ecuación 19 sea dimensionalmente consistente, la energía cinética debe tener las mismas unidades que el trabajo, es decir, joules, ergs, pie-libras, electronvolts, etc.

Cuando la magnitud de la velocidad de una partícula es constante, no existe un cambio en la energía cinética, y, por lo tanto, la fuerza resultante no realiza trabajo. En el movimiento circular uniforme, por ejemplo, la fuerza resultante actúa hacia el centro del círculo y forma siempre ángulos rectos con la dirección del movimiento. Tal fuerza no realiza trabajo sobre la partícula: cambia la dirección de la velocidad de la partícula pero no su magnitud. Se efectuará un trabajo sobre la partícula y cambiará su energía cinética sólo cuando la fuerza resultante tenga una componente en dirección del movimiento.

El teorema trabajo-energía *no* representa una ley nueva, independiente de la mecánica clásica. Simplemente hemos *definido* al trabajo (Ec. 7, por ejemplo) y a la energía cinética (Ec. 18) y *derivado* la relación entre ellos a partir de la segunda ley de Newton. El teorema trabajo-energía es útil, sin embargo, para resolver problemas en los que el trabajo neto efectuado sobre una partícula por fuerzas externas se calcula fácilmente y también en aquellos problemas en los cuales nos interesa hallar la velocidad de la partícula en ciertas posiciones. El teorema trabajo-energía es de mayor importancia, incluso, como un punto de partida para una generalización amplia del concepto de energía y de cómo la energía puede ser almacenada o utilizada entre partes de un sistema complejo. El principio de conservación de la energía es el tema del capítulo siguiente.

## Prueba general del teorema trabajo-energía

El cálculo siguiente nos ofrece una prueba de la ecuación 19 en el caso de fuerzas no constantes en una dimensión. El cálculo equivalente en dos o tres dimensiones se deja como ejercicio (véase el problema 34). Hagamos que $F_{neto}$ represente la fuerza neta que actúa sobre la partícula. El trabajo neto efectuado por todas las fuerzas externas que actúan sobre la partícula es precisamente $W_{neto} = \int F_{neto}\, dx$. Con un poco de manipulación matemática podemos llevar a cabo un cambio de la variable de integración y poner esto de una manera más útil:

$$F_{neto} = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{dv}{dx}v = mv\frac{dv}{dx}.$$

Entonces

$$W_{neto} = \int F_{net}\, dx = \int mv\frac{dv}{dx}\, dx = \int mv\, dv.$$

La variable de integración es ahora la velocidad $v$. Integremos desde la velocidad inicial $v_i$ hasta la velocidad final $v_f$:

$$W_{neto} = \int_{v_i}^{v_f} mv\, dv = m\int_{v_i}^{v_f} v\, dv = \tfrac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2.$$

Ésta es idéntica a la ecuación 19 y demuestra que el teorema trabajo-energía se mantiene incluso para fuerzas no constantes.

---

**Problema muestra 5** Un método para determinar la energía cinética de los neutrones contenidos en un haz, tal como el de un reactor nuclear, es medir cuánto tiempo le toma a una partícula del haz pasar por dos puntos fijos separados por una distancia conocida. Esta técnica se conoce como el método del *tiempo de vuelo*. Supongamos a un neutrón que viaje una distancia $d = 6.2$ m en un tiempo $t = 160\ \mu$s. ¿Cuál es su energía cinética? La masa de un neutrón es de $1.67 \times 10\ \text{kg}^{-27}$ kg.

**Solución** Hallamos la velocidad de

$$v = \frac{d}{t} = \frac{6.2\ \text{m}}{160 \times 10^{-6}\ \text{s}} = 3.88 \times 10^4\ \text{m/s}.$$

De la ecuación 18, la energía cinética es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(3.88 \times 10^4\ \text{m/s})^2$$
$$= 1.26 \times 10^{-18}\ \text{J} = 7.9\ \text{eV}.$$

En los reactores nucleares, los neutrones se producen en la fisión nuclear con energías cinéticas típicas de unos cuantos MeV. En este ejemplo ha sido efectuado trabajo negativo sobre los neutrones por un agente externo (llamado moderador), reduciendo por lo tanto sus energías cinéticas por un factor considerable desde unos cuantos MeV a unos cuantos eV.

**Problema muestra 6** Un cuerpo de masa $m = 4.5$ g se deja caer desde el reposo desde una altura $h = 10.5$ m sobre la superficie de la Tierra. ¿Cuál será su velocidad inmediatamente antes de que toque el suelo?

**Solución** Suponemos que el cuerpo puede ser tratado como una partícula. Podríamos resolver este problema usando un método basado en las leyes de Newton, tal como lo consideramos en el capítulo 5. En lugar de ello, aquí elegimos resolverlo usando el teorema trabajo-energía. La ganancia en energía cinética es igual al trabajo efectuado por la fuerza resultante, que es aquí la fuerza de la gravedad. Esta fuerza es constante y dirigida a lo largo de la línea del movimiento, de modo que el trabajo efectuado por la gravedad es

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = mgh.$$

Al principio, el cuerpo tiene una velocidad $v_0 = 0$ y, por último, una velocidad $v$. La ganancia en energía cinética del cuerpo es

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0.$$

De acuerdo con el teorema trabajo-energía, $W = \Delta K$, por lo tanto,

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

La velocidad del cuerpo es, entonces,

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.80 \text{ m/s}^2)(10.5 \text{ m})} = 14.3 \text{ m/s}.$$

Nótese que este resultado es independiente de la masa del objeto, como lo habíamos deducido previamente al usar las leyes de Newton.

**Problema muestra 7** Un bloque de masa $m$ = 3.63 kg se desliza sobre una mesa horizontal sin fricción a una velocidad de $v$ = 1.22 m/s. Queda en reposo al comprimir un resorte en su trayectoria. ¿En cuánto se comprime el resorte si su constante de fuerza $k$ es de 135 N/m?

**Solución** El cambio en la energía cinética del bloque es

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2.$$

El trabajo $W$ efectuado por el resorte sobre el bloque cuando el resorte se comprime desde su longitud relajada a través de una distancia $d$ es, de acuerdo con la ecuación 10,

$$W = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

Usando el teorema trabajo-energía, $W = \Delta K$, obtenemos

$$-\tfrac{1}{2}kd^2 = -\tfrac{1}{2}mv^2$$

o sea

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (1.22 \text{ m/s})\sqrt{\frac{3.63 \text{ kg}}{135 \text{ N/m}}} = 0.200 \text{ m}.$$

## Limitación del teorema trabajo-energía

Derivamos el teorema trabajo-energía, ecuación 19, directamente de la segunda ley de Newton, la cual, en la forma en que la hemos enunciado, se aplica *solamente a partículas*. De aquí que el teorema trabajo-energía, tal como lo hemos presentado hasta ahora, se aplique igualmente sólo a partículas. Podemos aplicar este importante teorema a objetos reales, siempre que tales objetos se comporten como partículas. Previamente hemos considerado que un objeto se comporta como una partícula si todas las partes del objeto se mueven exactamente de la misma manera. En el uso del teorema trabajo-energía, podemos tratar a un objeto extenso como una partícula si la única clase de energía que tiene es la energía cinética direccional (o traslacional).

Consideremos, por ejemplo, a un automóvil de prueba que es impactado de frente contra una barrera de concreto gruesa y rígida. La energía cinética direccional del automóvil ciertamente disminuye cuando el auto alcanza la barrera, se comprime, y llega al reposo. Sin embargo, existen otras formas de energía diferentes a la energía cinética direccional que intervienen en esta situación. Existe la energía interna asociada con el doblamiento y la compresión del cuerpo del auto; parte de esta energía interna puede aparecer, por ejemplo, como un aumento en la temperatura del auto, y parte puede ser transferida como calor al entorno. Nótese que, aun cuando la barrera pueda ejercer una fuerza grande sobre el auto durante el choque, la fuerza no realiza trabajo porque *el punto de aplicación de la fuerza sobre el auto no se mueve.* (Recordemos nuestra definición original del trabajo, dada por la ecuación 1 e ilustrada en la figura 1, que dice: la fuerza debe actuar a través de cierta distancia para que se efectúe un trabajo.) Entonces, en este caso $\Delta K \neq 0$, pero $W = 0$; claramente, la ecuación 19 no se cumple. El auto *no* se comporta como una partícula; *no todas* las piezas de él se mueven exactamente de la misma manera.

Por razones similares, desde el punto de vista del trabajo-energía, no podemos tratar como una partícula a un bloque que se desliza recibiendo la acción de una fuerza de fricción (si bien *podemos*, no obstante, continuar tratándolo como una partícula, como lo hicimos en el capítulo 6, cuando analizamos su comportamiento haciendo uso de las leyes de Newton). La fuerza de fricción, que representamos como una fuerza constante **f**, es en realidad bastante complicada, involucrando en ella la formación y rotura de muchas soldaduras microscópicas (véase la sección 6-2), que deforman las superficies y dan por resultado cambios en la energía interna de las superficies (lo cual puede en parte repercutir como un aumento en la temperatura de las superficies). A causa de la dificultad de comprender a fondo otras formas de la energía, debido a que los objetos no se comportan como partículas, generalmente no es correcto aplicar la forma de una partícula del teorema trabajo-energía a objetos sujetos a fuerzas de fricción.

En estos ejemplos debemos ver al auto que se estrella y al bloque que se desliza no como partículas sino como sistemas que contienen un gran número de partículas. Aunque sería correcto aplicar el teorema trabajo-energía a cada partícula por separado del sistema, resultaría tremendamente complicado hacerlo así. En el capítulo 9 comenzaremos a desarrollar un método más sencillo para tratar a sistemas complejos de partículas, y demostraremos cómo ampliar el teorema trabajo-energía de modo que podamos aplicarlo en tales casos.

# 7-5 POTENCIA

Al diseñar un sistema mecánico es a menudo necesario considerar no solamente cuánto trabajo debe efectuarse sino también a qué velocidad se efectuará éste. Se efectúa la misma cantidad de trabajo para levantar a un cuerpo dado a una altura dada si el hacerlo toma 1 segundo o 1 año. Sin embargo, la *razón a la que se efectúa dicho trabajo* es muy diferente en los dos casos.

Definimos a la *potencia* como la razón a la que se efectúa el trabajo. (Aquí consideramos solamente la potencia *mecánica*, la cual es una consecuencia del trabajo mecánico. Una visión más general de la potencia como la energía liberada por unidad de tiempo nos permite ampliar el concepto de potencia para incluir a la potencia eléctrica, la potencia solar, y así sucesivamente.) La potencia promedio $\bar{P}$ desarrollada por un agente que ejerza una fuerza particular sobre un cuerpo es el trabajo total efectuado por esa fuerza sobre el cuerpo dividido por el intervalo de tiempo total, o sea

$$\bar{P} = \frac{W}{t} \tag{20}$$

La potencia instantánea $P$ producida por un agente es

$$P = \frac{dW}{dt}, \tag{21}$$

donde $dW$ es la pequeña cantidad de trabajo efectuada en el intervalo infinitesimal de tiempo $dt$. Si la potencia es constante en el tiempo, entonces $P = \bar{P}$ y

$$W = Pt. \tag{22}$$

La unidad de potencia en el SI es el joule por segundo, llamado *watt* (abreviado W). Esta unidad recibe su nombre en honor a James Watt (1736-1819), quien hizo grandes mejoras en las máquinas de vapor de su tiempo y señaló el camino hacia las máquinas más eficientes de hoy día. En el sistema inglés, la unidad de potencia es 1 ft · lb/s, aunque generalmente se usa una unidad más práctica, el *caballo de fuerza* (hp), para describir la potencia de aparatos tales como los motores eléctricos o los motores de automóviles. Un caballo de fuerza (horsepower) es, por definición, igual a 550 ft · lb/s, que equivale a unos 746 W.

El trabajo puede también expresarse en unidades de potencia × tiempo. Éste es el origen del término *kilowatt-hora*, que la compañía de electricidad usa para medir cuánto trabajo (en forma de energía eléctrica) se consume en las casas. Un kilowatt-hora es el trabajo efectuado en 1 hora por un agente que trabaje a una razón constante de 1 kW.

Podemos también expresar la potencia suministrada a un cuerpo en función de la velocidad del cuerpo y de la fuerza que actúa sobre él. En general, podemos reescribir la ecuación 21 así:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

lo cual, después de sustituir $d\mathbf{s}/dt$ por la velocidad $\mathbf{v}$, se convierte en

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \tag{23}$$

Si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{v}$ son paralelas entre sí, esto podemos expresarlo como sigue:

$$P = Fv. \tag{24}$$

Nótese que la potencia puede ser negativa si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelas. Suministrar una potencia negativa a un cuerpo significa hacer un trabajo negativo sobre él: la fuerza ejercida sobre el cuerpo por el agente externo está en dirección opuesta a su desplazamiento $d\mathbf{s}$ y, por lo tanto, opuesta a $\mathbf{v}$.

**Problema muestra 8** Un elevador vacío tiene un peso, de 5160 N (1160 lb). Está diseñado para transportar una carga máxima de 20 pasajeros desde la plata baja que se halla al nivel de la calle, hasta el 25º piso de un edificio en un tiempo de 18 s. Suponiendo que el peso promedio de un pasajero sea de 710 N (160 lb) y la distancia entre pisos sea de 3.5 m (11 ft), ¿cuál es la potencia constante mínima necesaria del motor del elevador? (Suponga que todo el trabajo que hace que el elevador se levante procede del motor y que el elevador no tiene contrapesos.)

**Solución** La fuerza total mínima que debe ejercerse es el peso total del elevador y los pasajeros, $F$ = 5160 N + 20(710) N = 19,400 N. El trabajo que debe ser efectuado es

$$W = Fs = (19{,}400\ \text{N})(25 \times 3.5\ \text{m}) = 1.7 \times 10^6\ \text{J}.$$

La potencia mínima es, por lo tanto,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1.7 \times 10^6\ \text{J}}{18\ \text{s}} = 94\ \text{kW}.$$

Esto es lo mismo que 126 hp, aproximadamente la potencia liberada por el motor de un automóvil. Por supuesto, las pérdidas por fricción y otras ineficiencias aumentarán la potencia que el motor debe proporcionar para levantar al elevador.

En la práctica, un elevador tiene usualmente un contrapeso que baja cuando la cabina del elevador sube. El motor suministra una potencia positiva a la cabina mientras sube y una potencia negativa al contrapeso mientras éste baja. Así, la potencia *neta* que el motor debe suministrar se reduce notablemente.

## 7-6 MARCOS DE REFERENCIA *(Opcional)*

Las leyes de Newton se cumplen sólo en marcos de referencia inerciales (véase la sección 6-8) y si se cumplen en un marco inercial particular entonces se cumplen en todos los marcos de referencia que se muevan a velocidad constante en relación a ese marco. Ciertas cantidades físicas, si se observan en marcos inerciales diferentes, arrojan siempre la misma medida. En la mecánica newtoniana, estas cantidades *invariantes* incluyen la fuerza, la masa, la aceleración, y el tiempo. Otras cantidades, como el desplazamiento o la velocidad, no son invariantes cuando se miden desde marcos inerciales diferentes. Por ejemplo, en la sección 4-6 estudiamos cómo relacionar las velocidades medidas en dos marcos de referencia en movimiento relativo a una velocidad constante.

Dos observadores en marcos inerciales diferentes medirán la misma aceleración de una partícula y, por tanto, deben deducir el mismo valor del cambio en su velocidad, $\Delta v$; pero en general

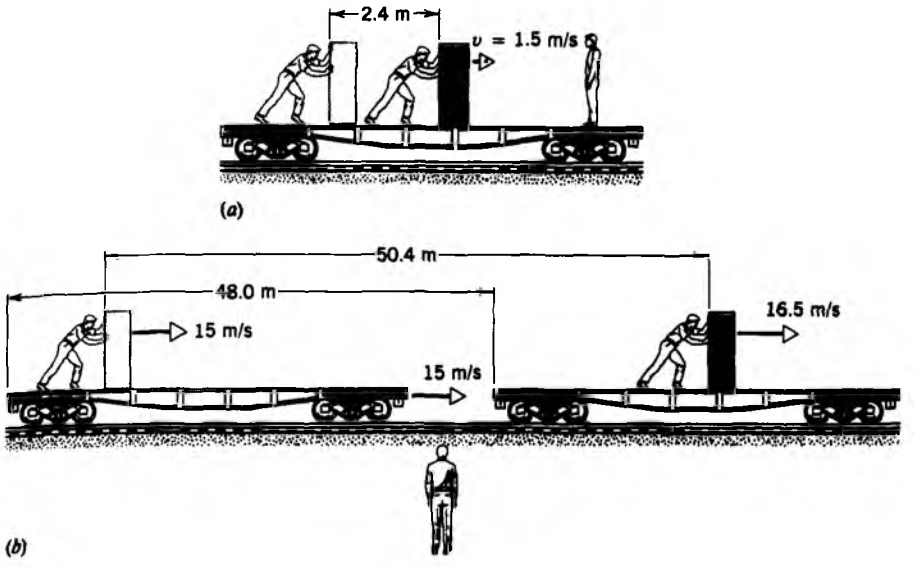



**Figura 12** Un obrero que viaja en una plataforma de ferrocarril empuja una caja hacia adelante, como puede verse por (*a*) un observador sobre el tren y (*b*) un observador en tierra.

*no* medirán el mismo cambio en su energía cinética. Los observadores en movimiento relativo medirán también valores diferentes para el desplazamiento de una partícula, de modo que (aunque midan los mismos valores de las fuerzas que actúen sobre la partícula, siendo la fuerza invariante) deducirán valores diferentes para el trabajo efectuado sobre la partícula. En esta sección aclararemos estas afirmaciones con un ejemplo numérico específico que demuestra la validez del teorema trabajo-energía desde los puntos de vista de observadores en marcos inerciales diferentes.

Consideremos el ejemplo siguiente: un obrero está empujando una caja sobre la plataforma de un carro de ferrocarril. El tren se mueve a la velocidad constante de 15.0 m/s. La caja tiene una masa de 12 kg, y al ser empujado hacia adelante sobre una distancia de 2.4 m su velocidad aumenta (con relación a la plataforma) con aceleración constante desde el reposo hasta 1.5 m/s. La figura 12*a* muestra las posiciones inicial y final según lo aprecia un observador que está viajando en la plataforma. Este observador determina que el cambio en la energía cinética es

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}(12\text{ kg})(1.5\text{ m/s})^2 - 0 = 13.5\text{ J}.$$

La aceleración constante supuesta para la caja puede hallarse de la ecuación 20 del capítulo 2, que nos da

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2(x_f - x_i)} = \frac{(1.5\text{ m/s})^2 - 0}{2(2.4\text{ m})} = 0.469\text{ m/s}^2.$$

Esta aceleración resulta de una correspondiente fuerza neta constante dada por $F = ma = (12\text{ kg})(0.469\text{ m/s}^2) = 5.63$ N. Al moverse la caja a través de un desplazamiento $\Delta x$ de 2.4 m, el trabajo efectuado sobre la caja por esta fuerza es

$$W = F\,\Delta x = (5.63\text{ N})(2.4\text{ m}) = 13.5\text{ J}.$$

El observador que viaja en la plataforma concluye felizmente que $W = \Delta K$ y que el teorema trabajo-energía se satisface.

¿Cómo interpreta una medición similar un observador situado en tierra? (Usamos coordenadas primadas para representar las mediciones del observador en tierra.) Cuando la caja está en reposo sobre la plataforma, se está moviendo hacia adelante a razón de $v_i' = 15.0$ m/s de acuerdo con el observador situado en tierra. Después de que la caja es empujada, el mismo observador concluye que su velocidad es de $v_f' = 15.0\text{ m/s} + 1.5\text{ m/s} = 16.5$ m/s, y entonces deduce que el cambio en la energía cinética es

$$\begin{aligned}\Delta K' = K_f' - K_i' &= \tfrac{1}{2}mv_f'^2 - \tfrac{1}{2}mv_i'^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(12\text{ kg})(16.5\text{ m/s})^2 - \tfrac{1}{2}(12\text{ kg})(15.0\text{ m/s})^2 \\ &= 284\text{ J}.\end{aligned}$$

Esto es muy diferente de lo que el observador que viaja en la plataforma midió para el cambio en la energía cinética ($\Delta K = 13.5$ J).

Antes de que comencemos a dudar de la aplicabilidad del teorema trabajo-energía, hagamos rápidamente un cálculo del trabajo efectuado sobre la caja de acuerdo con el observador situado en tierra. El desplazamiento total de la caja depende también del marco de referencia del observador, como lo muestra la figura 12*b*. Para el observador parado en tierra, la fuerza se ejerce no sobre una distancia de 2.4 m sino sobre una distancia mayor, de 50.4 m, porque a una velocidad de 15.0 m/s el tren viaja 48.0 m en los 3.2 s (= $\Delta v/a$ o $\Delta v'/a'$, (siendo la aceleración y el tiempo invariantes en la mecánica newtoniana) que toma mover la caja; el desplazamiento total $\Delta x'$ de la caja en este tiempo es de 48.0 m + 2.4 m = 50.4 m. Por otra parte, la fuerza es una invariante; para el observador situado en tierra, $F' = F = 5.63$ N. El observador situado en tierra concluye que el trabajo es

$$W' = F'\,\Delta x' = (5.63\text{ N})(50.4\text{ m}) = 284\text{ J}.$$

El teorema trabajo-energía se cumple también ¡para el observador situado en tierra! Aun cuando los dos observadores usen valores numéricos diferentes para los desplazamientos y las velocidades, y no estén de acuerdo con los valores numéricos que asignan al trabajo y a la energía cinética, cada uno, sin embargo, concluye que existe la misma igualdad numérica entre el trabajo y el cambio en la energía cinética.

En física, una ley *invariante* es aquella que tiene la misma *forma* en todos los marcos de referencia inerciales. Un buen ejemplo es el teorema trabajo-energía, como lo hemos visto. En el marco de referencia inercial del observador *S*, quien midió el trabajo $W$ y el cambio en la energía cinética $\Delta K$ para un

proceso particular, el teorema trabajo-energía es $W = \Delta K$. El observador $S'$, quien estaba en movimiento a velocidad constante en relación a $S$, midió el trabajo $W'$ y el cambio en la energía cinética $\Delta K'$ para el mismo proceso; en tanto que, en general, será cierto que $W \neq W'$ y que $\Delta K \neq K'$, el observador $S'$ determina que $W' = \Delta K'$. Para otro observador inercial $S''$, $W'' = \Delta K''$. Para cualquier observador en un marco inercial, el teorema trabajo-energía tiene la misma forma. Los principios de invariancia nos dan a menudo la clave del funcionamiento del mundo natural; nos señalan que una relación particular no es un mero accidente de la posición preferida del observador sino que, en su lugar, es la consecuencia de cierta simetría profunda subyacente en la naturaleza.

**Problema muestra 9** Dos aeroplanos idénticos, cada uno de masa $m$, vuelan juntos sobre aguas tranquilas a una velocidad constante $v$ medida con relación al agua. El aeroplano 1 aterriza sobre un portaviones, que está en reposo en el agua. Un gancho que porta el aeroplano engancha un cable en la cubierta de aterrizaje, y el cable ejerce una fuerza similar a la de un resorte que lleva al aeroplano al reposo. Un observador sobre el portaaviones mide una distancia $d$ entre el punto en que el aeroplano enganchó al cable y el punto en que finalmente llegó al reposo. Despreciando las demás fuerzas sobre el aeroplano (la fricción, por ejemplo), discutir la validez del teorema trabajo-energía desde el punto de vista (*a*) de un observador que viaje en el portaaviones y (*b*) del piloto del aeroplano 2, que continúa volando a la velocidad inicial y en la dirección inicial.

**Solución** (*a*) El observador que va en el portaviones mide un cambio en la energía cinética de

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2 = -\tfrac{1}{2}mv^2.$$

Es razonable que este observador, que ve al aeroplano llegar al reposo, mida un cambio *negativo* en la energía cinética.

La fuerza externa a modo de resorte actúa sobre el aeroplano por el cable; si suponemos una constante de fuerza efectiva $k$, esta fuerza trabaja sobre el aeroplano, y puede expresarse como:

$$W_s = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

Este trabajo es claramente negativo para este observador, porque la fuerza del resorte y el desplazamiento están en direcciones opuestas al aterrizar el aeroplano. Si despreciamos las demás fuerzas (incluyendo la fricción), podemos ciertamente tratar al aeroplano como una partícula, y el teorema trabajo-energía sería válido para el observador. En particular, en este marco de referencia, tanto $W$ como $K$ son negativos.

(*b*) De acuerdo con el piloto del aeroplano 2, la energía cinética inicial del aeroplano 1 es cero: los aeroplanos están volando uno al lado del otro, y no existe movimiento relativo entre ellos. Cuando el aeroplano 1 llega finalmente al reposo sobre el portaviones, su velocidad con relación al aeroplano 2 es $-v$, y su cambio en la energía cinética es, por lo tanto,

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = +\tfrac{1}{2}mv^2.$$

Puede parecer sorprendente que el piloto del aeroplano 2 observe un *aumento* en la energía cinética del aeroplano 1. Sin embargo, en el marco de referencia del aeroplano 2, el aeroplano 1 estaba inicialmente en reposo y finalmente está en movimiento a una velocidad $v$.

El cable efectúa un trabajo *positivo* en este marco de referencia. Para el piloto del aeroplano 2, la fuerza del resorte está en dirección opuesta a la que el aeroplano 2 está encarando, y el desplazamiento del aeroplano 1 bajo la influencia de esa fuerza está en la misma dirección que la fuerza. En el marco de referencia del aeroplano 2, el teorema trabajo-energía es aplicable, y tanto $W$ como $\Delta K$ son positivos.

De este ejemplo concluimos que, tanto el signo del trabajo efectuado por una fuerza dada *como* el signo del cambio en la energía cinética de una partícula dada pueden depender del marco de referencia del observador. A pesar de esta diferencia en la interpretación, sin embargo, ambos observadores estarán de acuerdo en la validez del teorema trabajo-energía. (Véase también la pregunta 22, que considera la interpretación de acuerdo con el piloto del aeroplano 1). ■

## 7-7 ENERGÍA CINÉTICA A ALTAS VELOCIDADES* *(Opcional)*

En la sección anterior usamos la fórmula galileo-newtoniana para transformar velocidades desde un marco de referencia a otro: $v = v' + u$. Derivamos esta fórmula en la sección 4-6 y dijimos que no funciona a altas velocidades, en las que debemos usar la relación correcta partiendo de la relatividad especial, ecuación 46 del capítulo 4. Si usted ha llegado a sospechar ahora que la fórmula $\frac{1}{2}mv^2$ de la energía cinética tampoco sirve para altas velocidades, está en lo correcto.

La fórmula general de la energía cinética, aplicable a cualquier velocidad, es

$$K = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right]. \tag{25}$$

(En el capítulo 21 derivaremos este resultado.) ¿Significa esto que $\frac{1}{2}mv^2$ no es correcta? Ciertamente no lo es para los casos de alta velocidad, pero no es demasiado difícil demostrar que la ecuación 25 se reduce realmente a $\frac{1}{2}mv^2$ para una velocidad baja. Para ello necesitamos el desarrollo binomial de las expresiones de la forma $(1 + x)^p$:

$$(1 + x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots,$$

donde $n!$ (léase "factorial de $n$") significa el producto de todos los enteros desde 1 hasta $n$. Así pues, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

El desarrollo binomial es un resultado útil, pero es de particular valor cuando $x$ es pequeña comparada con 1. Por ejemplo, supongamos que $x$ es de alrededor de 0.01. Entonces el segundo término del desarrollo, $px$, es (si $p$ no es demasiado grande) mucho más pequeño que el primer término, el tercer término es aún más pequeño que el segundo, y así sucesivamente. Al tornarse los términos más y más pequeños, podemos decidir que en ciertos cálculos es importante mantener sólo unos cuantos términos y despreciar el resto.

En la ecuación 25 para la energía cinética, los corchetes contienen el factor $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Este factor puede ser desarrollado por la fórmula del binomio, siendo $x = -v^2/c^2$ y $p = -\frac{1}{2}$. Tratemos de mantener tres términos en el desarrollo:

* Esta sección puede omitirse o diferirse hasta que se estudie la relatividad en el capítulo 21.

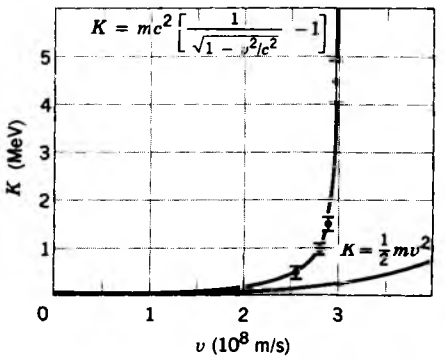



**Figura 13** Una comparación de las fórmulas clásica y relativista de la energía cinética de los electrones. A bajas velocidades, las dos fórmulas dan resultados idénticos, pero a altas velocidades cercanas a la de la luz los datos muestran claramente que la fórmula relativista es correcta.

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}. \qquad (26)$$

Ahora sustituimos la ecuación 26 en la ecuación 25:

$$K \approx mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} - 1\right] = \tfrac{1}{2}mv^2\left[1 + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}\right]. \qquad (27)$$

Podemos ver que el error fraccionario que cometemos al usar $\frac{1}{2}mv^2$ es de alrededor de $\frac{3}{4}(v^2/c^2)$. Incluso a una velocidad del 1% de la velocidad de la luz, este error es menos de 1 parte en $10^4$. En nuestras velocidades de laboratorio ordinarias, las cuales rara vez van más allá de $10^{-6}$ de la velocidad de la luz, el error en el uso de $\frac{1}{2}mv^2$ es mucho más pequeño que la precisión de nuestra posibilidad de medir energías, y $\frac{1}{2}mv^2$ es una *excelente aproximación.*

Si la ecuación 25 es siempre correcta, lo mismo para altas velocidades que para bajas, ¿por qué no usarla siempre y dejar de lado que $\frac{1}{2}mv^2$? Aquí nos enfrentamos a un problema práctico. Tratemos de usar la ecuación 25 cuando $v = 300$ m/s, realmente una velocidad respetable bajo cualquier aspecto (aproximadamente la velocidad del sonido en el aire), pero mucho menor que la velocidad de la luz ($v/c = 10^{-6}$ y $v^2/c^2 = 10^{-12}$). Usando una calculadora de bolsillo para evaluar el término entre corchetes de la ecuación 25, probablemente hallaremos un resultado de cero. La razón es que la calculadora usa sólo 8 ó 9 dígitos y, por lo tanto, obtenemos "exactamente" 1 cuando se trata de evaluar $1 - 10^{-12}$. En la práctica usamos $\frac{1}{2}mv^2$ porque es lo suficientemente precisa y mucho más fácil de calcular cuando $v$ es alrededor del 1% menor que la velocidad de la luz, y nos reservamos la ecuación 25 para las velocidades más elevadas.

La figura 13 muestra los resultados de una prueba experimental de la ecuación 25. Esta prueba fue realizada mediante la aceleración de electrones a una energía cinética conocida y midiendo luego su velocidad, tomándoles el tiempo dentro de una distancia conocida. Obviamente, los datos favorecen el resultado de la teoría de la relatividad para altas velocidades. Nótese también que las dos curvas no pueden ser distinguidas para una velocidad baja.

**Problema muestra 10** El acelerador Tevatron del Fermi National Accelerator Laboratory acelera protones a una energía cinética de alrededor de 1 TeV (= $10^{12}$ eV, donde 1 eV = $1.6 \times 10^{-19}$ J). ¿Cuál es la velocidad de un protón de 1-TeV? La masa de un protón es de $1.67 \times 10^{-27}$ kg.

**Solución** En unidades SI, la energía cinética de un protón de 1 TeV es de

$$K = 1 \text{ TeV} = 1.6 \times 10^{-7} \text{ J}.$$

Entonces, usando la ecuación 25,

$$1.6 \times 10^{-7} \text{ J} = (1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^2\left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right].$$

Resolviendo, hallamos que

$$v/c = 0.99999956,$$

de modo que $v$, aunque menor que $c$, es muy cercana a ella, difiriendo de $c$ en sólo 132 m/s. ■

## PREGUNTAS

1. ¿Puede usted pensar en otras palabras, como trabajo, cuyos significados en términos coloquiales son a menudo diferentes de sus significados científicos?
2. Explique por qué nos cansamos físicamente cuando empujamos contra una pared, no podemos moverla y, por lo tanto, no efectuamos ningún trabajo sobre la pared.
3. Supongamos que actúan tres fuerzas constantes sobre una partícula al moverse de una posición a otra. Demuestre que el trabajo efectuado sobre la partícula por la resultante de estas tres fuerzas es igual a la suma de los trabajos efectuados por cada una de las tres fuerzas calculadas por separado.
4. El plano inclinado (problema muestra 1) es una "máquina" simple que nos permite efectuar un trabajo con la utilización de una fuerza más pequeña de lo que sería necesario de otro modo. La misma afirmación es aplicable a una

cuña, una palanca, un tornillo, una rueda dentada, y una combinación de poleas (problema 9). Pero lejos de ahorrarnos trabajo, en la práctica, tales máquinas requieren que efectuemos un trabajo ligeramente mayor con ellas que sin ellas. ¿Por qué es así? Por qué empleamos tales máquinas?

5. En una contienda de tirar de una cuerda, un equipo está cediendo lentamente al otro. ¿Qué trabajo se realiza, y por quién?
6. ¿Por qué puede usted con mucha más facilidad ir en bicicleta una milla en terreno plano que correr esa misma distancia? En cada caso, usted transporta su propio peso una milla y, en el primer caso, usted debe también de transportar la bicicleta y, además, hacerlo ¡en mucho menos tiempo! (Véase *The Physics Teacher*, Marzo de 1981, pág. 194).
7. Suponga que la Tierra gira alrededor del Sol en una órbita perfectamente circular. ¿Efectúa el Sol algún trabajo sobre la Tierra?
8. Usted levanta lentamente una bola de boliche (en el juego de bolos) desde el piso y la pone sobre una mesa. Sobre la bola actúan dos fuerzas: su peso, $m\mathbf{g}$, y la fuerza para levantarla, $-m\mathbf{g}$. Estas dos fuerzas se cancelan entre sí de modo que parecería que no ha habido trabajo alguno. Por otro lado, usted sabe que ha llevado a cabo algún trabajo. ¿Qué es lo que falla?
9. Usted corta un resorte a la mitad. ¿Cuál es la relación de la constante de fuerza $k$ del resorte original a la de cualquiera de las dos mitades del resorte?
10. Los resortes $A$ y $B$ son idénticos excepto que $A$ es más rígido que $B$; esto es, $k_A > k_B$. ¿Sobre cuál resorte se realiza más trabajo si son estirados (*a*) en la misma cantidad y (*b*) por la misma fuerza?
11. ¿Depende la energía cinética de la dirección del movimiento? ¿Puede ser negativa? ¿Depende su valor del marco de referencia del observador?
12. Al levantar un libro desde el piso y ponerlo sobre una mesa, usted efectúa un trabajo. Sin embargo, la energía cinética del libro no cambia. ¿Existe aquí una violación al teorema trabajo-energía? Explique por qué o por qué no.
13. ¿Se cumple el teorema trabajo-energía si actúa la fricción sobre un objeto? Explique su respuesta.
14. El trabajo efectuado por la fuerza neta sobre una partícula es igual al cambio en la energía cinética. ¿Puede suceder que el trabajo efectuado por una de las fuerzas componentes de manera aislada sea mayor que el cambio en la energía cinética? De ser así, dé ejemplos.
15. ¿Por qué un automóvil rebasa tan fácilmente a un camión cuando ambos viajan cuesta arriba? El camión es más pesado, por supuesto, pero su motor es más potente en proporción (¿lo es?). ¿Qué consideraciones intervienen al elegir la potencia de diseño de un motor de camión y de un motor de automóvil?
16. ¿Depende la potencia necesaria para elevar una caja sobre una plataforma de la rapidez con que sea levantada?
17. Usted levanta algunos libros en la biblioteca desde un estante más bajo a otro más elevado en un tiempo $\Delta t$. ¿Depende el trabajo que usted efectuó de (*a*) la masa de los libros, (*b*) el peso de los libros, (*c*) la altura del estante superior sobre el piso, (*d*) el tiempo $\Delta t$, y (*e*) si usted levanta los libros lateralmente o directamente hacia arriba?
18. El récord mundial del salto con pértiga es de alrededor 5.5 m. ¿Podría éste ser superado a, digamos, 8 m usando una pértiga suficientemente larga? Si no, ¿por qué no? ¿Qué altura puede conseguir un atleta?
19. Oímos con frecuencia hablar de la "crisis de energía". ¿Sería más preciso hablar de "crisis de potencia"?
20. ¿Depende el trabajo efectuado por la fuerza neta que actúa sobre una partícula del marco de referencia (inercial) del observador? ¿Depende entonces del cambio en la energía cinética? De ser así, dé ejemplos.
21. Un hombre que rema corriente arriba en un bote está en reposo respecto a la orilla. (*a*) ¿Está efectuando algún trabajo? (*b*) Si deja de remar y se mueve hacia abajo con la corriente, se efectúa algún trabajo sobre él?
22. Consideremos el teorema trabajo-energía desde el marco de referencia del piloto del aeroplano 1 en el problema muestra 9. ¿Falla en este caso el teorema? Explique.
23. Decimos que un electrón de 1 keV es una partícula "clásica", que un electrón de 1 MeV es una partícula "relativista", y que un electrón de 1 GeV es una partícula "extremadamente relativista". ¿Qué significa cada uno de estos términos?

## PROBLEMAS

### *Sección 7-1 Trabajo efectuado por una fuerza constante*

1. Para empujar una caja de 52 kg por el suelo, un obrero ejerce una fuerza de 190 N, dirigida 22° abajo de la horizontal. Cuando la caja se ha movido 3.3 m, ¿cuánto trabajo se ha realizado sobre la caja por (*a*) el obrero, (*b*) la fuerza de la gravedad, y (*c*) la fuerza normal del piso sobre la caja?
2. Un objeto de 106 kg se mueve inicialmente en línea recta a una velocidad de 51.3 m/s. (*a*) Si se le detiene con una deceleración de 1.97 m/s$^2$, ¿qué fuerza se requiere, qué distancia recorre el objeto, y cuánto trabajo ejerció la fuerza? (*b*) Responda las mismas preguntas si la deceleración del objeto fuera de 4.82 m/s$^2$.
3. Para empujar un caja de 25 kg por un plano inclinado a 27°, un obrero ejerce una fuerza de 120 N, paralela al plano. Cuando la caja se ha deslizado 3.6 m, ¿cuánto trabajo se efectuó sobre la caja por (*a*) el obrero, (*b*) la fuerza de gravedad, y (*c*) la fuerza normal del plano inclinado?

4. Pueden emplearse campos eléctricos para liberar electrones de los metales. Para liberar un electrón del tungsteno, el campo eléctrico debe efectuar un trabajo de 4.5 eV. Supongamos que la distancia sobre la que actúa el campo eléctrico es de 3.4 nm. Calcule la fuerza mínima que debe ejercer el campo sobre el electrón removido.
5. Se usa una cuerda para bajar verticalmente un bloque de masa $M$ a una distancia $d$ con una aceleración constante hacia abajo de $g/4$. (*a*) Halle el trabajo efectuado por la cuerda sobre el bloque. (*b*) Halle el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad.
6. Un obrero empuja un bloque de 58.7 lb ($m$ = 26.6 kg) una distancia de 31.3 ft (= 9.54 m) a lo largo del suelo con una velocidad constante y una fuerza dirigida a 32.0° abajo de la horizontal. El coeficiente de fricción cinética es de 0.21. ¿Qué tanto trabajo efectuó el obrero sobre el bloque?
7. Un baúl de 52.3 kg se empuja hacia arriba 5.95 m a una velocidad constante por un plano inclinado a 28.0°; actúa sobre él una fuerza horizontal constante. El coeficiente de fricción cinética entre el baúl y el plano inclinado es de 0.19. Calcule el trabajo efectuado por (*a*) la fuerza aplicada y (*b*) la fuerza de gravedad.
8. Un bloque de hielo de 47.2 kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado de 1.62 m de longitud y 0.902 m de altura. Un obrero lo empuja paralelo al plano inclinado de modo que se deslice hacia abajo a velocidad constante. El coeficiente de fricción cinética entre el hielo y el plano inclinado es de 0.110. Halle (*a*) la fuerza ejercida por el obrero, (*b*) el trabajo efectuado por el obrero sobre el bloque de hielo, y (*c*) el trabajo efectuado por la gravedad sobre el hielo.
9. La figura 14 muestra un tren de poleas diseñado para facilitar el levantamiento de una carga pesada $L$. Supongamos que la fricción puede ser despreciada y que las poleas a las cuales está unida la carga pesan un total de 20.0 lb. La carga de 840 lb va a ser elevada 12.0 ft. (*a*) ¿Cuál es la fuerza mínima $F$ aplicada que puede levantar la carga? (*b*) ¿Qué tanto trabajo debe de efectuarse contra la gravedad para levantar la carga de 840 lb a una altura de 12.0 ft? (*c*) ¿A través de qué distancia debe aplicarse la fuerza para levantar la carga de 12.0 ft? (*d*) ¿Cuál es el trabajo que debe efectuar la fuerza $F$ aplicada para cumplir esta tarea?

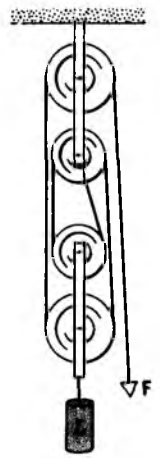



**Figura 14** Problema 9.

### *Sección 7-2 Trabajo efectuado por una fuerza variable: caso unidimensional*

10. Un bloque de 5.0 kg se mueve en línea recta sobre una superficie horizontal sin fricción bajo la influencia de una fuerza que varía con la posición, como se muestra en la figura 15. ¿Cuánto trabajo efectúa la fuerza cuando el bloque se mueve desde el origen hasta $x$ = 8.0 m?
11. Un objeto de 10 kg se mueve a lo largo del eje $x$. En la figura 16 se muestra su aceleración en función de su posición. ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el objeto al moverse desde $x$ = 0 hasta $x$ = 8.0 m?
12. Un resorte tiene una constante de fuerza de 15.0 N/cm. (*a*) ¿Cuánto trabajo se requiere para estirar el resorte 7.60 mm desde su posición relajada? (*b*) ¿Cuánto trabajo es necesario para estirar el resorte 7.60 mm más?

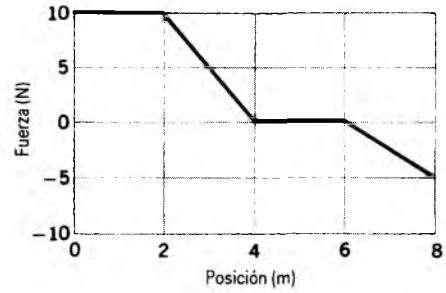



**Figura 15** Problema 10.

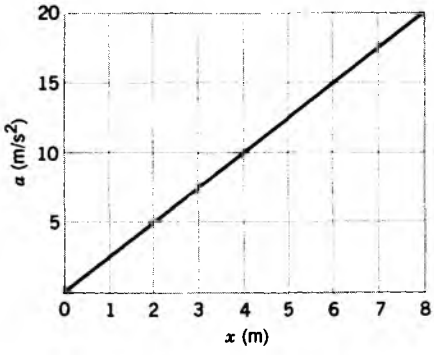



**Figura 16** Problema 11.

13. La fuerza ejercida sobre un objeto es $F = F_0(x/x_0 - 1)$. Halle el trabajo efectuado para mover al objeto desde $x$ = 0 hasta $x = 3x_0$ (*a*) trazando una gráfica de $F(x)$ y hallando el área bajo la curva, y (*b*) evaluando la integral analíticamente.
14. (*a*) Calcule el trabajo efectuado por la fuerza que se muestra en la gráfica (Fig. 17) al desplazar una partícula desde $x$ = 1 m hasta $x$ = 3 m. Perfeccione el método para

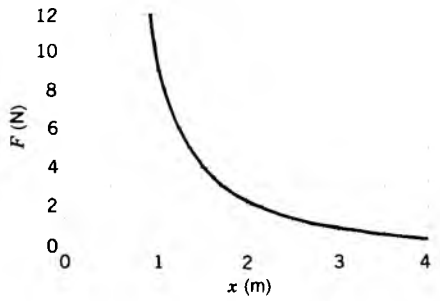



**Figura 17** Problema 14.

ver qué tan cerca puede llegar de la respuesta exacta de 6 J. (*b*) La curva está dada analíticamente por $F = A/x^2$, donde $A = 9\ \text{N} \cdot \text{m}^2$. Demuestre cómo calcular el trabajo según las reglas de la integración.

**15.** La figura 18 muestra un resorte con un puntero acoplado, que cuelga al lado de una escala graduada en milímetros. Tres pesos diferentes son colgados, a su vez, del resorte, como se muestra. (*a*) Si se retira del resorte todo el peso, ¿qué marca indicará el puntero en la escala? (*b*) Halle el peso *W*.

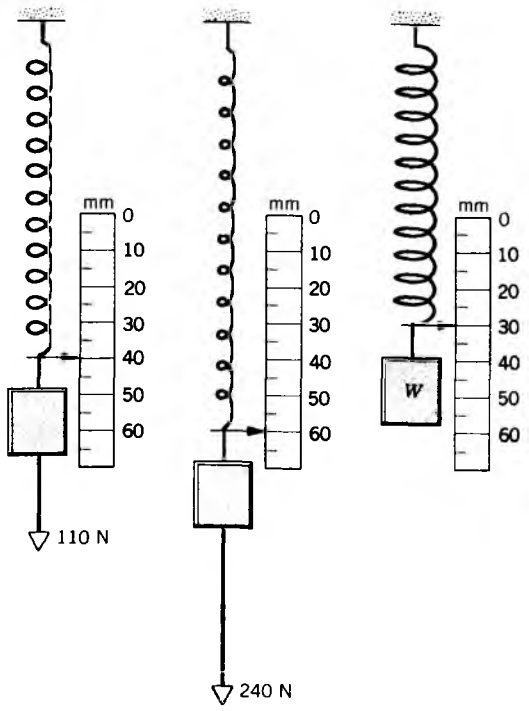



**Figura 18** Problema 15.

### *Sección 7-3 Trabajo efectuado por una fuerza variable: caso bidimensional*

**16.** Por integración a lo largo del arco, demuestre que el trabajo efectuado por la gravedad en el problema muestra 4 es igual a $-mgh$.

**17.** Un objeto de masa 0.675 kg que está sobre una mesa sin fricción está unido a un cordón que pasa por un orificio hecho en la mesa en el centro del círculo horizontal en el que se mueve el objeto a velocidad constante. (*a*) Si el radio del círculo es de 0.500 m y la velocidad es de 10.0 m/s, calcule la tensión en el cordón. (*b*) Se comprueba que jalar hacia abajo 0.200 m más del cordón a través del orificio, reduciendo por lo tanto el radio del círculo a 0.300 m, tiene el efecto de multiplicar la tensión original en el resorte por 4.63. Calcule el trabajo total efectuado por el cordón sobre el objeto en giro durante la reducción del radio.

### *Sección 7-4 Energía cinética y el teorema trabajo-energía*

**18.** Calcule las energías cinéticas de los siguientes objetos que se mueven a las siguientes velocidades: (*a*) un jugador de fútbol americano de 110 kg que corre a 8.1 m/s; (*b*) una bala de 4.2 g a 950 m/s; (*c*) el portaviones *Nimitz* de 91,400 tons a 32.0 nudos.

**19.** Un electrón de conducción en cobre a una temperatura cercana al cero absoluto tiene una energía cinética de 4.2 eV. ¿Cuál es la velocidad del electrón?

**20.** Un protón (el núcleo de un átomo de hidrógeno) es acelerado en un acelerador lineal. En cada etapa del acelerador el protón es acelerado a lo largo de una línea recta a razón de $3.60 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2$. Si un protón entra en tal etapa moviéndose inicialmente a una velocidad de $2.40 \times 10^7$ m/s y la etapa es de una longitud de 3.50 cm, calcule (*a*) su velocidad al final de la etapa y (*b*) la ganancia de energía cinética resultante de la aceleración. La masa del protón es de $1.67 \times 10^{-27}$ kg. Exprese la energía en electrón-volts.

**21.** Una fuerza única actúa sobre una partícula con movimiento rectilíneo. En la figura 19 se muestra una gráfica de la velocidad contra el tiempo para la partícula. Halle el signo (positivo o negativo) del trabajo efectuado *por* la fuerza *sobre* la partícula en cada uno de los intervalos *AB*, *BC*, *CD*, y *DE*.

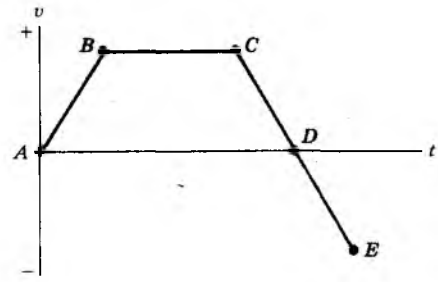



**Figura 19** Problema 21.

**22.** Para viajar a la Luna, un cohete Saturno V de $2.9 \times 10^5$ kg, con una cápsula espacial Apolo adosada, debe alcanzar una velocidad de escape de 11.2 km/s (= 25,000 mi/h) cerca de la superficie de la Tierra. ¿Cuánta energía debe contener el combustible? ¿Necesitaría realmente el sistema tanta energía; necesitaría más, o menos? ¿Por qué?

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



**23.** ¿Desde qué altura debería caer un automóvil de 2800 lb para ganar la energía cinética equivalente a la que tendría viajando a razón de 55 mi/h? ¿Depende la respuesta del peso del automóvil?

**24.** Un automóvil de 1110 kg viaja a 46 km/h por una carretera llana. Se accionan los frenos para disminuir 51 kJ de energía cinética. (*a*) ¿Cuál es la velocidad final del automóvil? (*b*) ¿Cuánta más cantidad de energía cinética deberá eliminarse por los frenos para detener el automóvil?

**25.** Un jardinero arroja una bola de béisbol a una velocidad inicial de 120 ft/s ( =36.6 m/s). Precisamente antes de que un jugador dentro del cuadro recoja la bola al mismo nivel, su velocidad se reduce a 110 ft/s (= 33.5 m/s). ¿Cuánta energía se ha desperdiciado a causa del arrastre del aire? El peso de una bola de béisbol es de 9.0 oz. ($m$ = 255 g).

**26.** La Tierra da una vuelta completa alrededor del Sol en un año. ¿Cuánto trabajo tendría que efectuarse sobre la Tierra para llevarla al reposo en relación con el Sol? Véase el apéndice C para los datos numéricos y desprecie la rotación de la Tierra sobre su propio eje.

**27.** Un hombre que corre tiene la mitad de la energía cinética de un niño de la mitad de la masa que él posee. El hombre aumenta su velocidad a razón de 1.00 m/s y luego tiene la misma energía cinética que el niño. ¿Cuáles eran las velocidades originales del hombre y del niño?

**28.** Un proyectil de 0.550 kg se dispara desde el borde de un acantilado con una energía cinética inicial de 1550 J y en su punto más alto está a 140 m sobre el punto de disparo. (*a*) ¿Cuál es la componente horizontal de su velocidad? (*b*) ¿Cuál era la componente vertical de su velocidad en el momento inmediato después del disparo? (*c*) En un instante durante su trayecto se encuentra que la componente vertical de su velocidad es de 65.0 m/s. En ese momento, ¿a qué distancia está arriba o abajo del punto de disparo?

**29.** Un cometa que tiene una masa de $8.38 \times 10^{11}$ kg choca con la Tierra a una velocidad relativa de 30 km/s. (*a*) Calcule la energía cinética del cometa en "megatones de TNT"; la detonación de 1 millón de toneladas de TNT libera $4.2 \times 10^{15}$ J de energía. (*b*) El diámetro del cráter formado por una gran explosión es proporcional a un tercio de la potencia de la energía explosiva liberada, y un megatón de TNT produce un cráter de alrededor 1 km de diámetro. ¿Cuál será el diámetro del cráter producido por el impacto del cometa? (En el pasado, los efectos atmosféricos producidos por los impactos de los cometas pueden haber sido la causa de extinciones masivas de muchas especies de animales y plantas; muchos creen que los dinosaurios se extinguieron a causa de este mecanismo.)

**30.** Un disco de 125 g es arrojado desde una altura de 1.06 m sobre el suelo a una velocidad de 12.3 m/s. Cuando ha alcanzado una altura de 2.32 m, su velocidad es de 9.57 m/s. (*a*) ¿Cuánto trabajo efectuó la gravedad sobre el disco? (*b*) ¿Cuánta energía cinética se perdió debido a la resistencia del aire? Desprecie el giro del disco.

**31.** Una pelota pierde el 15.0% de su energía cinética cuando rebota en una acera de concreto. ¿A qué velocidad deberá usted de arrojarla hacia abajo verticalmente desde una altura de 12.4 m para que rebote a esa misma altura? Desprecie la resistencia del aire.

**32.** Una pelota de hule soltada desde una altura de exactamente 6 ft (ft) rebota (choca contra el suelo) varias veces, perdiendo 10% de su energía cinética en cada rebote. ¿Al cabo de cuántos rebotes la pelota no se elevará a más de 3 ft?

**33.** Un bloque de 263 g se deja caer sobre un resorte vertical con una constante de fuerza $k$ = 2.52 N/cm (Fig. 20). El bloque se pega al resorte, y el resorte se comprime 11.8 cm antes de alcanzar el reposo momentáneamente. Mientras el resorte está siendo comprimido, ¿cuánto trabajo efectúan (*a*) la fuerza de gravedad y (*b*) el resorte? (*c*) ¿Cuál era la velocidad del bloque inmediatamente antes de que alcanzara al resorte? (*d*) Si esta velocidad inicial del bloque se duplica, ¿cuál es la compresión máxima del resorte? Desprecie la fricción.

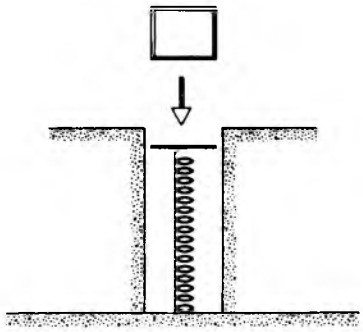


**Figura 20** Problema 33.

**34.** Demuestre que la ecuación 19 se cumple para el caso del movimiento en dos o en tres dimensiones, extendiendo la demostración para el movimiento unidimensional.

### *Sección 7-5 Potencia*

**35.** Una mujer de 57 kg asciende por un tramo de escalones que tiene una pendiente de 4.5 m en 3.5 s. ¿Qué potencia promedio deberá emplear?

**36.** En un teleférico para esquiadores con cabida para 100 personas, una máquina eleva a los 100 pasajeros, que promedian 667 N de peso, a una altura de 152 m en 55.0 s, a velocidad constante. Halle la potencia suministrada por el motor, suponiendo que no existan pérdidas por fricción.

**37.** Un nadador se mueve en el agua a una velocidad de 0.22 m/s. La fuerza de arrastre que se opone a este movimiento es de 110 N. ¿Cuál es la potencia desarrollada por el nadador?

**38.** Al comenzar una carrera, un corredor de 68.2 kg corre los primeros 7.04 m en 1.60 s, comenzando desde el reposo y acelerando uniformemente. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del corredor al final de 1.60 s? (*b*) ¿Cuál es la energía cinética del corredor? (*c*) ¿Qué potencia promedio genera el corredor durante el intervalo de 1.60 s?

**39.** Un caballo jala de una carreta con una fuerza de 42.0 lb (libras) a un ángulo de 27.0° con la horizontal y se mueve con una velocidad de 6.20 mi/h. (*a*) ¿Cuánto trabajo

efectúa el caballo en 12.0 min? Halle la potencia desarrollada por el caballo, en hp, por supuesto.

**40.** Un fabricante de autos reporta que la potencia máxima desarrollada por el motor de un automóvil de 1230 kg de masa es de 92.4 kW. Halle el tiempo mínimo en el cual el automóvil podría acelerar desde el reposo hasta 29.1 m/s (= 65 mi/h). Se encontró en una prueba que el tiempo para hacerlo fue de 12.3 s. Explique la diferencia en estos tiempos.

**41.** El zepelín *Hindenburg* (véase la Fig. 21) podía hacer una travesía a razón de 77 nudos con motores a un rendimiento de 4800 hp. Calcule la fuerza de arrastre, en newtons, sobre la nave aérea a esta velocidad.



**Figura 21** Problema 41.

**42.** El trasatlántico de lujo *Queen Elizabeth 2* (véase la Fig. 22) es propulsado por una nueva planta de fuerza diesel-eléctrica, la cual reemplazó a las máquinas de vapor originales. La potencia de salida máxima es de 92 MW a una velocidad de crucero de 32.5 nudos. ¿Qué fuerza ejercen las hélices sobre el agua a esta máxima velocidad alcanzable?

**43.** ¿Cuánta potencia, en hp, debe ser desarrollada por el motor de un automóvil de 1600 kg que avanza a 26 m/s (= 94 km/h) en una carretera llana si las fuerzas de resistencia totalizan 720 N?

**44.** En una cascada de 96.3 m de altura pasan 73,800 $m^3$ de agua por minuto. Suponiendo que el 58.0% de la energía cinética ganada por el agua al caer sea convertida a energía eléctrica por un generador hidroeléctrico, calcule la potencia de salida del generador. (La densidad del agua es de 1000 $kg/m^3$.)

**45.** Supongamos que su automóvil desarrolla un promedio de 30 mi/gal (millas por galón) de gasolina. (*a*) ¿A qué distancia puede viajar con un consumo de 1 kW · h? (*b*) Si usted conduce a razón de 55 mi/h, ¿a qué razón realiza usted el gasto de energía? El calor de combustión de la gasolina es de 140 MJ/gal.

**46.** El motor de una bomba de agua está especificado a 6.6 hp. ¿Desde qué profundidad puede ser bombeada el agua del pozo a razón de 220 gal/min?

**47.** Un bloque de granito de 1380 kg es arrastrado hacia arriba por un plano inclinado a una velocidad constante de 1.34 m/s por un malacate de vapor (Fig. 23). El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano inclinado es de 0.41. ¿Qué potencia debe suministrar el malacate?

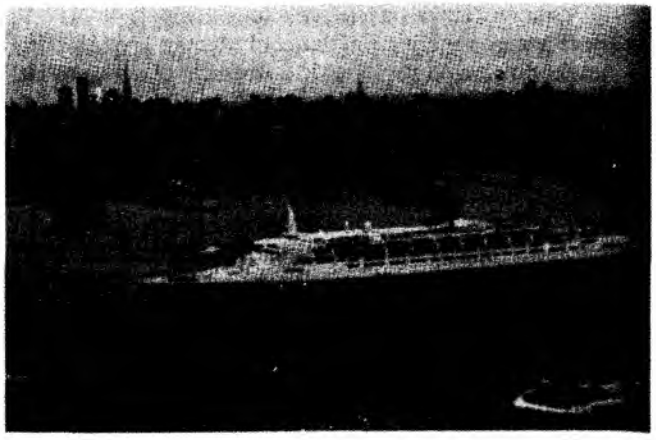


**Figura 22** Problema 42.

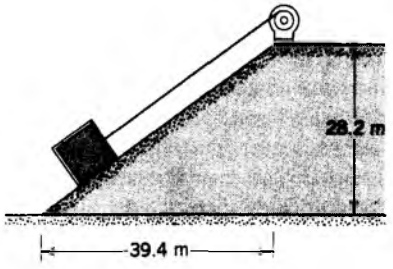



**Figura 23** Problema 47.

**48.** Un automóvil de 3700 lb ($m$ = 1680 kg) parte del reposo en una carretera llana y logra una velocidad de 45 mi/h (= 72 km/h) en 33 s. (*a*) ¿Cuál es la energía cinética del automóvil al final de los 33 s? (*b*) ¿Cuál es la potencia neta promedio desarrollada por el automóvil durante el intervalo de 33 s? (*c*) ¿Cuál es la potencia instantánea al final del intervalo de 33 s suponiendo que la aceleración fue constante?

**49.** Un objeto de masa $m$ acelera uniformemente desde el reposo hasta una velocidad $v_f$ en el tiempo $t_f$. (*a*) Demuestre que el trabajo efectuado sobre el objeto como una función del tiempo $t$, en términos de $v_f$ y de $t_f$, es

$$W = \tfrac{1}{2} m \frac{v_f^2}{t_f^2} t^2.$$

(*b*) Como una función del tiempo $t$, ¿cuál es la potencia instantánea dada al objeto?

**50.** Una fuerza actúa sobre una partícula de 2.80 kg de modo tal que la posición de la partícula como función del tiempo esté dada por $x = 3t - 4t^2 + t^3$, donde $x$ está en metros y $t$ en segundos. (*a*) Halle el trabajo efectuado por la fuerza durante los primeros 4.0 s. (*b*) ¿A qué razón instantánea

efectúa la fuerza trabajo sobre la partícula en el instante en que $t = 3.0$ s?

**51.** Un elevador de carga totalmente lleno tiene una masa total de 1220 kg. Debe descender 54.5 m en 43.0 s. El contrapeso tiene una masa de 1380 kg. Halle la potencia de salida, en hp, del motor del elevador. Desprecie el trabajo requerido para arrancar y detener al elevador; esto es, suponga que viaja a velocidad constante.

**52.** Demuestre que la velocidad $v$ alcanzada por un automóvil de masa $m$ que es impulsado con una potencia constante $P$ está dada por

$$v = \left(\frac{3xP}{m}\right)^{1/3},$$

donde $x$ es la distancia recorrida desde el reposo.

**53.** (*a*) Demuestre que la potencia desarrollada por un avión que viaja a velocidad constante $v$ en un vuelo a nivel es proporcional a $v^3$. Suponga que la fuerza de arrastre está dada por $D = bv^2$. (*b*) ¿En qué factor deberán aumentar su potencia los motores para aumentar la velocidad en el aire en 25.0%?

**54.** ¿Qué potencia desarrolla una máquina de esmerilar cuya muela tiene un radio de 20.7 cm y gira a 2.53 rev/s cuando la herramienta que va a ser afilada es sostenida contra la muela con una fuerza de 180 N? El coeficiente de fricción entre la herramienta y la muela es de 0.32.

**55.** Una escalera mecánica une a un piso con otro situado a 8.20 m sobre aquél. La escalera tiene 13.3 m de longitud y se mueve a todo lo largo a 62.0 cm/s. (*a*) ¿Qué potencia debe tener su motor si se requiere que transporte a un máximo de 100 personas por minuto, de 75.0 kg de masa promedio? (*b*) Un hombre de 83.5 kg asciende caminando por la escalera en 9.50 s. ¿Cuánto trabajo efectúa el motor sobre él? (*c*) Si este hombre se da la vuelta a la mitad del trayecto y desciende otra vez por la escalera de modo tal que se quede en el mismo lugar del espacio, ¿efectuaría el motor algún trabajo sobre él? De ser así, ¿qué potencia libera para ese propósito? (*d*) ¿Existe alguna manera de que el hombre pudiera caminar por la escalera sin consumir potencia del motor?

**56.** Una locomotora de ferrocarril, de 1.5 MW, acelera a un tren desde una velocidad de 10 hasta 25 m/s en 6.0 min, a plena potencia. (*a*) Despreciando la fricción, calcule la masa del tren. (*b*) Halle la velocidad del tren en función del tiempo en segundos durante el intervalo. (*c*) Halle la fuerza que acelera al tren en función del tiempo durante el intervalo. (*d*) Halle la distancia recorrida por el tren durante el intervalo.

**57.** La resistencia al movimiento de un automóvil depende de la fricción con la carretera, la cual es casi independiente de su velocidad $v$, y del arrastre aerodinámico, el cual es proporcional a $v^2$. Para un automóvil en particular, de 12,000 N, la fuerza resistente total $F$ está dada por $F = 300 + 1.8v^2$, donde $F$ está en newtons y $v$ está en metros por segundo. Calcule la potencia necesaria para que el motor acelere al automóvil a 0.92 m/s$^2$ cuando la velocidad es de 80 km/h.

**58.** Un *regulador* consta de dos esferas de 200 g unidas por varillas ligeras, pero rígidas, de 10.0 cm, a un eje vertical giratorio. Las varillas están embisagradas de modo que las esferas puedan oscilar desde el eje al girar con él. Sin embargo, cuando el ángulo $\theta$ es de 45.0°, las esferas tocan la pared del cilindro dentro del que está girando el regulador (véase la Fig. 24). (*a*) ¿Cuál es la razón mínima de rotación, en revoluciones por minuto, necesaria para que las esferas toquen la pared? (*b*) Si el coeficiente de fricción cinética entre las esferas y la pared es de 0.35, ¿qué potencia se disipa como resultado de que las esferas frotan contra la pared cuando el mecanismo está girando a 300 rev/min?

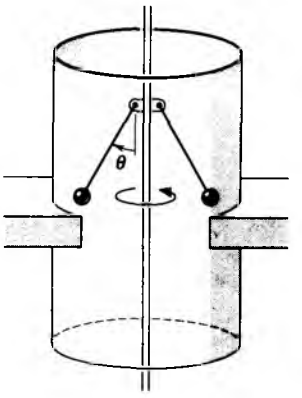



**Figura 24** Problema 58.

### *Sección 7-6 Marcos de referencia*

**59.** Considérense dos observadores, uno cuyo marco se halla unido al suelo y el otro en un marco unido, digamos, a un tren que se mueve a velocidad uniforme **u** respecto al suelo. Cada uno de ellos observa que una partícula, inicialmente en reposo respecto al tren, es acelerada por una fuerza constante aplicada a él durante un tiempo $t$ en dirección hacia adelante. (*a*) Demuestre que, para cada observador, el trabajo efectuado por la fuerza es igual a la ganancia en energía cinética de la partícula, pero que un observador mide que las cantidades son $\frac{1}{2}ma^2t^2$, mientras que el otro observador las mide como $\frac{1}{2}ma^2t^2 + maut$. Aquí $a$ es la aceleración común de la partícula de masa $m$. (*b*) Explique las diferencias en el trabajo efectuado por la misma fuerza en función de las diferentes distancias a través de las que los observadores miden la fuerza que actúa durante el tiempo $t$. Explique las diferentes energías cinéticas finales medidas por cada observador en función del trabajo que la partícula podría hacer al ser llevada al reposo con relación al marco de cada observador.

### *Sección 7-7 Energía cinética a altas velocidades*

**60.** Calcule la energía cinética de un protón que se mueve a una velocidad de $2.94 \times 10^8$ m/s. Dé la respuesta tanto en joules como en MeV.

**61.** Un electrón se mueve a una velocidad tal que podría rodear a la Tierra en el ecuador en 1.0 s. (*a*) ¿Cuál es su velocidad en función de la velocidad de la luz? (*b*) ¿Cuál es su energía cinética en electrón-volts? (*c*) ¿Qué porcentaje de error se tendría al usar la fórmula clásica para calcular la energía cinética?

**62.** Un electrón tiene una velocidad de $0.999c$. (*a*) ¿Cuál es su energía cinética? (*b*) Si su velocidad aumenta en 0.05%, ¿en qué porcentaje aumentaría su energía cinética?

**63.** El teorema trabajo-energía tiene validez para las partículas a cualquier velocidad. ¿Cuánto trabajo debe ser efectuado para aumentar la velocidad de un electrón desde el reposo (*a*) hasta $0.50c$, (*b*) hasta $0.99c$, y (*c*) hasta $0.999c$?

# CAPÍTULO 8

# CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

*En el capítulo 7 hemos estudiado el teorema trabajo-energía, según el cual el trabajo total efectuado por las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual al cambio en la energía cinética de la partícula. En este capítulo podremos ver que el trabajo efectuado sobre un sistema (que puede ser más complejo que las simples partículas consideradas anteriormente) por una cierta clase de fuerzas depende sólo de los estados inicial y final del sistema, y en ningún momento depende de la trayectoria seguida entre los estados. Tales fuerzas se denominan* fuerzas conservativas *y se distinguen también por su posibilidad de almacenar energía simplemente a partir de la configuración del sistema. La energía almacenada es llamada* energía potencial. *Otras fuerzas, llamadas* fuerzas no conservativas, *no pueden almacenar energía de esta manera.*

*El tema central de este capítulo es la* conservación de la energía, *uno de los principios rectores de la física. Mostramos aquí que en el almacenamiento, conversión o transferencia de energía en sistemas mecánicos, la energía total permanece constante. Comenzaremos con sistemas mecánicos sencillos sin fricción, en los que sólo desempeñan un papel las energías cinética y potencial. Más adelante, incluiremos sistemas en los que intervienen la fricción y otras fuerzas disipativas. Otras ampliaciones posteriores permiten que otras clases de energía, incluyendo la térmica y la electromagnética, se incorporen a este mismo marco, haciendo del principio de la conservación de la energía una de las leyes de la física más ampliamente aplicables y generales.*

## 8-1 FUERZAS CONSERVATIVAS

Para ilustrar el comportamiento de los sistemas conservativos, consideraremos el movimiento unidimensional de una partícula sobre la que actúan tres fuerzas diferentes: la fuerza de un resorte, $F = -kx$; la fuerza de la gravedad, $f = mg$, y la fuerza de fricción, $F = \mu N$.

**1.** *La fuerza de un resorte.* La figura 1 muestra un bloque de masa $m$ unido a un resorte de constante de fuerza $k$; el bloque se desliza sin fricción por una superficie horizontal. Inicialmente (Fig. 1*a*) un agente externo ha comprimido al resorte de modo que el bloque se desplaza a $x = +d$ desde su posición en $x = 0$ cuando el resorte está relajado. El agente externo es súbitamente retirado en $t = 0$, y el resorte comienza a efectuar un trabajo sobre el bloque. Cuando el bloque se mueve desde $x = +d$ hasta $x = 0$, el resorte efectúa un trabajo $+\frac{1}{2}kd^2$ conforme la ecuación 9 del capítulo 7. Según el teorema trabajo-energía, este trabajo aparece como energía cinética del bloque.

Cuando el bloque pasa por $x = 0$ (véase la Fig. 1*b*), el signo de la fuerza del resorte se invierte, y el resorte retarda ahora al bloque, efectuando un trabajo negativo sobre él. Cuando el bloque ha llegado momentáneamente al reposo, como en la figura 1*c*, la cantidad de este trabajo negativo efectuado por la fuerza del resorte entre $x = 0$ y $x = -d$ es de $-\frac{1}{2}kd^2$. De igual manera, desde $x = -d$ hasta $x = 0$, la fuerza del resorte efectúa un trabajo de $+\frac{1}{2}kd^2$, y desde $x = 0$ otra vez de regreso a $x = +d$, efectúa un trabajo de $-\frac{1}{2}kd^2$. El bloque está ahora otra vez en su posición original (compárense las figuras 1*a* y 1*e*), y vemos al sumar las cuatro contribuciones distintas que el trabajo total efectuado sobre el bloque por la fuerza del resorte en el ciclo completo es cero.

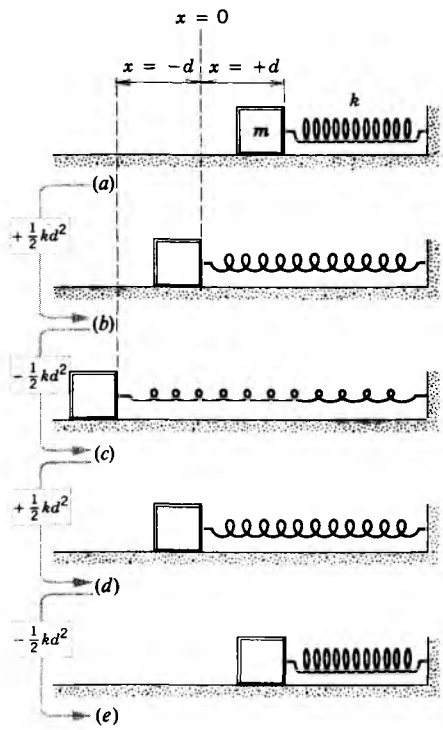



**Figura 1** Un bloque se mueve bajo la acción de la fuerza de un resorte desde (*a*)$x = +d$ hasta (*b*) $x = 0$, hacia la izquierda, a (*c*)$x = -d$, a (*d*)$x = 0$, hacia la derecha, y (*e*) nuevamente a $x = +d$. En el extremo izquierdo se muestra el trabajo efectuado por la fuerza del resorte entre cada dos posiciones sucesivas. Nótese que el trabajo total efectuado por la fuerza del resorte sobre el bloque es de cero en el recorrido completo.

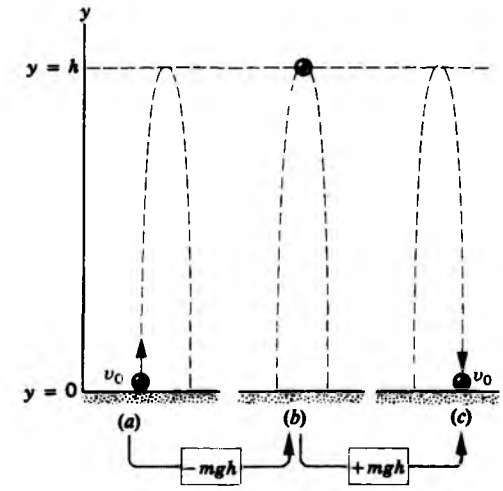



**Figura 2** Una pelota es arrojada hacia arriba contra la gravedad de la Tierra. En (*a*) acaba de abandonar su punto de inicio, en (*b*) llega al punto culminante de su trayectoria, y en (*c*) ha regresado a su altura original. En la parte inferior de la figura se muestra el trabajo efectuado por la gravedad de la Tierra entre cada dos posiciones sucesivas. Nótese que el trabajo total efectuado por la fuerza de la gravedad sobre la pelota es de cero en el recorrido completo.

**2.** *La fuerza de la gravedad.* La figura 2 muestra un ejemplo de un sistema que consta de una pelota que recibe la acción de la gravedad de la Tierra. La pelota es lanzada hacia arriba por un agente externo que le da una velocidad inicial de $v_0$ y, por lo tanto, una energía cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$. Mientras la pelota se eleva, la Tierra efectúa un trabajo sobre ella hasta que la lleva momentáneamente al reposo en $y = h$. El trabajo efectuado por la Tierra al elevarse la pelota desde $y = 0$ hasta $y = h$ es $-mgh$ (la fuerza constante $mg$ por la distancia $h$, negativa porque la fuerza y el desplazamiento están en direcciones opuestas cuando la pelota se eleva). El teorema trabajo-energía relaciona el cambio en la energía cinética, $-\frac{1}{2}mv_0^2$, con el trabajo neto efectuado por la única fuerza (la gravedad), $-mgh$. Al caer la pelota desde $y = h$ hasta $y = 0$, la fuerza de la gravedad efectúa el trabajo $+mgh$; por lo tanto, por analogía con el viaje hacia arriba, la energía cinética debe aumentar desde 0 hasta $+\frac{1}{2}mv_0^2$, El trabajo total efectuado por la fuerza de la gravedad en recorrido completo es de cero.

**3.** *La fuerza de la fricción.* En nuestro tercer ejemplo, consideremos un disco de masa $m$ en el extremo de un cordón de longitud $R$. Al disco se le da una velocidad inicial $v_0$, y el cordón lo obliga a moverse en un círculo de radio $R$ sobre una superficie horizontal que ejerce una fuerza de fricción sobre el disco (véase la Fig. 3). La única fuerza que efectúa un trabajo sobre el disco es la fuerza de fricción ejercida por la superficie sobre la base del disco. Esta fuerza actúa *siempre* en dirección opuesta a la velocidad del disco, de modo que el trabajo efectuado por la fuerza de fricción sobre el disco es *siempre* negativo. Cuando el disco ha regresado a su punto de partida, el trabajo efectuado por la fuerza de fricción en este recorrido completo definitivamente no es cero; el trabajo total efectuado en el recorrido completo es una cantidad negativa. El disco regresa a su punto de partida con una energía cinética menor después del viaje completo.

Obsérvense las diferencias entre estos tres ejemplos. En los dos primeros (la fuerza de un resorte y la fuerza de la gravedad), el objeto regresó a su punto de partida después de un viaje redondo sin que se haya efectuado ningún trabajo neto sobre él (y, por lo tanto, sin cambio alguno en la energía cinética). En el tercer ejemplo hubo un trabajo neto efectuado sobre el objeto por la fuerza de fricción en el recorrido completo, y hubo una pérdida de energía cinética. Esta diferencia básica en el comportamiento entre las dos clases de fuerzas nos lleva a nuestra primera forma de distinguir las fuerzas conservativas.

*Si un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza que no efectúe un trabajo total durante un recorrido com-*

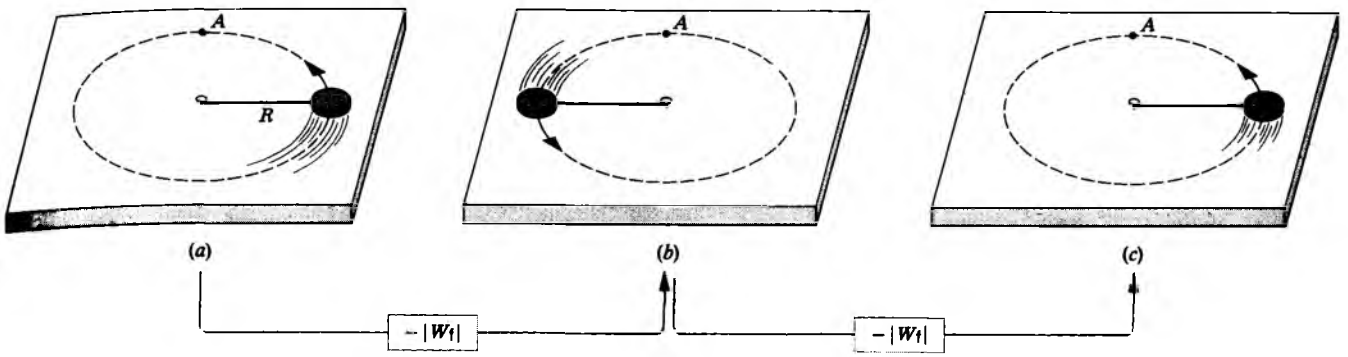



**Figura 3** Un disco se mueve con fricción en un círculo sobre una superficie horizontal. Las posiciones mostradas representan (*a*) un punto inicial arbitrario, (*b*) media revolución más tarde, y (*c*) otra media revolución más tarde. En la parte inferior de la figura se indica el trabajo efectuado por la fricción entre las posiciones sucesivas. Nótese que el trabajo total efectuado por la fuerza de fricción sobre el disco *no es* cero en el recorrido completo, sino que tiene un valor negativo $-2|W_f|$.

*pleto, entonces la fuerza es conservativa; de lo contrario, es no conservativa.*

La fuerza elástica de restitución (fuerza del resorte) y la gravedad son dos ejemplos de fuerzas conservativas, y la fricción es un ejemplo de fuerza no conservativa.*

Una segunda manera de distinguir las fuerzas conservativas de las fuerzas no conservativas se refiere al trabajo efectuado al llevar al cuerpo a través de trayectorias diferentes que lleven a la misma posición final. Como ejemplo, calculemos el trabajo efectuado por la fuerza del resorte cuando el bloque de la figura 1 se mueve desde $x = +d$ hasta $x = -d/2$ a lo largo de dos trayectorias diferentes (véase la Fig. 4); la trayectoria 1, directamente; la trayectoria 2, moviéndose primero desde $x = +d$ hasta $x = -d$, y después desde $x = -d$ hasta $x = -d/2$. Haciendo que $W_1$ y $W_2$ representen al trabajo efectuado por el resorte a lo largo de las trayectorias 1 y 2, tenemos que

$$W_1 = \int_{+d}^{-d/2} (-kx)\,dx = -\tfrac{1}{2}kx^2 \Big|_{+d}^{-d/2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}k[(-d/2)^2 - d^2] = \tfrac{3}{8}kd^2$$

y

$$W_2 = \int_{+d}^{-d} (-kx)\,dx + \int_{-d}^{-d/2} (-kx)\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{2}kx^2 \Big|_{+d}^{-d} - \tfrac{1}{2}kx^2 \Big|_{-d}^{-d/2}$$

$$= 0 - \tfrac{1}{2}k[(-d/2)^2 - (-d)^2] = \tfrac{3}{8}kd^2.$$

Entonces $W_1 = W_2$, y el trabajo efectuado es el mismo en las dos trayectorias diferentes.

Por otra parte, consideremos el comportamiento de la fuerza de fricción no conservativa en el sistema ilustrado en la figura 3 cuando el disco se mueve a través de dos trayectorias diferentes a la posición mostrada en la figura 3 como punto *A*. Si comparamos el trabajo efectuado por la fricción cuando el disco se mueve desde el punto de partida hasta el punto *A* a través de un cuarto de revolución con el trabajo efectuado por la fricción cuando se mueve $1\frac{1}{4}$ revoluciones (llegando exactamente a la misma ubicación final), hallamos que el trabajo (negativo) efectuado por la fricción será de magnitud cinco veces mayor en la segunda trayectoria. Entonces, en el caso de la fuerza de fricción, el trabajo depende de la trayectoria seguida entre las ubicaciones inicial y final.

Esto nos lleva a nuestra segunda manera de distinguir las fuerzas conservativas.

***Si el trabajo efectuado por una fuerza para mover un cuerpo desde una posición inicial hasta una posición final es independiente de la trayectoria seguida entre los dos puntos, entonces la fuerza es conservativa; de lo contrario es no conservativa.***

* Cuando un objeto se mueve sometido a la fuerza de fricción se forman y rompen, repetidamente, soldaduras microscópicas, como se describió en la sección 6-2. Cuando el objeto vuelve a recorrer su trayectoria, los cambios en la superficie no se restablecen y, por lo tanto, la fuerza de fricción, vista macroscópicamente, es ciertamente no conservativa. Sin embargo, las fuerzas interatómicas superficiales responsables de la fricción son fuerzas electrostáticas, las cuales *son* fuerzas conservativas (véase el capítulo 30). Si al recorrer de nuevo la trayectoria restablecemos todos los átomos alterados en sus ubicaciones originales, hallaríamos que la fuerza de fricción sería microscópicamente conservativa. Este proceso es altamente improbable (de hecho, se desplazarían más átomos a causa de nuevas soldaduras cuando la trayectoria se recorre de nuevo), y así la fuerza de fricción es macroscópicamente no conservativa.

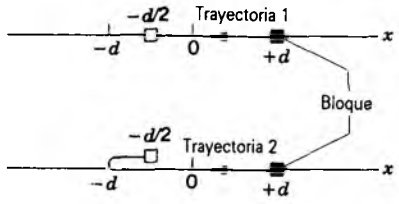



**Figura 4** El bloque (representado aquí por un cuadrado) del sistema de la figura 1 se mueve desde $x = +d$ hasta $x = -d/2$ a lo largo de dos trayectorias diferentes.

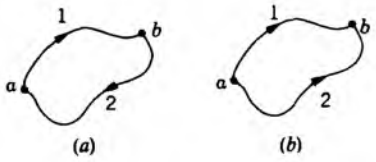



**Figura 5** (*a*) Una partícula, actuada por una fuerza conservativa, se mueve en viaje redondo comenzando en el punto *a*, pasando a través del punto *b*, y regresando al punto *a*. (*b*) Una partícula arranca desde el punto *a* y viaja al punto *b* siguiendo cualquiera de dos trayectorias posibles.

Con ayuda de la figura 5 podemos demostrar que los dos criterios que hemos desarrollado para identificar las fuerzas conservativas son, justamente, equivalentes. En la figura 5*a*, una partícula se mueve en viaje completo desde *a* hasta *b* y regresa de nuevo. Si sólo actúa sobre la partícula una fuerza conservativa **F**, el trabajo total efectuado sobre la partícula por esa fuerza durante el ciclo debe ser cero. Esto es,

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$$

o sea

$$\underbrace{\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}}_{\text{trayectoria 1}} + \underbrace{\int_b^a \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}}_{\text{trayectoria 2}} = 0, \qquad (1)$$

donde $W_{ab,1}$ significa "el trabajo efectuado por la fuerza cuando la partícula se mueve desde *a* hasta *b* a lo largo de la trayectoria 1" y $W_{ba,2}$ significa "el trabajo efectuado por la fuerza cuando la partícula se mueve desde *b* hasta *a* a lo largo de la trayectoria 2". La ecuación 1 es el enunciado matemático equivalente al *primer* criterio para una fuerza conservativa.

Al invertir la dirección en que viajamos por cualquier trayectoria particular se intercambian los límites de la integración y cambia el signo del desplazamiento; esto es, el trabajo para ir desde *a* hasta *b* está relacionado con el trabajo para ir desde *b* hasta *a*:

$$\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int_b^a \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \quad \text{(cualquier trayectoria particular)}$$

o, en el caso de la trayectoria 2,

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2}. \qquad (2)$$

Combinando las ecuaciones 1 y 2 nos da

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$

o sea

$$\underbrace{\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}}_{\text{trayectoria 1}} = \underbrace{\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}}_{\text{trayectoria 2}}. \qquad (3)$$

Éste es el enunciado matemático de la *segunda* definición de una fuerza conservativa: el trabajo efectuado por la fuerza es el mismo para cualquier trayectoria entre *a* y *b*. Así, la primera definición nos conduce directamente a la segunda y (en virtud de un argumento similar) la segunda nos conduce a la primera, de modo que las dos definiciones son equivalentes.

## 8-2 ENERGÍA POTENCIAL

Obtendremos una introspección nueva en el análisis de sistemas con fuerzas conservativas si introducimos un nuevo concepto, *la energía potencial*. Como veremos, la energía potencial puede ser definida sólo para fuerzas conservativas como la fuerza de un resorte o la fuerza de la gravedad; no existe, pues, para fuerzas no conservativas, tales como la fricción.

La energía potencial, representada por el símbolo *U*, es la *energía de configuración* de un sistema. Es la energía almacenada en un sistema a causa de la posición relativa u orientación de las partes de un sistema (por ejemplo, la compresión en el sistema bloque-resorte o la separación del sistema pelota-Tierra).

Consideremos un sistema en el que únicamente actúe una fuerza, y hagamos que la fuerza sea conservativa. Cuando cambiamos la configuración del sistema, tal como el movimiento de una de sus partes, la fuerza conservativa efectúa un trabajo *W*. Definimos que el *cambio* en la energía potencial $\Delta U$ correspondiente a un cambio particular en la configuración es

$$\Delta U = -W. \qquad (4)$$

El cambio en la energía potencial durante el proceso es el negativo del trabajo efectuado por la fuerza conservativa.

Cuando el sistema bloque-resorte en la figura 1 cambia su configuración de la 1*d* (donde el resorte está en un estado de relajamiento) a la 1*e* (donde el bloque está momentáneamente en reposo), el trabajo efectuado por la fuerza del resorte sobre el bloque es $W = -\frac{1}{2}kd^2$. El cambio en la energía potencial del sistema es, por lo tanto,

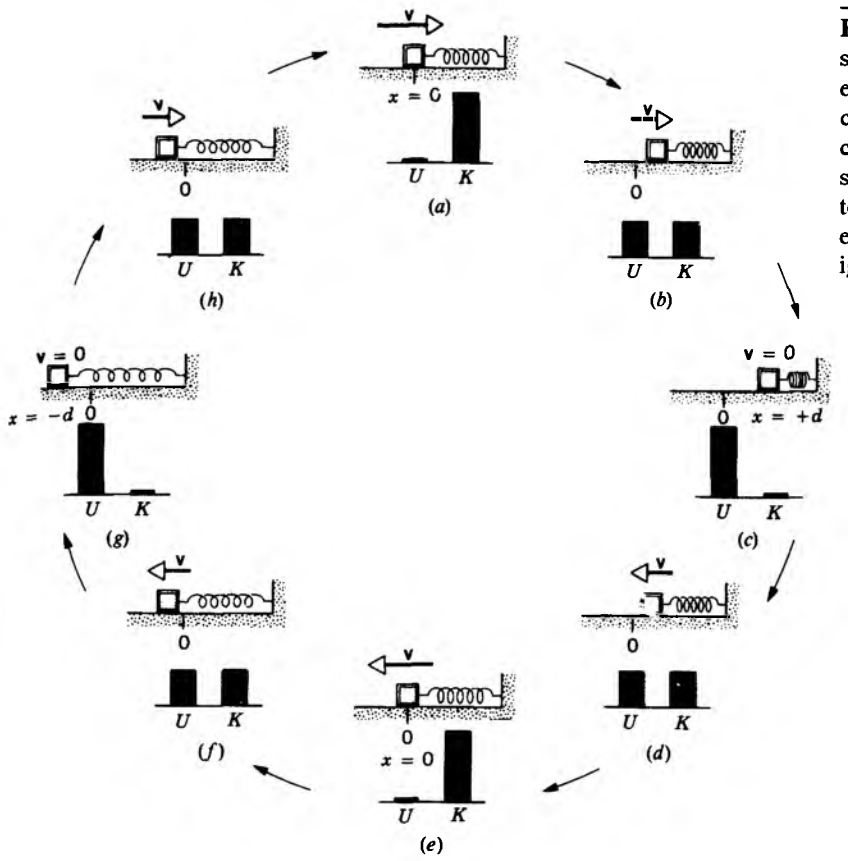



**Figura 6** Un bloque unido a un resorte oscila sobre una superficie horizontal sin fricción. La energía mecánica $E$ del sistema permanece constante, pero es distribuida entre energía cinética y energía potencial al moverse el sistema. En ciertos momentos ($a$, $e$) la energía es totalmente cinética, en otros ($c$, $g$) es potencial, y en otros más ($b$, $d$, $f$, $h$) es compartida igualmente entre las dos formas.

$\Delta U = -W = +\frac{1}{2}kd^2$. Sin embargo, de acuerdo con el teorema trabajo-energía, el cambio en la energía cinética del bloque es $\Delta K = W = -\frac{1}{2}kd^2$. Para el sistema bloque-resorte tenemos, por lo tanto, el resultado siguiente:

$$\Delta U + \Delta K = 0. \tag{5}$$

La ecuación 5 que hemos obtenido para el sistema bloque-resorte, es, de hecho, un resultado general que se deduce directamente de la ecuación 4 y del teorema trabajo-energía, $W = \Delta K$. Establece que, en un sistema en el que sólo actúen fuerzas conservativas, cualquier cambio de la energía potencial debe estar equilibrado por un cambio igual y opuesto de la energía cinética.

Como ejemplo, soltemos el bloque (véase de nuevo la figura 1$a$) desde $x = +d$ cuando el resorte está comprimido. El resorte empuja contra el bloque y lo acelera. El desplazamiento desde el equilibrio disminuye, el resorte efectúa un trabajo positivo sobre el bloque, y el cambio en la energía potencial es, por lo tanto, negativo según la ecuación 4. Al mismo tiempo que la energía potencial disminuye, la energía cinética aumenta.

Podemos también escribir la ecuación 5 así:

$$\Delta(U + K) = 0. \tag{6}$$

En estos procesos el cambio en la $U + K$ total es de cero. Si no existe un cambio en la suma $U + K$, entonces el valor de la suma debe ser una constante durante el movimiento. Llamamos $E$ a esta constante, la *energía mecánica* del sistema conservativo:

$$U + K = E. \tag{7}$$

La ecuación 7 es la representación matemática de la ley de la *conservación de la energía mecánica*. En cualquier sistema aislado de objetos que interactúan sólo por fuerzas conservativas, tales como el bloque y el resorte, la energía puede ser transferida una y otra vez de cinética a potencial, pero el cambio total es de cero; la suma de las energías cinética y potencial permanece constante. La figura 6 muestra una representación de la distribución de la energía cinética y de la energía potencial en el sistema que consta de bloque y resorte cuando el sistema oscila libremente.

Supongamos que actúe más de una fuerza conservativa sobre un objeto, por ejemplo, el bloque de la figura 7, sobre el cual actúan dos fuerzas, $\mathbf{F}_{\text{resorte}}$ y $\mathbf{F}_{\text{grav}}$, cada una de las cuales efectúa un trabajo sobre el bloque. El teorema trabajo-energía, que hemos utilizado, para derivar la ecuación 5, se refiere siempre al trabajo neto efectuado por

todas las fuerzas que actúan sobre el objeto, que en este caso es $W_{\text{resorte}} + W_{\text{grav}}$. Usando la ecuación 4 ($\Delta U = -W$), podemos asociar un cambio de la energía potencial con el trabajo efectuado por cada fuerza, de modo que la ecuación 5 se convierte en

$$\Delta U_{\text{resorte}} + \Delta U_{\text{grav}} + \Delta K = 0$$

y la ecuación 7 resulta ser

$$U_{\text{resorte}} + U_{\text{grav}} + K = E. \tag{8}$$

Debe considerarse que la energía potencial es una propiedad de todo el sistema y de ninguna manera es una parte en especial de un sistema. Por ejemplo, no es la pelota de la figura 2 la que tiene una energía potencial; es el sistema que consiste de Tierra + pelota. Cuando la pelota se eleva una altura vertical $h$, la energía potencial del *sistema* aumenta en $mgh$, y la energía cinética del *sistema* disminuye en la misma cantidad. Cuando la pelota cae libremente a la tierra a través de la misma altura $h$, la energía potencial del *sistema* disminuye en $mgh$, y la energía cinética del *sistema* aumenta en la misma cantidad.

Puesto que la pelota tiene mucha menos masa que la Tierra, virtualmente todo el aumento de la energía cinética del sistema Tierra + pelota se le da a la pelota. Es por esta razón que a veces nos referimos a la energía potencial de la pelota en lugar de (más precisamente) el sistema Tierra + pelota. En otros sistemas, en los cuales las masas sean más iguales entre sí, ambos objetos podrían adquirir una energía cinética medible como resultado del cambio en la energía potencial. El método para calcular cómo se distribuye la energía cinética entre los dos objetos se trata en el capítulo 9.

## 8-3 SISTEMAS CONSERVATIVOS UNIDIMENSIONALES

Podemos usar la ecuación 4 para obtener el cambio en la energía potencial de una partícula en movimiento unidimensional en un sistema en el cual reciba la acción de una sola fuerza conservativa $F(x)$:

$$\Delta U = -W = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx. \tag{9}$$

La partícula se mueve desde la coordenada inicial $x_0$ hasta la coordenada final $x$. Puesto que la energía potencial depende sólo de la posición, el cambio de $\Delta U$ entre $x_0$ y $x$ es $\Delta U = U(x) - U(x_0)$, y obtenemos

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx. \tag{10}$$

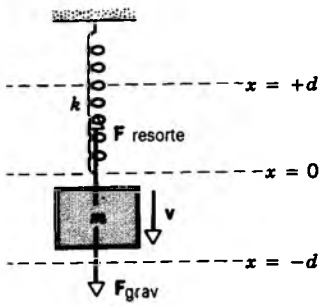



**Figura 7** Un bloque de masa $m$, suspendido de un resorte, oscila verticalmente entre $x = +d$ y $x = -d$. El movimiento del bloque está regido por dos fuerzas conservativas, la fuerza del resorte $\mathbf{F}_{\text{resorte}}$ y la fuerza de gravedad de la Tierra $\mathbf{F}_{\text{grav}}$.

Si consideramos que el punto $x_0$ es un punto de referencia arbitrario, podemos entonces obtener la función $U(x)$ de la energía potencial. Somos libres de elegir cualquier valor conveniente para la energía potencial en el punto de referencia, $U(x_0)$, porque sólo *los cambios* de la energía potencial son significativos. Para una elección particular de $U(x_0)$, la función resultante $U(x)$ podría entonces ser usada para calcular la energía potencial en puntos particulares del movimiento, por ejemplo $x_1$ y $x_2$. Una elección diferente de $U(x_0)$ cambiará los valores de $U(x_1)$ y de $U(x_2)$ según la misma constante, pero la diferencia en la energía potencial, $U(x_2) - U(x_1)$, no cambia. El análisis del comportamiento dinámico es, pues, independiente de la elección de $U(x_0)$.

En efecto, la elección del punto de referencia para $U(x)$ es similar a la elección de un marco de referencia para la energía cinética. Como lo estudiamos en la sección 7-6, observadores en movimiento relativo pueden diferir en los valores particulares de la energía cinética que midan. Observadores en diferentes marcos de referencia diferirán en sus valores de $U$, $K$, y la energía mecánica $E$, pero todos estarán de acuerdo en la constancia de $E$ y en la conservación de la energía mecánica.

Al moverse desde $x_0$ hasta $x$, la velocidad de la partícula cambiará desde $v_0$ hasta $v$ y, de acuerdo con el teorema trabajo-energía, el trabajo efectuado por la fuerza $F$ es

$$W = \Delta K = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2. \tag{11}$$

Combinando las ecuaciones 9, 10, y 11, tenemos que

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 + U(x) &= \tfrac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) \\ &= E.\end{aligned} \tag{12}$$

La cantidad de la derecha en la ecuación 12 depende solamente de la posición inicial $x_0$ y de la velocidad inicial $v_0$, las cuales tienen valores definidos; por lo tanto, es constante durante el movimiento. Ésta es la *energía mecánica* constante $E$. Nótese que la fuerza y la aceleración

no aparecen en esta ecuación, sino que sólo aparecen la posición y la velocidad. La ecuación 12 es otra forma de la *ley de la conservación de la energía mecánica* para fuerzas conservativas.

En lugar de comenzar con las leyes de Newton, podemos simplificar la solución de problemas que impliquen sólo fuerzas conservativas comenzando con la ecuación 12. Esta relación se deriva de las leyes de Newton, por supuesto, pero está a un paso más cercano a la solución (la llamada primera integral del movimiento). A menudo resolvemos problemas sin analizar las fuerzas o sin escribir las leyes de Newton, buscando en su lugar algo que sea constante en el movimiento; aquí la energía mecánica es constante y podemos escribir la ecuación 12 como un primer paso.

En una dimensión podemos escribir la relación entre la fuerza y la energía potencial (Ec. 9) así:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \tag{13}$$

Para demostrar esto, sustituyamos esta expresión para $F(x)$ en la ecuación 9 y observemos que obtenemos una identidad. La ecuación 13 nos da otra manera de ver la energía potencial. *La energía potencial es una función de la posición, cuya derivada negativa nos da la fuerza.* La fuerza $F$ es ejercida *por el sistema* cuya energía potencial sea $U$.

Ilustramos ahora el cálculo de la energía potencial con los dos ejemplos de fuerzas conservativas que consideramos en la sección 8-1, el sistema bloque-resorte y el sistema pelota-Tierra.

## La fuerza del resorte

Elegimos que la posición de referencia $x_0$ del bloque en el sistema bloque-resorte de la figura 1 fuese aquel en que la posición del resorte está en su estado de relajamiento ($x_0 = 0$), y declaramos que la energía potencial del sistema es cero cuando el bloque está en esta posición [$U(x_0) = 0$]. La energía potencial del sistema bloque-resorte puede hallarse sustituyendo estos valores en la ecuación 10 y evaluando la integral para la fuerza del resorte, $F(x) = -kx$:

$$U(x) - 0 = -\int_0^x (-kx)\, dx$$

o sea

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \tag{14}$$

Siempre que el bloque sea desplazado una distancia $x$ de su posición de referencia, la energía potencial del sistema es $\frac{1}{2}kx^2$. Se obtiene el mismo resultado cuando $x$ es positiva que cuando es negativa; esto es, ya sea que el resorte esté estirado o comprimido en una cantidad $x$ dada, la energía almacenada es la misma.

Al diferenciar la ecuación 14, vemos que la ecuación 13 se satisface:

$$-\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}(\tfrac{1}{2}kx^2) = -kx = F.$$

Supongamos que estiramos el sistema bloque-resorte hasta que el bloque esté a una distancia $x_m$ de su posición de referencia; la energía potencial es $\frac{1}{2}kx_m^2$. Si soltamos el resorte desde el reposo en esta configuración, la energía mecánica $E$ es igual a $\frac{1}{2}kx_m^2$, puesto que no existe una energía cinética en el instante de soltarlo. En este caso, la ecuación 12 puede escribirse así:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 &= E \\ &= \tfrac{1}{2}kx_m^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Esta expresión nos permite hallar la velocidad para cualquier valor particular del desplazamiento:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)}. \tag{16}$$

Como lo esperábamos, cuando $x = \pm x_m$, la ecuación 16 predice que la velocidad es cero. Cuando el bloque pasa a través del punto de referencia ($x = x_0 = 0$), la velocidad $v_0$ es

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\, x_m. \tag{17}$$

La energía mecánica puede ser expresada en términos ya sea de la velocidad $v_0$ en la posición de referencia ($E = \frac{1}{2}mv_0^2$) o del desplazamiento máximo $x_m$ en la posición de referencia ($E = \frac{1}{2}kx_m^2$).

## La fuerza de la gravedad

Para el sistema pelota-Tierra, representamos a la coordenada vertical por $y$ en lugar de $x$. Elegimos el punto de referencia $y_0 = 0$ en la superficie de la Tierra, y definimos que $U(y_0) = 0$ en ese punto. Podemos ahora evaluar la energía potencial $U(y)$ del sistema según la ecuación 10 con $F(y) = -mg$:

$$U(y) - 0 = -\int_0^y -mg\, dy$$

de donde

$$U(y) = mgy. \tag{18}$$

Nótese que la ecuación 13 se satisface para esta energía potencial: $-dU/dy = -mg = F$.

La velocidad inicial de la pelota en el punto de referencia es $v_0$, y la ecuación 12 nos da

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = \tfrac{1}{2}mv_0^2. \tag{19}$$

Esta ecuación, que es equivalente a la ecuación 25 del capítulo 2, nos permite hallar la velocidad en cualquier altura $y$.

Este ejemplo ilustra el lenguaje ligeramente diferente del punto de vista de la energía y la fuerza en el análisis de la dinámica. El enfoque de la fuerza analiza este sistema como sigue: "La pelota comienza con velocidad inicial $v_0$. La Tierra ejerce una fuerza $-mg$, y la aceleración resultante es $-g$. Esta aceleración hacia abajo hace que la velocidad disminuya hasta que la velocidad pase por cero a una altura $h$. La pelota comienza entonces a moverse hacia abajo sometida a la influencia de la gravedad de la Tierra y alcanza el terreno con velocidad $-v_0$".

El enfoque de la energía es como sigue: "La pelota comienza con energía cinética $\frac{1}{2}mv_0^2$. Al elevarse, la energía potencial del sistema pelota-Tierra aumenta y, por lo tanto, la energía cinética debe disminuir para que se mantenga constante la energía mecánica $E$. En el punto más alto del movimiento, toda la energía cinética ha sido convertida en energía potencial gravitatoria. Al caer la pelota se invierte el proceso, convirtiéndose la energía potencial de nuevo en energía cinética y resultando completamente convertida una vez más cuando la pelota llegue al suelo al caer." Estos dos enfoques dan, por supuesto, el mismo resultado. A menudo hallamos que el enfoque de la energía es más útil y provee una mayor visión. Existen también casos en los que es más fácil trabajar con la energía (cantidad escalar), que con la fuerza (cantidad vectorial).

---

**Problema muestra 1** Una cabina de elevador de masa $m$ (= 920 kg) se mueve desde el nivel de la calle hasta la cima del edificio del World Trade Center en Nueva York, a una altura $h$ = 412 m sobre el suelo. ¿Cuál es el cambio en la energía potencial gravitatoria de la cabina?

**Solución** Estrictamente, estamos hablando del cambio de la energía potencial del sistema cabina-Tierra. De la ecuación 18

$$\Delta U = mg\,\Delta y = mgh = (920\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(412\text{ m})$$
$$= 3.7 \times 10^6\text{ J} = 3.7\text{ MJ}.$$

Ésta es casi exactamente 1 kW · h; la cantidad equivalente de energía eléctrica cuesta poco en cantidades comerciales.

**Problema muestra 2** El resorte de un rifle de resorte se comprime una distancia $d$ de 3.2 cm desde su estado de relajamiento, y en el cañón se introduce una bola de masa $m$ (= 12 g). ¿A qué velocidad saldrá la bola del cañón al disparar el arma? La constante de fuerza $k$ del resorte es de 7.5 N/cm. Suponga que no existe fricción y que el cañón del rifle está horizontal.

**Solución** Podemos aplicar la Ec. 12 directamente, con la posición inicial del resorte $x_0 = d$ y la velocidad inicial de la bola $v_0 = 0$. En el estado final el resorte está relajado ($x = 0$) y la bola se mueve a velocidad $v$. Entonces

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}kd^2.$$

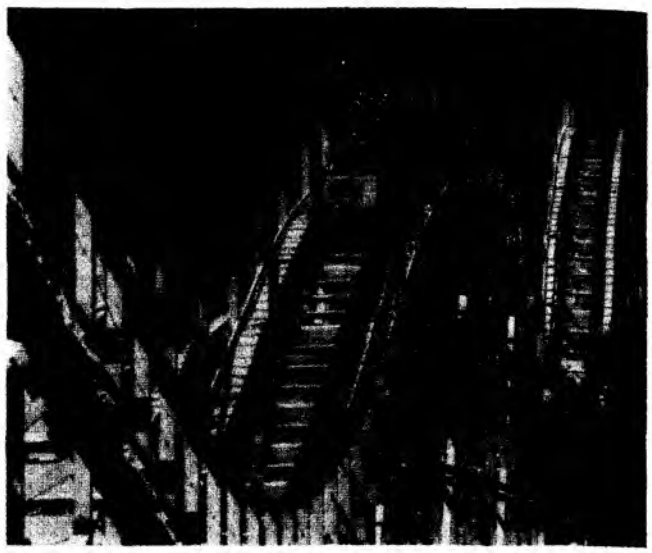


**Figura 8** Un dispositivo para convertir la energía potencial de la gravedad en energía cinética.

Resolviendo para $v$ nos da

$$v = d\sqrt{\frac{k}{m}} = (0.032\text{ m})\sqrt{\frac{750\text{ N/m}}{12 \times 10^{-3}\text{ kg}}} = 8.0\text{ m/s}.$$

**Problema muestra 3** Una montaña rusa (Fig. 8) eleva lentamente un carrito lleno de pasajeros a una altura de $y$ = 25 m, desde donde acelera cuesta abajo. Despreciando la fricción en el sistema, ¿a qué velocidad llegará el carrito al fondo?

**Solución** A primera vista, este problema parece sin remedio, ya que no se nos da información sobre el perfil de la trayectoria seguida por el carrito. Sin embargo, en ausencia de fricción, el carril no trabaja sobre el carrito, y la única fuerza que trabaja sobre él es la gravedad. La energía mecánica $E_t$, cuando el carrito está en la cima del carril, es

$$E_t = U_t + K_t = mgy + 0,$$

donde hemos tomado a $y = 0$ en el fondo del carril. Cuando el carrito llega al fondo, la energía mecánica $E_b$ es

$$E_b = U_b + K_b = 0 + \tfrac{1}{2}mv^2,$$

con la referencia para $U$ elegida de modo que $U = 0$ en $y = 0$. La conservación de la energía significa que $E_t = E_b$, y entonces

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Resolviendo para $v$ obtenemos

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{(2)(9.8\text{ m/s}^2)(25\text{ m})} = 22\text{ m/s}.$$

Ésta es la misma velocidad con la que un objeto que cae verticalmente desde una altura de 25 m llega al suelo. El carril no cambia la velocidad del carrito "al caer"; simplemente cambia la dirección del carrito. Nótese que el resultado es independiente de la masa del carrito o de sus ocupantes.

Cuando se mueve a lo largo de la montaña rusa, su velocidad aumenta y disminuye al pasar por los valles y picos de la pista. Siempre y cuando no haya ningún otro pico que sea más alto que el punto de inicio, existirá suficiente energía mecánica en el sistema para superar la energía potencial de cualquiera de los picos intermedios y el sistema llegará hasta el final.

En este problema podemos apreciar rápidamente las ventajas de la técnica de la energía. El uso de las leyes de Newton requeriría conocer el perfil exacto de la pista, y luego se necesitaría hallar las componentes de la fuerza y de la aceleración en cada punto. Esto podría ser un procedimiento bastante difícil. Por otra parte, la solución mediante el uso de las leyes de Newton proporcionaría más información que la solución con el uso del método de la energía; por ejemplo, nos permitiría conocer el tiempo que le toma al carrito llegar hasta el fondo.

## 8-4 SISTEMAS CONSERVATIVOS UNIDIMENSIONALES: LA SOLUCIÓN COMPLETA

A menudo nuestra meta en el análisis de un sistema mecánico es describir el movimiento de una partícula en función del tiempo. En los capítulos 5 y 6 mostramos cómo resolver este problema aplicando las leyes de Newton; le llamamos a este procedimiento el método *dinámico*. Un procedimiento alterno, y a veces más útil, es el método de la *energía*, el cual discutiremos en esta sección.

La ecuación 12 nos da la relación entre las coordenadas y la velocidad en el movimiento unidimensional cuando la fuerza depende solamente de la posición. (En una dimensión, las fuerzas que dependen sólo de la posición *siempre* son conservativas; esto no es necesariamente así en dos o en tres dimensiones, como lo estudiaremos en la sección 8-5.) Al llegar a la ecuación 12 eliminamos la fuerza y la aceleración. Para completar el análisis debemos eliminar la velocidad y determinar la posición en función del tiempo.

Podemos hacerlo de manera formal, como sigue. Según la ecuación 12 tenemos que

$$U(x) + \tfrac{1}{2}mv^2 = E.$$

Resolviendo para $v$, obtenemos

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}. \qquad (20)$$

Aquí $U(x)$ es la energía potencial asociada con la fuerza que actúa en el sistema, mientras que $E$ es la energía mecánica (constante) que es suministrada al sistema. Para un valor dado de $E$, la ecuación 20 nos dice que el movimiento está restringido a regiones del eje $x$ en que $E \geq U(x)$. Esto es, no podemos tener una velocidad imaginaria o una energía cinética negativa, así que $[E - U(x)]$ debe ser cero o mayor de cero. Además, podemos obtener

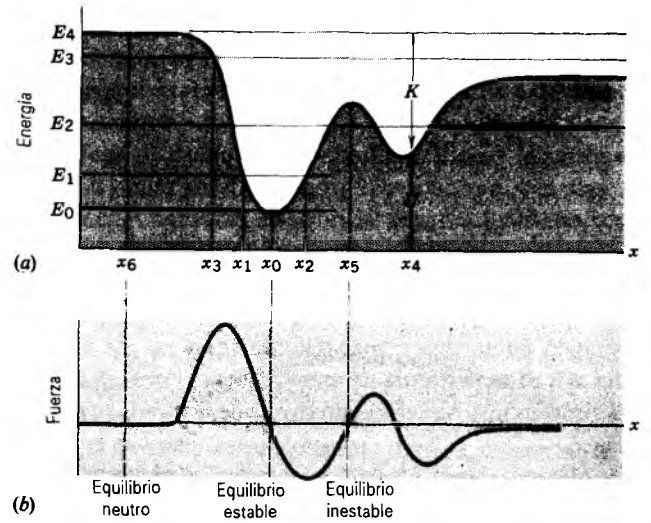



**Figura 9** (*a*) Una función de energía potencial $U(x)$. (*b*) La fuerza correspondiente a esa energía potencial.

una buena descripcion cualitativa de los tipos de movimiento posibles al trazar $U(x)$ vs. $x$. Esta descripción depende del hecho de que la velocidad es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia entre $E$ y $U$.

Por ejemplo, consideremos la función de la energía potencial que se muestra en la figura 9*a*. (Aunque esta función se parezca al perfil de una montaña rusa, representa la energía potencial de un sistema conservativo en movimiento unidimensional. Una montaña rusa confinada a una pista se mueve en dos o tres dimensiones). Puesto que debe tenerse que $E \geq U(x)$ para un movimiento real, la energía mecánica más baja posible es $E_0$. Para este valor de la energía $E = E_0 = U$, y la energía cinética debe ser cero. La partícula debe estar en reposo en el punto $x_0$. Si al sistema se le diera una energía $E_1$ ligeramente más grande, la partícula podría moverse solamente entre $x_1$ y $x_2$. Al moverse desde $x_0$ su velocidad disminuye al acercarse ya sea a $x_1$ o a $x_2$. En $x_1$ o en $x_2$ la partícula se detiene e invierte su dirección. Estos puntos $x_1$ y $x_2$ se llaman, por tanto, *puntos de retorno* del movimiento. Para una energía $E_2$ existen cuatro puntos de retorno, y la partícula puede oscilar en cualquiera de los dos valles de potencial. Para la energía $E_3$ existe sólo un punto de retorno del movimiento, en $x_3$. Si la partícula se está moviendo inicialmente en la dirección de $x$ negativa, se detendrá en $x_3$ y luego se moverá en la dirección de $x$ positiva. Para energías arriba de $E_4$ no existen puntos de retorno, y la partícula no invertirá su dirección. Su velocidad cambiará según el valor de la energía potencial en cada punto; como se muestra en el punto $x_4$, la energía cinética en cualquier punto es siempre la diferencia entre la energía mecánica ($E_4$, por ejemplo, como se muestra en la figura 9*a*) y la energía potencial $U(x)$ evaluada en ese punto.

Para el punto en que $U(x)$ tiene un valor mínimo, tal como en $x = x_0$, la pendiente de la curva es cero y, por lo

tanto, la fuerza es cero; esto es, $F(x_0) = -(dU/dx)_{x=x_0} = 0$. Una partícula en reposo en este punto permanecerá en reposo. Más aún, si la partícula se desplaza ligeramente en cualquier dirección, la fuerza, $F(x) = -dU/dx$, tenderá a regresarla, y oscilará alrededor del punto de equilibrio. Por eso, este punto de equilibrio se llama punto de *equilibrio estable*. La figura 9*b* muestra la fuerza $F(x)$ correspondiente a la energía potencial $U(x)$. Si la partícula se mueve ligeramente hacia la izquierda de $x_0$ (esto es, hacia $x$ más pequeña), la fuerza es positiva y la partícula es empujada hacia una $x$ más grande (esto es, de regreso hacia $x_0$). Si la partícula se mueve hacia la derecha de $x_0$, experimenta una fuerza negativa que de nuevo la regresará hacia $x_0$.

En el punto donde $U(x)$ tiene un valor máximo, tal como en $x = x_5$, la pendiente de la curva es cero, de modo que la fuerza es nuevamente cero; esto es $F(x_5) = -(dU/dx)_{x=x_5} = 0$. Una partícula en reposo en este punto permanecerá en reposo. Sin embargo, si la partícula se desplaza, incluso una pequeñísima distancia desde este punto, la fuerza $F(x)$ tenderá a empujarla más allá de la posición de equilibrio. Tal punto de equilibrio se llama, por lo tanto, punto de *equilibrio inestable*. En el punto de la figura 9*b* correspondiente a $x_5$, que se mueve alejándose de $x_5$ hacia la derecha (hacia una $x$ más grande), resulta en una fuerza positiva que empuja a la partícula hacia una $x$ aun más grande.

En un intervalo en el cual $U(x)$ sea constante, tal como cerca de $x = x_6$, la pendiente de la curva es cero, y cero es también la fuerza; esto es $F(x_6) = -(dU/dx)_{x=x_6} = 0$. Tal intervalo se llama intervalo de *equilibrio neutro*, puesto que una partícula puede ser desplazada ligeramente sin experimentar una fuerza de repulsión o una fuerza de restitución.

De esto se deduce que si conocemos la función de energía potencial para la región de $x$ en la cual se mueve el cuerpo, conocemos mucho acerca del movimiento del cuerpo.

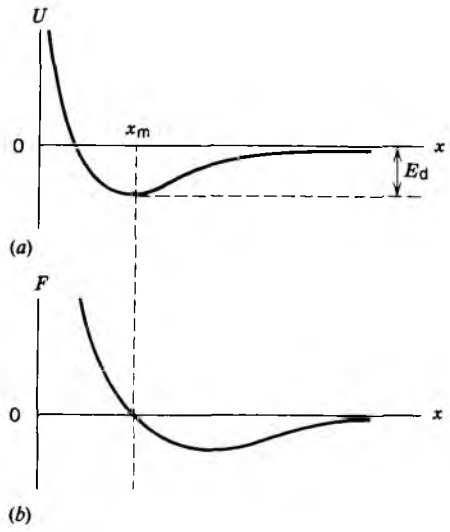



**Figura 10** Problema muestra 4. (*a*) La energía potencial y (*b*) la fuerza entre dos átomos en una molécula diatómica, en función de la distancia $x$ que separa a los átomos. Nótese que la energía potencial se hace igual a cero cuando los átomos están infinitamente separados.

**Problema muestra 4** La función de energía potencial para la fuerza entre dos átomos de una molécula diatómica puede ser expresada aproximadamente como sigue:

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6},$$

donde $a$ y $b$ son constantes positivas y $x$ es la distancia entre los átomos. Halle (*a*) la separación de equilibrio entre los átomos, (*b*) la fuerza entre los átomos, y (*c*) la energía mínima necesaria para disociar la molécula (esto es, separar a los átomos desde la posición de equilibrio a $x = \infty$).

**Solución** (*a*) En la figura 10*a* mostramos a $U(x)$ en función de $x$. El equilibrio tiene lugar en la coordenada $x_m$, donde $U(x)$ es un mínimo, que calculamos de

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_m} = 0.$$

Esto es,

$$\frac{-12a}{x_m^{13}} + \frac{6b}{x_m^7} = 0$$

o sea

$$x_m = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$$

(*b*) De la ecuación 13, podemos hallar la fuerza correspondiente a esta energía potencial:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}\right) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}.$$

Graficamos la fuerza en función de la separación entre los átomos en la figura 10*b*. Cuando la fuerza es positiva (desde $x = 0$ hasta $x = x_m$), los átomos se repelen entre sí (la fuerza se dirige hacia $x$ creciente). Cuando la fuerza es negativa (desde $x = x_m$ hasta $x = \infty$), los átomos se atraen entre sí (la fuerza está dirigida hacia $x$ decreciente). Para $x = x_m$ la fuerza es cero; éste es el punto de equilibrio y es un punto de equilibrio estable.

(*c*) La energía mínima necesaria para disociar la molécula en átomos separados se llama *energía de disociación*, $E_d$. De la energía potencial graficada en la figura 10*a*, vemos que podemos separar los átomos a $x = \infty$, donde $U = 0$, siempre que $E \geq 0$. La energía *mínima* necesaria corresponde a $E = 0$, lo cual significa que los átomos estarán infinitamente separados ($U = 0$) y en reposo ($K = 0$) en su estado final. En el estado de equilibrio de la molécula, sin embargo, su energía es toda potencial, de manera que (véase la Fig. 10*a*) $E = U(x_m)$, una cantidad negativa. La energía que debemos de añadir a la molécula en su estado de equilibrio para elevar su energía desde este valor negativo hasta cero es la que hemos llamado energía de disociación $E_d$. Entonces

$$U(x_m) + E_d = 0,$$

o sea

$$E_d = -U(x_m) = -\frac{a}{x_m^{12}} + \frac{b}{x_m^6}.$$

Insertando el valor para $x_m$, hallamos que

$$E_d = \frac{b^2}{4a},$$

la cual es una cantidad positiva, como debe ser. Esta energía podría ser abastecida ejecutando un trabajo externo sobre la molécula, quizá usando fuerzas eléctricas o, de otra manera, aumentando la energía cinética de un átomo de la molécula con relación al otro.

### Solución analítica para x(*t*) *(Opcional)*

La descripción completa del movimiento unidimensional de una partícula está contenida en la función $x(t)$, la cual especifica la posición $x$ de la partícula en cualquier tiempo $t$. Podemos obtener $x(t)$ comenzando con la ecuación 20, la cual podemos escribir así:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]},$$

o sea

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = dt. \qquad (21)$$

Integrando ambos lados de la ecuación 21 desde la posición inicial ($x = x_0$ cuando $t = t_0$) hasta una posición final cualquiera $x$ en el tiempo $t$, obtenemos

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0. \qquad (22)$$

Después de llevar a cabo la integración en el lado izquierdo de la ecuación 22, podemos, en principio, resolver la ecuación resultante para $x(t)$.

Al aplicar esta ecuación, el signo que deberá tomarse para la raíz cuadrada depende de si v apunta hacia la dirección de $x$ positiva o en la negativa. Cuando v cambia de dirección durante el movimiento, puede ser necesario llevar a cabo la integración separadamente para cada parte del movimiento.

En algunos casos, podemos llevar a cabo la integridad de la ecuación 22 y obtener la solución analítica de $x(t)$. En otros casos, puede ser más conveniente hallar una solución numérica mediante una computadora, lo cual ilustramos más adelante en esta sección. Aquí llevamos a cabo la solución analítica en el caso de una partícula de masa $m$ que se mueve en una dimensión bajo la acción de un resorte de constante de fuerza $k$, para el cual $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Supongamos que en $t = 0$ la partícula está situada en $x = x_0$ y que se mueve a la velocidad $v = 0$. La energía mecánica $E$ es, por lo tanto, $\frac{1}{2}kx_0^2$ de acuerdo con la ecuación 12. En este caso la ecuación 22 da por resultado

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{x_0^2 - x^2}} = t.$$

Esta integral es de la forma estándar que puede encontrarse en las tablas de integrales:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right).$$

En nuestro caso, tenemos que

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}t,$$

y, después de cierta manipulación, podemos escribir este resultado como:

$$x(t) = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

El movimiento unidimensional de una partícula bajo la acción de la fuerza de un resorte es sinusoidal. Sabemos por experiencia que el movimiento es oscilatorio (esto es, se repite sobre la misma trayectoria); este resultado muestra que la oscilación es sinusoidal. Consideraremos al movimiento oscilatorio en términos más generales en el capítulo 15, donde obtendremos este resultado para $x(t)$ a partir de las leyes de Newton en lugar del método de la energía.

### Solución numérica

Como lo hicimos en el caso de las fuerzas que dependen del tiempo (sección 6-6) o de la velocidad (sección 6-7), podemos obtener una solución numérica para el movimiento debido a fuerzas que dependan de la posición. La técnica numérica que discutimos está basada en las leyes de Newton en lugar de los métodos de la energía.

Supongamos que tenemos a una fuerza $F(x)$ que actúa sobre una partícula de masa $m$. En $t = 0$, la partícula está situada en $x_0$ y se mueve a velocidad $v_0$. Nuestra meta es describir el movimiento resultante, esto es, $x(t)$ y $v(t)$ para todo tiempo $t$.

Dividimos el movimiento en una serie de pequeños intervalos de tiempo $\delta t$. Cada intervalo es tan pequeño que podemos tomar la aceleración como aproximadamente constante dentro del intervalo. (Dentro de un intervalo suficientemente pequeño, $x$ no cambia mucho; entonces, $F(x)$ es casi constante, como también lo es $a = F/m$.)

En el primer intervalo, que va desde $t = 0$ hasta $t = \delta t$, la aceleración tiene un valor inicial $a_1 = F(x_0)/m$. (Los subíndices indican aquí el número del intervalo de tiempo, y la variable corresponde al valor *al final* del intervalo. Así, $v_2$ significa la velocidad al final del segundo intervalo.)

Podemos ahora adaptar fácilmente las ecuaciones cinemáticas de la aceleración constante al movimiento dentro de cada intervalo. La ecuación 15 del capítulo 2 da la velocidad al final del primer intervalo:

$$v_1 = v_0 + a_1\,\delta t,$$

y la ecuación 19 del capítulo 2 da la posición al final del primer intervalo:

$$x_1 = x_0 + v_0\,\delta t + \tfrac{1}{2}a_1(\delta t)^2.$$

Usaremos esta nueva posición $x_1$ para hallar la aceleración (aproximadamente constante) durante el segundo intervalo, $a_2 = F(x_1)/m$, y luego aplicaremos las ecuaciones de la aceleración constante al segundo intervalo, obteniendo

$$v_2 = v_1 + a_2\,\delta t$$

y

$$x_2 = x_1 + v_1\,\delta t + \tfrac{1}{2}a_2(\delta t)^2.$$

Podemos continuar con este procedimiento para tantos intervalos como queramos. Cuanto más pequeño sea el intervalo $\delta t$, más preciso será el resultado del cálculo.

Como ejemplo, consideremos la fuerza del resorte, $F(x) = -kx$ siendo $k = 9.6$ N/m, actuando sobre una partícula de masa $m = 2.5$ kg. Supongamos que la partícula inicia en $t = 0$ de la posición $x_0 = 0.5$ m con la velocidad $v_0 = 0$. La figura 11 muestra los resultados del cálculo numérico para $x(t)$ y $v(t)$, con 400 intervalos de 0.01 s cada uno.

En el apéndice I presentamos un programa de computadora para llevar a cabo el cálculo numérico. Usando este programa podemos analizar el movimiento unidimensional bajo la acción de cualquier fuerza que dependa de la posición de la partícula, incluso para aquellas fuerzas para las que la integral de la ecuación 10 no tenga una forma analítica para la energía potencial o para las que la integral de la ecuación 22 no pueda ser evaluada en forma analítica.

Los resultados mostrados en la figura 11 parecen ser muy conocidos: resulta que son las curvas seno y coseno. De hecho, hemos usado previamente la ecuación 22 para obtener la solución analítica en este sistema, el cual hemos demostrado que es una función coseno. El acceso numérico verifica este resultado. ■

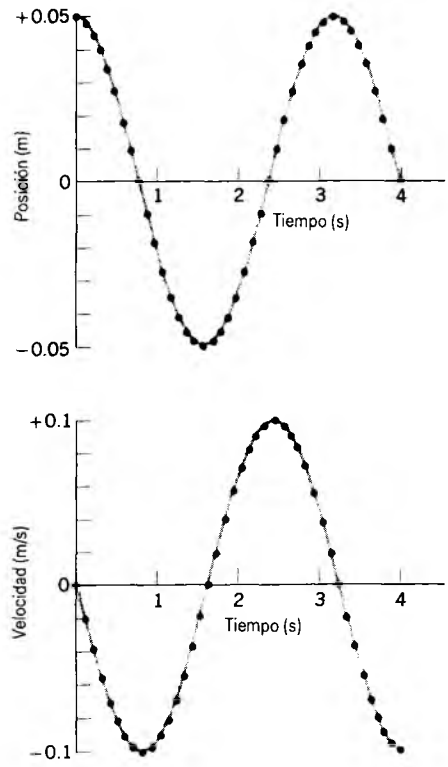



**Figura 11** Solución numérica del movimiento de una partícula sobre la que actúa la fuerza de un resorte $F = -kx$. Los puntos representan valores obtenidos directamente de la solución por computadora. Por claridad, sólo uno de cada 10 puntos de la computadora se representa con un punto. Las curvas están trazadas siguiendo el esquema de los puntos y ciertamente se asemejan a las curvas seno y coseno, que son los resultados de la solución analítica.

## 8-5 SISTEMAS CONSERVATIVOS BIDIMENSIONALES Y TRIDIMENSIONALES *(Opcional)*

Hasta ahora hemos discutido la energía potencial y la conservación de la energía en sistemas unidimensionales en los que la fuerza estaba dirigida a lo largo de la línea del movimiento. Podemos fácilmente generalizar la discusión al movimiento tridimensional y obtener una expresión para la conservación de la energía mecánica.

Consideremos un sistema donde una partícula se mueve en una trayectoria y que recibe la acción de una fuerza que proviene de otras partes del sistema. Si el trabajo efectuado por la fuerza **F** depende sólo de los puntos terminales del movimiento y es independiente de los puntos intermedios, la fuerza es conservativa. Definimos la energía potencial $U$ por analogía con el sistema unidimensional y hallamos que es una función de tres coordenadas espaciales, esto es, $U = U(x, y, z)$. La generalización de la ecuación 9 al movimiento en tres dimensiones es

$$\Delta U = -\int_{x_0}^{x} F_x\,dx - \int_{y_0}^{y} F_y\,dy - \int_{z_0}^{z} F_z\,dz \qquad (23)$$

o, escrito de manera más compacta en notación vectorial,

$$\Delta U = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \qquad (24)$$

donde $\Delta U$ es el cambio de la energía potencial del sistema cuando la partícula se mueve del punto $(x_0, y_0, z_0)$, descrito por el vector de posición $\mathbf{r}_0$, al punto $(x, y, z)$ descrito por el vector de posición $\mathbf{r}$. $F_x$, $F_y$, y $F_z$ son las componentes de la fuerza conservativa $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$.

La generalización de la ecuación 12 al movimiento tridimensional es

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0, y_0, z_0), \qquad (25)$$

la cual puede ser escrita en notación vectorial como:

$$\tfrac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + U(\mathbf{r}) = \tfrac{1}{2}m\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_0 + U(\mathbf{r}_0), \qquad (26)$$

en la cual $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ y $\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_0 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2$. En términos de la energía mecánica $E$, la ecuación 25 puede plantearse como:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = E.$$

Por último, la generalización de la ecuación 13 a tres dimensiones es*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x} - \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (27)$$

Si sustituimos esta expresión de **F** en la ecuación 24, de nuevo obtenemos una identidad, lo que demuestra que las ecuaciones 24 y 27 son equivalentes. En el lenguaje vectorial se dice que la fuerza conservativa **F** es el valor negativo del *gradiente* de la energía potencial $U(x, y, z)$. Podemos demostrar que todas

* La *derivada parcial* $\partial/\partial x$ significa que tomamos a la derivada de $U(x, y, z)$ con respecto a $x$ como si $y$ y $z$ fuesen constantes. Similarmente, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$ indican que diferenciamos con respecto a una variable y mantenemos como constantes a todas las demás variables.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACIÓN Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



estas ecuaciones se reducen a las ecuaciones unidimensionales correspondientes del movimiento a lo largo del eje $x$. En las ecuaciones 24 y 28, **F** representa la fuerza ejercida *por el sistema* cuya energía potencial es $U$.

**Problema muestra 5** En cierto sistema de partículas confinadas al plano $xy$, la fuerza tiene la forma $\mathbf{F}(x, y) = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} = -ky\mathbf{i} - kx\mathbf{j}$, donde $k$ es una constante positiva. (Una partícula ubicada en un punto arbitrario $(x, y)$ es empujada hacia la línea diagonal $y = -x$ por esta fuerza. Podemos verificarlo trazando la línea $y = -x$ y dibujando las componentes de la fuerza $F_x$ y $F_y$ en varios puntos del plano $xy$.) (*a*) Demuestre que el trabajo efectuado por esta fuerza cuando una partícula se mueve desde el origen (0, 0) hasta el punto $(a, b)$ es independiente de la trayectoria a lo largo de las tres trayectorias mostradas en la figura 12. (*b*) Suponiendo que esta fuerza sea conservativa, halle la energía potencial $U(x, y)$ de este sistema. Sea que el punto de referencia $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ y suponga que $U(0, 0) = 0$.

**Solución** (*a*) El trabajo efectuado a lo largo de la trayectoria 1 puede ser calculado dividiendo la trayectoria en dos partes: la trayectoria 1*a* desde $x = 0$ hasta $x = a$ a lo largo del eje $x$, y la trayectoria 1*b* verticalmente desde el punto $(a, 0)$ hasta el punto $(a, b)$. El trabajo a lo largo de la trayectoria 1*a* es

$$W_{1a} = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int F_x\,dx + \int F_y\,dy$$
$$= \int (-ky)\,dx + \int (-kx)\,dy.$$

A lo largo de la trayectoria 1*a*, $y = 0$ y $dy = 0$. De aquí que ambas integrales arriba escritas se cancelen y $W_{1a} = 0$. A lo largo de la trayectoria 1*b*, $d\mathbf{s} = dy\mathbf{j}$ y $x = a$, de modo que

$$W_{1b} = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{y=0}^{y=b} (-kx)\,dy = (-ka)\int_0^b dy = -kab.$$

El trabajo total a lo largo de la trayectoria 1 es, por lo tanto,

$$W_1 = W_{1a} + W_{1b} = -kab.$$

A lo largo de la trayectoria 2 procedemos de modo similar:

$$W_{2a} = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{y=0}^{y=b} (-kx)\,dy = 0$$

$$W_{2b} = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{x=0}^{x=a} (-ky)\,dx = (-kb)\int_0^a dx = -kab.$$

A lo largo de la trayectoria 3, $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$, y

$$W_3 = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int (-ky\,dx - kx\,dy).$$

Supongamos que la variable $r$ varía a lo largo de la línea recta desde (0, 0) hasta $(a, b)$. Con $y = r\,sen\,\phi$, entonces $dy = dr$ sen $\phi$ (porque $\phi$ es constante a lo largo de la línea). También $x = r$ cos $\phi$ y $dx = dr$ cos $\phi$. Tratamos a $r$ como nuestra variable de integración, con valores en el intervalo comprendido desde 0 en el origen hasta $d = (a^2 + b^2)^{1/2}$ en el punto $(a, b)$. La integral de $W_3$ da por resultado, entonces,

$$W_3 = \int_0^d [-k(r\,\text{sen}\,\phi)(dr\cos\phi) - k(r\cos\phi)(dr\,\text{sen}\,\phi)]$$

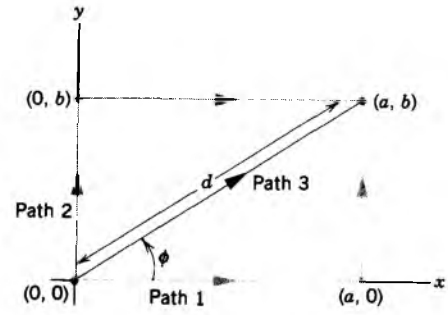



**Figura 12** Problema muestra 5. Se emplean tres trayectorias diferentes para evaluar el trabajo efectuado al mover una partícula desde el origen (0, 0) hasta el punto $(a, b)$.

$$= -2k\,\text{sen}\,\phi\cos\phi\int_0^d r\,dr = -kd^2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi.$$

Con sen $\phi = b/d$ y cos $\phi = a/d$, esto da por resultado $W_3 = -kab$. Así $W_1 = W_2 = W_3$. Esto no prueba que **F** sea conservativa (necesitaríamos evaluar *todas* las trayectorias para llegar a esta conclusión), pero ciertamente nos lleva a sospechar que **F** puede ser conservativa.

(*b*) La energía potencial puede calcularse a partir de la ecuación 24, la cual hemos ya, en efecto, evaluado al hallar el trabajo efectuado a lo largo de la trayectoria 3. La única diferencia es que debemos integrar al punto arbitrario $(x, y)$ en lugar de $(a, b)$. Simplemente reetiquetamos el punto $(a, b)$ como punto $(x, y)$ y entonces

$$\Delta U = U(x, y) - U(0, 0) = -W = kxy,$$

donde hemos tomado $U(0, 0) = 0$. El lector debería poder demostrar que podemos aplicar la ecuación 27 a esta función de la energía potencial y obtener la fuerza $\mathbf{F}(x, y)$.

Si cambiamos ligeramente la fuerza a $\mathbf{F} = -k_1y\mathbf{i} - k_2x\mathbf{j}$, entonces los métodos de la parte (*a*) demuestran que esta fuerza no es conservativa cuando $k_1 \neq k_2$. (Véase el problema 46.) Incluso si $k_1 = -k_2$, la fuerza es todavía no conservativa. Esta fuerza tiene aplicaciones importantes en el enfoque magnético de partículas cargadas eléctricamente, pero no puede ser representada por una función de energía potencial, porque no es conservativa. ■

## 8-6 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA EN UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Cuando un objeto interactúa junto con otro u otros objetos de su entorno, somos libres de definir que nuestro *sistema* tiene tantos o tan pocos objetos como queramos. Para cualquier definición del sistema, la conservación de la energía se cumple siempre y cuando tengamos cuidado de seguirle la pista a las energías dentro del sistema y a las transferencias de energía entre el sistema y su entorno.

La figura 13 muestra un sistema arbitrario, alrededor del cual hemos trazado una curva cerrada imaginaria

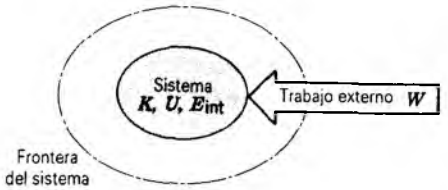



**Figura 13** Un sistema encerrado dentro de la frontera tiene energía cinética $K$, energía potencial $U$ (que representa sólo las interacciones entre los componentes dentro del sistema), y energía interna $E_{int}$. El entorno puede intercambiar energía con el sistema mediante el trabajo externo $W$.

llamada *frontera del sistema*. El sistema tiene, dentro de su frontera, una energía que puede incluir muchas formas posibles, algunas de las cuales se indican: la energía cinética $K$, la energía potencial $U$, y la *energía interna* $E_{int}$. Aquí, $U$ se refiere a la energía potencial que resulta de la interacción de las partes del sistema entre ellas mismas; las interacciones con el entorno se representan no en términos de cambios de energía potencial sino en términos de trabajo (externo) $W$. Posteriormente, en esta misma sección daremos una definición precisa de la energía interna en función del potencial microsópico y de las energías cinéticas de las moléculas de que están hechos los componentes del sistema. Ejemplos de cambios de energía interna son los cambios en la disposición de las moléculas de un sistema (tal como las soldaduras microscópicas formadas por el rozamiento) y los cambios de velocidad de las moléculas de un sistema (observados como un cambio en su temperatura; la temperatura se estudia en el capítulo 22, y en el capítulo 23 se establece una relación con la energía interna).

La energía del sistema dentro de la frontera puede ser cambiada cuando el trabajo externo $W$ se efectúa sobre el sistema por su entorno, como se representa en la figura 13. (El trabajo interno, efectuado dentro de la frontera por una parte del sistema al actuar sobre otra, no cambia la energía total, aunque puede convertir energía de una forma a otra, tal como de potencial a cinética.) Por lo tanto, podemos escribir la conservación de la energía del sistema así:

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = W, \qquad (28)$$

donde $W$ representa el trabajo externo total efectuado por todas las fuerzas a través de las cuales actúa el entorno sobre el sistema.

La figura 13 nos recuerda la importancia de la *convención de signos* que hemos elegido para el trabajo externo. El trabajo positivo realizado sobre el sistema por el entorno tiende a *aumentar* la energía del sistema. El trabajo negativo hecho sobre el sistema por el entorno (que es equivalente a trabajo positivo hecho sobre el entorno por el sistema) tiende a *disminuir* la energía del sistema.

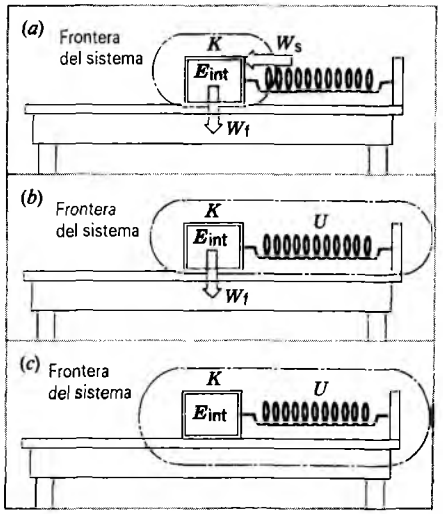



**Figura 14** Un bloque sobre el que actúa un resorte se desliza sobre una mesa que ejerce una fuerza de fricción. (*a*) El sistema consiste solamente en el bloque; la fuerza del resorte y la fricción efectúan un trabajo sobre el sistema, cambiando su energía. (*b*) El sistema consta ahora del bloque y el resorte, y posee tanto energía cinética como energía potencial. (*c*) El sistema incluye ahora la mesa. La fuerza de fricción es ahora una fuerza interna y contribuye a la energía interna del sistema.

Ilustremos estos principios considerando el sistema bloque-resorte de la figura 1, suponiendo ahora que existe una fuerza de fricción entre el bloque y la mesa sobre la que se desliza. Definiremos primero que nuestro sistema es el bloque mismo (Fig. 14*a*). La figura muestra dos transferencias de energía a través de la frontera del sistema: el trabajo conservativo $W_s$ positivo efectuado sobre el bloque por el resorte y el trabajo no conservativo $W_f$ negativo efectuado sobre el bloque por la fuerza de fricción ejercida por la mesa. Para este sistema, la conservación de la energía puede escribirse así:

$$\Delta K + \Delta E_{int} = W_s + W_f. \qquad (29)$$

Aquí $\Delta U = 0$, porque el sistema que está dentro de la frontera no experimenta cambio alguno de energía potencial. El resorte no es parte del sistema, de modo que no se considera la energía potencial del resorte; en cambio, entendemos al resorte como parte del entorno a través del cual el trabajo conservativo $W_s$ opera sobre el sistema. Nótense en la figura 14*a* las direcciones de las flechas que indican las transferencias de energía; la ecuación 29 indica que el trabajo positivo efectuado por el resorte (el cual damos por sentado que se comprime a partir de su longitud de relajamiento) tiende a aumentar la energía del bloque, y el trabajo negativo efectuado por la superficie horizontal tiende a disminuir la energía del bloque.

Consideremos ahora que el sistema consta del bloque y el resorte (Fig. 14*b*). El sistema tiene ahora una energía potencial (la asociada a la fuerza del resorte). La fuerza de fricción es la única fuerza externa que efectúa un trabajo sobre el sistema. Para esta definición del sistema escribiremos la conservación de la energía como:

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = W_{\text{f}}. \tag{30}$$

La energía del sistema es ahora $U + K + E_{\text{int}}$; en este caso, las transferencias de energía entre el resorte y el bloque no cambian la energía del sistema. La fuerza del resorte es una *fuerza interna* que puede transferir energía dentro del sistema de una forma a otra ($U \leftrightarrow K$), pero no puede cambiar la energía total del sistema. El trabajo negativo (de fricción) de la superficie horizontal puede disminuir la energía del sistema.

Finalmente, definamos que el sistema incluye a la mesa (Fig. 14*c*). Ahora no existe una fuerza externa, conservativa o no, que sea responsable de las transferencias de energía que penetran las fronteras del sistema. Con esta definición del sistema, el trabajo externo es cero, y entonces

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0. \tag{31}$$

La fuerza de fricción es ahora una fuerza interna, junto con la fuerza del resorte. La energía puede ser transferida, dentro del sistema, de energía mecánica $U + K$ del bloque + el resorte a energía interna del bloque + la mesa, pero la energía total (mecánica + interna) permanece constante. Supongamos, por ejemplo, que soltamos al bloque desde el reposo con el resorte comprimido. El bloque se desliza por la mesa hasta que llega al reposo. En este caso $\Delta K = 0$ (porque $K_{\text{f}} = K_{\text{i}} = 0$), y por lo tanto $\Delta E_{\text{int}} = -U$. La pérdida de energía potencial que estaba originalmente almacenada en el sistema resulta en un aumento de la energía interna del sistema. De este análisis no podemos determinar los cambios individuales en la energía interna del bloque y de la mesa, sólo el cambio total del sistema en conjunto.

La fuerza de fricción es un ejemplo de una fuerza no conservativa, disipadora. En un sistema mecánico cerrado como el que aquí se ilustra, la energía mecánica se transforma en energía interna por la fuerza de la fricción. La energía mecánica *no se conserva en este caso*, siendo compensada la pérdida de energía mecánica por una ganancia equivalente de la energía interna. (No todas las fuerzas no conservativas son disipadoras; algunas fuerzas no conservativas, como la fuerza magnética, pueden *aumentar* la energía mecánica de un sistema. Aun la fuerza de la fricción puede, en ciertas condiciones dar por resultado un aumento en la energía mecánica del sistema. ¿Se le ocurre a usted algún ejemplo en el que esto pueda suceder?)

Nótese que en los ejemplos anteriores hemos expresado la energía potencial macroscópica de un resorte como un término explícito. Podríamos haber considerado la energía almacenada en el resorte como una parte de la energía interna del sistema. Sin embargo, por conveniencia, elegimos separar términos macroscópicos que puedan fácilmente ser tomados en cuenta, dejando en $E_{\text{int}}$ los términos microscópicos restantes que no están incluidos en $U$. Esto es, el reordenamiento de las moléculas del resorte se halla incluido en $U$, mientras que el reordenamiento de las moléculas del bloque y de la mesa se incluyen en $E_{\text{int}}$. Esta clasificación un tanto arbitraria se hace por conveniencia al discutir la energía de este sistema partícular.

La ecuación 28 representa un primer paso en el avance de una ley de la conservación de la energía *macánica* a una ley generalizada de la conservación de la energía. Esto es, esta ley generalizada puede enunciarse como sigue:

> *En un sistema aislado, la energía puede ser transformada de una clase a otra, pero no puede ser creada o destruida; la energía total del sistema permanece constante.*

Por "aislado" nos referimos a que no se efectúa sobre el sistema ningún trabajo externo, conservativo o no conservativo. Esta definición de la conservación de la energía es una generalización de nuestra experiencia, hasta ahora no desmentida por ningún experimento de laboratorio o por observación de la naturaleza.

En algunas ocasiones, en la historia de la física, esta ley parecía tener fallas, pero su aparente invalidez estimuló la búsqueda de alguna otra forma de energía que pudiera ser incluida en una ley aún más general que fuera capaz de explicar la observación. Por ejemplo, en la década de 1920 se hicieron estudios experimentales de la desintegración beta nuclear, una forma de desintegración radioactiva en que los electrones son emitidos por un núcleo atómico. Estos experimentos demostraron que los electrones eran emitidos con menor energía de la esperada, con base en el conocimiento de la energía total del núcleo antes y después de la desintegración. Se hicieron muchas sugerencias para explicar esta energía "faltante". Según se propuso en ese entonces, cuando los electrones salían del núcleo, chocaban con los electrones atómicos y cedían algo de su energía en estas colisiones. Si esto fuera así, este proceso causaría un aumento en la energía interna del sistema consistente en los electrones emitidos más los átomos desintegrados. Tal aumento en la energía interna se revelaría como una elevación en la temperatura de la muestra radioactiva. Experimentos precisos no lograron revelar ningún aumento en la temperatura, y la hipótesis fue rechazada. En 1930, el físico suizo Wolfgang Pauli expuso la hipótesis correcta. Pauli propuso que, además del electrón, se emitía una *segunda* partícula en la desintegración beta que llevaba consigo la energía "faltante".

Esta partícula, llamada *neutrino*, daba muestras de ser extremadamente evasiva; si bien la hipótesis de Pauli fue pronto confirmada por métodos indirectos, tuvieron que transcurrir 25 años más hasta que el neutrino pudiera ser observado directamente. Esta predicción de la existencia del neutrino, basada en la fe sobre la conservación de la energía, tuvo un efecto extraordinario en el desarrollo de la física de las partículas elementales en las décadas siguientes. El neutrino es una de las partículas elementales más fundamentales, y el estudio de sus propiedades y sus interacciones con otras partículas ha contribuido a nuestra comprensión de la estructura subyacente del mundo material.

---

**Problema muestra 6** Un aficionado de los Cachorros de Chicago deja caer una bola de béisbol (de masa $m$ = 0.143 kg) desde la cima de la Torre Sears a una altura $h$ de 443 m (= 1450 ft). La bola alcanza una velocidad terminal $v$ de 42 m/s (véase la sección 6-7). Halle el cambio en la energía interna de la bola y del aire circundante durante la caída a la superficie de la Tierra.

**Solución** Contemplemos al sistema como formado por la bola de béisbol, el aire a través del cual cae, y la Tierra. Ninguna fuerza externa actúa sobre este sistema; la fuerza de la gravedad de la Tierra sobre la bola y la fuerza del arrastre del aire sobre la bola son fuerzas internas del sistema, como lo hemos definido ya. El cambio en la energía potencial del sistema es

$$\Delta U = U_f - U_i = 0 - mgh$$

$$= -(0.143 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(443 \text{ m}) = -621 \text{ J}.$$

El cambio de la energía cinética durante la caída es

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = \tfrac{1}{2}(0.143 \text{ kg})(42 \text{ m/s})^2 = 126 \text{ J}.$$

(Despreciamos aquí el movimiento de la Tierra bajo la atracción gravitatoria de la bola.) Según la ecuación 28, podemos expresar la conservación de la energía como: $\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = 0$, porque no existe un trabajo externo efectuado sobre el sistema. Resolviendo para la energía interna, obtenemos

$$\Delta E_{int} = -\Delta U - \Delta K = -(-621 \text{ J}) - 126 \text{ J} = 495 \text{ J}.$$

Este aumento de la energía interna puede ser observado como una elevación de temperatura de la bola y el aire que la rodea, o quizás como la energía cinética del aire dejada en el trayecto por la bola al caer. Usando la ecuación 28 solamente, no podemos situar a la energía entre estas formas. Para hacerlo, debemos de aislar a la bola o al aire como nuestro sistema y calcular el trabajo efectuado por las fuerzas externas que actúan sobre él. Este procedimiento, que requiere un conocimiento de la fuerza de arrastre entre la bola y el aire así como los detalles del movimiento de la bola, es demasiado complejo para que lo resolvamos aquí.

En este problema hemos supuesto que el aumento de la energía interna permanece dentro del sistema, como hemos definido ya. En la práctica, las diferencias de temperatura entre la bola o el aire y su entorno darán por resultado otra clase de transferencia de energía llamada *calor*, la cual estudiaremos en el capítulo 25.

**Problema muestra 7** Un bloque de 4.5 kg es empujado hacia arriba por un plano inclinado a 30° con una velocidad inicial $v$ de 5.0 m/s. El bloque recorre una distancia $d$ = 1.5 m por el plano mientras su velocidad disminuye gradualmente hasta cero. (*a*) ¿Cuánta energía mecánica pierde el bloque en este proceso debido a la fricción? (*b*) El bloque se desliza luego hacia abajo por el plano desde el reposo. Suponiendo que la fricción produzca la misma pérdida de energía mecánica durante el trayecto hacia abajo, ¿cuál es la velocidad del bloque cuando pasa por su posición inicial?

**Solución** (*a*) Al igual que lo hicimos en el problema muestra 6, despreciamos los cambios en la energía de la Tierra en nuestro cálculo y consideramos los cambios en la energía cinética del bloque solamente. El cambio en la energía potencial es

$$\Delta U = U_f - U_i = mgh - 0$$

$$= (4.5 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(1.5 \text{ m})(\text{sen } 30°) = 33 \text{ J}.$$

El cambio en la energía cinética entre la parte inferior y la superior del plano es

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2 = -\tfrac{1}{2}(4.5 \text{ kg})(5.0 \text{ m/s})^2 = -56 \text{ J}.$$

El cambio en la energía mecánica es

$$\Delta E = \Delta U + \Delta K = 33 \text{ J} - 56 \text{ J} = -23 \text{ J}.$$

Nótese que, de acuerdo con la ecuación 28, esta pérdida en la energía mecánica puede escribirse como $-\Delta E_{int} + W_f$. Aquí, $\Delta E_{int}$ es una cantidad positiva que representa el aumento en la energía interna del bloque (no del bloque + el plano), y $W_f$ es el trabajo externo (negativo) efectuado sobre el bloque por la fuerza de fricción del plano. Sin información adicional, no podemos calcular estas cantidades por separado.

(*b*) Ahora $\Delta K'$ representa el cambio en la energía cinética entre el primer paso y el segundo por el fondo del plano. El cambio correspondiente en la energía potencial $\Delta U'$ es de cero. La ecuación 28 nos da

$$\Delta K' = -\Delta U' + (-\Delta E'_{int} + W'_f).$$

La cantidad dentro del paréntesis tiene el valor 2(-23 J) = -46 J, porque se nos dice que la pérdida en la energía mecánica durante el trayecto hacia abajo es igual a la del trayecto hacia arriba. Así $\Delta K' = K_f - K_i$ = -46 J, y la energía cinética en el fondo del plano es

$$K_f = 56 \text{ J} - 46 \text{ J} = 10 \text{ J}.$$

La velocidad correspondiente es

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(10 \text{ J})}{4.5 \text{ kg}}} = 2.1 \text{ m/s}.$$

---

## Base microscópica de la energía interna *(Opcional)*

Consideremos un objeto como el bloque deslizante estudiado anteriormente o la bola de béisbol en caída del problema muestra 6. El teorema trabajo-energía aplicado a determinada partícula (digamos, un átomo) dentro del sistema compuesto puede escribirse como $\Delta K_i = W_i$, donde el subíndice $i$ indica una da las $N$ partículas del objeto. Aquí $W_i$ significa el trabajo total debido a todas las fuerzas que actúan sobre esa partícula. Podemos

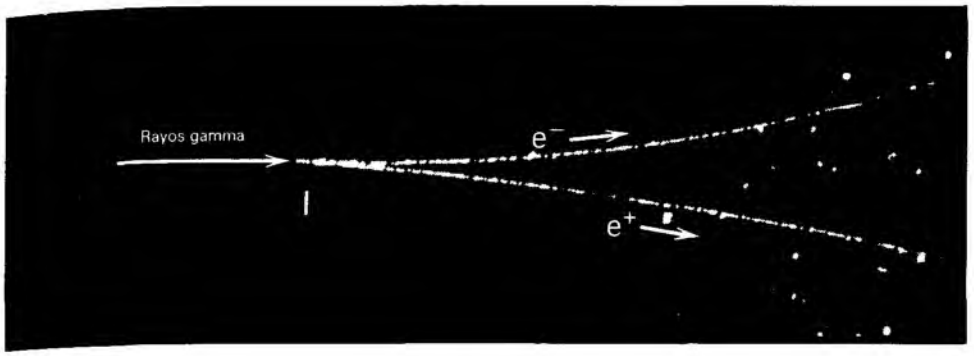



**Figura 15** La radiación gamma ha convertido a su energía en un positrón y un electrón. Las dos partículas dejan rastros visibles en la cámara de burbuja donde fueron creadas. Los rastros son curvos, porque un campo magnético intenso ejerce una fuerza que siempre es perpendicular a la velocidad de las partículas, pero de dirección opuesta para las partículas de cargas eléctricas opuestas.

aplicar el teorema trabajo-energía separadamente a cada partícula del sistema y luego sumar las $N$ ecuaciones resultantes para obtener

$$\Sigma\, \Delta K_i = \Sigma\, W_i, \tag{32}$$

donde el subíndice $i$ va desde 1 hasta $N$. En el lado derecho de la ecuación 32, dividimos el trabajo total efectuado sobre el objeto en dos partes, tales que $\Sigma W_i = W_{int} + W_{ext}$. El término $W_{int}$ incluye el trabajo efectuado por las fuerzas que los átomos o las moléculas del sistema ejercen entre sí, y el término $W_{ext}$ incluye el trabajo efectuado por todas las fuerzas externas. En el lado izquierdo de la ecuación 32, dividimos la energía cinética total en dos partes: una parte, indicada por $K$, representa el movimiento global de todo el objeto; la segunda parte, indicada por $K_{int}$, representa el total de todos los movimientos internos al azar de los átomos o de las moléculas del objeto. (El procedimiento para hacer esta división será explicado en el capítulo 9 cuando consideremos el movimiento del centro de masa; por ahora, supondremos simplemente que tal división es posible.) Podemos entonces reescribir la ecuación 32 así:

$$\Delta K + \Delta K_{int} = W_{int} + W_{ext}. \tag{33}$$

Suponemos que, a nivel microscópico, todas las fuerzas son conservativas, y así el trabajo interno total puede ser sustituido por una energía potencial interatómica o intermolecular total correspondiente, de modo que $W_{int} = -\Delta_U - \Delta_{Uint}$. Pudimos haberla expresado simplemente como $-\Delta U_{int}$, pero por conveniencia agruparemos algunas energías potenciales microscópicas en un término macroscópico fácilmente calculable representado por $U$, como la energía potencial del resorte estudiada anteriormente. Haciendo esta sustitución y reordenando los términos, obtenemos

$$\Delta U + \Delta K + (\Delta U_{int} + \Delta K_{int}) = W_{ext}. \tag{34}$$

Con $\Delta E_{int} = \Delta U_{int} + \Delta K_{int}$, obtenemos la ecuación 28. Entonces, el término de la energía interna se sigue directamente al aplicar el teorema trabajo-energía microscópicamente a un objeto. ■

## 8-7 MASA Y ENERGÍA* *(Opcional)*

Un tipo común de radioactividad que se observa fácilmente en el laboratorio es la *emisión de positrones*, proceso por el cual un núcleo atómico emite un positrón, que es una partícula de la misma masa que el electrón pero de carga eléctrica opuesta (positiva). Cuando los positrones encuentran a los electrones en la materia ordinaria, observamos el proceso llamado *aniquilación positrón-electrón*. En este proceso el electrón y el positrón desaparecen y, en su lugar, encontramos solamente radiación electromagnética. Simbólicamente, podemos representar este proceso así:

$$e^+ + e^- \rightarrow \text{radiación},$$

donde $e^+$ y $e^-$ representan al positrón y al electrón, respectivamente. La figura 15 ilustra el proceso inverso en que la radiación gamma se convierte en un electrón y un positrón; este proceso se conoce como *producción de pares*.

Consideremos un sistema (Fig. 16*a*) consistente en un positrón y un electrón de energías cinéticas pequeñas, despreciables, y separados por una distancia suficientemente grande para que la energía potencial (debida a la fuerza electrostática entre ellos) pueda ser también despreciada. Llegará un momento en que, el positrón y el electrón se encuentren y se aniquilen, y la radiación resultante escape por la frontera del sistema (Fig. 16*b*). Por medidas del entorno apropiadas, podemos determinar la energía de la radiación que escapa del sistema y hallamos que, en cada suceso de aniquilación, la radiación lleva 1.022 MeV de energía fuera del sistema. Cuando esta radiación es absorbida por los átomos del entorno, se efectúa un trabajo sobre el entorno por la cantidad de 1.022 MeV por las fuerzas electromagnéticas asociadas con la radiación. Puesto que la ecuación 28 está expresada en términos del trabajo efectuado *sobre* un sistema *por* su entorno, consideramos en este caso que el entorno efectúa un trabajo negativo $W$ en la cantidad de -1.022 MeV sobre el sistema.

Al aplicar la ecuación 28 a este sistema, ello nos lleva a una violación aparente de la conservación de la energía; el lado derecho de la ecuación 28 es igual al valor negativo $W$, pero el cambio de energía correspondiente en el lado izquierdo necesario para mantener la igualdad no es obvio. Podríamos, por ejemplo, proponer una disminución en la energía interna que sea numéricamente igual a $W$, pero no está nada claro cuál es la clase de energía interna presente en el sistema original que falta en el sistema final.

La solución a este dilema puede hallarse por la famosa ecuación de Albert Einstein propuesta en 1905, que relaciona a la masa con la energía, mucho antes de que se llevaran a cabo experimentos tales como la aniquilación electrón-positrón:

$$E_0 = mc^2, \tag{35}$$

* Esta sección puede ser omitida o pospuesta hasta que se estudie la relatividad en el capítulo 21.

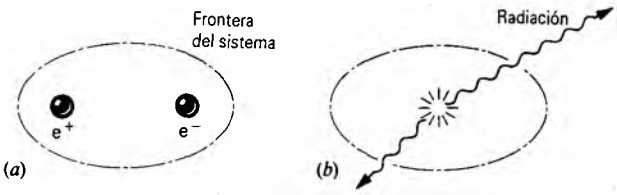



**Figura 16** (*a*) Un sistema consistente en un positrón $e^+$ y un electrón $e^-$. (*b*) Después de que el positrón y el electrón se aniquilan, la radiación resultante sale por la frontera del sistema.

donde $c$ representa la velocidad de la luz.* Esta ecuación nos dice que la masa es una forma de energía y que una partícula de masa $m$ tiene asociada a ella una *energía en reposo* $E_0$ dada por $mc^2$. Esta energía en reposo puede ser considerada como la energía interna de un cuerpo en reposo. Así, el electrón y el positrón tienen energía interna únicamente a causa de sus masas. Para cada partícula, podemos calcular la energía de reposo así:

$$E_0 = mc^2 = \frac{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^2}{1.60 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV}} = 0.511\ \text{MeV}.$$

La energía interna total (energía en reposo) de las dos partículas iniciales es, entonces, 2(0.511 MeV) = 1.022 MeV, por lo que el cambio en la energía de reposo del sistema es −1.022 MeV. *El trabajo negativo efectuado sobre el sistema de la figura 16 está equilibrado por una pérdida equivalente en la energía de reposo del sistema.* Tomando en cuenta apropiadamente las energías en reposo de las partículas, hallamos que la energía se conserva.

La ecuación 35 nos dice también que siempre que sumemos energía $\Delta E$ a un objeto material que permanezca en reposo, aumentamos su masa en una cantidad $\Delta m = \Delta E/c^2$. Si comprimimos un resorte y aumentamos su energía potencial en una cantidad $\Delta U$, entonces su masa aumenta en $U/c^2$. Si elevamos la temperatura de un objeto, aumentando su energía interna en $\Delta E_{\text{int}}$ durante el proceso, aumentamos su masa en $\Delta E_{\text{int}}/c^2$. Estos cambios de masa son muy pequeños y normalmente están más allá de nuestras posibilidades de medirlos en el caso de objetos ordinarios (a causa de que $c^2$ es un número muy grande); pero en el caso de desintegraciones y reacciones de núcleos y de partículas subnucleares, el cambio de masa relativo puede ser lo suficientemente grande como para ser medible.

Dentro de la frontera del sistema de la figura 13, los cambios en la energía potencial $U$ y en la energía interna $E_{\text{int}}$ pueden, entonces, ser asociados con cambios en la energía de reposo $E_0$ del sistema. En este caso, podemos escribir la ecuación 28 así:

$$\Delta E_0 + \Delta K = W. \qquad (36)$$

Aquí, $W$ representa la energía (en forma de trabajo) intercambiada entre el sistema y su entorno. Nótese que el lado izquierdo de la ecuación 36 incluye solamente dos términos: la energía de reposo (la cual incluye todos los tipos de energía de un sistema en reposo) y la energía de movimiento (cinética). Aplicada al caso de la aniquilación electrón-positrón (donde $\Delta K = 0$), la ecuación 36 muestra directamente que el trabajo externo (negativo) asociado con la radiación tiene su origen en una disminución de la energía en reposo del sistema original.

Examinando la situación de la figura 16*b* en un tiempo después de que la radiación ha sido emitida pero antes de que haya sido absorbida por el entorno, hallamos que la ecuación 35 nos conduce a otra conclusión. Para que la energía se conserve en ese tiempo intermedio, debemos asignar a la radiación una masa $\Delta m = \Delta E_0/c^2$. Entonces la ecuación 35 afirma que *la energía tiene masa.*

Por lo tanto concluimos que la conservación de la energía es equivalente a la conservación de la masa. Como escribió Einstein: "La física prerrelativista contiene dos leyes de conservación de importancia fundamental, esto es, la ley conservativas de la energía y la ley de conservacíon de la masa; estas dos aparecen allí como completamente independientes entre sí; por la teoría de la relatividad se funden en *un solo* principio".

Podemos aplicar la ecuación 36 a otros sistemas aislados que consten de partículas y radiación. Consideremos a una estrella como el Sol como nuestro sistema. El Sol irradia una energía de $4 \times 10^{26}$ J cada segundo. Como lo hicimos en el caso de la aniquilación electrón-positrón, vemos a esta energía radiante como una disminución en la energía en reposo del sistema, y el cambio de masa correspondiente es

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{-4 \times 10^{26}\ \text{J}}{(3 \times 10^8\ \text{m/s})^2} = -4 \times 10^9\ \text{kg}$$

por cada segundo. Esta disminución de masa es bastante significativa según normas ordinarias, pero bastante pequeña comparada con la masa total del Sol ($2 \times 10^{30}$ kg). En un año, la masa del Sol disminuye en una fracción de tan sólo $6 \times 10^{-14}$.

Tracemos ahora la frontera del sistema alrededor de la supernova 1987 (Fig. 17), la primera en casi 400 años que fue visible a simple vista.* La supernova es una estrella que ha empleado su provisión de combustible termonuclear y explota de manera espectacular. En cuestión de unos 10 segundos, se cree que la supernova 1987 convirtió alrededor del 10% de su energía en reposo (aproximadamente equivalente a la masa de dos soles) en radiación y otras formas de energía. El cambio en energía en reposo correspondiente a dos masas solares sería

$$\Delta E_0 = \Delta mc^2 = -2(2 \times 10^{30}\ \text{kg})(3 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = -4 \times 10^{47}\ \text{J}.$$

La energía irradiada durante ese lapso de 10 segundos, que equivale a una potencia de $4 \times 10^{46}$ W, es ¡casi igual a la del total combinado de todas las demás estrellas y galaxias del resto del Universo visible!

**Problema muestra 8** Dos bolas de mastique de 35 g son arrojadas una contra otra, cada una a una velocidad de 1.7 m/s. Las bolas chocan de frente y quedan pegadas entre sí. ¿En cuánto difiere la masa resultante de las dos bolas combinadas de la suma de las masas de las dos bolas por separado?

**Solución** Tratemos a las dos bolas de mastique como un sistema aislado y apliquemos la ecuación 36. Existe un cambio

* Aunque los físicos están de acuerdo con los resultados de los cálculos relativistas, no existe un acuerdo universal sobre la interpretación de la ecuación 35. Véase "The Concept of Mass", por Lev B. Okun, *Physics Today*, junio de 1989, pág. 31, que resume los puntos de vista sustentados por muchos físicos y adoptados para su uso en este libro.

* Véase "The Great Supernova of 1987", por Stan Woosley y Tom Weaver, *Scientific American*, agosto de 1989, pág. 32.

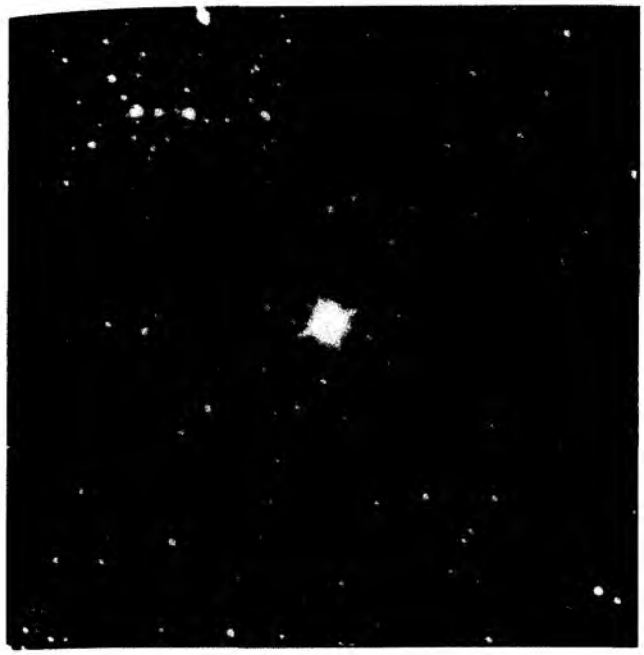


**Figura 17** La supernova 1987, en el centro, destaca con su brillo de las demás estrellas de esta fotografía.

(negativo) en la energía cinética de este sistema, con un valor final de cero después de la colisión y un valor total $K_i$ de las dos bolas antes de la colisión. No interviene aquí ningún trabajo externo, de manera que tenemos

$$\Delta K + \Delta E_0 = (0 - K_i) + \Delta E_0 = 0,$$

o sea

$$\Delta E_0 = K_i = 2(\tfrac{1}{2}mv^2) = (0.035 \text{ kg})(1.7 \text{ m/s})^2 = 0.101 \text{ J}.$$

Este aumento de la energía en reposo podría ser en forma de energía interna, dando por resultado, quizás, un incremento de la temperatura del sistema combinado. El incremento de masa correspondiente es

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{0.101 \text{ J}}{(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 1.1 \times 10^{-18} \text{ kg}.$$

Un incremento de masa tan diminuto está, desesperanzadamente, más allá de nuestra posibilidad de medirlo.

**Problema muestra 9** En un experimento llevado a cabo en 1989 en el Stanford Linear Collider, se produjeron partículas $Z^0$ cuando un haz de electrones chocó de frente con un haz de positrones de la misma energía cinética. Halle la energía cinética de los dos haces necesaria para producir el $Z^0$, que tiene una energía en reposo de 91.2 GeV (1 GeV = $10^9$ eV).

**Solución** Como en la colisión entre las bolas de mastique consideradas en el problema muestra 8, supongamos que no existe un trabajo externo (es decir, no hay radiación) para tomar en cuenta antes o después de la colisión. El cambio en la energía en reposo entre el estado inicial (un electrón y un positrón de 0.511 MeV de energía en reposo cada uno) y el estado final (el $Z^0$) es

$$\Delta E_0 = 91.2 \text{ GeV} - 2(0.511 \text{ MeV}) = 91.2 \text{ GeV},$$

siendo aquí bastante insignificante la energía de reposo total del electrón y el positrón (1.022 MeV = 0.001022 GeV). De la ecuación 36, obtenemos

$$\Delta K = -\Delta E_0 = -91.2 \text{ GeV} = K_f - K_i.$$

Si suponemos que el $Z^0$ se produjo en reposo, entonces $K_f = 0$ y las energías del positrón y del electrón deben ser, cada una, 0.5(91.2 GeV) = 45.6 GeV. Al contrario del problema muestra anterior, el cambio relativo en la energía (o en la masa) en reposo dentro del sistema es sustancial en este caso, siendo la masa final alrededor de 100,000 veces la masa inicial.* ■

## 8-8 CUANTIZACIÓN DE LA ENERGÍA *(Opcional)*

En la sección anterior hemos visto cómo la conservación de la energía es compatible con la relatividad; por lo tanto, conforme a ello, ampliamos nuestro concepto de energía para incluir la energía en reposo de un sistema. Aquí consideraremos la conservación de la energía en un caso límite diferente, en donde nos acercamos al *límite cuántico* de los sistemas en la escala atómica o nuclear.

Si damos al sistema bloque-resorte alguna energía inicial y lo soltamos, el sistema oscilará de un lado al otro. Si existe fricción, el movimiento desaparecerá gradualmente. La pérdida de energía del sistema debido al trabajo externo de la fuerza de fricción parece ser llana y continua.

Por otra parte, consideremos un oscilador consistente en una molécula diatómica: dos átomos acoplados por una fuerza que actúa a modo de resorte. Si le proporcionamos a este sistema alguna energía y permitimos que oscile, hallamos que emite radiación y termina por disipar tanta cantidad de energía como puede. Sin embargo, existe una diferencia importante entre este oscilador atómico y el sistema bloque-resorte: *en la escala atómica, los cambios de movimiento no ocurren continuamente sino en saltos discretos discontinuos*. La conservación de la energía se aplica en esta escala microscópica: la diferencia de energía entre los estados inicial y final es igual a la energía $\Delta E$ transportada por la radiación, o sea que

$$|\Delta E| = E_i - E_f. \tag{37}$$

Nótese que $E_i > E_f$ si el sistema entrega energía.

Las radiaciones emitidas en la escala atómica son discretas: sólo son posibles ciertos cambios de energía, al contrario de lo que sucede en la situación clásica donde el cambio de energía puede ser tratado como una variable continua. Como veremos en el capítulo 49 de la versión extendida de este texto, los saltos de la energía permitidos se relacionan con la frecuencia $\nu$ del oscilador de acuerdo con

$$E_i - E_f = h\nu, \tag{38}$$

* Véase "The Stanford Linear Collider", por John R. Rees, *Scientific American*, octubre de 1989, pág. 58.

donde $h$ es una constante llamada la *constante de Planck* y que tiene el valor

$$h = 6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$$
$$= 4.14 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}.$$

La figura 18 muestra un esquema del proceso en el que un sistema (quizás un átomo o un núcleo) salta desde una energía inicial $E_i$ hasta una energía final $E_f$, con la emisión de radiación de energía $h\,\upsilon$. Este haz discreto de energía recibe el nombre de *cuanto* (término que proviene del latín *quantum*), y los estados de energía se dice que se hallan *cuantizados*, lo que significa que tienen valores definidos y discretos.

La figura 19 muestra un ejemplo de algunos estados de energía cuantizados de un átomo de sodio. El átomo puede existir en cualquiera de estos estados de energía, pero no puede tener una energía intermedia entre estos valores permitidos. Esta estructura es responsable de las radiaciones discretas emitidas por los átomos; por ejemplo, el sodio emite luz de un color amarillo característico (como puede verse en las lámparas de vapor de sodio en las calles) cuando el átomo salta del estado de energía $E_1$ (llamado primer estado excitado) al estado $E_g$ (llamado estado base).

La figura 20 muestra la estructura "cuantizada" de un oscilador clásico, como el péndulo. Los estados pueden ser discretos, pero están tan próximos entre sí que los saltos entre estados individuales pueden ser considerados como un proceso continuo. Supongamos que la frecuencia del péndulo es de una oscilación por segundo ($\upsilon$ = 1/s). Según la ecuación 38 el "cuanto de energía" tiene el valor

$$h\upsilon = (6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(1\ \text{s}^{-1}) = 6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}.$$

Esta diminuta cantidad está muy lejos de nuestra posibilidad de determinar energías en objetos macroscópicos, como el péndulo, y, por lo tanto, esta estructura discreta no puede ser observada. En un péndulo, por ejemplo, corresponde a cambiar la amplitud de la oscilación por una distancia ¡del orden de $10^{-32}$ m, o alrededor de $1/10^{22}$ del diámetro de un átomo! Podemos prescindir perfectamente del comportamiento cuántico de los objetos ordinarios.

La conservación de la energía en la escala microscópica puede ser probada observando las radiaciones emitidas por átomos o núcleos que efectúan saltos discretos entre niveles, ya sea en la emisión de radiación (como en la Fig. 18) o en el proceso inverso en el que un átomo originalmente en el estado base (el estado de energía más bajo) *absorbe* un cuanto de radiación y da un salto hacia arriba al estado de mayor energía. Tales experimentos, que implican emisión y absorción, pueden llevarse a cabo con precisión extraordinaria, del orden de 1 parte en $10^{15}$ de la diferencia de energía entre los estados. Cada experimento de esta clase ha sido consistente con la conservación de energía en la escala microscópica. ■

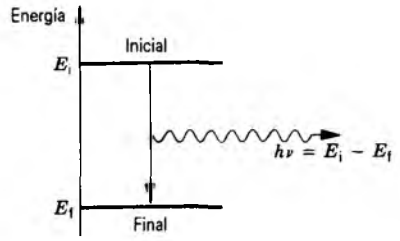



**Figura 18** Un sistema en el estado inicial emite radiación de energía $h\upsilon$ que lo conduce al estado final.

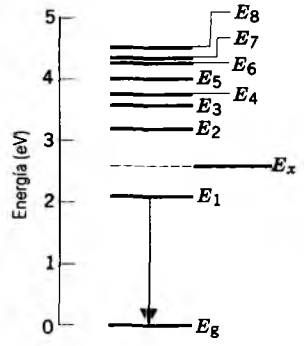



**Figura 19** Algunos de los niveles de energía de un átomo de sodio, correspondientes a los diversos estados cuánticos en los que puede existir el átomo. El estado inferior, indicado por $E_g$, se denomina estado base. El átomo emite una luz amarillo-sodio característica cuando cambia del estado de energía $E_1$ al estado base, como se indica con la flecha vertical. El átomo puede existir solamente en los estados indicados; no se permite, por ejemplo, que tenga la energía $E_x$ mostrada entre $E_2$ y $E_1$.

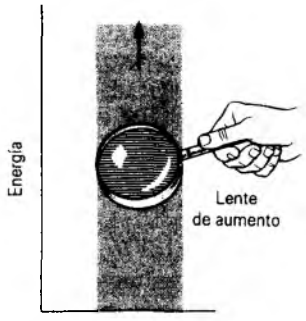



**Figura 20** Los niveles de energía de un péndulo también están cuantizados, pero los niveles están tan próximos entre sí, que no pueden distinguirse, ni siguiera bajo el escrutinio más escrupuloso. Ninguna lente de aumento podría nunca revelarnos la estructura cuantizada de un péndulo.

## PREGUNTAS

1. ¿Qué le pasa a la energía potencial que pierde un elevador al bajar desde la parte más alta de un edificio hasta que se detiene en la planta baja?

2. Las carreteras en la montaña rara vez suben en línea recta la ladera de la montaña, sino que la suben serpenteando gradualmente. Explique por qué.

3. Las bolsas de aire reducen notablemente el riesgo de daños personales en un accidente de automóvil. Explique cómo lo hacen, en términos de transferencia de energía.
4. El salto con pértiga (o garrocha) sufrió una transformación cuando la pértiga de madera fue sustituida por la pértiga de fibra de vidrio. Explique por qué.
5. Dejamos caer un objeto y observamos que rebota de una a una y media veces su altura original. ¿Qué conclusiones podemos extraer?
6. Una pelota que se deja caer a tierra no rebota más alto del punto donde se la soltó. Sin embargo, las salpicaduras desde el fondo de una cascada pueden en ocasiones elevarse hasta más arriba que la altura de ésta. ¿Por qué es así?
7. Un terremoto puede liberar la energía suficiente para devastar una ciudad. ¿Dónde reside esta energía un instante antes de que ocurra el terremoto?
8. La figura 21 muestra un tubo circular de vidrio asegurado a una pared vertical. El tubo está lleno de agua excepto por una burbuja de aire que temporalmente está en reposo en la parte baja del tubo. Explique el movimiento de la burbuja que sigue a continuación en términos de transferencia de energía. Desprecie las fuerzas tanto viscosa como de fricción, primero, y después explíquelo teniéndolas en cuenta completamente.

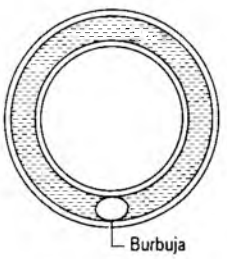



**Figura 21** Pregunta 8.

9. En el problema muestra 3 (véase la Fig. 8) concluimos que la velocidad del carrito de la montaña rusa en el fondo del carril no depende en absoluto del perfil del mismo. ¿Sería esto así en el caso de que hubiera fricción?
10. Teniendo en cuenta cómo la energía potencial de un sistema de dos moléculas idénticas se relaciona con la separación de sus centros, explique por qué un líquido que se reparte en una capa delgada tiene más energía potencial que la misma masa de líquido en forma esférica.
11. Un péndulo en oscilación llega finalmente al reposo. ¿Es ésta una violación de la ley de la conservación de la energía mecánica?
12. Un artículo científico ("The Energetic Cost of Moving About", por V. A. Tucker, *American Scientist*, julio-agosto de 1975, pág. 413) asegura que caminar y correr son dos formas de locomoción extremadamente ineficientes y que los pájaros, los peces y los ciclistas consiguen una eficiencia mucho mayor. ¿Se le ocurre a usted una explicación para esto?
13. Un automóvil se mueve a lo largo de una carretera. El conductor frena bruscamente y el automóvil patina hasta detenerse. ¿En qué forma aparece la energía cinética perdida por el automóvil?
14. En la pregunta anterior, supóngase que el conductor opera sobre los frenos de modo tal que no hay ni patinaje ni deslizamiento. En este caso, ¿en qué forma aparece la energía cinética perdida por el automóvil?
15. Un automóvil acelera desde el reposo hasta una velocidad $v$, en condiciones tales que no ocurre ningún deslizamiento en las ruedas. ¿De dónde proviene la energía mecánica del automóvil? En particular, ¿proviene acaso de la fuerza de fricción (estática) ejercida por la carretera en el automóvil?
16. En el caso de un trabajo efectuado contra la fricción, el cambio en la energía interna es independiente de la velocidad (o del marco de referencia inercial) del observador. Esto es, observadores diferentes asignarían la misma cantidad de energía mecánica transformada en energía interna debida a la fricción. ¿Cómo puede explicarse esto, considerando que tales observadores miden cantidades diferentes de trabajo total efectuado y cambios diferentes de la energía cinética en general?
17. Dé ejemplos físicos del equilibrio inestable, del equilibrio neutral, y del equilibrio estable.
18. En el artículo "Energy and the Automobile", que apareció en la edición de octubre de 1980 de *The Physics Teacher* (pág. 494), el autor (Gener Waring) afirma: "Es interesante observar que *toda* la energía de entrada del combustible finalmente se transforma en energía térmica y se esparce a lo largo del trayecto del automóvil". Analice los diversos mecanismos por los que esto podría suceder. Considérese, por ejemplo, la fricción de la carretera, la resistencia del aire, el frenado, la radio del automóvil, los faros, la batería, las pérdidas internas del motor y del tren de transmisión, el cláxon, y así sucesivamente. Supóngase una carretera recta y nivelada.
19. Reconozca en el Sol tantas fuentes de energía como pueda. ¿Se le ocurre alguna que no pueda derivarse del Sol?
20. Explique, usando ideas de trabajo y de energía, cómo puede un niño impulsar el columpio al máximo partiendo del reposo. (Véase "How to Make a Swing Go", por R. V. Hesheth, *Physics Education*, julio de 1975, pág. 367.)
21. Dos discos están unidos por un resorte rígido. ¿Puede usted oprimir el disco superior lo suficiente para que, cuando sea soltado, mediante el resorte levante al disco inferior separándolo de la superficie de la mesa? (véase la Fig. 22). ¿Puede conservarse la energía mecánica en tal caso?
22. Explique los términos "conservación de la energía" como se usan (*a*) en este capítulo y (*b*) en conexión con una "crisis de energía" (por ejemplo, apagando las luces). ¿Cómo difieren estos dos usos?
23. La potencia eléctrica de una pequeña población es proporcionada por una planta hidroeléctrica instalada en un río cercano. Si usted apaga un foco en este sistema de energía cerrado, la conservación de la energía requiere que una cantidad igual de energía, quizás en otra forma, aparezca



**Figura 22** Pregunta 21.

en alguna otra parte del sistema. ¿Dónde y en qué forma aparecería esta energía?

24. Se comprime un resorte atando sus extremos firmemente entre sí. Luego se sumerge en ácido y se disuelve. ¿Qué le sucede a la energía potencial almacenada?
25. La expresión $E_0 = mc^2$ nos dice que objetos perfectamente ordinarios como una moneda o un guijarro contienen una cantidad enorme de energía. ¿Por qué estos grandes almacenamientos de energía pasaron inadvertidos tanto tiempo?
26. "Las explosiones nucleares (peso por peso) liberan alrededor de un millón de veces más energía que las explosiones químicas, porque las explosiones nucleares están basadas en la relación de Einstein $E_0 = mc^2$. ¿Qué piensa usted de esta afirmación?
27. ¿Cómo pueden ser "equivalentes" la masa y la energía en vista del hecho de que son cantidades físicas totalmente diferentes, definidas de modo diferente y medidas en unidades diferentes?
28. Una esfera metálica caliente se enfría cuando está sobre la plataforma de una báscula. Si la báscula es lo suficientemente sensible, ¿indicaría ello un cambio de masa?
29. Existen cantidades cuantizadas en física clásica (es decir, en la física no cuántica)? De ser así, dé ejemplos.

## PROBLEMAS

*Sección 8-3 Sistemas conservativos unidimensionales*

1. Para inhabilitar proyectiles balísticos durante la fase de vuelo del primer encendido se ha desarrollado una "torreta electromagnética" para ser transportada por satélites terrestres de órbita baja. La torreta podría disparar un proyectil maniobrable de 2.38 kg a 10.0 km/s. La energía cinética transportada por el proyectil es suficiente para, con su impacto, inhabilitar un proyectil guiado aunque no lleve explosivos. (Un arma de esta clase es un arma de "energía cinética".) El proyectil es acelerado al instante del disparo por fuerzas electromagnéticas. Supóngase que, en su lugar, deseamos disparar el proyectil usando un resorte (un arma de "resorte"). ¿Cuál debe ser la constante de fuerza con objeto de alcanzar la velocidad deseada después de comprimir el resorte 1.47 m?
2. Se dice que pueden llegar a evaporarse hasta 900 kg de agua diarios de los árboles grandes. La evaporación tiene lugar en las hojas. Para llegar a ellas el agua debe subir desde las raíces del árbol. (*a*) Suponiendo que la elevación de agua desde la tierra sea de 9.20 m en promedio, ¿cuánta energía debe ser proporcionada? (*b*) ¿Cuál es la potencia promedio si tenemos en cuenta que la evaporación ocurre durante 12 h del día?
3. La cima del monte Everest está a 8850 m sobre el nivel del mar. (*a*) ¿Cuánta energía gastará un alpinista de 90 kg contra la gravedad al escalar hasta la cima desde el nivel del mar? (*b*) ¿Cuántos bars en Marte, a razón de 300 kcal por bar, abastecería una energía equivalente a ésta? Su respuesta debe sugerir que el trabajo efectuado contra la gravedad es una pequeñísima parte de la energía gastada al escalar una montaña.
4. Una persona de 220 lb salta desde una ventana hasta una red elástica como las usadas por los bomberos situada a 36 ft abajo. La red se estira 4.4 ft antes de llevar a la persona al reposo y lanzarla de nuevo al aire. ¿Cuál es la energía potencial de la red estirada si las fuerzas no conservativas no disipan energía alguna?
5. Un cubo de hielo muy pequeño cae desprendido desde el borde de una cubeta semiesférica sin fricción cuyo radio es de 23.6 cm; véase la figura 23. ¿A qué velocidad se mueve el cubo en el fondo de la cubeta?

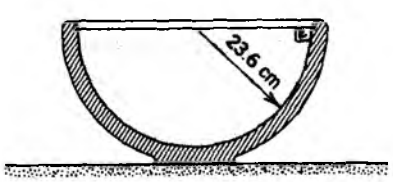



**Figura 23** Problema 5.

6. Un flujo de cenizas volcánicas se mueve a través de un terreno horizontal y encuentra una pendiente de 10° hacia arriba. Se observa que avanza 920 m por la pendiente antes de llegar al reposo. Las cenizas volcánicas contienen gases atrapados, de modo que la fuerza de fricción con el terreno es muy pequeña y puede despreciarse. ¿A qué velocidad se movían las cenizas en el momento antes de llegar a la pendiente?
7. Un proyectil con una masa de 2.40 kg se dispara desde un acantilado de 125 m de altura a una velocidad inicial de

150 m/s, dirigido a 41.0° sobre la horizontal. ¿Cuáles son (*a*) la energía cinética del proyectil en el instante inmediato después de ser disparado y (*b*) la energía potencial? (*c*) Halle la velocidad del proyectil en el momento antes de que llegue al suelo. ¿Cuáles respuestas dependen de la masa del proyectil? Desprecie el arrastre del aire.

**8.** Una bola de masa $m$ está unida al extremo de una varilla muy ligera de longitud $L$. El otro extremo de la varilla está pivotado de modo que la bola pueda moverse en círculo vertical. La varilla se lleva a la posición horizontal, como se muestra en la figura 24, y se empuja hacia abajo, de modo que la varilla oscile y alcance la posición vertical hacia arriba. ¿Qué velocidad inicial se le impartió a la bola?

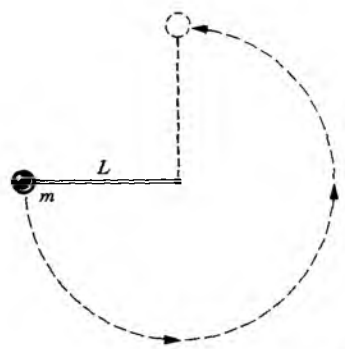



**Figura 24** Problemas 8 y 38.

**9.** Una bola de 112 g es arrojada desde una ventana a una velocidad inicial de 8.16 m/s y un ángulo de 34.0° sobre la horizontal. Usando la conservación de la energía, determine (*a*) la energía cinética de la bola en la parte más alta de su vuelo y (*b*) su velocidad cuando está a 2.87 m debajo de la ventana. Desprecie la fuerza de arrastre del aire.

**10.** El carrito (sin fricción) de una montaña rusa parte del punto $A$ en la figura 25 a la velocidad $v_0$. ¿Cuál será la velocidad del carrito (*a*) en el punto $B$, (*b*) en el punto $C$, y (*c*) en el punto $D$? Supóngase que el carrito puede ser considerado como una partícula y que siempre permanece sobre la vía.

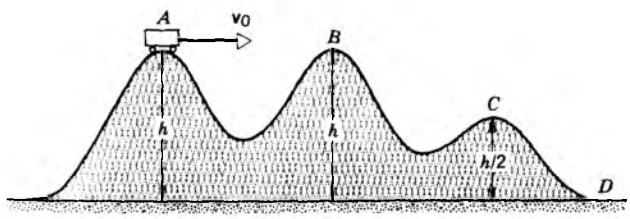



**Figura 25** Problema 10.

**11.** Un camión que ha perdido los frenos desciende por una pendiente a 80 mi/h. Por fortuna, existe una rampa de escape de emergencia al pie de la colina. La inclinación de la rampa es de 15°; véase la figura 26. ¿Cuál deberá ser la longitud mínima $L$ para que el camión llegue al reposo, al menos momentáneamente?

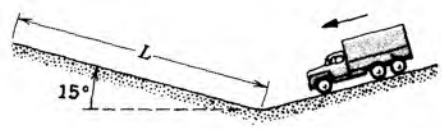



**Figura 26** Problema 11.

**12.** La figura 27 muestra la fuerza en newtons en función del estiramiento o de la compresión en centímetros del resorte de un rifle de corchos. El resorte se comprime en 5.50 cm y se usa para impulsar un corcho de 3.80 g de masa. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del corcho si es lanzado cuando el resorte pasa por su posición de relajamiento? (*b*) Supóngase ahora que el corcho se pega al resorte provocando que el resorte se extienda 1.50 cm más de su longitud cuando está relajado, antes de que ocurra la separación. ¿Cuál es la velocidad del corcho en este caso al momento de ser lanzado?

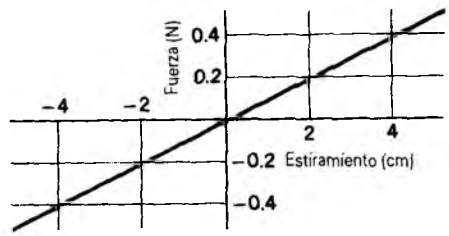



**Figura 27** Problema 12.

**13.** Una varilla delgada de longitud $L$ = 2.13 m y de masa despreciable, está pivotada en un extremo de modo que pueda girar en círculo vertical. La varilla se separa en un ángulo $\theta$ = 35.0° y luego se suelta, como se muestra en la figura 28. ¿A qué velocidad se mueve la bola de plomo que está en el extremo de la varilla en su punto más bajo?

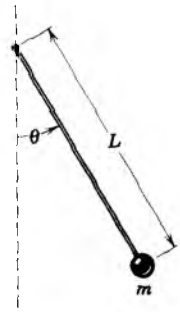



**Figura 28** Problema 13.

**14.** La figura 29 muestra una piedra de 7.94 kg que descansa sobre un resorte. El resorte se comprime 10.2 cm por la

piedra. (*a*) Calcule la constante de fuerza del resorte. (*b*) La piedra es empujada hacia abajo 28.6 cm más y luego se suelta. ¿Cuánta energía potencial hay almacenada en el resorte en el momento antes de que sea soltada la piedra? (*cx* ) ¿A qué altura se elevará la piedra sobre esta nueva posición (la más baja)?

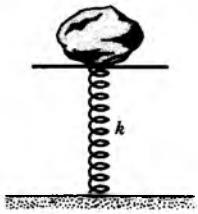



**Figura 29** Problema 14.



**Figura 30** Problema 18.

15. Por las cataratas del Niágara caen aproximadamente cada minuto $3.3 \times 10^5$ m$^3$ de agua por minuto, desde una altura de 50 m. (*a*) ¿Cuál sería la salida de potencia de una planta generadora de electricidad que pudiera convertir el 48% de la energía potencial del agua en energía eléctrica? (*b*) Si la compañía de luz vendiera esta energía a una tasa industrial de 1.2 cent/kW · h, ¿cuál sería su ingreso anual por esta fuente? Un metro cúbico (1 m$^3$) de agua tiene una masa de 1000 kg.
16. El área continental de los Estados Unidos es de alrededor de $8 \times 10^6$ km$^2$, y la elevación promedio de la superficie de su terreno es de unos 500 m. El promedio de caída pluvial es de 75 cm. Dos tercios de esa cantidad de lluvia retorna a la atmósfera por evaporación, pero el resto va a parar al océano. Si pudiera emplearse toda esta agua para generar electricidad en plantas hidroeléctricas de potencia, ¿qué promedio de potencia de salida podría producirse?
17. Un objeto cae desde una altura *h*, donde estaba en reposo. Determine la energía cinética y la energía potencial del objeto en función (*a*) del tiempo, y (*b*) de la altura. Trace una gráfica de las expresiones y demuestre que su suma (la energía total) es constante en cada caso.
18. En los Juegos Olímpicos de 1984, la deportista de Alemania Occidental Ulrike Meyfarth impuso un record olímpico en salto de altura para mujeres con un salto de 2.02 m; véase la Fig. 30. En igualdad de circunstancias, ¿a qué altura podría haber saltado en la Luna, donde la gravedad en su superficie es tan sólo de 1.67 m/s$^2$? (*Sugerencia*: La altura que "cuenta" es la distancia vertical a la que su centro de gravedad se elevó después de que sus pies abandonaron el suelo. Supóngase que, en el instante en que sus pies perdieron contacto, su centro de gravedad estaba a 110 cm sobre el suelo. Supóngase también que, cuando pasa sobre la barra, su centro de gravedad está a la misma altura que la barra.)
19. Un bloque de 1.93 se coloca contra un resorte comprimido sobre un plano inclinado de 27.0° sin fricción (véase la Fig. 31). El resorte, cuya constante de fuerza es de 20.8 N/cm, se comprime 18.7 cm, después de lo cual el bloque se suelta. ¿Qué tanto subirá el bloque antes de alcanzar el reposo? Mídase la posición final del bloque con respecto a su posición precisamente antes de ser soltado.

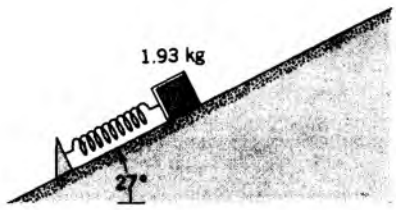



**Figura 31.** Problema 19.

20. Un resorte ideal sin masa puede comprimirse 2.33 cm por una fuerza de 268 N. Un bloque de masa $m$ = 3.18 kg es lanzado a partir del reposo desde lo alto de un plano inclinado como se muestra en la figura 32, siendo 32.0° la inclinación del plano. El bloque llega momentáneamente al reposo después de haber comprimido al resorte 5.48 cm (*a*) ¿Cuánto se movió el bloque hacia abajo del plano en ese momento? (*b*) ¿Cuál era la velocidad del bloque en el momento en que toca el resorte?

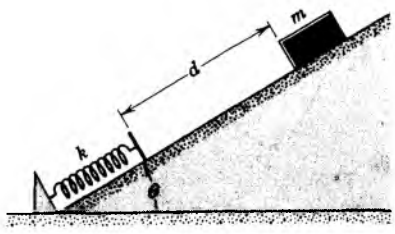



**Figura 32** Problemas 20 y 35.

21. El resorte de un rifle de resorte tiene una constante de fuerza de 4.15 lb/in. Cuando el rifle está inclinado a un ángulo de 36.0°, una bola de 2.80 oz es lanzada a una altura de 6.33 ft sobre la boca del cañón. (*a*) ¿Cuál era la

velocidad inicial de la bola? (*b*) ¿Cuánto debe el resorte haberse comprimido inicialmente?

**22.** Se hace un péndulo atando una piedra de 1.33 kg a un cordón de 3.82 m de longitud. La piedra se lanza perpendicularmente al cordón, separándose del suelo y formando el cordón un ángulo de 58.0° con la vertical. Se observa que, cuando pasa por su punto más bajo, (*a*) ¿Cuál era la velocidad de la piedra al proyectarla? (*b*) ¿Cuál es el ángulo más grande con la vertical que puede alcanzar el cordón durante el movimiento de la piedra? (*c*) Usando el punto más bajo de la oscilación como el cero de la energía potencial gravitatoria, calcule la energía mecánica total del sistema.

**23.** Se sujeta una cadena sobre una mesa sin fricción desde la que cuelga un cuarto de su longitud como se muestra en la figura 33. Si la cadena tiene una longitud $L$ y una masa $m$, ¿cuánto trabajo se requiere para jalar la parte que cuelga hasta que quede totalmente sobre la mesa?

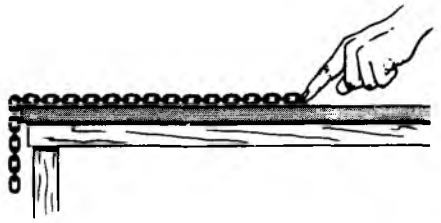


**Figura 33** Problema 23.

**24.** El extremo de un resorte vertical se fija al techo. Se coloca una pesa en el otro extremo y se baja lentamente hasta su posición de equilibrio. Demuestre que la pérdida de la energía potencial gravitatoria de la pesa es igual a la mitad de la ganancia de energía potencial del resorte. (¿Por qué estas dos cantidades no son iguales?)

**25.** Un bloque de 2.14 kg se deja caer desde una altura de 43.6 cm contra un resorte de constante de fuerza $k$ = 18.6 N/cm, como se muestra en la figura 34. Halle la distancia máxima de compresión del resorte.

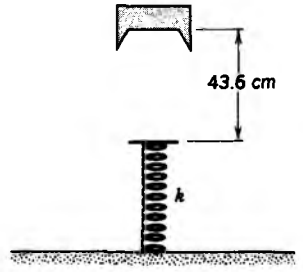



**Figura 34** Problema 25.

**26.** Dos niños están jugando a tratar de golpear una pequeña caja que está en el suelo con una canica que disparan con un rifle de resorte montado sobre una mesa. La caja blanco está a 2.20 m de distancia horizontal desde el borde de la mesa; véase la figura 35. Robertito comprime el resorte 1.10 cm, pero a la canica le faltan 27.0 cm para dar en el blanco. ¿Qué tanto tendrá que comprimir Juanito el resorte para darle al blanco?

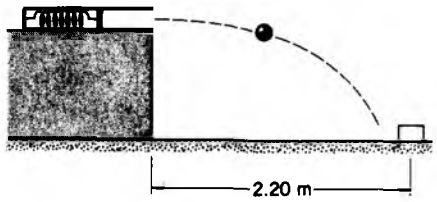



**Figura 35** Problema 26.

**27.** Un pequeño bloque de masa $m$ se desliza sin fricción a lo largo de una pista en rizo como se muestra en la figura 36. (*a*) El bloque se suelta desde el reposo en el punto $P$. ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre él en el punto $Q$? (*b*) ¿Desde qué altura sobre el fondo del rizo debería soltarse el bloque de modo que llegue a punto de perder el contacto con la pista en la parte superior del rizo?

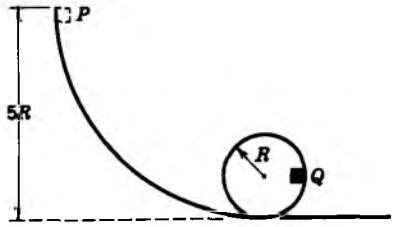



**Figura 36** Problema 27.

**28.** Tarzán, que pesa 180 lb, se lanza desde un risco, colgado del extremo de una liana; véase la figura 37. Desde lo alto del risco hasta el punto a donde él quiere llegar hay una distancia de 8.5 ft. La liana tiene una resistencia a la rotura de 250 lb. ¿Se romperá la liana?

**29.** La magnitud de la fuerza de atracción gravitatoria entre una partícula de masa $m_1$ y otra de masa $m_2$ está dada por

$$F(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2},$$

donde $G$ es una constante y $x$ es la distancia entre las partículas. (*a*) ¿Cuál es la función $U(x)$ de la energía potencial? Supóngase que $U(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. (*b*) ¿Cuánto trabajo se requiere para aumentar la separación de las partículas desde $x = x_1$ hasta $x = x_1 + d$?

**30.** Sobre un objeto de 1.18 kg actúa una fuerza neta conservativa dada exactamente por $F = -3x - 5x^2$, donde $F$ está en newtons si $x$ está en metros. (*a*) Halle la energía potencial del objeto en $x$ = 2.26 m. Suponga que $U(0) = 0$. (*b*) El objeto tiene una velocidad de 4.13 m/s en la dirección $x$ negativa cuando está en $x$ = 4.91 m. Halle la velocidad cuando pasa por $x$ = 1.77 m.

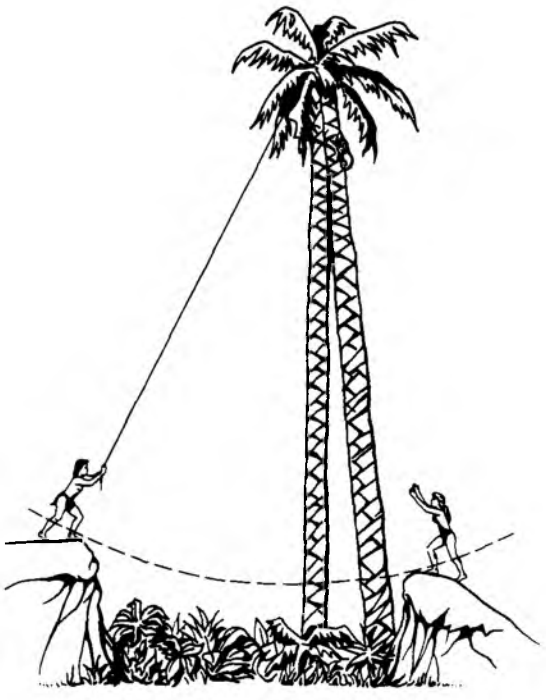


**Figura 37** Problema 28.

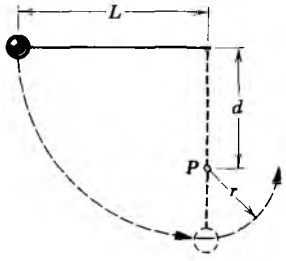



**Figura 38** Problemas 32 y 33.

**31.** Se halla que cierto resorte *no* se ajusta a la ley de Hooke. La fuerza (en newtons) que ejerce cuando es estirado una distancia $x$ (en metros) tiene la magnitud de $52.8x + 38.4x^2$ en dirección opuesta al alargamiento. (*a*) Calcule el trabajo necesario para alargar el resorte desde $x = 0.522$ m hasta $x = 1.34$ m. (*b*) Con un extremo del resorte fijo, una partícula de 2.17 kg de masa se amarra al otro extremo del resorte cuando se estira una cantidad de $x = 1.34$ m. Si la partícula se suelta entonces desde el reposo, calcule su velocidad en el instante en que el resorte ha regresado a la configuración en la que su extensión es de $x = 0.522$ m. (*c*) ¿Es la fuerza ejercida por el resorte conservativa o es no conservativa? Explique.

**32.** El cordón de la figura 38 tiene una longitud $L = 120$ cm, y la distancia $d$ a la clavija fija $P$ es de 75.0 cm. Cuando la bola se suelta desde el reposo en la posición mostrada, oscilará recorriendo el arco punteado. ¿A qué velocidad irá (*a*) cuando llegue al punto más bajo de su oscilación y (*b*) cuando llegue al punto más alto, una vez que el cordón haya topado con la clavija?

**33.** En la figura 38 demuestre que, si la pesa del péndulo ha de oscilar completamente alrededor de la clavija fija, entonces $d > 3L/5$. (*Sugerencia*: La pesa debe moverse en la parte superior de su oscilación; de otro modo, el cordón se vendrá abajo.)

**34.** Un bloque de masa $m$ sujeto al extremo de un cordón está enrollado alrededor de un círculo vertical de radio $R$. Halle la velocidad crítica por debajo de la cual el cordón se aflojará en el punto más elevado.

**35.** Un bloque de 3.22 kg comienza desde el reposo y se desliza una distancia $d$ hacia abajo por un plano inclinado a 28.0° sin fricción en donde choca contra un resorte de masa despreciable; véase la figura 32. El bloque se desliza otros 21.4 cm más antes de llegar al reposo momentáneamente comprimiendo el resorte, cuya constante de fuerza es de 427 N/m. (*a*) ¿Cuál es el valor de $d$? (*b*) La velocidad del bloque continúa creciendo durante un cierto intervalo después de que el bloque ha hecho contacto con el resorte. ¿A qué distancia adicional se deslizará el bloque antes de que alcance su velocidad máxima y empiece a disminuir su velocidad?

**36.** Un joven está sentado en la parte superior de un montículo de hielo (Fig. 39). Se da a sí mismo un pequeño impulso y comienza a deslizarse hacia abajo. Demuestre que abandona el hielo en el punto cuya altura es de $2R/3$ si el hielo carece de fricción. (*Sugerencia*: La fuerza normal se anula cuando el joven abandona el hielo.)




**Figura 39** Problema 36.

**37.** La partícula $m$ de la figura 40 se mueve en un círculo vertical de radio $R$ dentro de una pista. No hay fricción. Cuando $m$ está en el punto más bajo, su velocidad es $v_0$. (*a*) ¿Cuál es el valor mínimo $v_m$ de $v_0$ para el cual $m$ girará por completo alrededor del círculo sin perder contacto con la pista? (*b*) Supóngase que $v_0$ sea de $0.775\,v_m$. La partícula se moverá por la pista subiendo hasta un punto $P$ en el cual perderá el contacto con la pista y viajará a lo largo de una trayectoria representada aproximadamente por la línea punteada. Halle la posición angular $\theta$ del punto $P$.

**38.** Supóngase que la varilla de la figura 24 es reemplazada por un cordón muy elástico, hecho de hule, por ejemplo, y que el cordón no está estirado cuando tiene la longitud $L$ en el momento en que es soltada la bola. (*a*) Explique por qué usted esperaría que la bola alcanzase un punto situado a una distancia $L$ mayor por debajo del punto de suspensión. (*b*) Demuestre, usando las consideraciones dinámica y de energía, que si $\Delta L$ es pequeña en comparación con $L$, el cordón se estirará una cantidad $\Delta L = 3mg/k$, donde $k$ se supone que es la constante de fuerza del cordón. Nótese que cuanto más grande sea $k$, más pequeña será $\Delta L$, y que la aproximación es mejor cuando $\Delta L \ll L$. (*c*) Demuestre,

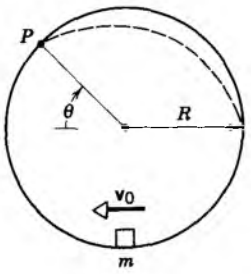



**Figura 40** Problema 37.

en estas circunstancias, que la velocidad de la bola en la parte inferior es $v = \sqrt{2g(L - 3mg/2k)}$, *menor* de lo que sería con un cordón inelástico ($k = \infty$). Dé una explicación física de este resultado usando consideraciones de energía.

### *Sección 8-4 Sistemas conservativos unidimensionales: la solución completa*

**39.** Una partícula se mueve a lo largo del eje $x$ a través de una región en la que su energía potencial $U(x)$ varía como en la figura 41. (*a*) Haga una gráfica cuantitativa de la fuerza $F(x)$ que actúa sobre la partícula, usando la misma escala del eje $x$ que en la figura 41. (*b*) La partícula tiene una energía mecánica (constante) $E$ de 4.0 J. Trace una gráfica de su energía cinética $K(x)$ directamente en la figura 41.

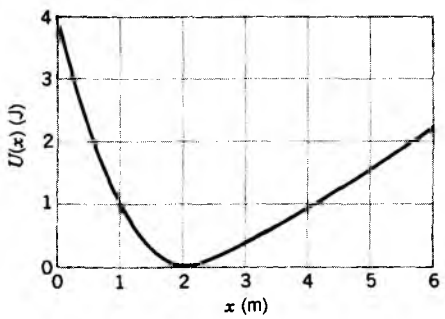



**Figura 41** Problema 39

**40.** Una partícula de 2.0 kg de masa se mueve a lo largo del eje $x$ a través de una región en la que su energía potencial $U(x)$ varía como se muestra en la figura 42. Cuando la partícula está en $x = 2.0$ m, su velocidad es de -2.0 m/s. (*a*) Calcule la fuerza que actúa sobre la partícula en esta posición. (*b*) Entre qué límites tiene lugar el movimiento? (*c*) ¿A qué velocidad se mueve cuando está en $x = 7.0$ m?

**41.** La figura 43*a* muestra un átomo de masa $m$ a una distancia $r$ desde un átomo en reposo de masa $M$, donde $m \ll M$. La figura 43*b* muestra la función $U(r)$ de la energía potencial para varias posiciones del átomo más ligero. Describa el movimiento de este átomo si (*a*) la energía mecánica total es mayor que cero, como en $E_1$, y (*b*) si es menor que cero, como en $E_2$. Para $E_1 = 1.0 \times 10^{-19}$ J y $r = 0.30$ nm, halle (*c*) la energía potencial, (*d*) la energía cinética, y (*e*) la fuerza (magnitud y dirección) que actúa sobre el átomo en movimiento.

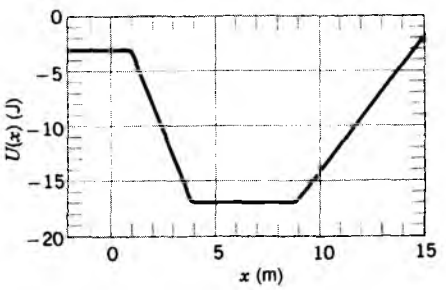



**Figura 42** Problema 40.

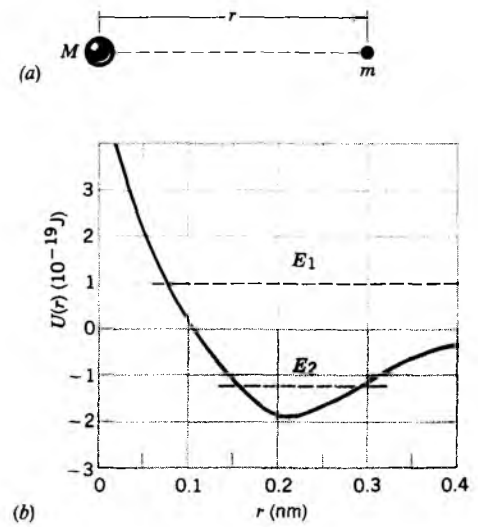



**Figura 43** Problema 41.

**42.** Una partícula alfa (núcleo de helio) dentro de un núcleo grande está enlazada por una energía potencial como la que se muestra en la figura 44. (*a*) Construya una función de $x$, que tiene esta forma general, con un valor mínimo $U_0$ en $x = 0$ y un valor máximo $U_1$ en $x = x_1$ y $x = -x_1$. (*b*) Determine la fuerza entre la partícula alfa y el núcleo en función de $x$. (*c*) Describa los movimientos posibles.

### *Sección 8-5 Sistemas conservativos bi y tridimensionales*

**43.** Demuestre que para la misma velocidad inicial $v_0$, la velocidad $v$ de un proyectil será la misma en todos los puntos que estén a la misma altura, sin importar el ángulo de proyección. Ignore la resistencia del aire.

**44.** La energía potencial que corresponde a una cierta fuerza bidimensional está dada por $U(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$. (*a*) Derive $F_x$ y $F_y$ y describa el vector fuerza en cada punto en función de sus coordenadas $x$ y $y$. (*b*) Derive $F_r$ y $F_\theta$ y describa el vector fuerza en cada punto en función de las coordenadas polares $r$ y $\theta$ del punto. (*c*) ¿Puede usted pensar en un modelo físico de una fuerza tal?

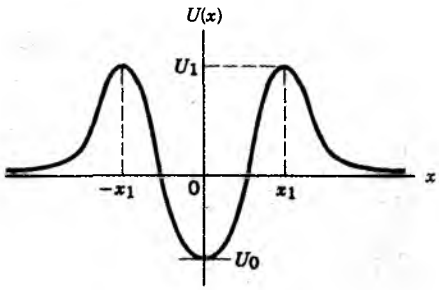



**Figura 44** Problema 42.

**45.** La llamada energía potencial de Yukawa

$$U(r) = -\frac{r_0}{r} U_0 e^{-r/r_0}$$

da una descripción bastante precisa de la interacción entre nucleones (es decir, neutrones y protones, los constituyentes del núcleo). La constante $r_0$ es alrededor de $1.5 \times 10^{-15}$ m y la constante $U_0$ es de alrededor de 50 MeV. (*a*) Halle la expresión correspondiente para la fuerza de atracción. (*b*) Para mostrar el corto alcance de esta fuerza, calcule la relación de la fuerza en $r = 2r_0$, $4r_0$, y $10\ r_0$ con la fuerza en $r = r_0$.

**46.** Integrando a lo largo de los mismos tres pasos del problema muestra 5, pruebe que la fuerza $\mathbf{F} = -k_1 y\mathbf{i} - k_2 x\mathbf{j}$ es no conservativa cuando $k_1 \neq k_2$.

### *Sección 8-6 Conservación de la energía en un sistema de partículas*

**47.** Un oso de 25.3 kg se desliza, desde el reposo, 12.2 m por el tronco de un pino, moviéndose a una velocidad de 5.56 m/s al llegar al fondo. (*a*) ¿Cuál es la energía potencial inicial del oso? (*b*) Halle la energía cinética del oso al llegar al fondo. (*c*) ¿Cuál es el cambio en la energía mecánica del oso, asociada con la acción de las fuerzas de fricción?

**48.** Cuando un taxi espacial (de 79,000 kg de masa) regresa a la Tierra desde una órbita, entra en la atmósfera a una velocidad de 18,000 mi/h, la cual se reduce gradualmente hasta la velocidad de aterrizaje de 190 nudos (= 220 mi/h). ¿Cuál es su energía cinética (*a*) al entrar a la atmósfera y (*b*) en el aterrizaje? Véase la figura 45. (*c*) ¿Qué le sucede a la energía "faltante"?

**49.** Un paracaidista de 68 kg cae a una velocidad terminal constante de 59 m/s. ¿A qué razón aumenta la energía interna del paracaidista y del aire que le rodea?

**50.** Un río desciende 15 m al pasar por unos rápidos. La velocidad del agua es de 3.2 m/s al entrar en los rápidos y 13 m/s cuando sale. ¿Qué porcentaje de la energía potencial perdida por el agua al atravesar los rápidos aparece como energía cinética del agua corriente abajo? ¿Qué le sucede al resto de la energía?

**51.** Durante un deslizamiento de rocas, una roca de 524 kg se cae desde el reposo por la ladera de una colina que tiene 488 m de longitud y 292 m de altura. La velocidad de la roca cuando llega al pie de la colina es de 62.6 m/s. ¿Cuánta energía mecánica pierde la roca durante el deslizamiento debido a la fricción?

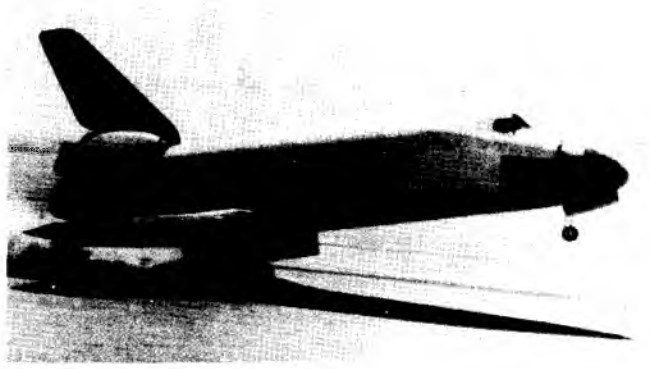


**Figura 45** Problema 48.

**52.** Un proyectil cuya masa es de 9.4 kg se dispara verticalmente hacia arriba. En su vuelo, se disipan 68 kJ de energía mecánica a causa del arrastre del aire. ¿Qué tanto más alto habría llegado si el arrastre del aire fuese despreciable (por ejemplo, haciendo aerodinámico al proyectil)?

**53.** Un bloque de 4.26 kg arranca hacia arriba en una pendiente a 33.0° a 7.81 m/s. ¿A qué distancia se deslizará si pierde 34.6 J de energía mecánica debido a la fricción?

**54.** Una piedra de peso $w$ es arrojada verticalmente hacia arriba en el aire a una velocidad inicial $v_0$. Supóngase que la fuerza de arrastre $f$ disipa una cantidad $fy$ de energía mecánica cuando la piedra recorre una distancia $y$. (*a*) Demuestre que la altura máxima alcanzada por la piedra es

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + f/w)}.$$

(*b*) Demuestre que la velocidad de la piedra al momento del impacto con el suelo es

$$v = v_0 \left(\frac{w - f}{w + f}\right)^{1/2}.$$

**55.** Un bloque de 1.34 kg que se desliza sobre una superficie horizontal choca con un resorte de 1.93 N/cm de constante de fuerza. El bloque comprime al resorte 4.16 cm desde la posición de relajamiento. La fricción entre el bloque y la superficie disipa 117 mJ de energía mecánica cuando el bloque es llevado al reposo. Halle la velocidad del bloque en el instante del choque con el resorte.

**56.** Un objeto pequeño de masa $m = 234$ g se desliza por un carril con extremos elevados y una parte central plana, como se muestra en la figura 46. La parte plana tiene una longitud $L = 2.16$ m. Las porciones curvas del carril carecen de fricción. Al atravesar la parte plana, el objeto pierde 688 mJ de energía mecánica, debido a la fricción. El objeto es soltado en el punto $A$, que tiene una altura $h = 1.05$ m sobre la parte plana del carril. ¿Dónde llega el objeto finalmente al reposo?

**57.** Dos picos nevados tienen elevaciones de 862 m y 741 m sobre el valle que hay entre ellos. Una pista de esquiar se

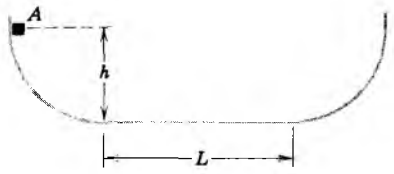



**Figura 46** Problema 56.

extiende desde la cima del pico más elevado hasta la cima del más bajo; véase la figura 47. (*a*) Un esquiador arranca desde el reposo en el pico más elevado. ¿A qué velocidad llegará al pico más bajo si empieza el descenso sin usar los bastones? Suponga circunstancias de hielo, de modo que no exista fricción. (*b*) Después de una nevada, una esquiadora de 54.4 kg hace el mismo trayecto también sin usar los bastones, pero esto solo lo hace cuando sube el pico más bajo. ¿En cuánto aumenta la energía interna de sus esquís y de la nieve sobre la que avanza?

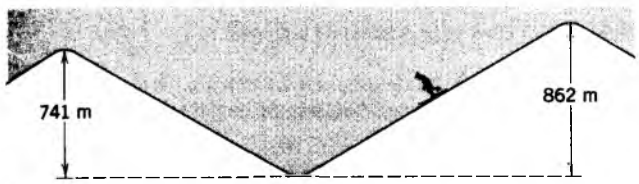



**Figura 47** Problema 57.

**58.** La magnitud de la fuerza de atracción entre el protón cargado positivamente y el electrón cargado negativamente del átomo de hidrógeno está dada por

$$F = k\frac{e^2}{r^2},$$

donde $e$ es la carga del electrón, $k$ es una constante, y $r$ es la separación entre el electrón y el protón. Supóngase que el protón está fijo. Imagínese que el electrón se mueve inicialmente en un círculo de radio $r_1$ con respecto al protón y que súbitamente salta a una órbita circular de radio menor $r_2$; véase la figura 48. (*a*) Calcule el cambio de energía cinética del electrón, usando la segunda ley de Newton. (*b*) Usando la relación entre la fuerza y la energía potencial, calcule el cambio de energía potencial del átomo. (*c*) ¿En cuánto ha cambiado la energía total del átomo en este proceso? (Esta energía se da a menudo en forma de radiación.)

**59.** El cable del elevador de 4000 lb que se muestra en la figura 49 se revienta cuando el elevador está en reposo en el primer piso estando el fondo a una distancia $d$ = 12.0 ft sobre un resorte amortiguador cuya constante de fuerza es $k$ = 10,000 lb/ft. Un dispositivo de seguridad abraza los rieles de guía extrayendo 1000 ft · lb de energía mecánica por cada 1.00 ft que se mueve el elevador. (*a*) Halle la velocidad del elevador justo antes de que choque contra el resorte. (*b*) Halle la distancia en que se comprime el resorte. (*c*) Halle la distancia en que el elevador rebotará dentro del tiro. (*d*) Calcule aproximadamente la distancia total que recorrerá el elevador antes de llegar al reposo. ¿Por qué no es exacta esta respuesta?

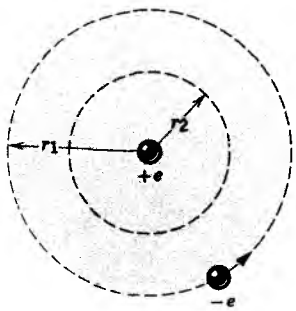



**Figura 48** Problema 58.

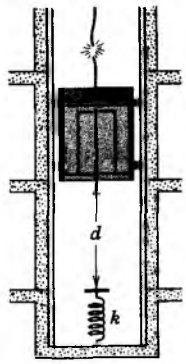



**Figura 49** Problema 59.

**60.** Cuando un automóvil de 1700 kg se mueve a una velocidad constante de 15 m/s, el motor proporciona 16 kW de potencia para vencer la fricción, la resistencia del viento, etc. (*a*) ¿Cuál es la fuerza retardante efectiva asociada con todas la fuerzas de fricción combinadas? (*b*) ¿Qué potencia debe proporcionar el motor si el automóvil va a subir una pendiente del 8.0% (8.0 m verticalmente por cada 100 m horizontalmente) a razón de 15 m/s? (*c*) ¿Qué pendiente, expresada en porcentaje, bajaría el automóvil a 15 m/s?

### *Sección 8-7 Masa y energía*

**61.** (*a*) ¿Cuánta energía en joules es equivalente a una masa de 120 g? (*b*) ¿Durante cuántos años proporcionaría ésta las necesidades de energía de un hogar unifamiliar que consuma energía a razón de 1.30 kW en promedio?

**62.** La magnitud $M$ de un terremoto en la escala de Richter se relaciona con la energía liberada $E$ en joules según la ecuación

$$\log E = 1.44M + 5.24.$$

(*a*) El terremoto de 1989 en el área de San Francisco (véase la Fig. 50) fue de una magnitud de 7.1. ¿Cuánta energía



**Figura 50** Problema 62.

fue liberada? (*b*) ¿Cuál fue la reducción de masa equivalente a esta liberación de energía?

**63.** Una planta nuclear de potencia situada en Oregon abastece 1030 MW de potencia útil uniformemente durante un año. Además, se descargan 2100 MW de potencia en forma de energía térmica al río Columbia. Calcule el cambio de masa del combustible nuclear después de 1 año de operación.

**64.** Los Estados Unidos de Norteamérica generaron alrededor de $2.31 \times 10^{12}$ kW · h de energía eléctrica en 1983. Supóngase que la energía se produjo en plantas nucleares. Halle la reducción de masa del combustible que acompañaría a la producción de esta cantidad de energía.

**65.** Una tableta de aspirina tiene una masa de 320 mg. ¿Durante cuántas millas abastecería de potencia a un automóvil la energía equivalente a esta masa, en forma de gasolina? Supóngase un consumo de 30.0 mi/gal y un calor de combustión de la gasolina de 130 MJ/gal. Exprese su respuesta en términos de la circunferencia ecuatorial de la Tierra.

**66.** Una nave espacial está propulsada por la aniquilación de materia-antimateria. ¿Cuánta materia y antimateria debe aniquilarse para acelerar a una nave espacial de 1820 ton desde el reposo hasta un décimo de la velocidad de la luz? Use la fórmula no relativista de la energía cinética.

**67.** El Sol irradia energía a razón de $4 \times 10^{26}$ W. ¿Cuántas "toneladas de luz solar" intercepta la Tierra en 1 día?

**68.** La *energía de amarre* del núcleo de un átomo es la diferencia entre el total de las energías de reposo de sus protones y neutrones constituyentes y la energía de reposo del propio núcleo. El núcleo de un átomo de oro contiene 79 protones y 118 neutrones y tiene una masa de 196.9232 u. Calcule la energía de amarre del núcleo. (Un protón tiene una masa de 1.00728 u, un neutrón una masa de 1.00867 u; la energía de reposo de una unidad de masa atómica es de 931.5 MeV.)

### *Sección 8-8 Cuantización de la energía*

**69.** ¿En cuánto debe de cambiar la energía de un átomo para que emita luz de una frecuencia de $5.34 \times 10^{14}$ $s^{-1}$?

**70.** (*a*) Un átomo de hidrógeno tiene una energía de -3.4 eV. Si su energía cambia a -13.6 eV, ¿cuál es la frecuencia de la luz? (*b*) La luz es emitida o absorbida?

### *Proyectos para la computadora*

**71.** Supongamos que la fuerza que actúa sobre una partícula esté dada por $\mathbf{F} = 8xy^3\mathbf{i} + 12x^2y^2\mathbf{j}$. Esta fuerza es conservativa y la función de la energía potencial asociada a ella es $U = -4x^2y^3$. Usted puede usar esta función para demostrar alguna de las propiedades más importantes de una fuerza conservativa. Primero, la energía potencial de la partícula depende solamente de sus coordenadas. En una hoja de papel para gráficas trace un sistema de coordenadas, yendo $x$ y $y$ de -5 m a + 5 m en cada una. Use ahora un programa de computadora o una hoja de cálculo para generar valores de la energía potencial para todos los valores enteros de $x$ y $y$ (en metros) entre estos límites y escriba los valores en los lugares apropiados de su gráfica. Use la gráfica para responder a las siguientes preguntas: (*a*) ¿Qué trabajo efectúa la fuerza cuando la partícula se mueve desde $x = -5$ m, $y = -5$ m hasta el origen? (*b*) ¿Qué trabajo lleva a cabo la fuerza cuando la partícula se mueve desde el origen hasta $x = +5$ m, $y = +3$ m? (*c*) ¿Qué trabajo efectúa la fuerza cuando la partícula se mueve desde $x = -5$ m, $y = -5$ m hasta $x = +5$ m, $y = +3$ m? Su respuesta deberá ser la suma de las respuestas a las partes (*a*) y (*b*). (*d*) La partícula parte del origen con una energía cinética de 900 J y llega a $x = +5$ m, $y = +2$ m. Si ésta es la única fuerza que actúa sobre ella, ¿cuál es su energía cinética cuando llega al segundo punto? (*e*) La partícula parte del origen con una energía cinética de 900 J y llega a $x = +5$ m, $y = -2$ m. Si esta es la única fuerza que actúa sobre ella,

¿cuál es su energía cinética cuando llega al segundo punto? (*f*) La partícula parte del origen con una energía cinética de 600 J y se mueve a lo largo de la línea $x = -y$ hacia $x = +5$ m, $y = -5$ m. Se necesita otra fuerza para mantenerla en la trayectoria, pero supóngase que la segunda fuerza es siempre perpendicular a la trayectoria. ¿Dónde se detiene la partícula?

**72.** Un robot empuja una caja de 20 kg a velocidad constante a través de un piso desde $x = 0$ hasta $x = 5.0$ m. Debido a la condición variante de la superficie del piso, el robot debe empujar con una fuerza horizontal variable para hacer que la caja se mueva a velocidad constante. Se encuentra que una buena representación de esta fuerza variable es $F(x) = 0.30mg\sqrt{xe^{-0.20x}}$, donde $x$ está en metros y $F$ en newtons. Evalúe el trabajo efectuado por el robot entre $x = 0$ y $x = 5$ m.

El trabajo efectuado está dado por $W = \int_0^5 F\,dx$. La integral no puede evaluarse analíticamente pero puede estimarse numéricamente por medio de una computadora. Divida la región de integración en $N$ intervalos, cada uno de anchura $\Delta x$, y haga que $F_i$ sea el valor de la fuerza en el centro del intervalo $i$. Entonces $\int_0^5 F\,dx \approx \Delta x \sum_{i=1}^{N} F_i$. Cuanto más pequeña sea $\Delta x$ mejor será la estimación, pero no podemos hacer que sea tan pequeña que su significado se pierda al evaluar la suma. (Podemos usar la regla de Simpson, la cual da una estimación mejor. Véase un texto de cálculo para los detalles.)

Escriba un programa de computadora o diseñe una hoja de cálculo para calcular el trabajo efectuado por la fuerza. Usted debe poder alimentar valores de $x_0$, $x_f$, y $N$. La suma puede ser manejada como un rizo. Cada vez que completemos una vuelta, se evalúa la fuerza en el centro de un intervalo y se añade a la corrida. En la primera corrida haga que $N = 20$, luego complete varias corridas más, duplicando a $N$ cada vez. Deténgase cuando dos resultados sucesivos concuerden en 3 cifras significativas.

**73.** La fuerza conservativa **F**, con componentes $F_x = y(1 - x)e^{-x}$, $F_y = xe^{-x}$, y $F_z = 0$, actúa sobre una partícula. (*a*) Supóngase que la partícula se mueve desde el origen a lo largo del eje $x$ hasta $x = 2.0$ m y luego a lo largo de una línea paralela al eje $y$ hasta $x = 2.0$ m, $y = 2.0$ m. El trabajo efectuado por la fuerza puede ser calculado analíticamente con facilidad. Hágalo. Supóngase ahora que el objeto se mueve desde el origen a lo largo del eje $y$ hasta $y = 2.0$ m y luego a lo largo de una línea paralela al eje $x$ hasta $x = 2.0$ m, $y = 2.0$ m. Una vez más, calcule el trabajo efectuado, pero esta vez use una integración numérica. Vea en el problema anterior los detalles. Por último, use un programa de integración numérica para calcular el trabajo efectuado cuando el objeto se mueve a lo largo de la línea $x = y$ desde el origen hasta $x = 2.0$ m, $y = 2.0$ m. Puesto que la fuerza es conservativa, deberá de obtener la misma respuesta (dentro de la precisión del cálculo) para cada trayectoria. (*b*) La fuerza **F**, con componentes $F_x = y^2(1 - x)e^{-x}$, $F_y = xe^{-x}$, y $F_z = 0$, no es conservativa. Calcule el trabajo que efectúa cuando la partícula se mueve desde el origen hasta $x = 2.0$ m, $y = 2.0$ m a lo largo de cada una de las trayectorias descritas en la parte (*a*). Nótese que no se obtendrá la misma respuesta para trayectorias diferentes.

# CAPÍTULO 9

# SISTEMAS DE PARTÍCULAS

*Hasta aquí hemos tratado los objetos como si fueran partículas puntuales que tienen masa pero no tamaño. Ésta no es en realidad una restricción grave, porque todos los puntos de un objeto en movimiento de traslación simple se mueven de manera idéntica, y no existe diferencia si tratamos al objeto como una partícula o como un cuerpo extenso. Sin embargo, esta restricción no es válida para muchos objetos en movimiento. Por ejemplo, cuando un objeto gira mientras se mueve, o cuando sus partes vibran en relación a otras, no sería válido tratar a todo el objeto como una sola partícula. Aun en estos casos más complicados, existe un punto del objeto cuyo movimiento bajo la influencia de fuerzas externas puede ser analizado como el de una partícula simple. Este punto se llama* centro de masa. *En este capítulo describiremos cómo hallar el centro de masa de los objetos y demostraremos que reglas simples (de nuevo, las leyes de Newton) para el movimiento del centro de masa de un sistema complejo nos conducen a la segunda de las grandes leyes de la conservación que encontraremos:* la conservación del ímpetu lineal.

## 9-1 SISTEMAS DE DOS PARTÍCULAS

En los capítulos 7 y 8 hemos empleado los conceptos de energía para estudiar el movimiento de un cuerpo sobre el que ejerce su acción la fuerza de un resorte. Veamos ahora un problema ligeramente más complicado: el movimiento unidimensional de dos cuerpos unidos por un resorte. Por simplicidad, supondremos por el momento que no actúa ninguna fuerza externa neta sobre los cuerpos, a excepción de la fuerza del resorte. Esto es, supondremos que se deslizan libremente sin fricción en una superficie horizontal llana. Como ejemplo práctico de tal sistema podríamos considerar el movimiento sobre un riel de aire de dos deslizadores unidos por un resorte.

Cuando el resorte se estira o se comprime desde su longitud de relajamiento, ejerce una fuerza sobre ambos cuerpos, los cuales podemos tratar individualmente como partículas. Las fuerzas sobre las dos partículas tienen magnitudes iguales. (Podemos pensar en el resorte simplemente como una representación física de las fuerzas que los dos cuerpos pudieran ejercer directamente uno sobre el otro como, por ejemplo, dos átomos de una molécula. En ese caso, la tercera ley de Newton requiere que las fuerzas sobre las dos partículas sean iguales y opuestas. La presencia del resorte, que se supone carente de masa, no cambia este requisito.)

No podemos analizar independientemente los movimientos de los dos cuerpos usando las leyes de Newton, porque el movimiento de uno depende del movimiento del otro. Por ejemplo, si un cuerpo tiene mucha más cantidad de masa que el otro, su desplazamiento es relativamente pequeño, y el desplazamiendo del cuerpo con menor masa es aproximadamente igual al cambio de longitud del resorte. Por otra parte, si los dos cuerpos tienen masas iguales, tendrán desplazamientos que son cada uno de ellos de magnitud igual a la mitad de la extensión del resorte.

La figura 1 ilustra un ejemplo del tipo de movimiento que deseamos analizar. En este caso especial, se le da al resorte (de constante de fuerza $k$) un alargamiento inicial, y los dos cuerpos se sueltan desde el reposo. Sea $d_i$ la extensión inicial del resorte, de modo que su energía inicial es $E_i = U_i + K_i = \frac{1}{2}kd_1^2 + 0$. En cualquier instante de tiempo en particular, cuando la extensión del resorte sea $d$, la energía es

$$E = U + K = \tfrac{1}{2}kd^2 + \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2, \qquad (1)$$

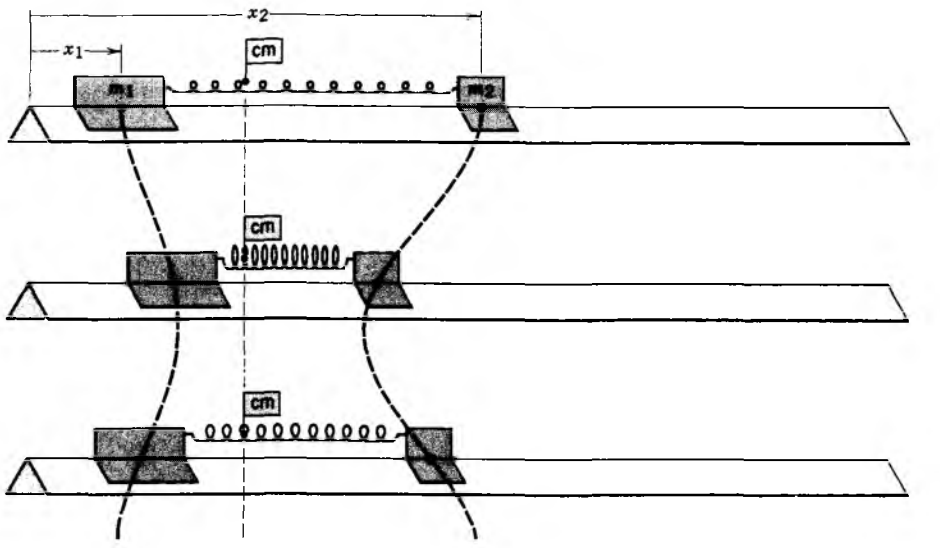



**Figura 1** Dos deslizadores unidos por un resorte estirado se sueltan desde el reposo en un riel de aire. El movimiento resultante no es sencillo, excepto para el punto marcado con la bandera, el cual permanece en reposo. Las instantáneas están separadas por intervalos de tiempo iguales. En el caso mostrado, $m_1 = 2m_2$.

que representa la energía potencial del resorte y la energía cinética de los dos cuerpos. La conservación de la energía requiere que la energía $E$, en cualquier momento sea igual a la energía inicial $E_i$, lo cual nos da

$$\tfrac{1}{2}kd_i^2 = \tfrac{1}{2}kd^2 + \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2. \tag{2}$$

Como lo muestra la figura 1, las posiciones de los dos cuerpos están relacionadas por

$$x_2 = x_1 + L + d, \tag{3}$$

donde $L$ es la longitud de relajamiento del resorte. Las ecuaciones 2 y 3 no son suficientes para resolver $x_1$ y $x_2$ en función del tiempo y, por lo tanto, no nos es posible completar la solución de este problema sin información adicional.

La información adicional que necesitamos proviene del análisis de un punto particular del sistema de la figura 1. Este punto, llamado *centro de masa* (cm) del sistema, está señalado por una bandera en la figura 1. En este caso especial, el centro de masa no se mueve en absoluto.

Veamos cómo el uso del centro de masa nos ayuda a completar la solución de este problema. La posición del centro de masa se define, para el caso especial de dos partículas en una dimensión, como

$$x_{cm} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2), \tag{4}$$

donde $x_1$ y $x_2$ son las coordenadas $x$ respectivas de las dos partículas. Aquí $M$ es la *masa total* del sistema:

$$M = m_1 + m_2.$$

El centro de masa de un sistema de dos cuerpos es un punto en el espacio definido por la ecuación 4 en una dimensión. No se requiere que sea necesariamente una parte de cualquiera de los cuerpos.

La velocidad del centro de masa, $v_{cm}$, se encuentra tomando la derivada respecto al tiempo de la ecuación 4:

$$\begin{aligned} v_{cm} &= \frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}(m_1x_1 + m_2x_2) \\ &= \frac{1}{M}\left(m_1\frac{dx_1}{dt} + m_2\frac{dx_2}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{M}(m_1v_1 + m_2v_2), \end{aligned} \tag{5}$$

que es la velocidad de la bandera en la figura 1. La aceleración del centro de masa se halla diferenciando nuevamente. El resultado es

$$\begin{aligned} a_{cm} &= \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}(m_1v_1 + m_2v_2) \\ &= \frac{1}{M}\left(m_1\frac{dv_1}{dt} + m_2\frac{dv_2}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{M}(m_1a_1 + m_2a_2), \end{aligned} \tag{6}$$

donde $a_1$ y $a_2$ son las aceleraciones respectivas de $m_1$ y de $m_2$.

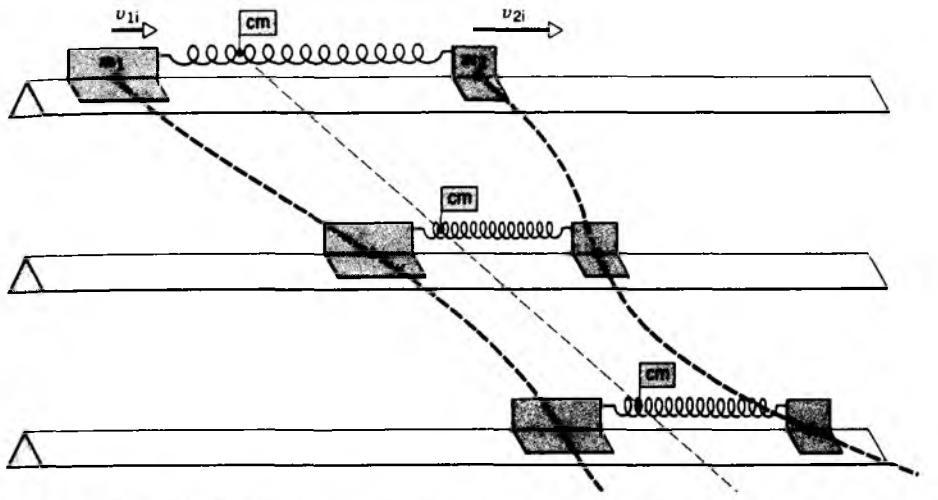



**Figura 2** A dos deslizadores unidos por un resorte estirado se les da velocidades iniciales arbitrarias. Los dos deslizadores se mueven en una forma compleja, mientras que el centro de masa, marcado con una bandera, se mueve a velocidad constante. Las instantáneas están separadas por intervalos de tiempo iguales.

Continuamos aplicando las leyes de Newton por separado a $m_1$ y $m_2$. Sea $\mathbf{F}_{12}$ la fuerza ejercida sobre $m_1$ por $m_2$, y $\mathbf{F}_{21}$ la fuerza ejercida sobre $m_2$ por $m_1$. La segunda ley de Newton aplicada por separado a $m_1$ y $m_2$ nos da $\mathbf{F}_{12} = m_1\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{F}_{21} = m_2\mathbf{a}_2$. (En nuestro ejemplo, es el resorte el que ejerce las fuerzas sobre $m_1$ y $m_2$. Sin embargo, no perdemos generalidad al suponer que los cuerpos ejercen fuerzas directas entre sí, en tanto consideremos que el resorte carece de masa.) La *tercera* ley de Newton requiere que $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Sustituyendo en la ecuación 6 nos da

$$a_{cm} = \frac{1}{M}(F_{12} + F_{21}) = 0.$$

En este caso especial, en el cual ninguna fuerza neta actúa sobre el sistema, el centro de masa no tiene aceleración y, por lo tanto, se mueve a velocidad constante (que es cero en la Fig. 1). Podríamos entonces completar la solución al combinar las ecuaciones 2 y 3, y usando las ecuaciones 4 y 5 para eliminar, ya sea a $x_1$ y a $v_1$, o a $x_2$ y a $v_2$. (Véase el problema 1.)

La figura 2 ilustra el caso ligeramente más general en el que se le da al resorte una extensión inicial y se les dan a los dos cuerpos velocidades iniciales $v_{1i}$ y $v_{2i}$. Aquí podemos ver que el centro de masa se mueve a velocidad constante, aun cuando el movimiento del sistema como un todo es bastante complejo.

Las ecuaciones 4 a 6 son aun más generales de lo que nos sugiere este experimento particular. Con objeto de adoptar la situación más general, supongamos ahora que existe una fuerza externa $\mathbf{F}_{ext,1}$ sobre $m_1$ en adición a la fuerza interna $\mathbf{F}_{12}$ sobre $m_1$ causada por $m_2$. (Por ejemplo, el riel de aire podría estar inclinado, de modo que actuaría la gravedad; o bien, el experimento podría ser llevado a cabo sobre una superficie con fricción.) La segunda ley de Newton aplicada a $m_1$ es

$$\mathbf{F}_{ext,1} + \mathbf{F}_{12} = m_1\mathbf{a}_1. \tag{7}$$

De manera similar, supongamos que actúen sobre $m_2$ tanto una fuerza externa $\mathbf{F}_{ext,2}$ como una fuerza interna $\mathbf{F}_{21}$, y tendremos

$$\mathbf{F}_{ext,2} + \mathbf{F}_{21} = m_2\mathbf{a}_2. \tag{8}$$

Al sumar las ecuaciones 7 y 8 nos da

$$\mathbf{F}_{ext,1} + \mathbf{F}_{ext,2} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2. \tag{9}$$

Los primeros dos términos de esta ecuación dan la fuerza externa neta $\Sigma\mathbf{F}_{ext}$ que actúa sobre el sistema (la cual en nuestra exposición anterior supusimos que era cero). La suma de los dos términos siguientes, $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}$, se anula por la tercera ley de Newton, la cual exige que $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. El lado derecho de la ecuación 9 puede expresarse como $M\mathbf{a}_{cm}$, usando la ecuación 6. Así, tenemos el resultado general

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm}. \tag{10}$$

Esta ecuación se parece nuevamente mucho a la segunda ley de Newton aplicada a una partícula de igual masa $M$ de nuestro sistema, moviéndose a la misma velocidad $v_{cm}$ en la posición $x_{cm}$.

Resumiendo nuestros resultados en el caso de un sistema unidimensional de dos partículas, vemos que todo el sistema puede considerarse para ciertos propósitos como si se moviera a una velocidad $v_{cm}$ y tuviera su masa total $M$ concentrada

$M$ concentrada en la posición $x_{cm}$. Más aún, en ausencia de una fuerza externa neta, $a_{cm} = 0$, y el centro de masa se mueve a velocidad constante. Desarrollaremos a continuación expresiones más generales para estos conceptos.

## 9-2 SISTEMAS DE MUCHAS PARTÍCULAS

En esta sección generalizaremos los resultados de la sección previa a sistemas tridimensionales que contengan más de dos partículas.

Consideremos un sistema que consista en $N$ partículas de masas $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_N$. La masa total es

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N = \sum m_n.$$

Cada partícula del sistema puede ser representada por su masa $m_n$ (donde $n = 1, 2, \ldots, N$), su posición en la coordenada $\mathbf{r}_n$ (cuyas componentes son $x_n$, $y_n$, y $z_n$), su velocidad $\mathbf{v}_n$ (cuyas componentes son $v_{nx}$, $v_{ny}$, y $v_{nz}$), y su aceleración $\mathbf{a}_n$.

Sobre cada partícula actúa una fuerza $\mathbf{F}_n$, la cual en general difiere de una partícula a otra. Esta fuerza puede surgir en parte de las otras $N - 1$ partículas y en parte de un agente externo.

El centro de masa del sistema puede definirse por una extensión lógica de la ecuación 4:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N)$$
$$= \frac{1}{M}\sum m_nx_n, \qquad (11a)$$
$$y_{cm} = \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_Ny_N)$$
$$= \frac{1}{M}\sum m_ny_n, \qquad (11b)$$
$$z_{cm} = \frac{1}{M}(m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots + m_Nz_N)$$
$$= \frac{1}{M}\sum m_nz_n. \qquad (11c)$$

En la notación vectorial más compacta, estas tres ecuaciones pueden escribirse como una sola expresión que dé la posición del centro de masa:

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_N\mathbf{r}_N)$$
$$= \frac{1}{M}\sum m_n\mathbf{r}_n. \qquad (12)$$

Usando la derivada de esta expresión, hallamos la velocidad del centro de masa:

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{d\mathbf{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \cdots + m_N\frac{d\mathbf{r}_N}{dt}\right)$$

o sea

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots + m_N\mathbf{v}_N)$$
$$= \frac{1}{M}\sum m_n\mathbf{v}_n. \qquad (13)$$

Diferenciando, una vez más, hallamos la aceleración del centro de masa:

$$\mathbf{a}_{cm} = \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \cdots + m_N\mathbf{a}_N)$$
$$= \frac{1}{M}\sum m_n\mathbf{a}_n. \qquad (14)$$

Podemos reescribir la ecuación 14 así:

$$M\mathbf{a}_{cm} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \cdots + m_N\mathbf{a}_N$$

o sea

$$M\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N, \qquad (15)$$

donde el último resultado se deduce de la aplicación de la segunda ley de Newton, $\mathbf{F}_n = m_n\mathbf{a}_n$, a cada partícula individual. La fuerza total que actúa sobre un sistema de partículas es, entonces, igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa. La ecuación 15 es precisamente la segunda ley de Newton para el sistema de $N$ partículas tratado como una sola partícula de masa $M$ ubicada en el centro de masa, que se mueve a velocidad $\mathbf{v}_{cm}$ y experimenta una aceleración $\mathbf{a}_{cm}$.

Es útil simplificar la ecuación 15 un poco más aún. Entre las fuerzas que actúan sobre las partículas están las *fuerzas internas*, que surgen de las interacciones con otras partículas que son parte del sistema, y las *fuerzas externas*, que se originan fuera del sistema que estemos estudiando. Cualquier partícula dada $m_n$ puede experimentar una fuerza ejercida sobre ella por la partícula $m_k$, la cual escribiremos como $\mathbf{F}_{nk}$. Esta fuerza determinada es una entre las muchas que integran a $\mathbf{F}_n$, la fuerza total sobre $m_n$. De manera similar, la fuerza total sobre la partícula $m_k$ incluye un término $\mathbf{F}_{kn}$ debido a la interacción con la partícula $m_n$. Según la tercera ley de Newton, $\mathbf{F}_{nk} = -\mathbf{F}_{kn}$, y entonces estas dos fuerzas particulares se cancelan al llevar a cabo la suma de todas las fuerzas en la ecuación 15. De hecho, todas esas fuerzas internas son parte de pares acción-reacción y se cancelan. (En el capítulo 5 advertíamos que las fuerzas de acción y de reacción deben aplicarse a partículas diferentes y, por lo tanto, no pueden oponerse entre sí. No estamos violando aquí este hecho, porque estamos aplicando la acción a una partícula y la reacción a otra. Aquí, la distinción consiste en que estamos sumando para obtener la fuerza neta sobre las *dos*

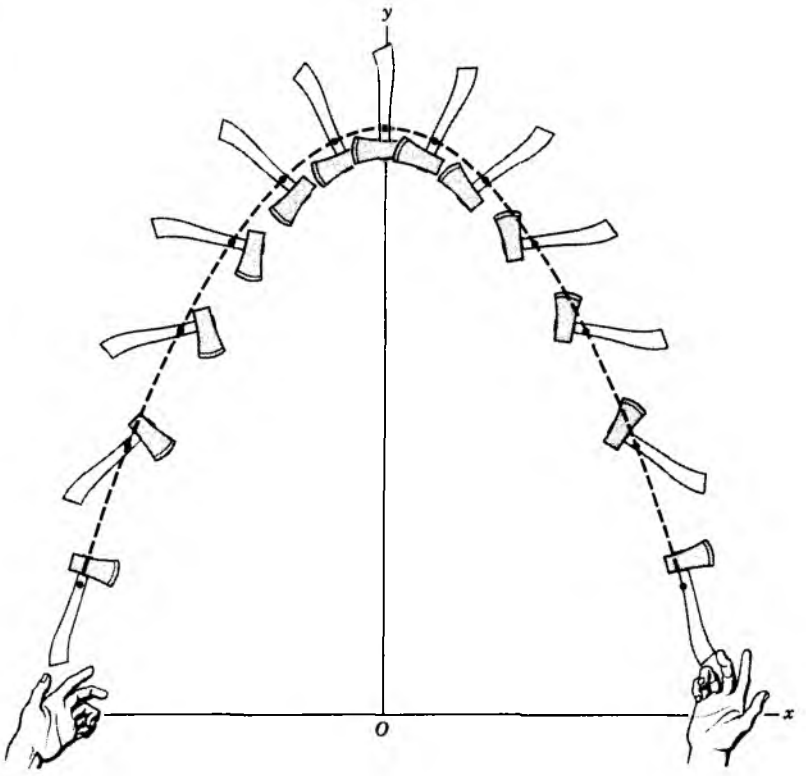



**Figura 3** Un hacha se lanza al aire entre dos personas, y gira al mismo tiempo que se traslada. La trayectoria parabólica del centro de masa (representado por el punto en el mango del hacha) está indicada por la línea puntuada. Una partícula lanzada al aire de la misma manera seguiría esa misma trayectoria. Ningún otro punto del hacha se mueve de forma tan simple.

partículas, en cuyo caso las componentes de acción y reacción, las cuales se aplican todavía a partículas diferentes, en realidad se cancelan.)

Todo lo que queda en la ecuación 15 es el total de todas las fuerzas *externas*, y la ecuación 15 se reduce a

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{cm}}, \tag{16}$$

que puede expresarse en función de sus componentes como sigue:

$$\sum F_{\text{ext},x} = Ma_{\text{cm},x}, \quad \sum F_{\text{ext},y} = Ma_{\text{cm},y},$$

y

$$\sum F_{\text{ext},z} = Ma_{\text{cm},z}.$$

Podemos resumir este importante resultado como sigue:

*El movimiento de traslación total de un sistema de partículas puede ser analizado usando las leyes de Newton como si toda la masa estuviera concentrada en el centro de masa y la fuerza externa total estuviera aplicada en ese punto.*

Se deduce inmediatamente un corolario en el caso $\Sigma\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$:

*Si la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es cero, entonces el centro de masa del sistema se mueve a velocidad constante.*

Esto explica la observación hecha en la sección 9-1 al estudiar el problema de las dos masas unidas por un resorte.

Éstos son resultados generales que se aplican tanto a series de partículas individuales como a partículas unidas entre sí por fuerzas internas, como en un objeto sólido. El objeto, en sí mismo, puede estar efectuando cualquier clase de movimiento complicado, pero el centro de masa se moverá conforme a la ecuación 16. La figura 3 muestra un objeto complejo que se mueve bajo la influencia de la gravedad. A la vez que se traslada, también gira. Su centro de masa, sin embargo, sigue una trayectoria parabólica simple. En lo que respecta a la fuerza externa (la gravedad), el sistema se comporta como si fuera una partícula de masa $M$ ubicada en el centro de masa. Un problema complicado se reduce, por tanto, a dos problemas relativamente sencillos: la trayectoria parabólica del centro de masa y una rotación respecto al centro de masa.

Como un ejemplo más, consideremos al sistema Tierra-Luna moviéndose bajo la gravedad del Sol (la fuerza externa). La figura 4 muestra que el centro de masa del sistema sigue una órbita estable alrededor del Sol; ésta es la trayectoria que seguiría una partícula de masa $m_{\text{Tierra}} + m_{\text{Luna}}$. La Tierra y la Luna giran también con respecto a sus centros de masa, dando por resultado una ligera oscilación de la Tierra con respecto a la trayectoria de la órbita estable. Usando los datos del apéndice C, nos será posible demostrar que el centro de masa del sistema Tierra-Luna está a unos 4600 km del centro de la Tierra y, por lo tanto, está en el interior de la Tierra.

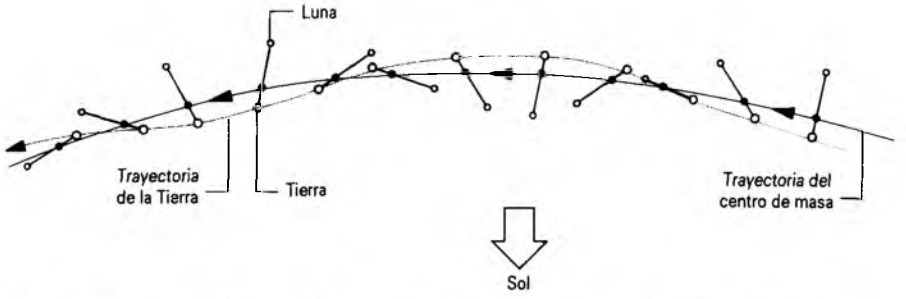



**Figura 4** El centro de masa del sistema Tierra-Luna sigue una órbita casi circular con respecto al Sol, mientras que la Tierra y la Luna giran alrededor de su centro de masa común, exactamente igual que el hacha de la figura 3. Este efecto, que causa un ligero "bamboleo" en la órbita de la Tierra, se halla representado de manera muy exagerada en la figura. El centro de masa del sistema Tierra-Luna se halla en realidad dentro de la Tierra, de modo que la Tierra siempre se traslapa con la trayectoria orbital del centro de masa.

La figura 5 muestra el movimiento de un misil balístico que se separa en tres vehículos de reentrada múltiple (MRV). En efecto, una explosión separa a los tres vehículos pero, como la explosión genera solamente fuerzas internas, no afecta al movimiento del centro de masa. El centro de masa continúa describiendo la trayectoria balística como si no hubiera ocurrido la explosión, hasta que uno o más de los vehículos experimente una fuerza externa, como la proveniente de la resistencia atmosférica al avance o el impacto en un blanco.

**Problema muestra 1** La figura 6*a* muestra un sistema de tres partículas, inicialmente en reposo, de masas $m_1$ = 4. 1 kg, $m_2$ = 8.2 kg, y $m_3$ = 4.1 kg. Fuerzas externas diferentes actúan sobre las partículas, de magnitudes $F_1$ = 6 N, $F_2$ = 12 N, y $F_3$ = 14 N. En la figura se muestran las direcciones de las fuerzas. ¿Dónde está el centro de masa de este sistema, y cuál es la aceleración del centro de masa?

**Solución** La posición del centro de masa está señalada en la figura por un punto. Como lo sugiere la figura 6*b*, tratamos a este punto como una partícula real, de una masa $M$ igual a la masa del sistema de 16.4 kg ($m_1 + m_2 + m_3$), y suponiendo que todas las fuerzas externas ejerzan su acción en ese punto. Hallamos el centro de masa partiendo de las ecuaciones 11*a* y 11*b*:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$$

$$= \frac{1}{16.4\text{ kg}}[(4.1\text{ kg})(-2\text{ cm}) + (8.2\text{ kg})(4\text{ cm}) + (4.1\text{ kg})(1\text{ cm})] = 1.8\text{ cm},$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3)$$

$$= \frac{1}{16.4\text{ kg}}[(4.1\text{ kg})(3\text{ cm}) + (8.2\text{ kg})(2\text{ cm}) + (4.1\text{ kg})(-2\text{ cm})] = 1.3\text{ cm}.$$

Nótese aquí el uso bastante aceptable de unidades mixtas.

La componente $x$ de la fuerza externa neta que actúa sobre el centro de masa es (véase la Fig. 6*b*):

$$F_{ext,x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$
$$= -6\text{ N} + (12\text{ N})(\cos 45°) + 14\text{ N} = 16.5\text{ N},$$

y la componente $y$ es

$$F_{ext,y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$
$$= 0 + (12\text{ N})(\text{sen } 45°) + 0 = 8.5\text{ N}.$$

La fuerza externa neta tiene, entonces, una magnitud de

$$F_{ext} = \sqrt{(F_{ext,x})^2 + (F_{ext,y})^2} = \sqrt{(16.5\text{ N})^2 + (8.5\text{ N})^2} = 18.6\text{ N}$$

y forma un ángulo con el eje $x$ dado por

$$\phi = \tan^{-1}\frac{F_{ext,y}}{F_{ext,x}} = \tan^{-1}\frac{8.5\text{ N}}{16.5\text{ N}} = 27°.$$

Ésta es también la dirección del vector de aceleración. Según la ecuación 16, la magnitud de la aceleración del centro de masa está dada por

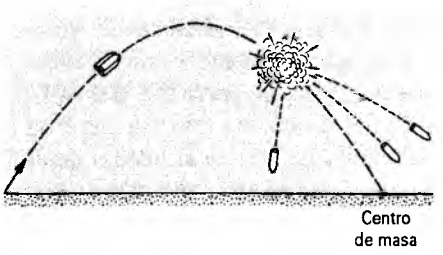



**Figura 5** Un misil que contiene tres cabezas explosivas sigue una trayectoria parabólica. Una explosión separa las tres cabezas, las cuales se trasladan de modo que su centro de masa describe la trayectoria parabólica original. Por simplicidad no se muestra el "vehículo" de las tres cabezas explosivas.

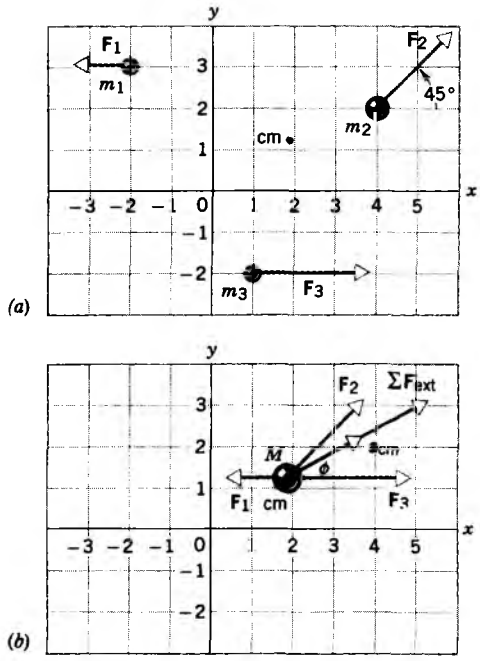



**Figura 6** Problema muestra 1. (*a*) Las fuerzas mostradas actúan sobre tres partículas, situadas en reposo en las posiciones mostradas. Se ha marcado el centro de masa del sistema. (*b*) El movimiento de traslación de todo el sistema puede ser representado por el movimiento de una partícula de masa total $M$ situada en el centro de masa y sobre la que actúan las tres fuerzas externas. Se muestran la fuerza y la aceleración del centro de masa resultantes.

$$a_{cm} = \frac{F_{ext}}{M} = \frac{18.6\ \text{N}}{16.4\ \text{kg}} = 1.1\ \text{m/s}^2.$$

Las tres partículas de la figura 6*a*, como también su centro de masa, se mueven con aceleraciones constantes (diferentes). Si las partículas parten del reposo, cada una se moverá, a velocidad siempre creciente, a lo largo de una línea recta en dirección de la fuerza que actúa sobre ellas.

**Problema muestra 2** En el sistema que se ilustra en la figura 7*a*, hallar la magnitud común de las aceleraciones de los dos bloques. Ya hemos resuelto este problema, como problema muestra 8 del capítulo 5, aplicando las leyes de Newton a cada bloque por separado. Resuelva el problema en este caso considerando el movimiento del centro de masa del sistema de dos partículas.

**Solución** La figura 7*b* muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema de dos partículas. Hallamos primero el centro de masa aplicando las ecuaciones 11*a* y 11*b* al sistema mostrado en la figura 7*b*:

$$x_{cm} = -\frac{m_1}{M}(L - y) \quad \text{y} \quad y_{cm} = \frac{m_2}{M} y,$$

donde $L$ es la longitud del cordón y $y$ es la coordenada vertical de $m_2$.

Diferenciando con respecto al tiempo, podemos hallar las componentes de la velocidad del centro de masa:

$$v_{cm,x} = \frac{m_1}{M} v \quad \text{y} \quad v_{cm,y} = \frac{m_2}{M} v,$$

donde $v$ (= $dy/dt$) es la magnitud común de las velocidades de los dos bloques. Diferenciando de nuevo, podemos hallar las componentes de la aceleración:

$$a_{cm,x} = \frac{m_1}{M} a \quad \text{y} \quad a_{cm,y} = \frac{m_2}{M} a,$$

donde $a$ (= $dv/dt$) es la magnitud común de las aceleraciones de los dos bloques.

A continuación, aplicamos las leyes de Newton. En la figura 7*b*, la fuerza externa ejercida por el soporte sin fricción del cordón de unión es descompuesto en sus componentes $x$ y $y$, cada una de magnitud $T$ (la tensión del cordón). Al usar la Ec. 16 nos da

$$\text{componente } x: \qquad T = Ma_{cm,x},$$

$$\text{componente } y: \qquad m_1 g - N + m_2 g - T = Ma_{cm,y}.$$

Sustituyendo para $a_{cm,x}$ y $a_{cm,y}$, podemos entonces eliminar a $T$ de estas dos ecuaciones y obtener, con $m_1 g = N$,

$$a = g\frac{m_2}{M},$$

de acuerdo con el resultado obtenido previamente en el capítulo 5.

Nótese que en este problema muestra debemos considerar la fuerza externa ejercida sobre el sistema por el soporte sin fricción, la cual no interviene al considerar a las fuerzas sobre los cuerpos 1 y 2 por separado.

Si el sistema se suelta desde el reposo cuando $m_2$ está en su posición más alta, el movimiento resultante del centro de masa se efectúa a lo largo de la línea recta que se muestra en la figura 7*c*. La dirección de $\mathbf{a}_{cm}$ puede ser hallada al sumar vectorialmente las cinco fuerzas que actúan sobre el sistema mostrado en la figura 7*b*.

## 9-3 CENTRO DE MASA DE OBJETOS SÓLIDOS

Sería sumamente engorroso hallar el centro de masa de un objeto sólido usando la ecuación 12 y haciendo la suma para cada átomo del sistema. En su lugar, dividiremos al objeto en elementos pequeños de masa $\delta m_n$. Cuando estos elementos se vuelven infinitesimalmente pequeños, las sumas de las ecuaciones 11 y 12 se transforman en integrales:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\lim_{\delta m \to 0}\sum x_n\,\delta m_n = \frac{1}{M}\int x\,dm, \quad (17a)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\lim_{\delta m \to 0}\sum y_n\,\delta m_n = \frac{1}{M}\int y\,dm, \quad (17b)$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\lim_{\delta m \to 0}\sum z_n\,\delta m_n = \frac{1}{M}\int z\,dm. \quad (17c)$$

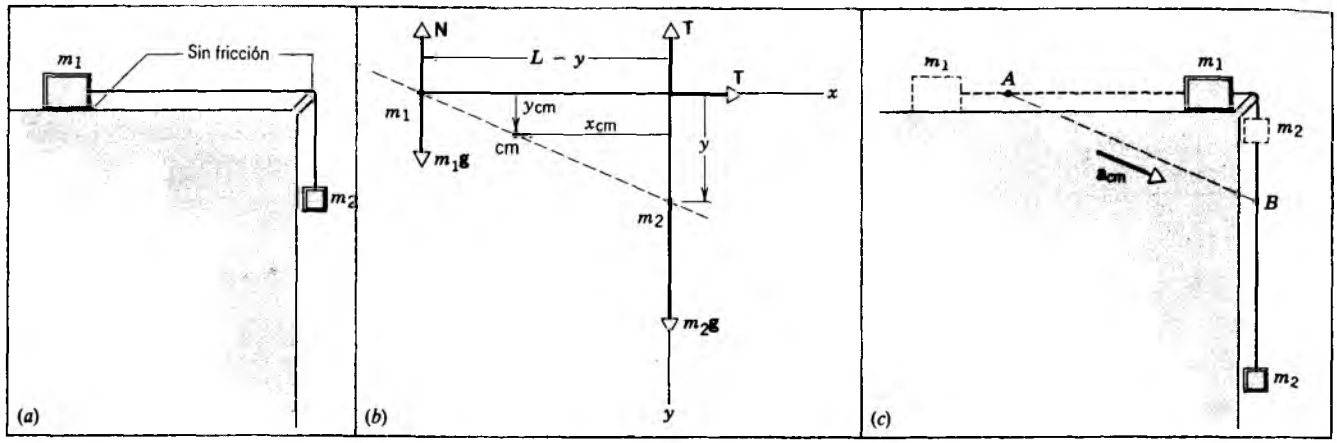



**Figura 7** Problema muestra 2. (*a*) Dos masas están unidas por un cordón de longitud $L$ que pasa sobre un soporte sin fricción. (*b*) Un diagrama parcial de cuerpo libre muestra las fuerzas *externas* que actúan en el sistema. El soporte sin fricción ejerce una fuerza externa sobre el cordón cuyas componentes son cada una igual a la tensión $T$ del cordón (el cual es una fuerza *interna* y, por lo tanto, no se muestra). (*c*) El centro de masa se mueve desde el punto $A$, cuando $m_2$ está en su posición más alta, hasta el punto $B$, cuando $m_1$ llega al soporte. Al caer $m_2$, $m_1$ se mueve hacia la derecha y, por lo tanto, el centro de masa debe moverse hacia la derecha. La fuerza horizontal $T$ es la única fuerza externa posible que puede dar por resultado un movimiento horizontal del centro de masa. La gravedad, por supuesto, proporciona la fuerza externa responsable del movimiento del centro de masa hacia abajo.

En la forma vectorial, estas ecuaciones pueden escribirse así:

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm. \qquad (18)$$

En muchos casos es posible usar argumentos basados en la geometría o en la simetría para simplificar el cálculo del centro de masa de objetos sólidos. Si un objeto tiene una simetría esférica, el centro de masa debe estar en el centro geométrico de la esfera. (No es necesario que su densidad sea constante; una bola de béisbol, por ejemplo, tiene una simetría esférica aunque esté compuesta por capas de materiales diferentes. Su centro de masa está en su centro geométrico. Cuando nos referimos a la simetría esférica, queremos decir que la densidad puede variar con $r$ pero debe tener la misma variación en cada dirección.) Si un sólido tiene una simetría cilíndrica (esto es, si su masa está distribuida simétricamente con respecto a un eje), entonces el centro de masa debe estar en el eje. Si su masa está distribuida simétricamente con respecto a un plano, entonces el centro de masa debe de estar en el plano.

A menudo encontramos objetos sólidos, irregulares que pueden ser divididos en varias partes. Podemos hallar el centro de masa de cada parte y luego, al tratar a cada parte como una partícula ubicada en su propio centro de masa, podemos hallar el centro de masa de la combinación.

Como ejemplo, consideremos la placa triangular que se muestra en la figura 8. Dividimos a la placa en un número grande de franjas delgadas paralelas a la base del triángulo, como en la figura 8*a*. El centro de masa de cada franja debe estar en su centro geométrico y, por lo tanto, el centro de masa de la placa debe estar en alguna parte a lo largo de la línea que une a los centros de las franjas. (Reemplacemos cada franja con una masa puntual ubicada en el centro de masa de la franja. La hilera de las masas puntuales forma, en efecto, un objeto unidimensional cuyo centro de masa estará con toda seguridad a lo largo de su longitud.) Repitiendo este procedimiento con franjas trazadas paralelamente a los otros dos lados (Figs. 8*b* y 8*c*), obtenemos dos líneas adicionales, cada una de las cuales debe

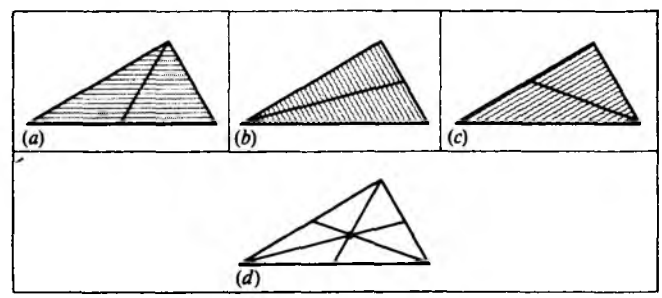



**Figura 8** En (*a*), (*b*) y (*c*), el triángulo está dividido en franjas delgadas, paralelas a cada uno de los tres lados. El centro de masa debe estar a lo largo de las líneas divisorias simétricas que se muestran. (*d*) El punto negro, el único punto común a las tres líneas, es la posición del centro de masa.

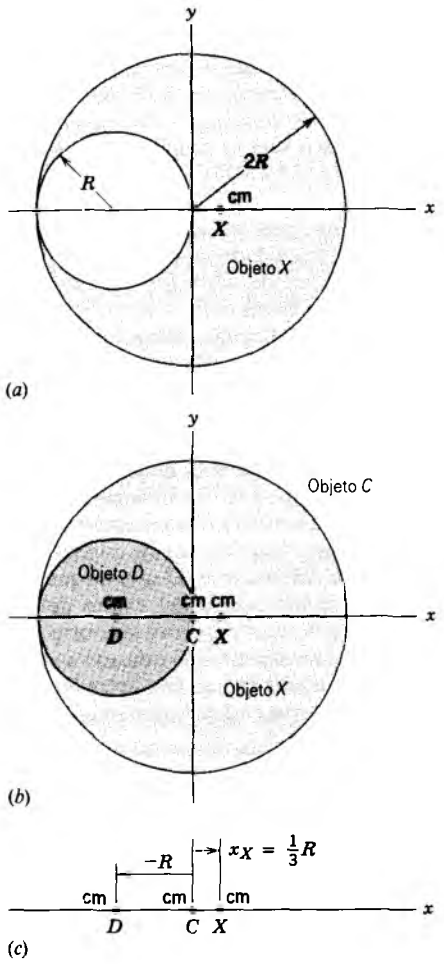



**Figura 9** Problema muestra 3. (*a*) El objeto *X* es un disco de metal de radio $2R$ con un orificio de radio $R$. (*b*) El objeto *D* es un disco de metal que llena el orificio del objeto *X*; su centro de masa está en $x_D = -R$. El objeto *C* es el disco compuesto hecho de los objetos *X* y *D*; su centro de masa está en el origen. (*c*) Los centros de masa de los tres objetos.

también incluir al centro de masa de la placa. Superponiendo las tres líneas, como en la figura 8*d*, hallamos que tienen solamente un punto en común, el cual debe ser, por lo tanto, el centro de masa.

**Problema muestra 3** La figura 9*a* muestra una placa circular de metal de radio $2R$ de la que se ha extraído un disco de radio $R$. Llamémosle el objeto *X*. Su centro de masa se marca con un punto sobre el eje $x$. Ubique este punto.

**Solución** La figura 9*b* muestra el objeto *X*, estando su orificio lleno con un disco de radio $R$, al cual llamaremos objeto *D*. Sea *C* el gran disco compuesto uniforme así formado. Por simetría, el centro de masa del objeto *C* está en el origen del sistema de coordenadas, como se muestra.

Al hallar el centro de masa de un objeto compuesto, suponemos que las masas de sus componentes están concentradas en

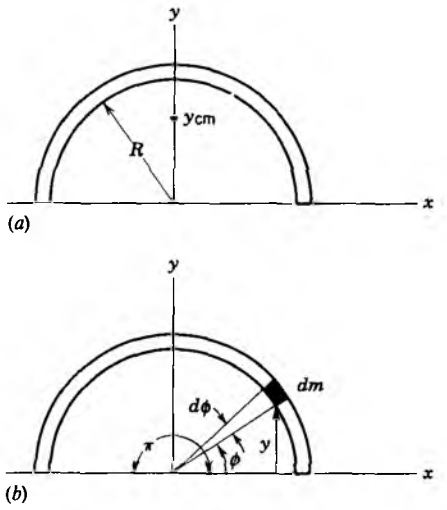



**Figura 10** Problema muestra 4. (*a*) Una tira delgada de metal doblada en forma de semicírculo. (*b*) Un elemento de la tira de masa *dm* ubicado en la coordenada $\phi$.

sus centros de masa individuales. Entonces el objeto *C* puede ser tratado como equivalente a dos masas puntuales, representando a los objetos *X* y *D*. La figura 9*c* muestra las posiciones de los centros de masa de estos tres objetos.

La posición del centro de masa del objeto *C* está dada por la ecuación 11*a* como:

$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X},$$

donde $x_D$ y $x_X$ son las posiciones de los centros de masa de los objetos *D* y *X*, respectivamente. Observando que $x_C = 0$ y resolviendo para $x_X$, obtenemos

$$x_X = -\frac{x_D m_D}{m_X}.$$

La razón $m_D/m_X$ debe de ser la misma que la razón de las áreas de los objetos *D* y *X* (suponiendo que la placa tenga densidad y espesor uniformes). Esto es,

$$\frac{m_D}{m_X} = \frac{\text{area of } D}{\text{area of } X} = \frac{\text{area of } D}{\text{area of } C - \text{area of } D}$$

$$= \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}.$$

Con $x_D = -R$, obtenemos:

$$x_X = \tfrac{1}{3}R.$$

**Problema muestra 4** Una tira delgada de material está doblada en forma de semicírculo de radio $R$ (Fig. 10). Halle su centro de masa.

**Solución** En este caso, el uso de una coordenada angular simplifica la integración que va a llevarse a cabo. Además, por la simetría del objeto, concluimos que el centro de masa debe estar sobre el eje $y$ (esto es, $x_{cm} = 0$). Por lo tanto, usaremos la ecuación 17*b* para hallar $y_{cm}$. Consideremos el pequeño elemen-

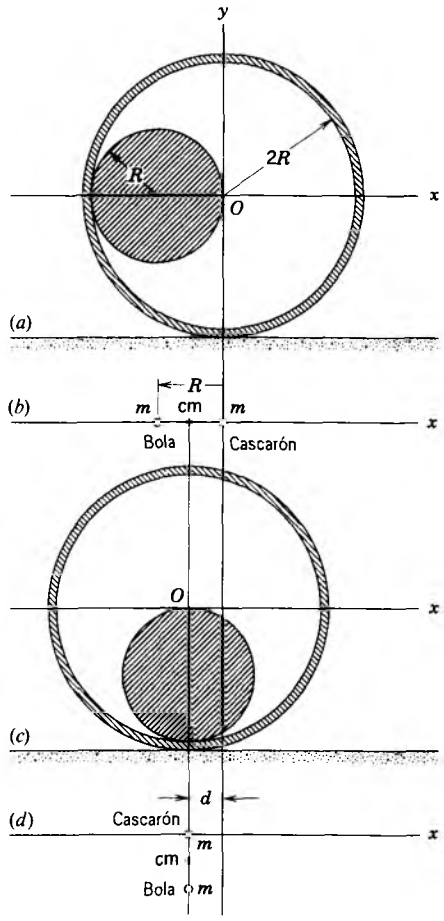



**Figura 11** Problema muestra 5. (*a*) Una bola de radio $R$ se deja caer desde esta posición inicial y es libre de rodar dentro de un cascarón esférico de radio $2R$. (*b*) Los centros de masa de la bola, el cascarón, y su combinación. (*c*) El estado final después de que la bola ha llegado al reposo. El cascarón se ha movido de tal forma que el centro de masa del sistema permanece en su lugar. (*d*) Los centros de masa de la bola, el cascarón, y su combinación.

to de masa $dm$ que se muestra en la figura 10*b*. Subtiende un ángulo $d\phi$, y puesto que la masa total $M$ de la tira subtiende un ángulo $\pi$ (un círculo completo subtendería un ángulo $2\pi$), la masa $dm$ debe de ser la misma fracción de $M$ como $d\phi$ lo es de $\pi$. Esto es, $dm/M = d\phi/\pi$, o $dm = (M/\pi)d\phi$. El elemento $dm$ está ubicado en la coordenada $y = R \operatorname{sen} \phi$. En este caso podemos escribir la ecuación 17*b* así:

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} (R \operatorname{sen}\phi)\frac{M}{\pi}\, d\phi$$

$$= \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi = \frac{2R}{\pi} = 0.637R.$$

El centro de masa está aproximadamente a dos tercios de un radio situado a lo largo del eje $y$. Obsérvese que, como ilustra este caso, el centro de masa no necesita estar dentro del volumen o del material de un objeto.

**Problema muestra 5** Una bola de masa $m$ y radio $R$ está situada dentro de un cascarón esférico de la misma masa $m$ y de radio interior $2R$. La combinación está en reposo sobre una mesa como se muestra en la figura 11*a*. La bola se suelta, oscila en vaivén adentro, y por último llega al reposo en el fondo, como en la figura 11*c*. ¿Cuál será el desplazamiento $d$ del cascarón durante el proceso?

**Solución** Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el sistema bola-cascarón son la fuerza de la gravedad hacia abajo y la fuerza normal ejercida verticalmente hacia arriba por la mesa. Ninguna de las fuerzas tiene una componente horizontal, de modo que $\Sigma F_{ext,x} = 0$. Según la ecuación 16 la componente $a_{cm,x}$ de la aceleración del centro de masa debe también ser cero. Entonces, la posición horizontal del centro de masa del sistema debe permanecer fija, y el cascarón debe moverse de tal modo que esto suceda así.

Podemos representar tanto a la bola como al cascarón por partículas aisladas de masa $m$, localizadas en sus respectivos centros. La figura 11*b* muestra el sistema antes de que la bola se deje caer, y la figura 11*d* después de que la bola ha llegado al reposo en el fondo del cascarón. Elegimos que nuestro origen coincida con la posición inicial del centro del cascarón. La figura 11*b* muestra que, con respecto a este origen, el centro de masa del sistema bola-cascarón está ubicado a una distancia $\frac{1}{2}R$ hacia la izquierda, a mitad del camino entre las dos partículas. La figura 11*d* muestra que el desplazamiento del cascarón está dado por

$$d = \tfrac{1}{2}R.$$

El cascarón debe recorrer hacia la izquierda esta distancia mientras la bola llega al reposo.

La bola llega al reposo por la fuerza de fricción que actúa entre ella y el cascarón. ¿Por qué no afecta esta fuerza de fricción a la ubicación final del centro de masa?

## 9-4 ÍMPETU LINEAL DE UNA PARTÍCULA

El ímpetu de una partícula aislada es un vector **p** definido como el producto de su masa $m$ por su velocidad **v**:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{19}$$

El ímpetu, por ser el producto de una cantidad escalar por una vectorial, es en sí mismo un vector. Puesto que es proporcional a **v**, el ímpetu **p** de una partícula depende del marco de referencia del observador; debemos siempre especificar este marco.

Newton, en sus famosos *Principia*, expresó la segunda ley del movimiento en función del ímpetu (al cual llamó "cantidad de movimiento"). Expresado en la terminología moderna la segunda ley de Newton se lee así:

*La razón de cambio del ímpetu de un cuerpo es igual a la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo y está en la dirección de esa fuerza.*

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
INSTITUTO DE
DOCUMENTACIÓN Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



En forma simbólica esto se convierte en

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{20}$$

Aquí $\Sigma\mathbf{F}$ representa la fuerza resultante que actúa sobre la partícula.

Para una partícula aislada de masa constante, esta forma de la segunda ley es equivalente a la forma $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ que hemos venido usando hasta ahora. Esto es, si $m$ es constante, entonces

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Las relaciones $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ para partículas aisladas son completamente equivalentes en la mecánica clásica.

Se halla una relación conveniente entre el ímpetu y la energía cinética al combinar $K = \frac{1}{2}mv^2$ y $p = mv$, lo cual da

$$K = \frac{p^2}{2m}. \tag{21}$$

**Ímpetu a velocidades elevadas** ***(Opcional)***

Con velocidades de la partícula cercanas a la velocidad de la luz (región en la que debe usarse la teoría de la relatividad en lugar de la mecánica newtoniana), la segunda ley de Newton en la forma $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ya no tiene validez. Sin embargo, sucede que la segunda ley de Newton en la forma $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ es todavía una ley válida si el ímpetu $\mathbf{p}$ de una partícula aislada se define no como $m\mathbf{v}$ sino como

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{22}$$

donde $c$ es la velocidad de la luz. A velocidades ordinarias ($v \ll c$), la ecuación 22 se reduce a la ecuación 19.

Para partículas relativistas, puede demostrarse que la relación básica entre el ímpetu y la energía cinética es

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2. \tag{23}$$

Derivaremos este resultado en el capítulo 21. La figura 12 muestra una comparación entre el resultado clásico (Ec. 21) y el relativista (Ec. 23) en partículas para un intervalo de velocidades. Obviamente, el resultado clásico no funciona para velocidades elevadas. Como lo esperábamos (véase el problema 27), la ecuación 23 se reduce a la ecuación 21 para velocidades ordinarias.

Independientemente de la forma en que escribamos la energía cinética, ésta tiene dimensiones de la masa por la velocidad al cuadrado, que es lo mismo que el ímpetu multiplicado por la velocidad. Por lo tanto, podemos escribir, usando nuestra notación de la sección 1-7 para indicar dimensiones,

$$[p] = \frac{[K]}{[v]}.$$

A menudo resulta conveniente expresar el ímpetu en unidades de energía divididas por la velocidad y, al trabajar con partículas, son elecciones convenientes las expresiones eV/$c$, MeV/$c$, etc. Esto nos permite expresar la cantidad $pc$ en unidades de energía tales como MeV, lo cual es mucho más conveniente al trabajar con expresiones como la ecuación 23. Para un electrón con un ímpetu dado de 1.5 MeV/$c$, por ejemplo, el término $pc$ de la ecuación 23 es de 1.5 MeV y puede calcularse fácilmente que la energía cinética del electrón es, según esa ecuación, 1.1 MeV.

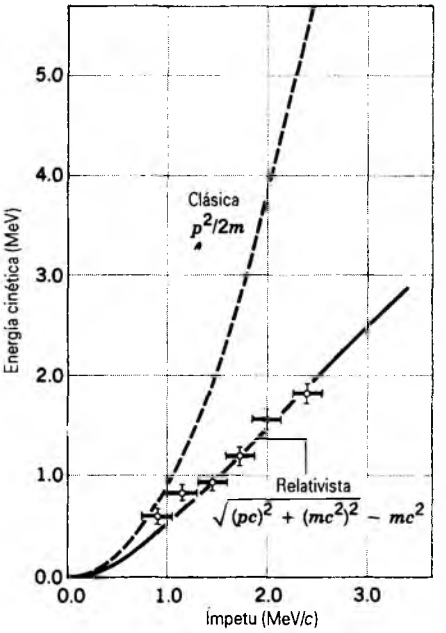



**Figura 12** Una comparación de las relaciones clásica (Ec. 21) y relativista (Ec. 23) entre el ímpetu y la energía cinética para electrones emitidos en ciertos procesos de desintegración radioactiva. Los círculos representan las mediciones experimentales; las barras horizontales y verticales que pasan a través de los círculos representan el margen de incertidumbre en estas mediciones. Los datos favorecen obviamente la relación relativista. Nótese que, a baja velocidad (energía e ímpetu pequeños), las dos relaciones son indistinguibles.

En la región de velocidades *muy* altas de la partícula, el ímpetu $p$ de la partícula puede ser tan grande que el término $pc$ de la ecuación 23 resulta mucho más grande que el término $mc^2$, por lo que la ecuación se reduce entonces a $K = pc$ con una buena aproximación. La expresión del ímpetu en unidades de energía divididas por $c$ es especialmente útil en esta región. Por ejemplo, un electrón cuyo ímpetu sea de 500 MeV/$c$ tiene una energía cinética muy cercana a los 500 MeV. (Obsérvese que esta aproximación es muy pobre para el electrón de 1.5 MeV considerado anteriormente.) ■

## 9-5 ÍMPETU LINEAL DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Supongamos que en lugar de una partícula aislada tenemos un sistema de $N$ partículas, con masas $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Supongamos también que ninguna masa entra o sale del sistema de modo que la masa total $M$ ($= \Sigma m_n$) del sistema permanece constante en el tiempo. Las partículas pueden interactuar entre sí, y las fuerzas externas pueden actuar igualmente sobre ellas. Cada partícula tiene cierta veloci-

dad y cierto ímpetu en el marco de referencia particular que se esté usando. El sistema, como un todo, tiene un ímpetu total **P**, el cual se define simplemente como el vector suma de los ímpetus de las partículas individuales en este mismo marco, o sea

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_N \\ &= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots + m_N\mathbf{v}_N. \end{aligned} \tag{24}$$

Si comparamos esta relación con la ecuación 13, vemos de inmediato que

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm}, \tag{25}$$

la cual es una definición equivalente al ímpetu de un sistema de partículas:

*El ímpetu lineal total de un sistema de partículas es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad de su centro de masa.*

Si diferenciamos la ecuación 25 con respecto al tiempo obtenemos, para una masa constante $M$ supuesta,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = M\mathbf{a}_{cm}. \tag{26}$$

La comparación de la ecuación 26 con la ecuación 16, $\Sigma\mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm}$, nos permite escribir la segunda ley de Newton para un sistema de partículas en la forma:

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \tag{27}$$

La ecuación 27 afirma que, en un sistema de partículas, la fuerza externa neta es igual a la velocidad de cambio del ímpetu lineal del sistema. Esta ecuación es la generalización de la ecuación de una partícula aislada, $\Sigma\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (Ec. 20), a un sistema de muchas partículas, cuando ninguna masa entra o sale del sistema. La ecuación 27 se reduce a la ecuación 20 para el caso especial de una partícula aislada, puesto que sólo pueden actuar fuerzas externas sobre un sistema de una sola partícula. En la sección 9-8 consideraremos las modificaciones de la ecuación 27 para sistemas de masa variable.

## 9-6 CONSERVACIÓN DEL ÍMPETU LINEAL

Supongamos que la suma de las fuerzas externas que actúa sobre un sistema es cero. Entonces, según la ecuación 27,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{P} = \text{una constante.}$$

*Cuando la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el vector del ímpetu total del sistema permanece constante.*

Este resultado sencillo, pero de carácter general, se llama ley de *conservación del ímpetu lineal.* Al igual que la ley de conservación de la energía, la ley de conservación del ímpetu lineal se aplica a una gran variedad de situaciones físicas y no tiene excepciones conocidas.

Las leyes de conservación (tales como las de la energía y del ímpetu lineal, que ya hemos visto, y las del ímpetu angular y la carga eléctrica, que veremos más adelante en el texto) son de importancia teórica y práctica en la física, porque son sencillas y universales. Las leyes de conservación de la energía y del ímpetu lineal, por ejemplo, van más allá de las limitaciones de la mecánica clásica y permanecen válidas tanto en el ámbito relativista como en el cuántico.

Todas las leyes de la conservación tienen la forma siguiente. Mientras, el sistema está cambiando, existe un aspecto del mismo, por otra parte, que permanece inalterable. Observadores diferentes, cada uno de ellos en un marco de referencia diferente, al observar el cambio de un mismo sistema, estarían todos de acuerdo en que las leyes de conservación se aplican al sistema. Por ejemplo, para la conservación del ímpetu lineal, observadores situados en marcos de referencia inerciales diferentes, asignarían valores diferentes de **P** al ímpetu lineal del sistema, pero todos estarían de acuerdo (suponiendo que $\Sigma\mathbf{F}_{ext} = 0$) en que el valor de **P** permanece sin cambio mientras se mueven las partículas que forman el sistema. La fuerza **F** es invariante con respecto a las transformaciones galileanas (todos los observadores inerciales están de acuerdo en su medición). Si $\Sigma\mathbf{F}_{ext} = 0$ en *cualquier* marco inercial, entonces *todos* los observadores inerciales hallarán también que $\Sigma\mathbf{F}_{ext} = 0$ y llegarán a la conclusión de que ese ímpetu se conserva.

El ímpetu total de un sistema puede ser cambiado solamente por las fuerzas externas que actúen sobre el sistema. Las fuerzas internas, por ser iguales y opuestas, producen cambios de ímpetu iguales y opuestos, que se cancelan entre sí. En un sistema de partículas en el cual no actúe ninguna fuerza externa,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_N = \text{una constante.} \tag{28}$$

Los ímpetus de las partículas individuales pueden cambiar, pero su suma permanece constante si no existe fuerza externa alguna.

El ímpetu es una cantidad vectorial. La ecuación 28 es, por lo tanto, equivalente a tres ecuaciones escalares, una para cada dirección de las coordenadas. De aquí que la conservación del ímpetu lineal nos proporciona las tres condiciones del movimiento de un sistema al cual se aplique. Por otra parte, la conservación de la energía nos

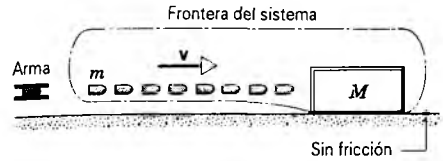



**Figura 13** Problema muestra 6. Un arma dispara una ráfaga de balas contra un bloque de madera. Analizamos el sistema que definimos que consta del bloque y las balas en vuelo.

proporciona solamente una condición del movimiento de un sistema al que se aplique, porque la energía es una cantidad escalar.

Si nuestro sistema de partículas consta solamente de una partícula aislada, entonces la ecuación 28 se reduce a afirmar que, si ninguna fuerza neta actúa sobre ella, el ímpetu de la partícula es una constante, lo cual es equivalente (para una partícula aislada) a afirmar que su velocidad es una constante. Esto es, simplemente, otra forma de enunciar la primera ley de Newton.

**Problema muestra 6** Una ráfaga de balas de masa $m$ y de 3.8 g cada una, se dispara horizontalmente con una velocidad $v$ de 1100 m/s contra un gran bloque de madera de masa $M$ (= 12 kg) que inicialmente está en reposo sobre una mesa horizontal; véase la figura 13. Si el bloque puede deslizarse sin fricción por la mesa, ¿qué velocidad adquirirá después de que se han incrustado en él 8 balas?

**Solución** La ecuación 28 (**P** = una constante) es válida solamente para sistemas cerrados, en los que no entre ni salga partícula alguna. Entonces nuestro sistema debe incluir tanto al bloque como a las 8 balas, considerado como un todo. En la figura 13, hemos identificado a este sistema trazando una curva cerrada a su alrededor.

Por ahora, consideraremos solamente la dirección horizontal. No actúa ninguna fuerza externa horizontal sobre el sistema bloque + balas. Las fuerzas que actúan cuando las balas chocan contra el bloque son fuerzas internas y no contribuyen a $\mathbf{F}_{ext}$, la cual no tiene una componente horizontal.

Puesto que no actúan fuerzas externas (horizontales), podemos aplicar la ley de conservación del ímpetu (Ec. 28). El ímpetu inicial (horizontal), medido mientras las balas están todavía en camino y el bloque está en reposo, es

$$P_i = N(mv),$$

en el cual $mv$ es el ímpetu de una bala individual y $N = 8$. El ímpetu final, medido cuando todas las balas estén en el bloque y el bloque se deslice sobre la mesa a velocidad $V$, es

$$P_f = (M + Nm)V.$$

La conservación del ímpetu requiere que

$$P_i = P_f$$

o sea

$$N(mv) = (M + Nm)V.$$

Resolviendo para $V$ nos da

$$V = \frac{Nm}{M + Nm} v = \frac{(8)(3.8 \times 10^{-3}\ \text{kg})}{12\ \text{kg} + (8)(3.8 \times 10^{-3}\ \text{kg})} (1100\ \text{m/s})$$
$$= 2.8\ \text{m/s}.$$

Con la elección que hemos hecho del sistema, no tuvimos que considerar las fuerzas ejercidas cuando las balas penetran en el bloque. Esas fuerzas son todas internas.

En dirección vertical, las fuerzas externas son el peso de las balas, el peso del bloque, y la fuerza normal sobre el bloque. Mientras que las balas están en vuelo, adquieren la componente de un ímpetu vertical pequeño como resultado de la acción de la gravedad. Cuando las balas chocan contra el bloque, el bloque debe ejercer sobre cada bala una fuerza con componentes tanto horizontal como vertical. Junto con la fuerza vertical sobre la bala, que es necesaria para que su ímpetu vertical cambie a cero, debe haber (de acuerdo con la tercera ley de Newton) un aumento correspondiente de la fuerza normal ejercida sobre el bloque por la superficie horizontal. Este aumento no sólo se debe al peso de la bala encajada; tiene una contribución adicional que proviene de la razón de cambio del ímpetu vertical de la bala. Cuando todas las balas hayan llegado al reposo respecto al bloque, la fuerza normal será igual a los pesos combinados del bloque y de las balas encajadas.

Por simplicidad, para la resolución de este problema hemos supuesto que las balas se disparan tan rápidamente que las 8 están en vuelo antes que la primera bala llegue al bloque. ¿Puede usted resolver este problema sin hacer esta suposición?

Supongamos que la frontera del sistema se amplía de modo que incluya al arma, la cual se halla fija a la Tierra. ¿Cambia el ímpetu horizontal de este sistema antes y después del disparo? ¿Existe una fuerza externa horizontal?

**Problema muestra 7** Como lo muestra la figura 14, un cañón cuya masa $M$ es de 1300 kg dispara una bala de 72 kg en dirección horizontal a una velocidad de salida de $v = 55$ m/s. El cañón está montado de modo que pueda recular libremente. (*a*) ¿Cuál es la velocidad $V$ del cañón al recular respecto a la Tierra? (*b*) ¿Cuál es la velocidad inicial $v_E$ de la bala respecto a la Tierra?

**Solución** (*a*) Elegimos como nuestro sistema al cañón + la bala. Al hacerlo así, las fuerzas asociadas con el disparo del cañón son internas al sistema, y no tenemos que tratar con ellas. Las fuerzas externas que actúan sobre el sistema no tienen componentes horizontales. Así, la componente horizontal del ímpetu lineal total del sistema debe permanecer sin cambio cuando el cañón es disparado.

Elegimos un marco de referencia fijo respecto a la Tierra y suponemos que todas las velocidades son positivas si apuntan hacia la derecha en la figura 14.

Antes de ser disparado el cañón, el sistema tiene un ímpetu inicial $P_i$ igual a cero. Después de haber sido disparada, la bala tiene una velocidad horizontal $v$ con respecto al cañón al recular, siendo $v$ la velocidad de salida del cañón. Sin embargo, en el marco de referencia de la Tierra la velocidad horizontal de la bala es $v + V$. Entonces, el ímpetu lineal total del sistema después del disparo es

$$P_f = MV + m(v + V),$$

donde el primer término de la derecha es el ímpetu del cañón al recular y el segundo término el de la bala cuando va en camino.

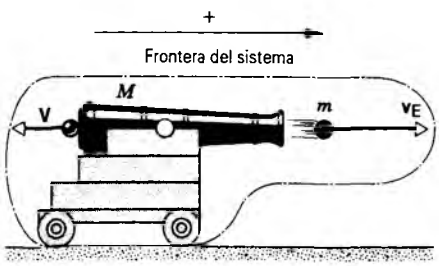



**Figura 14** Problema muestra 7. Un cañón de masa $M$ dispara una bala de masa $m$. Las velocidades de la bala y del cañón al recular se muestran en un marco de referencia fijo en la Tierra. Las velocidades se consideran positivas hacia la derecha.

La conservación del ímpetu lineal en la dirección horizontal requiere que $P_i = P_f$, o sea

$$0 = MV + m(v + V).$$

Resolviendo para $V$ nos da

$$V = -\frac{mv}{M+m} = -\frac{(72\text{ kg})(55\text{ m/s})}{1300\text{ kg} + 72\text{ kg}} = -2.9\text{ m/s}.$$

El signo menos nos dice que el cañón recula hacia la izquierda en la figura 14, como esperábamos que lo haría.

(*b*) La velocidad de la bala respecto al cañón (al recular) es la velocidad de salida $v$. Con respecto a la Tierra, la velocidad de la bala es

$$\begin{aligned} v_E &= v + V \\ &= 55\text{ m/s} + (-2.9\text{ m/s}) = 52\text{ m/s}. \end{aligned}$$

A causa de la reculada, la bala se mueve un poco más lentamente respecto a la Tierra de lo que lo haría de no existir reculada. Nótese la importancia, en este problema, de elegir al sistema (cañón + bala) de manera acertada y siendo absolutamente claro respecto al marco de referencia (la Tierra o la reculada del cañón) al que se refieren las diversas mediciones.

**Problema muestra 8** La figura 15 muestra dos bloques unidos por un resorte y libres de deslizarse sobre una superficie horizontal sin fricción. Los bloques, cuyas masas son $m_1$ y $m_2$, son separados y luego soltados a partir de una situación en reposo. ¿Qué fracción de la energía cinética total del sistema tendrá cada bloque en cualquier tiempo posterior?

**Solución** Tomamos a los dos bloques y al resorte (supuesto sin masa) como nuestro sistema y, como marco de referencia, a la superficie horizontal sobre la que se deslizan. Suponemos que las velocidades son positivas si apuntan hacia la derecha en la figura 15.

El ímpetu inicial $P_i$ del sistema antes de soltar a los bloques es cero. El ímpetu final, en cualquier tiempo después de haber soltado a los bloques, es

$$P_f = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

donde $v_1$ y $v_2$ son las velocidades de los bloques. La conservación del ímpetu requiere que $P_i = P_f$, o sea,

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 .$$

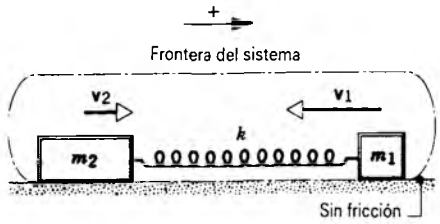



**Figura 15** Problema muestra 8. Dos bloques, descansando sobre una superficie sin fricción y unidos por un resorte, han sido apartados y luego soltados desde el reposo. El ímpetu total inicial es cero, y así debe permanecer en todos los tiempos sucesivos.

Entonces, tenemos que

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1}, \tag{29}$$

diciéndonos el signo menos que las dos velocidades tienen siempre direcciones opuestas. Esto se cumple para cualquier instante después de haber soltado a los bloques, no importa cuál sea la velocidad de cada uno de ellos.

Las energías cinéticas de los bloques son $K_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$ y $K_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2$. La fracción que buscamos es, para el bloque de masa $m_1$,

$$f_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2}.$$

Sustituyendo $v_2 = -v_1(m_1/m_2)$ nos lleva, después de un poco de álgebra, a

$$f_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

De manera similar, para el bloque de masa $m_2$,

$$f_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

*Entonces, aunque la energía cinética del sistema oscilante varía* con el tiempo, la distribución de esta energía entre los dos bloques es una constante, independiente del tiempo, recibiendo el bloque con menor masa la mayor parte de la energía cinética disponible. Si, por ejemplo, $m_2 = 10m_1$, entonces

$$f_1 = \frac{10m_1}{m_1 + 10m_1} = 0.91 \quad \text{y} \quad f_2 = \frac{m_1}{m_1 + 10m_1} = 0.09.$$

En este caso, el bloque menos pesado ($m_1$) obtiene el 91% de la energía cinética disponible y el bloque más pesado ($m_2$) obtiene el 9% restante. En el límite $m_2 \gg m_1$, el bloque menos pesado obtiene esencialmente toda la energía cinética.

Las expresiones para $f_1$ y $f_2$ se aplican igualmente bien a una piedra que caiga en el campo gravitatorio de la Tierra. Si $m_2$ representa a la masa de la Tierra y $m_1$ a la masa de la piedra, en el marco de referencia de sus centros de masa, la piedra toma casi toda la energía cinética ($f \approx 1$) y la Tierra toma muy poca ($f_2 \approx 0$). Las magnitudes de los ímpetus lineales de la piedra y de la Tierra son iguales, aunque la pequeña velocidad de la Tierra es compensada por su enorme masa. Este argumento justifica despreciar la energía cinética de la Tierra cuando usábamos la conservación de la energía en el capítulo 8 para analizar objetos que caen bajo la acción de la gravedad terrestre.

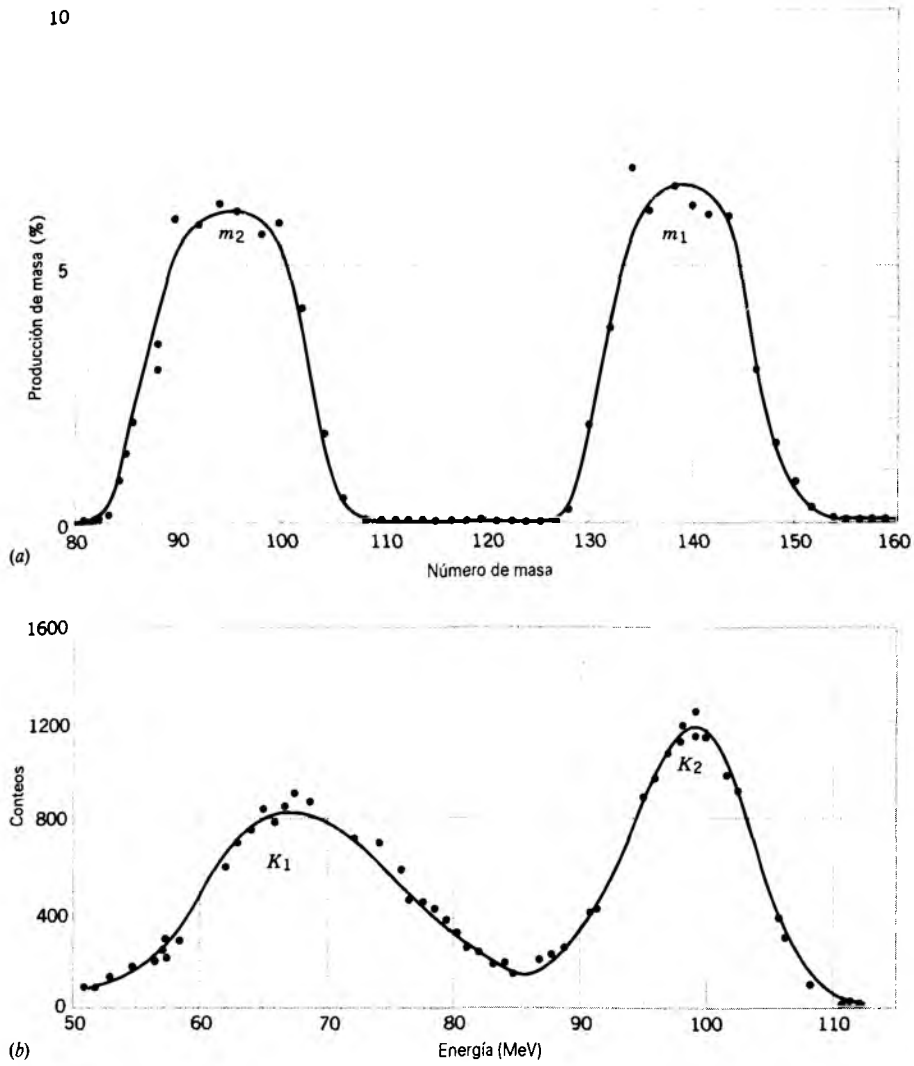



**Figura 16** (*a*) La distribución de masa de los fragmentos emitidos en la fisión nuclear. La escala vertical da la fracción de fisiones que se producen en un fragmento con el número de masa dado por la escala horizontal. (*b*) La distribución de la energía de los fragmentos emitidos en la fisión.

Otro ejemplo práctico de este efecto ocurre en el caso de la fisión nuclear, en que un núcleo pesado como el $^{235}U$ se divide en dos fragmentos más ligeros. Los fragmentos son impulsados por su repulsión eléctrica mutua desde una posición inicial en que se encuentran muy próximos entre sí y casi en reposo. De la ecuación 29, esperamos que la razón de las energías cinéticas sea

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1}.$$

Esto es, el fragmento más pesado tiene la energía cinética más pequeña.

La fisión es un proceso estadístico, en el cual existe una distribución de las masas posibles de los fragmentos y una distribución correspondiente de las energías cinéticas de los fragmentos. La figura 16*a* muestra la distribución de la masa y la figura 16*b* muestra la distribución de la energía cinética. Nótese que la fisión en fragmentos de igual masa es muy rara; un fragmento tiene usualmente un número de masa de alrededor de 138 y el otro alrededor de 94. Una razón típica de masa $m_2/m_1$ es, entonces, de alrededor de 94/138 = 0.68. Una razón típica de energía cinética $K_1/K_2$ es de alrededor de 67 MeV/99 MeV = 0.68, igual a la razón de masa típica, como era de esperarse. Entonces, el reparto de la energía cinética entre los fragmentos de la fisión se lleva a cabo de acuerdo con la restricción de que el ímpetu se conserva.

## 9-7 TRABAJO Y ENERGÍA EN UN SISTEMA DE PARTÍCULAS *(Opcional)*

La figura 17 muestra a un patinador que se impulsa desde una barandilla, ganando energía cinética en el proceso. Si le preguntamos al patinador de dónde proviene esta energía cinética, probablemente nos dirá que, a juzgar por sus esfuerzos musculares, la energía requerida debe provenir de su propia reserva de energía interna. Tratemos de verificar este argumento aplicando la conservación de la energía al sistema que consta únicamente del patinador.

Según la ecuación 28 del capítulo 8 tenemos que

$$\Delta U + \Delta K_{cm} + \Delta E_{int} = W. \qquad (30)$$

Al derivar la ecuación 33 del capítulo 8, dividamos la energía cinética de un sistema en dos términos: $\Delta K_{int}$, que representa los

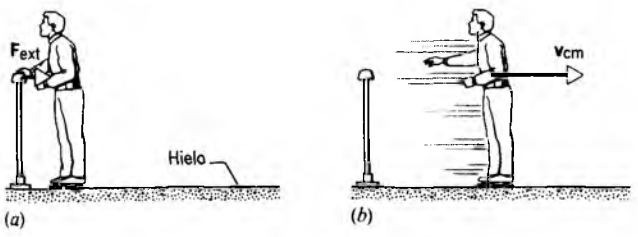



**Figura 17** (*a*) Un patinador se empuja a sí mismo contra la barandilla. La barandilla ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{ext}$ sobre el patinador. (*b*) Después de haberse empujado, el patinador se mueve a una velocidad $\mathbf{v}_{cm}$.

movimientos internos de las partículas del sistema, y $\Delta K$, que representaba el movimiento "global" del sistema. Aquí indicamos explícitamente que este movimiento "global" es, de hecho, el movimiento del centro de masa, y la energía cinética correspondiente es

$$K_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2, \tag{31}$$

que es la energía cinética que el sistema de masa total $M$ tendría si se moviese como una partícula a una velocidad $v_{cm}$. La energía cinética interna está incluida en la ecuación 30 como una parte de $\Delta E_{int}$. (Véase el problema 49 para una derivación de esta división de la energía cinética.)

No hay cambios en la energía potencial del patinador (el hielo es horizontal), de modo que hacemos que $\Delta U = 0$. Además, la barandilla no trabaja sobre el patinador porque *el punto de aplicación de la fuerza no se mueve*. Recordemos la explicación que acompañaba a la figura 13 del capítulo 8. Cuando se efectúa un trabajo externo sobre un sistema, la energía se transfiere a través de las fronteras del sistema. No se transfiere ninguna energía de la barandilla al patinador, así que la barandilla no efectúa ningún trabajo externo sobre el patinador. Entonces $W = 0$, y la ecuación 30 se reduce a

$$\Delta K_{cm} = -\Delta E_{int}. \tag{32}$$

Puesto que $\Delta K_{cm}$ es una cantidad positiva (el patinador gana energía cinética al empujarse contra la barandilla), $\Delta E_{int}$ debe ser una cantidad negativa. Esto confirma el argumento del patinador: la energía cinética que adquiere al empujarse contra la barandilla proviene de su reserva de energía interna y no de alguna fuente externa.

El análisis de la energía es útil, pero podríamos desear ir más allá y analizar el sistema en función de las fuerzas y las aceleraciones. Veamos qué podemos aprender del patinador aplicando la segunda ley de Newton. La barandilla ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{ext}$ sobre el patinador (al cual continuamos viendo como nuestro sistema). Para empujarse desde la barandilla, el patinador debe estirar, necesariamente, su brazo. Como resultado, las diferentes partes de su cuerpo pueden tener desplazamientos, velocidades, y aceleraciones diferentes mientras se está empujando. Así, el patinador debe de ser tratado no como una partícula aislada sino como un sistema de partículas. En este caso, usando la ecuación 16, podemos hallar la aceleración del centro de masa del patinador si conocemos la fuerza externa ejercida sobre él por la barandilla:

$$F_{ext} = Ma_{cm}. \tag{33}$$

Para una partícula aislada, hallamos que el teorema trabajo-energía ($W = \Delta K$) es un resultado útil. Está claro que *no podemos* aplicar este teorema al patinador, porque éste no se mueve como una partícula única. Como ya lo habíamos deducido, $W = 0$, pero $\Delta K \neq 0$. Entonces la forma de partícula única del teorema trabajo-energía no es válida. Tratemos de hallar una relación que sea aplicable a un sistema de partículas.

Hagamos que una fuerza externa neta $\mathbf{F}_{ext}$ actúe sobre un sistema de partículas. Consideremos el caso general en que el punto de aplicación de esta fuerza puede moverse o que (como en el caso del patinador de la Fig. 17) puede *no* moverse en nuestro marco de referencia inercial elegido. Suponemos que todas las fuerzas y movimientos están en la dirección $x$. Puesto que estamos tratando con un sistema de partículas, enfocamos nuestra atención no al movimiento del punto de aplicación de la fuerza externa sino al movimiento del centro de masa del sistema.

Supongamos que el centro de masa del sistema se mueva una distancia $dx_{cm}$ a lo largo del eje $x$. Al multiplicar cada lado de la ecuación 33 por $dx_{cm}$ nos da

$$F_{ext}\,dx_{cm} = Ma_{cm}\,dx_{cm} = M\frac{dv_{cm}}{dt}\,v_{cm}\,dt,$$

donde hemos reemplazado $a_{cm}$ por $dv_{cm}/dt$ y a $dx_{cm}$ por $v_{cm}\,dt$. Esto da

$$F_{ext}\,dx_{cm} = Mv_{cm}\,dv_{cm}. \tag{34}$$

Supongamos que el centro de masa se mueve desde $x_i$ hasta $x_f$ cuando esta fuerza actúa. Al integrar la ecuación 34 entre estos límites tenemos que

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{ext}\,dx_{cm} = \int_{v_{cm,i}}^{v_{cm,f}} Mv_{cm}\,dv_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm,f}^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{cm,i}^2. \tag{35}$$

El lado derecho de la ecuación 35 puede escribirse usando la ecuación 31 en la forma $K_{cm,f} - K_{cm,i} = \Delta K_{cm}$. Esto representa el cambio en la energía cinética que experimentaría una partícula de masa $M$ cuya velocidad cambiara de $v_{cm,i}$ a $v_{cm,f}$.

El lado izquierdo de la ecuación 35 se parece un poco a la definición del trabajo y, de hecho la integral tiene la dimensión de trabajo. Sin embargo, este trabajo no es en el sentido en que lo hemos definido, porque $dx_{cm}$ no es el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza externa. (En nuestra definición original del trabajo $W = \int F\,dx$ del capítulo 7, $dx$ era el desplazamiento del punto de aplicación de $F$.) Obsérvese nuevamente que el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza externa es cero en la figura 17, y por lo tanto $W = 0$ en ese caso, pero el lado izquierdo de la ecuación 35 no es cero.*

En muchos casos de interés para nosotros, la fuerza externa es constante y puede ser sacada fuera de la integral en la ecuación 35. El resto de la integral da el desplazamiento neto $s_{cm}$

* Algunos autores usan los términos *seudotrabajo* o *trabajo del centro de masa* para describir el lado izquierdo de la ecuación 35. Esta ecuación se conoce a veces como la *ecuación del centro de masa*. Nosotros preferimos *no* introducir un término estrechamente relacionado con el trabajo para describir una cantidad que no está relacionada con el significado aceptado de trabajo. Para un compendio general del trabajo y la energía en un sistema de partículas, véase "Developing the Energy Concepts in Introductory Physics", por A. B. Arons, *The Physics Teacher*, octubre de 1989, pág. 506).

del centro de masa del sistema. En este caso podemos reescribir la ecuación 35 así:

$$F_{ext}s_{cm} = \Delta K_{cm}. \qquad (36)$$

La ecuación 35 se parece al teorema trabajo-energía para una partícula, y de hecho se reduciría a ese resultado si nuestro sistema constara solamente de una partícula aislada (o de un cuerpo que pueda ser tratado como una partícula). Existe, sin embargo, una diferencia importante entre la ecuación 35 y el teorema trabajo-energía para una partícula. El teorema trabajo-energía para una partícula aislada es también un enunciado sobre la conservación de la energía en el movimiento de una partícula, porque la energía de traslación es la única clase de energía que una partícula puede tener. La ecuación 35, por el contrario, no es en sentido alguno una expresión de la conservación de la energía, porque un sistema de partículas puede tener energía en otras formas, incluyendo la interna, la potencial, y la de rotación, entre otras. Para un sistema de partículas, la ecuación 35 y la conservación de la energía (Ec. 30) pueden aplicarse como relaciones separadas e independientes.

Como un ejemplo de la aplicación de estos principios, consideremos el resultado de empujar una regla de un metro (inicialmente en reposo) que pueda deslizarse libremente sin fricción sobre una superficie horizontal. Ejercemos una fuerza constante de magnitud $F_{ext}$, la cual puede ser aplicada sobre cualquier parte de la regla. Si aplicamos la fuerza en la marca de 50 cm (Fig. 18*a*), la regla se mueve como una partícula con una aceleración $a_{cm} = F_{ext}/m$; cada punto de la regla se mueve con esta aceleración. El desplazamiento $s$ del punto en el que aplicamos la fuerza es igual al desplazamiento $s_{cm}$ del centro de masa. En este caso, efectuamos un trabajo de magnitud $F_{ext}s$ cuando toda la regla (que se mueve como una partícula) es desplazada en $s_{cm}$. La forma de partícula del teorema trabajo-energía puede emplearse para hallar la velocidad resultante $v$ de cada punto de la regla. Consideremos ahora el caso en que la fuerza se ejerce en la marca de 25 cm (Fig. 18*b*). Si usted trata de llevar a cabo este experimento, hallará que la regla *no* se mueve como una partícula. Como veremos en el capítulo 12, podemos dividir este movimiento complejo en dos partes: el movimiento de traslación como una partícula y la rotación con respecto al centro de masa. El punto en el cual aplicamos la fuerza se mueve una distancia *mayor que* $s_{cm}$, como lo podemos ver en la figura 18*b*. El trabajo que efectuamos sobre la regla es, por tanto, *mayor que* $F_{ext}s_{cm}$. Para analizar este movimiento debemos usar ambas ecuaciones 30 y 36. El producto $F_{ext}s_{cm}$ da, usando la ecuación 36, el cambio en la energía cinética de *traslación* de la regla. El producto $F_{ext}s$, donde $s$ es la distancia que se mueve el punto de 25 cm al cual se aplicó la fuerza, da el trabajo $W$ que aparece en la ecuación 30, el cual es una expresión de la conservación de la energía. Como lo expondremos en el capítulo 12, podemos asignar parte de la energía cinética total $K$ al movimiento de traslación y parte al movimiento de rotación.

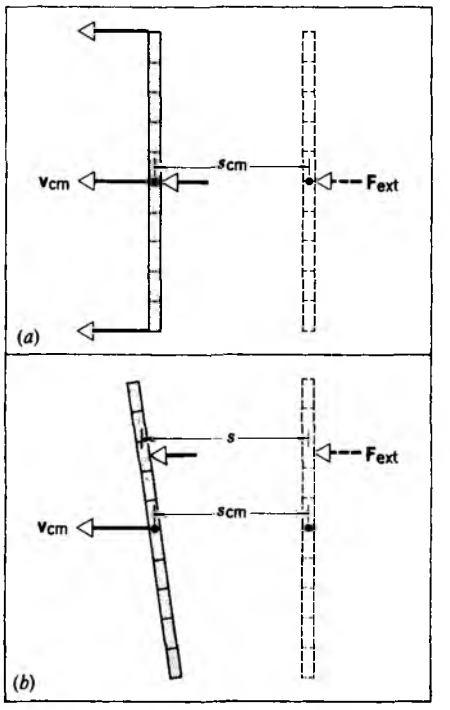



**Figura 18** (*a*) Una regla de un metro es empujada a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por una fuerza $\mathbf{F}_{ext}$. La fuerza se ejerce en la marca de 50 cm. Aquí la regla se mueve como una partícula. (*b*) La fuerza se ejerce ahora sobre la marca de 25 cm. La regla gira ahora al mismo tiempo que se traslada y ya no se mueve como una partícula. La fuerza se ejerce en un desplazamiento $s$ que es mayor que el desplazamiento $s_{cm}$ del centro de masa.

**Problema muestra 9** Un patinador de 72 kg se empuja desde una barandilla, como se muestra en la figura 17, ejerciendo una fuerza constante $F$ = 55 N sobre la barandilla al hacerlo. Su centro de masa se mueve a lo largo de una distancia $s_{cm}$ = 32 cm hasta que pierde contacto con la barandilla. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del patinador cuando se separa de la barandilla? (*b*) ¿Cuál es el cambio en la energía interna almacenada del patinador durante este proceso?

**Solución** (*a*) Una vez más el patinador es nuestro sistema. Según la tercera ley de Newton, la barandilla ejerce sobre el patinador una fuerza de 55 N hacia la derecha en la figura 17. Esta fuerza es la única fuerza externa que necesitamos considerar. Según la ecuación 36, tenemos que

$$F_{ext}s_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 - 0,$$

o sea

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2F_{ext}s_{cm}}{M}} = \sqrt{\frac{2(55\text{ N})(0.32\text{ m})}{72\text{ kg}}} = 0.70\text{ m/s}.$$

(*b*) Apliquemos ahora la ley de conservación de la energía, la cual, en las condiciones que corresponden a este problema, toma la forma de la ecuación 32, o sea

$$\Delta E_{int} = -\Delta K_{cm} = -\tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 = -\tfrac{1}{2}(72\text{ kg})(0.70\text{ m/s})^2$$
$$= -17.6\text{ J}.$$

Esta cantidad de energía interna podría reponerse digiriendo $\frac{1}{4}$ de cucharadita de cualquier refresco dietético.

**Problema muestra 10** En este caso, nuestro patinador se empuja contra su compañera, quien está parada con la espalda contra una pared, como en la figura 19*a*. Ambos tienen los brazos doblados inicialmente. Cada uno empuja contra el otro estirando los brazos, hasta que se separan (Fig. 19*b*). La compañera ejerce una constante de fuerza $F_{ext}$ = 55 N a lo largo de una distancia de $s$ = 32 cm; ésta es la distancia en que se mueven

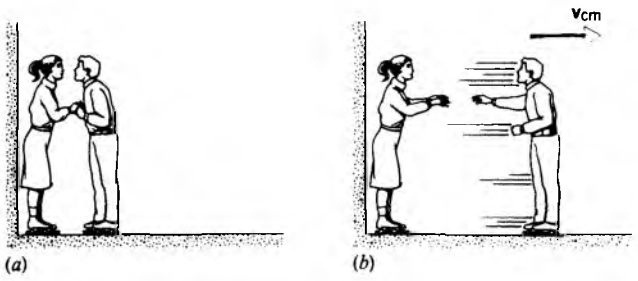



**Figura 19** Problema muestra 10. (*a*) Un patinador y su compañera se preparan para ejercer fuerzas uno contra el otro extendiendo sus brazos. La compañera apoya la espalda contra la pared y, por lo tanto, no se mueve. (*b*) Después de que los brazos se han extendido, el patinador se mueve a una velocidad $v_{cm}$.

realmente sus manos al extender sus brazos. En el instante en cesa el contacto, el centro de masa del patinador se ha movido a lo largo de una distancia total de $s_{cm} = 58$ cm como resultado de la extensión de *ambos* pares de brazos. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del patinador después de haber cesado el contacto? (*b*) ¿Cuál es el cambio en la energía interna almacenada del patinador durante este proceso?

**Solución** (*a*) Tomamos al patinador como nuestro sistema. Nótese que en este caso existe un trabajo externo efectuado sobre el sistema, de modo que hay una transferencia de energía a través de la frontera del sistema. Según la ecuación 36 tenemos que

$$F_{ext}s_{cm} = \Delta K_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 - 0,$$

o sea

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2F_{ext}s_{cm}}{M}} = \sqrt{\frac{2(55\text{ N})(0.58\text{ m})}{72\text{ kg}}} = 0.94\text{ m/s}.$$

(*b*) Según la ecuación de la conservación de energía para nuestro sistema, tenemos que

$$\Delta K_{cm} + \Delta E_{int} = W,$$

donde $W$ ($= F_{ext}s$) es el trabajo externo efectuado sobre el patinador por su compañera. Resolviendo para el cambio de energía interna $\Delta E_{int}$ y sustituyendo el resultado $\Delta K_{cm} = F_{ext}s_{cm}$ de la parte (*a*), obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta E_{int} = W - \Delta K_{cm} &= F_{ext}s - F_{ext}s_{cm}\\ &= (55\text{ N})(0.32\text{ m}) - (55\text{ N})(0.58\text{ m})\\ &= +17.6\text{ J} - 31.9\text{ J} = -14.3\text{ J}.\end{aligned}$$

Así pues, para lograr su energía cinética final, el patinador debe proporcionar 14.3 J de energía de sus recursos internos. Su compañera proporciona 17.6 J al efectuar el trabajo sobre el patinador, trabajo que, por supuesto, proviene de la reserva interna *de ella.* Si la compañera no estuviera presente y el patinador hubiera alcanzado la misma energía cinética empujándose directamente contra la pared, necesitaría proporcionar los 31.9 J completos de energía cinética a partir de su fuente de energía interna.

**Problema muestra 11** Un bloque de 5.2 kg se proyecta sobre una superficie horizontal a una velocidad horizontal inicial de 0.65 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es de 0.12. (*a*) ¿Qué le pasa a la energía cinética inicial del bloque? (*b*) ¿Qué distancia recorre el bloque hasta llegar al reposo?

**Solución** (*a*) Al aplicar la conservación de energía, el sistema más útil a considerar es el bloque más la porción de la superficie horizontal sobre la que se desliza. Al usar la ecuación 30, tenemos que $\Delta U = 0$, porque no ocurre ningún cambio de energía potencial sobre la superficie horizontal. Además $W = 0$, porque no actúa ninguna fuerza externa sobre el sistema. (Hemos definido al sistema de modo que la fricción sea una fuerza *interna.*) Así, la ecuación 30 resulta

$$\Delta E_{int} = -\Delta K_{cm},$$

donde $\Delta K_{cm}$ es negativa, correspondiendo a una pérdida de energía cinética. Sustituyendo valores, tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta E_{int} &= -(0 - \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2) = +\tfrac{1}{2}(5.2\text{ kg})(0.65\text{ m/s})^2\\ &= +1.1\text{ J}.\end{aligned}$$

Este aumento en la energía interna del sistema se revela como un incremento pequeño de la temperatura del bloque y de la superficie horizontal. Es difícil de calcular cómo se distribuye esta energía entre el bloque y la superficie; en gran parte evitamos esta dificultad al considerar al sistema formado por el bloque más la superficie, en lugar de analizar el bloque solamente.

(*b*) En este caso, elegimos al bloque solamente como nuestro sistema. No podemos tratar al bloque como una partícula, porque aquí intervienen las transferencias de energía (específicamente, de la energía interna) distintas a la energía cinética de traslación. Aplicando la ecuación 36, tenemos que

$$F_{ext}s_{cm} = \Delta K_{cm},$$

donde $F_{ext}$ es la fuerza de fricción externa ($= -\mu Mg$, tomando la dirección del movimiento como positiva) que actúa sobre el bloque y $s_{cm}$ es el desplazamiento del centro de masa del bloque. Entonces, tenemos que

$$(-\mu Mg)(s_{cm}) = 0 - \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

o sea

$$s_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{2\mu g} = \frac{(0.65\text{ m/s})^2}{2(0.12)(9.8\text{ m/s}^2)} = 0.18\text{ m}.$$

■

## 9-8 SISTEMAS DE MASA VARIABLE *(Opcional)*

Imaginemos que la cureña que sostiene al cañón en la figura 14 sostiene también a una gran dotación de balas de cañón. Cuando el cañón se dispara repetidamente, la cureña (que suponemos se mueve sin fricción) recula hacia la izquierda, y con cada reculada aumenta su velocidad. Con la frontera del sistema representada como en la figura 14, sabemos que el ímpetu horizontal total debe ser cero y que no existe ninguna fuerza horizontal neta sobre el sistema. Sin embargo, si consideramos un sistema que incluya sólo al cañón más la cureña, entonces el planteamiento previo ya no es válido. El ímpetu del cañón aumenta cada vez que se dispara, y es apropiado que usemos el lenguaje familiar de la física newtoniana para tener en cuenta el cambio en el ímpetu por la acción de una fuerza apropiada. En este caso, la fuerza que acelera al cañón es una fuerza de reacción: el

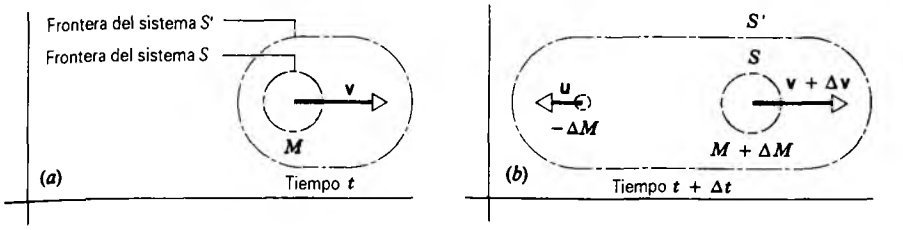



**Figura 20** (*a*) Un sistema $S'$ en el tiempo $t$ consta de una masa $M$ que se mueve a velocidad $\mathbf{v}$. (*b*) En un tiempo $\Delta t$ más tarde, la masa original $M$ ha arrojado cierta masa $-\Delta M$. La masa restante $M + \Delta M$, a la cual llamamos subsistema $S$, se mueve ahora a una velocidad $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$.

cañón, en virtud de la explosión de su carga, empuja contra las balas de cañón que arroja, y la fuerza de reacción (las balas de cañón empujando contra el cañón) hace mover al cañón hacia la izquierda.

Cuando el cañón se dispara repetidamente, la masa total sobre la cureña disminuye según la cantidad de balas de cañón que hayan sido arrojadas. Los métodos del problema muestra 7 no pueden emplearse fácilmente para resolver este problema porque la masa $M$ del objeto que recula es diferente cada vez que el cañón dispara.

En este ejemplo nos referiremos al sistema $S$, que consta del cañón más la cureña, como un sistema de "masa variable". Por supuesto, el sistema más grande $S'$ que consta del cañón más las balas de cañón disparadas, es un sistema de masa constante *y también* un sistema de ímpetu constante (en ausencia de una fuerza externa). Sin embargo, el sistema $S$ más pequeño no tiene una masa constante. Aún más, las balas de cañón arrojadas llevan consigo un ímpetu, y existe un flujo neto de ímpetu de $S$ que es el responsable de su aceleración.

El ejemplo anterior da, razonablemente, una buena imagen mental de cómo trabaja un cohete. El combustible se quema y arroja a gran velocidad; los productos de la combustión corresponden a las balas de cañón. El cohete (menos el combustible consumido) experimenta una aceleración que depende de la cantidad de combustible que se consume y de la velocidad con que se arroja.

El objetivo del análisis de sistemas similares al cohete *no* es el de considerar la cinemática de todo el sistema $S'$. En cambio, enfocamos nuestra atención a un subsistema partícular $S$, y nos preguntamos cómo se mueve $S$ al redistribuirse la masa dentro del sistema entero $S'$ de modo que cambie la masa dentro del subsistema $S$. La masa total dentro de $S'$ permanece constante, pero el subsistema partícular $S$ que consideramos puede cambiar su estado de movimiento al ganar o al perder masa (e ímpetu).

La figura 20 muestra una vista esquemática de un sistema generalizado. En el tiempo $t$, el subsistema $S$ tiene una masa $M$ y se mueve a velocidad $\mathbf{v}$ en el marco de referencia particular desde el que lo estamos observando. En el tiempo $t + \Delta t$, la masa de $S$ ha cambiado en una cantidad $\Delta M$ (una cantidad negativa, en el caso de una masa arrojada) a $M + \Delta M$, mientras que la masa del resto del sistema íntegro $S'$ ha cambiado en una cantidad correspondiente $-\Delta M$. El sistema $S$ se mueve ahora a una velocidad $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$, y la materia arrojada se mueve a una velocidad $\mathbf{u}$, ambas medidas desde nuestro marco de referencia.

Para hacer esta situación lo más general posible, permitimos también una fuerza externa $F_{ext}$ que pueda actuar sobre todo el sistema. Ésta no es la fuerza que impulsa al cohete (la cual es una fuerza interna para el sistema $S'$), sino que es más bien la fuerza debida a algún agente externo, quizás la gravedad o el arrastre atmosférico. El ímpetu total de todo el sistema $S'$ es $\mathbf{P}$, y la segunda ley de Newton puede expresarse así:

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \tag{37}$$

En el intervalo de tiempo $\Delta t$, el cambio de ímpetu $\Delta\mathbf{P}$ es

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i \tag{38}$$

donde $\mathbf{P}_f$, el ímpetu final del sistema $S'$ en el tiempo $t + \Delta t$, y $\mathbf{P}_i$, el ímpetu inicial de $S'$ en el tiempo $t$, están dados por

$$\mathbf{P}_i = M\mathbf{v}, \tag{39a}$$

$$\mathbf{P}_f = (M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u}. \tag{39b}$$

El cambio en el ímpetu de $S'$ es, entonces,

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i = (M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u} - M\mathbf{v}. \tag{40}$$

Reescribiendo la derivada de la ecuación 37 como un límite y sustituyendo esta expresión para $\Delta\mathbf{P}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{ext} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u} - M\mathbf{v}}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\left[M\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})\frac{\Delta M}{\Delta t} + \Delta\mathbf{v}\frac{\Delta M}{\Delta t}\right]\\ &= M\frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})\frac{dM}{dt}.\end{aligned} \tag{41}$$

Nótese que, al tomar el límite, el último término dentro de los corchetes cuadrados se anula, porque $\Delta\mathbf{v} \to 0$ según $\Delta t \to 0$. En la ecuación 41, $M$ es la masa del subsistema $S$ en el tiempo $t$, y $d\mathbf{v}/dt$ es su aceleración cuando arroja masa a la velocidad $\mathbf{u}$ (en nuestro marco de referencia) y en una cantidad $|dM/dt|$.

Podemos también expresar la ecuación 41 de una forma ligeramente más general:

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) - \mathbf{u}\frac{dM}{dt}. \tag{42}$$

La ecuación 42 no se parece en absoluto a $\mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}$ o a $\mathbf{F}_{ext} = d(M\mathbf{v})/dt$, que hemos usado previamente para analizar el movimiento de partículas o de sistemas de masa constante. Podemos reducir la ecuación 42 a la forma de partícula de la segunda ley de Newton en dos casos muy especiales solamente: (1) cuando

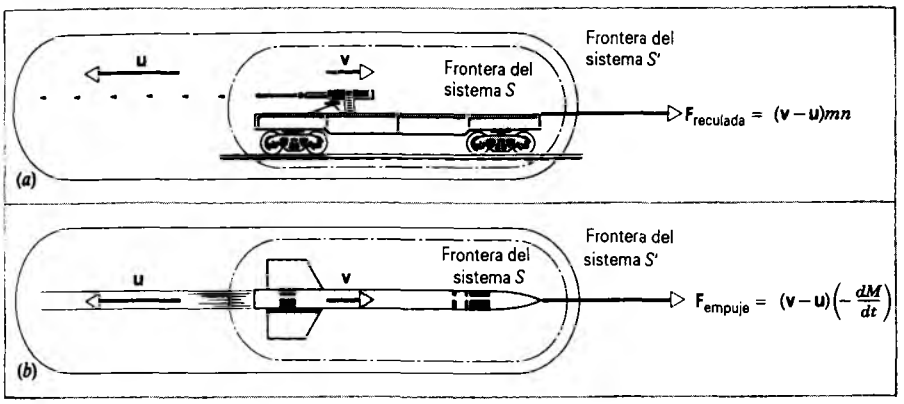



**Figura 21** (*a*) Una ametralladora dispara una ráfaga de balas a razón de $n$ por unidad de tiempo. El ímpetu total del sistema $S'$ permanece constante, pero el subsistema $S$ experimenta una fuerza de reculada que cambia su ímpetu. El cambio de ímpetu en un tiempo $dt$ es exactamente igual al ímpetu opuesto $mn\,\mathbf{u}\,dt$ transportado por las balas. (*b*) Un cohete expulsa un chorro de productos de combustión. El ímpetu total del sistema $S'$ permanece constante, pero el subsistema $S$ experimenta un empuje que cambia su ímpetu. El cambio de ímpetu en un tiempo $dt$ es exactamente igual al ímpetu opuesto $\mathbf{u}\,dM$ transportado por el gas expulsado.

$dM/dt = 0$ de modo que $M$ es una constante, en cuyo caso estamos otra vez discutiendo sistemas de masa constante, o (2) cuando $\mathbf{u} = 0$, en cuyo caso estamos viendo al sistema de masa variable desde un marco de referencia muy especial en el cual la materia arrojada está en reposo.

En general, cuando aplicamos $\mathbf{F}_{ext} = d\mathbf{P}/dt$ al sistema $S$ que gana o pierde masa, debemos tener en cuenta el cambio en el ímpetu de la masa que se gana o se pierde.* Esto es, como lo sugiere la ecuación 42 y la figura 20, debemos considerar al sistema más grande $S'$, que incluye al sistema $S$ y a la masa adicional. Este enfoque en la dinámica de sistemas de masa variable resalta la importancia de la ley de conservación del ímpetu, y nos da una receta relativamente sencilla para tratar sistemas complicados.

La ecuación 41 ha sido derivada en una forma especial que puede ser adaptada fácilmente al análisis del movimiento de un cohete. La cantidad $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es $\mathbf{v}_{rel}$, la velocidad de los gases expulsados *con relación al cohete*. Ésta es una cantidad razonable a introducir, porque la velocidad de los gases expulsados es una característica de diseño fundamental del motor del cohete y no debe expresarse en una forma que dependa de ningún otro marco de referencia que el cohete mismo. En función de $\mathbf{v}_{rel}$, podemos escribir la ecuación 41 en la forma siguiente:

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{v}_{rel}\frac{dM}{dt}. \qquad (43)$$

El último término de la ecuación 43 nos da la razón a la cual el ímpetu está siendo transferido al subsistema $S$ o quizás fuera de él. Puede ser interpretada como una fuerza ejercida sobre $S$ por la masa que entra o sale de $S$. En el caso de un cohete, este término se llama *empuje*; para hacer al empuje lo más grande posible, los diseñadores de cohetes intentan hacer tanto a $\mathbf{v}_{rel}$ (la velocidad de escape) como a $|dM/dt|$ (la razón a la que es arrojada la masa) lo más grande posible.

## La ecuación del cohete

Consideremos un cohete en el espacio lejano, donde no está sujeto a fuerza externa alguna. Supongamos, por simplicidad, que el movimiento está confinado a una dimensión; $dv/dt$ define la dirección positiva cuando el cohete acelera y $\mathbf{v}_{rel}$, apunta, por lo tanto, en dirección negativa. La ecuación 43 puede expresarse en este caso así:

$$M\frac{dv}{dt} = -v_{rel}\frac{dM}{dt}. \qquad (44)$$

donde $v_{rel}$ es la magnitud de la velocidad de escape. Nótese que $dM/dt$ es negativa, de modo que el lado derecho de la Ec. 44 es positivo, como lo es el lado izquierdo.

La ecuación 44 es la ecuación fundamental que rige el comportamiento de un cohete. Durante la combustión estable del motor, el empuje (el lado derecho de la Ec. 44) es una constante (pero la aceleración resultante del cohete $dv/dt$ no es una constante porque la masa $M$ cambia mientras el combustible se quema).

Consideremos el cambio de velocidad del cohete que corresponde a la combustión de una cantidad específica de combustible $m_b$. La velocidad inicial es $v_i$, y la velocidad final después de la combustión es $v_f$. Replanteamos la ecuación 44 así:

$$dv = -v_{rel}\frac{dM}{M}. \qquad (45)$$

La masa total $M$ del cohete es una variable. La masa original del cohete más el combustible es $M_0$, y en cualquier tiempo $t$, la masa remanente $M$ del cohete más la masa $m_b$ del combustible quemado hasta ese momento debe ser $M_0$; así $M = M_0 - m_b$.

* Véase "Force, Momentum Change, and Motion", por Martin S. Tiersten, *American Journal of Physics*, enero de 1969, pág. 82, para una excelente referencia general sobre sistemas de masa fija y variable.

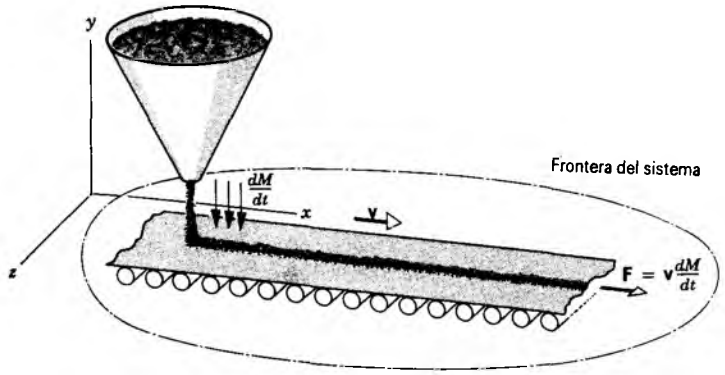



**Figura 22** Problema muestra 13. De una tolva cae arena a razón de *dM/dt* sobre una banda transportadora que se mueve a velocidad constante **v** en el marco de referencia del laboratorio. La fuerza necesaria para mantener a la banda moviéndose a velocidad constante es **v** *dM/dt*. La tolva está en reposo en el marco de referencia del laboratorio.

Integramos la ecuación 45 entre los límites $v_i$, cuando la masa del cohete es $M_0$, y $v_f$, cuando la masa es $M_0 - m_b$, obteniendo

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{rel} \int_{M_0}^{M_0 - m_b} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = -v_{rel} \ln M \Big|_{M_0}^{M_0 - m_b}$$

$$= -v_{rel} [\ln (M_0 - m_b) - \ln M_0]$$

$$= -v_{rel} \ln \left( \frac{M_0 - m_b}{M_0} \right). \qquad (46)$$

La ecuación 46 da el cambio de velocidad del cohete que resulta de la combustión de una cantidad $m_b$ de combustible.

Suponiendo que el cohete comienza desde el reposo ($v_i = 0$) con una masa inicial $M_0$ y alcanza una velocidad final $v_f$ en combustión cuando su masa es $M_f = M_0 - m_b$, podemos escribir la ecuación 46 así:

$$\frac{M_f}{M_0} = e^{-v_f / v_{rel}}. \qquad (47)$$

La analogía entre el cohete y la reculada de un arma se ilustra en la figura 21. En cada caso se conserva el ímpetu de todo el sistema, que consta de la masa expulsada (balas o combustible) más el objeto que expulsa la masa. Cuando centramos nuestra atención en el arma o en el cohete dentro del sistema más grande, vemos que su masa cambia y que existe una fuerza que lo impulsa, una reculada en el caso del arma y un empuje en el caso del cohete. Si contemplamos el sistema desde el marco de referencia en el centro de masa, a medida que el tiempo transcurre hay más masa expulsada, y ha viajado más hacia la izquierda según vemos en la figura 21, lo que significa que el objeto debe viajar a la derecha para que el centro de masa se mantenga fijo.

**Problema muestra 12** Un cohete tiene una masa de 13,600 kg una vez lleno con su combustible en la rampa de lanzamiento. Se dispara verticalmente hacia arriba y en la combustión ha consumido y expulsado 9100 kg de combustible. Los gases salen expulsados a razón de 146 kg/s a una velocidad de 1520 m/s, relativa al cohete, suponiendo que ambas cantidades son constantes mientras se quema el combustible. (*a*) ¿Cuál es el empuje? (*b*) Si pudiéramos despreciar todas las fuerzas externas, incluyendo la gravedad y la resistencia del aire, ¿cuál sería la velocidad del cohete durante la combustión?

**Solución** (*a*) El empuje $F$ es el último término de la ecuación 43, o sea

$$F = v_{rel} \left| \frac{dM}{dt} \right| = (1520 \text{ m/s})(146 \text{ kg/s}) = 2.22 \times 10^5 \text{ N}.$$

Nótese que inicialmente, cuando los tanques de combustible están llenos, la fuerza neta hacia arriba que actúa sobre el cohete (despreciando la resistencia del aire) es el empuje menos el peso inicial $Mg$, o sea 88,600 N. En el momento antes de la combustión la fuerza neta hacia arriba es el empuje menos el peso final, o $1.78 \times 10^5$ N.

(*b*) De la ecuación 46, podemos hallar la velocidad durante la combustión:

$$v_f = -v_{rel} \ln \left( \frac{M_0 - m_b}{M_0} \right)$$

$$= -(1520 \text{ m/s}) \ln \left( \frac{13{,}600 \text{ kg} - 9100 \text{ kg}}{13{,}600 \text{ kg}} \right) = 1680 \text{ m/s}.$$

Si las fuerzas externas de la gravedad y de la resistencia del aire fueran tomadas en cuenta, la velocidad final sería menor.

**Problema muestra 13** De una tolva estacionaria cae arena a razón de *dM/dt* sobre una banda transportadora que se mueve a velocidad $v$ en el marco de referencia del laboratorio, como en la figura 22. ¿Qué potencia se necesita para mantener a la banda moviéndose a la velocidad $v$?

**Solución** La figura 20 describe esta situación, con el sistema $S$ representando a la banda más la arena acumulada y $\Delta M$ representando a la arena adicional que cae sobre la banda. El sistema $S'$ incluye a la banda y a toda la provisión de arena en la tolva. Tomamos como nuestro objeto (sistema $S$) a la banda (incluida la arena) de masa variable $M$, y por la ecuación 41 debemos asentar que $d\mathbf{v}/dt = 0$, porque la velocidad de la banda es constante, y $\mathbf{u} = 0$, porque la arena, al caer, no tiene velocidad horizontal en nuestro marco de referencia. Obtenemos

$$\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{v} \frac{dM}{dt}.$$

En este ejemplo, *dM/dt* es positiva porque el sistema está ganando masa con el tiempo. De aquí que, como es de esperarse, la fuerza externa necesaria debe apuntar en la dirección en que se mueve la banda. Nótese que la masa de la propia banda no

interviene en el problema, porque hemos supuesto que la banda se mueve a velocidad constante.

La potencia suministrada por la fuerza externa es

$$P_{ext} = \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{v} \cdot \left( \mathbf{v} \frac{dM}{dt} \right) = v^2 \left( \frac{dM}{dt} \right) .$$

Puesto que $v$ es una constante, podemos plantear esto como

$$P_{ext} = \frac{d(Mv^2)}{dt} = 2 \frac{d}{dt} (\tfrac{1}{2} Mv^2) = 2 \frac{dK}{dt} .$$

Esto nos dice que la potencia externa necesaria para mantener a la banda en movimiento es el doble de la cantidad en que está aumentando la energía cinética del sistema; nótese que no necesitamos considerar la energía cinética de la propia banda porque su velocidad es constante, y, por lo tanto, su energía cinética no cambia.

Está claro que la energía mecánica no se conserva en este caso. Sólo la mitad del trabajo efectuado por el motor que impulsa a la banda aparece como energía mecánica del sistema. ¿A dónde fue la otra mitad? Para responder a esta pregunta, apliquemos la conservación de la energía, ecuación 30, a un elemento pequeño de masa $dM$ que cae sobre la banda. Suponemos que cae desde una altura suficientemente pequeña para que su cambio en energía potencial pueda ser despreciado. En el intervalo de tiempo $dt$ que le toma a $dM$ comenzar a moverse con la velocidad de la banda, el trabajo efectuado por la fuente externa es $dW = P_{ext} dt = v^2 dM$. El cambio en la energía cinética de este elemento de masa es $+ \frac{1}{2}(dM)v^2$. Aplicando la ecuación 30 nos da, entonces,

$$\Delta E_{int} = v^2 \, dM - \tfrac{1}{2}(dM)v^2 = \tfrac{1}{2}(dM)v^2.$$

La energía interna del sistema aumenta en la misma cantidad que la energía cinética. Entonces la mitad de la potencia que entra va a la energía cinética de la arena en movimiento, mientras que la otra mitad termina como energía interna de la arena y la banda (resultando, quizás, de la fricción que existe entre la arena y la banda después de que la arena haya caído pero antes de que se mueva a la velocidad de la banda).

Este problema muestra ofrece el ejemplo de una fuerza ejercida con un cambio de masa, siendo la velocidad constante. Es también posible que la velocidad de un sistema de masa variable disminuya como resultado de la masa añadida al sistema, invirtiendo, en efecto, la operación de un cohete.* ■

* Véase, por ejemplo, "The Falling Raindrop: Variations on a Theme of Newton", por K. S. Krane, *American Journal of Physics*, febrero de 1981, pág. 113.)

## PREGUNTAS

1. ¿Está el centro de masa de un objeto sólido necesariamente dentro del objeto? Si no, dé un ejemplo.
2. La figura 23 muestra (*a*) un prisma triangular isósceles y (*b*) un cono circular recto cuyo diámetro tiene la misma longitud que la base del triángulo. El centro de masa del triángulo está a un tercio arriba de la base, pero el del cono está a sólo un cuarto. ¿Puede usted explicar la diferencia?

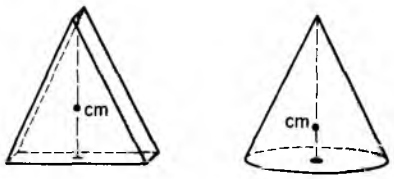



**Figura 23** Pregunta 2.

3. ¿Cómo se relaciona el concepto de centro de masa con el concepto de centro geográfico de un país? ¿Con el centro de población de un país? ¿Qué puede usted concluir del hecho de que el centro geográfico difiera del centro de población?
4. ¿Dónde está el centro de masa de la atmósfera de la Tierra?
5. Un aficionado a la escultura decide modelar un pájaro (Fig. 24). Por fortuna, el modelo final puede en realidad mantenerse enhiesto. El modelo está formado de una simple lámina gruesa de metal de espesor uniforme. De los puntos mostrados, ¿cuál es más probable que sea el centro de masa?

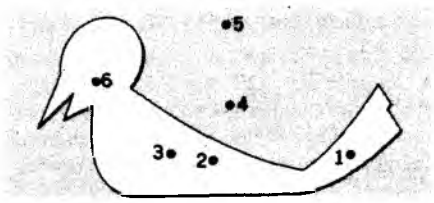



**Figura 24** Pregunta 5.

6. Hay quien sostiene que cuando un saltador de altura experimentado salva la barra, el centro de masa del atleta está realmente *abajo* de la barra. ¿Es esto posible?
7. Una bailarina de ballet que ejecuta un *grand jeté* (gran brinco; véase la Fig. 25) parece flotar horizontalmente en la parte central de su brinco. Demuestre cómo puede la bailarina maniobrar sus piernas durante el brinco de modo que, aunque el centro de masa siga en realidad la trayectoria parabólica esperada, su cabeza se mueva más o menos horizontalmente. (Véase "The Physics of Dance", por Kenneth Laws, *Physics Today*, febrero de 1985, pág. 24.)
8. Un objeto ligero y un objeto pesado tienen energías cinéticas de traslación iguales. ¿Cuál tiene el ímpetu más grande?



**Figura 25** Pregunta 7.

**9.** Un pájaro está en una jaula de alambre que cuelga de una báscula de resorte. ¿Es la lectura de la báscula, cuando el pájaro está volando, mayor, menor, o la misma que cuando el pájaro está quieto sobre la jaula?

**10.** ¿Puede un bote de vela propulsarse por el aire de un ventilador que esté unido al bote y soplando en las velas? Explique su respuesta.

**11.** ¿Puede un cuerpo tener energía sin que tenga ímpetu? Explique. ¿Puede un cuerpo tener ímpetu sin que tenga energía? Explíquelo.

**12.** Un canoero que está en un lago tranquilo puede alcanzar la orilla tirando bruscamente de la cuerda unida a la proa de la canoa. ¿Cómo explicaría usted esto? (En realidad, esto es posible.)

**13.** ¿Cómo podría una persona que está sentada y en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción salirse de esa superficie?

**14.** Un hombre está de pie y quieto sobre una gran lámina de hielo resbaladizo; en su mano sostiene un petardo encendido. Arroja el petardo al aire a un cierto ángulo (es decir, no verticalmente). Describa brevemente, pero lo más exacto posible, el movimiento del centro de masa del petardo y el movimiento del centro de masa del sistema consistente en hombre y petardo. Conviene describir cada movimiento durante cada uno de los periodos siguientes: (*a*) después de haber arrojado el petardo, pero antes de que explote; (*b*) entre la explosión y el primer trozo del petardo que caiga sobre el hielo; (*c*) entre el primer fragmento que caiga al hielo y el último fragmento al caer, y (*d*) durante el tiempo en que todos los fragmentos han caído pero ninguno ha llegado al hielo.

**15.** Justifique que la afirmación siguiente: "La ley de conservación del ímpetu lineal, aplicada a una partícula aislada, es equivalente a la primera ley del movimiento de Newton."

**16.** Usted arroja un cubo de hielo a una velocidad **v** dentro de un espacio caliente, con vacío y carente de gravedad. El cubo se funde gradualmente convirtiéndose en líquido y luego hierve para convertirse en vapor de agua. (*a*) ¿Es el cubo un sistema de partículas en todo momento? (*b*) Si es así, ¿es el mismo sistema de partículas? (*c*) ¿Sufre el movimiento del centro de masa algún cambio abrupto? (*d*) ¿Cambia el ímpetu lineal total?

**17.** Una partícula de masa $m = 0$ (un neutrino, posiblemente) transporta un ímpetu. ¿Cómo puede ser esto así a la vista de la ecuación 22, en la cual vemos que el ímpetu es directamente proporcional a la masa?

**18.** Si sólo una fuerza externa puede cambiar el estado de movimiento del centro de masa de un cuerpo, ¿cómo sucede que la fuerza interna de los frenos puede llevar a un automóvil al reposo?

**19.** Decimos que un automóvil no es acelerado por fuerzas internas sino más bien por la fuerzas externas que actúan sobre él por la carretera. ¿Por qué necesita el motor un automóvil?

**20.** ¿Puede el trabajo efectuado por fuerzas internas disminuir la energía cinética de un cuerpo? ... ¿aumentarlo?

**21.** (*a*) Si usted efectúa trabajo sobre un sistema, ¿adquiere el sistema necesariamente energía cinética? (*b*) Si el sistema adquiere energía cinética, ¿significa esto necesariamente que algún agente externo efectuó trabajo sobre él? Dé ejemplos. (Por "energía cinética" nos referimos aquí a la energía cinética media asociada con el movimiento del centro de masa.)

**22.** En el problema muestra 9 vimos un ejemplo (un patinador) en el que existía energía cinética pero no se efectuaba ningún trabajo externo. Consideremos el caso contrario. Un desarmador se mantiene con fuerza contra una rueda amoladora que está girando. Aquí se efectúa trabajo externo pero la energía cinética del desarmador no cambia. Explique esta aparente contradicción.

**23.** ¿Puede usted pensar en sistemas de masa variable distintos de los ejemplos dados en el texto?

**24.** Como ya dijimos en el texto, no podemos usar la ecuación $\mathbf{F}_{ext} = d(M\mathbf{v})/dt$ para un sistema de masa variable. Para demostrar esto (*a*) exprese la ecuación en la forma $(\mathbf{F}_{ext} - M\, d\mathbf{v}/dt)/(dM/dt) = \mathbf{v}$ y (*b*) demuestre que un lado de esta ecuación tiene el mismo valor en todos los marcos inerciales, mientras que el otro lado no lo tiene. De aquí que la ecuación generalmente no pueda ser válida. (*c*) Demuestre que la ecuación 42 no conduce a tal contradicción.

**25.** En 1920 un periódico destacado publicó el editorial siguiente acerca de los experimentos pioneros con cohetes de Robert H. Goddard, desechando la idea de que un cohete pudiera funcionar en el vacío: "Ese profesor Goddard, con su 'cátedra' en el Clark College y el favoritismo de la Smithsonian Institution, no conoce la relación de la acción a la reacción, ni tiene idea de la necesidad de poseer algo mejor que un vacío contra el cual reaccionar, cosa que sería absurda. Claro que a todas luces parece carecer del conocimiento que se da diariamente de cajón en cualquier secundaria." ¿Qué está mal en este argumento?

**26.** La velocidad final de la última fase de un cohete de fases múltiples es mucho mayor que la velocidad final de un cohete de una sola fase de igual masa total e igual dotación de combustible. Explique este hecho.

**27.** ¿Puede un cohete alcanzar una velocidad mayor que la velocidad de los gases de escape que lo impulsan? Explique por qué o por qué no.

**28.** ¿Existe algún otro método de propulsión en el espacio exterior que no sean los cohetes? De ser así, ¿de qué se trata, y por qué no se usa?

**29.** La ecuación 46 sugiere que la velocidad de un cohete puede aumentar sin límite si se quema el suficiente combustible. ¿Es esto razonable? ¿Cuál es el límite de aplicabilidad de la ecuación 46? ¿En qué paso, en la derivación de la ecuación 46, introdujimos este límite? (Véase "The Equation of Motion for Relativistic Particles and Systems with Variable Rest Mass", por Kalman B. Pomeranz, *American Journal of Physics*, diciembre de 1964, pág. 955.)

## PROBLEMAS

### *Sección 9-1 Sistemas de dos partículas*

**1.** (*a*) Resuelva la ecuación 4 para $x_1$ y la ecuación 5 para $v_1$, y sustituya ambos resultados junto con la ecuación 3 en la ecuación 2 para obtener

$$m_1^2 k d_i^2 = ku^2 + \mu \left(\frac{du}{dt}\right)^2,$$

donde $u = Mx_2 - Mx_{cm} - m_1 L$ y $\mu = m_1 m_2/M$. (*b*) Demuestre que este resultado puede resolverse para $u(t)$ usando las técnicas presentadas en la sección 8-4 para dar

$$u(t) = m_1 d_i \cos \omega t,$$

donde $\omega = \sqrt{k/\mu}$. (*c*) Resuelva para $x_1(t)$, $x_2(t)$, $v_1(t)$, y $v_2(t)$. Este problema demuestra que las ecuaciones del centro de masa nos permiten resolver para los movimientos de $m_1$ y $m_2$ en la situación mostrada en la figura 1.

### *Sección 9-2 Sistemas de muchas partículas*

**2.** ¿Dónde está el centro de masa de las tres partículas mostradas en la figura 26?

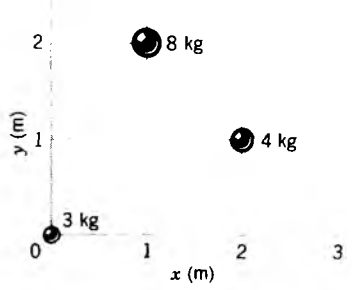



**Figura 26** Problema 2.

**3.** ¿Qué tan lejos está el centro de masa del sistema Tierra-Luna del centro de la Tierra? (Del apéndice C obtenga las masas de la Tierra y de la Luna, y la distancia entre los centros de ellas. Es interesante comparar la respuesta con el radio de la Tierra.)

**4.** Demuestre que la razón entre las distancias $x_1$ y $x_2$ de dos partículas respecto a su centro de masa es la razón inversa de sus masas, esto es, $x_1/x_2 = m_2/m_1$.

**5.** Un Chrysler con una masa de 2210 kg se está moviendo a lo largo de un tramo recto de carretera a 105 km/h. Es seguido por un Ford de 2080 kg de masa que se mueve a 43.5 km/h. ¿Qué velocidad tiene el centro de masa de los dos carros en movimiento?

**6.** Dos patinadores, uno con 65 kg de masa y el otro con 42 kg de masa, están de pie en una pista de hielo sosteniendo una pértiga de 9.7 m de longitud y de masa despreciable. Comenzando desde los extremos de la pértiga, los patinadores se jalan a sí mismos a lo largo de la pértiga hasta que se encuentran. ¿Qué distancia recorrerá el patinador de 42 kg?

**7.** Un hombre de masa $m$ se halla asido a una escalera de cuerda suspendida de un globo de masa $M$; véase la figura 27. El globo se halla estático respecto al terreno. (*a*) Si el hombre comienza a trepar por la escalera a una velocidad $v$ (con respecto a la escalera), ¿en qué dirección y a qué velocidad (respecto a la Tierra) se moverá el globo? (*b*) ¿Cuál es el estado de movimiento después de que el hombre deja de trepar?

**8.** Dos partículas $P$ y $Q$ están inicialmente en reposo y separadas por una distancia 1.64 m. $P$ tiene una masa de



**Figura 27** Problema 7.

1.43 kg y $Q$ una masa de 4.29 kg. $P$ y $Q$ se atraen entre sí con una constante de fuerza de $1.79 \times 10^{-2}$ N. No actúan sobre el sistema fuerzas externas. (*a*) Describa el movimiento del centro de masa. (*b*) ¿A qué distancia de la posición original de $P$ chocan las partículas?

**9.** Un cañón y un aprovisionamiento de balas de cañón están dentro de un carro de ferrocarril sellado de longitud $L$, como se muestra en la figura 28. El cañón dispara hacia la derecha; el carro recula hacia la izquierda. Las balas de cañón permanecen en el carro después de chocar contra la pared más alejada. (*a*) Después de que hayan sido disparadas todas las balas, ¿cuál es la distancia más grande a la que puede moverse el carro a partir de su posición original? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del carro después de que todas las balas han sido disparadas?

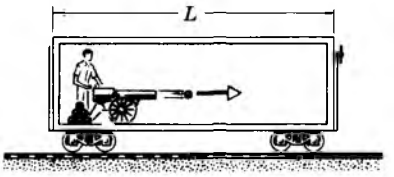



**Figura 28** Problema 9.

**10.** En una molécula de amoniaco ($NH_3$), los tres átomos de hidrógeno (H) forman un triángulo equilátero, siendo la distancia entre los centros de los átomos $16.28 \times 10^{-11}$ m, de modo que el centro del triángulo está a $9.40 \times 10^{-11}$ m de cada átomo de hidrógeno. El átomo de nitrógeno (N) está en la cúspide de la pirámide, estando la base constituida por los tres átomos de hidrógeno (véase la Fig. 29). La distancia nitrógeno-hidrógeno es de $10.14 \times 10^{-11}$ m y la relación de masa atómica nitrógeno/hidrógeno es 13.9. Localice el centro de masa con relación al átomo de nitrógeno.

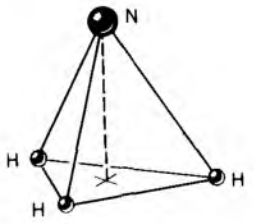



**Figura 29** Problema 10.

**11.** Dos cuerpos, cada uno hecho con juego de pesas, están unidos por un cordón ligero que pasa por una polea ligera, sin fricción, un diámetro de 56.0 mm. Los dos cuerpos están al mismo nivel. Cada uno tiene originalmente una masa de 850 g. (*a*) Ubique su centro de masa. (*b*) Se transfieren 34 g de un cuerpo al otro, pero se impide que los cuerpos se muevan. Localice el centro de masa. (*c*) Ahora los dos cuerpos se dejan caer. Describa el movimiento del centro de masa y determine su aceleración.

**12.** Se dispara una bala de un arma a una velocidad de salida de 466 m/s, a un ángulo de 57.4° con la horizontal. En la parte más alta de la trayectoria, la bala explota en dos fragmentos de igual masa. Uno de los fragmentos, cuya velocidad inmediatamente después de la explosión es cero, cae verticalmente. ¿A qué distancia del cañón cae el otro fragmento, suponiendo un terreno llano?

**13.** Una cadena flexible, uniforme, de longitud $L$, con un peso por unidad de longitud $\lambda$, pasa sobre una clavija pequeña, sin fricción; véase la figura 30. Se deja caer desde una posición de reposo de modo que una longitud de cadena $x$ cuelga de un lado, y una longitud $L - x$ cuelga del otro lado. Halle la aceleración $a$ en función de $x$.

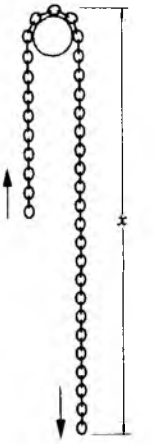



**Figura 30** Problema 13.

**14.** Un perro que pesa 10.8 lb está parado sobre un bote de fondo plano de modo tal que el animal se encuentra a 21.4 ft de la orilla. Camina 8.50 ft por el bote hacia la orilla y luego se detiene. El bote pesa 46.4 lb, y podemos suponer que no existe fricción entre el bote y el agua. ¿A qué distancia está el perro de la orilla al final de este tiempo? (*Sugerencia:* El centro de masa del bote + el perro no se mueve. ¿Por qué?). También hay orilla hacia la izquierda en la figura 31.

**15.** Ricardo, que tiene una masa de 78.4 kg, y Judith, quien pesa menos, se divierten al anochecer en un lago dentro de una canoa de 31.6 kg. Cuando la canoa está en reposo en aguas tranquilas, intercambian asientos, los cuales se hallan separados a una distancia de 2.93 m y simétricamente situados con respecto al centro de la canoa. Ricardo observa que la canoa se movió 41.2 cm con relación a un tronco sumergido y calcula la masa de Judith. ¿Cuál es esta masa?

**16.** Una persona de 84.4 kg está parada en la parte posterior de un trineo de vela que se mueve sobre el hielo; el trineo pesa 425 kg y avanza a 4.16 m/s por el hielo, que puede considerarse sin fricción. Decide caminar hacia el frente del bote, de 18.2 m de longitud y lo hace a una velocidad de 2.08 m/s respecto al bote. ¿Qué distancia recorrió el bote sobre el hielo mientras él estuvo caminando?




**Figura 31** Problema 14.

*Sección 9-3 Centro de masa de objetos sólidos*

**17.** Tres varillas delgadas, cada una de longitud $L$, están dispuestas en forma de **U** invertida, como se muestra en la figura 32. Cada una de las dos varillas que están en los brazos de la **U** tienen una masa $M$; la tercera varilla tiene una masa de $3M$. ¿Dónde está el centro de masa del conjunto?

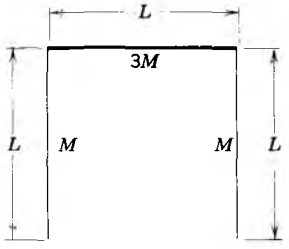



**Figura 32** Problema 17.

**18.** La figura 33 muestra una placa compuesta con dimensiones de 22.0 cm × 13.0 cm × 2.80 cm. La mitad de la placa está hecha de aluminio (densidad = 2.70 g/cm$^3$) y la mitad de hierro (densidad = 7.85 g/cm$^3$), como se muestra. ¿Dónde está el centro de masa de la placa?

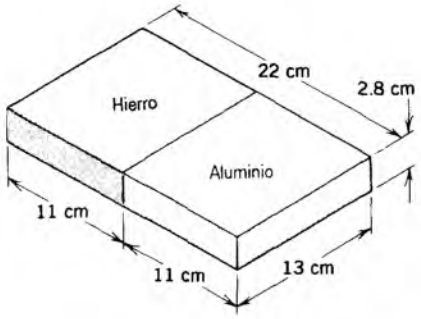



**Figura 33** Problema 18.

**19.** Una caja, abierta por arriba, que tiene la forma de un cubo de 40 cm de lado está construida de lámina de metal. Halle las coordenadas del centro de masa de la caja respecto al sistema de coordenadas que se muestra en la figura 34.

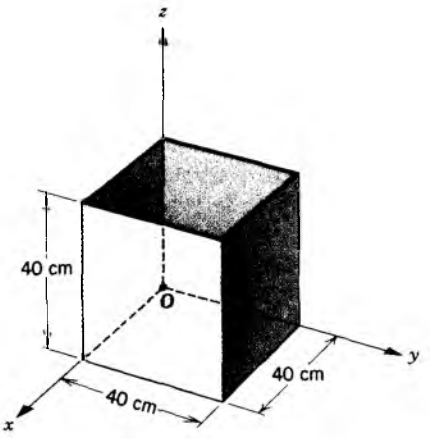



**Figura 34** Problema 19.

**20.** Un tanque de almacenamiento cilíndrico está inicialmente lleno de aerogasolina. El tanque se vacía luego mediante una válvula situada en el fondo; véase la figura 35. (*a*) Describa cualitativamente el movimiento del centro de masa del tanque y del contenido restante mientras se extrae la gasolina. (*b*) ¿Cuál es la profundidad $x$ a la cual está lleno el tanque cuando el centro de masa del tanque y del contenido restante alcanza su punto más bajo? Exprese la respuesta en términos de $H$, la altura del tanque; $M$, su masa, y $m$, la masa de la gasolina que cabe en él.

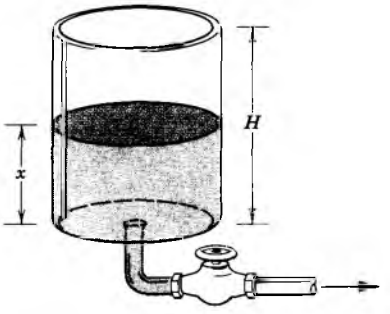



**Figura 35** Problema 20.

**21.** Halle el centro de masa de una placa semicircular homogénea, siendo $R$ el radio del círculo.

*Sección 9-4 Ímpetu lineal de una partícula*

**22.** ¿A qué velocidad debe avanzar un Volkswagen de 816 kg (*a*) para tener el mismo ímpetu que un Cadillac de 2650 kg que va a 16.0 km/h y (*b*) para tener la misma energía cinética? (*c*) Haga los mismos cálculos acerca de un camión de 9080 kg en lugar del Cadillac.

**23.** Un camión de 2000 kg que viaja hacia el norte a razón de 40.0 km/h da la vuelta hacia el este y acelera hasta los

50.0 km/h. (*a*) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética del camión? (*b*) ¿Cuál es la magnitud y la dirección del cambio de ímpetu del camión?

**24.** Un objeto de 4.88 kg a una velocidad de 31.4 m/s golpea una placa de acero a un ángulo de 42.0° y rebota a igual velocidad y ángulo (Fig. 36). ¿Cuál es el cambio (magnitud y dirección) del ímpetu lineal del objeto?

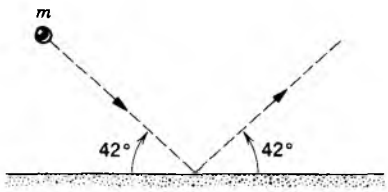



**Figura 36** Problema 24.

**25.** Una pelota de 52.4 g es arrojada desde el suelo al aire, a una velocidad inicial de 16.3 m/s y a un ángulo de 27.4° sobre la horizontal. (*a*) ¿Cuáles son los valores de la energía cinética de la pelota inicialmente y en el momento antes de que toque el suelo? (*b*) Halle los valores correspondientes del ímpetu (magnitud y dirección) y del cambio de ímpetu. (*c*) Demuestre que el cambio de ímpetu es igual al peso de la pelota multiplicado por el tiempo de vuelo, y de allí halle el tiempo de vuelo.

**26.** Una partícula de masa $m$ tiene un ímpetu lineal $p$ igual a $mc$. ¿Cuál es su velocidad en función de $c$, la velocidad de la luz?

**27.** Demuestre que la ecuación 23 se reduce a la ecuación 21 para velocidades $v \ll c$. *Sugerencia*: Demuestre que la ecuación 23 puede expresarse así:

$$K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right).$$

**28.** Un electrón tiene una velocidad de 0.990$c$. (*a*) Halle su ímpetu lineal, en kg · m/s. (*b*) Exprese este ímpetu en las unidades MeV/$c$.

### *Sección 9-6 Conservación del ímpetu lineal*

**29.** Una persona de 195 lb que está de pie sobre una superficie de fricción despreciable patea hacia adelante una piedra de 0.158 lb que está a sus pies de modo que ésta adquiere una velocidad de 12.7 ft/s. ¿Qué velocidad adquiere la persona como resultado?

**30.** Un hombre de 75.2 kg está subido a un carro de 38.6 kg que está en marcha a una velocidad de 2.33 m/s. El hombre salta del carro de modo que toca el suelo a una velocidad horizontal de cero. Halle el cambio resultante en la velocidad del carro.

**31.** Una plataforma de ferrocarril de peso $W$ puede rodar sin fricción a lo largo de una vía horizontal recta. Inicialmente un hombre de peso $w$ está parado sobre la plataforma que avanza hacia la derecha a velocidad $v_0$. ¿Cuál es el cambio en la velocidad de la plataforma si el hombre corre hacia la izquierda (Fig. 37), de modo que su velocidad con relación a la plataforma es de $v_{rel}$ en el momento antes de que salte hacia afuera en el extremo izquierdo?

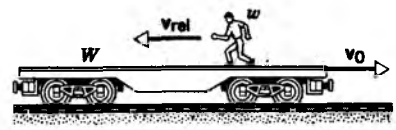



**Figura 37** Problema 31.

**32.** El trineo de un cohete con una masa de 2870 kg se mueve a razón de 252 m/s sobre unos rieles. En cierto punto, un canjilón del trineo se hunde en un depósito de agua situado entre los rieles y saca agua para echarla dentro de un tanque vacío del trineo. Determine la velocidad del trineo después de que el tanque se ha llenado con 917 kg de agua.

**33.** La ametralladora especial de un guardabosque dispara al minuto 220 balas de hule de 12.6 g de peso a una velocidad de salida de 975 m/s. ¿Cuántas balas debe disparar contra un animal de 84.7 kg que carga hacia el guardabosque a 3.87 m/s con objeto de detener al animal en su marcha? (Suponga que las balas viajan horizontalmente y caen al suelo después de dar en el blanco.)

**34.** Un vehículo espacial viaja a 3860 km/h con respecto a la Tierra cuando el motor vacío del cohete se desprende y es enviado de regreso a una velocidad de 125 km/h con respecto al módulo de mando. La masa del motor es el cuádruple de la masa del módulo. ¿Cuál es la velocidad del módulo de mando después de la separación?

**35.** La última fase de un cohete viaja a una velocidad de 7600 m/s. Esta última fase está hecha de dos partes acopladas entre sí, que comprenden, una caja del cohete con una masa de 290.0 kg y una cápsula de carga útil con una masa de 150.0 kg. Cuando se sueltan las grapas que unen a las dos partes, un resorte comprimido hace que éstas se separen a una velocidad relativa de 910.0 m/s. (*a*) ¿Cuáles son las velocidades de las dos partes después de que se han separado? Suponga que todas las velocidades son a lo largo de la misma línea. (*b*) Halle la energía cinética total de las dos partes antes y después de haberse separado y explique la diferencia, si la hay.

**36.** Una vasija en reposo explota, rompiéndose en tres partes. Dos partes, una con el doble de masa de la otra, se desprenden, de modo que una es perpendicular a la otra, a la misma velocidad de 31.4 m/s. La tercera parte tiene el triple de masa de la parte más liviana. Halle la magnitud y la dirección de su velocidad inmediatamente después de la explosión. (Especifique la dirección dando el ángulo desde la línea de recorrido de la parte menos pesada.)

**37.** Un núcleo radiactivo, inicialmente en reposo, se desintegra emitiendo un electrón y un neutrino en ángulos rectos entre sí. El ímpetu del electrón es de $1.2 \times 10^{-22}$ kg · m/s y el del neutrino es de $6.4 \times 10^{-23}$ kg · m/s. (*a*) Halle la dirección y la magnitud del ímpetu del núcleo al recular. (*b*) La masa del núcleo residual es de $5.8 \times 10^{-26}$ kg. ¿Cuál es su energía cinética de reculada? El *neutrino* es una de las partículas fundamentales de la naturaleza.

**38.** Un carro-plataforma de ferrocarril de 1930 kg, que puede moverse sobre los rieles virtualmente sin fricción, está detenido sin movimiento cerca de una plataforma de la estación. Un jugador de fútbol de 108 kg corre a lo largo de la plataforma paralelamente a las vías a razón de 9.74 m/s. El jugador salta sobre la parte trasera del carro-plataforma. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del carro-plataforma después de que el jugador está a bordo y en reposo sobre él? (*b*) Ahora el jugador comienza a caminar, a razón de 0.520 m/s con relación al carro-plataforma, hacia el frente del carro. ¿Cuál es la velocidad del carro-plataforma al caminar el jugador?

**39.** Una bala de 3.54 g se dispara horizontalmente contra dos bloques que descansan sobre una mesa sin fricción, como se muestra en la figura 38*a*. La bala atraviesa el primer bloque, que tiene una masa de 1.22 kg y se empotra en el segundo, que tiene una masa de 1.78 kg. Al hacerlo, se imprimen en los bloques velocidades de 0.630 m/s y 1.48 m/s, respectivamente, como se muestra en la figura 38*b*. Despreciando la masa extraída del primer bloque por la bala, halle (*a*) la velocidad de la bala inmediatamente después de salir del primer bloque y (*b*) la velocidad original de la bala.

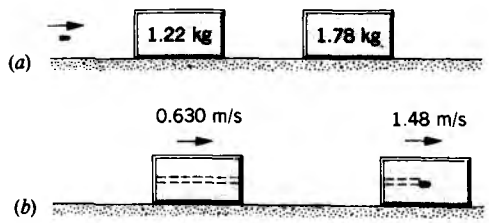



**Figura 38** Problema 39.

**40.** Un cuerpo de 8.0 kg de masa avanza a 2.0 m/s sin la influencia de fuerza externa alguna. En cierto instante ocurre una explosión interna, que divide al cuerpo en dos trozos de 4.0 kg de masa cada uno; la explosión transmite al sistema de dos trozos una energía cinética de traslación de 16 J. Ninguno de los trozos abandona la línea de movimiento original. Determine la velocidad y la dirección del movimiento de cada uno de los trozos después de la explosión.

**41.** Supóngase que el carro del problema 31 está inicialmente en reposo y sostiene a $n$ personas de peso $w$ cada una. Si cada persona corre sucesivamente a una velocidad relativa $v_{rel}$ y salta desde el extremo del carro, ¿imprimen en al carro una velocidad mayor que si todos corrieran y saltaran al mismo tiempo?

**42.** Un cañón de 1400 kg que dispara un proyectil de 70.0 kg a una velocidad de salida de 556 m/s se halla fijo a un ángulo de elevación de 39.0° sobre la horizontal. El cañón está montado sobre rieles sin fricción, con el fin de que pueda recular libremente. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del proyectil respecto a la Tierra? (*b*) ¿A qué ángulo con respecto al terreno es lanzado el proyectil? (*Sugerencia*: La componente horizontal del ímpetu del sistema permanece sin cambio al disparar el arma.)

**43.** Un bloque de masa $m$ reposa sobre una cuña de masa $M$ la cual, a su vez, descansa sobre una mesa horizontal, como se muestra en la Fig. 39. Todas las superficies carecen de fricción. Si el sistema parte del reposo estando el punto $P$ del bloque a una distancia $h$ sobre la mesa, halle la velocidad de la cuña en el instante en que el punto $P$ toca la mesa.

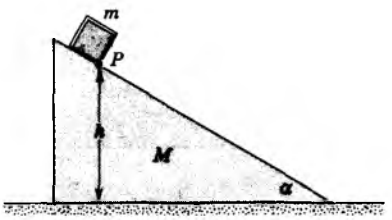



**Figura 39** Problema 43.

### *Sección 9-7 Trabajo y energía en un sistema de partículas*

**44.** Un automóvil con pasajeros tiene un peso de 3680 lb (= 16,400 N) y se mueve a 70.0 mi/h (= 113 km/h) cuando el conductor frena hasta el alto. La carretera ejerce una fuerza de 1850 lb (= 8230 N) sobre las ruedas y éstas no patinan. Calcule la distancia a la que se detiene.

**45.** Usted se agacha desde una posición erecta, bajando su centro de masa 18.0 cm durante el proceso. Luego salta verticalmente en el aire. La fuerza que el suelo ejerce sobre usted cuando salta es el triple de su peso. ¿Cuál es su velocidad hacia arriba cuando después de la posición erecta se separa del suelo?

**46.** Una mujer de 55.0 kg brinca verticalmente en el aire desde una posición en cuclillas en que su centro de masa está a 40.0 cm sobre el suelo. Cuando sus pies dejan el suelo su centro de masa está a 90.0 cm sobre el suelo y se eleva a 120 cm cuando alcanza la parte más alta de su brinco. (*a*) ¿Qué fuerza hacia arriba, supuesta constante, ejerce el suelo sobre ella? (b) ¿Qué velocidad máxima alcanza?

**47.** Un jugador de hockey sobre hielo, de 116 kg, patina a razón de 3.24 m/s hacia un barandal situado al extremo de la pista y se detiene asiendo el barandal con los brazos extendidos. Durante este proceso de detención su centro de masa se mueve 34.0 cm hacia el barandal. (*a*) Halle la fuerza promedio que debe ejercer sobre el barandal. (*b*) ¿Cuánta energía interna pierde?

**48.** La National Transportation Safety Board (Oficina Nacional para la Seguridad en el Transporte) está probando la eficiencia en el choque de un auto nuevo. El vehículo de 2340 kg se dirige a 12.6 km/h contra un parapeto. Durante el impacto, el centro de masa del auto se mueve hacia adelante 64.0 cm; el parapeto se comprime 8.30 cm. Desprecie la fricción entre el auto y la carretera. (*a*) Halle la fuerza, supuesta constante, ejercida por el parapeto sobre el auto. (*b*) ¿En cuánto aumenta la energía interna del auto?

**49.** Midamos la energía total de un sistema de $N$ partículas en un marco de referencia arbitrario, de modo que $K = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2$. En el marco de referencia del centro de masa, las velocidades son $v_i' = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{cm}$, donde $\mathbf{v}_{cm}$ es la velocidad del centro de masa con relación al marco de referencia original. Recordando que $v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$, demuestre que la energía cinética puede expresarse así:

$$K = K_{int} + K_{cm}$$

donde $K_{int} = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ y $K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$. Esto demuestra que la energía cinética de un sistema de partículas puede dividirse en un término interno y un término del centro de masa, como apuntábamos en la sección 9-7. La energía cinética interna se mide en un marco de referencia en el cual el centro de masa está en reposo; por ejemplo, los movimientos al azar de las moléculas de gas en un recipiente en reposo son responsables de su energía cinética de traslación interna.

### *Sección 9-8 Sistemas de masa variable*

**50.** Un cohete en reposo en el espacio, donde no existe virtualmente gravedad, tiene una masa de $2.55 \times 10^5$ kg, de los cuales $1.81 \times 10^5$ kg son de combustible. El motor consume combustible a razón de 480 kg/s, y la velocidad de eyección es de 3.27 km/s. El motor se enciende durante 250 s. (*a*) Halle el empuje del motor del cohete. (*b*) ¿Cuál es la masa del cohete después de la combustión del motor? (*c*) ¿Cuál es la velocidad final alcanzada?

**51.** Consideremos un cohete en reposo en el espacio vacío. ¿Cuál debe ser la *razón de masa* (razón de la masa inicial a la masa final) con objeto de que, después de haberse encendido el motor, la velocidad del cohete sea (*a*) igual a la velocidad de los gases expulsados y (*b*) igual al doble de la velocidad de los gases expulsados?

**52.** Durante una misión lunar es necesario hacer una corrección a medio camino de 22.6 m/s en la velocidad de la nave espacial, la cual se mueve a razón de 388 m/s. La velocidad de los gases de escape del motor del cohete es de 1230 m/s. ¿Qué fracción de la masa inicial de la nave espacial debe ser lanzada como gases de escape?

**53.** Un cohete de $1.11 \times 10^5$ kg de masa total, de los cuales $8.70 \times 10^4$ kg son de combustible, va a ser disparado verticalmente. El combustible se quemará en una cantidad constante de 820 kg/s. Con relación al cohete, ¿cuál es la velocidad mínima de los gases de escape que permite el ascenso en el disparo?

**54.** Un tobogán de 5.4 kg que transporta 35 kg de arena se desliza desde el reposo por una pendiente helada de 93 m de longitud, inclinada a 26° abajo de la horizontal. La arena se fuga de la parte trasera del tobogán a razón de 2.3 kg/s. ¿Cuánto tiempo le tomará al tobogán alcanzar el fondo de la pendiente?

**55.** Para mantener en movimiento una banda transportadora cuando transporta equipaje se requiere una fuerza de impulsión mayor que con la banda vacía. ¿Qué fuerza de impulsión adicional se necesita si la banda se mueve a una velocidad constante de 1.5 m/s y la tasa a la cual se coloca el equipaje en un extremo de la banda y se retira en el otro extremo es de 20 kg/s? Supóngase que el equipaje se deja caer verticalmente sobre la banda; quienes retiran el equipaje lo sujetan y lo llevan al reposo con relación a ellos mismos antes de levantarlo de la banda.

**56.** Un carro de carga, abierto en la parte superior, que pesa 9.75 tons métricas, corre a lo largo de una vía nivelada con fricción despreciable a razón de 1.36 m/s cuando comienza a llover fuertemente. Las gotas de lluvia caen verticalmente con respecto al suelo. ¿Cuál es la velocidad del carro cuando ha reunido 0.50 tons métricas de lluvia? ¿Qué supuestos, en caso de haber alguno, debe usted asumir para dar su respuesta?

**57.** Un cohete de 5860 kg se prepara para el disparo vertical. La velocidad de los gases de escape es de 1.17 km/s. ¿Cuánto gas por segundo deberá ser expelido para proporcionar el empuje necesario (*a*) para superar el peso del cohete y (*b*) para darle al cohete una aceleración inicial hacia arriba de 18.3 m/s$^2$? Nótese que, al contrario de la situación descrita en el problema muestra 12, la gravedad está presente aquí como una fuerza externa.

**58.** Dos barcazas largas avanzan en la misma dirección en aguas tranquilas, una a velocidad de 9.65 km/h y la otra a 21.2 km/h. Cuando están una junto a la otra, se traspalea carbón desde la más lenta a la más rápida a razón de 925 kg/min; véase la figura 40. ¿Cuánta fuerza adicional deberá abastecerse por los motores que impulsan a cada barcaza si ninguna va a cambiar su velocidad? Supóngase que el traspaleo se hace siempre perfectamente hacia el lado y que las fuerzas de fricción entre las barcazas y el agua no dependen del peso de las barcazas.

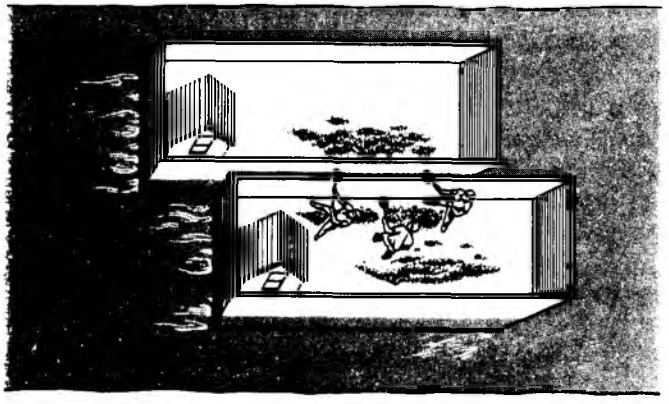


**Figura 40** Problema 58.

**59.** Un avión de propulsión a chorro vuela a 184 m/s (= 604 ft/s). El motor absorbe 68.2 m$^3$ (= 2410 ft$^3$) de aire, que representa una masa de 70.2 kg (= 4.81 slugs) por segundo. El aire se emplea para quemar 2.92 kg (= 0.200 slug) de combustible por segundo. La energía se emplea para comprimir los productos de combustión y expulsarlos en la parte posterior del motor a 497 m/s (= 1630 ft/s) en relación al avión. Halle (*a*) el empuje del motor a propulsión y (*b*) la potencia desarrollada (en hp).

**60.** Un cordón flexible, inextensible, de longitud $L$ está arrollado en un tubo liso, al cual está bien aparejado. El tubo

contiene una curva en ángulo recto y está colocado en el plano vertical de modo que un brazo es vertical y el otro horizontal. Desde el comienzo, en $t = 0$, una longitud $y_0$ del cordón cuelga suspendida del brazo vertical. El cordón se suelta y se desliza a través del tubo, de modo que en cualquier tiempo $t$ posterior, se mueve a una velocidad $dy/dt$. donde $y(t)$ es la longitud del cordón que está entonces colgando verticalmente. (*a*) Explique en función del problema de masa variable, $\mathbf{v}_{rel} = 0$, de modo que la ecuación del movimiento tiene la forma $m\, d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}_{ext}$. (*b*) Demuestre que la ecuación específica del movimiento es $d^2y/dt^2 = gy$. (*c*) Demuestre que la conservación de la energía mecánica conduce a $(dy/dt)^2 - gy^2 =$ a constante, y que esto es consistente con (*b*). (*d*) Demuestre que $y = (y_0/2)\,(e^{\sqrt{g/L}t} + e^{-\sqrt{g/L}t})$ es una solución a la ecuación del movimiento [(sustituyendo en (*b*)] y explique la solución.

# CAPÍTULO 10

# COLISIONES

*Una de las aplicaciones principales de la conservación del ímpetu lineal se encuentra en el análisis de las colisiones entre objetos. Sin importar el tamaño de los objetos, se traten éstos de partículas elementales o de galaxias, y sin importar tampoco qué fuerzas se hallen implicadas, desde la más fuerte (la fuerza nuclear) a la más débil (la gravedad), nos regimos por la ley de la conservación del ímpetu lineal, ley que nos permite el estudio de estos procesos.*

*En este capítulo expondremos cómo pueden analizarse los procesos de colisión mediante el uso de las leyes de la conservación de la energía y del ímpetu, dando ejemplos tomados del campo de la física subatómica para explicar cómo se obtiene la información fundamental respecto al mundo físico a partir del estudio de los resultados de las diversas clases de colisiones.*

## 10-1 ¿QUÉ ES COLISIÓN?

En la colisión, una fuerza relativamente grande actúa sobre cada partícula que interviene en el choque durante un tiempo relativamente corto. La idea básica de colisión consiste en que el movimiento de las partículas que colisionan (o cuando menos de una de ellas) cambia de manera brusca, y que podemos hacer una separación relativamente clara de los tiempos de "antes de la colisión" y de los de "después de la colisión".

Cuando un bate de béisbol golpea la bola, por ejemplo, el comienzo y el final de la colisión pueden determinarse con bastante precisión. El bate está en contacto con la bola durante un intervalo bastante corto en comparación con el tiempo durante el cual observamos a la bola. Durante la colisión el bate ejerce una fuerza grande sobre la bola (Fig. 1). Esta fuerza varía con el tiempo de modo complejo, el cual podríamos medir sólo con gran dificultad. Tanto la bola como el bate se deforman en la colisión. Las fuerzas que actúan durante un tiempo corto en comparación con el tiempo de observación del sistema se denominan fuerzas *impulsivas*.

Cuando una partícula alfa (el núcleo del $^4$He) colisiona con otro núcleo (Fig. 2), la fuerza que actúa entre ellos puede ser la bien conocida fuerza electrostática de repulsión asociada con las cargas de las partículas. Las partículas pueden no llegar a tocarse en realidad, pero podemos seguir hablando de colisión, puesto que una fuerza relativamente grande, que actúa durante un tiempo corto en comparación con el tiempo en que la partícula alfa está en observación, tiene un efecto sustancial en el movimiento de la partícula alfa.

Podemos incluso hablar de la colisión entre dos galaxias (Fig. 3), si estamos preparados para observarlas durante una escala de tiempo del orden de millones o miles de millones de años. (Pero una alternativa más viable es, desde luego, ¡acortar este lapso de tiempo por medio de un modelo de computadora!)

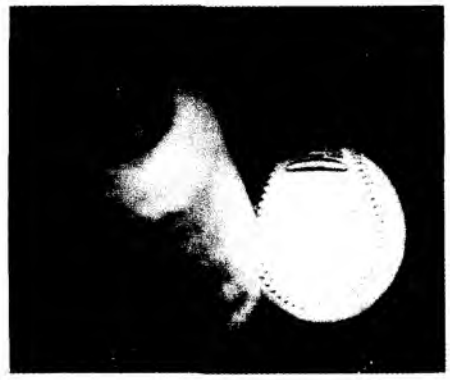


**Figura 1** Fotografía a alta velocidad de un bate al chocar contra una bola de béisbol. Nótese la deformación de la bola, que indica la gran fuerza impulsiva ejercida por el bate.

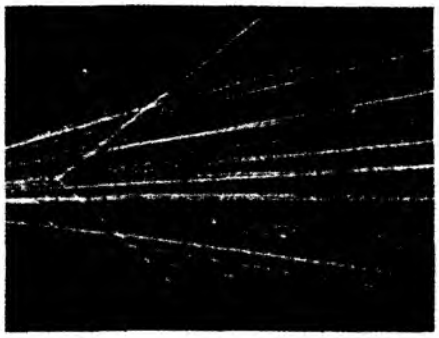


**Figura 2** Una partícula alfa colisiona con un núcleo de helio en una cámara de niebla. La mayoría de las partículas que inciden (procedentes de la izquierda) la atraviesan sin chocar.

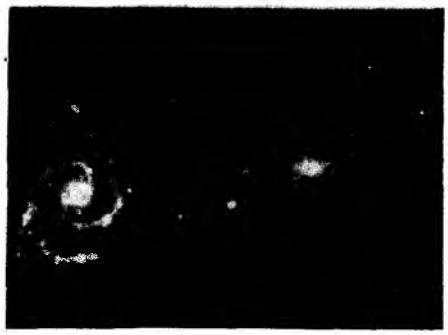


**Figura 3** Colisión de dos galaxias.

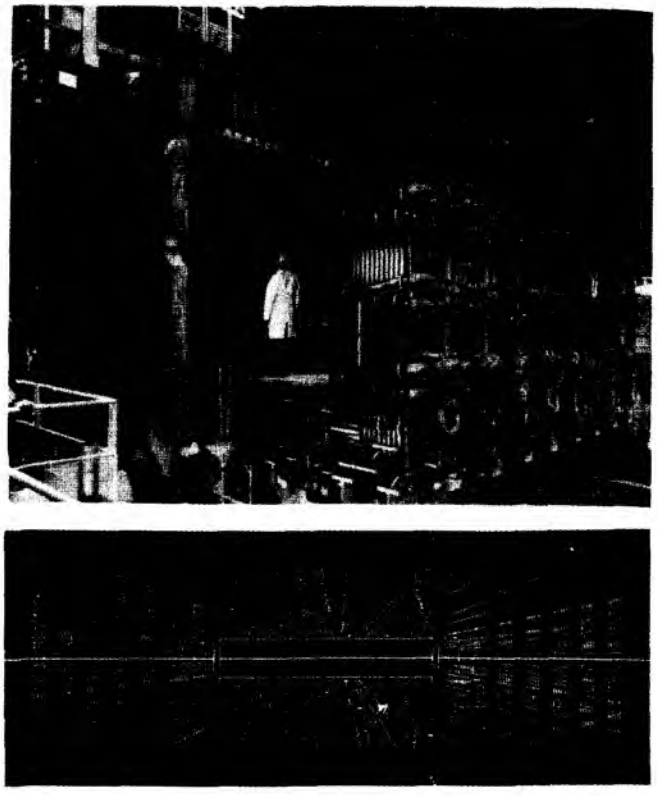



**Figura 4** (*a*) El detector masivo UA1 utilizado en el aparato colisionador protón-protón de CERN, la instalación para investigaciones de la física de la partícula cerca de Ginebra, Suiza. (*b*) Una reconstrucción por computadora de las trayectorias de las partículas producidas en una colisión protón-protón. Tales reconstrucciones fueron utilizadas en 1983 para comprobar la existencia de las partículas llamadas W y Z, que confirmaron una teoría que trata a la fuerza electromagnética y a la fuerza nuclear débil como aspectos diferentes de una sola fuerza más básica.

Las colisiones entre partículas elementales proporcionan la principal fuente de información de su estructura interna. Cuando dos partículas colisionan a energía elevada, los productos de la colisión suelen ser muy diferentes a las partículas originales (Fig. 4). A veces, estas colisiones provocan cientos de partículas producto, cuya masa total puede ser bastante mayor que las masas de las partículas en colisión (la energía cinética de las partículas incidentes se convierte en energía en reposo en la colisión). Podemos reconstruir el suceso original al estudiar las trayectorias de las partículas salientes y aplicar las leyes fundamentales de la conservación.

En una escala diferente, quienes estudian los accidentes de tránsito tratan también de reconstruir los choques. A partir de las trayectorias y de los patrones de impacto de los vehículos que chocan entre sí (Fig. 5), se pueden deducir a menudo detalles tan importantes como la velocidad y la dirección del movimiento de los dos vehículos antes del choque.

Otra clase de colisión es la que sucede entre una sonda espacial y un planeta, colisión a la que se le llama "efecto de honda"; en ésta, la velocidad y la dirección de la sonda espacial pueden ser alteradas por un "encuentro cercano" con un planeta (en movimiento). La sonda no toca en realidad al planeta, sino que entra fuertemente bajo su influencia gravitatoria durante un tiempo muy corto en comparación con la duración del viaje de la sonda espacial. Así pues, estamos justificados al llamar "colisiones" a tales encuentros.

## 10-2 IMPULSO E ÍMPETU

Al estudiar las colisiones en este capítulo, nuestro objetivo es aprender lo que podamos acerca de los movimientos finales de las partículas en colisión a partir de los principios de conservación del ímpetu y de la energía, dados los movimientos iniciales de las partículas en colisión y suponiendo que no sabemos nada acerca de las fuerzas que actúan durante el choque.

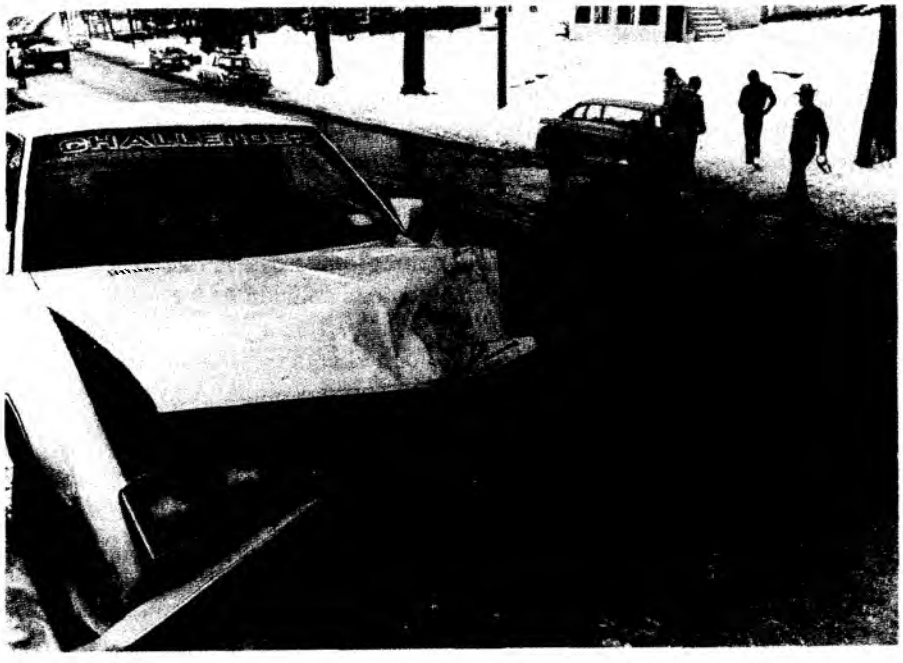


**Figura 5** Un choque entre dos automóviles. Gran parte de la energía cinética incidente se convierte en energía de deformación de los dos automóviles. Los expertos en la reconstrucción del accidente utilizan la conservación del ímpetu para calcular las velocidades antes del choque.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

Supongamos que la figura 6 muestra la magnitud de la fuerza neta ejercida en un cuerpo durante una colisión. La colisión comienza en el tiempo $t_i$ y termina en el tiempo $t_f$, siendo la fuerza nula antes y después de la colisión. Según la segunda ley de Newton en la forma $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ podemos escribir el cambio del ímpetu $d\mathbf{p}$ de una partícula en un tiempo $dt$ durante el que actúe sobre él una fuerza $\mathbf{F}$ en la forma:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\, dt.$$

Podemos hallar el cambio del ímpetu del cuerpo durante una colisión al integrar sobre el tiempo de colisión, esto es, entre las condiciones iniciales (el ímpetu $\mathbf{p}_i$ en el tiempo $t_i$) y las condiciones finales (el ímpetu $\mathbf{p}_f$ en el tiempo $t_f$):

$$\int_{p_i}^{p_f} d\mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt. \qquad (1)$$

El lado izquierdo de la ecuación 1 es precisamente el cambio del ímpetu, $\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$. El lado derecho, que depende tanto de la intensidad de la fuerza como de su duración, se llama *impulso* $\mathbf{J}$ de la fuerza:

$$\mathbf{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt, \qquad (2)$$

y de la ecuación 1 se deduce que

$$\mathbf{J} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i. \qquad (3)$$

La ecuación 3 es el enunciado matemático del *teorema impulso-ímpetu*:

*El impulso de la fuerza neta que actúa sobre una partícula durante un intervalo de tiempo determinado es igual al cambio en el ímpetu de la partícula durante ese intervalo.*

Tanto el impulso como el ímpetu son vectores y tienen las mismas unidades y dimensiones.

Aunque empleamos la ecuación 3 en este capítulo sólo en situaciones que impliquen fuerzas impulsivas (esto es, aquéllas de corta duración en comparación con el tiempo de observación), tal limitación no es parte de esa ecuación. La ecuación 3 es tan general como la segunda ley de Newton, de la cual se deriva. Por ejemplo, podríamos usar

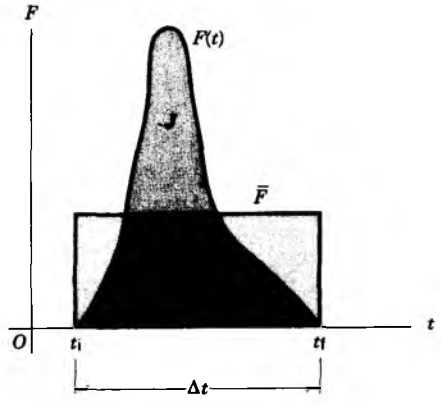



**Figura 6** Una fuerza impulsiva $F(t)$ varía de una manera arbitraria con el tiempo durante una colisión que va desde $t_i$ hasta $t_f$. El área bajo la curva $F(t)$ es el impulso $J$, y el rectángulo limitado por la fuerza promedio $\bar{F}$ tiene un área igual.

la ecuación 3 para hallar el ímpetu adquirido por un cuerpo que cae en la gravedad de la Tierra.

El teorema impulso-ímpetu es muy similar al teorema trabajo-energía que derivamos en el capítulo 7. Ambos rigen para partículas aisladas y ambos se derivan directamente de la segunda ley de Newton. El trabajo implica una integral de la fuerza neta en cuanto a la posición, mientras que el impulso implica la integral de la fuerza neta en cuanto al tiempo. El teorema trabajo-energía es una ecuación escalar que trata del cambio en la energía cinética de la partícula, mientras que el teorema impulso-ímpetu es una ecuación vectorial que trata del cambio en el ímpetu de la partícula.

Se supone que la fuerza impulsiva cuya magnitud se representa en la figura 6 tiene una dirección constante. La magnitud del impulso de esta fuerza está representada por el área bajo la curva $F(t)$. Podemos representar esa misma área por el rectángulo de la figura 6 de anchura $\Delta t$ y altura $\overline{F}$, donde $\overline{F}$ es la magnitud de la *fuerza promedio* que actúa durante el intervalo $\Delta t$. Entonces

$$J = \overline{F}\,\Delta t. \tag{4}$$

En una colisión como la de la bola y el bate de la figura 1 es difícil medir a $F(t)$ directamente, pero podemos estimar $\Delta t$ (quizás unos cuantos milisegundos) y obtener un valor razonable para $\overline{F}$ basado en el impulso calculado de acuerdo con la ecuación 3 a partir del cambio en el ímpetu de la bola (véase el problema muestra 1).

## 10-3 CONSERVACIÓN DEL ÍMPETU DURANTE LAS COLISIONES

Consideremos ahora una colisión entre dos partículas tales como las de masas $m_1$ y $m_2$ que se muestran en la figura 7. Durante la breve colisión estas partículas ejercen fuerzas grandes entre sí. En cualquier instante $\mathbf{F}_{12}$ es la fuerza ejercida sobre la partícula 1 por la partícula 2 y $\mathbf{F}_{21}$ es la fuerza ejercida sobre la partícula 2 por la partícula 1. Según la tercera ley de Newton estas fuerzas son iguales en magnitud pero se oponen directamente.

El cambio en ímpetu de la partícula 1 que resulta de la colisión es

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{12}\, dt = \overline{\mathbf{F}}_{12}\,\Delta t \tag{5}$$

en la cual $\overline{\mathbf{F}}_{12}$ es el valor promedio de la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ durante el intervalo de tiempo de la colisión $\Delta t = t_f - t_i$.

El cambio en el ímpetu de la partícula 2 que resulta de la colisión es

$$\Delta \mathbf{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{21}\, dt = \overline{\mathbf{F}}_{21}\,\Delta t \tag{6}$$

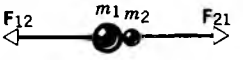



**Figura 7** Dos partículas de masas $m_1$ y $m_2$ chocan y experimentan fuerzas iguales y opuestas.

en la cual $\overline{\mathbf{F}}_{21}$ es el valor promedio de la fuerza $\mathbf{F}_{21}$ durante el intervalo de tiempo de la colisión $\Delta t = t_f - t_i$.

Si no actúa sobre la partícula ninguna otra fuerza, entonces $\Delta \mathbf{p}_1$ y $\Delta \mathbf{p}_2$ dan el cambio total del ímpetu para cada partícula. Sin embargo, hemos visto que en cada instante $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, de modo que $\overline{\mathbf{F}}_{12} = -\overline{\mathbf{F}}_{21}$, y por lo tanto

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2. \tag{7}$$

Si consideramos a las dos partículas como un sistema aislado, el ímpetu total del sistema es

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \tag{8}$$

y el cambio total en el ímpetu del sistema como resultado de la colisión es cero; esto es,

$$\Delta \mathbf{P} = \Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = 0. \tag{9}$$

De aquí que, *si no existen fuerzas externas el ímpetu total del sistema de dos partículas no cambia por la colisión.* Esta es simplemente la ley de la conservación del ímpetu lineal (véase la sección 9-6) aplicada a este sistema de dos partículas. Las fuerzas impulsivas que actúan durante la colisión son fuerzas internas que no tienen efecto sobre el ímpetu total del sistema.

Hemos definido una colisión como una interacción que ocurre en un tiempo $\Delta t$ que es despreciable comparado con el tiempo durante el cual estamos observando al sistema. Podemos también caracterizar a una colisión como un evento en el que las fuerzas externas que pueden actuar sobre el sistema son despreciables comparadas con las fuerzas impulsivas de la colisión (véase el problema muestra 1). Cuando un bate choca contra una bola de béisbol, o un palo de golf choca contra una bola de golf, o una bola de billar choca contra otra, actúan fuerzas externas sobre el sistema. La gravedad o la fricción pueden ejercer fuerzas sobre estos cuerpos, por ejemplo; estas fuerzas externas pueden no ser las mismas sobre cada cuerpo al chocar ni necesariamente son canceladas por otras fuerzas externas. Aun así, es bastante seguro despreciar estas fuerzas externas durante la colisión y suponer una conservación del ímpetu siempre que, como casi siempre sucede, las fuerzas externas sean despreciables en comparación con las fuerzas impulsivas de la colisión. Como resultado, el cambio en el ímpetu de una partícula durante una colisión que surge de una fuerza externa es despreciable comparada con el cambio en el ímpetu de esa

partícula que surge de la fuerza impulsiva del choque (Fig. 8).

Por ejemplo, cuando un bate golpea contra una bola de béisbol, la colisión dura sólo unos cuantos milisegundos. Puesto que el cambio en el ímpetu de la bola es grande y el tiempo de colisión es pequeño, a partir de

$$\Delta \mathbf{p} = \overline{\mathbf{F}}\,\Delta t$$

se deduce que la fuerza impulsiva promedio $\overline{\mathbf{F}}$ es relativamente grande. Comparada con esta fuerza, la fuerza externa de la gravedad es despreciable. Así, durante la colisión podemos despreciar por completo esta fuerza externa para determinar el cambio en el movimiento de la bola; cuanto más corta sea la duración de la colisión tanto mejor será proceder así.

Por lo tanto, en la práctica podemos aplicar la ley de la conservación del ímpetu durante las colisiones si el tiempo de la colisión es lo suficientemente pequeño. Podemos entonces decir que el ímpetu de un sistema de partículas en el instante antes de que éstas choquen es igual al ímpetu del sistema en el instante después de haber chocado las partículas.

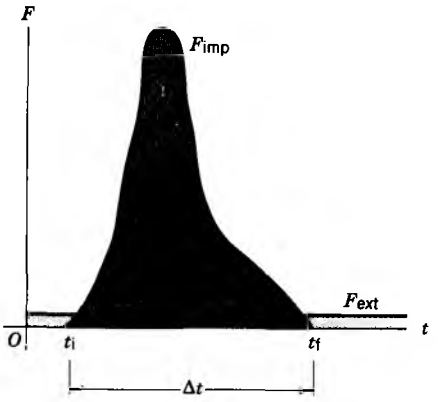



**Figura 8** La fuerza impulsiva $F_{imp}$ que actúa durante una colisión es generalmente mucho más intensa que cualquier fuerza externa $F_{ext}$ (mostrada aquí como una constante) que puede actuar también.

**Problema muestra 1** Una bola de béisbol (cuyo peso oficial es de unas 5 onzas) se mueve horizontalmente a una velocidad de 93 mi/h (alrededor de 150 km/h) cuando es golpeada por el bate (véase la Fig. 1). Abandona el bate en una dirección que forma un ángulo $\phi = 35°$ sobre su trayectoria y a una velocidad de 180 km/h. (*a*) Halle el impulso de la fuerza ejercida sobre la bola. (*b*) Suponiendo que la colisión dure 1.5 ms (= 0.0015 s), ¿cuál es la fuerza promedio? (*c*) Halle el cambio en el ímpetu del bate.

**Solución** (*a*) La figura 9*a* muestra el ímpetu inicial $\mathbf{p}_i$ y el ímpetu final $\mathbf{p}_f$ de la bola de béisbol. La masa correspondiente a 5 oz es de 0.14 kg, y la velocidad final de la bola en unidades más apropiadas es de 50 m/s. Las componentes del ímpetu final están dadas por

$$p_{fx} = mv_f \cos\phi = (0.14\text{ kg})(50\text{ m/s})(\cos 35°) = 5.7\text{ kg}\cdot\text{m/s},$$

$$p_{fy} = mv_f \operatorname{sen}\phi = (0.14\text{ kg})(50\text{ m/s})(\operatorname{sen} 35°) = 4.0\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

En este sistema de coordenadas, el ímpetu inicial tiene sólo una componente $x$, cuyo valor (negativo) es

$$p_{ix} = mv_i = (0.14\text{ kg})(-42\text{ m/s}) = -5.9\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

Ahora puede obtenerse el impulso:

$$J_x = p_{fx} - p_{ix} = 5.7\text{ kg}\cdot\text{m/s} - (-5.9\text{ kg}\cdot\text{m/s}) = 11.6\text{ kg}\cdot\text{m/s},$$

$$J_y = p_{fy} - p_{iy} = 4.0\text{ kg}\cdot\text{m/s} - 0 = 4.0\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

En otros términos, el impulso tiene una magnitud

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{(11.6\text{ kg}\cdot\text{m/s})^2 + (4.0\text{ kg}\cdot\text{m/s})^2}$$
$$= 12.3\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

y actúa en una dirección determinada por

$$\theta = \tan^{-1}(J_y/J_x) = \tan^{-1}[(4.0\text{ kg}\cdot\text{m/s})/(11.6\text{ kg}\cdot\text{m/s})] = 19°$$

sobre la horizontal. La figura 9*b* muestra el vector del impulso $\mathbf{J}$ y verifica gráficamente que, como lo pide la definición de la ecuación 3,

$$\mathbf{J} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f + (-\mathbf{p}_i).$$

(*b*) Con $\mathbf{J} = \overline{\mathbf{F}}\Delta t$, tenemos que $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{J}/\Delta t$. Entonces $\overline{\mathbf{F}}$ tiene la magnitud

$$\overline{F} = (12.3\text{ kg}\cdot\text{m/s})/0.0015\text{ s} = 8200\text{ N},$$

que es casi 1 tonelada. Esta fuerza actúa en la misma dirección que $\mathbf{J}$, esto es, 19° sobre la horizontal. Nótese que ésta es la fuerza *promedio*; la fuerza *máxima* es considerablemente mayor, como lo muestra la figura 6. También, obsérvese que $\overline{F}$ (= 8200 N) $\gg mg$ (= 1.4 N). Así pues, estamos en lo cierto al suponer que la fuerza impulsiva excede notablemente a la fuerza externa (la gravedad, en este caso) y, por lo tanto, es muy cercanamente igual a la fuerza neta que actúa durante la colisión.

(*c*) El cambio en el ímpetu del bate es, según la ecuación 7, igual y opuesto al de la bola. Entonces, para el bate,

$$\Delta p_x = -11.6\text{ kg}\cdot\text{m/s},$$

$$\Delta p_y = -4.0\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

¿Es éste un cambio grande o un cambio pequeño? Trate de calcular el ímpetu del bate en movimiento para responder a esta pregunta.

## 10-4 COLISIONES EN UNA DIMENSIÓN

En esta sección consideraremos el efecto de una colisión entre dos objetos. Usualmente conocemos las velocidades iniciales de los dos objetos antes de la colisión, y nuestra meta es aplicar las leyes de conservación o las leyes del

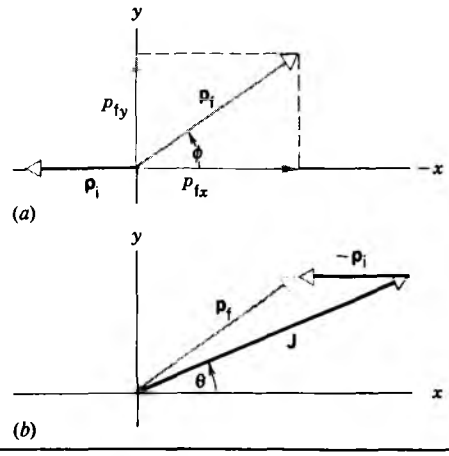



**Figura 9** Problema muestra 1. (*a*) Los ímpetus inicial y final de la bola de béisbol. (*b*) La diferencia $\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ es igual al impulso **J**.

movimiento para hallar las velocidades después de la colisión.

Podemos siempre calcular los movimientos de los objetos después de que hayan chocado a partir de sus movimientos previos si conocemos las fuerzas que actúan durante la colisión, y si podemos resolver las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, en la mayoría de las colisiones no conocemos estas fuerzas. La ley de conservación del ímpetu debe cumplirse durante cualquier colisión en la que sólo actúen fuerzas internas, y *puede aplicarse aun si no conocemos las fuerzas.* Aunque podemos no conocer los detalles de la interacción, en muchos casos podemos usar la conservación del ímpetu y la conservación de la energía para predecir los resultados de la colisión.

El ímpetu lineal se conserva *siempre* en las colisiones. La energía total se conserva también: la energía total inicial de las partículas en colisión es igual a la energía total final de los productos. Esta energía puede incluir no sólo a la energía cinética sino igualmente a otras formas, tales como la energía interna, la energía de deformación, la energía rotatoria, la energía radiante, y así sucesivamente.

En una categoría especial de la colisión, llamada colisión *elástica*, despreciamos todas las demás formas de la energía y consideramos solamente a la energía mecánica $U + K$. Además, suponemos que, en una colisión impulsiva, las fuerzas internas actúan durante un tiempo corto y, por lo tanto, sobre una distancia corta; observamos a las partículas solamente con una separación relativa mucho más grande, de modo que los efectos de su energía potencial interna puedan ser despreciados. En una colisión elástica, la energía cinética de traslación es la única forma de energía por la que debemos responder, y la conservación de la energía mecánica es, por lo tanto, equivalente a la conservacion de la energía cinética: *en una colisión elástica, la energía cinética inicial $K_i$ es igual a la energía cinética final $K_f$.*

En otra categoría de colisión, que llamamos *inelástica*, la energía aparece en otras formas, y las energías cinéticas inicial y final no son iguales. En ciertos casos $K_i > K_f$, como, por ejemplo, cuando la energía cinética inicial se convierte en energía interna de los productos, mientras que en otros casos $K_i < K_f$, como cuando la energía interna almacenada en las partículas al chocar se libera. En una colisión inelástica la energía mecánica $U + K$ *no* se conserva, pero la energía total sí (véase la sección 8-6). Cuando los cuerpos que chocan son simples, tales como átomos o moléculas, a menudo podemos tener en cuenta directamente la diferencia entre $K_i$ y $K_f$ en función de los estados conocidos de la energía interna discreta del sistema. En sistemas más complejos, tal como cuando chocan dos automóviles, vemos a la diferencia simplemente como energía cinética "perdida" o "ganada".

Todas las colisiones entre objetos reales son hasta cierto punto inelásticas. Cuando los objetos son muy rígidos, tales como las bolas de billar, podemos a menudo tratar a la colisión como aproximadamente elástica. En este caso, la energía que cambia de cinética a otras formas (como la onda de sonido que se escucha al chocar las bolas) es despreciable comparada con la energía cinética. Nótese que la clasificación de una colisión como elástica o inelástica es independiente del marco de referencia desde el que se vea la colisión.

Cuando los dos cuerpos se pegan después de la colisión, se dice que la colisión es *completamente inelástica*. Por ejemplo, la colisión entre una bala y un bloque de madera al que se le dispara es completamente inelástica cuando la bala permanece empotrada en el bloque. El término "completamente inelástica" no significa necesariamente que toda la energía inicial se pierde; como veremos, significa más bien que la pérdida es tan grande como puede serlo, en consonancia con la conservación del ímpetu.

Aun cuando no se conozcan las fuerzas de colisión, podemos obtener los movimientos de las partículas después de la colisión a partir de los movimientos antes de la colisión, siempre y cuando la colisión sea completamente inelástica o, si la colisión es elástica, que la colisión tenga lugar en una dimensión. En una colisión unidimensional el movimiento relativo después de la colisión está a lo largo de la misma línea que el movimiento relativo antes de la colisión. Por el ímpetu nos limitaremos al movimiento unidimensional

## Colisiones elásticas

Consideremos primero una colisión elástica unidimensional. Imaginemos a dos objetos (podrían ser unos deslizadores en un riel de aire) que se mueven inicialmente a lo largo de la línea que une a sus centros, luego chocan de frente y se mueven a lo largo de la misma línea recta después de la colisión (véase la Fig. 10). Estos cuerpos ejercen fuerzas

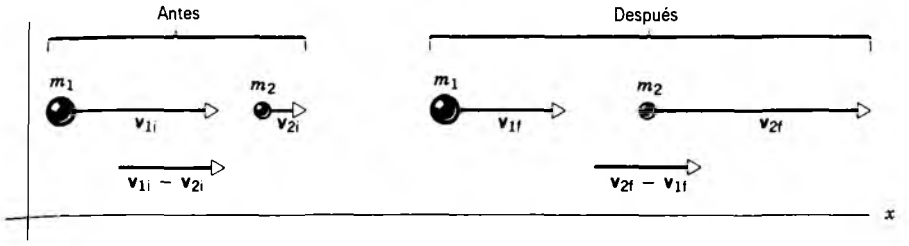



**Figura 10** Dos partículas antes y después de una colisión elástica. Nótese que las velocidades relativas antes y después son iguales.

entre sí durante la colisión que están a lo largo de la línea de movimiento inicial, de modo que el movimiento final está también a lo largo de la misma línea.

Las masas de las partículas en colisión son $m_1$ y $m_2$, siendo las componentes de la velocidad $v_{1i}$ y $v_{2i}$ antes de la colisión y $v_{1f}$ y $v_{2f}$ después de la colisión. [En nuestra notación, los subíndices numéricos 1 y 2 especifican la partícula, mientras que los subíndices i y f se refieren, respectivamente, a los valores iniciales (antes de la colisión) y a los valores finales (después de la colisión).] Tomamos la dirección positiva del ímpetu y la velocidad hacia la derecha en la figura 10. Suponemos, a no ser que especifiquemos lo contrario, que las velocidades de las partículas en colisión sean lo suficientemente bajas como para que no necesitemos emplear las expresiones relativistas del ímpetu y de la energía cinética. Entonces, según la conservación del ímpetu, obtenemos

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}. \tag{10}$$

Puesto que estamos considerando una colisión elástica, la energía cinética se conserva por definición, y obtenemos, al ser $K_i = K_f$,

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2. \tag{11}$$

Si conocemos las masas y las velocidades iniciales, podemos calcular las dos velocidades finales (incógnitas) $v_{1f}$ y $v_{2f}$ a partir de estas dos ecuaciones.

La ecuación del ímpetu puede ser escrita así:

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}), \tag{12}$$

y la ecuación de la energía puede escribirse como:

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2). \tag{13}$$

Dividiendo la ecuación 13 entre la ecuación 12, y suponiendo que $v_{2f} \neq v_{2i}$, y que $v_{1f} \neq v_{1i}$ (véase la pregunta 15), obtenemos

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

y, después de un reordenamiento,

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}). \tag{14}$$

Esto nos dice que, en una colisión unidimensional elástica, la velocidad relativa de acercamiento antes de la colisión es igual y opuesta a la velocidad relativa de separación después de la colisión, sin importar cuáles puedan ser las masas de las partículas en colisión.

Para obtener las componentes de la velocidad $v_{1f}$ y $v_{2f}$ después de la colisión a partir de las componentes de la velocidad $v_{1i}$ y $v_{2i}$ antes de la colisión, combinamos las ecuaciones 12 y 14 para eliminar a $v_{2f}$ y resolver para $v_{1f}$:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}. \tag{15}$$

Similarmente, eliminamos a $v_{1f}$ y resolvemos para $v_{2f}$:

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}. \tag{16}$$

Las ecuaciones 15 y 16, que se cumplen en todos los marcos de referencia inerciales, son resultados generales que nos permiten obtener las velocidades finales en cualquier colisión elástica unidimensional. Estas ecuaciones las simplificamos a menudo eligiendo un marco en el que la partícula blanco (digamos, $m_2$) está inicialmente en reposo, permitiéndonos así poner $v_{2i} = 0$ en las ecuaciones 15 y 16. Pasemos ahora a estudiar ciertos casos especiales de interés.

**1.** *Masas iguales.* Cuando las partículas en colisión tienen masas iguales ($m_1 = m_2$), las ecuaciones 15 y 16 se transforman simplemente en

$$v_{1f} = v_{2i} \quad \text{y} \quad v_{2f} = v_{1i}. \tag{17}$$

Esto es, las partículas intercambian velocidades: la velocidad final de una partícula es igual a la velocidad inicial de la otra.

**2.** *Partícula blanco en reposo.* Otro caso de interés es cuando la partícula $m_2$ está inicialmente en reposo. Entonces $v_{2i} = 0$ y

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i}. \tag{18}$$

Combinando este caso especial con el anterior (esto es, una colisión entre partículas de igual masa, donde una está

inicialmente en reposo), vemos que la primera partícula es "detenida en seco" y la segunda "sale" con la velocidad que tenía la primera originalmente. A menudo es posible observar este efecto en las colisiones de las bolas de billar que no giran.

**3.** *Blanco masivo.* Si $m_2 \gg m_1$, entonces las ecuaciones 15 y 16 se reducen a

$$v_{1f} \approx -v_{1i} + 2v_{2i} \quad \text{y} \quad v_{2f} \approx v_{2i}. \tag{19}$$

Cuando la partícula de gran masa se mueve lentamente o está en reposo, entonces

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} \approx 0. \tag{20}$$

Esto es, cuando un proyectil liviano choca contra otro de masa mucho mayor que está en reposo, la velocidad de la partícula menos pesada se invierte aproximadamente, y la partícula de más masa permanece aproximadamente en reposo. Por ejemplo, una pelota que se deje caer desde una altura $h$ rebota del suelo después de la colisión con velocidad invertida y, si la colisión fuese perfectamente elástica y no hubiese resistencia del aire, llegaría a la misma altura $h$. De manera similar, un electrón rebota de un átomo (con masa relativa) en una colisión de frente y su movimiento se invierte, mientras que el átomo blanco no resulta en esencia afectado por la colisión.

**4.** *Proyectil masivo.* Cuando $m_1 \gg m_2$, las ecuaciones 15 y 16 se convierten en

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i} - v_{2i}. \tag{21}$$

Si la partícula blanco de menor peso está inicialmente en reposo (o se mueve mucho más lentamente que $m_1$), entonces, después de la colisión la particula blanco se mueve al doble de la velocidad de $m_1$. El movimiento de $m_1$ no se ve casi afectado por la colisión con el blanco más ligero.

En la dispersión de la partícula alfa (Fig. 2), la partícula alfa incidente (cuya masa es de alrededor de 8000 veces la masa del electrón) no resulta en esencial afectada por las colisiones con los electrones de los átomos blanco (como lo indican las muchas trayectorias en línea recta de la Fig. 2). La partícula alfa se desvía solamente en los raros encuentros con el núcleo masivo de un átomo blanco.

## Colisiones inelásticas

Consideraremos ahora las colisiones inelásticas, en las que, por definición, la energía cinética no se conserva, aunque por supuesto, la conservación del ímpetu *siempre* se cumple. La conservación de la energía *total* se cumple también, pero la inclusión de formas de energía diferentes a la cinética añade más términos a la ecuación 11 y, a no ser que podamos especificar exactamente las transferencias de energía (por ejemplo, cuánta energía interna se convierte en cinética), ya no tenemos un sistema de ecuaciones que pueda resolverse.

En un caso inelástico especial, el de la colisión completamente inelástica, el resultado final puede obtenerse a partir de los valores iniciales solamente. En este caso, las partículas se quedan pegadas y se mueven a una velocidad común $v_f$ después de la colisión. Entonces existe solamente una incógnita, y la ecuación del ímpetu sola (Ec. 10) es suficiente. Reemplazando tanto $v_{1f}$ como $v_{2f}$ en esa ecuación por la velocidad común $v_f$ nos conduce a

$$v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}. \tag{22}$$

Cuando $m_2$ está inicialmente en reposo, ésta se reduce a

$$v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}. \tag{23}$$

La velocidad de $m_1$ se "reduce" por la razón de masas $m_1/(m_1 + m_2)$. Cuanto más grande sea $m_1$, más rápido se moverá la combinación; cuanto más pequeña sea $m_1$, más lentamente se moverá.

La ecuación 22 puede aplicarse igualmente bien en sentido inverso. Esto es, una partícula de masa $M$ que se mueva a velocidad $v_f$ se divide en dos partículas, una de masa $m_1$ que se mueve a velocidad $v_{1i}$ y otra de masa $m_2$ ($= M - m_1$) que se mueve en dirección opuesta a velocidad $v_{2i}$. Este resultado se aplica aun cuando la explosión pudiera impartir una energía cinética considerable a las dos partículas. En el caso especial en que $v_f = 0$ (la partícula inicial está en reposo), tendremos que $v_{1i}/v_{2i} = -m_2/m_1$. La partícula de mayor masa tiene la velocidad menor, como lo esperaríamos con objeto de hacer que el ímpetu total sea cero, y las dos partículas se mueven en direcciones opuestas. En la sección 10-7 se consideran las aplicaciones de este principio a los procesos de desintegración espontánea.

---

**Problema muestra 2** (*a*) ¿En qué fracción decrece la energía cinética de un neutrón (masa $m_1$) en una colisión elástica frontal con un núcleo atómico (masa $m_2$) inicialmente en reposo? (*b*) Halle la disminución fraccionaria de la energía cinética de un neutrón cuando choca de igual modo con un núcleo de plomo, un núcleo de carbono, y un núcleo de hidrógeno. La razón de la masa del núcleo a la masa del neutrón ($= m_2/m_1$) es 206 para el plomo, 12 para el carbono, y 1 para el hidrógeno.

**Solución** (*a*) La energía cinética inicial $K_i$ del neutrón, suponiendo que sea no relativista, es $\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2$. Su energía cinética final $K_f$ es $\frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2$. La disminución fraccionaria de la energía cinética es

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2} = 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}$$

Pero, para una colisión tal (véase la Ec. 18),

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i},$$

de modo que

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

(*b*) Para el plomo, siendo $m_2 = 206m_1$,

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(206m_1)}{(207m_1)^2} = 0.02 = 2\%.$$

Para el carbono, siendo $m_2 = 12m_1$,

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(12m_1)}{(13m_1)^2} = 0.28 = 28\%.$$

Para el hidrógeno, siendo $m_2 = m_1$,

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(m_1)}{(2m_1)^2} = 1 = 100\%.$$

Estos resultados explican por qué un material como la parafina, con su alto contenido de hidrógeno, es mucho más eficaz para decelerar los neutrones de lo que lo es un material pesado, como el plomo. Sin embargo, obsérvese que las colisiones no siempre son "frontales" como lo hemos supuesto a lo largo de toda esta sección. Aunque un neutrón no perdería *toda* su energía en una colisión oblicua más típica contra el hidrógeno en reposo, todavía perderá energía mucho más eficientemente en materiales hidrogenados de lo que lo hará en el caso del carbono o del plomo.

La fisión del uranio en un reactor produce neutrones con energías cinéticas relativamente grandes, en la región de MeV. Para que se produzca una reacción en cadena, estos neutrones deben ser empleados para iniciar otros eventos de fisión, pero la probabilidad de que un neutrón cause una fisión disminuye rápidamente al crecer la energía cinética del neutrón. Por lo tanto es necesario decelerar o *moderar* a los neutrones hasta que su energía esté en la región de eV, donde la probabilidad de la fisión es de casi tres órdenes mayor. El cálculo anterior, aunque quizás muy simplificado, demuestra que un material rico en hidrógeno, tal como el agua o la parafina, sería una buena elección como moderador.

**Problema muestra 3** Un péndulo balístico (Fig. 11) es un dispositivo que se empleaba para medir la velocidad de las balas antes de que se dispusiera de dispositivos electrónicos para medir el tiempo. Consta de un gran bloque de madera de masa $M$, colgado de dos pares largos de cuerdas. Se dispara una bala de masa $m$ contra el bloque, dentro del cual llega rápidamente al reposo. La combinación bloque + bala oscila, elevándose su centro de masa a una distancia vertical $h$ antes de que el péndulo llegue momentáneamente al reposo en el extremo de su arco. Tome la masa del bloque como $M = 5.4$ kg y la masa de la bala como $m = 9.5$ g. (*a*) ¿Cuál es la velocidad inicial de la bala si el bloque se eleva a una altura de $h = 6.3$ cm? (*b*) ¿Cuál es la energía cinética inicial de la bala? ¿Cuánta de esta energía permanece como energía mecánica del péndulo al oscilar?

**Solución** (*a*) Cuando la bala choca contra el bloque tenemos, por la conservación del ímpetu en la dirección horizontal,

$$mv = (M + m)V,$$

donde $v$ es la velocidad de la bala antes del impacto y $V$ es la velocidad de la combinación después del impacto. Aunque la energía mecánica ciertamente *no* se conserva *durante* la colisión de la bala con el bloque, *sí* se conserva en el péndulo al oscilar *después* del impacto. La energía cinética del sistema cuando el bloque está en el fondo de su arco debe, entonces, ser igual a la energía potencial del sistema cuando el bloque está en la parte superior, o sea

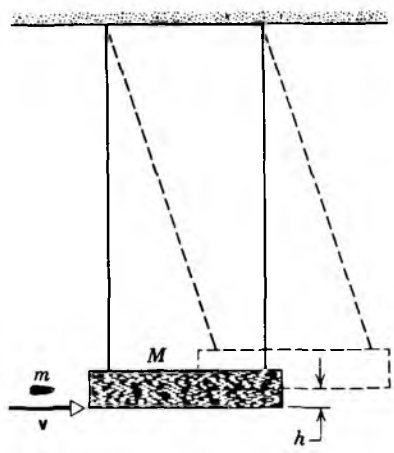



**Figura 11** Problema muestra 3. Un péndulo balístico es utilizado para medir la velocidad de una bala.

$$\tfrac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh.$$

Eliminando a $V$ entre estas dos ecuaciones llegamos a

$$v = \left(\frac{M + m}{m}\right)\sqrt{2gh}$$
$$= \left(\frac{5.4 \text{ kg} + 0.0095 \text{ kg}}{0.0095 \text{ kg}}\right)\sqrt{(2)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.063 \text{ m})} = 630 \text{ m/s}.$$

Podemos ver al péndulo balístico como una clase de transformador, intercambiando la alta velocidad de un objeto ligero (la bala) con la baja velocidad y, por lo tanto más fácilmente medible, de un objeto masivo (el bloque).

(*b*) La energía cinética de la bala es

$$K_b = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.0095 \text{ kg})(630 \text{ m/s})^2 = 1900 \text{ J}.$$

La energía mecánica del péndulo al oscilar es igual a su energía potencial cuando el bloque está en la parte más alta de su oscilación, o sea

$$E = (M + m)gh = (5.4 \text{ kg} + 0.0095 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(0.063 \text{ m})$$
$$= 3.3 \text{ J}.$$

Entonces solamente 3.3/1900, o sea 0.2% de la energía cinética original de la bala se transfiere a energía mecánica del péndulo. El resto se almacena dentro del bloque del péndulo como energía interna o se transfiere al entorno, por ejemplo como ondas de calor o de sonido.

## 10-5 COLISIONES BIDIMENSIONALES

Si dos partículas colisionan de una manera diferente a la frontal, las partículas pueden moverse en direcciones que

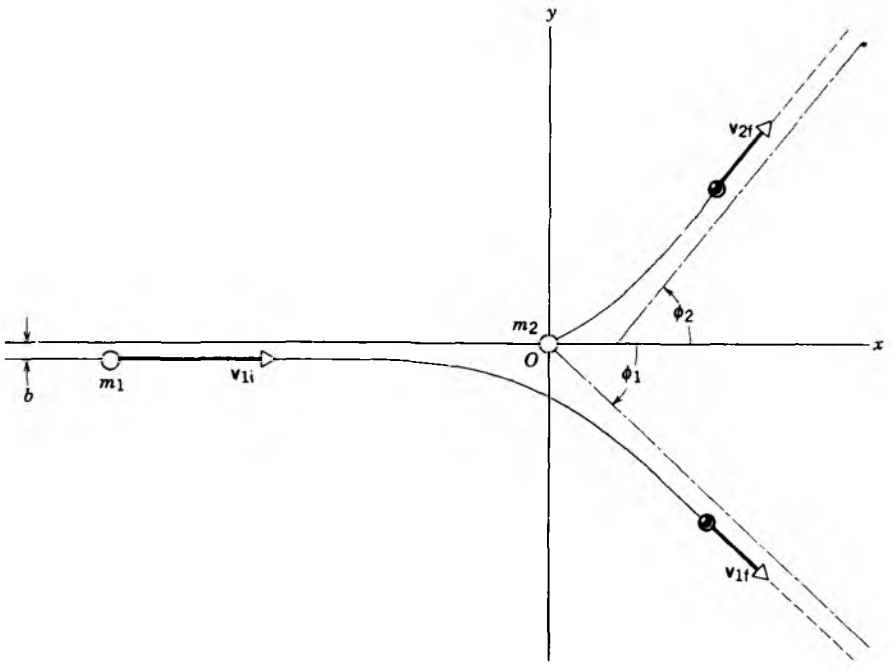



**Figura 12** Dos partículas en colisión. Los círculos abiertos indican sus posiciones antes de la colisión y los círculos llenos, señalan cuáles son éstas después de la colisión. Inicialmente, la partícula 2 está en reposo. El parámetro $b$ de impacto es la distancia por la cual la colisión deja de ser frontal.

no coincidan con las direcciones del movimiento original. La figura 12 muestra la geometría de una de estas colisiones. Hemos elegido a nuestro sistema de coordenadas de modo que $\mathbf{p}_i$ tenga sólo una componente $x$, simplificando así el cálculo un poco. Se supone que la partícula blanco $m_2$ está en reposo. La distancia $b$ entre la línea del movimiento de la partícula incidente y una línea paralela que pase por $m_2$ se llama *parámetro del impacto*. Una colisión frontal corresponde a $b = 0$, y valores más grandes de $b$ indican una colisión más oblicua. La figura podría representar las trayectorias de dos núcleos que colisionan a causa de sus respectivas fuerzas electrostáticas de repulsión; la fuerza depende inversamente del cuadrado de la distancia entre los núcleos, los cuales no necesitan en realidad estar en contacto para la colisión. Para distancias suficientemente grandes la fuerza se hace pequeña, y las partículas se mueven en línea recta sin resultar en esencia afectadas por la fuerza.

Independientemente de la fuerza que actúe entre las partículas, el ímpetu debe conservarse. La fuerza entre las partículas es una fuerza interna, que no puede cambiar el ímpetu total del sistema de dos partículas. Además, puesto que el ímpetu es un vector, sabemos que las componentes $x$ y las componentes $y$ nos darán dos ecuaciones escalares independientes. Para las componentes $x$, el ímpetu inicial es $m_1 v_{1i}$ a lo largo del eje $x$, y el ímpetu final total es la suma de las componentes $x$ de los ímpetus finales de las dos partículas:

$$p_{ix} = p_{fx}$$

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \phi_1 + m_2 v_{2f} \cos \phi_2. \qquad (24)$$

Aquí tenemos en cuenta las direcciones de $\mathbf{v}_{1f}$ y de $\mathbf{v}_{2f}$ a través de los ángulos $\phi_1$ y $\phi_2$, respectivamente; así en la ecuación 24, $v_{1f}$ y $v_{2f}$ indican las *magnitudes* de las velocidades y son siempre positivas. Esto contrasta con las ecuaciones 15 y 16 o con la ecuación 22, las cuales manejaban las *componentes* de la velocidad que podían ser positivas o negativas.

El ímpetu $y$ inicial es cero (gracias a que elegimos para simplificar, los ejes de coordenadas), y el ímpetu $y$ final es la diferencia entre el de cada una de las partículas (hemos elegido $\phi_1$ y a $\phi_2$ en los lados opuestos del eje $x$, de modo que la suma de las componentes $y$ dé por resultado una diferencia algebraica):

$$p_{iy} = p_{fy}$$

$$0 = m_1 v_{1f} \operatorname{sen} \phi_1 - m_2 v_{2f} \operatorname{sen} \phi_2. \qquad (25)$$

Si la colisión es elástica, se cumple el resultado usual para la conservación de la energía. Igualando las energías cinéticas inicial y final tenemos

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2. \qquad (26)$$

Dadas las condiciones iniciales ($m_1$, $m_2$, y $v_{1i}$), en las Ecs. 24 a 26 existen cuatro incógnitas ($v_{1f}$, $v_{2f}$, $\phi_1$, $\phi_2$), pero sólo tres ecuaciones las relacionan. No existe una solución única para tal sistema indeterminado de ecuaciones; de hecho, existe un número infinito de soluciones. Para obtener una solución única, debemos contar con una limitación o restricción adicional. Por ejemplo, podemos decidirnos por observar la partícula 1 en un ángulo $\phi_1$ determinado, como en el problema muestra 4. Una vez hayamos hecho esa elección, las tres ecuaciones pueden resolverse para las tres incógnitas restantes.

**Problema muestra 4** Una molécula de gas con una velocidad de 322 m/s choca elásticamente con otra molécula de la misma masa inicialmente en reposo. Después de la colisión la primera molécula se mueve formando un ángulo de 30° con su dirección inicial. Halle la velocidad de cada molécula después de la colisión y el ángulo formado con la dirección incidente de la molécula blanco que recula.

**Solución** Este ejemplo corresponde exactamente a las ecuaciones 24 a 26, siendo $m_1 = m_2$, $v_{1i} = 322$ m/s, y $\phi = 30°$. Haciendo que $m_1$ sea igual a $m_2$, tenemos las relaciones

$$v_{1i} = v_{1f} \cos \phi_1 + v_{2f} \cos \phi_2, \tag{27}$$

$$v_{1f} \operatorname{sen} \phi_1 = v_{2f} \operatorname{sen} \phi_2, \tag{28}$$

y

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2. \tag{29}$$

Debemos de resolver para $v_{1f}$, $v_{2f}$, y $\phi_2$. Para hacerlo, primero eliminamos a $\phi_2$ elevando al cuadrado la ecuación 27 (reescribiéndola como $v_{1i} - v_{1f} \cos \phi_1 = v_{2f} \cos \phi_2$), y la sumamos al cuadrado de la ecuación 28. Observando que $\operatorname{sen}^2\phi_2 + \cos^2\phi_2 = 1$, obtenemos

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos \phi_1 = v_{2f}^2.$$

Combinando ésta con la ecuación 29, obtenemos (siempre que $v_{1f} \neq 0$)

$$v_{1f} = v_{1i} \cos \phi_1 = (322 \text{ m/s})(\cos 30°) = 279 \text{ m/s}.$$

De la ecuación 29

$$v_{2f}^2 = v_{1i}^2 - v_{1f}^2 = (322 \text{ m/s})^2 - (279 \text{ m/s})^2,$$

o sea,

$$v_{2f} = 161 \text{ m/s}.$$

Por último, de la ecuación 28

$$\operatorname{sen}\phi_2 = \frac{v_{1f}}{v_{2f}} \operatorname{sen} \phi_1$$

$$= \frac{279 \text{ m/s}}{161 \text{ m/s}} \operatorname{sen} 30° = 0.866$$

o

$$\phi_2 = 60°.$$

Las dos moléculas se apartan en ángulos rectos ($\phi_1 + \phi_2 = 90°$ en la Fig. 12).

Debería ser para nosotros posible demostrar que, en una colisión elástica entre partículas de igual masa, una de las cuales esté inicialmente en reposo, las partículas, que reculan se desvían siempre en ángulos rectos entre sí. La figura 13 muestra una serie de cuatro colisiones elásticas sucesivas entre protones provocadas cuando un protón de energía elevada entra en una cámara de burbujas llena de hidrógeno líquido, el cual suministra los protones blanco. El rastro de las partículas se hace visible por a huella de burbujas dejada en su camino. Puesto que las partículas en interacción son de igual masa y las colisiones son elásticas, las partículas reculan formando ángulos rectos entre sí; esto se hace evidente cuando el rastro representado en la figura 13 se ve estereoscópicamente. Véase la figura 2 para otro ejemplo.

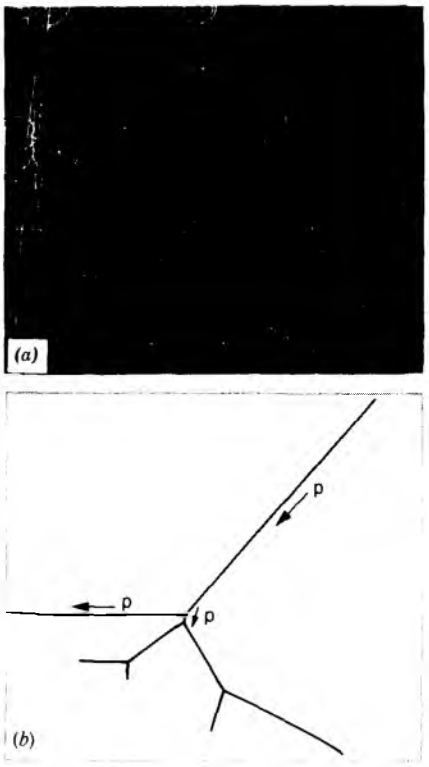



**Figura 13** (*a*) Cuatro colisiones protón-protón en una cámara de burbujas. (*b*) Una representación esquemática de las trayectorias de los protones. El protón original entra por la esquina superior derecha. El rastro no está completo en el plano de la fotografía, y una visión estereoscópica muestra que el ángulo entre el protón incidente y el protón saliente en cada colisión es de 90°, como se esperaba. Los demás rastros que se ven en la foto son causados por mesones (curvaturas suaves) y por electrones (espirales cerradas).

## Colisiones inelásticas en dos dimensiones

Si la colisión es inelástica, la ecuación 26 ya no tiene aplicación. A menudo podemos sustituirla por una expresión equivalente que tenga en cuenta la energía convertida a (o a partir de) energía cinética y que, por lo tanto, arroje una relación entre las energías cinéticas inicial y final.

Una colisión en dos dimensiones *completamente* inelástica debe comenzar con ambos cuerpos en movimiento. (¿Por qué?) De nuevo, hacemos que el movimiento de un cuerpo defina al eje $x$, y disponemos la colisión de modo que los dos cuerpos se encuentren y se adhieran entre sí en el origen. El objeto final se mueve entonces en la dirección $\phi_f$ a una velocidad $\mathbf{v}_f$ (Fig. 14). La conservación del ímpetu para las componentes $x$ y $y$ da lo siguiente:

$$\text{componente } x\text{:} \quad m_1v_1 + m_2v_2 \cos \phi_2 = Mv_f \cos \phi_f, \tag{30}$$

$$\text{componente } y\text{:} \quad m_2v_2 \operatorname{sen} \phi_2 = Mv_f \operatorname{sen} \phi_f. \tag{31}$$

Aquí $M = m_1 + m_2$ es la masa total de la combinación después de la colisión. Puesto que la combinación se mueve a una velocidad común (en magnitud y en direc-

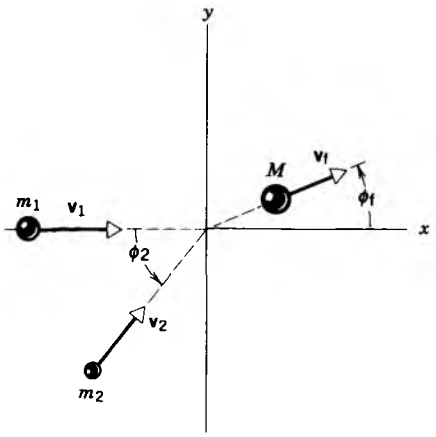



**Figura 14** Una colisión completamente inelástica en dos dimensiones. Las partículas con masas $m_1$ y $m_2$ colisionan para formar la partícula combinada de masa $M$.

ción), las cuatro incógnitas del caso elástico se reducen a dos: $v_f$ y $\phi_f$. Las dos ecuaciones (Ecs. 30 y 31) son suficientes para una solución única.

**Problema muestra 5** Dos patinadores chocan y se abrazan en una colisión completamente inelástica. Esto es, se quedan unidos después del impacto, como lo sugiere la figura 15. Alfredo, cuya masa $m_A$ es de 83 kg, se mueve originalmente hacia el este a una velocidad de $v_A$ = 6.4 km/h. Bárbara, cuya masa $m_B$ es de 55 kg, se mueve originalmente hacia el norte a una velocidad de $v_B$ = 8.8 km/h. (*a*) ¿Cuál es la velocidad **V** de la pareja después del impacto? (*b*) ¿Cuál es el cambio fraccionario en la energía cinética de los patinadores a causa de la colisión?

**Solución** (*a*) El ímpetu se conserva en la colisión. Podemos escribir, para las componentes de los dos ímpetus:

$$\text{componente } x: \quad m_A v_A = MV\cos\phi, \tag{32}$$

$$\text{componente } y: \quad m_B v_B = MV\,\text{sen}\,\phi, \tag{33}$$

donde $M = m_A + m_B$. Dividiendo la ecuación 33 entre la ecuación 32 nos da

$$\tan\phi = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(55\text{ kg})(8.8\text{ km/h})}{(83\text{ kg})(6.4\text{ km/h})} = 0.911.$$

Entonces

$$\phi = \tan^{-1} 0.911 = 42.3°.$$

De la ecuación 33 tenemos entonces que

$$V = \frac{m_B v_B}{M\,\text{sen}\,\phi} = \frac{(55\text{ kg})(8.8\text{ km/h})}{(83\text{ kg} + 55\text{ kg})(\text{sen } 42.3°)} = 5.21\text{ km/h}.$$

(*b*) La energía cinética inicial es

$$K_i = \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 = \tfrac{1}{2}(83\text{ kg})(6.4\text{ km/h})^2 + \tfrac{1}{2}(55\text{ kg})(8.8\text{ km/h})^2 = 3830\text{ kg}\cdot\text{km}^2/\text{h}^2.$$

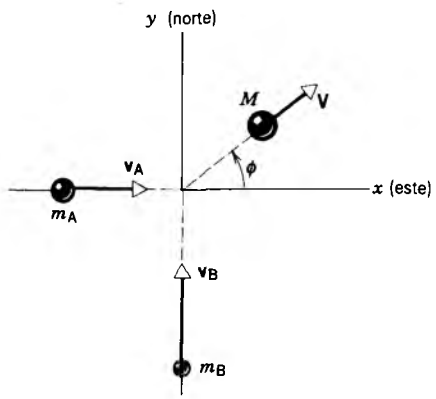



**Figura 15** Problema muestra 5. Dos patinadores, Alfredo (A) y Bárbara (B), sufren una colisión completamente inelástica. Después de ello, se mueven juntos en una dirección dada por el ángulo $\phi$.

La energía cinética final es

$$K_f = \tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}(83\text{ kg} + 55\text{ kg})(5.21\text{ km/h})^2 = 1870\text{ kg}\cdot\text{km}^2/\text{h}^2.$$

La fracción que buscamos es, entonces,

$$f = \frac{K_f - K_i}{K_i} = \frac{1870\text{ kg}\cdot\text{km}^2/\text{h}^2 - 3830\text{ kg}\cdot\text{km}^2/\text{h}^2}{3830\text{ kg}\cdot\text{km}^2/\text{h}^2} = -0.51.$$

Así, el 51% de la energía cinética inicial se pierde en la colisión. Debe disiparse en alguna forma, o, en su lugar, como energía interna de la pareja de patinadores.

## 10-6 MARCO DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASA

Cuando se llevan a cabo experimentos de colisiones en la práctica, las mediciones se hacen naturalmente en un marco de referencia fijo en el laboratorio (el *marco del laboratorio*). Muy a menudo, tales experimentos consisten en el disparo de un proyectil disparado a un blanco que está en reposo en el laboratorio. En muchos experimentos de la física de partículas, por el contrario, dos partículas de igual masa y velocidad (dos protones, quizá, o dos electrones) se disparan directamente una contra la otra. Sin importar cómo se lleve a cabo el experimento, a menudo el análisis es más fácil y la comprensión física se aclara si vemos a la colisión desde un marco de referencia ligado al centro de masa de las partículas en colisión (el *marco del centro de masa*).

Por ejemplo, consideremos el caso sencillo de una colisión elástica unidimensional (de frente) entre dos partículas idénticas. Si una partícula (el blanco) está fija en

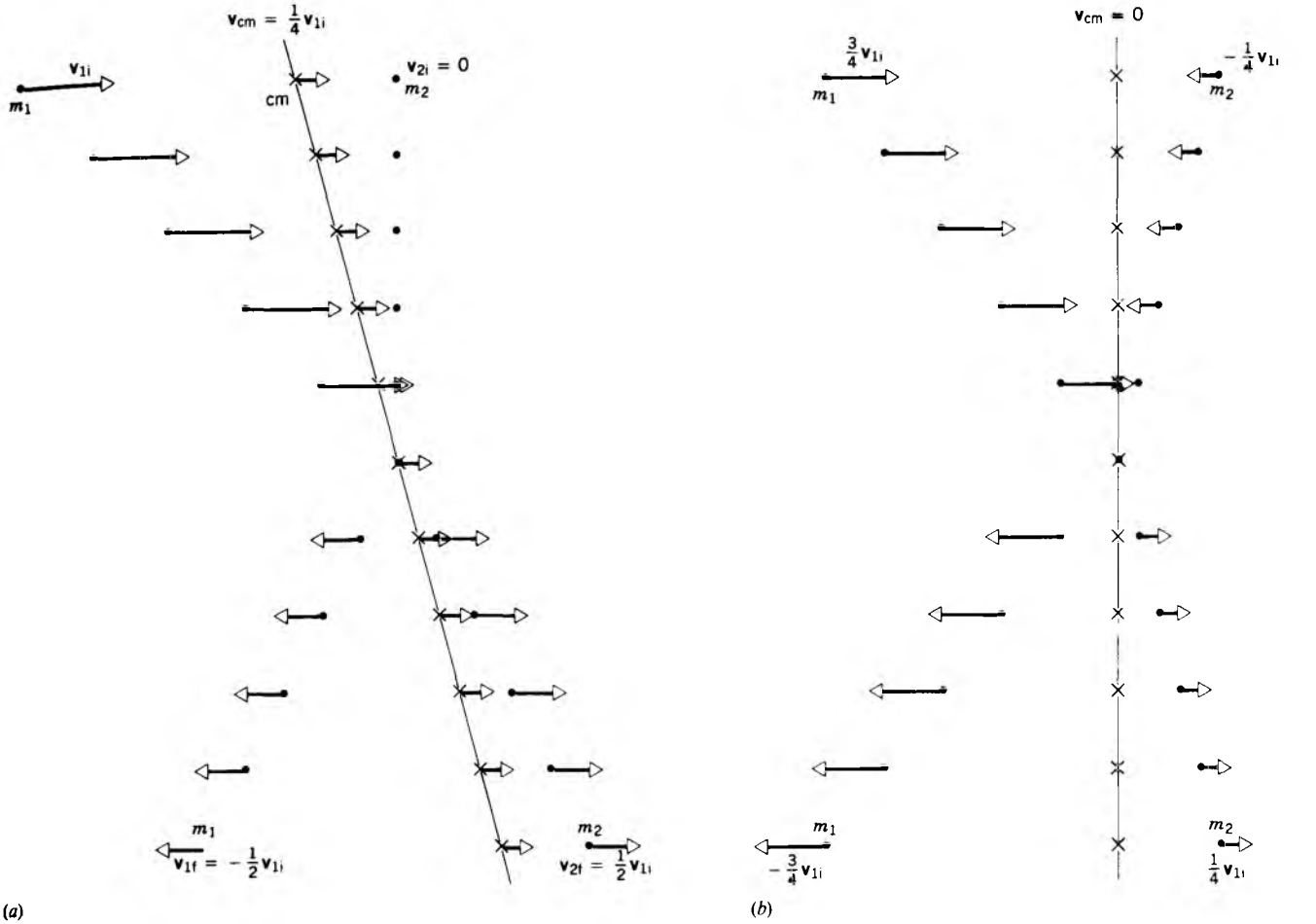



**Figura 16** Una serie de "instantáneas" de dos partículas de masa $m_1$ y $m_2 = 3m_1$ que chocan elásticamente en una dimensión. El centro de masa de las dos partículas se indica por una X. (*a*) Marco de referencia del laboratorio. (*b*) Marco de referencia del centro de masa.

el laboratorio, la otra partícula (el proyectil, que inicialmente se mueve a velocidad $v$) se lleva al reposo, y la partícula blanco original se mueve hacia adelante a velocidad $v$. Sin embargo, en el marco del centro de masa, las dos partículas se aproximan entre sí antes de la colisión, cada una a velocidad $\frac{1}{2}v$, y retroceden ambas a la misma velocidad después de la colisión. Ya no existe diferencia entre el proyectil y el blanco, y la descripción del suceso es completamente simétrica en este marco de referencia.

La figura 16*a* muestra una serie de "instantáneas" de una colisión elástica entre una partícula de masa $m_1$, inicialmente en movimiento, y una partícula estacionaria de masa $m_2 = 3m_1$. Puesto que sólo actúan fuerzas internas en la colisión, el movimiento del centro de masa, como se muestra en la figura 16*a*, no es afectado por la colisión. El centro de masa de $m_1$ y de $m_2$, calculado a partir de la ecuación 4 del capítulo 9, se mueve a la misma velocidad constante $v_{cm}$ tanto antes como después de la colisión.

La velocidad del centro de masa se halla de la ecuación 5, del capítulo 9,

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}, \tag{34}$$

con $v_{2i} = 0$. Elaboremos ahora un diagrama de la misma colisión vista desde un marco de referencia que se mueva, respecto al laboratorio, a la velocidad $v_{cm}$. Éste es el marco de referencia del centro de masa. Las velocidades de $m_1$ y de $m_2$ en este marco pueden obtenerse de la ecuación 43 de la sección 4-6 para las transformaciones de velocidad entre marcos de referencia:

$$v = v' + u, \tag{35}$$

donde $v$ es la velocidad medida en el marco del laboratorio, $v'$ es la velocidad medida en el marco de referencia que se mueve respecto al laboratorio, y $u$ es la velocidad

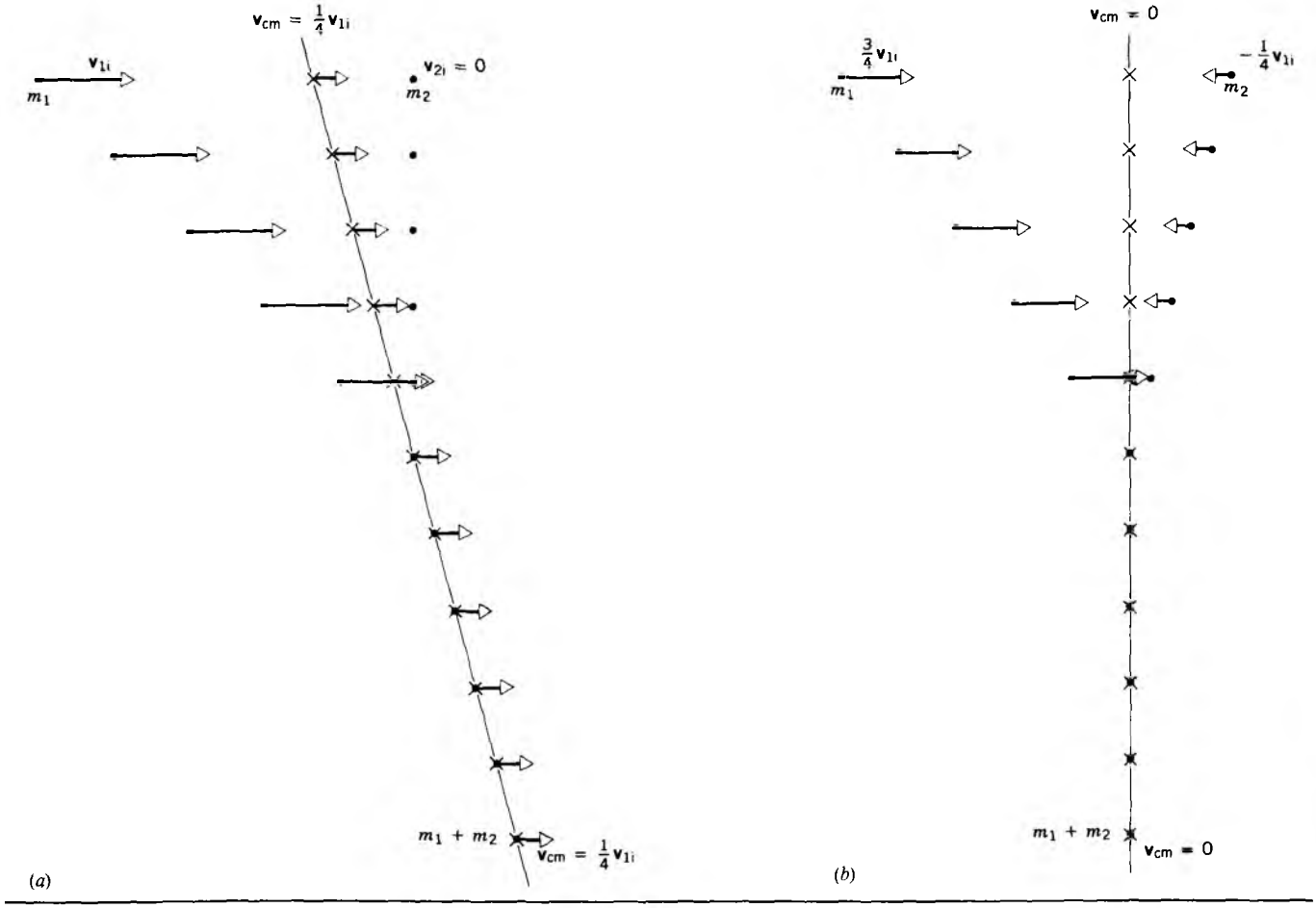



**Figura 17** Serie de "instantáneas" de dos partículas de masas $m_1$ y $m_2 = 3m_1$ en choque completamente inelástico en una dimensión. (*a*) Marco de referencia del laboratorio. (*b*) Marco de referencia del centro de masa.

del marco que se mueve respecto al marco del laboratorio. En nuestro caso, el marco móvil es el marco del centro de masa y $u = v_{cm}$. Podemos entonces hallar las velocidades iniciales de $m_1$ y de $m_2$ en el marco móvil:

$$v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm} = v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$
$$= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}, \tag{36}$$

$$v'_{2i} = v_{2i} - v_{cm} = 0 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$
$$= -\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}. \tag{37}$$

Las velocidades finales en el marco del laboratorio están dadas en la ecuación 18, y éstas pueden también ser transformadas dentro del marco del centro de masa:

$$v'_{1f} = v_{1f} - v_{cm} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$
$$= -\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}, \tag{38}$$

$$v'_{2f} = v_{2f} - v_{cm} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$
$$= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}. \tag{39}$$

Nótese la simetría de estos resultados. En el marco del centro de masa, las velocidades de $m_1$ y de $m_2$ simplemente invierten direcciones en la colisión, donde la velocidad de $m_1$ va desde $+m_2 v_{1i}/(m_1 + m_2)$ hasta $-m_1 v_{1i}/(m_1 + m_2)$, y la velocidad de $m_2$ va desde $-m_1 v_{1i}/(m_1 + m_2)$ hasta $+m_1 v_{1i}/(m_1 + m_2)$. En la figura 16*b* se muestra una serie de instantáneas de la colisión en el marco de referencia del centro de masa. En este marco de referencia especial, cada partícula lleva a cabo un movimiento similar a una pelota que rebota en una superficie dura; la otra partícula está allí precisamente para dar el impulso para la inversión del movimiento. Es también obvio en este marco de referencia que

cia que la energía cinética total permanece constante en la colisión. (De hecho, permanece constante para cada partícula por separado.) Contemplando la colisión desde esta perspectiva, adquirimos una visión nueva del significado de colisión "elástica".

Veamos ahora la colisión unidimensional completamente inelástica en el marco del centro de masa. De nuevo, suponemos que $m_1$ es la incidente sobre $m_2$ ($= 3m_1$) en reposo en el laboratorio. Después de la colisión, existe una partícula compuesta de masa $M = m_1 + m_2$. La velocidad del centro de masa está, una vez más, dada por la ecuación 34. La secuencia de instantáneas de la figura 17*a* nos muestra la colisión en el marco del laboratorio; de nuevo, el centro de masa se mueve a la misma velocidad antes y después de la colisión.

Las velocidades iniciales de $m_1$ y $m_2$ se transforman exactamente de la misma manera que en el caso anterior y están dadas por las ecuaciones 36 y 37. La velocidad final del centro de masa de $M$ después de la colisión puede hallarse al transformar el resultado general para $v_f$ en el marco del laboratorio, ecuación 23:

$$v'_f = v_f - v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} = 0.$$

Por supuesto que este resultado no debería sorprendernos en absoluto. La masa combinada $M$ está siempre en el centro de masa, puesto que contiene toda la masa del sistema después de la colisión. En el marco del laboratorio, $M$ debe moverse a la velocidad del centro de masa, y al comparar las ecuaciones 23 y 34 vemos que realmente lo hace. En un marco de referencia en el cual el centro de masa esté en reposo, $M$ debe estar también en reposo.

En el marco del centro de masa (Fig. 17*b*) existe de nuevo una simetría: antes de la colisión, $m_1$ y $m_2$ se aproximan con ímpetus iguales y opuestos. Después de que chocan y se combinan, el ímpetu debe ser cero.

Existe otra propiedad interesante de la colisión completamente inelástica en el marco de referencia del centro de masa. En el marco del laboratorio, la energía cinética perdida (esto es, convertida a energía interna, energía de deformación, etc.) es siempre menos del 100%; por ejemplo, en una colisión entre dos partículas de igual masa, una de las cuales esté inicialmente en reposo, la pérdida de energía cinética es de 50%. En el marco del centro de masa, la pérdida es siempre del 100%, independientemente de los valores de $m_1$ y de $m_2$. Cuando el propósito de la colisión de las partículas consiste en convertir energía cinética en otra forma, conviene no sólo analizar sino efectivamente *realizar el* experimento en el marco del centro de masa.

En los estudios de las propiedades de las partículas fundamentales de la naturaleza, el objetivo suele con frecuencia ser el de aplastar las partículas con una energía elevada para producir nuevas y exóticas variedades de partículas de masas mayores; en este caso, la energía cinética se transforma en la colisión en energía en reposo



**Figura 18** El acelerador de electrones de 2 millas de longitud del Stanford Linear Accelerator Center. Los electrones y los positrones son acelerados a lo largo de la sección recta. Las líneas punteadas muestran las trayectorias subterráneas de los electrones y de los positrones cuando se les hace colisionar en un laboratorio situado en la parte inferior de la foto. Véase "The Stanford Linear Collider", por John R. Rees, *Scientific American*, octubre de 1989, pág. 58.

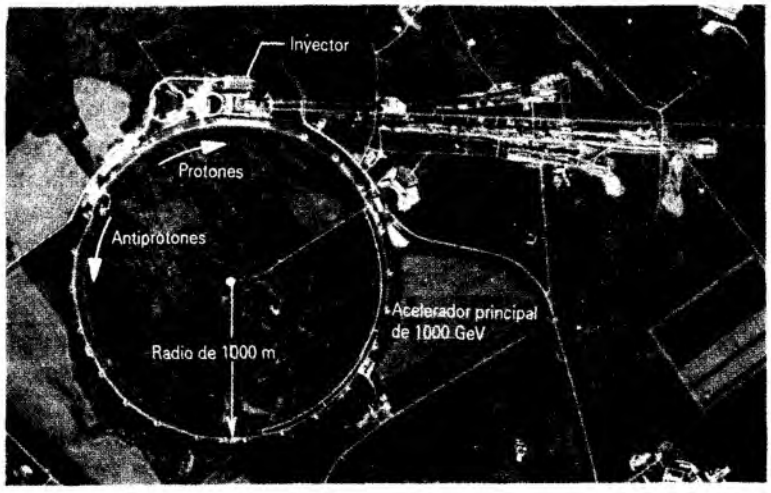



**Figura 19** El Fermi National Accelerator Laboratory. Protones y antiprotones son inyectados desde el pequeño anillo, que puede verse en la parte superior de la foto, al anillo grande (de 1 km de radio). Circulan en direcciones opuestas y colisionan una vez en cada circuito.

$mc^2$ de las nuevas partículas. La energía disponible para formar nuevas partículas es precisamente la energía cinética "perdida" en la colisión inelástica; en el dominio de estas colisiones de alta energía, en que debemos usar las ecuaciones de la cinemática relativista, aprendemos que la energía cinética inicial de laboratorio requerida para producir nuevas partículas aumenta con el cuadrado de la energía en reposo de la partícula que esperamos producir. Esto es, para producir una partícula que contenga el décuplo de la energía en reposo se requiere el céntuplo de la energía cinética y, por lo tanto, un acelerador que sea 100 veces más grande y más costoso. Sin embargo, si pudiéramos hacer la colisión en el marco del centro de masa, entonces las partículas con el décuplo de energía en reposo pueden ser producidas con el décuplo (y no el céntuplo) de energía cinética, puesto que las colisiones son 100% eficientes en la conversión de la energía cinética.

La generación actual de aceleradores de partículas incluye muchos ejemplos de tales dispositivos para *haces en colisión*. En el Stanford Linear Accelerator Center (SLAC), de California, se llevan a cabo colisiones de haces de electrones y positrones (antielectrones) de 50 GeV cada una (Fig. 18), y en el Fermi National Accelerator Laboratory, de Illinois, circulan haces de protones y antiprotones de 1000 GeV (1 TeV) en un mismo anillo en direcciones opuestas intersecándose una vez en cada circuito (Fig. 19). Por supuesto, la reacción es la misma sin importar el marco de referencia desde el que se vean, pero la interpretación será diferente.

Hasta aquí hemos estudiado solamente las colisiones unidimensionales en el marco del centro de masa. La colisión elástica bidimensional adopta también una estructura más simétrica cuando se la ve desde el marco de referencia del centro de masa. De nuevo, consideramos que $m_2$ está inicialmente en reposo en el laboratorio. En este caso, no desarrollaremos el álgebra, que es un tanto más complicada que en el caso unidimensional; en cambio, mostramos en la figura 20 una descripción gráfica de la colisión del centro de masa. Como en el caso unidimensional, la velocidad de cada partícula queda reflejada principalmente en la colisión. La única diferencia aquí consiste es que las dos partículas se mueven después de la colisión a lo largo de una línea que es, en general, diferente del eje de las velocidades iniciales. La simetría requiere que los ángulos formados por las velocidades finales con las velocidades incidentes sean los mismos para ambas partículas; cuando las transformamos de nuevo al marco del laboratorio, se convierten en los ángulos generalmente desiguales $\phi_1$ y $\phi_2$ de la figura 12.

## 10-7 PROCESOS DE DESINTEGRACIÓN ESPONTÁNEA *(Opcional)*

De más de las 2000 especies de núcleos atómicos que han sido identificadas hasta ahora, la mayoría son inestables y, tarde o temprano, eliminan toda o parte de la energía en exceso descomponiéndose en dos o más partes. La vida media de tales procesos de *desintegración radiactiva* varía desde miles de millones de años (por ejemplo, para el $^{238}$U) hasta fracciones de segundo muy pequeñas. Todas estas desintegraciones ocurren *espontáneamente*. Esto es, en una muestra dada de material radiactivo que contenga un gran número (quizás $10^{20}$) de núcleos, podemos calcular con precisión cuántos de ellos se desintegrarán durante cualquier intervalo de tiempo determinado, pero no hay manera alguna de predecir qué núcleo en particular se desintegrará.

Los átomos, como los que forman el gas en una lámpara fluorescente, pueden también existir en estados con exceso de energía y pueden consolidarse en una configuración estable emitiendo (de nuevo espontáneamente, para el caso de un átomo aislado) un cuanto de radiación. Las partículas elementales, formadas en colisiones protón-protón en un acelerador de alta energía, pueden también desintegrarse espontáneamente, transformándose en otras partículas (véase la Fig. 4). Las desintegraciones espontáneas de algunas de estas partículas ocurren en forma tan rápida ($10^{-20}$ s para la partícula $J/\psi$, por ejemplo) que la única evidencia que tenemos de su existencia es la observa-

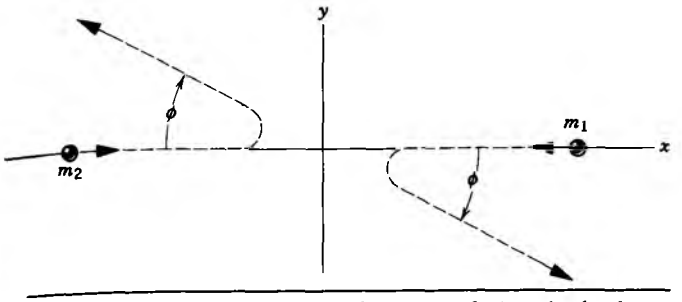



**Figura 20** Colisión elástica bidimensional vista desde el marco de referencia del centro de masa. En este marco las partículas deben moverse en direcciones opuestas, de modo que cada una se desvíe según el mismo ángulo $\phi$.

ción de los productos de la desintegración sometidos a condiciones que favorezcan la formación de la partícula.

En esta sección estudiaremos las desintegraciones espontáneas de la forma

$$A \rightarrow B + C,$$

donde $A$ es la partícula que se desintegra y $B$ y $C$ son los productos de la desintegración. Solemos observar tales desintegraciones en el laboratorio desde un marco de referencia en el que $A$ está en reposo. La desitegración $A \rightarrow B + C$ es, por lo tanto, simplemente la inversa de la colisión totalmente inelástica $B + C \rightarrow A$ vista desde el marco de referencia del centro de masa, como en la figura 17*b*. De hecho, nos formamos una buena imagen mental del proceso de desintegración haciendo que el tiempo vaya hacia atrás en la figura 17*b*; léase desde la parte inferior a la superior e inviértase la dirección de los vectores de velocidad.

En una colisión completamente inelástica, la energía cinética de las partículas en colisión se "pierde" en la colisión. Por supuesto, la energía total deberá conservarse, de modo que la energía cinética "perdida" debe aparecer en el sistema compuesto en otra forma, en la que la observamos como una contribución a la energía en reposo del sistema compuesto, como habíamos explicado en la sección 8-7. En un proceso de desintegración sucede lo contrario: la energía en reposo de $A$ se convierte en energía cinética de $B$ y $C$. Por lo tanto, podemos escribir la conservación de energía en un proceso de desintegración como:

$$E_A = E_B + E_C$$

$$m_A c^2 + K_A = (m_B c^2 + K_B) + (m_C c^2 + K_C), \qquad (40)$$

con la energía total $E$ de cada partícula dada como la suma de su energía en reposo $mc^2$ y su energía cinética $K$. Hemos escrito la ecuación 40 en el caso más general incluyendo la posibilidad de que $A$ se mueva con energía cinética $K_A$ cuando se desintegra; usualmente consideramos el caso cuando $K_A = 0$.

Podemos reescribir la ecuación 40 agrupando los términos de la energía en reposo en un lado y los términos de la energía cinética en el otro:

$$m_A c^2 - m_B c^2 - m_C c^2 = K_B + K_C - K_A. \qquad (41)$$

Definimos $Q$, la energía liberada en la desintegración, como la diferencia entre la energía en reposo inicial $m_i c^2$ y la energía en reposo final $m_f c^2$:

$$Q = m_i c^2 - m_f c^2, \qquad (42)$$

que en nuestro caso se convierte en

$$Q = (m_A - m_B - m_C)c^2 \qquad (43)$$

o, usando la ecuación 41,

$$Q = K_B + K_C - K_A. \qquad (44)$$

Esto es, $Q$ es igual a la ganancia neta de energía cinética de los productos de la desintegración. Si $A$ se desintegra en reposo, entonces $Q$ es la energía cinética total de los productos de la desintegración.

El proceso de desintegración debe conservar el ímpetu lineal. Si $A$ está en reposo, el ímpetu inicial total es cero, por lo que el ímpetu final será cero:

$$p_i = p_f$$

$$0 = p_B - p_C. \qquad (45)$$

Las ecuaciones 44 (con $K_A = 0$) y 45 proporcionan dos ecuaciones con dos incógnitas que pueden resolverse para las energías o ímpetus de los productos $B$ y $C$ de la desintegración. Los resultados, en el caso en que ni $B$ ni $C$ tengan una energía en reposo nula, son

$$K_B = Q\frac{m_C}{m_B + m_C}, \qquad (46)$$

$$K_C = Q\frac{m_B}{m_B + m_C}. \qquad (47)$$

En muchos procesos de desintegración que se estudian en el laboratorio, una de las partículas producto, digamos $B$, tiene una energía en reposo mucho menor que la otra, de modo que $m_B < m_C$. Por ejemplo, $B$ podría ser un electrón (energía en reposo = 0.511 MeV) o una partícula alfa (energía en reposo = 3727 MeV), mientras que $C$ podría ser un átomo pesado o un núcleo (energía en reposo = $10^5$ MeV, típicamente). A menudo es esta partícula, más ligera, la observada en el experimento. En este caso, como lo muestran las ecuaciones 46 y 47, $K_B \approx Q$ y $K_C \ll K_B$. Nótese que, si bien las energías cinéticas de las dos partículas son completamente diferentes, las magnitudes de sus ímpetus (dirigidos en sentido opuesto) permanecen exactamente iguales, como nos lo pide la ecuación 45. En este caso, a menudo nos referimos al *ímpetu de reculada* o *energía (cinética) de reculada* de $C$, como si $C$ fuese un cañón pesado que recula después de haber disparado una bala liviana $B$, como en el problema muestra 7 del capítulo 9.

**Problema muestra 6** Consideremos la emisión de partículas alfa, que son núcleos de los átomos de helio, en la desintegración del elemento radiactivo radio ($^{226}$Ra), que se encuentra en estado natural, al elemento gaseoso radón ($^{222}$Rn):

$$^{226}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}\text{Rn} + \alpha.$$

Si el $^{226}$Ra se desintegra en reposo, halle las energías cinéticas de los productos.

**Solución** Las masas atómicas son:

$^{226}$Ra: 226.025403 u; $^{222}$Rn: 222.017571 u;
$\alpha$: 4.002603 u.

Podemos calcular $Q$ según la ecuación 43, usando el valor de $c^2$ = 932 MeV/u:

$$\begin{aligned} Q &= [m(^{226}\text{Ra}) - m(^{222}\text{Rn}) - m(\alpha)]c^2 \\ &= (226.025403\ \text{u} - 222.017571\ \text{u} \\ &\quad - 4.002603\ \text{u})(932\ \text{MeV/u}) \\ &= 4.87\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

Las energías cinéticas pueden entonces calcularse a partir de las ecuaciones 46 y 47:

$$K_{\text{Rn}} = (4.87\ \text{MeV})\frac{4.002603\ \text{u}}{222.017571\ \text{u} + 4.002603\ \text{u}} = 0.09\ \text{MeV},$$

$$K_{\alpha} = (4.87\ \text{MeV})\frac{222.017571\ \text{u}}{222.017571\ \text{u} + 4.002603\ \text{u}} = 4.78\ \text{MeV}.$$

Nótese que, como lo pide la ecuación 44 (con $K_A$ = 0), las dos energías cinéticas suman $Q$; nótese también que la partícula alfa, más ligera, absorbe la mayoría de la energía (aunque no toda): alrededor del 98% en este caso. ■

## PREGUNTAS

1. Explique cómo se aplica la conservación del ímpetu a una pelota que rebota en la pared en un frontón.
2. ¿Puede ser cero el impulso de una fuerza, aunque la fuerza no sea de cero? Explique por qué o por qué no.
3. La figura 21 muestra un aparato de feria popular, en el cual el jugador trata de ver qué tan alto puede elevar un peso marcador al golpear un blanco con un mazo. ¿Qué cantidad física mide el aparato? ¿Es la fuerza promedio, la fuerza máxima, el trabajo realizado, el impulso, la energía transferida, el ímpetu transferido, o cualquier otra cosa? Explique la respuesta.



**Figura 21** Pregunta 3.

4. Aunque la aceleración de una bola de béisbol, después de haber sido golpeada, no depende de quién la golpeó, algo con respecto al vuelo de la bola debe depender del bateador. ¿Qué es?
5. Explique cómo la bolsa de aire protectora de un automóvil puede ayudar a proteger al pasajero de una lesión grave en el caso de un choque.
6. Se dice que, durante una colisión a 30 mi/h, un niño de 10 lb puede ejercer una fuerza de 300 lb contra el brazo de un adulto que trate de tomar al niño de la mano. ¿Cómo puede esa fuerza ser tan grande?
7. Comente las siguientes afirmaciones: En la colisión de un automóvil, la fuerza que el auto ejerce al detenerse puede determinarse ya sea por su ímpetu o por su energía cinética. En un caso se necesita también el *tiempo* de frenado y en el otro la *distancia* de frenado.
8. El acero es más elástico que el hule. Explique qué significa esto.
9. Explique la posibilidad de que *todas* las colisiones fueran elásticas, si pudiéramos tener en cuenta solamente los movimientos internos de los átomos en los objetos.
10. Si (solamente) dos partículas colisionan, ¿estaremos forzados a recurrir a una descripción tridimensional para describir el suceso? Explique.
11. Hemos visto que la conservación del ímpetu puede aplicarse tanto si la energía cinética se conserva como si no. ¿Qué sucede en caso contrario; esto es, ¿implica la conservación de la energía cinética la conservación del ímpetu en la física clásica? (Véase "Connection Between Conservation of Energy and Conservation of Momentum", por Carl G. Adler, *American Journal of Physics*, mayo de 1976, pág. 483).
12. La siguiente aseveración fue tomada de una hoja de examen: "La colisión entre dos átomos de helio es perfectamente elástica, de modo que el ímpetu se conserva". ¿Qué piensa usted de esta afirmación?
13. Usted está conduciendo un automóvil por una carretera a 50 mi/h, seguido por otro auto que se mueve a la misma velocidad. Usted decelera a 40 mi/h pero el otro conductor no lo hace y chocan. ¿Cuáles son las velocidades iniciales de los autos en colisión vistas desde el marco de referencia de (*a*) usted mismo, (*b*) el otro conductor, y (*c*) un policía de tránsito que está dentro de un auto patrulla estacionado a un lado de la carretera? (*d*) Un juez le pregunta si fue usted quien chocó contra el otro conductor

o fue el otro conductor quien chocó contra usted. Como físico, ¿cuál sería su respuesta?

**14.** C. R. Daish escribió que, entre los golfistas profesionales, la velocidad inicial de la pelota al dejar la cabeza del palo es de alrededor de 140 mi/h. Él dice también: (*a*) "si con el edificio del Empire State (de 300 m de altura) se pudiera golpear a la bola a la misma velocidad que la cabeza del palo, la velocidad inicial de la bola aumentaría únicamente alrededor del 2%" y (*b*) que, una vez que el golfista ha iniciado su golpe, el disparo de una cámara fotográfica, un estornudo, etc. no ejercerán efecto alguno en el movimiento de la pelota. ¿Puede usted dar argumentos cualitativos que apoyen estas dos afirmaciones?

**15.** Al revisar las ecuaciones 12 y 13 resulta obvio que una solución válida al problema de hallar las velocidades finales de dos partículas en una colisión elástica unidimensional es $v_{1f} = v_{1i}$ y que $v_{2f} = v_{2i}$. ¿Qué significa esto físicamente?

**16.** Dos bolas de arcilla de igual masa y velocidad chocan entre sí de frente, se pegan, y llegan al reposo. La energía cinética ciertamente no se conserva. ¿Qué pasó con ella? ¿Cómo se conserva el ímpetu?

**17.** Un jugador de fútbol americano, momentáneamente en reposo sobre el campo, cacha una pelota cuando es tacleado por un corredor del equipo contrario. Ésta es, ciertamente, una colisión (¡inelástica!) y el ímpetu debe conservarse. En el marco de referencia del campo de fútbol, existe un ímpetu antes de la colisión pero parece no existir ninguno después de la colisión. ¿Realmente se conserva el ímpetu lineal? De ser así, explique cómo. Si no, explique por qué.

**18.** Considérese una colisión elástica unidimensional entre un objeto *A* en movimiento y un objeto *B* inicialmente en reposo. ¿Cómo elegiría usted la masa de *B*, en comparación con la de *A*, con objeto de que *B* recule con (*a*) la mayor velocidad, (*b*) el mayor ímpetu, y (*c*) la mayor energía cinética?

**19.** Dos bloques cúbicos idénticos, que se mueven en la misma dirección a una velocidad común *v*, chocan con un tercero estando este bloque inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. ¿Cuál es el movimiento de los bloques después de la colisión? Importa si los dos bloques, inicialmente en movimiento, estaban o no en contacto? ¿Importaría si estos dos bloques estuvieran pegados entre sí? Suponga que las colisiones son (*a*) completamente inelásticas o (*b*) elásticas.

**20.** ¿Cómo diseñaría usted un arma que no recule?

**21.** En una colisión entre dos cuerpos *en el marco de referencia del centro de masa* los ímpetus de las partículas son iguales y opuestos entre sí, tanto antes como después de la colisión. ¿Es la línea del movimiento relativo necesariamente la misma después de la colisión que antes? ¿En qué condiciones aumentarían las magnitudes de las velocidades de los cuerpos?, ¿en cuáles disminuirían o permanecerían iguales como resultado de la colisión?

**22.** Un reloj de arena está siendo pesado en una báscula sensible, primero cuando la arena está cayendo en una corriente continua desde la parte superior a la inferior, y luego nuevamente después de que la parte superior se ha vaciado. ¿Son los dos pesos iguales o no? Explique su respuesta.

**23.** Dé una explicación razonable del rompimiento de tableros de madera o de ladrillos por un golpe de karate. (Véase "Karate Strikes", por Jearl D. Walker, *American Journal of Physics*, octubre de 1975, pág. 845.)

**24.** Una caja en la que se ha hecho el vacío está en reposo sobre una mesa sin fricción. Usted perfora un pequeño orificio en una cara de modo que pueda entrar el aire (véase la Fig. 22). ¿Cómo se moverá la caja? ¿Qué argumento ha utilizado usted para llegar a la respuesta?

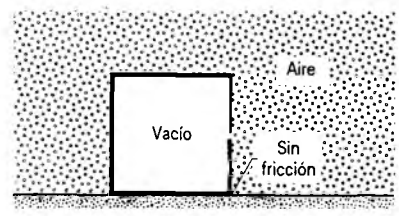



**Figura 22** Pregunta 24.

**25.** Al comentar el hecho de que la energía cinética no se conserva en una colisión totalmente inelástica, un estudiante observó que la energía cinética no se conserva en una explosión y que una colisión totalmente inelástica es en esencia lo contrario a una explosión. ¿Es ésta una observación útil o válida?

**26.** ¿En qué condiciones, de ser necesaria alguna, es correcto decir que la desintegración $A \rightarrow B + C$ es simplemente lo contrario a la colisión $B + C \rightarrow A$ totalmente inelástica?

## PROBLEMAS

### *Sección 10-3 Conservación del ímpetu durante las colisiones*

**1.** Está siendo probado el parachoques de un automóvil nuevo. Se hace que el vehículo de 2300 kg, que se mueve 15 m/s, choque contra el pilar de un puente, y se lleve al reposo en un tiempo de 0.54 s. Halle la fuerza promedio que actúa en el automóvil durante el impacto.

**2.** Una pelota de masa *m* y velocidad *v* choca contra una pared perpendicularmente y rebota a la misma velocidad. (*a*) Si el tiempo de la colisión es $\Delta t$, ¿cuál es la fuerza

promedio ejercida por la pelota en la pared? (*b*) Evalúe esta fuerza promedio numéricamente para una pelota de hule con masa de 140 g que se mueva 7.8 m/s; la duración de la colisión es de 3.9 ms.

3. Un chorro de agua choca contra un álabe de turbina estacionario en forma de plato, como se muestra en la figura 23. La velocidad del agua es $u$, tanto antes como después del choque contra la superficie curvada del álabe, y la masa de agua que choca contra el álabe por unidad de tiempo es constante y de valor $\mu$. Halle la fuerza ejercida por el agua sobre el álabe.

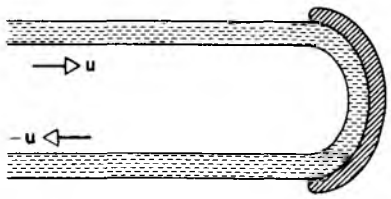



**Figura 23** Problema 3.

4. La nave espacial *Voyager 2* (de masa $m$ y velocidad $v$ con relación al Sol) se acerca al planeta Júpiter (de masa $M$ y velocidad $V$ con relación al Sol) como se muestra en la figura 24. La nave espacial rodea al planeta y sale en dirección opuesta. ¿Cuál es su velocidad, con relación al Sol, después de este encuentro de "latigazo"? Supóngase que $v$ = 12 km/s y $V$ = 13 km/s (la velocidad orbital de Júpiter). La masa de Júpiter es muchísimo más grande que la masa de la nave espacial; $M \gg m$. (Véase "The Slingshot Effect: Explanation and Analogies", por Albert A. Bartlett y Charles W. Hord, *The Physics Teacher*, noviembre de 1985, pág. 466.)

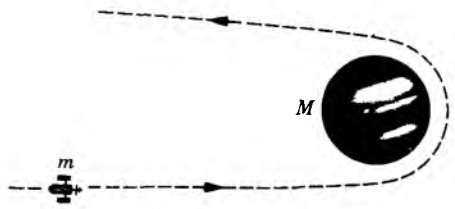



**Figura 24** Problema 4.

5. Un golfista golpea una pelota de golf, impartiéndole una velocidad inicial de 52.2 m/s de magnitud dirigida a 30° sobre la horizontal. Suponiendo que la masa de la pelota sea de 46.0 g y que el palo y la bola estén en contacto durante 1.20 ms, halle (*a*) el impulso impartido a la pelota, (*b*) el impulso impartido al palo, (*c*) la fuerza promedio ejercida en la pelota por el palo, y (*d*) el trabajo efectuado sobre la pelota.
6. Un automóvil de 1420 kg que se mueve a razón de 5.28 m/s está viajando inicialmente hacia el norte. Después de completar una curva de 90° hacia la derecha en 4.60 s, el conductor distraído lo dirige contra un árbol, el cual detiene al auto en 350 ms. ¿Cuál es la magnitud del impulso transmitido al auto (*a*) durante la curva, y (*b*) durante la colisión? ¿Qué fuerza promedio actúa en el auto (*c*) durante la curva y (*d*) durante la colisión?
7. Una bola de béisbol de 150 g (peso = 5.30 oz) lanzada a una velocidad de 41.6 m/s (= 136 ft/s) es bateada directamente hacia el lanzador a una velocidad de 61.5 m/s (= 202 ft/s). El bate estuvo en contacto con la bola durante 4.70 ms. Halle la fuerza promedio ejercida por el bate sobre la bola.
8. Una fuerza que promedia 984 N es aplicada a una bola de acero de 420 g que se mueve a razón de 13.8 m/s a causa de una colisión de 27.0 ms de duración. Si la fuerza está en dirección opuesta a la velocidad inicial de la bola, halle la velocidad final de la bola.
9. Una bola de 325 g a una velocidad $v$ de 6.22 m/s golpea una pared con un ángulo de 33.0° y luego rebota con la misma velocidad y ángulo (Fig. 25). Está en contacto con la pared durante 10.4 ms. (*a*) ¿Qué impulso experimentó la bola? (*b*) ¿Cuál fue la fuerza promedio ejercida por la bola contra la pared?

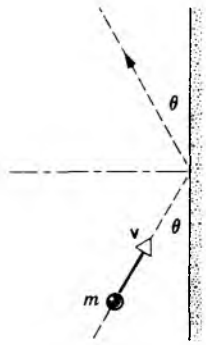



**Figura 25** Problema 9.

10. La figura 26 muestra una representación aproximada de la fuerza contra el tiempo durante la colisión de una pelota de tenis de 58 g contra una pared. La velocidad inicial de la pelota es de 32 m/s perpendicular a la pared; rebota a la misma velocidad, también perpendicular a la pared. ¿Cuál es el valor de $F_{máx}$, el valor máximo de la fuerza de contacto durante la colisión?
11. Una sonda espacial no tripulada de 2500 kg se mueve en línea recta a una velocidad constante de 300 m/s. Uno de los motores de un cohete de la sonda espacial ejecuta una combustión en la cual actúa un empuje de 3000 N durante 65.0 s. (*a*) ¿Cuál es el cambio del ímpetu (magnitud solamente) de la sonda cuando el empuje es hacia atrás, hacia adelante, o hacia un lado? (*b*) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética bajo las mismas tres condiciones? Supóngase que la masa del combustible expulsado sea despreciable comparada con la masa de la sonda espacial.
12. Una fuerza ejerce un impulso $J$ sobre un objeto de masa $m$, cambiando su velocidad de $v$ a $u$. La fuerza y el movimiento del objeto están a lo largo de la misma línea

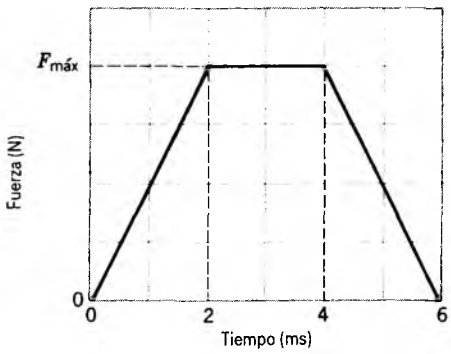



**Figura 26** Problema 10.

recta. Demuestre que el trabajo efectuado por la fuerza es de $\frac{1}{2}J(u + v)$.

**13.** Dos partes de un vehículo espacial se separan al detonar los pernos explosivos que las mantiene juntas. Las masas de las partes son de 1200 kg y 1800 kg; la magnitud del impulso transmitido a cada parte es de 300 N · s. ¿Cuál es la velocidad relativa de retroceso de las dos partes?

**14.** Una pelota de croquet con una masa de 0.50 kg es golpeada con un mazo, recibiendo el impulso mostrado en la gráfica (Fig. 27). ¿Cuál es la velocidad de la pelota justo después de que la fuerza llega a ser cero?

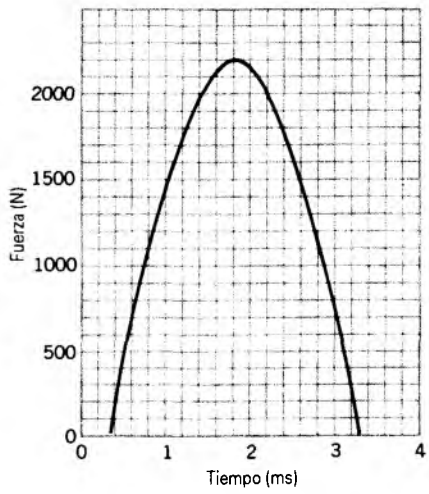



**Figura 27** Problema 14.

**15.** Es bien sabido que las balas y otros proyectiles disparados contra Superman simplemente rebotan en su pecho como se muestra en la figura 28. Supóngase que un *gangster* dispara contra el pecho de Superman balas de 3 g a razón de 100 balas/min, siendo la velocidad de cada bala de 500 m/s. Supóngase también que las balas rebotan directamente hacia atrás sin cambiar la velocidad. Demuestre que la fuerza promedio ejercida por la ráfaga de balas sobre el pecho de Superman es de 5.0 N (= 18 oz) solamente.




**Figura 28** Problema 15.

**16.** Un experto en karate rompe un tablero de pino de 2.2 cm de espesor con un golpe seco de su mano. Una fotografía estroboscópica demuestra que la mano, cuya masa puede considerarse como de 540 g, golpea la parte superior del tablero con una velocidad de 9.5 m/s y llega al reposo 2.8 cm por debajo de este nivel. (*a*) ¿Cuál es la duración de tiempo del golpe de karate (suponiendo una fuerza constante)? (*b*) ¿Qué fuerza promedio fue aplicada?

**17.** Un rifle de perdigones dispara 10 perdigones de 2.14 g por segundo con una velocidad de 483 m/s. Los perdigones chocan contra una pared rígida. (*a*) Halle el ímpetu de cada perdigón. (*b*) Halle la energía cinética de cada perdigón. (*c*) Calcule la fuerza promedio ejercida por la ráfaga de perdigones sobre la pared. (*d*) Si cada perdigón está en contacto con la pared durante 1.25 ms, ¿cuál es la fuerza promedio ejercida en la pared por cada perdigón mientras está en contacto? ¿Por qué es esto tan diferente de (*c*)?

**18.** Durante una gran tormenta caen granizos del tamaño de canicas de (diámetro = 1.0 cm) a una velocidad de 25 m/s. Se estima que caen 120 granizos por metro cúbico de aire. Desprecie el rebote del granizo al chocar. (*a*) ¿Cuál es la masa de cada granizo? (*b*) ¿Qué fuerza es ejercida por el granizo sobre un techo plano de 10 m × 20 m durante la tormenta? Supóngase que, siendo hielo, 1.0 $cm^3$ de granizo tienen una masa de 0.92 g.

**19.** Supóngase que las hélices de un helicóptero empujan verticalmente hacia abajo la columna cilíndrica de aire que barren al girar. La masa total del helicóptero es de 1820 kg y la longitud de las hélices es de 4.88 m. Halle la potencia mínima necesaria para mantener al helicóptero en el aire. Supóngase que la densidad del aire es de 1.23 $kg/m^3$.

**20.** Una cadena uniforme muy flexible de masa $M$ y longitud $L$ está suspendida de un extremo de modo que cuelga verticalmente, y su extremo inferior toca apenas la superficie de una mesa. El extremo superior se suelta súbitamente de modo que la cadena cae sobre la mesa y se enreda

formando un pequeño montón, llegando cada eslabón al reposo en el instante en que alcanza a la mesa; véase la figura 29. Halle la fuerza ejercida por la mesa sobre la cadena en todo momento, en función del peso de la cadena que ya está sobre la mesa en ese ímpetu.

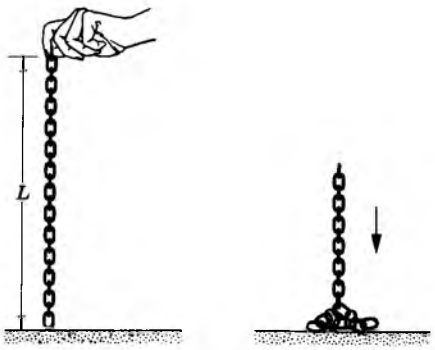



**Figura 29** Problema 20.

### *Sección 10-4 Colisiones en una dimensión*

**21.** Los bloques de la figura 30 se deslizan sin fricción. (*a*) ¿Cuál es la velocidad v del bloque de 1.6 kg después de la colisión? (*b*) ¿Es la colisión elástica?

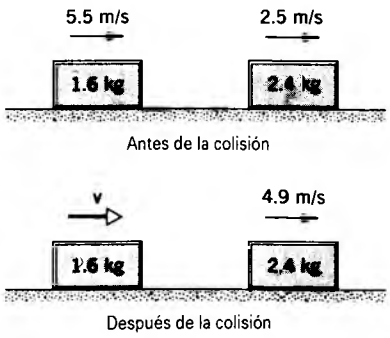



**Figura 30** Problemas 21 y 22.

**22.** Refiérase a la figura 30. Suponga que la velocidad inicial del bloque de 2.4 kg se invierte; se dirige directamente hacia el bloque de 1.6 kg. (*a*) ¿Cuál será la velocidad *v* del bloque de 1.6 kg después de la colisión? (*b*) ¿Sería esta colisión elástica?

**23.** Un elefante furioso embiste a razón de 2.1 m/s contra una mosca que revolotea. Suponiendo que la colisión sea elástica, ¿a qué velocidad rebota la mosca? Nótese que el proyectil (el elefante) es mucho más masivo que el blanco (la mosca).

**24.** Dos esferas de titanio se aproximan una a la otra frontalmente a la misma velocidad y chocan elásticamente. Después de la colisión una de las esferas, cuya masa de 300 g, permanece en reposo. ¿Cuál es la masa de la otra esfera?

**25.** Una bala de 4.54 g de masa se dispara horizontalmente contra un bloque de madera de 2.41 kg en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es de 0.210. La bala llega al reposo dentro del bloque, el cual se mueve 1.83 m. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del bloque inmediatamente después de que la bala llega al reposo dentro de él? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la bala?

**26.** Un carrito de 342 g de masa que se mueve sobre una pista lineal sin fricción a una velocidad inicial de 1.24 m/s choca contra otro carrito de masa desconocida que está en reposo. La colisión entre los carritos es elástica. Después de la colisión, el primer carrito continúa en su dirección original a 0.636 m/s. (*a*) ¿Cuál es la masa del segundo carrito? (*b*) ¿Cuál es su velocidad después del impacto?

**27.** Se cree que el Meteor Crater, en Arizona (véase la Fig. 31), se formó por el impacto de un meteorito con la Tierra hace unos 20,000 años. La masa del meteorito se calcula que fue de $5 \times 10^{10}$ kg y su velocidad en 7.2 km/s. ¿Qué velocidad impartiría a la Tierra tal meteorito en una colisión frontal?



**Figura 31** Problema 27.

**28.** Una bala de 5.18 g que se mueve a 672 m/s golpea un bloque de madera de 715 g que está en reposo sobre una superficie sin fricción. La bala sale con su velocidad reducida a 428 m/s. Halle la velocidad resultante del bloque.

**29.** Un objeto de 2.0 kg de masa choca elásticamente contra otro objeto en reposo y continúa moviéndose en la dirección original pero a un cuarto de su velocidad original. ¿Cuál es la masa del objeto golpeado?

**30.** En un arma de fuego antigua de retrocarga automática el mecanismo de recarga que está en la parte trasera del cañón se activa cuando el obturador, que recula después de disparar el arma, comprime a un resorte en una distancia *d* predeterminada. (*a*) Demuestre que la velocidad de la bala de masa *m* debe ser cuando menos $d\sqrt{kM/m}$ al disparar, para obtener la carga automática, donde *k* es la constante de fuerza del resorte y *M* es la masa del obturador. (*b*) ¿En qué sentido, si procede, puede considerarse este proceso como una colisión?

**31.** La cabeza de un palo de golf que se mueve a 45.0 m/s golpea una pelota de golf (masa = 46.0 g) que descansa

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACIÓN Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



sobre el *tee* (punto donde se coloca la pelota). La masa efectiva de la cabeza del palo es de 220 g. (*a*) ¿A qué velocidad deja el *tee* la bola? (*b*) ¿A qué velocidad lo dejaría si se duplicara la masa de la cabeza del palo? ¿Y si se triplicara? ¿Qué conclusiones pueden sacarse del uso de palos pesados? Supóngase que las colisiones son perfectamente elásticas y que el golfista puede manejar los palos más pesados a igual velocidad en el impacto. Véase la pregunta 14.

**32.** Una bola de acero de 0.514 kg de masa está sujeta a un cordón de 68.7 cm de longitud del que se deja caer cuando el cordón está horizontal. En el fondo de su trayecto, la bola golpea un bloque de acero de 2.63 kg inicialmente en reposo sobre una superficie sin fricción (Fig. 32). La colisión es elástica. Halle (*a*) la velocidad de la bola y (*b*) la velocidad del bloque, ambos en el momento después de la colisión. (*c*) Suponga ahora que, durante la colisión, la mitad de la energía cinética mecánica se convierte en energía interna y en energía sónica. Halle las velocidades finales.

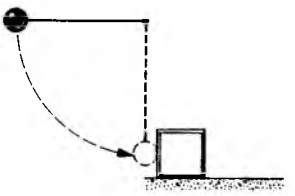


**Figura 32** Problema 32.

**33.** Dos automóviles *A* y *B* patinan en una carretera helada cuando tratan de detenerse en un semáforo. La masa de *A* es de 1100 kg y la masa de *B* es de 1400 kg. El coeficiente de fricción cinética entre las ruedas trabadas de ambos autos y la carretera es de 0.130. El automóvil *A* logra llegar al reposo en el semáforo, pero el automóvil *B* no puede parar y choca con la parte trasera del automóvil *A*. Después de la colisión, *A* llega al reposo 8.20 m adelante del punto de impacto y *B* 6.10 m adelante: véase la figura 33. Ambos conductores tenían sus ruedas trabadas durante el incidente. (*a*) A partir de las distancias en que cada auto se movió después de la colisión, halle la velocidad de cada automóvil inmediatamente después del impacto. (*b*) Usando la conservación del ímpetu halle la velocidad con la cual el auto *B* golpeó al auto *A*. ¿Sobre qué base puede objetarse aquí el uso de la conservación del ímpetu?

**34.** Un peso de 2.9 ton que cae desde una distancia de 6.5 ft se hunde 1.5 in. en un montón de tierra de 0.50 ton. Suponiendo que la colisión peso-montón sea completamente inelástica, halle la fuerza promedio de resistencia ejercida por la tierra.

**35.** Un carro de carga del ferrocarril que pesa 35.0 ton choca contra un furgón que está estacionado. Se acoplan entre sí y el 27.0% de la energía cinética inicial se disipa como calor, sonido, vibraciones, etc. Halle el peso del furgón.

**36.** El parachoques de un automóvil de 1220 kg está diseñado para que pueda absorber precisamente toda la energía cuando el auto a 5.20 km/h choque de frente contra una pared sólida de piedra. El automóvil sufre una colisión cuando corre a 75.5 km/h, chocando contra la parte trasera de un auto de 934 kg que va adelante y se mueve en la misma dirección a 62.0 km/h. El auto de 934 kg es acelerado a 71.3 km/h como resultado de la colisión. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del auto de 1220 kg inmediatamente después del impacto? (*b*) ¿Cuál es la razón entre la energía cinética absorbida en la colisión y la que puede ser absorbida por el parachoques del auto de 1220 kg?

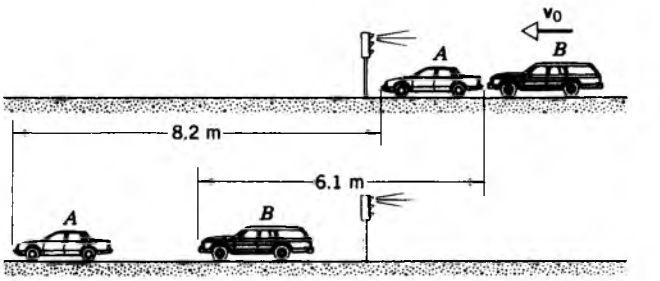



**Figura 33** Problema 33.

**37.** Un carro de carga de ferrocarril que pesa 31.8 ton y que viaja a 5.20 ft/s logra alcanzar a otro que pesa 24.2 ton y viaja a 2.90 ft/s en la misma dirección. (*a*) Halle las velocidades de los carros después de la colisión y la pérdida de energía cinética durante la colisión si los carros se acoplan entre sí. (*b*) Si en cambio, como es probable, la colisión es elástica, halle las velocidades de los carros después de la colisión.

**38.** Una báscula de plataforma está calibrada para indicar la masa en kilogramos de un objeto colocado sobre ella. Desde una altura de 3.5 m caen partículas que chocan con el platillo de la báscula. Las colisiones son elásticas; las partículas rebotan hacia arriba a la misma velocidad que tenían antes de chocar con el platillo. Cada partícula tiene una masa de 110 g y las colisiones ocurren a 42 $s^{-1}$. Halle la lectura de la escala.

**39.** Se coloca una caja sobre una báscula que está ajustada para que marque cero cuando la caja está vacía. Más tarde se vierte en la caja un montón de canicas desde una altura $h$ desde el fondo de la caja a razón de $R$ (canicas por segundo). Cada canica tiene una masa $m$. Las colisiones entre las canicas y la caja son completamente inelásticas. Halle la lectura que la báscula da del peso en el tiempo $t$ después de que las canicas comiencen a llenar la caja. Encuentre una respuesta numérica cuando $R$ = 115 $s^{-1}$, $h$ = 9.62 m, $m$ = 4.60 g, y $t$ = 6.50 s.

**40.** Una bola de masa $m$ se proyecta a una velocidad $v_i$ en el cañón de una pistola de resorte de masa $M$ inicialmente en reposo sobre una superficie sin fricción; véase la figura 34. La bola se pega en el cañón en el punto de máxima compresión del resorte. No se pierde energía por la fricción. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la pistola de resorte después de que la bola llega al reposo dentro del cañón? (*b*) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial de la bola se almacena en el resorte?

**41.** Un bloque de masa $m_1$ = 1.88 kg se desliza a lo largo de una mesa sin fricción a una velocidad de 10.3 m/s. Direc-

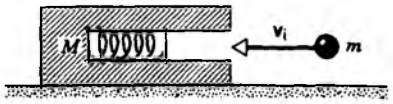



**Figura 34** Problema 40.

tamente enfrente de él, y moviéndose en la misma dirección, está un bloque de masa $m_2$ = 4.92 kg que se mueve a razón de 3.27 m/s. Un resorte carente de masa con una fuerza constante de $k$ = 11.2 N/cm está unido a la parte posterior de $m_2$, como se muestra en la figura 35. Cuando los bloques chocan, ¿cuál es la máxima compresión del resorte? (*Sugerencia*: En el momento de compresión máxima del resorte, los dos bloques se mueven como uno solo; halle la velocidad observando que la colisión es completamente inelástica en este punto.)

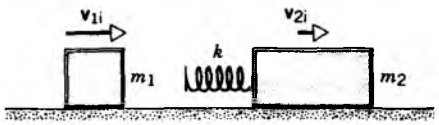



**Figura 35** Problema 41.

**42.** Se colocan dos trineos de 22.7 kg separados por una distancia pequeña, uno atrás del otro, como se muestra en la figura 36. Un gato de 3.63 kg que está en uno de los trineos brinca al otro e inmediatamente se regresa al primero. Ambos brincos se efectúan a una velocidad de 3.05 m/s respecto al trineo donde el gato estaba en reposo cuando se efectuó el brinco. Halle las velocidades finales de los dos trineos.



**Figura 36** Problema 42.

**43.** Un electrón, de masa $m$, choca de frente con un átomo, de masa $M$, inicialmente en reposo. Como resultado de la colisión, una cantidad característica de energía $E$ se almacena dentro del átomo. ¿Cuál es la velocidad inicial mínima $v_0$ que el electrón deberá tener? (*Sugerencia*: Los principios de conservación conducen a una ecuación cuadrática para la velocidad final $v$ del electrón y a una ecuación cuadrática para la velocidad final $V$ del átomo. El valor mínimo $v_0$ se deduce del requerimiento de que el radical de las soluciones para $v$ y $V$ sea real.)

**44.** Las dos esferas de la derecha en la figura 37 están ligeramente separadas e inicialmente en reposo; la esfera de la izquierda choca contra la otra a una velocidad $v_0$. Suponiendo colisiones elásticas de frente, (*a*) si $M \leq m$, demuestre que existen dos colisiones y halle todas las velocidades finales; (*b*) Si $M \geq m$, demuestre que existen tres colisiones y halle todas las velocidades finales.

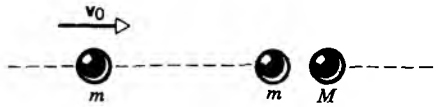



**Figura 37** Problemas 44 y 45.

**45.** Consideremos una situación como la del problema anterior (Fig. 37), pero en la cual las colisiones puedan ser ahora todas elásticas, todas inelásticas, o algunas elásticas y otras inelásticas; también, las masas son ahora $m$, $m'$, y $M$. Demuestre que para transferir de $m$ a $M$ la máxima energía cinética, el cuerpo intermedio debería tener una masa $m' = mM$, esto es, la media geométrica de las masas adyacentes. (Es interesante observar que esta misma relación existe entre las masas de capas sucesivas de aire en la bocina exponencial en acústica. (Véase "Energy Transfer in One-Dimensional Collisions of Many Objets", por John B. Hart y Robert B. Herrmann, *American Journal of Physics*, enero de 1968, pág. 46).

### *Sección 10-5 Colisiones bidimensionales*

**46.** Dos vehículos *A* y *B* viajan al oeste y al sur, respectivamente, hacia la misma intersección donde chocan y se traban entre sí. Antes de la colisión, *A* (con un peso de 2720 lb) se mueve a una velocidad de 38.5 mi/h y *B* (con un peso de 3640 lb) tiene una velocidad de 58.0 mi/h. Halle la magnitud y la dirección de la velocidad de los vehículos (trabados) inmediatamente después de la colisión.

**47.** Dos objetos, *A* y *B*, chocan. *A* tiene una masa de 2.0 kg, y *B* una masa de 3.0 kg. Las velocidades antes de la colisión son $\mathbf{v}_{iA} = 15\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}_{iB} = -10\mathbf{i} + 5.0\mathbf{j}$. Después de la colisión, $\mathbf{v}_{fA} = -6.0\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$. Todas las velocidades están dadas en metros por segundo. (*a*) ¿Cuál es la velocidad final de *B*? (*b*) ¿Cuánta energía cinética se ganó o se perdió en la colisión?

**48.** Una partícula alfa choca con un núcleo de oxígeno, inicialmente en reposo. La partícula alfa se desvía en un ángulo de 64.0° respecto a su dirección inicial de movimiento y el núcleo de oxígeno recula formando un ángulo de 51.0° por debajo de su dirección inicial. La velocidad final del núcleo es de $1.20 \times 10^5$ m/s. ¿Cuál es la velocidad final de la partícula alfa? (La masa de una partícula alfa es de 4.00 u y la masa de un núcleo de oxígeno es de 16.0 u.)

**49.** Demuestre que un neutrón lento (llamado *neutrón térmico*) que se dispersa en 90° en una colisión elástica con un deuterón, inicialmente en reposo, cede dos tercios de su energía cinética inicial al deuterón. (La masa de un neutrón es de 1.01 u; la masa de un deuterón es de 2.01 u.)

**50.** Después de una colisión totalmente inelástica, se encuentra que dos objetos de la misma masa y velocidad inicial se mueven juntos a la mitad de su velocidad inicial. Halle el ángulo entre las velocidades iniciales de los objetos.

**51.** Un protón (masa atómica de 1.01 u) con una velocidad de 518 m/s choca elásticamente con otro protón en reposo. El protón original se dispersa a 64.0° de su dirección inicial. (*a*) ¿Cuál es la dirección de la velocidad del protón blanco después de la colisión? (*b*) ¿Cuáles son las velocidades de los dos protones después de la colisión?

**52.** Dos bolas *A* y *B*, que tienen masas diferentes pero desconocidas, chocan. *A* está inicialmente en reposo y *B* tiene una velocidad $v$. Después de la colisión. *B* tiene una velocidad de $v/2$ y se mueve en un ángulo recto con su movimiento original. (*a*) Halle la dirección en que se mueve la bola *A* después de la colisión. (*b*) ¿Puede usted determinar la velocidad de *A* a partir de la información dada? Explique.

**53.** En un juego de billar, se le da a una bola una velocidad inicial $V$ y choca contra el montón de las 15 bolas estacionarias. Las 16 bolas sufren luego numerosas colisiones entre una y otra y entre ellas y la banda. Un tiempo después se observa que (por alguna casualidad) todas las bolas tienen la misma velocidad $v$. Suponiendo que todas las colisiones sean elásticas y despreciando el aspecto rotatorio del movimiento de las bolas, calcule $v$ en función de $V$.

**54.** Dos péndulos, de longitud $L$ cada uno, están inicialmente situados como se muestra en la figura 38. El primer péndulo se suelta desde una altura $d$ y golpea al segundo. Suponga que la colisión es completamente inelástica y despréciese la masa de los cordones y cualesquier efectos de fricción. ¿A qué altura se eleva el centro de masa después de la colisión?

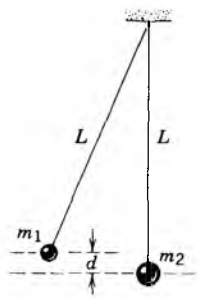



**Figura 38** Problema 54.

**55.** Una barcaza de $1.50 \times 10^5$ kg de masa navega río abajo a 6.20 m/s envuelta en niebla densa cuando choca de costado contra otra barcaza que avanza en línea reacta cruzando el río; véase la figura 39. La segunda barcaza tiene una masa de $2.78 \times 10^5$ kg y avanzaba a 4.30 m/s. Inmediatamente después del impacto, la segunda barcaza sufre una desviación de 18.0° en la dirección de la corriente y su velocidad aumenta a 5.10 m/s. La corriente del río era prácticamente nula en el momento del accidente. (*a*) ¿Cuáles son la velocidad y la dirección del movimiento de la primera barcaza inmediatamente después de la colisión? (*b*) ¿Cuánta energía cinética se perdió en la colisión?

**56.** Una bola a una velocidad inicial de 10.0 m/s choca elásticamente con dos bolas idénticas cuyos centros están en una línea perpendicular a la velocidad inicial e inicialmente en contacto entre sí (Fig. 40). La primera bola se dirige directamente al punto de contacto y todas las bolas carecen de fricción. Halle las velocidades de las tres bolas después de la colisión. (*Sugerencia*: En ausencia de fricción, cada impulso se dirige a lo largo de la línea de los centros de las bolas, normal a las superficies que chocan.)

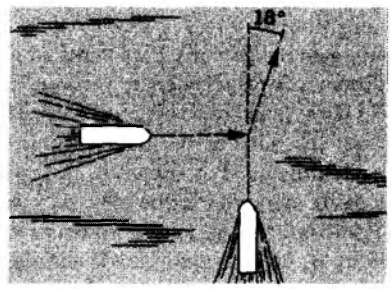



**Figura 39** Problema 55.

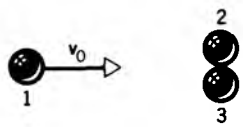



**Figura 40** Problema 56.

**57.** En un juego de billar, el mingo golpea contra otra bola que inicialmente está en reposo. Después de la colisión, el mingo se mueve a razón de 3.50 m/s a lo largo de una línea que forma un ángulo de 65.0° con su dirección de movimiento original. La segunda bola adquiere una velocidad de 6.75 m/s. Usando la conservación del ímpetu, halle (*a*) el ángulo entre la dirección del movimiento de la segunda bola y la dirección original del movimiento del mingo y (*b*) la velocidad original del mingo.

**58.** En 1932 James Chadwick, en Inglaterra, demostró la existencia y propiedades del neutrón (una de las partículas fundamentales que forman el átomo) con el aparato que se muestra en la figura 41. En una cámara al vacío, una muestra de polonio radiactivo se desintegra produciendo partículas alfa (núcleos de helio). Estos núcleos chocan contra un bloque de berilo, induciendo un proceso por el cual se emiten neutrones. (En la reacción se combinan el He y el Be para formar carbono + neutrones estables.) Los neutrones chocan contra una capa delgada de parafina ($CH_4$), liberando núcleos de hidrógeno que son detectados en una cámara de ionización. En otras palabras, ocurre una colisión elástica en la que el ímpetu del neutrón se transfiere parcialmente al núcleo de hidrógeno. (*a*) Halle una expresión para la velocidad máxima $v_H$ que puede alcanzar el núcleo de hidrógeno (de masa $m_H$). Asignemos a los neutrones entrantes una masa $m_n$ y una velocidad $v_n$. (*Sugerencia*: ¿Se transferirá más energía en una colisión frontal o en una colisión oblicua?). (*b*) Una de las metas de Chadwick consistía en hallar la masa de su nueva partícula. La inspección de la expresión (*a*), que contiene este parámetro, sin embargo, muestra que están presentes

las *dos* incógnitas, $v_n$ y $m_n$ ($v_H$ se conoce; puede medirse con la cámara de ionización). Para eliminar a la incógnita $v_n$, él sustituyó a la parafina con un bloque de paracianógeno (CN). Los neutrones sufrieron entonces colisiones elásticas con los núcleos de nitrógeno en lugar de los núcleos de hidrógeno. Por supuesto, la expresión (*a*) se cumple todavía si $v_N$ se escribe para $v_H$ y $m_N$ se escribe para $m_H$. Por lo tanto, si $v_H$ y $v_N$ se miden en experimentos por separado, $v_N$ puede ser eliminada entre las dos expresiones para el hidrógeno y el nitrógeno y dar un valor para $m_n$. Los valores de Chadwick fueron

$$v_H = 3.3 \times 10^9 \text{ cm/s},$$
$$v_N = 0.47 \times 10^9 \text{ cm/s}.$$

¿Cuál es su valor para $m_n$? ¿Cómo se compara éste con el valor admitido $m_n = 1.00867$ u? (Haga que $m_H = 1.0$ u, $m_N = 14$ u).

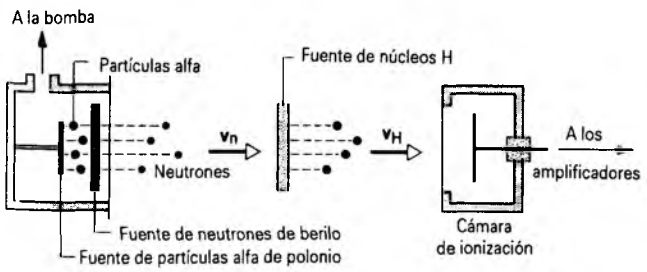



**Figura 41** Problema 58.

**59.** Demuestre que, en el caso de una colisión elástica entre una partícula de masa $m_1$ con una partícula de masa $m_2$ inicialmente en reposo, (*a*) el ángulo máximo $\theta_m$ a través del cual puede ser desviada $m_1$ por la colisión, está dado por $\cos^2 \theta_m = 1 - m_2^2/m_1^2$, de modo que $0 \leq \theta_m \leq \pi/2$, cuando $m_1 > m_2$; (*b*) $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, cuando $m_1 = m_2$; (*c*) $\theta_1$ puede tener todos los valores entre 0 y $\pi$, cuando $m_1 < m_2$.

### *Sección 10-6 Marco de referencia del centro de masa*

**60.** (*a*) Demuestre que en una colisión elástica unidimensional la velocidad del centro de masa de dos partículas, $m_1$ que se mueve a velocidad inicial $v_{1i}$ y $m_2$ que se mueve a una velocidad inicial $v_{2i}$ es

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}.$$

(*b*) Úsense las ecuaciones 15 y 16 para $v_{1f}$ y $v_{2f}$, es decir, las velocidades de las partículas después de la colisión, para derivar el mismo resultado para $v_{cm}$ *después* de la colisión.

**61.** En el laboratorio, una partícula de 3.16 kg de masa que se mueve a razón de 15.6 m/s hacia la izquierda colisiona con una partícula de 2.84 kg de masa que se mueve 12.2 m/s hacia la derecha. Halle la velocidad del centro de masa del sistema de dos partículas después de la colisión.

**62.** Una partícula de masa $m_1$ que se mueve a una velocidad $v_{1i}$ choca de frente con $m_2$, inicialmente en reposo, en una colisión perfectamente inelástica. (*a*) ¿Cuál es la energía cinética del sistema antes de la colisión? (*b*) ¿Cuál es la energía cinética del sistema después de la colisión? (*c*) ¿Qué fracción de la energía cinética original se perdió? (*d*) Sea $v_{cm}$ la velocidad del centro de masa del sistema. Véase la colisión desde un marco de referencia preparado que se mueva con el centro de masa de modo que $v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm}$, $v'_{2i} = -v_{cm}$. Repítanse las partes (*a*), (*b*) y (*c*), como las ve un observador situado en este marco de referencia. ¿Se pierde la misma cantidad de energía cinética en cada caso? Explique.

### *Sección 10-7 Procesos de desintegración espontánea*

**63.** Una partícula llamada $\Sigma^-$, en reposo en cierto marco de referencia, se desintegra espontáneamente en dos partículas distintas de acuerdo con

$$\Sigma^- \rightarrow \pi^- + \text{n}.$$

Las masas son

$$m_\Sigma = 2340.5 m_e,$$
$$m_\pi = 273.2 m_e,$$
$$m_n = 1838.65 m_e,$$

donde $m_e$ es la masa del electrón. (*a*) Halle la energía cinética total de los productos de la desintegración. (*b*) ¿Cuánta energía cinética obtiene cada producto de la desintegración?

**64.** Una partícula de masa $m$ en reposo se desintegra espontáneamente en dos partículas de masa $m_1$ y $m_2$ con velocidades respectivas $v_1$ y $v_2$. Demuestre que $m > m_1 + m_2$.

**65.** Cierto núcleo, en reposo, se desintegra espontáneamente en tres partículas. Dos de ellas son detectadas; sus masas y velocidades son las que se muestran en la figura 42. (*a*) ¿Cuál es el ímpetu de la tercera partícula, de la cual se sabe que tiene una masa de $11.7 \times 10^{-27}$ kg? (*b*) ¿Cuánta energía cinética, en MeV, se genera en el proceso de desintegración?

**66.** Un pión en reposo se desintegra espontáneamente de acuerdo con el esquema

$$\pi \rightarrow \mu + \nu,$$

en el que $\mu$ representa a un muón (energía en reposo = 105.7 MeV) y $\upsilon$ a un neutrino (energía en reposo = 0). La energía cinética medida del muón es de 4.100 MeV.

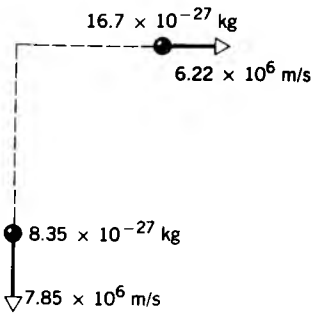



**Figura 42** Problema 65.

(*a*) Halle el ímpetu del neutrino, en unidades MeV/*c*. (*b*) Calcule la energía de reposo del pión.

### *Proyecto para la computadora*

**67.** Escriba un programa que describa la colisión elástica entre dos partículas de masas $m_1$ y $m_2$ y velocidades iniciales $v_{1i}$ y $v_{2i}$. El programa deberá aceptar valores numéricos de estas cuatro cantidades como datos de entrada y dar resultados con valores numéricos de las velocidades finales, $v_{1f}$ y $v_{2f}$, y de $v_{cm}$, la velocidad del centro de masa. Use el programa para explorar todos los casos especiales que a usted se le ocurran, tales como $m_1 = m_2$, $m_1 \gg m_2$, $m_1 \ll m_2$, $v_{1i} \gg v_{2i}$, $v_{1i} = v_{2i}$, $v_{1i} = -v_{2i}$.

# CAPÍTULO 11

# CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN

*Hasta aquí hemos estudiado solamente el movimiento de* traslación *de los objetos. Así, hemos considerado tanto los cuerpos rígidos (en los que todas sus partes están fijas unas entre sí) como los sistemas no rígidos (cuyas partes pueden moverse unas con relación a las otras).*

*El movimiento más general de un cuerpo rígido comprende tanto los movimientos* de rotación *como los* de traslación. *En el presente capítulo comenzaremos a considerar este movimiento general. Iniciaremos con la descripción de la rotación con sus variables apropiadas, relacionándolas entre sí; esto pertenece al ámbito de la* cinemática de la rotación, *que es el tema de este capítulo. En los dos capítulos siguientes estudiaremos las relaciones del movimiento de rotación con la interacción de un objeto y su entorno (*dinámica de la rotación*).*

## 11-1 MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

La figura 1 muestra una bicicleta de ejercicio fija. El eje de la rueda frontal al girar está fijo en el espacio; así, definiremos como $z$ al eje de nuestro sistema de coordenadas. Un punto arbitrario $P$ de la rueda está a una distancia $r$ perpendicular al punto $A$ en el eje $z$. Tracemos la línea $AB$ de modo que pase por $P$ desde $A$. El movimiento del punto $P$ traza un arco de círculo cuando gira la rueda. No lo hace necesariamente a velocidad constante, pues quien practica el ejercicio puede cambiar el ritmo al que está pedaleando.

El movimiento de la rueda es un ejemplo de la *rotación pura de un cuerpo rígido*, que definiremos como sigue:

*Un cuerpo rígido se mueve en rotación pura si cada punto del cuerpo (como P en la Fig. 1) se mueve en trayectoria circular. Los centros de estos círculos deben estar sobre una línea recta común llamada eje de rotación (el eje z de la Fig. 1).*



(a)

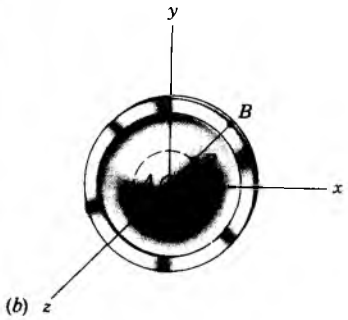



**Figura 1** (*a*) La rueda de una bicicleta de ejercicio fija es un ejemplo de la rotación pura de un cuerpo rígido. (*b*) Coordenadas utilizadas para describir la rotación de la rueda. El eje de rotación, que es perpendicular al plano de la figura, es el eje $z$. Un punto arbitrario $P$ situado a la distancia $r$ del eje $A$ se mueve en un círculo de radio $r$.

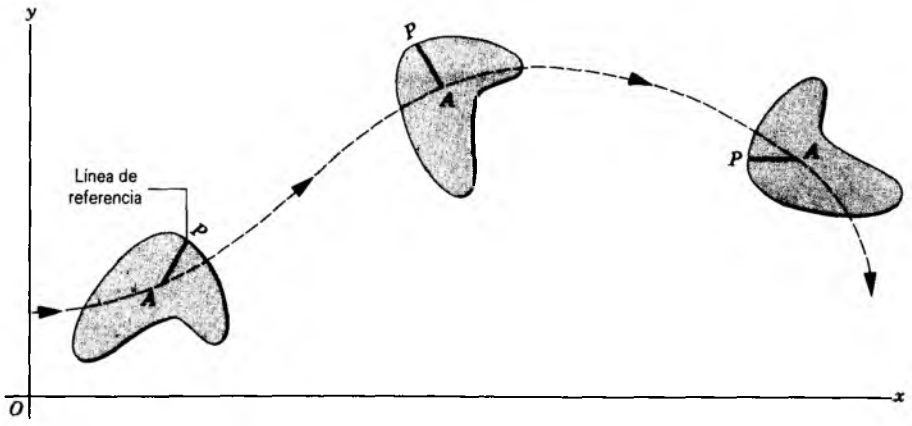



**Figura 2** Un cuerpo rígido arbitrario con ambos movimientos de rotación y de traslación. En este caso bidimensional especial, el movimiento de traslación se halla confinado al plano *xy*. La línea punteada muestra la trayectoria en el plano *xy* que corresponde al movimiento de traslación del eje de rotación, que es paralelo al eje *z* a través del punto *A*. El movimiento de rotación está indicado por la línea *AP*.

Podemos también caracterizar el movimiento de la rueda por la línea de referencia *AB* en la figura 1. Al girar la rueda, la línea *AB* se mueve a través de un cierto ángulo en el plano *xy*. Otra manera de definir la rotación pura es la siguiente:

*Un cuerpo rígido se mueve en rotación pura si una línea de referencia perpendicular al eje (como AB en la Fig. 1) se mueve a través del mismo ángulo en un intervalo de tiempo dado como cualquier otra línea de referencia perpendicular al eje del cuerpo.*

En el caso de una rueda de bicicleta ordinaria, la línea *AB* podría representar uno de los rayos (tomado como radial) de la rueda. La definición anterior significa entonces que, para una rueda en rotación pura, si un rayo gira en un cierto ángulo $\Delta\phi$ en el intervalo de tiempo $\Delta t$, entonces cualquier otro rayo deberá también girar a través de $\Delta\phi$ durante ese mismo intervalo.

El movimiento general de un objeto rígido incluirá componentes de traslación y de rotación, como, por ejemplo, en el caso de una rueda de bicicleta *móvil*. El punto *P* en tal rueda se mueve en círculo de acuerdo con un observador en el mismo marco de referencia que la rueda (el corredor, por ejemplo); pero otro observador fijo en el suelo describiría el movimiento de manera diferente. En casos aún más complejos, como el de una pelota de fútbol que vuele bamboleándose, podemos tener una combinación de un movimiento de traslación, un movimiento de rotación con respecto a un eje, y una variación en la dirección del eje. En general, la descripción tridimensional de un cuerpo rígido requiere de seis coordenadas; tres para ubicar el centro de masa, dos ángulos (como la latitud y la longitud) para orientar el eje de rotación, y un ángulo para describir las rotaciones alrededor del eje. La figura 2 muestra un cuerpo rígido bidimensional arbitrario que experimenta movimientos de rotación y de traslación. En este caso sólo se necesitan tres coordenadas: dos para el centro de masa y una para la coordenada angular de una línea de referencia en el cuerpo.

En el presente capítulo consideramos únicamente el movimiento de rotación pura. (En el capítulo siguiente se estudiará el caso más complicado de la rotación y la traslación combinadas.) Así, consideramos sólo objetos rígidos, en los que no existe movimiento relativo de las partes al girar el objeto; por lo tanto, el caso de un líquido dentro de un recipiente en rotación, por ejemplo, no lo estudiaremos ahora.

## 11-2 LAS VARIABLES DE LA ROTACIÓN

La figura 3*a* muestra un cuerpo de forma arbitraria que gira con respecto al eje *z*. Podemos decir exactamente del cuerpo completo en rotación dónde se encuentra éste dentro de nuestro marco de referencia, si conocemos la ubicación de un solo punto *P* del cuerpo en este marco. Así, para la cinemática de este problema, necesitamos considerar solamente el movimiento (bidimensional) de un punto situado en el círculo de radio *r* igual a la distancia perpendicular desde *P* hasta el punto *A* sobre el eje *z*. La figura 36*b* muestra una sección del cuerpo paralela al plano *xy* que incluye al punto *P*.

El ángulo $\phi$ en la figura 3b es la posición angular de la línea de referencia *AP* con respecto al eje *x'*. *Arbitrariamente elegimos como sentido positivo de la rotación el contrario al de las manecillas del reloj*, de modo que (en la Fig. 3*b*) $\phi$ aumenta para una rotación en sentido antihorario y disminuye para una rotación en el sentido de las manecillas, de acuerdo con un observador que esté más alejado a lo largo del eje positivo *z* que el objeto en rotación.

Es conveniente medir $\phi$ en radianes en lugar de medirlo en grados. Por definición $\phi$ está dado en radianes (rad) por la relación

$$\phi = s/r, \tag{1}$$

donde *s* es la longitud de arco que se muestra en la figura 3*b*.

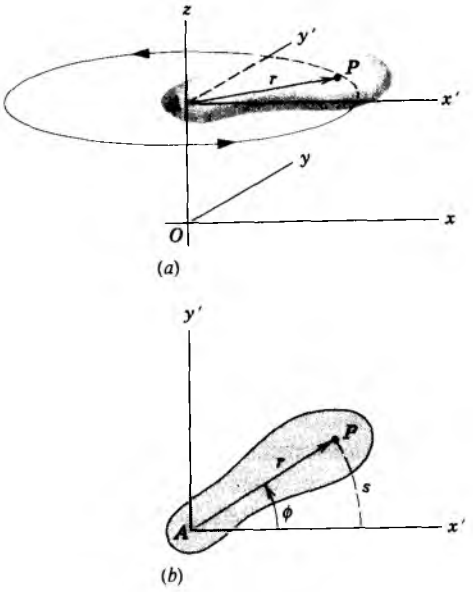



**Figura 3** (*a*) Un cuerpo rígido arbitrario que gira en torno al eje *z*. (*b*) Corte de cuerpo en sección transversal. Los ejes *x'* y *y'* son paralelos a los ejes *x* y *y*, respectivamente, pero pasan por el punto *A*. La línea de referencia *AP*, que une un punto *P* del cuerpo con el eje, está ubicada instantáneamente a un ángulo $\phi$ con respecto al eje *x'*. El punto *P* se mueve a través de una longitud de arco *s* cuando la línea *AP* gira a través del ángulo $\phi$.

El radián, por ser la razón de dos longitudes, es un número puro y no tiene dimensiones. Puede, por lo tanto, incluirse en las unidades que corrspoden a las cantidades físicas, o puede despreciarse, según nos convenga.

Puesto que la circunferencia de un círculo de radio *r* es $2\pi r$, de la ecuación 1 se deduce que una partícula que se mueva en un arco de longitud igual a la circunferencia debe barrer un ángulo de $2\pi$ radianes. Así,

$$1 \text{ revolución} = 2\pi \text{ radianes} = 360°,$$

o sea

$$1 \text{ radián} = 57.3° = 0.159 \text{ revoluciones}.$$

Hagamos que el cuerpo de la figura 3*b* gire en sentido contrario a las manecillas del reloj. En el tiempo $t_1$ la posición angular de la línea *AP* es $\phi_1$, y en un tiempo $t_2$ más tarde su posición angular es $\phi_2$. Esto se muestra en la figura 4, la cual da las posiciones de *P* y de la línea de referencia en estos tiempos; por simplificación, hemos omitido el croquis del propio cuerpo.

El *desplazamiento angular* de *P* será $\phi_2 - \phi_1 = \Delta$ durante el intervalo de tiempo $t_2 - t_1 = \Delta t$. Definimos a la *velocidad angular promedio* $\overline{\omega}$ de la partícula *P* en este intervalo de tiempo así:

$$\overline{\omega} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}. \tag{2}$$

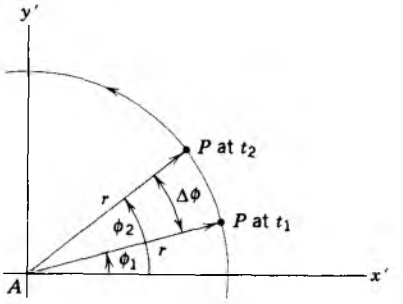



**Figura 4** La línea de referencia *AP* de la figura 3*b* está en la coordenada angular $\phi_1$ en el tiempo $t_1$ y en la coordenada angular $\phi_2$ en el tiempo $t_2$. En el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, el desplazamiento angular neto es $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

La *velocidad angular instantánea* $\omega$ es el límite alcanzado por esta razón cuando $\Delta t$ tiende a cero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

o sea

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}. \tag{3}$$

Para un cuerpo rígido en rotación pura, todas las líneas fijas en él que sean perpendiculares al eje de rotación giran a través del mismo ángulo en el mismo tiempo, de modo que la velocidad angular $\omega$ alrededor de este eje es la misma para cada punto del cuerpo. Entonces $\omega$ es caracterísica del cuerpo como un todo. La velocidad angular tiene las dimensiones de un tiempo inverso ($T^{-1}$); sus unidades pueden ser radianes/segundo (rad/s) o revoluciones/segundo (rev/s).

Si la velocidad angular de *P* no es constante, entonces el punto tiene una aceleración angular. Sean $\omega_1$ y $\omega_2$ las velocidades angulares instantáneas en los tiempos $t_1$ y $t_2$, respectivamente; entonces, la *aceleración angular promedio* $\overline{\alpha}$ del punto *P* se define como

$$\overline{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{4}$$

La *aceleración angular instantánea* es el límite de esta razón cuando $\Delta t$ tiende a cero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

o sea

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \tag{5}$$

Puesto que $\omega$ es la misma para todos los puntos de un cuerpo rígido, se deduce de la ecuación 5 que $\alpha$ debe ser la misma para cada punto, y entonces $\alpha$, como $\omega$, es una característica del cuerpo como un todo. La aceleración

angular tiene las dimensiones de un tiempo inverso al cuadrado ($T^{-2}$); sus unidades pueden ser radianes/segundo$^2$ (rad/s2) o revoluciones/segundo$^2$ ( rev/s$^2$).

En vez de la rotación de un cuerpo rígido, podíamos haber considerado el movimiento de una partícula aislada en una trayectoria circular. Esto es, $P$ en la figura 4 puede representar a una partícula de masa $m$, obligada a moverse en un círculo de radio $r$ (quizás sostenida por una barra rígida carente de masa de longitud $r$ pivotada en el eje $z$). Todos los resultados derivados en esta sección son válidos ya sea que veamos a $P$ como un punto matemático o como una partícula física; podríamos, por ejemplo, referirnos a la velocidad angular o a la aceleración angular de la *partícula P* mientras gira en torno al eje $z$. Más adelante hallaremos útil ver al cuerpo rígido en rotación de la figura 3 como un conjunto de partículas, cada una de las cuales está girando con respecto al eje a la misma velocidad angular y a la misma aceleración angular.

La rotación de una partícula (o de un cuerpo rígido) *con respecto a un eje fijo* tiene una correspondencia formal con el movimiento de traslación de una partícula (o de un cuerpo rígido) *a lo largo de una dirección fija*. Las variables cinemáticas son $\phi$, $\omega$, y $\alpha$ en el primer caso y $x$, $v$, y $a$ en el segundo. Estas cantidades se corresponden en pares: $\phi$ a $x$, $\omega$ a $v$, y $\alpha$ a $a$. Nótese que las cantidades angulares difieren dimensionalmente de las cantidades lineales correspondientes por un factor de longitud. Nótese, además, que las seis cantidades pueden ser tratadas como escalares en este caso especial. Por ejemplo, una partícula en cualquier instante puede moverse en una dirección o en otra a lo largo de su trayectoria en línea recta, correspondiendo a un valor de $v$ positivo o negativo; del mismo modo, una partícula en cualquier instante puede girar en una dirección o en otra con respecto a su eje fijo, correpondiendo a un valor de $\omega$ positivo o negativo.

Cuando, en el movimiento de traslación, eliminamos la restricción de que el movimiento sea a lo largo de una línea recta y consideramos el caso general del movimiento en tres dimensiones a lo largo de una trayectoria curva, las variables escalares $x$, $v$, y $a$ deben ser reemplazadas por los vectores cinemáticos **r**, **v**, y **a**. En la sección 11-4 veremos hasta qué punto las variables cinemáticas de rotación se revelan como auténticos vectores cuando eliminamos la restricción de un eje de rotación fijo.

## 11-3 ROTACIÓN CON ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE

Hemos visto (en el capítulo 2) que, para el movimiento de traslación de una partícula o de un cuerpo rígido a lo largo de una dirección fija, como el eje $x$, el tipo de movimiento más sencillo es aquel en el cual la aceleración $a$ es cero. El siguiente tipo más sencillo corresponde a $a$ = una constante (distinta de cero); para este movimiento derivamos las ecuaciones de la tabla 2 del capítulo 2, que relacionan las variables cinemáticas $x$, $v$, $a$, y $t$ en todas las combinaciones posibles.

Para el movimiento de rotación de una partícula o de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo, el tipo de movimiento más sencillo es aquel en el que la aceleración angular $\alpha$ es cero (como el movimiento circular uniforme). El siguiente tipo más sencillo de movimiento, en el que $\alpha$ = una constante (distinta de cero), corresponde exactamente al movimiento lineal con $a$ = una constante (distinta de cero). Como antes, podemos derivar cinco ecuaciones que enlacen a las cuatro variables cinemáticas $\phi$, $\omega$, $\alpha$, y $t$ en todas las combinaciones posibles. Estas ecuaciones angulares pueden ser derivadas, mediante los métodos que empleamos para derivar las ecuaciones lineales, o pueden escribirse simplente, sustituyendo las cantidades angulares correspondientes por la cantidades lineales en las ecuaciones lineales.

Como ejemplo, derivemos la expresión que enlaza a $\omega$, $\alpha$, y $t$. Comenzaremos por reescribir la ecuación 5 como

$$d\omega = \alpha\, dt.$$

Integramos ahora el lado izquierdo desde $\omega_0$ (la velocidad angular en el tiempo $t$ = 0) hasta $\omega$ (la velocidad angular en el tiempo $t$), y a la derecha desde el tiempo 0 hasta el tiempo $t$:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt = \alpha \int_0^t dt,$$

donde el último paso puede ser considerado *solamente* cuando la aceleración angular $\alpha$ es constante. Llevando a cabo la integración, obtenemos

$$\omega - \omega_0 = \alpha t,$$

o sea

$$\omega = \omega_0 + \alpha t. \qquad (6)$$

Esto es el análogo de rotación de la ecuación 15 del capítulo 2, $v = v_0 + at$. Nótese que podríamos obtener la expresión de rotación sustituyendo a $\omega$ por $v$ y a $\alpha$ por $a$ en la expresión de la traslación.

Por medio de tales derivaciones, podemos hallar cinco expresiones básicas de la cinemática de la rotación con una aceleración angular constante, que se listan en la tabla 1 junto con sus contrapartes de la traslación. La ecuación 7 puede derivarse escribiendo la ec. 3 como $d\phi = \omega\, dt$ e integrando. Las ecuaciones 8, 9, y 10 pueden derivarse eliminando, respectivamente, a $t$, $\alpha$, y $\omega_0$ de las ecuaciones 6 y 7 (que pueden ser consideradas como las dos ecuaciones básicas, porque se derivan de las definiciones

**TABLA 1** MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN LINEAL O ANGULAR CONSTANTE

| *Número de la ecuación (capítulo 2)* | *Movimiento de traslación (dirección fija)* | *Movimiento de rotación (eje fijo)* | *Número de la ecuación (este capítulo)* |
|---|---|---|---|
| (15) | $v = v_0 + at$ | $\omega = \omega_0 + \alpha t$ | (6) |
| (19) | $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ | $\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ | (7) |
| (20) | $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ | $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\phi - \phi_0)$ | (8) |
| (21) | $x = x_0 + \frac{v_0 + v}{2} t$ | $\phi = \phi_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$ | (9) |
| (22) | $x = x_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$ | $\phi = \phi_0 + \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$ | (10) |

de la aceleración angular y de la velocidad angular). Usted podría comprobar dimensionalmente todas las ecuaciones antes de verificarlas. Ambos grupos de ecuaciones se aplican tanto para partículas como para cuerpos rígidos.

El sentido positivo de las cantidades angulares $\omega$ y $\alpha$ se halla determinado por la dirección en la cual $\phi$ crece. A partir de la ecuación 3, vemos que $\omega$ es positiva si $\phi$ crece con el tiempo (esto es, el objeto está girando en dirección contraria a las manecillas del reloj). De igual forma, a partir de la ecucaión 5, vemos que $\alpha$ es positiva si $\omega$ crece con el tiempo, aun si $\omega$ es negativa y se torna menos negativa. Estas convenciones son similares a las convenciones de signo correspondientes para las cantidades lineales.

**Problema muestra 1** Partiendo desde el reposo en el tiempo $t = 0$, una piedra abrasiva tiene una aceleración angular constante $\alpha$ de 3.2 rad/s$^2$. En $t = 0$ la línea de referencia $AB$ de la figura 5 es horizontal. Halle (*a*) el desplazamiento angular de la línea $AB$ (y por lo tanto de la piedra abrasiva) y (*b*) la velocidad angular de la piedra abrasiva 2.7 s después.

**Solución** (*a*) $\alpha$ y $t$ están dadas; deseamos hallar $\phi$. De aquí que utilicemos la ecuación 7 (véase la tabla 1):

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

En $t = 0$, tenemos que $\phi_0 = 0$, $\omega = \omega_0$, y $\alpha = 3.2$ rad/s$^2$. Por lo tanto, después de 2.7 s,

$$\phi = 0 + (0)(2.7 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(3.2 \text{ rad/s}^2)(2.7 \text{ s})^2$$
$$= 11.7 \text{ rad} = 1.9 \text{ rev}.$$

(*b*) $\alpha$ y $t$ están dadas; deseamos hallar $\omega$. Por lo tanto, usaremos la ecuación 6:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (3.2 \text{ rad/s}^2)(2.7 \text{ s})$$
$$= 8.6 \text{ rad/s} = 1.4 \text{ rev/s}.$$

**Problema muestra 2** Supongamos que la potencia que mueve a la rueda abrasiva del problema muestra 1 es desconectada cuando la rueda está girando a una velocidad angular de 8.6 rad/s. Una pequeña fuerza de fricción en la flecha causa una deceleración angular constante, y la rueda llega finalmente al reposo en un tiempo de 192 s. Halle (*a*) la aceleración angular y (*b*) el ángulo total girado durante la deceleración.

**Solución** (*a*) Dadas $\omega_0 = 8.6$ rad/s y $t = 192$ s, buscamos $\alpha$ y, por lo tanto, utilizamos la ecuación 6 ($\omega = \omega_0 + \alpha t$), o sea

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 8.6 \text{ rad/s}}{192 \text{ s}} = -0.045 \text{ rad/s}^2.$$

(*b*) Según la ecuación 9 de la tabla 1 tenemos que

$$\phi = \phi_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2} t = 0 + \frac{8.6 \text{ rad/s} + 0}{2} (192 \text{ s})$$
$$= 826 \text{ rad} = 131 \text{ rev}.$$

## 11-4 CANTIDADES DE ROTACIÓN COMO VECTORES

El desplazamiento lineal, la velocidad y la aceleración son vectores. Las cantidades angulares correspondientes *pueden ser* también vectores, ya que además de su magnitud debemos especificar también su dirección, es decir, la dirección del eje de rotación en el espacio. Puesto que hemos considerado la rotación sólo en torno a un eje fijo, hemos podido tratar a $\phi$, $\omega$, y $\alpha$ como cantidades escalares. Si cambia la dirección del eje, sin embargo, ya no podemos eludir la pregunta, "¿son vectores las cantidades de rotación?"

En la sección 3-2 aprendimos que, para representar a un vector, una cantidad física no debe tener solamente magnitud y dirección, sino que debe obedecer también a las leyes de la suma vectorial. Sólo experimentalmente podemos discernir si una cantidad física obedece a estas leyes.

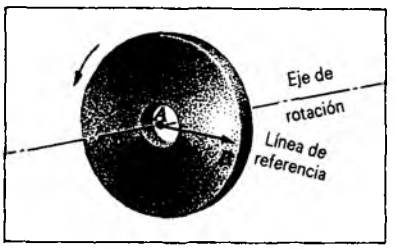



**Figura 5** Problema muestra 1. La línea de referencia $AB$ es horizontal en $t = 0$ y gira con la piedra abrasiva.

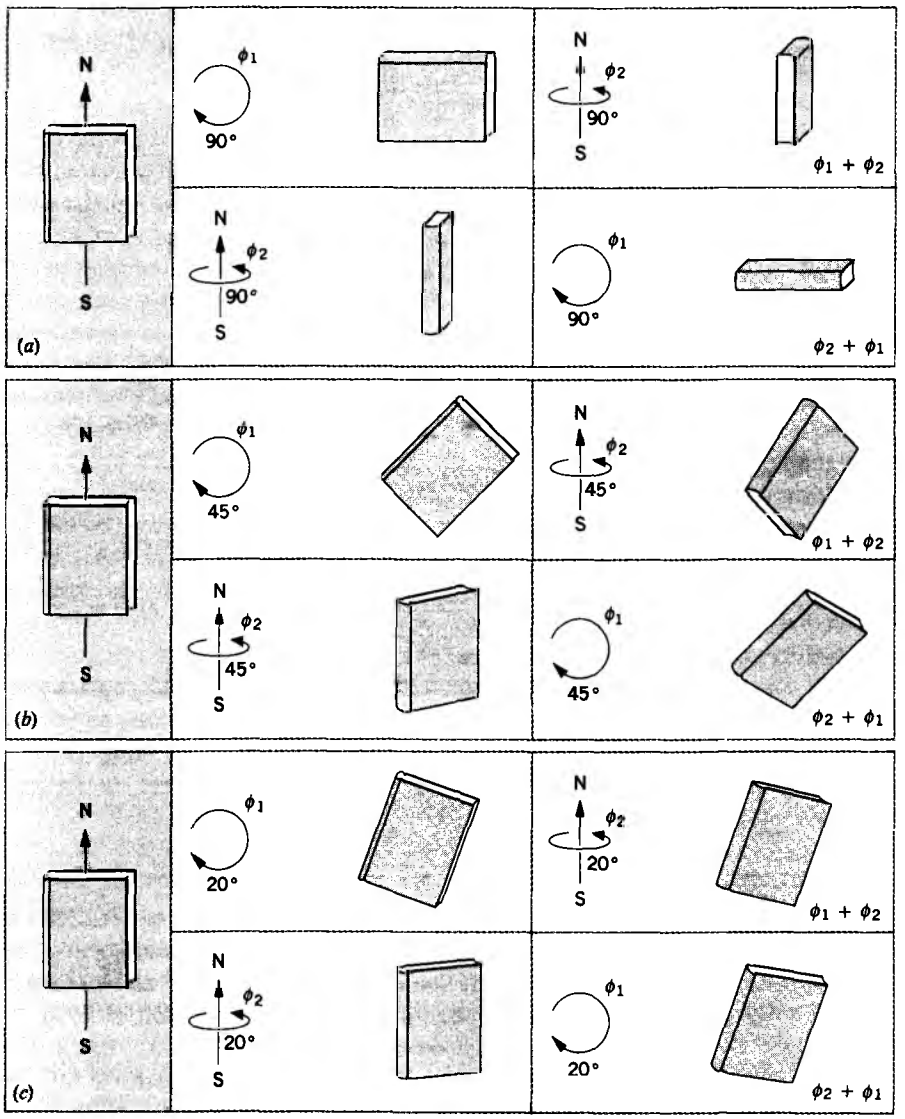



**Figura 6** (*a*) Al libro se le dan dos giros de 90°, $\phi_1$ alrededor de un eje que forma un ángulo recto con la página y $\phi_2$ alrededor de un eje en la página señalada con norte-sur. Como se muestra, la orientación final depende del orden en que efectuemos estos giros. Así, el resultado de la operación $\phi_1 + \phi_2$ difiere del de $\phi_2 + \phi_1$. (*b*) En giros de 45°, la diferencia entre las orientaciones finales es más pequeña de lo que era en el caso del giro de 90°. (*c*) En giros de 20°, las orientaciones finales son casi idénticas. Las orientaciones finales serán más parecidas al volverse más pequeños los ángulos $\phi_1$ y $\phi_2$.

Veamos primero el desplazamiento angular $\phi$. La magnitud del desplazamiento angular de un cuerpo es el ángulo al cual gira el cuerpo. Sin embargo, los desplazamientos angulares no son vectores porque no se suman como vectores. Por ejemplo, demos dos rotaciones sucesivas $\phi_1$ y $\phi_2$ a un libro que inicialmente está en un plano horizontal (Fig. 6). Sea $\phi_1$ una rotación a 90° en sentido de las manecillas del reloj en torno al eje vertical que pasa por el centro del libro visto éste desde arriba. Sea $\phi_2$ un giro de 90° en sentido de las manecillas del reloj alrededor de un eje norte-sur que pasa por el centro del libro según lo vemos mirando al norte. En un caso, apliquemos la operación $\phi_1$ primero, y luego $\phi_2$. En el otro caso, apliquemos primero la operación $\phi_2$ y luego $\phi_1$. Conviene que usted haga la prueba. Ahora, si los desplazamientos angulares son cantidades vectoriales, deben sumarse como vectores. En particular, deben obedecer a la ley asociativa de la suma de vectores, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, que nos dice que el orden en que sumemos a los vectores no afecta su suma. Como se indica en la figura 6*a*, esta ley no tiene

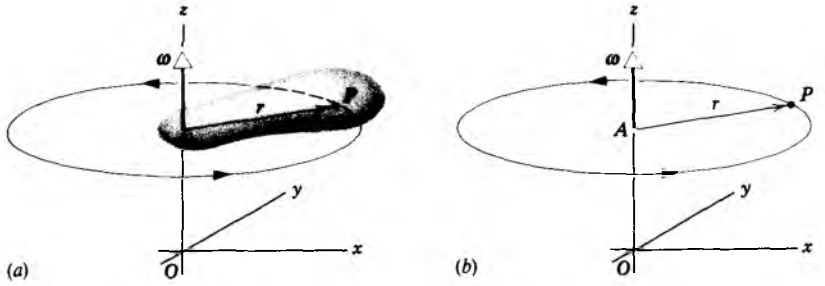



**Figura 7** El vector de la velocidad angular de (*a*) un cuerpo rígido al girar y (*b*) una partícula al girar, ambos considerados con respecto a un eje fijo.

validez para desplazamientos angulares finitos, y entonces $\phi_1 + \phi_2 \neq \phi_2 + \phi_1$, donde $\phi_1$ y $\phi_2$ significan las operaciones mostradas en la figura 6*a*. Por lo tanto, los desplazamientos angulares finitos no pueden ser representados como cantidades vectoriales.

A medida que los dos desplazamientos angulares se hagan más pequeños, el resultado de la operación $\phi_1 + \phi_2$ se acerca al de la operación $\phi_1 + \phi_2$ (Fig. 6*b*, *c*). Si los desplazamientos angulares se hacen infinitesimales, el orden de la suma ya no altera el resultado; así, $d\phi_1 + d\phi_2 = d\phi_2 + d\phi_1$. De aquí que *los desplazamientos angulares infinitesimales pueden ser representados como vectores.*

Las cantidades definidas en términos de desplazamientos angulares infinitesimales pueden ser también vectores. Por ejemplo, la velocidad angular es $\omega = d\phi/dt$. Puesto que $d\phi$ es un vector y $dt$ es un escalar, el cociente $\omega$ es un vector. *Por lo tanto, la velocidad angular puede ser representada como un vector.* En la figura 7*a*, por ejemplo, representamos a la velocidad angular $\omega$ del cuerpo rígido en rotación por una flecha dirigida a lo largo del eje de rotación; en la figura 7*b* representamos a la rotación de una partícula *P* en torno a un eje fijo precisamente de la misma manera. La longitud de la flecha se hace proporcional a la magnitud de la velocidad angular. El sentido de la rotación determina la dirección en la que la flecha apunta a lo largo del eje. Por convención, si los dedos de la *mano derecha* se doblan alrededor del eje en dirección de la rotación del cuerpo, el pulgar extendido apunta a lo largo de la dirección del vector de la velocidad angular. Para la rueda de la figura 1, por lo tanto, el vector de la velocidad angular apunta perpendicularmente a la página (en la dirección de *z* negativa) si el corredor está pedaleando hacia adelante. En la figura 3*b*, $\omega$ es perpendicular a la página, apuntando hacia arriba y afuera correspondiendo a la rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj. La velocidad angular de la tornamesa de un fonógrafo (que gira en sentido de las manecillas si se la ve desde arriba) es un vector que apunta hacia abajo. Nótese que nada se mueve en dirección al vector de la velocidad angular. El vector representa la velocidad angular del movimiento de rotación que tiene lugar en un plano perpendicular a él.

La aceleración angular es también una cantidad vectorial. Esto se deduce de la definición $\alpha = d\omega/dt$, en la cual $d\omega$ es un vector y $dt$ un escalar. Más adelante encontraremos otras cantidades de rotación que son vectores, como la torca y el ímpetu angular. El uso de la regla de la mano derecha para definir la dirección de los vectores $d\phi$, $\omega$, y $\alpha$ conduce a un formalismo vectorial que es consistente con todas las cantidades de rotación.

**Problema muestra 3** Un disco gira en una flecha horizontal montada en chumaceras, a una velocidad angular $\omega_1$ de 84 rad/s como en la figura 8*a*. Todo el conjunto de disco y flecha está colocado sobre una tornamesa que gira con respecto a un eje vertical a $\omega_2 = 43$ rad/s, en sentido antihorario vista desde arriba. Describa la rotación del disco vista por un observador dentro del salón.

**Solución** El disco está sujeto a dos velocidades angulares simultáneamente; podemos describir su movimiento resultante por la suma vectorial de estos vectores. La velocidad angular $\omega_1$ asociada con la rotación de la flecha tiene una magnitud de 84 rad/s y tiene lugar en torno a un eje que no está fijo pero que, visto por un observador situado dentro del salón, gira en un plano horizontal a 43 rad/s. La velocidad angular $\omega_2$ asociada con la tornamesa está fija verticalmente y tiene una magnitud de 43 rad/s.

La velocidad angular resultante $\omega$ del disco es la suma vectorial de $\omega_1$ y $\omega_2$. La magnitud de $\omega$ es

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{(84 \text{ rad/s})^2 + (43 \text{ rad/s})^2}$$
$$= 94 \text{ rad/s}.$$

La dirección de $\omega$ no está fija en el marco de referencia de nuestro observador sino que gira a la misma razón angular que

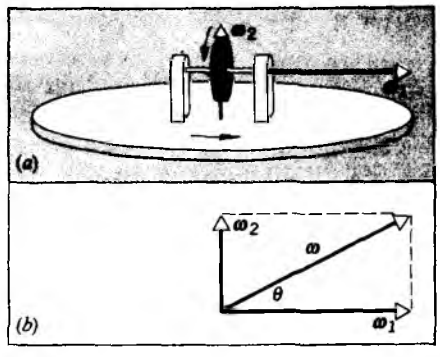



**Figura 8** Problema muestra 3. (*a*) Un disco que gira sobre una tornamesa que también gira. (*b*) La suma de los vectores de la velocidad angular.

la tornamesa. El vector $\omega$ no está en el plano horizontal sino que apunta hacia arriba en un ángulo $\theta$ (véase la Fig. 8*b*), donde

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega_2}{\omega_1} = \tan^{-1}\frac{43 \text{ rad/s}}{84 \text{ rad/s}} = 27°.$$

Podemos describir el movimiento del disco como una sola rotación en torno a este nuevo eje (cuya dirección en el marco de referencia de nuestro observador está cambiando con el tiempo como se describió anteriormente) en una cantidad angular de 94 rad/s. ¿Cómo cambiaría esta situación si la dirección de rotación del disco, o de la tornamesa, o de ambas, se invirtieran?

## 11-5 RELACIONES ENTRE VARIABLES LINEALES Y ANGULARES: FORMA ESCALAR

En las secciones 4-4 y 4-5 discutimos la velocidad y la aceleración lineales de una partícula que se mueve en círculo. Cuando un cuerpo rígido gira con respecto a un eje fijo, cada partícula del cuerpo se mueve en círculo. De aquí que podamos describir al movimiento de tal partícula ya sea en variables lineales o en variables angulares. La relación entre las variables lineal y angular nos permite ir y venir de una descripción a la otra, resultando muy útil.

Consideremos una partícula en $P$ situada en un cuerpo rígido, a una distancia perpendicular $r$ del eje que pasa por $A$, como en la figura 7. Esta partícula se mueve en un círculo de radio $r$. La posición angular $\phi$ de la línea de referencia $AP$ se mide con respecto al eje $x$ o el $x'$, como en la figura 3*b*. La partícula se mueve a través de una distancia $s$ a lo largo del arco cuando el cuerpo gira en un ángulo $\phi$, de modo que

$$s = \phi r, \tag{11}$$

donde $\phi$ está en radianes.

Al diferenciar ambos lados de esta ecuación respecto al tiempo, y observando que $r$ es constante, obtenemos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\phi}{dt} r.$$

Pero $ds/dt$ es la velocidad lineal (tangencial) de la partícula en $P$ y $d\phi/dt$ es la velocidad angular $\omega$ del cuerpo que gira, de modo que

$$v = \omega r. \tag{12}$$

Ésta es una relación entre las *magnitudes* de la velocidad lineal tangencial y de la velocidad angular; la velocidad lineal de una partícula en movimiento circular es el producto de la velocidad angular y la distancia $r$ de la partícula desde el eje de rotación.

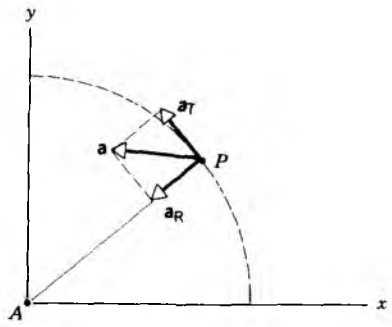



**Figura 9** Las componentes radial y tangencial de la aceleración de una partícula en el punto $P$ de un cuerpo rígido que gira en torno al eje $z$.

Al diferenciar la ecuación 12 con respecto al tiempo, tenemos que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r.$$

Pero $dv/dt$ es la magnitud de la componente *tangencial* $a_T$ de la aceleración de la partícula (véase la sección 4-5), y $d\omega/dt$ es la magnitud de la aceleración angular del cuerpo que gira, de modo que

$$a_T = \alpha r. \tag{13}$$

De aquí que la magnitud de la componente tangencial de la aceleración lineal de una partícula en movimiento circular sea el producto de la magnitud de la aceleración angular y la distancia $r$ de la partícula desde el eje de rotación.

Hemos visto en la sección 4-4 que la componente *radial* $a_R$ de la aceleración es $v^2/r$ para una partícula que se mueve en círculo. Esto puede ser expresado en términos de la velocidad angular usando la ecuación 12. Tenemos

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \tag{14}$$

En la figura 9 se muestra la aceleración resultante **a** del punto $P$.

Las ecuacioanes 11 a 14 nos permiten describir el movimiento de un punto en un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo *ya sea* en variables angulares *o* en variables lineales. Podríamos preguntar por qué necesitamos las variables angulares cuando ya estamos familiarizados con las variables lineales equivalentes. La respuesta es que la descripción angular ofrece una ventaja distinta sobre la descripción lineal cuando deben considerarse varios puntos del mismo cuerpo en rotación. En un cuerpo en rotación, los puntos que están a diferentes distancias del eje no tienen el mismo desplazamiento, velocidad, o aceleración *lineales*, sino que *todos* los puntos de un cuerpo rigido que giran en torno a un eje fijo tienen el

mismo desplazamiento, velocidad, o aceleración *angulares* en cualquier instante. Usando las variables angulares podemos describir el movimiento de todo el cuerpo de manera sencilla.

La figura 10 muestra un ejemplo interesante de la razón entre las variables lineales y angulares. Cuando una chimenea alta es demolida por una carga explosiva colocada en su base, a menudo se quebrará al caer, comenzando la rotura hacia el lado de abajo de la chimenea.

Antes de la rotura, la chimenea es un cuerpo rígido, que pivotea en torno a un eje cercano a su base con una cierta aceleración angular $\alpha$. Según la ecuación 13, la parte superior de la chimenea tiene una aceleración tangencial $a_T$ dada por $\alpha L$, donde $L$ es la longitud de la chimenea. La componente vertical de $a_T$ puede exceder fácilmente de $g$, la aceleración de la caída libre. Esto es, la parte superior de la chimenea está cayendo hacia abajo con una aceleración vertical mayor que la de un ladrillo en caída libre.

Esto puede suceder solamente mientras la chimenea permanezca como un cuerpo rígido aislado. Dicho de otra manera, la parte del fondo de la chimenea, al actuar en el mortero que mantiene unidos a los ladrillos, debe "jalar hacia abajo" de la parte superior de la chimenea para provocar una caída tan rápida. Esta fuerza cortante es a menudo mayor de lo que el mortero puede tolerar, y la chimenea se rompe. La chimenea ha pasado a ser ahora dos cuerpos rígidos, cuya parte superior está en caída libre llegando al suelo más tarde de lo que lo haría si la chimenea no se hubiese roto.



**Figura 10** Una chimenea, al caer, a menudo no es lo suficientemente fuerte como para proporcionar la aceleración tangencial de gran radio que se necesitaría si todo el objeto fuese a girar como un cuerpo rígido con aceleración angular constante. Para una descripción completa de este fenómeno, véase "More on the Falling Chimney", por A. A. Bartlett, *The Physics Teacher*, septiembre de 1976, pág. 351.

**Problema muestra 4** Si el radio de la piedra abrasiva del problema muestra 1 es de 0.24 m, calcule (*a*) la velocidad lineal o tangencial de un punto en la periferia, (*b*) la aceleración tangencial de un punto en la periferia, y (*c*) la aceleración radial de un punto en la periferia, al final de 2.7 s. (*d*) Repita para un punto a la mitad de la distancia entre el centro y la periferia, es decir, en $r = 0.12$ m.

**Solución** Tenemos que $\alpha = 3.2$ rad/s$^2$, $\omega = 8.6$ rad/s después de 2.7 s, y $r = 0.24$ m. Entonces,

(*a*) $v = \omega r = (8.6 \text{ rad/s})(0.24 \text{ m}) = 2.1$ m/s;

(*b*) $a_T = \alpha r = (3.2 \text{ rad/s}^2)(0.24 \text{ m}) = 0.77$ m/s$^2$;

(c) $a_R = \omega^2 r = (8.6 \text{ rad/s})^2(0.24 \text{ m}) = 18$ m/s$^2$.

(*d*) Las variables *angulares* son las mismas para este punto en $r = 0.12$ m que para un punto de la periferia. Esto es, una vez más $\alpha = 3.2$ rad/s$^2$ y $\omega = 8.6$ rad/s. Usando las ecuaciones 12 a 14 con $r = 0.12$ m, obtenemos para este punto

$$v = 1.0 \text{ m/s}, \qquad a_T = 0.38 \text{ m/s}^2, \qquad a_R = 8.9 \text{ m/s}^2.$$

Éstas son cada una la mitad de sus valores respectivos para el punto de la periferia. Las variables lineales son proporcionales al radio desde el eje de rotación.

Nótese una vez más que, en las ecuaciones que implican variables angulares *solamente*, como las listadas en la tabla 1, usted puede expresar las cantidades angulares en cualquier unidad angular (grados, radianes, revoluciones), en tanto se haga así de manera consistente. Sin embargo, en las ecuaciones en que se mezclan cantidades lineales y angulares, como las ecuaciones 11, 12, 13, y 14, *se deberán* de expresar las cantidades angulares en radianes, como lo hemos hecho en este problema muestra. Debemos hacerlo así porque las ecuaciones 12, 13, y 14 se basaron en la ecuación 11, que define, en efecto, la medida radián.

## 11-6 RELACIONES ENTRE LAS VARIABLES LINEALES Y ANGULARES: FORMA VECTORIAL *(Opcional)*

En la sección anterior expresamos a las variables tanto lineales como angulares en forma escalar. Regresaremos ahora a los métodos vectoriales haciendo un análisis similar al de la sección 4-5, pero utilizando aquí variables angulares. Continuaremos trabajando con el cuerpo rígido que gira en torno al eje fijo, como en la figura 3.

La figura 11*a* muestra una partícula $P$ en el cuerpo rígido en rotación de la figura 3. (Aquí, por conveniencia, hemos eliminado incluso el perfil del cuerpo, mostrando solamente la partícula en $P$ y el círculo que describe cuando gira el cuerpo.) El cuerpo puede tener cualquier aceleración angular, incluso una aceleración no constante. Como en la figura 7*b*, el vector $\omega$ representa la velocidad angular de la partícula situada en $P$ en el tiempo elegido $t$, vector que es paralelo al eje $z$ y que se ha representado en la figura 11*a* en el origen, para mayor conveniencia.

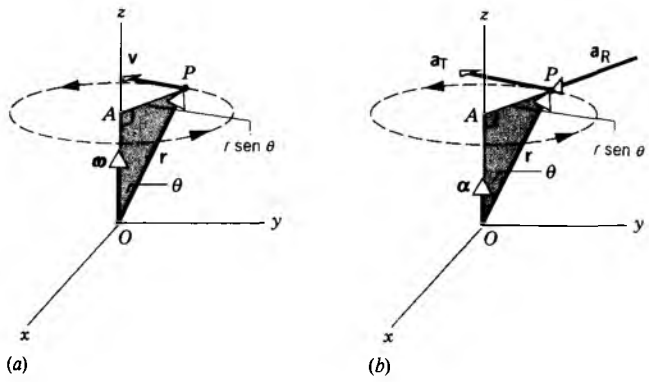



**Figura 11** (*a*) Una partícula en *P*, en el cuerpo rígido en rotación de la Fig. 3 está ubicada en **r** con respecto al origen *O*. La partícula tiene una velocidad angular $\omega$ (dirigida a lo largo del eje *z*) y una velocidad tangencial **v**. (*b*) La partícula situada en *P* tiene una aceleración angular $\alpha$ a lo largo del eje *z*. La partícula tiene también una aceleración tangencial $\mathbf{a}_T$ y una aceleración radial $\mathbf{a}_R$.

La partícula *P* está ubicada en el sistema de coordenadas tridimensionales de la figura 11*a* por el vector de posición **r** *trazado desde el origen*. Esto representa un cambio en la notación acostumbrada, donde *r* representaba la distancia *perpendicular* desde *P* hasta el eje *z* (véase la Fig. 3). En la figura 11, aquella distancia perpendicular es ahora $r$ sen $\theta$.

A partir de la ecuación 12 podemos hallar la magnitud de la velocidad de la partícula *P* (teniendo presente que *r* de la ecuación 12 es ahora $r$ sen $\theta$):

$$v = \omega r \text{ sen } \theta. \tag{15}$$

Aquí $\omega$ es la magnitud del vector $\omega$ en la figura 11, *r* es la magnitud del vector **r**, y $\theta$ es el ángulo entre estos dos vectores.

La ecuación 15 tiene la misma forma que la ecuación 16 del capítulo 3 para la magnitud del producto cruz o producto vectorial entre dos vectores: Si **a** y **b** son dos vectores cualesquiera, su producto vectorial **c** tiene la magnitud $c = ab$ sen $\theta$, donde es el ángulo entre **a** y **b**. La comparación con la ecuación 15 sugiere que podemos expresar la velocidad como un producto vectorial:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{16}$$

La ecuación 16 ciertamente da la magnitud correcta para **v** porque, como hemos visto, la definición de la magnitud del producto vectorial, nos dará la ecuación 15. Veamos si la ecuación 16 nos da también la dirección correcta para **v**.

Según la definición del producto vectorial en la sección 3-5, si $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, entonces el vector **c** está a lo largo de una línea en ángulo recto con el plano formado por **a** y **b**. La dirección de **c** queda determinada por la regla de la mano derecha, en la cual damos un giro al *primer* vector **a** (el orden *es* importante) en el plano del segundo vector **b** con los dedos de la mano derecha moviéndose a través del ángulo más pequeño entre **a** y **b**; el pulgar extendido de la mano derecha nos da entonces la dirección de **c**. (Véase la Fig. 17 del capítulo 3.)

Aplicando esta regla cuidadosamente a los vectores $\omega$ y **r** de la figura 11*a*, hallaremos que la ecuación 16 da realmente la dirección correcta para la velocidad **v** en el tiempo *t*, esto es, tangente a la trayectoria de la partícula situada en *P*. (Al aplicar la regla de la mano derecha, está permitido deslizar un vector a cualquier posición en el espacio coordenado, en tanto no se cambie su dirección. Así, podemos situar a **v** temporalmente en el origen, si esto nos ayuda a aplicar la regla de la mano derecha para hallar la dirección de **v**.)

Volvamos ahora a la aceleración. Podemos hallar la aceleración (lineal) al diferenciar la velocidad dada por la ecuación 16. Esto es,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{17}$$

Nótese que, al considerar la derivada de un producto vectorial, seguimos la misma regla que empleamos al considerar la derivada de un producto algebraico ordinario, excepto que debemos tener cuidado de que el orden de los vectores en los términos siga siendo el mismo. (Esto es, en ambos términos de la derecha de la ecuación 17, $\omega$ viene *antes* que **r**, como sucede en el producto original.) Es importante mantener el orden apropiado porque, como lo aprendimos en la figura 17*b* del capítulo 3, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

En la ecuación 17, al reemplazar a $d\omega/dt$ con la aceleración angular $\alpha$ (véase la Ec. 5), y al reemplazar también a $d\mathbf{r}/dt$ con la velocidad **v**, obtenemos

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \tag{18}$$

Estudiemos cada uno de los dos términos del lado derecho de la ecuación 18 por orden.

En tanto que el eje de rotación permanezca fijo, $d\omega$ apuntará también a lo largo del eje *z*. Puesto que la dirección de $\alpha$ debe ser la misma que la dirección de $d\omega$, la aceleración angular $\alpha$ está también a lo largo del eje *z*, como se muestra en la figura 11*b*. Puesto que $\alpha$ es paralela a $\omega$, se deduce que $\alpha \times \mathbf{r}$ debe de ser paralela a $\omega \times \mathbf{r}$ y también a **v** (véase la Ec. 16). Por lo tanto, $\alpha \times \mathbf{r}$, al igual que **v** en la figura 11*a*, es tangente a la trayectoria circular de la partícula en *P*, y es la componente *tangencial* $\mathbf{a}_T$ de la aceleración **a** de la partícula. La magnitud de la aceleración tangencial estuvo dada por la ecuación 13, la que escribimos como $a_T = \alpha r$ sen $\theta$ después de reemplazar a *r* por $r$ *sen* $\theta$.

Consideremos ahora el segundo término del lado derecho de la ecuación 18. Si imaginamos que el vector $\omega$ en la figura 11*a* se movió hasta *P* (quedando paralelo al eje *z* en el proceso), vemos inmediatamente al usar la regla de la mano derecha, que el segundo término de la ecuación 18 $\omega \times \mathbf{v}$, apunta radialmente hacia adentro en *P*. Este segundo término tiene una magnitud $\omega v$ (porque el ángulo entre los vectores $\omega$ y **v** es de 90°), lo cual se convierte en $\omega^2 r$ *sen* $\theta$ al usar la ecuación 15. Al comparar con la ecuación 14, vemos que ésta es precisamente la componente radial $\mathbf{a}_R$ del vector de la aceleración.

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación 18 como

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_R, \tag{19}$$

donde

$$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \tag{20}$$

y

$$\mathbf{a}_R = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \tag{21}$$

Las ecuaciones 16 y 18 son, entonces, las relaciones vectoriales entre las variables lineales y angulares para la rotación de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo. ■

## PREGUNTAS

1. En la sección 11-1 afirmábamos que, en general, se requieren seis variables para ubicar a un cuerpo rígido con respecto a un marco de referencia en particular. ¿Cuántas variables se requieren para ubicar al cuerpo de la figura 2 con respecto al marco *xy* mostrado en esa figura? Si este número no es seis, explique la diferencia.
2. ¿En qué sentido es el radián una medida "natural" del ángulo, y el grado una medida "arbitraria" de esa misma cantidad? Por lo tanto, ¿qué ventajas existen al usar radianes en lugar de grados?
3. ¿Podrían las cantidades angulares $\phi$, $\omega$, y $\alpha$ ser expresadas en términos de grados en lugar de radianes en las ecuaciones de rotación de la tabla 1?
4. ¿Tiene que estar necesariamente a lo largo de un eje el vector que represente a la velocidad angular de una rueda que gire con respecto a ese eje fijo? Podría representarse simplemente como paralelo al eje, pero situado en cualquier lugar? Recuérdese que estamos en libertad de deslizar un vector de desplazamiento a lo largo de su propia dirección o trasladarlo lateralmente sin cambiar su valor.
5. Haga girar un libro de la misma forma que en la figura 6*a*, pero esta vez use desplazamientos angulares de 180° en lugar de 90°. ¿Qué concluiría usted con respecto a las posiciones finales del libro? ¿Le obliga esto a cambiar de opinión acerca de si los desplazamientos angulares (finitos) pueden ser tratados como vectores?

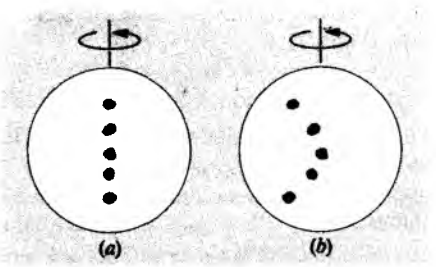



**Figura 12** Pregunta 6.

6. La rotación del Sol puede monitorizarse siguiendo las manchas solares, tormentas magnéticas del Sol de aspecto más oscuro en el disco solar. La figura 12*a* muestra las posiciones iniciales de cinco manchas y la figura 12*b* las posiciones de las mismas manchas al cabo de una rotacion solar más. ¿Qué podemos concluir con respecto a la naturaleza física del Sol a partir de estas observaciones?
7. ¿Por qué es aconsejable expresar a $\alpha$ en rev/s$^2$ en la ecuación 7 de la tabla 1 ($\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$) pero no en la ecuación 13 ($a_T = \alpha r$)?
8. Un cuerpo rígido está libre de girar con respecto a un eje fijo. ¿Puede el cuerpo tener una aceleración angular distinta de cero aun cuando la velocidad angular del cuerpo sea (quizás instantáneamente) cero? ¿Cuál es la equivalente lineal de esta pregunta? Dé ejemplos físicos para ilustrar ambas situaciones, la lineal y la angular.
9. Un golfista hace oscilar un palo de golf, haciendo un tiro largo desde la estaquilla o *tee*. ¿Tienen todos los puntos del palo la misma velocidad angular $\omega$ en cualquier instante mientras el palo está en movimiento?
10. Cuando decimos que un punto situado en el ecuador de la Tierra tiene una velocidad angular de 2 $\pi$ rad/dia, ¿qué marco de referencia utilizamos?
11. Teniendo en cuenta la rotación y la traslación de la Tierra, ¿se mueve un árbol más rápidamente durante el día o durante la noche? ¿Con respecto a qué marco de referencia se da la respuesta? (La rotación y la traslación de la Tierra son en la misma dirección.)
12. Una rueda está girando alrededor de su eje. Considérese un punto en la periferia. Cuando la rueda gira a una velocidad angular constante, ¿tiene el punto una aceleración radial? ¿Una aceleración tangencial? Cuando la rueda gira con una aceleración angular constante, ¿tiene el punto una aceleración radial? ¿Una aceleración tangencial? ¿Cambian las magnitudes de estas aceleraciones con el tiempo?
13. Supóngase que se le pida determinar la distancia recorrida por una aguja al tocar un disco de vinilo de fonógrafo. ¿Qué información necesitará usted? Explique desde el punto de vista de un marco de referencia (*a*) fijo en el salón, (*b*) fijo en el disco que está girando, y (*c*) fijo en el brazo del tocadiscos.
14. ¿Cuál es la razón entre las velocidades angulares de un par de engranes acoplados de radios diferentes?
15. El planeta Venus (véase la Fig. 13) se mueve en una órbita circular alrededor del Sol, completando una vuelta cada 225 días. Venus gira también en torno a un eje polar,

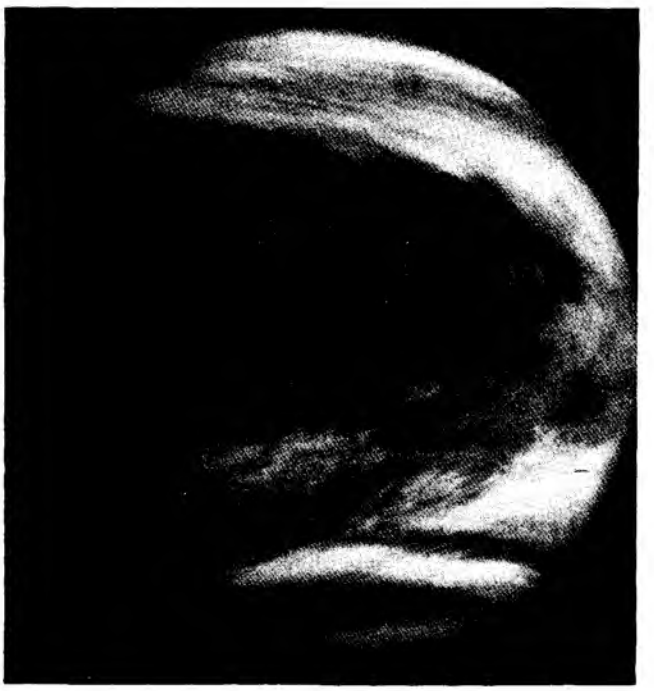


**Figura 13** Pregunta 15.

completando una rotación cada 243 días. El sentido (dirección) del movimiento rotatorio es opuesto, pero paralelo, al del movimiento de traslación. (*a*) Describa el vector que represente la rotación de Venus en torno a su eje. (*b*) Describa el vector que represente la velocidad angular de Venus en torno al Sol. (*c*) Describa la velocidad angular resultante, obtenida al sumar las velocidades de traslación y angular rotatoria.

## PROBLEMAS

### *Sección 11-2 Las variables de la rotación*

1. Demuestre que 1 rev/min = 0.105 rad/s.
2. El ángulo girado por el volante de un generador durante un intervalo de tiempo $t$ está dado por

$$\phi = at + bt^3 - ct^4,$$

donde $a$, $b$, y $c$ son constantes. ¿Cuál es la expresión para (*a*) su velocidad angular y (*b*) su aceleración angular?

3. Nuestro Sol está a $2.3 \times 10^4$ ly (años luz) del centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea, y se mueve en círculo alrededor de este centro a una velocidad de 250 km/s. (*a*) ¿Qué tanto tiempo le toma al Sol completar una vuelta alrededor del centro galáctico? (*b*) ¿Cuántas vueltas ha completado el Sol desde que se formó hace alrededor de $4.5 \times 10^9$ años?
4. Una rueda gira con una aceleración angular $\alpha$ dada por

$$\alpha = 4at^3 - 3bt^2,$$

donde $t$ es el tiempo y $a$ y $b$ son constantes. Si la rueda tiene una velocidad angular inicial $\omega_0$, escriba las ecuaciones para (*a*) la velocidad angular y (*b*) el ángulo girado, en función del tiempo.

5. ¿Cuál es la velocidad angular de (*a*) la manecilla de segundos, (*b*) la manecilla de minutos, y (*c*) la manecilla horaria de un reloj?
6. Un buen lanzador de béisbol puede lanzar una bola hacia la meta a 85 mi/h con una rotación de 1800 rev/min. ¿Cuántas vueltas da la bola en su camino hacia la meta? Para simplificar, supóngase que la trayectoria de 60 ft es una *línea recta*.
7. Un clavadista da 2.5 vueltas completas en su trayecto de la plataforma de 10 m hasta la superficie del agua. Suponiendo una velocidad inicial vertical nula, calcule la velocidad angular promedio de este clavado.
8. La posición angular de un punto situado en la periferia de una rueda en rotación está descrita por $\phi = 4.0t - 3.0t^2 + t^3$, donde $\phi$ está en radianes si $t$ se ha dado en segundos. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular en $t = 2.0$ s, y en $t = 4.0$ s? (*b*) ¿Cuál es la aceleración angular promedio en el intervalo de tiempo que comienza en $t = 2.0$ s y termina en $t = 4.0$ s? (*c*) ¿Cuál es la aceleración angular instantánea al principio y al final de este intervalo de tiempo?
9. Una rueda tiene 8 rayos y un radio de 30 cm. Está montada sobre un eje fijo y gira a razón de 2.5 rev/s. Usted quiere disparar una saeta de 24 cm paralela a este eje y a través de la rueda sin tocar ninguno de los rayos. Supóngase que la saeta y los rayos son muy delgados; véase la figura 14. (*a*) ¿Qué velocidad mínima deberá tener la saeta? (*b*) ¿Importa a dónde apunte usted entre el eje y la llanta? De ser así, ¿cuál es la mejor ubicación?

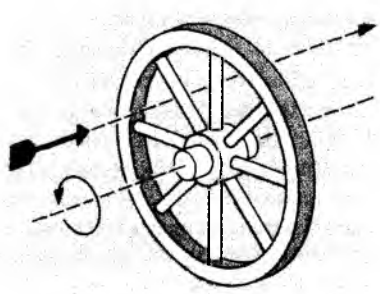


**Figura 14** Problema 9.

10. Una rueda con 16 rayos que gira en sentido de las manecillas del reloj es fotografiada en película. La película es pasada por el proyector a razón de 24 cuadros/s, que es la velocidad apropiada para el proyector. Sin embargo, en la pantalla aparece la rueda girando en sentido contrario a las manecillas a razón de 4.0 rev/min. Halle la más baja velocidad angular posible a la cual estuvo girando la rueda.
11. Un día solar es el intervalo de tiempo entre dos salidas sucesivas del Sol en lo más alto de una longitud dada, esto es, el tiempo de una rotación completa de la Tierra en relación al Sol. Un día sideral es el tiempo de una rotación completa de la Tierra en relación a las estrellas fijas, es decir, el intervalo de tiempo entre dos observaciones sucesivas en lo más alto de una dirección fija en el cielo llamada el equinoccio de primavera. (*a*) Demuestre que hay exactamente un día solar (medio) menos en un año que días siderales (medios) en un año. (*b*) Si el día solar (medio) tiene exactamente 24 horas, ¿qué tan largo es un día sideral (medio)?

### *Sección 11-3 Rotación con aceleración angular constante*

12. Una tornamesa de fonógrafo que gira a 78 rev/min disminuye su velocidad y se detiene 32 s después de que el motor ha sido desconectado. (*a*) Halle su aceleración

angular (uniforme) en rev/min². (*b*) ¿Cuántas revoluciones llevó a cabo en este tiempo?

**13.** La velocidad angular de un motor de automóvil aumenta de 1170 rev/min a 2880 rev/min en 12.6 s. (*a*) Halle la aceleración angular en rev/min². (*b*) ¿Cuántas revoluciones completa el motor durante este tiempo?

**14.** Como parte de una inspección de mantenimiento, se hace que el compresor de un motor de propulsión a chorro gire de acuerdo con la gráfica mostrada en la figura 15. ¿Cuántas revoluciones completa el compresor durante la prueba?

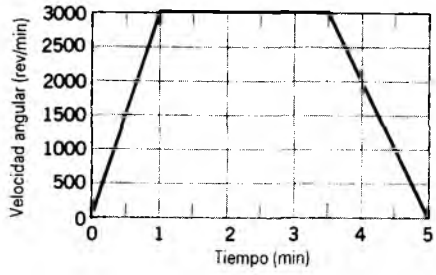



**Figura 15** Problema 14.

**15.** El volante de una máquina gira a 25.2 rad/s. Cuando la máquina es apagada, el volante decelera una cantidad constante y llega al reposo después de 19.7 s. Calcule (*a*) la aceleración angular (en rad/s²) del volante, (*b*) el ángulo (en rad) a través del cual gira el volante al llegar al reposo, y (*c*) el número de revoluciones llevadas a cabo por el volante para llegar al reposo.

**16.** Mientras espera para abordar un helicóptero, usted observa que el movimiento del rotor cambió de 315 rev/min a 225 rev/min en 1.00 min. (*a*) Halle la aceleración angular durante el intervalo. (*b*) Suponiendo que esta aceleración permanece constante, calcule el tiempo que tarda el rotor en detenerse. (*c*) ¿Cuántas revoluciones dará el rotor después de la segunda observación que usted realice?

**17.** Cierta rueda gira 90 rev en 15 s, siendo su velocidad angular al final del periodo de 10 rev/s. (*a*) ¿Cuál era la velocidad angular de la rueda al principio del intervalo de 15 s, suponiendo una aceleración angular constante? (*b*) ¿Cuánto tiempo transcurrió entre el tiempo en que la rueda estaba en reposo y el comienzo del intervalo de 15 s?

**18.** Una polea de 8.14 cm de diámetro tiene una cuerda de 5.63 m de longitud enrollada a su periferia. Comenzando desde el reposo, se le da a la polea una aceleración angular de 1.47 rad/s². (*a*) ¿A través de qué ángulo debe girar la rueda para que la cuerda se desenrolle? (*b*) ¿Cuánto tiempo le toma?

**19.** Un volante completa 42.3 rev cuando su velocidad angular disminuye desde 1.44 rad/s hasta detenerse por completo. (*a*) Suponiendo una aceleración uniforme, ¿cuál es el tiempo necesario para que llegue al reposo? (*b*) ¿Cuál es la aceleración angular? (*c*) ¿Cuánto tiempo se requiere para que complete la primera mitad de las 42.3 rev?

**20.** Comenzando desde el reposo en $t = 0$, una rueda experimenta una aceleración angular constante. Cuando $t$ = 2.33 s, la velocidad angular de la rueda es de 4.96 rad/s. La aceleración continúa hasta $t$ = 23.0 s, en que cesa de repente. ¿A través de qué angulo gira la rueda en el intervalo desde $t = 0$ hasta $t$ = 46.0 s?

**21.** Un púlsar es una estrella de neutrones que gira a gran velocidad y desde la cual recibimos pulsaciones de radio con una sincronización precisa, correspondiendo una pulsación a cada rotación de la estrella. El periodo $T$ de la rotación se halla midiendo el tiempo entre pulsaciones. Actualmente, el púlsar situado en la región central de la nebulosa del Cangrejo (véase la Fig. 16) tiene un periodo de rotación $T = 0.033$ s, y se observa que la rotación crece a razón de $1.26 \times 10^{-5}$ s/y. (*a*) Demuestre que la velocidad angular $\omega$ de la estrella está relacionada con el periodo de rotación según $\omega = 2\pi/T$. (*b*) ¿Cuál es el valor de la aceleración angular en rad/s²? (*c*) Si la aceleración angular es constante, ¿cuándo cesará de girar el púlsar? (*d*) El púlsar se originó por la explosión de una supernova en el año 1054 D.C. ¿Cuál era el periodo de rotación del púlsar al nacer? (Supóngase una aceleración angular constante.)

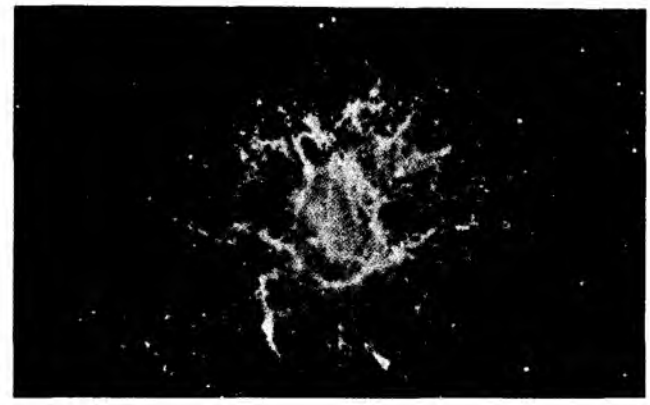


**Figura 16** Problema 21.

### *Sección 11-4 Cantidades de rotación como vectores*

**22.** Un planeta $P$ gira alrededor del Sol en órbita circular, con el Sol en el centro, siendo coplanar y concéntrica con la órbita circular de la Tierra $E$ alrededor del Sol. $P$ y $E$ giran en el mismo sentido. Los tiempos requeridos para la revolución de $P$ y $E$ alrededor del Sol son $T_P$ y $T_E$. Sea $T_S$ el tiempo necesario para que $P$ complete una vuelta alrededor del Sol con relación a $E$: demuestre que $1/T_S = 1/T_E - 1/T_P$. Suponga que $T_P > T_E$.

### *Sección 11-5 Relaciones entre las variables lineales y angulares: forma escalar*

**23.** Un disco de fonógrafo está colocado sobre una tornamesa girando a razón de $33\frac{1}{3}$ rev/min. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular en rad/s? ¿Cuál es la velocidad lineal de un punto en el disco situado donde está la aguja (*b*) al comenzar y (*c*) al terminar el disco? En estas posiciones, las distancias desde la aguja al eje de la tornamesa son 5.90 in y

2.90 in, respectivamente. (*d*) Halle la aceleración en cada una de estas posiciones.

**24.** ¿Cuál es la velocidad angular de un automóvil que da una vuelta circular de 110 m de radio a razón de 52.4 km/h?

**25.** Un punto en la periferia de una rueda abrasiva de 0.75 m de diámetro cambia su velocidad uniformemente de 12 m/s a 25 m/s en 6.2 s. ¿Cuál es la aceleración angular de la rueda durante este intervalo?

**26.** ¿Cuáles son (*a*) la velocidad angular, (*b*) la aceleración radial, y (*c*) la aceleración tangencial de una nave espacial que ejecuta una vuelta circular de 3220 km de radio a una velocidad constante de 28,700 km/h?

**27.** Un astronauta está pasando una prueba en una centrífuga. La centrífuga tiene un radio de 10.4 m y, al comenzar, gira de acuerdo a $\theta = 0.326t^2$, donde $t$ en segundos da $\theta$ en radianes. Cuando $t = 5.60$ s, ¿cuáles son (*a*) la velocidad angular del astronauta, (*b*) su velocidad tangencial, (*c*) su aceleración tangencial, y (*d*) su aceleración radial?

**28.** La órbita de la Tierra alrededor del Sol es casi un círculo. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular de la Tierra (vista como una partícula) con respecto al Sol? (*b*) ¿Cuál es su velocidad lineal en su órbita? (*c*) ¿Cuál es la aceleración de la Tierra con respecto al Sol?

**29.** Una barra roscada con 12.0 vueltas/cm y un diámetro de 1.18 cm está montada horizontalmente. Se atornilla a la barra una solera con un orificio roscado con el mismo paso que la barra; véase la figura 17. La barra gira a 237 rev/min. ¿Cuánto tiempo le tomará a la solera moverse 1.50 cm a lo largo de la barra?

**30.** (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular con respecto al eje polar de un punto en la superficie de la Tierra a una latitud de 40°N? (*b*) ¿Cuál es la velocidad lineal? (*c*) ¿Cuáles son los valores para un punto en el ecuador?

**31.** El volante de una máquina de vapor gira a una velocidad angular constante de 156 rev/min. Cuando se corta el vapor, la fricción de las chumaceras y del aire llevan al volante al reposo en 2.20 h. (*a*) ¿Cuál es la aceleración angular constante del volante, en rev/min²? (*b*) ¿Cuántas revoluciones dará el volante antes de llegar al reposo? (*c*) ¿Cuál es la aceleración lineal tangencial de una partícula a 52.4 cm del eje de rotación cuando el volante está girando a 72.5 rev/min? (*d*) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración lineal total de la partícula en la parte (*c*)?

**32.** Un volante giroscópico de 2.83 cm de radio es acelerado desde el reposo a 14.2 rad/s² hasta que su velocidad angular es de 2760 rev/min. (*a*) ¿Cuál es la aceleración tangencial de un punto situado en la llanta del volante? (*b*) ¿Cuál es la aceleración radial de este punto cuando el volante está girando a plena velocidad? (*c*) ¿Qué distancia recorre un punto sobre la llanta durante la aceleración?

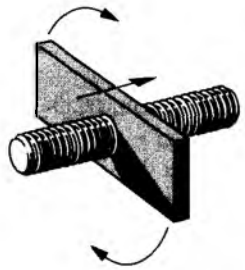


**Figura 17** Problema 29.

**33.** Si una hélice de aeroplano de 5.0 ft (= 1.5 m) de radio gira a 2000 rev/min y el aeroplano es impulsado a una velocidad en tierra de 300 mi/h (= 480 km/h), ¿cuál es la velocidad de un punto en la punta de la hélice, visto por (*a*) el piloto y (*b*) un observador en tierra? Supóngase que la velocidad del aeroplano es paralela al eje de rotación de la hélice.

**34.** Un método antiguo para medir la velocidad de la luz hace uso de una rueda dentada que gira. Un rayo de luz que pasa a través de una ranura en el borde exterior de la rueda, como en la figura 18, viaja hasta un espejo distante, y regresa a la rueda en el momento preciso para pasar a través de la siguiente ranura de la rueda. Esta rueda dentada tiene un radio de 5.0 cm y 500 dientes en su borde. Las mediciones tomadas cuando el espejo estaba a una distancia $L = 500$ m de la rueda indicaron una velocidad de la luz de $3.0 \times 10^5$ km/s. (*a*) ¿Cuál era la velocidad angular (constante) de la rueda? (*b*) ¿Cuál era la velocidad lineal de un punto en su borde?

**35.** Una rueda *A* de radio $r_A = 10.0$ cm está acoplada por medio de una banda *B* a otra rueda *C* de radio $r = 25.0$ cm, como se muestra en la figura 19. La rueda *A* aumenta su velocidad angular desde el reposo a razón de una cantidad uniforme de 1.60 rad/s². Determine en cuánto tiempo llegará la rueda *C* a una velocidad de rotación de 100 rev/min, suponiendo que la banda no se deslice. (*Sugerencia*: Si la

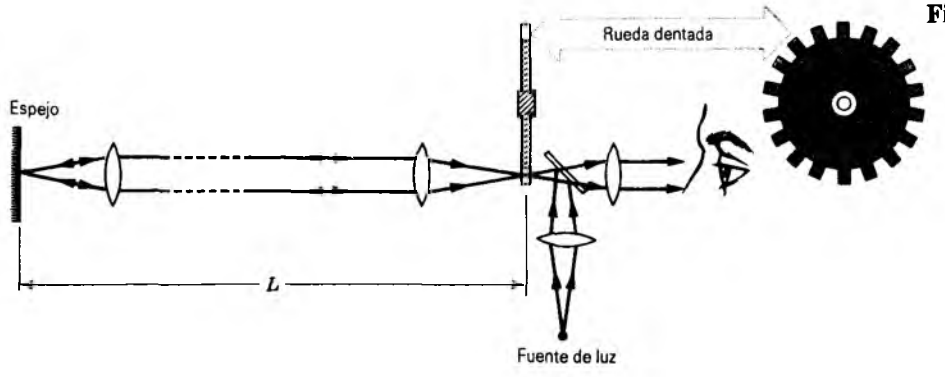



**Figura 18** Problema 34.

banda no se desliza, las velocidades lineales en la periferia de las dos ruedas deben ser iguales.)

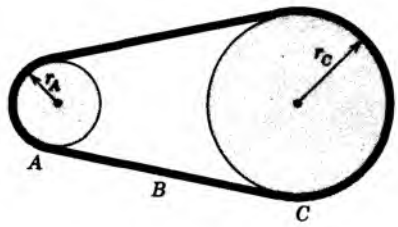



**Figura 19** Problema 35.

**36.** Las aspas de un molino de viento parten del reposo y giran con una aceleración angular de 0.236 rad/s$^2$. ¿Cuánto tiempo pasa antes de que un punto sobre un aspa experimente el mismo valor para las magnitudes de la aceleración centrípeta y de la aceleración tangencial?

**37.** Un cuerpo rígido, que parte del reposo, gira con respecto a un eje fijo con aceleración angular constante $\alpha$. Considérese una partícula a una distancia $r$ del eje. Exprese (*a*) la aceleración radial y (*b*) la aceleración tangencial de esta partícula en términos de $\alpha$, $r$, y el tiempo $t$. (*c*) Si la aceleración resultante de la partícula en cierto instante forma un ángulo de 57.0° con la aceleración tangencial, ¿qué ángulo total ha girado el cuerpo hasta ese momento?

**38.** El disco de un sistema de audio para disco digital compacto tiene un radio interior y exterior de su material grabado (los conciertos para violín de Tchaikovsky y de Mendelssohn) de 2.50 cm y 5.80 cm, respectivamente. Al funcionar, el disco es barrido con una velocidad lineal constante de 130 cm/s, comenzando desde el borde interior y moviéndose hacia afuera. (*a*) Si la velocidad angular inicial del disco es de 50.0 rad/s, ¿cuál es su velocidad angular final? (*b*) Las líneas en espiral del barrido están a una separación de 1.60 $\mu$m aparte; ¿cuál es la longitud total del barrido? (*c*) ¿Cuál es el tiempo de la grabación sonora?

**39.** Un automóvil que viaja a 97 km/h tiene ruedas de 76 cm de diámetro. (*a*) Halle la velocidad angular de las ruedas con respecto al eje. (*b*) El automóvil es llevado a un alto uniformemente a las 30 vueltas de las ruedas. Calcule la aceleración angular. (*c*) ¿Qué distancia recorre el automóvil durante este periodo de frenado?

**40.** Un velocímetro colocado en la rueda frontal de una bicicleta da una lectura que es directamente proporcional a la velocidad angular de la rueda. Suponga que tal velocímetro esté calibrado para una rueda de 72 cm de diámetro pero que, equivocadamente, se instala en una rueda de 62 cm de diámetro. ¿Estaría equivocada la lectura de la velocidad lineal? De ser así, ¿en qué sentido y por qué fracción de la velocidad real?

### *Sección 11-6 Relaciones entre las variables lineales y angulares: forma vectorial*

**41.** Un objeto se mueve en el plano $xy$ de modo que $x = R\cos \omega t$ y $y = R$ sen $\omega t$. Aquí $x$ y $y$ son las coordenadas del objeto, $t$ es el tiempo y $R$ y $\omega$ son constantes. (*a*) Elimínese a $t$ entre estas ecuaciones para hallar la ecuación de la curva en la que se mueve el objeto. ¿Cuál es esta curva? ¿Cuál es el significado de la constante $\omega$? (*b*) Diferencie las ecuaciones para $x$ y $y$ con respecto al tiempo para hallar las componentes $x$ y $y$ de la velocidad del cuerpo, $v_x$ y $v_y$. Combine a $v_x$ y a $v_y$ para hallar la magnitud y la dirección de **v**. Describa el movimiento del objeto. (*c*) Diferencie a $v_x$ y a $v_y$ con respecto al tiempo para obtener la magnitud y la dirección de la aceleración resultante.

**42.** Un objeto rígido que gira con respecto al eje $z$ está decelerando a razón de 2.66 rad/s$^2$. Considérese una partícula ubicada en $\mathbf{r} = 1.83\mathbf{j} + 1.26\mathbf{k}$ (en metros). En el instante en que $\boldsymbol{\omega} = 14.3\mathbf{k}$ (en rad/s), halle (*a*) la velocidad de la partícula y (*b*) su aceleración. (*c*) ¿Cuál es el radio de la trayectoria circular de la partícula?

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DÁRAN Y CENTRO DE
DOCUMENTACIÓN Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

# CAPÍTULO 12

# DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

*En el capítulo 11 hemos considerado la cinemática de la rotación y señalábamos que no contenía nuevas características básicas distintivas, estando relacionados los parámetros $\phi$, $\omega$, y $\alpha$ de la rotación con los correspondientes parámetros* x, v, *y* a *de la traslación para las partículas que forman el sistema en rotación. En este capítulo, siguiendo el patrón de nuestro estudio del movimiento de traslación, consideramos las causas de la rotación, un tema que se conoce como* dinámica de la rotación. *Los sistemas en rotación están formados de partículas, y ya hemos aprendido cómo aplicar las leyes de la mecánica clásica al movimiento de las partículas. Por esta razón la dinámica de la rotación, como la cinemática, no debería contener características distintivas que sean fundamentalmente nuevas. Sin embargo, al igual que en capítulo 11, es muy útil volver a escribir los conceptos del movimiento de traslación en una forma nueva, especialmente elegida por su conveniencia para describir a los sistemas en rotación.*

## 12-1 DINÁMICA DE LA ROTACIÓN: UNA VISIÓN GENERAL

En el capítulo 5 planteabamos el problema fundamental de la dinámica: cuando se aplican fuerzas externas a un cuerpo de masa $m$, ¿cuál es el movimiento resultante? Explicábamos entonces cómo puede hallarse la solución a este problema usando la segunda ley de Newton, que enunciábamos como sigue:

fuerza = masa × aceleración.

En el presente capítulo buscamos una relación dinámica que nos permita analizar el problema similar en la dinámica de la rotación: cuando una fuerza se aplica en cierto punto a un cuerpo rígido que puede girar libremente alrededor de un eje determinado, ¿cuál es el movimiento resultante? El lugar donde se aplica la fuerza debe tener importancia, ya que de la experiencia sabemos que una fuerza dada aplicada a un cuerpo en un lugar puede producir una rotación diferente a la producida si la fuerza se aplica en otro lugar. La cantidad en la dinámica de la rotación que toma en cuenta tanto la magnitud de la fuerza como el lugar de aplicación de la fuerza y su dirección se llama *torca*; nuestro concepto de torca puede ser comparado por analogía con el de torsión o torcedura, de la misma manera que consideramos a la fuerza como un empujón o jalón.

También sabemos por la experiencia que el esfuerzo necesario para poner a un cuerpo en rotación depende de cómo esté distribuida la masa del cuerpo; es más fácil para una fuerza dada hacer girar a un cuerpo cuya masa esté cercana al eje de rotación que a otro cuya masa esté alejada de este eje. La cantidad inercial que tiene en cuenta la distribución de la masa de un cuerpo se llama *inercia de la rotación.** Al contrario de la masa, la inercia de la rotación no es una propiedad intrínseca de un cuerpo, sino que ésta depende del eje de rotación alrededor del cual el cuerpo gira.

Dadas las analogías entre las cantidades de la traslación (fuerza y masa) y las cantidades de la rotación (torca e inercia de la rotación), nos conduce a suponer un análogo para la rotación de la segunda ley de Newton en la forma

torca = inercia de la rotación × aceleración angular.

* Conocida también como el *momento de inercia*.

Este es, de hecho, el resultado correcto, como lo demostraremos en la sección 12-5.

Al igual que la fuerza y la aceleración, la torca y la aceleración angular son cantidades vectoriales. Sin embargo, *en este capítulo consideraremos únicamente casos en los que el eje de rotación pueda ser considerado como fijo en cuanto a dirección.* Esta restricción es similar al hecho de considerar solamente el movimiento unidimensional en el caso de la dinámica de la traslación. Si bien la torca es una cantidad vectorial, como lo demostraremos en la sección 12-4, podemos usar la forma escalar de las ecuaciones dinámicas en las que todas las cantidades vectoriales se refieren a las componentes a lo largo del eje de rotación. (En el capítulo 13 discutiremos situaciones en las que *debemos* de considerar la naturaleza vectorial de las cantidades de la rotación.)

Existen dos enfoque que pueden adoptarse para derivar las ecuaciones de la dinámica de la rotación. En el primero, se considera a la fuerza que actúa sobre cada partícula del cuerpo, y las torcas que actúan sobre cada partícula se suman para hallar la torca total que actúa sobre el cuerpo. Para llevar a cabo este método debemos conocer cómo se transmiten las fuerzas externas desde sus puntos de aplicación a la ubicación de cada partícula.*

El segundo enfoque, que es el que aquí adoptamos, se basa en la conservación de la energía, en partícular el teorema trabajo-energía que hemos estudiado en el capítulo 8,

$$W = \Delta K.$$

Para este cálculo en particular, $W$ representa el trabajo neto efectuado sobre el objeto por las fuerzas externas que cambian el movimiento de rotación, y $\Delta K$ representa el cambio de la energía cinética de la rotación, la cual suponemos, en este caso, que es la única forma de energía que el cuerpo puede tener.

Comenzaremos, en las dos secciones siguientes, con una exposición de lo que es la energía cinética de rotación y la inercia de la rotación. La exposición, después, de la torca nos llevará a las ecuaciones de la dinámica de la rotación.

## 12-2 ENERGÍA CINÉTICA DE LA ROTACIÓN E INERCIA DE LA ROTACIÓN

La figura 1 muestra un cuerpo rígido que gira con respecto a un eje vertical fijo. Consideraremos al cuerpo como un conjunto de partículas, y analizaremos la rotación de una partícula sola como lo hicimos en el capítulo 11. Una partícula de masa $m$ a una distancia $r$ del eje de rotación se mueve en un círculo de radio $r$ a una velocidad angular $\omega$ con respecto a este eje y tiene una velocidad lineal tangencial $v = \omega r$. La energía cinética de la partícula es, por lo tanto, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$.

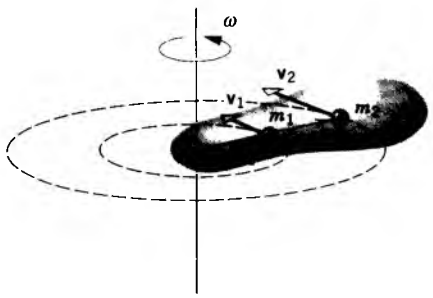



**Figura 1** Un cuerpo rígido gira en torno a un eje fijo. Cada partícula del cuerpo tiene la misma velocidad angular $\omega$, pero la velocidad tangencial $v$ varía con la distancia $r$ de la partícula al eje de rotación. Aquí $m_1$ y $m_2$ tienen la misma velocidad angular $\omega$, pero $v_2 > v_1$ porque $r_2 > r_1$.

La energía cinética total $K$ del cuerpo que gira es la suma de las energías cinéticas de todas las partículas de que se compone el cuerpo, que puede expresarse así:

$$K = \tfrac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \cdots = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_ir_i^2\right)\omega^2. \quad (1)$$

Aquí hemos supuesto que el cuerpo es rígido, de modo que todas las partículas tienen la misma velocidad angular $\omega$; de aquí que el factor común $\omega^2$ pueda ser eliminado de cada término en la suma de la ecuación 1. La cantidad $\Sigma m_i r_i^2$ es la suma de los productos de la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia perpendicular al eje de rotación. Se le llama *inercia de rotación* del cuerpo con respecto al eje de rotación partícular, y se representa por el símbolo $I$.

$$I = \sum m_ir_i^2. \quad (2)$$

Nótese que *la inercia de rotación de un cuerpo depende del eje en torno al cual esté girando* así como de la manera en que esté distribuida su masa. La inercia de rotación tiene las dimensiones $ML^2$ y se expresa usualmente en $kg \cdot m^2$.

Al combinar la ecuaciones 1 y 2 podemos escribir la energía cinética del cuerpo rígido en rotación como

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2. \quad (3)$$

Ésta es análoga a la expresión para la energía cinética de traslación de un cuerpo, $K = \frac{1}{2}Mv^2$. Ya hemos visto que la velocidad angular $\omega$ es análoga a la velocidad lineal $v$.

* Para una exposición crítica de este método, véase "Rotational Motion and the Law of the Lever", por Hans C. Ohanian, *American Journal of Physics*, febrero de 1991, pág. 182.

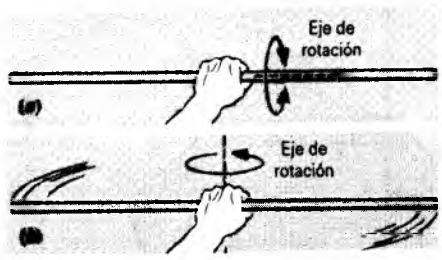



**Figura 2** Para hacer girar un barrote largo en torno al eje que está a lo largo de su longitud, como en (*a*), se requiere menos esfuerzo que para hacerlo girar alrededor de un eje perpendicular a su longitud, como en (*b*). En (*a*), las partículas del barrote están más cerca del eje de rotación que en (*b*), y por lo tanto el barrote tiene una inercia de rotación más pequeña en (*a*).

Ahora veremos que la inercia de rotación $I$ es análoga a la masa $M$ (que podemos considerar como la inercia de traslación).

En la ecuación 3, como en todas las ecuaciones que mezclen cantidades angulares con cantidades no angulares, la variable angular ($\omega$ en este caso) *debe expresarse en radián.*

La energía cinética de rotación dada por la ecuación 3 no es una nueva clase de energía; es, simplemente, la suma de las energías cinéticas de traslación ordinarias de todas las partículas del cuerpo. Aun cuando todo el cuerpo pudiera no estar en un movimiento de traslación, cada una de sus partículas tiene una velocidad tangencial, y por lo tanto, cada partícula tiene una energía cinética. La dirección instantánea de la velocidad de cada partícula cambia cuando el cuerpo gira, pero la energía cinética depende de $v^2$ y es un escalar, de modo que no tiene una dirección asociada con ella. Por lo tanto, es bastante propio sumar las energías cinéticas de todas las partículas del cuerpo que gira. La energía cinética de rotación $\frac{1}{2}I\omega^2$ es simplemente una manera conveniente de expresar la energía cinética total de todas las partículas del cuerpo rígido.

La figura 2 muestra una demostración simple que usted puede llevar a cabo para convencerse de que girar un cuerpo que tenga una inercia de rotación grande exige un mayor esfuerzo (aplicado en un punto determinado) que dar la misma rotación a un cuerpo de inercia de rotación pequeña. Para hacer girar al barrote en torno a un eje a lo largo de su longitud (Fig. 2*a*) se requiere poco esfuerzo, relativamente; con relación al eje largo, todas las partículas del barrote tienen valores de $r$ pequeños, y la inercia de rotación es pequeña. Cuando tratamos de hacer el giro alrededor de un eje perpendicular al eje largo (Fig. 2*b*), esto no sucede así. La masa no ha cambiado, por supuesto, pero una mayor cantidad de masa se halla situada lejos de este eje; de la ecuación 2, la cual indica que la masa contribuye a $I$ como *el cuadrado* de su distancia al eje, esta masa distante aporta una contribución mucho mayor a $I$ que la masa que está cerca del eje. Es fácil comprobar que girar el barrote en torno a este eje requiere un esfuerzo mayor.

---

**Problema muestra 1** Tres partículas de masas $m_1$ (2.3 kg), $m_2$ (3.2 kg), y $m_3$ (1.5 kg) están en los vértices de un triángulo rectángulo de relación 3-4-5, como se muestra en la figura 3. (*a*) Halle la inercia de rotación en torno a los ejes perpendiculares al plano $xy$ y que pasan a través de cada una de las tres partículas. (*b*) Halle la inercia de rotación en torno a un eje perpendicular al plano $xy$ y que pasa por el centro de masa.

**Solución** (*a*) Consideremos primero el eje que pasa por $m_1$. Para las masas puntuales, $m_1$ está sobre el eje, de modo que $r_1 = 0$ y $m_1$ no contribuye a la inercia de rotación. Las distancias desde este eje a $m_2$ y $m_3$ son $r_2 = 3.0$ m y $r_3 = 4.0$ m. La inercia de rotación en torno al eje que pasa por $m_1$ es, entonces,

$$I_1 = \sum m_i r_i^2 = (2.3\text{ kg})(0\text{ m})^2 + (3.2\text{ kg})(3.0\text{ m})^2 + (1.5\text{ kg})(4.0\text{ m})^2 = 52.8\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

De manera similar, para el eje que pasa por $m_2$, tenemos

$$I_2 = \sum m_i r_i^2 = (2.3\text{ kg})(3.0\text{ m})^2 + (3.2\text{ kg})(0\text{ m})^2 + (1.5\text{ kg})(5.0\text{ m})^2 = 58.2\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Para el eje que pasa por $m_3$,

$$I_3 = \sum m_i r_i^2 = (2.3\text{ kg})(4.0\text{ m})^2 + (3.2\text{ kg})(5.0\text{ m})^2 + (1.5\text{ kg})(0\text{ m})^2 = 116.8\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

¿Alrededor de qué eje requieren las rotaciones el mayor esfuerzo? ¿El menor?

(*b*) Primero, debemos localizar el centro de masa:

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{(2.3\text{ kg})(0\text{ m}) + (3.2\text{ kg})(0\text{ m}) + (1.5\text{ kg})(4.0\text{ m})}{2.3\text{ kg} + 3.2\text{ kg} + 1.5\text{ kg}} = 0.86\text{ m},$$

$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{(2.3\text{ kg})(0\text{ m}) + (3.2\text{ kg})(3.0\text{ m}) + (1.5\text{ kg})(0\text{ m})}{2.3\text{ kg} + 3.2\text{ kg} + 1.5\text{ kg}} = 1.37\text{ m}.$$

Las distancias elevadas al cuadrado desde el centro de masa a cada una de las partículas son

$$r_1^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2 = (0.86\text{ m})^2 + (1.37\text{ m})^2 = 2.62\text{ m}^2,$$

$$r_2^2 = x_{cm}^2 + (y_2 - y_{cm})^2 = (0.86\text{ m})^2 + (3.0\text{ m} - 1.37\text{ m})^2 = 3.40\text{ m}^2,$$

$$r_3^2 = (x_3 - x_{cm})^2 + y_{cm}^2 = (4.0\text{ m} - 0.86\text{ m})^2 + (1.37\text{ m})^2 = 11.74\text{ m}^2.$$

La inercia de rotación se deduce entonces directamente:

$$I_{cm} = \sum m_i r_i^2 = (2.3\text{ kg})(2.62\text{ m}^2) + (3.2\text{ kg})(3.40\text{ m}^2) + (1.5\text{ kg})(11.74\text{ m}^2) = 34.5\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

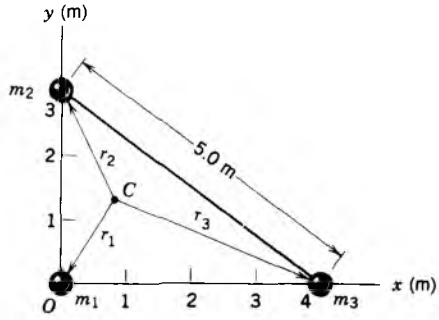



**Figura 3** Problema muestra 1. El punto *C* marca el centro de masa del sistema que consta de las tres partículas.

Nótese que la inercia de rotación en torno al centro de masa es la más pequeña de las que hemos calculado. Este es un resultado general, el cual probaremos más adelante. Es más fácil hacer girar a un cuerpo alrededor de un eje que pase por el centro de masa que alrededor de cualquier otro eje paralelo.

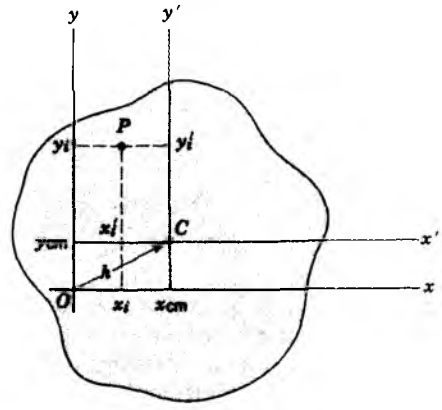



**Figura 4** Una placa delgada en el plano *xy* va a girar en torno al eje *z*, que es perpendicular a la página en el origen *O*. El punto *C* marca el centro de masa de la placa. Una partícula *P* está situada en las coordenadas $x_i$, $y_i$ respecto al origen *O* y en las coordenadas $x_i'$, $y_i'$ respecto al centro de masa *C*.

El resultado del problema muestra anterior nos conduce a un resultado general importante, el *teorema de los ejes paralelos*:

> *La inercia de rotación de cualquier cuerpo en torno a un eje arbitrario es igual a la inercia de rotación alrededor de un eje paralelo que pase por el centro de masa más la masa total por la distancia entre los dos ejes elevada al cuadrado.*

Matemáticamente, el teorema con ejes paralelos tiene la forma siguiente:

$$I = I_{cm} + Mh^2, \tag{4}$$

donde $I$ es la inercia de rotación alrededor del eje arbitrario, $I_{cm}$ es la inercia de rotación alrededor del eje paralelo que pasa por el centro de masa, $M$ es la masa total del objeto, y $h$ es la distancia perpendicular entre los ejes. Nótese que los dos ejes deben ser paralelos.

Antes de probar el teorema de los ejes paralelos, demostremos cómo podríamos haberlo usado para obtener los resultados del problema muestra previo. Comenzaremos con la inercia de rotación en torno al centro de masa, que hemos hallado en la parte (*b*): $I_{cm} = 34.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. La distancia $h$ entre el eje que pasa por el centro de masa y el eje que pasa por $m_1$ es, precisamente, $r_1$, la cual calculamos en la parte (*b*). Así,

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{cm} + Mh^2 \\ &= 34.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + (2.3 \text{ kg} + 3.2 \text{ kg} + 1.5 \text{ kg})(2.62 \text{ m}^2) \\ &= 52.8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \end{aligned}$$

en concordancia con el resultado de la parte (*a*). Será conveniente que compruebe que $I_2$ e $I_3$ se verifican de la misma manera.

El teorema los ejes paralelos tiene un corolario importante: puesto que el término $Mh^2$ es siempre positivo, $I_{cm}$ es siempre la inercia de rotación más pequeña de cualquier grupo de ejes paralelos. (Puede no ser la inercia de rotación más pequeña absoluta del objeto; un eje que apunte en una dirección diferente puede dar un valor más pequeño.) Así, para rotaciones en un plano dado y con una velocidad angular dada, la elección de un eje que pase por el centro de masa cuesta la menor cantidad de energía (porque $K = \frac{1}{2}I\omega^2$).

### Demostración del teorema de los ejes paralelos

La figura 4 muestra una placa delgada en el plano *xy*, que puede considerarse como un conjunto de partículas. Deseamos calcular la inercia de rotación de este objeto alrededor del eje *z*, que pasa por el origen *O* en la figura 4, en ángulo recto con el plano de esa figura. Representamos a cada partícula de la placa por su masa $m_i$, sus coordenadas $x_i$ y $y_i$ con respecto al origen *O*, y sus coordenadas $x_i'$ y $y_i'$ con respecto al centro de masa *C*. La inercia de rotación alrededor de un eje que pase por *O* es

$$I = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2).$$

Con relación a *O*, el centro de masa tiene las coordenadas $x_{cm}$ y $y_{cm}$, y de la geometría de la figura 4 podemos ver que las relaciones entre las coordenadas $x_i$, $y_i$, y $x_i'$, $y_i'$ son $x_i = x_i' + x_{cm}$ y $y_i = y_i' + y_{cm}$. Sustituyendo estas transformaciones, tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i[(x_i' + x_{cm})^2 + (y_i' + y_{cm})^2] \\ &= \sum m_i(x_i'^2 + 2x_i'x_{cm} + x_{cm}^2 + y_i'^2 + 2y_i'y_{cm} + y_{cm}^2). \end{aligned}$$

Reagrupando los términos, podemos escribir esto así:

$$\begin{aligned} I = \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2x_{cm}\sum m_i x_i' + 2y_{cm}\sum m_i y_i' \\ + (x_{cm}^2 + y_{cm}^2)\sum m_i. \end{aligned}$$

La primera suma de arriba es, precisamente, $I_{cm} = \Sigma\, m_i r_i'^2$. Los dos términos siguientes se parecen a las fórmulas usadas para calcular las coordenadas de un centro de masa (Ec. 11 del

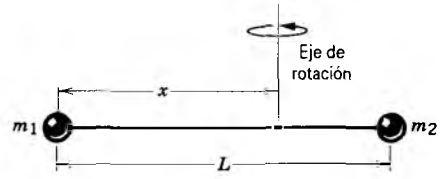



**Figura 5** Problema muestra 2. Las dos partículas (el objeto) van a girar en torno a un eje perpendicular a la varilla que las une y a una distancia $x$ de $m_1$.

capítulo 9), pero (como lo muestra la Fig. 4) están calculados *dentro* del sistema del centro de masa. Por ejemplo, $\Sigma m_i x_i'^2 = Mx_{cm}'$ = 0 porque = 0, $x_{cm}'$ = 0 y similarmente $\Sigma m_i y_i' = My_{cm}'$ = 0: en el sistema de coordenadas del centro de masa, el centro de masa está, por definición, en el origen, por lo que estos términos se anulan. En el último término, $h$ representa la distancia entre el origen $O$ y el centro de masa $C$, de modo que $h^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2$; también, $\Sigma m_i = M$, la masa total. Entonces,

$$I = I_{cm} + Mh^2,$$

lo cual demuestra el teorema de los ejes paralelos. ■

**Problema muestra 2** El objeto mostrado en la figura 5 consta de dos partículas, de masas $m_1$ y $m_2$, unidas por una varilla rígida de longitud $L$. (*a*) Despreciando la masa de la varilla, halle la inercia de rotación $I$ de este sistema para las rotaciones de este objeto alrededor de un eje perpendicular a la varilla y a una distancia $x$ de $m_1$. (*b*) Demuestre que $I$ es mínima cuando $x = x_{cm}$.

**Solución** (*a*) Según la ecuación 2, obtenemos

$$I = m_1x^2 + m_2(L - x)^2.$$

(*b*) Hallamos el valor mínimo de $I$ haciendo que $dI/dx$ sea igual a 0;

$$\frac{dI}{dx} = 2m_1x + 2m_2(L - x)(-1) = 0.$$

Resolviendo, hallamos el valor de $x$ para el cual tenemos este mínimo:

$$x = \frac{m_2L}{m_1 + m_2}.$$

Ésta es idéntica a la expresión para el centro de masa del objeto, y por lo tanto, la inercia de rotación alcanza su valor mínimo en $x = x_{cm}$. Esto es consistente con el teorema los ejes paralelos, el cual exige que $I_{cm}$ sea la inercia de rotación más pequeña entre ejes paralelos.

Los puntos para los cuales la primera derivada de una función es igual a cero pueden no ser todos mínimos de la función. ¿Puede usted demostrar, mediante la *segunda* derivada, que hemos hallado realmente un mínimo de $I$?

## 12-3 INERCIA DE ROTACIÓN DE LOS CUERPOS SÓLIDOS

Si consideramos a un cuerpo como hecho de un número de partículas discretas, podemos calcular su inercia de rotación en torno a cualquier eje a partir de la ecuación 2, en la cual la suma se toma sobre todas las partículas. Sin embargo, si lo vemos como una distribución continua de materia, podemos imaginarlo dividido en un gran número de pequeños elementos de masa $\delta m_i$. Cada $\delta m_i$ está ubicado a determinada distancia $r_i$ perpendicular al eje de rotación. Considerando a cada $\delta m_i$ aproximadamente como una masa puntual, podemos calcular la inercia de rotación de acuerdo con la ecuación 2:

Pronto consideraremos a ésta como el límite de $\delta m_i$ infinitesimalmente pequeño, de modo que la suma se convierta en una integral. Por ahora, ilustremos la transición al cálculo integral usando la ecuación 5 para aproximar la inercia de rotación de una barra uniforme sólida que gira en torno a un eje perpendicular a la barra en su punto medio. La figura 6*a* ilustra la situación. La barra tiene una longitud $L$ y una masa $M$. Imaginemos que la barra está dividida en 10 trozos, cada uno de longitud $L/10$ y de masa $M/10$. Los trozos están numerados de $i$ = 1 a $i$ = 10, de modo que el $i$ésimo está a una distancia $r_i$ del eje; para este cálculo, hacemos que $r_i$ esté medido desde el eje al centro del trozo. Entonces, los trozos de cada extremo tienen $r_1 = r_{10} = 0.45L$; los trozos próximos a los extremos tienen $r_2 = r_9 = 0.35L$, y los trozos más cercanos al eje tienen $r_5 = r_6 = 0.05L$. Ahora llevamos a cabo la suma para los 10 trozos de acuerdo con la ecuación 5:

$$\begin{aligned} I &= r_1^2\,\delta m_1 + r_2^2\,\delta m_2 + \cdots + r_{10}^2\,\delta m_{10} \\ &= (0.1M)(0.45L)^2 + (0.1M)(0.35L)^2 + (0.1M)(0.25L)^2 \\ &\quad + (0.1M)(0.15L)^2 + (0.1M)(0.05L)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

donde en la segunda ecuación los cinco términos listados corresponden a la mitad de la barra, y $\cdots$ significa que tenemos cinco términos idénticos de la otra mitad. Evaluando los factores numéricos, obtenemos el resultado

$$I = 0.825ML^2 = \frac{1}{12.12}ML^2 \quad (10 \text{ trozos}).$$

Nuestro motivo para escribir el resultado de esta manera no tardará en ser evidente.

Supongamos ahora que dividimos la barra en 20 trozos, cada uno de ellos con una longitud de $L/20$ y masa $M/20$ (Fig. 6*b*). Repitiendo el cálculo anterior, obtenemos el resultado

$$I = 0.831ML^2 = \frac{1}{12.03}ML^2 \quad (20 \text{ trozos}).$$

A medida que aumentemos el número de trozos, ¿tiende el resultado a un valor límite que podamos ver como la inercia de rotación? En el problema 12, se le pidió a usted derivar el resultado para cualquier número $N$ arbitrario de trozos:

$$I = \frac{1}{12}ML^2\left(\frac{N^2 - 1}{N^2}\right) \quad (N \text{ trozos}). \qquad (6)$$

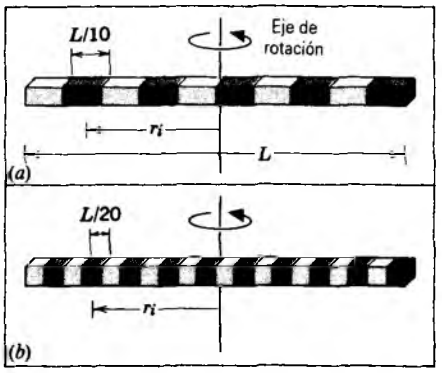



**Figura 6** (*a*) La inercia de rotación de una barra sólida de longitud $L$, que gira en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su longitud, puede calcularse aproximadamente dividiendo la barra en 10 trozos iguales, cada uno de longitud $L/10$. Cada trozo es tratado como una masa puntual a una distancia $r_i$ del eje. (*b*) Se obtiene una aproximación más precisa a la inercia de rotación de la barra dividiéndola en 20 trozos.

Claramente, esto tiende al límite de $ML^2/12$ cuando $N \to \infty$, y podemos señalarlo como el valor de la inercia de rotación de la barra. Nótese que los coeficientes numéricos para $N = 10$ ($\frac{1}{12.12}$) y $N = 20$ ($\frac{1}{12.03}$) demuestran la tendencia al límite ($\frac{1}{12}$) si $N \to \infty$.

El método algebraico anterior opera fácilmente en unos cuantos casos, y ayuda a formarnos una imagen de cómo el cálculo integral divide a un objeto sólido en trozos infinitesimales y suma a todos los trozos. En los cálculos que intervienen para la mayoría de los sólidos, el método algebraico es engorroso, siendo mucho más fácil usar las técnicas de cálculo directamente. Consideremos al límite de la ecuación 5 cuando el número de trozos es demasiado grande o, equivalentemente, cuando sus masas $\delta m$ se vuelven muy pequeñas:

$$I = \lim_{\delta m_i \to 0} \sum r_i^2 \delta m_i,$$

y, de la manera usual, la suma resulta ser una integral en el límite:

$$I = \int r^2 \, dm. \tag{7}$$

La integración se lleva a cabo sobre todo el volumen del objeto, pero a menudo ciertas simplificaciones geométricas pueden reducir la integral a términos más manejables.

Como ejemplo, regresemos a la barra que giraba en torno a un eje que pasa por su centro. La figura 7 muestra el problema trazado para el enfoque integral. Elegimos a un elemento *arbitrario* de masa $dm$ situado a una distancia $x$ del eje. (Usamos a $x$ como la variable de la integración.) La masa de este elemento es igual a su densidad $\rho$ (masa por unidad de volumen) o por el elemento de volumen $dV$. El elemento de volumen es igual al área multiplicada por su espesor $dx$:

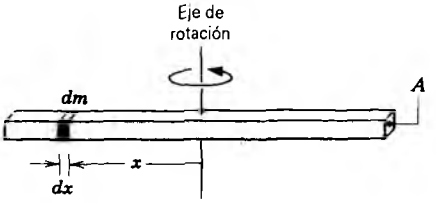



**Figura 7** La inercia de rotación de una barra sólida se calcula integrando a lo largo de su longitud. Un elemento de masa $dm$ está ubicado a una distancia $x$ perpendicular al eje de rotación.

$$dV = A \, dx$$

$$dm = \rho \, dV = \rho A \, dx.$$

Suponemos que la barra tiene una sección transversal uniforme de área $A$ y una densidad $\rho$ uniforme, siendo ésta igual a la masa total $M$ dividida entre el volumen total $AL$: $\rho = M/V = M/AL$. Evaluando la ecuación 7, obtenemos

$$I = \int r^2 \, dm = \int x^2 \frac{M}{AL} A \, dx = \frac{M}{L} \int x^2 \, dx.$$

Con $x = 0$ en el punto medio de la barra, los límites de la integración van desde $x = -L/2$ hasta $x = +L/2$. La inercia de rotación es, entonces,

$$I = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \, dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{+L/2}$$

$$I = \tfrac{1}{12} ML^2. \tag{8}$$

Este resultado es idéntico al deducido del método algebraico, ecuación 6, en el límite $N \to \infty$.

Si deseamos girar a la barra en torno a un eje que pase por un extremo perpendicular a su longitud, podemos usar el teorema de los ejes paralelos (Ec. 4). Ya hemos hallado a $I_{cm}$, y la distancia $h$ entre los ejes paralelos es precisamente la mitad de la longitud, de modo que

$$I = \tfrac{1}{12} ML^2 + M(L/2)^2 = \tfrac{1}{3} ML^2.$$

A menudo podemos calcular la inercia de rotación de un cuerpo sólido descomponiéndolo en elementos de inercia de rotación conocida. Por ejemplo, supongamos que tenemos una placa rectangular sólida y uniforme de longitud $a$ y de anchura $b$, como se muestra en la figura 8. Deseamos calcular la inercia de rotación en torno a un eje perpendicular a la placa y que pase por su centro.

La placa puede ser dividida en una serie de fajas, cada una de las cuales va a ser considerada como una barra. Consideremos la faja de masa $dm$, longitud $a$, y anchura $dx$ mostrada en la figura 8. La masa $dm$ de la faja se relaciona con la masa

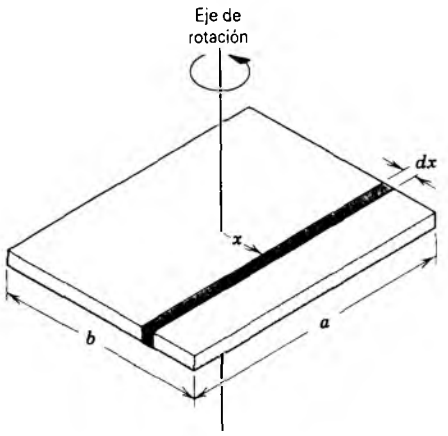



**Figura 8** Una placa rectangular sólida de lados $a$ y $b$ se hace girar en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su superficie. Para calcular la inercia de rotación, consideramos que la placa está dividida en fajas. La faja sombreada puede ser considerada como una barra, cuya inercia de rotación en torno al eje central puede hallarse usando el teorema de los ejes paralelos.

total $M$ como el área de la superficie de la faja ($a\,dx$) se relaciona con el área $ab$ de toda la superficie:

$$\frac{dm}{M} = \frac{a\,dx}{ab} = \frac{dx}{b}$$

$$dm = \frac{M}{b}\,dx.$$

La inercia de rotación $dI$ de la faja en torno al eje se relaciona, según el teorema de los ejes paralelos, con la inercia de rotación de la faja (vista como una barra) en torno a su centro de masa, dado por la ecuación 8 como $dI_{cm} = \frac{1}{12}dm\,a^2$;

$$dI = dI_{cm} + dm\,h^2$$
$$= \tfrac{1}{12}dm\,a^2 + dm\,x^2.$$

Sustituyendo a $dm$ nos da

$$dI = \frac{Ma^2}{12b}\,dx + \frac{M}{b}\,x^2\,dx,$$

e $I$ se deduce de la integral

$$I = \int dI = \frac{Ma^2}{12b}\int dx + \frac{M}{b}\int x^2\,dx.$$

Los límites de la integración sobre $x$ van desde $-b/2$ hasta $+b/2$. Llevando a cabo las integraciones, obtenemos

$$I = \tfrac{1}{12}M(a^2 + b^2). \qquad (9)$$

Nótese que este resultado es independiente del espesor de la placa: obtendríamos el mismo resultado para un montón de placas de masa total $M$ o, de manera equivalente, para un bloque rectangular sólido de las mismas dimensiones superficiales. Nótese también que nuestro resultado depende de la diagonal de la placa más bien que de $a$ y $b$ por separado. ¿Puede usted explicar esto?

Operando de este modo, podemos evaluar la inercia de rotación de casi cualquier objeto sólido regular. La figura 9 muestra algunos objetos comunes y sus inercias de rotación. Aunque es relativamente sencillo usar integrales bidimensionales o tridimensionales para calcular estas inercias de rotación, a menudo es posible, como lo hicimos en el cálculo anterior, descomponer a un sólido complejo en sólidos más sencillos de inercias de rotación conocidas. El problema 14 al final del capítulo describe un cálculo al respecto para una esfera sólida.

## 12-4 TORCA QUE ACTÚA SOBRE UNA PARTÍCULA

La experiencia con una puerta pesada nos enseña que una fuerza dada puede producir varias aceleraciones angulares dependiendo de dónde se aplique la fuerza a la puerta y de cómo aquélla esté dirigida (véase la Fig. 10). Una fuerza (tal como $\mathbf{F}_1$) aplicada al borde y dirigida a lo largo de la puerta no puede producir una aceleración angular, como tampoco lo puede hacer una fuerza (tal como $\mathbf{F}_2$) aplicada a lo largo del gozne de la puerta; pero una fuerza (tal como $\mathbf{F}_3$) aplicada en ángulo recto con la puerta en su borde exterior produce la mayor aceleración angular.

El análogo de la rotación de la fuerza se llama *torca*. Lo definiremos ahora para el caso especial de una partícula aislada observada desde un marco de referencia inercial. Más adelante extenderemos el concepto de torca a sistemas de partículas (incluyendo a cuerpos rígidos) y demostraremos que la torca está íntimamente asociada a la aceleración angular.

Sea $\mathbf{F}$ una fuerza que actúa sobre una partícula aislada en un punto $P$ cuya posición en torno al origen $O$ del marco de referencia inercial está dado por el vector $\mathbf{r}$ (Fig. 11). Puesto que dos vectores determinan un plano, hemos elegido el plano $xy$ para que contenga a los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$. La torca $\tau$ que actúa sobre la partícula *con respecto al origen* $O$ se define en términos del producto vectorial (producto cruz) de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ así:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \qquad (10)$$

La torca es una cantidad vectorial. Su magnitud está dada por

$$\tau = rF \operatorname{sen} \theta, \qquad (11)$$

donde $\theta$ es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$; su dirección es normal al plano formado por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ (esto es, paralela al eje $z$

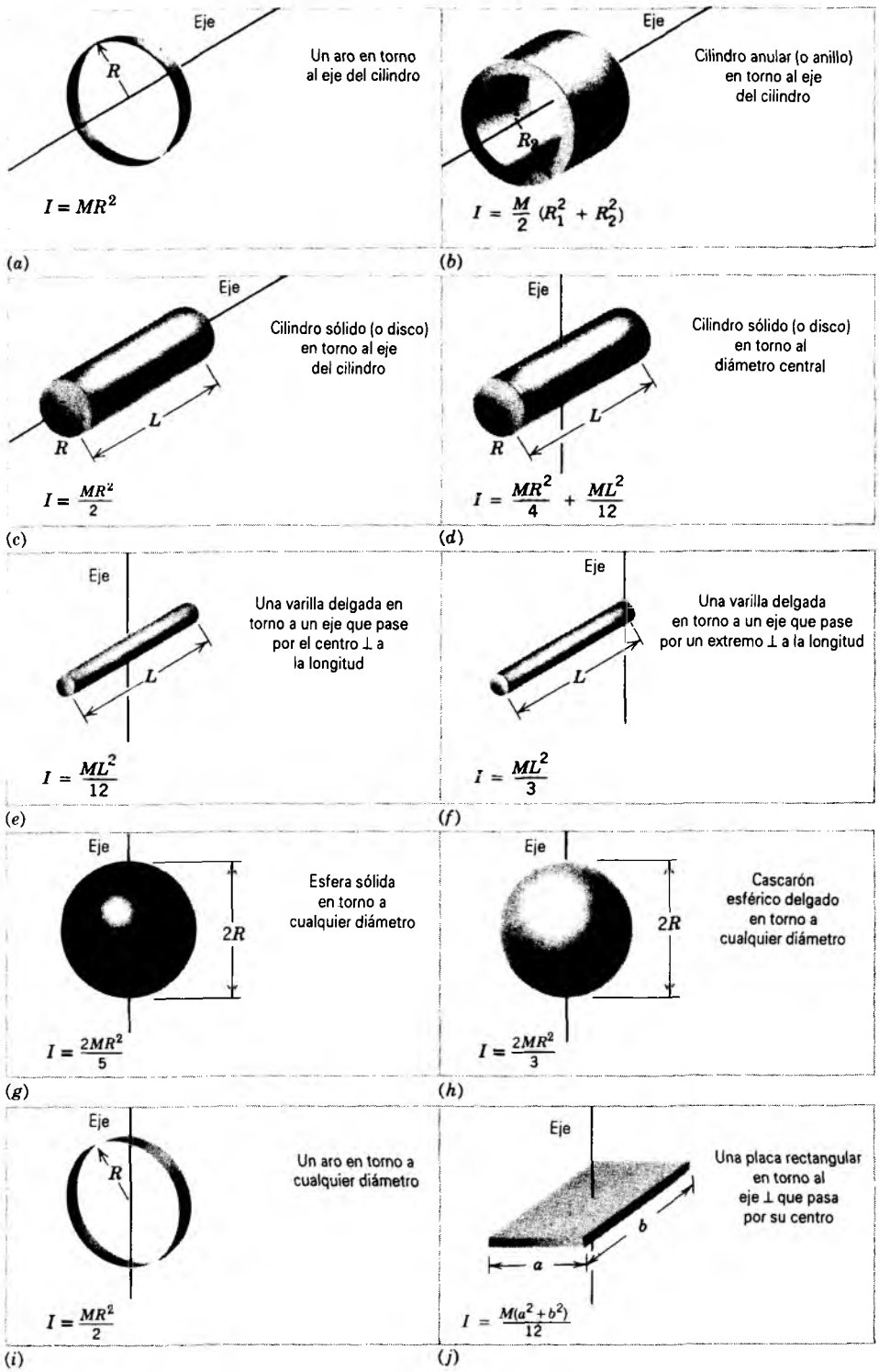



**Figura 9** La inercia de rotación de varios sólidos en torno a ejes elegidos.

cuando **r** y **F** están en el plano *xy*), dada por la regla de la mano derecha para el producto vectorial de dos vectores: si usted hace girar a **r** sobre **F** (cuando están trazados cola con cola) a través del ángulo más pequeño entre ellos con los dedos de su mano derecha doblados, entonces la dirección del pulgar extendido da la dirección de $\tau$. (Sin duda querrá usted revisar la definición del producto vectorial (producto cruz) en la sección 3-5.)

Hemos trazado el vector torca en la figura 11 de modo que pase a través del origen, pero no es necesario hacerlo. Si **r** y **F** están en el plano *xy*, como hemos supuesto, entonces la ecuación 10 requiere solamente que el produc-

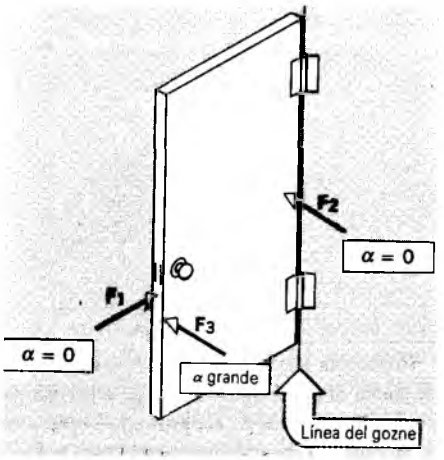



**Figura 10** Al aplicar una fuerza **F** dada a una puerta se produce una aceleración angular $\alpha$ que varía con el punto en el que **F** se aplique y con su dirección respecto a la línea del gozne. La fuerza $\mathbf{F}_1$ está aplicada a lo largo de una línea que pasaría por la línea del gozne, y no produce ninguna aceleración angular (la puerta no se mueve). La fuerza $\mathbf{F}_2$ se halla aplicada a la línea del gozne; tampoco produce ninguna aceleración angular. La fuerza $\mathbf{F}_3$ se halla aplicada a un punto alejado de la línea del gozne y en una dirección perpendicular a la línea que une al punto de aplicación de $\mathbf{F}_3$ con la línea del gozne; esta fuerza produce la mayor aceleración angular posible.

to cruz $\tau$ sea *paralelo* al eje z, no necesariamente *a lo largo* del eje z. Podríamos situar al vector $\tau$ en cualquier punto en la coordenada del espacio de la figura 11 sin cambiar la validez de la ecuación 10, siempre y cuando $\tau$ permanezca paralelo al eje z.

La torca tiene las dimensiones de fuerza multiplicada por distancia; en términos de nuestras dimensiones fundamentales M, L, y T, tiene las dimensiones $ML^2T^{-2}$. Éstas son las mismas que las dimensiones del trabajo. Sin embargo, la torca y el trabajo son cantidades físicas muy diferentes. Por ejemplo, la torca es un vector, y el trabajo es un escalar. La unidad para la torca puede ser el newton-metro (N · m) o la libra-pie (lb · ft), entre otras posibilidades. (Aunque 1 N · m = 1 J, *no* expresamos la torca en unidades de J.)

Nótese de la ecuación 10 que la torca producida por una fuerza depende no solamente de la magnitud y de la dirección de ésta fuerza sino también del punto de aplicación de la fuerza respecto al origen, esto es, del vector **r**. En particular, cuando la partícula *P* de la figura 11 está en el origen, **r** es cero y la torca $\tau$ con respecto al origen es cero. La torca con respecto a un punto *O'* a medio camino entre *O* y *P* es un vector (que puede ser trazado en *O'*) paralelo al vector $\tau$ mostrado en la figura 11 pero a la mitad de su longitud.

Podemos también escribir la magnitud de $\tau$ (Ec. 11) ya sea como

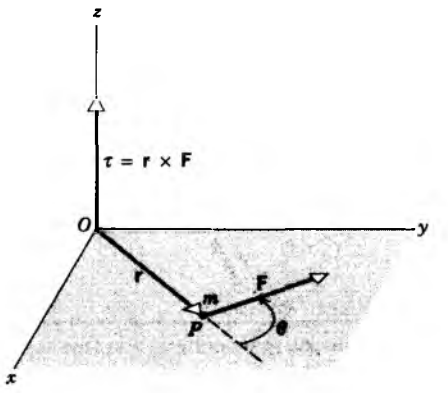



**Figura 11** Una fuerza **F** actúa sobre una partícula de masa *m* situada en la posición **r** en el plano *xy*. Esta fuerza ejerce una torca $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ sobre la partícula con respecto al origen *O*. El vector torca apunta en la dirección de *z* creciente; podría estar trazado en cualquier lugar que escojamos, siempre y cuando sea paralelo al eje *z*.

$$\tau = (r \text{ sen } \theta)F = Fr_\perp, \qquad (12a)$$

o como

$$\tau = r(F \text{ sen } \theta) = rF_\perp, \qquad (12b)$$

donde, como lo muestra la figura 12, $r_\perp$ (= *r sen* $\theta$) es la componente de **r** en ángulo recto con la línea a lo largo de la cual actúa **F** (llamada la *línea de acción* de **F**), y $F_\perp$ (= *F* sen $\theta$) es la componente de **F** en ángulo recto con **r**. La torca se llama a menudo *momento de la fuerza*, y $r_\perp$ en la ecuación 12*a* se denomina el *brazo del momento*. La ecuación 12*b* muestra que sólo la componente de **F** perpendicular a **r** contribuye a la torca. En particular, cuando $\theta$ es igual a 0° o a 180°, no existe una componente perpendicular ($F_\perp$ = *F* sen $\theta = 0$); la línea de acción de la fuerza pasa a través del origen, y el brazo del momento $r_\perp$ con respecto al origen es también cero. En este caso, tanto la ecuación 12*a* como la ecuación 12*b* muestra que la torca $\tau$ es cero.

**Problema muestra 3** Un péndulo consta de un cuerpo de masa $m = 0.17$ kg en el extremo de una varilla rígida de longitud $L = 1.25$ m y masa despreciable (Fig. 13). (*a*) ¿Cuál es la magnitud de la torca debida a la gravedad en torno al punto de pivoteo *O* en el instante en que el péndulo se desplaza como se muestra a través de un ángulo de $\theta = 10°$ de la vertical? (*b*) ¿Cuál es la dirección de la torca en torno a *O* en ese instante? ¿Depende su dirección de que el péndulo se desplace hacia la izquierda o hacia la derecha de la vertical?

**Solución** (*a*) Podemos usar la ecuación 11 directamente para hallar la magnitud de la torca, siendo $r = L$ y $F = mg$:

$$\tau = Lmg \text{ sen } \theta = (1.25 \text{ m})(0.17 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(\text{sen } 10°)$$
$$= 0.36 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

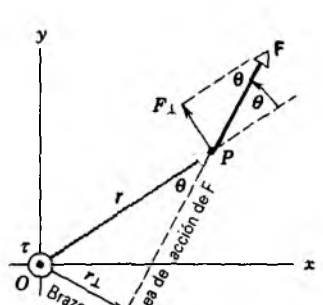



**Figura 12** El plano *xy*, que contiene a la fuerza **F** y al vector de posición **r** de la figura 11. La magnitud de $\tau$ está dada por $Fr_\perp$ (Ec. 12*a*) o por $rF_\perp$ (Ec. 12*b*). La dirección de $\tau$ (hacia afuera de la página) se indica en la figura por el signo ⊙ (que sugiere la punta de una flecha).

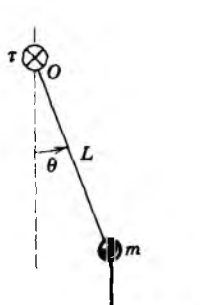



**Figura 13** Problema muestra 3. Un péndulo, que consta de un cuerpo de masa *m* en el extremo de una varilla rígida carente de masa de longitud *L*. La gravedad ejerce una torca sobre la página en *O*, indicado aquí por el símbolo ⊗ (que sugiere la cola de una flecha).

(*b*) Con el desplazamiento como se muestra en la figura 13, la torca alrededor del punto de pivoteo está en el plano del papel. Conviene estar convencido aquí de que, si el péndulo se desplaza hacia el lado opuesto de la vertical, la torca tiene la dirección opuesta. Como lo veremos en la próxima sección, el efecto de una torca es producir una aceleración angular paralela. En el primer caso, la aceleración angular hacia el papel tiende a mover al péndulo hacia su posición de equilibrio. Cuando el péndulo se desplaza hacia el lado opuesto de la vertical, la torca hacia afuera del papel tiende otra vez a restituir al péndulo en su posición de equilibrio. Compruebe estas conclusiones usando la regla de la mano derecha para relacionar el sentido de la rotación en la dirección del vector de la aceleración angular (supuesto como paralelo a la torca).

## 12-5 DINÁMICA DE LA ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO

En el movimiento de traslación, las técnicas que implican trabajo y energía nos ofrecen una forma diferente y a veces más ilustrativa de enfocar los problemas. En esta sección consideraremos el uso del trabajo y la energía en el movimiento de rotación.

Supongamos que un cuerpo rígido arbitrario pivotea alrededor del eje *z*. Se aplica al cuerpo una fuerza externa **F** que actúe en una dirección arbitraria en algún punto *P* del plano *xy*. La figura 14 muestra a la fuerza **F** y al punto *P*, omitiéndose el resto del cuerpo para mayor claridad. Consideraremos el trabajo *dW* efectuado por esta fuerza cuando el cuerpo gira en un ángulo $d\phi$.

El punto *P*, que está a una distancia *r* del eje de rotación, se mueve a lo largo de la distancia $ds = r\,d\phi$ cuando el cuerpo gira en el ángulo $d\phi$. El trabajo *dW* puede, entonces, expresarse así:

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}, \qquad (13)$$

donde $d\mathbf{s}$ es un vector de magnitud *ds* en la dirección del movimiento de *P*.

La componente *z* de **F** no contribuye al producto punto en la ecuación 13, porque $d\mathbf{s}$ no tiene una componente *z*. (Recuérdese de la ecuación 15 del capítulo 3 que el producto punto de **F** y $d\mathbf{s}$ puede ser escrito $F_x dx + F_y dy + F_z dz$. En nuestro caso, $dz = 0$, de modo que el producto punto no depende de la componente $F_z$). *En los casos en que la dirección del eje de rotación sea fijo, necesitamos considerar solamente las componentes de la fuerza que están en el plano perpendicular al eje.*

La figura 15 muestra el movimiento del punto *P* durante un intervalo de tiempo infinitesimal *dt*. Sobre el cuerpo actúa una fuerza externa, que ahora se supone está enteramente en el plano *xy*, en el punto *P*. El trabajo *dW* efectuado por esta fuerza durante esta rotación infinitesimal es

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = F\cos\theta\, ds = (F\cos\theta)(r\,d\phi).$$

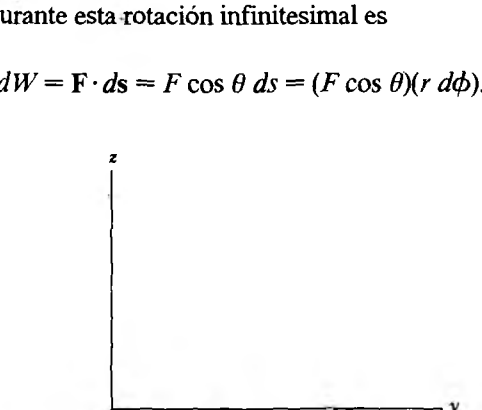



**Figura 14** Una fuerza externa **F** actúa en el punto *P* de un cuerpo rígido (no mostrado) obligado a girar en torno al eje *z*. El cuerpo gira en un ángulo $d\phi$.

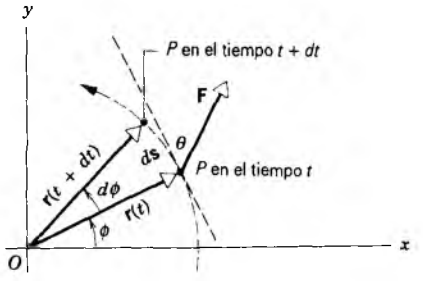



**Figura 15** En un tiempo *dt*, el punto *P* de un cuerpo rígido se mueve una distancia *ds* a lo largo del arco de un círculo de radio *r*. El cuerpo rígido (que no aparece en la figura) y el vector **r** que localiza al punto *P* en el cuerpo giran cada uno en un ángulo $d\phi$ durante este intervalo.

El término $F \cos \theta$ es la componente de **F** en la dirección de *ds*; es, por lo tanto, perpendicular a **r** y puede ser representada como $F_\perp$. De acuerdo con la ecuación 12*b*, $F_\perp r$ es la magnitud de la torca instantánea ejercida por **F** sobre el cuerpo rígido alrededor del eje perpendicular a la página que pasa por *O*, de modo que la ecuación anterior se convierte en

$$dW = F_\perp r\, d\phi = \tau\, d\phi. \tag{14}$$

Esta expresión para el trabajo efectuado en la rotación (en torno a un eje fijo) es equivalente a la expresión $dW = F\,dx$ para el trabajo efectuado en la traslación (a lo largo de una línea recta).

Supongamos ahora que varias fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,..., se aplican a diferentes puntos del cuerpo en el plano normal a su eje de rotación (el plano *xy* de la Fig. 15). El trabajo neto efectuado por estas fuerzas sobre el cuerpo en una rotación $d\phi$ es

$$\begin{aligned} dW_{\text{neto}} &= (F_1 \cos \theta_1)\, r_1\, d\phi + (F_2 \cos \theta_2)\, r_2\, d\phi + \cdots \\ &= (\tau_1 + \tau_2 + \cdots) d\phi, \end{aligned}$$

donde $(F_i \cos \theta_i) r_i$ da la componente de la torca $\tau_i$ con respecto a *O*. Nótese que, como debe suceder para un cuerpo rígido en rotación pura, suponemos que $d\phi$ es el desplazamiento angular de cualquier punto del cuerpo durante el intervalo de tiempo *dt*, sin importar dónde esté situado el punto en el cuerpo. Podemos escribir esto así:

$$dW_{\text{neto}} = \left(\sum \tau_{\text{ext}}\right) d\phi = \left(\sum \tau_{\text{ext}}\right) \omega\, dt, \tag{15}$$

donde en el último resultado hemos usado $d\phi = \omega\, dt$ de la ecuación 3 del capítulo 11. Aquí $\Sigma\tau_{\text{ext}}$ representa la torca externa total que actúa sobre el cuerpo, la cual se calcula considerando a cada torca externa como positiva en caso de que, al actuar aisladamente, tienda a girar al cuerpo en sentido contrario a las manecillas del reloj (aumentando $\phi$, por lo tanto) y como negativa si tiende a girar al cuerpo en el sentido de las manecillas.

Durante el intervalo de tiempo *dt*, la energía cinética del cuerpo cambia en una cantidad *dK* como resultado de la acción de las fuerzas externas. Suponemos que la energía cinética de rotación es la única forma de energía que el cuerpo puede contener. Usando la ecuación 3, $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, hallamos que

$$dK = d(\tfrac{1}{2}I\omega^2) = I\omega\, d\omega = I\omega\alpha\, dt, \tag{16}$$

usando $d\omega = \alpha\, dt$ de la ecuación 5 del capítulo 11.

Durante el intervalo *dt*, el teorema trabajo energía da

$$dW = dK, \tag{17}$$

y sustituyendo en las ecuaciones 15 y 16 nos da

$$\left(\sum \tau_{\text{ext}}\right) \omega\, dt = I\omega\alpha\, dt,$$

o, cancelando los factores comunes de $\omega dt$,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha. \tag{18}$$

La ecuación 18 es el análogo de la rotación de la segunda ley de Newton en la forma escalar de $\Sigma F_{\text{ext}} = ma$, correspondiente al movimiento en una dimensión. En el caso de la rotación, es preciso advertir, una vez más, que nos ocupamos solamente de la rotación alrededor de un eje fijo. Es más, obsérvese que una torca positiva tiende a producir una aceleración angular positiva; esto es, la misma regla de la mano derecha usada para obtener el signo de $\alpha$ puede utilizarse para determinar el signo de $\tau$. Como hicimos en el caso de la dinámica de la traslación, abandonamos el subíndice "ext" de $\tau$ para mayor conveniencia.

Para obtener la razón a la cual se efectúa el trabajo en el movimiento de rotación (alrededor de un eje fijo), dividimos la ecuación 14 entre el intervalo de tiempo infinitesimal *dt* durante el cual se desplaza el cuerpo por $d\phi$ y obtenemos

$$P = \tau\omega, \tag{19}$$

que da la potencia mecánica instantánea *P*. La ecuación 19 es el análogo de rotación de $P = Fv$ para el movimiento de traslación.

La analogía entre el movimiento de traslación en una dirección fija y el movimiento de rotación en torno a un eje fijo queda puesto de relieve en la tabla 1, la cual compara las ecuaciones correspondientes en los dos casos. La rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo no es la clase de movimiento de rotación más general; a menudo el eje no está fijo en un marco de referencia inercial. En el capítulo 13 consideraremos este caso más general, junto con el ímpetu angular que aparece listado en la última línea de la tabla 1 de ese mismo capítulo.

**TABLA 1** COMPARACIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA DINÁMICA LINEAL Y DE ROTACIÓN

| *Movimiento lineal* | | *Rotación en torno a un eje fijo* | |
|---|---|---|---|
| Desplazamiento | $x$ | Desplazamiento angular | $\phi$ |
| Velocidad | $v = dx/dt$ | Velocidad angular | $\omega = d\phi/dt$ |
| Aceleración | $a = dv/dt$ | Aceleración angular | $\alpha = d\omega/dt$ |
| Masa (inercia de traslación) | $M$ | Inercia de rotación | $I$ |
| Fuerza | $F = Ma$ | Torca | $\tau = I\alpha$ |
| Trabajo | $W = \int F\,dx$ | Trabajo | $W = \int \tau\,d\phi$ |
| Energía cinética | $K = \frac{1}{2}Mv^2$ | Energía cinética | $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ |
| Potencia | $P = Fv$ | Potencia | $P = \tau\omega$ |
| Ímpetu lineal | $p = Mv$ | Ímpetu angular† | $L = I\omega$ |

† El ímpetu angular se discute en el capítulo 13.

Dada la relación dinámica entre la torca y la aceleración angular, podemos ahora reconsiderar el efecto de una torca arbitraria sobre un cuerpo rígido obligado a girar en torno al eje $z$. Permitamos una vez más que la fuerza tenga una dirección arbitraria, como se muestra en la figura 16. La torca debida a esa fuerza, dada por $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, está en una dirección perpendicular al plano formado por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$. Podemos resolver a $\tau$ en sus componentes $x$, $y$, y $z$, como se muestra en la figura 16. Cada componente de la torca tiende a producir una rotación en torno a su eje correspondiente. Sin embargo, hemos supuesto que el cuerpo está fijo de modo tal que sólo sea posible la rotación en torno al eje $z$. Las componentes $x$ y $y$ de la torca no producen un movimiento. En este caso, las chumaceras sirven para obligar al sistema a girar en torno al eje $z$ únicamente, y por lo tanto deben de procurarse torcas que cancelen a las componentes $x$ y $y$ de la torca de la fuerza aplicada. Esto indica lo que se entiende por un cuerpo que está obligado a moverse en torno a un eje fijo: únicamente las componentes de la torca paralelas a ese eje son eficaces para hacer girar al cuerpo y se supone que las componentes de la torca perpendiculares al eje están balanceadas por otras partes del sistema. Las chumaceras *deben* ejercer torcas con componentes $x$ y $y$ que mantengan fija la dirección del eje de rotación; las chumaceras *pueden* también proporcionar una torca en la dirección $z$, como en el caso de chumaceras no ideales que ejerzan fuerzas de fricción sobre el eje de la rueda.

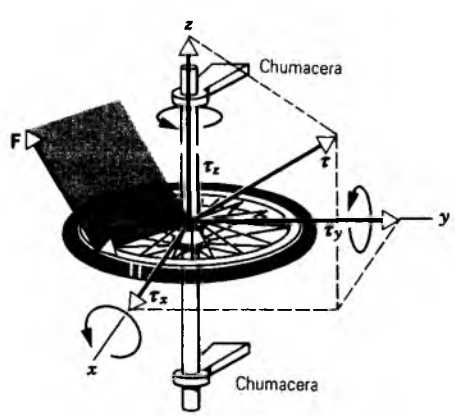



**Figura 16** Un cuerpo rígido, en este caso una rueda, está libre para girar en torno al eje $z$. Una fuerza arbitraria $\mathbf{F}$, que actúa en un punto de la llanta, puede producir componentes de la torca a lo largo de los tres ejes de coordenadas. Solamente la componente $z$ puede hacer girar a la rueda. Las componentes $x$ y $y$ de la torca tenderían a desviar al eje de rotación alejándolo del eje $z$. A esta tendencia deben de oponerse torcas iguales y opuestas (no mostradas) ejercidas por las chumaceras, que mantienen al eje en una dirección fija.

**Problema muestra 4** En un parque de diversiones el papá de un niño empuja un tiovivo, ejerciendo una fuerza $\mathbf{F}$ de 115 N de magnitud en un punto $P$ de la periferia situado a una distancia de $r = 1.75$ m del eje de rotación (Fig. 17). La fuerza se ejerce en una dirección que forma un ángulo de 32° debajo de la horizontal, y la componente horizontal de la fuerza está en una dirección de 15° hacia adentro de la tangente en $P$. Halle la magnitud de la componente de la torca que acelera al tiovivo.

**Solución** Solamente la componente horizontal de $\mathbf{F}$ produce una torca vertical. Hallemos a $F_\perp$, la componente de $\mathbf{F}$ a lo largo de la línea horizontal, perpendicular a $\mathbf{r}$. La componente horizontal de $\mathbf{F}$ es

$$F_h = F \cos 32° = 97.5 \text{ N}.$$

La componente de $F_h$ perpendicular a $\mathbf{r}$ es

$$F_\perp = F_h \cos 15° = 94.2 \text{ N}.$$

La torca (vertical) a lo largo del eje de rotación es, entonces,

$$\tau = rF_\perp = (1.75 \text{ m})(94.2 \text{ N}) = 165 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

La componente de $F_h$ paralela a $r$ ($= F_h$ sen 15°) no produce torca alguna en torno al eje de rotación, y la componente vertical de $F$ ($= F$ sen 32°) produce una torca perpendicular al eje que

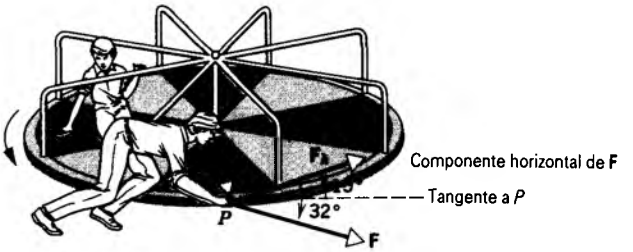



**Figura 17** Problema muestra 4. El padre de un niño empuja al tiovivo en un parque de atracciones. El papá está inclinado hacia abajo, de modo que la fuerza tiene una componente hacia abajo. Además, como él está fuera del borde, la fuerza se dirige ligeramente hacia adentro. La componente horizontal de la fuerza, $F_h$, está en el plano de la plataforma giratoria y forma un ángulo de 15° con la tangente en $P$, el punto en que se aplica la fuerza.

tendería a ladear la plataforma giratoria afuera del plano horizontal (porque el padre está empujando *hacia abajo* sobre la plataforma) si a esa torca no se le opusiera una torca igual y contraria desde las chumaceras.

El padre debe ejercer una torca que exceda a cualquier torca por fricción proveniente de las chumaceras. Cuando el padre deja de empujar, esta torca por fricción, que ahora actúa sola, hace más lento el giro del tiovivo hasta que consigue frenarlo y llevarlo al reposo.

**Problema muestra 5** La figura 18*a* muestra un disco uniforme de masa $M = 2.5$ kg y radio $R = 20$ cm montado en un eje horizontal fijo (sin fricción). Un bloque de masa $m = 1.2$ kg cuelga de un cordón que pasa alrededor del borde del disco. Halle la aceleración del bloque al caer, la tensión en el cordón, y la aceleración angular del disco.

**Solución** La figura 18*b* muestra un diagrama de cuerpo libre para el bloque. El bloque acelera hacia abajo de modo que su peso $mg$ debe exceder la tensión $T$ del cordón. Tomamos como positiva a la dirección hacia abajo y, de la segunda ley de Newton, tenemos

$$\sum F = mg - T = ma.$$

La figura 18*c* muestra un diagrama parcial del cuerpo libre para el disco. La única torca $\tau$ que actúa sobre el disco, tomada con respecto a su eje de rotación, es $TR$, y la inercia de rotación del disco es $\frac{1}{2}MR^2$. (Sobre el disco actúan también otras dos fuerzas, su peso y la fuerza hacia arriba que el soporte ejerce sobre el disco. Sin embargo, ambas fuerzas actúan en el eje del disco, de modo que no ejercen torca alguna sobre él.) Aplicando la segunda ley de Newton en la forma angular (Ec. 18), y haciendo que tanto $\tau$ como $\alpha$ sean positivas para una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj, obtenemos

$$\sum \tau = TR = \tfrac{1}{2}MR^2\left(\frac{a}{R}\right).$$

Esto se reduce a

$$T = \tfrac{1}{2}Ma.$$

Podemos así reemplazar a $\alpha$ por $a/R$ porque el cordón no se desliza, y entonces la aceleración lineal del bloque es igual a la

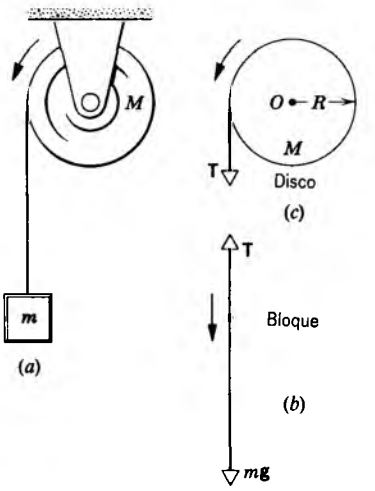



**Figura 18** Problema muestra 5. (*a*) El bloque al caer hace que el disco gire. (*b*) Diagrama del cuerpo libre para el bloque. (*c*) Diagrama parcial del cuerpo libre para el disco. Las flechas muestran las direcciones tomadas como positivas.

aceleración lineal del borde del disco. Combinando las dos ecuaciones dinámicas, una para el bloque y la otra para el disco, eliminamos a $T$ para obtener

$$a = g\frac{2m}{M+2m} = (9.8\text{ m/s}^2)\frac{(2)(1.2\text{ kg})}{2.5\text{ kg} + (2)(1.2\text{ kg})} = 4.8\text{ m/s}^2,$$

y al eliminar a $a$ de las mismas ecuaciones, obtenemos que

$$T = mg\frac{M}{M+2m} = (1.2\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)\frac{2.5\text{ kg}}{2.5\text{ kg} + (2)(1.2\text{ kg})} = 6.0\text{ N}.$$

Como lo esperábamos, la aceleración del bloque al caer es menor que $g$, y la tensión en el cordón (= 6.0 N) es menor que el peso del bloque colgante (= $mg$ = 11.8 N). Vemos también que la aceleración del bloque y la tensión dependen de la masa del disco pero no de su radio. A modo de comprobación, observemos que las fórmulas arriba derivadas predicen que $a = g$ y que $T = 0$ para el caso de un disco sin masa ($M = 0$). Esto es lo que esperamos; el bloque simplemente cae como un cuerpo libre, arrastrando al cordón tras de él.

La aceleración angular del disco se deduce de

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{4.8\text{ m/s}^2}{0.20\text{ m}} = 24\text{ rad/s}^2 = 3.8\text{ rev/s}^2.$$

**Problema muestra 6** Reconsidere el problema muestra 5 desde el punto de vista del trabajo y la energía.

**Solución** Supongamos que el sistema de la figura 18 ha salido del reposo. Lo examinamos más tarde cuando el bloque ha caído una distancia $L$; en ese punto el bloque se mueve a una velocidad $v$, y el disco está girando a una velocidad angular $\omega$. Si el cordón no se desliza sobre el disco, entonces $v = \omega R$; además, cuando el bloque cae una distancia $L$, el disco debe girar un ángulo $\phi$ de modo que $L = R\phi$.

Consideramos tres sistemas diferentes:

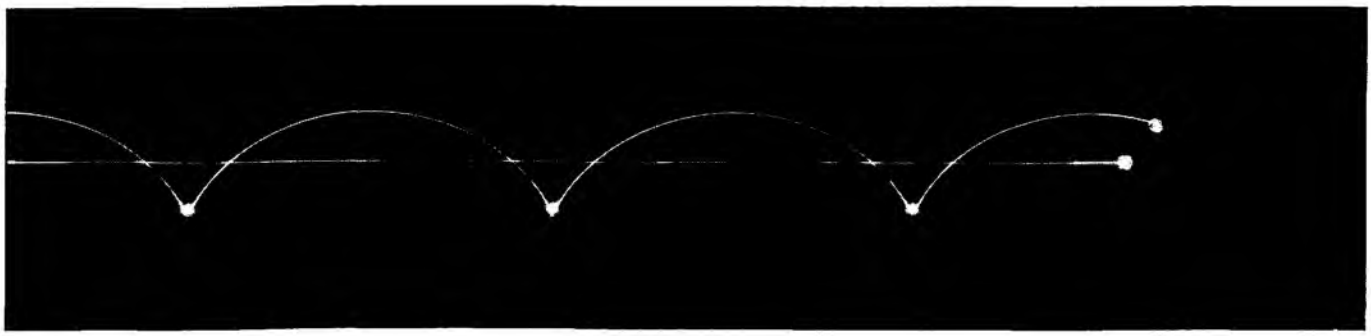


**Figura 19** Fotografía con exposición en tiempo prolongado de un disco al girar. Se han fijado pequeñas luces al disco, una en su centro y otra en su borde. Esta última describe una curva llamada *cicloide*.

**1.** *Sistema = bloque + disco.* La gravedad (la única fuerza externa) efectúa un trabajo externo $mgL$ sobre el sistema al moverse el bloque hacia abajo una distancia $L$. El trabajo externo neto es, entonces,

$$W_{\text{neto}} = mgL.$$

No existe un trabajo de fricción efectuado en el eje (sin fricción) o entre el cordón y el disco (donde no existe movimiento relacionado).

El cambio en la energía cinética es la energía cinética final, puesto que el sistema fue liberado desde el reposo:

$$\Delta K = K_f - K_i = K_f = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv^2.$$

El teorema trabajo-energía nos da

$$W_{\text{neto}} = \Delta K$$

$$mgL = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2\left[\frac{2mg}{M+2m}\right]L.$$

La cantidad entre corchetes es la aceleración que hallamos en el problema muestra 5, de modo que este resultado es, clara y sencillamente, la ya conocida ecuación $v^2 = v_0^2 + 2ax$ para el movimiento lineal con aceleración constante.

**2.** *Sistema = bloque.* Aquí el trabajo externo sobre el sistema es efectuado por la gravedad y por la tensión en el cordón:

$$W_{\text{neto}} = mgL - TL.$$

El cambio en la energía cinética del sistema (el bloque) es precisamente $\frac{1}{2}mv^2$, y el teorema trabajo-energía nos da

$$mgL - TL = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Sustituyendo el resultado anterior para $v^2$, podemos demostrar que esto da la tensión hallada en la solución al problema muestra 5.

**3.** *Sistema = disco.* En este caso, solamente $T$ ejerce un trabajo externo y al usar la ecuación 15 para una rotación en un ángulo total $\phi$ efectuada por una torca constante $TR$, obtenemos

$$W_{\text{neto}} = TR\phi = TL,$$

y el cambio en la energía cinética del sistema (el disco) es

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}MR^2)v^2/R^2 = \tfrac{1}{4}Mv^2.$$

Al aplicar nuevamente el teorema trabajo-energía, obtenemos

$$TL = \tfrac{1}{4}Mv^2.$$

Usted puede demostrar fácilmente que este resultado es consistente con los resultados anteriores para $v^2$ y $T$.

En cada caso, al definir cuidadosamente al sistema y clasificar las fuerzas y las torcas externas, obtenemos resultados idénticos de los enfoques basados en las leyes de Newton y las consideraciones de la energía.

## 12-6 MOVIMIENTOS DE ROTACIÓN Y DE TRASLACIÓN COMBINADOS

El movimiento general de un sistema de partículas comprende tanto traslación como rotación. Hasta ahora hemos considerado únicamente la rotación pura mediante la cual el eje de rotación está fijo en el marco de referencia inercial elegido. Ahora, generalizaremos un tanto permitiendo que el sistema tenga también un movimiento de traslación. Cuando el centro de masa se mueve a una velocidad de traslación $v_{\text{cm}}$, un observador que vea al sistema desde un marco de referencia inercial que se mueva con esa velocidad verá que el centro de masa está quieto. Para este observador, tendrá todavía aplicación la ecuación básica de la dinámica de la rotación (Ec. 18, $\Sigma\tau = I\alpha$) a condición de que (1) el eje de rotación pase por el centro de masa, y (2) el eje tenga siempre la misma dirección en el espacio (esto es, al moverse el sistema, su eje en un instante es paralelo al eje en cualquier otro instante). En esta sección consideraremos este caso especial del movimiento de rotación y de traslación combinado.

Quizás, el giro de una rueda es el ejemplo más conocido de este movimiento, en que el eje de rotación permanece en una dirección fija mientras el cuerpo se halla en movi-

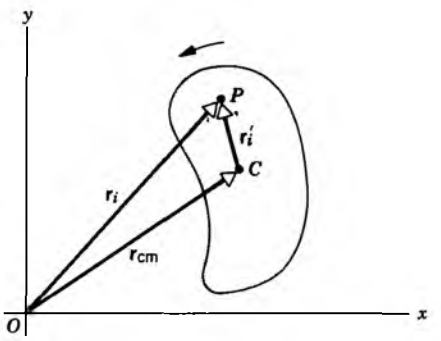



**Figura 20** El centro de masa $C$ de un cuerpo en movimiento de rotación y traslación está situado instantáneamente en la posición $\mathbf{r}_{cm}$. Una partícula arbitraria $P$ del cuerpo está situada en $\mathbf{r}_i$ respecto al origen $O$ y en $\mathbf{r}_i'$ respecto al centro de masa $C$.

miento de traslación. La figura 19 compara el movimiento de traslación del centro de masa de una rueda al rodar con el movimiento más complejo de un punto en la llanta, el cual debe describirse como una combinación de desplazamientos de traslación y de rotación.

Demostremos primero que, en este caso especial, la energía cinética de un cuerpo arbitrario puede expresarse como la suma de los términos independientes de la traslación y de la rotación. La figura 20 muestra un cuerpo arbitrario de masa $M$. El centro de masa $C$ está ubicado instantáneamente en la posición $\mathbf{r}_{cm}$ respecto al origen del marco de referencia inercial elegido. Una partícula $P$ de masa $m_i$ está ubicada en la posición $\mathbf{r}_i$ respecto al origen y en la posición $\mathbf{r}_i'$ respecto al centro de masa del cuerpo. El movimiento de traslación está restringido al plano $xy$; esto es, el vector $\mathbf{v}_i$ que describe el movimiento de $m_i$ tiene sólo componentes $x$ y $y$. El cuerpo gira también a una velocidad angular instantánea $\omega$ alrededor de un eje que pasa por el centro de masa. Con relación a $O$, la energía cinética de la partícula de masa $m_i$ es $\frac{1}{2}m_i v_i^2$, y la energía cinética total del cuerpo se halla de la suma de todas esas partículas:

$$K = \sum \tfrac{1}{2} m_i v_i^2. \tag{20}$$

En la figura 20 vemos que $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}_i'$. Al diferenciar, hallamos la relación correspondiente entre las velocidades: $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_i'$, donde $\mathbf{v}_i$ es la velocidad de la partícula en el sistema $xy$, $\mathbf{v}_{cm}$ es la velocidad del centro de masa, y $\mathbf{v}_i'$ es la velocidad de la partícula respecto al centro de masa. Observado desde el marco de referencia del centro de masa, el movimiento es una rotación pura alrededor de un eje que pasa por el centro de masa; entonces $\mathbf{v}_i'$ tiene la magnitud $\omega r_i'$.

La cantidad $v_i^2$ que aparece en la ecuación 20 puede expresarse como $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$. Sustituyendo la expresión de la transformación de la velocidad, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_i'$, hallamos

$$\begin{aligned} K &= \sum \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \tfrac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum \tfrac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_i') \cdot (\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_i') \\ &= \sum \tfrac{1}{2} m_i (v_{cm}^2 + 2\mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}_i' + v_i'^2). \end{aligned} \tag{21}$$

El segundo término de la ecuación 21, que podemos expresar por $v_{cm} \cdot (\Sigma m_i \mathbf{v}_i')$, incluye como factor al ímpetu total de todas las partículas en el marco del centro de masa ($\Sigma \mathbf{p}_i' = \Sigma m_i \mathbf{v}_i' = M\mathbf{v}_{cm}'$, que es igual a cero porque $v_{cm}' = 0$ en el marco del centro de masa. Así pues tenemos, sustituyendo a $v_i' = r_i'\omega$ en el último término de la ecuación 21,

$$\begin{aligned} K &= \sum \tfrac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum \tfrac{1}{2} m_i v_i'^2 \\ &= \tfrac{1}{2} M v_{cm}^2 + \sum \tfrac{1}{2} m_i r_i'^2 \omega^2 \\ &= \tfrac{1}{2} M v_{cm}^2 + \tfrac{1}{2} I_{cm} \omega^2. \end{aligned} \tag{22}$$

La ecuación 22 indica que la energía cinética total del objeto en movimiento consta de dos términos, uno asociado con la traslación pura del centro de masa del objeto a la velocidad $\mathbf{v}_{cm}$, y la otra asociada con la rotación pura alrededor del eje que pasa por el centro de masa. Los dos términos son bastante independientes: la rotación estaría presente incluso en ausencia de traslación (por ejemplo, como se observaría desde un marco de referencia que se moviese a razón de $\mathbf{v}_{cm}$). Las velocidades $\mathbf{v}_{cm}$ y $\omega$ son, en este caso general, independientes entre sí: podemos proporcionar cualquier cantidad de energía cinética de rotación y cualquier cantidad de energía cinética de traslación. Por ejemplo, en el lanzamiento de un satélite desde un taxi espacial (véase la figura 34 de este capítulo y la figura 15 del capítulo 13), el satélite se coloca girando alrededor de su eje para su estabilidad (como estudiaremos en el capítulo 13) e independientemente se le da la velocidad de traslación necesaria para ponerlo en órbita.

---

**Problema muestra 7** Un yoyo (Fig. 21) de masa $M = 0.023$ kg, que consta de dos discos de radio $R = 2.6$ cm unidos por un eje de radio $R_0 = 0.3$ cm, está girando en el extremo de un cordón de longitud $L = 0.84$ m con una velocidad angular $\omega_0$. ¿Qué velocidad angular se necesita para que el yoyo suba por el cordón? Suponga que el cordón tiene un espesor despreciable.

**Solución** Al comenzar la subida, sólo existe energía cinética de rotación, pero, al final, ésta es, en parte, energía cinética de rotación, en parte energía cinética de traslación, y en parte energía potencial gravitatoria. La conservación de la energía nos da, entonces,

$$\tfrac{1}{2} I \omega_0^2 = \tfrac{1}{2} I \omega^2 + \tfrac{1}{2} M v^2 + MgL,$$

donde $\omega$ y $v$ son las velocidades finales angular y lineal. No podemos resolver este problema sencillamente para un yoyo real, pero podemos resolverlo para el yoyo ideal con un cordón de espesor despreciable hallando la condición necesaria para que el yoyo llegue justo a la mano (llegando con $v = \omega = 0$):

$$\tfrac{1}{2} I \omega_0^2 = MgL.$$

Usando la inercia de rotación de un disco ($I = \frac{1}{2}MR^2$) y despreciando la contribución del eje a la inercia de rotación, resolvemos para $\omega_0$ y hallamos

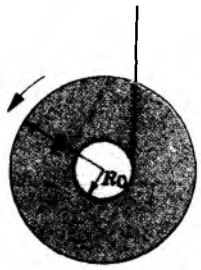



**Figura 21** Problema muestra 7. Un yoyo, mostrado en sección transversal. El cordón, de un espesor que se supone despreciable, está enrollado alrededor de un eje de radio $R_0$.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4gL}{R^2}} = \sqrt{\frac{4(9.8\ \text{m/s}^2)(0.84\ \text{m})}{(0.026\ \text{m})^2}} = 221\ \text{rad/s} = 35\ \text{rev/s}.$$

Esta considerable velocidad de rotación es sólo un límite inferior. Los valores de la velocidad angular de rotación en exceso de 100 rev/s son bastante comunes, especialmente si el yoyo es lanzado hacia abajo de modo que su energía de traslación inicial se convierte en energía de rotación. En el caso de una velocidad angular inicial grande, llegaría a la mano con una velocidad lineal considerable. De hecho, un truco muy conocido consiste en soltar el cordón del dedo en el último momento, permitiendo que la velocidad vertical del yoyo lo lleve a varios metros hacia arriba.

La interacción de las energías cinéticas de traslación, de rotación, y de la potencial gravitatoria es la causante del comportamiento del yoyo y de los muchos trucos que pueden hacerse con él.*

## Rodamiento sin deslizamiento

Consideremos ahora un caso especial de movimiento combinado de traslación y de rotación, por el cual el objeto rueda por una superficie de modo tal que no existe movimiento respectivo entre el objeto y la superficie en el punto instantáneo de contacto. Este caso especial se conoce como *rodamiento sin deslizamiento*. La figura 22 muestra la fotografía de una rueda de bicicleta que está girando. Podemos ver cómo los rayos de la parte inferior, que está instantáneamente en reposo, tienen un enfoque más preciso que los de la parte superior, los cuales se ven borrosos. ¡La parte superior de la rueda se mueve claramente más rápidamente que la inferior! La fricción entre la rueda y la superficie es, claro está, la causante del rodamiento sin deslizamiento, pero en este caso especial la fuerza de fricción no trabaja y no disipa energía, porque no existe movimiento entre la rueda y la superficie en el punto de contacto. Si bien en el problema existe movimiento, la fuerza es de fricción *estática*.

* Véase "The Yo-Yo: A Toy Flywheel", por Wolfgang Burger, *American Scientist*, marzo-abril de 1984, pág. 137.

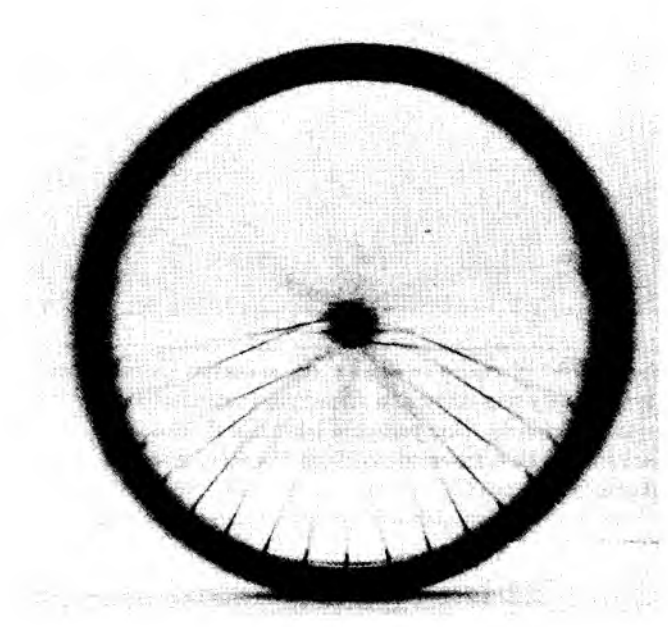
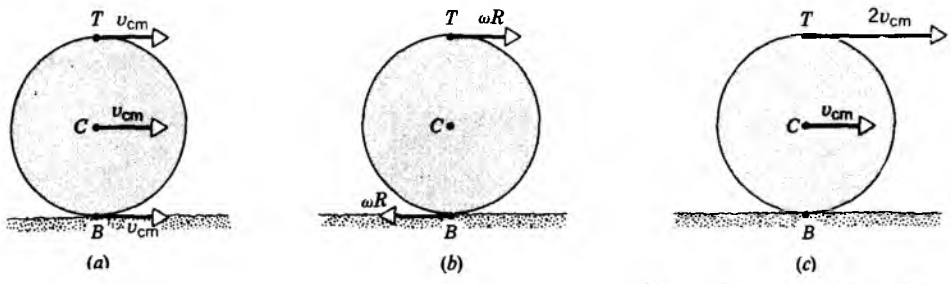


**Figura 22** Fotografía de una rueda de bicicleta girando. Nótese que los rayos de la parte superior de la rueda se ven más borrosos que los de la parte inferior. Ello se debe a que la parte superior tiene una velocidad lineal más grande.

No todos los casos de rodamiento sobre una superficie con fricción consisten en rodamiento sin deslizamiento. Por ejemplo, imaginemos que un automóvil trata de arrancar en una calle cubierta de hielo. Al principio, puede que las ruedas giren sin desplazarse; en este caso, tenemos una rotación pura sin traslación y existe una gran cantidad de trabajo de fricción efectuado, como lo indica el hielo que se funde por el aumento de la energía interna resultante del trabajo de fricción. Si se vierte arena sobre el hielo, las ruedas giran aún más rápidamente, pero el automóvil comienza a avanzar poco a poco. Ahora queda todavía cierto deslizamiento entre la llanta y el hielo, de modo que la fuerza de fricción está todavía efectuando un trabajo, sólo que con cierto movimiento de traslación. Únicamente en el caso en que las llantas cesan de resbalar sobre el hielo, de modo que no haya movimiento en el punto de contacto entre la llanta y el hielo, nos encontramos con una situación de rodamiento sin deslizamiento y sin trabajo de fricción.

La figura 23 muestra una manera de ver al rodamiento sin deslizamiento como una superposición de movimientos de rotación y de traslación. La figura 23*a* muestra el movimiento de traslación, en que el centro de masa $C$ se mueve a velocidad $v_{cm}$, y la figura 23*b* muestra el movimiento de rotación a la velocidad angular $\omega$. Cuando se superponen los dos movimientos, el fondo $B$ de la rueda tendrá una velocidad $v_{cm} - \omega R$; si ésta es cero, de modo que el punto de contacto esté en reposo, entonces debemos tener que $v_{cm} = \omega R$. Al superponer los movimientos de traslación y de rotación resultantes, obtenemos la figu-




UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE
CONSERVACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO

**Figura 23** El rodamiento puede considerarse una superposición de traslación y rotación puras con respecto al centro de masa. (*a*) Movimiento de traslación, en el que todos los puntos se mueven con la misma velocidad lineal. (*b*) Movimiento de rotación, en el que todos los puntos se mueven con la misma velocidad angular alrededor del eje central. (*c*) La superposición de (*a*) y (*b*), donde las velocidades en *T*, C, y *B* han sido obtenidas por la suma vectorial de las componentes de la traslación y de la rotación.

ra 23*c*. Nótese que la velocidad lineal en la parte superior de la rueda *T* es exactamente el doble de la del centro.

Para una rotación pura la velocidad tangencial tiene la magnitud $v = \omega R$. Entonces, para el caso especial del rodamiento sin deslizamiento, los movimientos de rotación y de traslación deben estar relacionados por

$$v_{cm} = \omega R. \tag{23}$$

Este resultado se aplica *únicamente* en el caso del rodamiento sin deslizamiento. En el caso general de los movimientos de traslación y de rotación combinados, la velocidad tangencial $v$ ($= \omega R$) no es igual a $v_{cm}$.

La energía cinética de los movimientos de rotación y de traslación combinados, ecuación 22, ya no tiene dos términos independientes en el caso del rodamiento sin deslizamiento. Podemos ver a la energía cinética como si estuviese completamente determinada, bien por la velocidad de traslación o bien por la velocidad de rotación, y obtenemos las expresiones correspondientes al sustituir la ecuación 23 en la ecuación 22:

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}v_{cm}^2/R^2, \tag{24a}$$

$$K = \tfrac{1}{2}M\omega^2R^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2. \tag{24b}$$

En cualquier caso, es suficiente un solo parámetro ($v_{cm}$ o $\omega$) para determinar la energía cinética.

## Otra visión del rodamiento sin deslizamiento

Existe otra manera instructiva de analizar el rodamiento sin deslizamiento: consideremos que el punto de contacto en *B* sea un eje instantáneo de rotación, como se ilustra en la figura 24. En cada instante existe un nuevo punto de contacto *B* y, por lo tanto, un nuevo eje de rotación, pero instantáneamente el movimiento consiste en una rotación pura en torno a *B*. La energía cinética es

$$K = \tfrac{1}{2}I_B\omega_B^2, \tag{25}$$

donde $I_B$ es la inercia de rotación y $\omega_B$ es la velocidad angular, ambas consideradas en torno al eje de rotación que pasa por *B*. Partiendo del teorema del eje paralelo, $I_B = I_{cm} + MR^2$, donde *R* es la distancia entre *B* y el centro de masa. Sabemos que el centro de masa se mueve a velocidad $v_{cm}$, y entonces el movimiento de rotación en torno a *B* debe dar al centro de masa la velocidad tangencial apropiada: $v_{cm} = R\omega_B$. Ahora podemos expresar la energía cinética, usando la ecuación 25,

$$K = \tfrac{1}{2}(I_{cm} + MR^2)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega_B^2 + \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2. \tag{26}$$

La velocidad angular del centro de masa respecto a *B* debe ser la misma que la velocidad angular de *B* respecto al centro de masa; entonces $\omega_B = \omega$, y la energía cinética se convierte en idéntica a la dada por las ecuaciones 24. En este caso, la derivación se ha hecho suponiendo que las partes de la rotación y la traslación de la energía cinética no son independientes.

**Problema muestra 8** Un cilindro sólido de masa *M* y radio *R* rueda hacia abajo sin deslizamiento por un plano inclinado de

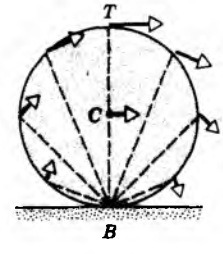



**Figura 24** Puede considerarse que un cuerpo, al rodar, gira alrededor de un eje instantáneo en el punto de contacto *B*. Los vectores muestran las velocidades lineales instantáneas de puntos seleccionados.

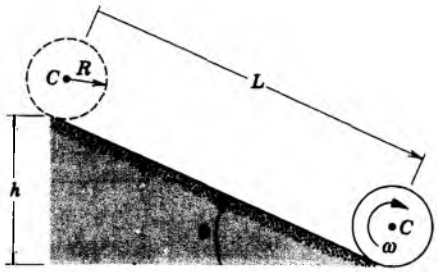



**Figura 25** Problema muestra 8. Un cilindro rueda sin deslizamiento por un plano inclinado.

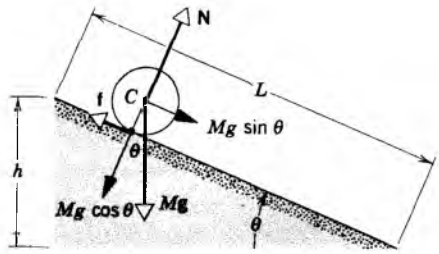



**Figura 26** Las fuerzas que actúan sobre el cilindro rodante del problema muestra 8.

longitud $L$ y altura $h$ (Fig. 25). Halle la velocidad de su centro de masa cuando el cilindro llega abajo.

**Solución** Para resolver este problema usamos la conservación de la energía. El cilindro está inicialmente en reposo. En el fondo del plano inclinado, el cambio de la energía potencial es $\Delta U = -Mgh$. Si el cilindro comienza desde el reposo, su energía cinética cambia en una cantidad dada por la ecuación 24*a*. Para un cilindro que gire en torno a su eje, $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Si no existen otros intercambios de energía, entonces $\Delta E = 0$ da $\Delta K = -\Delta U$, o sea

$$\tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}MR^2)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 = Mgh.$$

Resolviendo para $v_{cm}$, obtenemos

$$v_{cm} = \sqrt{\tfrac{4}{3}gh}.$$

La velocidad del centro de masa debería de haber sido $v_{cm} = \sqrt{2gh}$ si el cilindro se deslizara hacia abajo (sin rodar) por un plano inclinado sin fricción. La velocidad del cilindro al rodar es, por lo tanto, menor que la velocidad del cilindro al deslizarse porque, para el cilindro que rueda, parte de la energía potencial inicial ha sido transformada en energía cinética de rotación, dejando disponible menos energía para la parte de traslación de la energía cinética. Aunque el cilindro llegue rodando al fondo del plano inclinado más tarde que un cilindro idéntico que se deslice habiendo comenzado a bajar al mismo tiempo por el plano inclinado sin fricción, pero por lo demás idéntico, ambos llegan al fondo con la misma cantidad de energía; el cilindro que rueda tiene un movimiento rotatorio a la vez que se traslada, mientras el cilindro que se desliza no tiene ese movimiento rotatorio.

El problema muestra anterior fue resuelto mediante las técnicas de la energía. Podemos también resolver problemas de este tipo usando métodos dinámicos basados en fuerzas y torcas. Al hacerlo así, es conveniente usar la forma de rotación de la segunda ley de Newton, $\Sigma\tau = I\alpha$, alrededor de un eje que pase por el centro de masa. Dejamos acentadas nuevamente las dos condiciones especiales que nos permitan aplicar este resultado cuando el eje de rotación no esté fijo en el espacio: (1) el eje pasa por el centro de masa del objeto que gira, y (2) el eje no cambia su dirección en el espacio al moverse el objeto. Este problema satisface ambas condiciones.

En la figura 26 se muestra el diagrama del cuerpo libre para este problema. $M\mathbf{g}$ es el peso del cilindro que actúa verticalmente hacia abajo a través del centro de masa, **N** es la fuerza normal ejercida por el plano inclinado sobre el cilindro, y **f** es la fuerza de fricción estática que actúa hacia arriba a lo largo del plano inclinado en el punto de contacto.

Usando la segunda ley de Newton para el movimiento de traslación, obtenemos, para un movimiento perpendicular al plano inclinado,

$$N - Mg\cos\theta = 0,$$

y, para un movimiento a lo largo del plano inclinado,

$$Mg\ \text{sen}\ \theta - f = Ma_{cm}.$$

Consideremos ahora el movimiento de rotación. Ni **N** ni $M\mathbf{g}$ tienen torcas en torno al centro de masa $C$ porque sus líneas de acción pasan por $C$, y tienen brazos de momento nulos. La fuerza de la fricción tiene un brazo de momento $R$ en torno a $C$, de modo que $\tau = fR$ y entonces

$$fR = I_{cm}\alpha$$

$$f = I_{cm}\alpha/R.$$

La inercia de rotación en torno al centro de masa es $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Para un rodamiento sin deslizamiento, $v_{cm} = \omega R$; al diferenciar, se deduce que $a_{cm} = \alpha R$, y la ecuación anterior resulta ser

$$f = (\tfrac{1}{2}MR^2)(a_{cm}/R^2) = \tfrac{1}{2}Ma_{cm}.$$

Sustituyendo ésta en la segunda ecuación de traslación, hallamos que

$$a_{cm} = \tfrac{2}{3}g\ \text{sen}\ \theta.$$

Esto es, la aceleración del centro de masa del cilindro al rodar ($\frac{2}{3}\,g$ sen $\theta$) es menor de lo que sería su aceleración si el cilindro se deslizara por el plano inclinado ($g$ sen $\theta$). Este resultado se cumple en cualquier instante, sin importar la posición del cilindro en el plano inclinado.

Puesto que $a_{cm}$ es constante, podemos hallar la velocidad del centro de masa, comenzando desde el reposo. Según la ecuación 20 del capítulo 2, $v^2 = v_0^2 + 2ax$, o sea

$$v_{cm}^2 = 2a_{cm}L,$$

de modo que

$$v_{cm}^2 = 2(\tfrac{2}{3}g \operatorname{sen}\theta)L = \tfrac{4}{3}g\left(\frac{h}{L}\right)L = \tfrac{4}{3}gh$$

o sea

$$v_{cm} = \sqrt{\tfrac{4}{3}gh}.$$

Este resultado es el mismo que el obtenido anteriormente por el método de la energía. El método de la energía es ciertamente más sencillo y más directo. Sin embargo, si estamos interesados en conocer los valores de las fuerzas, tales como **N** y **f**, debemos usar un método dinámico.

Este método determina la fuerza de fricción estática necesaria para el rodamiento:

$$f = Ma_{cm}/2 = (M/2)(\tfrac{2}{3}g \operatorname{sen}\theta) = \tfrac{1}{3}Mg \operatorname{sen}\theta.$$

¿Qué pasaría si la fuerza de fricción estática entre las superficies fuese menor que este valor?

---

**Problema muestra 9** Una esfera, un cilindro, y un aro comienzan desde el reposo y ruedan hacia abajo por el mismo plano inclinado. ¿Cuál de todos estos cuerpos será el primero en llegar al fondo?

**Solución** Resolveremos este problema comparando las aceleraciones de los centros de masa de los tres objetos. El que tenga la aceleración mayor será el primero en llegar al fondo.

A partir de los cálculos anteriores, tenemos la siguiente ecuación general dinámica para el movimiento a lo largo del plano:

$$Mg \operatorname{sen}\theta - f = Ma_{cm},$$

donde

$$f = I_{cm}\alpha/R = I_{cm}a_{cm}/R^2.$$

Sustituyendo a $f$ y resolviendo para $a_{cm}$, hallamos

$$a_{cm} = \frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + I_{cm}/MR^2}. \qquad (27)$$

Podemos evaluar esta expresión para cada uno de los objetos:

$$\text{Esfera:}\quad \frac{I_{cm}}{MR^2} = \tfrac{2}{5}, \quad a_{cm} = \frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + \frac{2}{5}} = \tfrac{5}{7}g \operatorname{sen}\theta = 0.714g \operatorname{sen}\theta,$$

$$\text{Cilindro:}\quad \frac{I_{cm}}{MR^2} = \tfrac{1}{2}, \quad a_{cm} = \frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + \frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}g \operatorname{sen}\theta = 0.667g \operatorname{sen}\theta,$$

$$\text{Aro:}\quad \frac{I_{cm}}{MR^2} = 1, \quad a_{cm} = \frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + 1} = \tfrac{1}{2}g \operatorname{sen}\theta = 0.500g \operatorname{sen}\theta.$$

Claramente la esfera tiene la mayor aceleración y es la primera en llegar al fondo, seguida por el cilindro y luego por el aro. La esfera es el objeto más "compacto" y puede aceptar una rotación con el menor costo en energía cinética, puesto que su inercia de rotación es la más pequeña de las tres. Cada cuerpo tiene una energía cinética igual a $Mgh$ en el fondo del plano inclinado; en la esfera, se halla en mayor cantidad la energía cinética del tipo de traslación y en menor cantidad la energía cinética del tipo de rotación.

Usted debería poder resolver también este problema utilizando los métodos de la energía al hallar cuál de los objetos tiene la $v_{cm}$ más grande en el fondo del plano inclinado.

Obsérvese que nuestro resultado final para la aceleración de cada objeto no depende ni de la masa ni del radio del objeto. Los tres objetos pueden ser de tamaños bastante diferentes, pero la esfera siempre será la primera en llegar al fondo. Además, todas las esferas tienen al rodar la misma aceleración, sin importar cuáles sean sus tamaños o masas respectivos; una canica y una bola de boliche llegarán al fondo al mismo tiempo y con la misma velocidad.

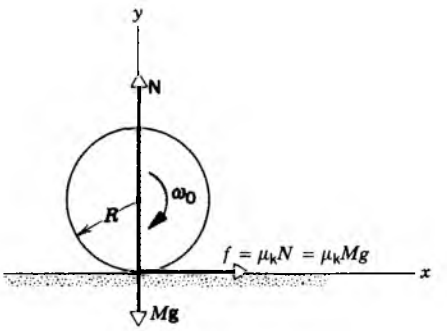



**Figura 27** Problema muestra 10. Un cilindro que inicialmente gira a una velocidad angular $\omega_0$ hace contacto con una superficie horizontal que ejerce una fuerza de fricción **f** sobre el cilindro.

**Problema muestra 10** A un cilindro sólido uniforme de radio $R$ (= 12 cm) y de masa $M$ (= 3.2 kg) se le da una velocidad angular inicial $\omega_0$ (en sentido de las manecillas del reloj) de 15 rev/s y luego se le hace descender a una superficie horizontal plana. El coeficiente de fricción cinética entre la superficie y el cilindro es $\mu_k = 0.21$. Inicialmente, el cilindro se desliza al moverse a lo largo de la superficie, pero después de un tiempo $t$ inicia un rodamiento puro sin deslizamiento. (*a*) ¿Cuál es la velocidad $v_{cm}$ del centro de masa en el tiempo $t$? (*b*) ¿Cuál es el valor de $t$?

**Solución** (*a*) La figura 27 muestra las fuerzas que actúan sobre el cilindro. Puesto que todas las fuerzas son constantes mientras ocurre el deslizamiento, la aceleración $a_{cm}$ del centro de masa en la dirección $x$ es constante. Entonces, para el movimiento de traslación, podemos escribir

$$\sum F_x = Ma_{cm} = M\left(\frac{v_f - v_i}{t - 0}\right).$$

Aquí, $v_i = 0$ y $v_f = v_{cm}$, la velocidad en $t$ cuando se inicia el rodamiento puro. También, la única fuerza horizontal es la de fricción, dada por $\mu_k Mg$, de modo que

$$\mu_k Mg = Mv_{cm}/t. \qquad (28)$$

La aceleración angular $\alpha$ alrededor de un eje que pase por el centro de masa es también constante (¿por qué?), de modo que, para el movimiento de rotación, podemos escribir

$$\sum \tau = I_{cm}\alpha = I_{cm}\left(\frac{\omega_f - \omega_i}{t - 0}\right).$$

Aquí, eligiendo que las rotaciones en sentido contrario a las manecillas sean positivas, $\omega_f = -v_{cm}/R$, la velocidad angular en el tiempo $t$, y $\omega_i = -\omega_0$. Solamente la fuerza $f$ produce una torca en torno al centro de masa; la torca resultante es $\mu_k MgR$, una cantidad positiva. Usando $\Sigma\,\tau = I\alpha$, obtenemos

$$\mu_k MgR = (\tfrac{1}{2}MR^2)\left(\frac{-v_{cm}/R - (-\omega_0)}{t}\right). \qquad (29)$$

Eliminando a $t$ de las ecuaciones 28 y 29 y resolviendo para $v_{cm}$, obtenemos

$$v_{cm} = \tfrac{1}{3}\omega_0 R = \tfrac{1}{3}(15 \text{ rev/s})(2\pi \text{ rad/rev})(0.12 \text{ m}) = 3.8 \text{ m/s}.$$

Nótese que $v_{cm}$ no depende de los valores de $M$, $g$, o $\mu_k$. Sin embargo, ¿qué ocurriría si cualquiera de estas cantidades fuese cero?

(*b*) Al eliminar a $v_{cm}$ entre las ecuaciones 28 y 29, podemos resolver para $t$ y hallar

$$t = \frac{\omega_0 R}{3\mu_k g} = 1.8 \text{ s}.$$

Como ejercicio, debería usted de comprobar estos resultados usando los métodos de la energía. Halle el cambio de energía cinética de rotación y compárelo con el trabajo efectuado por la torca de fricción. Nótese que, debido a que ocurre una rotación *con* deslizamiento entre el tiempo 0 y el tiempo $t$, el trabajo de fricción se efectúa durante ese periodo.

## PREGUNTAS

1. ¿Puede la masa de un objeto considerarse como concentrada en su centro de masa con el fin de calcular su inercia de rotación? Si se puede, explique por qué. Si no, plantee un contraejemplo.
2. ¿Alrededor de qué eje es la inercia de rotación del cuerpo humano mínima? En torno a qué eje que pase por el centro de masa es nuestra inercia de rotación la mayor?
3. ¿En torno a qué eje tendría un cubo una inercia de rotación mínima?
4. Si dos discos circulares del mismo peso y espesor están hechos de metales con densidades diferentes, ¿qué disco, en caso de haber alguno, tendrá la mayor inercia de rotación en torno a su eje de simetría?
5. Va a determinarse la inercia de rotación de un cuerpo de forma considerablemente complicada. La forma hace extremadamente difícil el cálculo matemático de $\int r^2 dm$. Sugiera modos en los que la inercia de rotación en torno a un eje particular podría medirse experimentalmente.
6. En la figura 28 se muestran cinco sólidos en sección transversal. Las secciones transversales tienen igual altura e igual anchura máxima. Los sólidos tienen masas iguales. ¿Cuál de ellos tiene la inercia de rotación más grande en torno a un eje perpendicular que pase por el centro de masa? ¿Cuál tiene la más pequeña?




**Figura 28** Pregunta 6

7. ¿Se cumpliría la ecuación 9 si la placa no fuese "delgada", esto es, si su espesor fuera comparable a (o incluso mayor que) *a* o *b*?
8. La figura 29*a* muestra una regla de un metro, de la que una mitad es de madera y la otra mitad de acero, y cuyo extremo de madera está pivoteado en *O*. Se aplica una fuerza al extremo de acero en *a*. En la figura 29*b*, la regla está pivoteada en el extremo de acero en *O'* y la misma fuerza se aplica en el extremo de madera en *a'*. ¿Se obtiene la misma aceleración angular en cada caso? Si no, ¿en qué caso es mayor la aceleración angular?

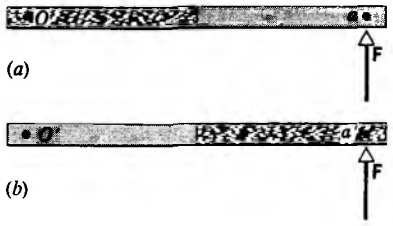



**Figura 29** Pregunta 8.

9. Al talar un árbol, un leñador hace un corte en el lado que da a la dirección en que va a caer el árbol. Explique por qué. ¿Estaría uno a salvo permaneciendo directamente detrás del árbol en el lado contrario a la caída?
10. Usted puede distinguir un huevo crudo de uno cocido haciéndolos girar a ambos sobre una mesa. Explique cómo. También, si usted detiene el giro de un huevo crudo con los dedos y lo suelta rápidamente, continuará girando. ¿Por qué?
11. Comente cada una de las siguientes aseveraciones sobre el deporte del esquí. (*a*) En una carrera de descenso, conviene utilizar esquíes que no giren con facilidad. (*b*) En una carrera de slalom, convienen los esquíes que den vuelta fácilmente. (*c*) Por lo tanto, la inercia de rotación de los esquíes en descenso debería ser más grande que la de los esquíes para slalom. (*d*) Considerando que existe una fricción baja entre los esquíes y la nieve, ¿cómo ejerce el esquiador las torcas para girar a los lados o para detener

un giro? (Véase "The Physics of Ski Turns", por J. I. Shonie y D. L. Mordick, *The Physics Teacher*, diciembre de 1972, pág. 491.)

12. Considérese una vara recta apoyada en su extremo sobre el hielo (sin fricción). ¿Cuál sería la trayectoria de su centro de masa al caer?
13. Para almacenar energía eólica o energía solar, se han sugerido volantes. La cantidad de energía que puede ser almacenada en un volante depende de la densidad y de la resistencia a la tracción del material de que esté hecho el volante y, para un peso dado, es necesario el material recio de la menor densidad disponible. ¿Puede usted explicar esto? (Véase "Flywheels", por R. F. Post y S. F. Post, *Scientific American*, diciembre de 1973, pág. 17.)
14. Explique por qué una rueda que gira sobre una superficie horizontal plana no disminuye su marcha debido a la fricción estática. Suponiendo que no haya deslizamiento, ¿qué obligaría a la rueda a disminuir la marcha?
15. Describa cualitativamente qué le sucede al sistema de la figura 18 si se le imprime al disco una velocidad angular inicial, en sentido de las manecillas del reloj, antes de ser liberado. ¿Qué cambios ocurren, si los hay, en la aceleración lineal del bloque, o en la aceleración angular del disco? Véase el problema muestra 5.
16. Explique por qué la rueda es un invento tan importante.
17. Aparte de su aspecto exterior, ¿por qué los automóviles deportivos tienen ruedas de rayos?
18. Una bala de cañón y una canica ruedan desde el reposo por una pendiente hacia abajo. ¿Cuál de las dos llega primero al fondo?
19. Un envase cilíndrico de hojalata lleno de carne de res y otro envase idéntico lleno de jugo de manzana ruedan por un plano inclinado hacia abajo. Compare sus aceleraciones angular y lineal. Explique la diferencia.
20. Un cilindro sólido de madera rueda hacia abajo por dos planos inclinados diferentes de la misma altura pero con ángulos de inclinación distintos. ¿Llegará al fondo con la misma velocidad en cada caso? ¿Tardará más tiempo en rodar por una pendiente que por la otra? Explique las respuestas.
21. Un cilindro sólido de latón y un cilindro sólido de madera tienen el mismo radio y masa, siendo más largo el cilindro de madera. Usted los suelta juntos en la parte superior de un plano inclinado. ¿Cuál le ganará al otro en llegar al fondo? Supongamos ahora que los cilindros sean de la misma longitud (y radio) y que las masas sean iguales por haber practicado un orificio a lo largo del eje del cilindro de latón. ¿Cuál de los dos cilindros ganará la carrera ahora? Explique las respuestas. Suponga que los cilindros ruedan sin deslizarse.
22. Ruth y Rogelio pasean en bicicleta a lo largo de una trayectoria a la misma velocidad. Las ruedas de la bicicleta de Ruth son de un diámetro un poco mayor que las ruedas de la bicicleta de Rogelio. ¿Cómo se comparan las velocidades angulares de sus ruedas? ¿Qué puede decir sobre las velocidades de las partes superiores de las ruedas?
23. Un tambo cilíndrico, empujado por una tabla desde una posición inicial que se muestra en la figura 30, rueda hacia adelante en el suelo una distancia $L/2$, igual a la mitad de la longitud de la tabla. No existe deslizamiento en ningún punto de contacto. ¿Dónde estará la tabla entonces? ¿Qué distancia habrá recorrido el hombre?

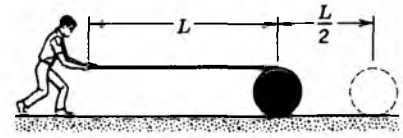



**Figura 30** Pregunta 23

24. Dos discos pesados están unidos por una barra corta de radio mucho menor. El sistema está situado sobre una rampa de modo que los discos cuelgan por los lados como en la figura 31. El sistema rueda rampa abajo sin deslizamiento. (*a*) Cerca del fondo de la rampa los discos tocan a la mesa horizontal y el sistema continúa con una mayor velocidad de traslación. Explique por qué. (*b*) Si este sistema compitiera con un anillo (de cualquier radio) en descenso por la rampa, ¿cuál llegaría al fondo primero?

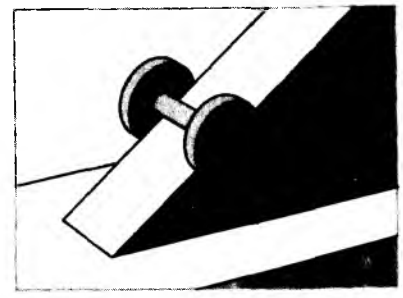


**Figura 31** Pregunta 24.

25. Un yoyo cae hasta el final de su cordón y luego sube por él. ¿Se invierte la dirección de la rotación en el extremo final del cordón? Explique la respuesta.
26. Un yoyo descansa sobre una mesa horizontal y puede rodar libremente (véase la Fig. 32). Si se jala del cordón

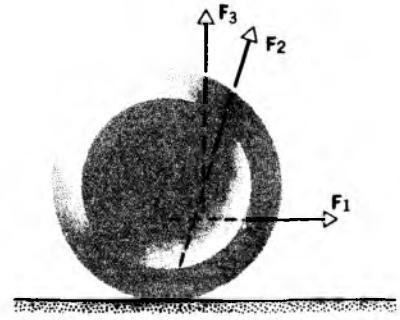



**Figura 32** Pregunta 26.

con una fuerza horizontal, como $\mathbf{F}_1$, ¿en qué sentido rodará el yoyo? ¿Qué sucede cuando se aplica la fuerza $\mathbf{F}_2$ (pasando su línea de acción por el punto de contacto entre el yoyo y la mesa)? Si se jala del cordón verticalmente con la fuerza $\mathbf{F}_3$, ¿qué sucede?

27. Una rueda de reborde sólida consta de dos discos concéntricos unidos, el más grande de los cuales tiene un radio $R$ y el más pequeño un radio $r$. La rueda va a rodar a lo largo de un riel de dos niveles, como se muestra en la figura 33. Sin embargo, al dar un giro, el centro de la rueda se mueve una distancia $2\pi r$, según el disco más pequeño y $2\pi R$ según el disco más grande. Explique la aparente discrepancia.

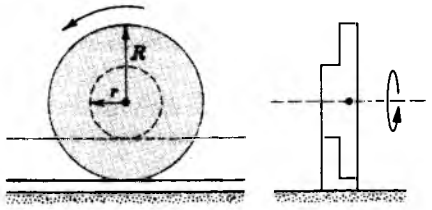



**Figura 33** Pregunta 27.

28. Enuncie las tres leyes de Newton para el movimiento en términos que correspondan a cuerpos en rotación.

## PROBLEMAS

### *Sección 12-2 Energía cinética de la rotación e inercia de la rotación*

1. Las masas y coordenadas de cuatro partículas son las siguientes: 50 g, $x$ = 2.0 cm, $y$ = 2.0 cm; 25 g, $x$ = 0, $y$ = 4.0 cm; 25 g, $x$ = -3.0 cm, $y$ = -3.0 cm; 30 g, $x$ = -2.0 cm, $y$ = 4.0 cm. Calcule la inercia de rotación de este conjunto con respecto a los ejes (*a*) $x$, (*b*) $y$, y (*c*) $z$.
2. Una molécula tiene una inercia de rotación de 14,000 u · pm$^2$ y está girando a una velocidad angular de 4.30 × 10$^{12}$ rad/s. (*a*) Exprese la inercia de rotación en kg · m$^2$. (*b*) Calcule la energía cinética de rotación en eV.
3. La molécula de oxígeno tiene una masa total de 5.30 × 10$^{-26}$ kg y una inercia de rotación de 1.94 × 10$^{-46}$ kg · m$^2$ en torno a un eje que pasa por el centro perpendicular a la línea que une a los átomos. Supóngase que tal molécula en el seno de un gas tiene una velocidad media de 500 m/s y que su energía cinética de rotación es de dos tercios de su energía cinética de traslación. Halle su velocidad angular promedio.

### *Sección 12-3 Inercia de rotación de los cuerpos sólidos*

4. Un satélite de comunicaciones es un cilindro uniforme con 1220 kg de masa, 1.18 m de diámetro, y 1.72 m de longitud. Antes de lanzarlo desde la plataforma del taxi espacial, se le hace girar a razón de 1.46 rev/s en torno al eje del cilindro; véase la figura 34. Calcule la energía cinética de rotación del satélite.
5. Cada una de las tres palas del rotor del helicóptero que se muestra en la figura 35 tiene 5.20 m de longitud y una masa de 240 kg. El rotor gira a 350 rev/min. (*a*) ¿Cuál es la inercia de rotación del conjunto del rotor en torno al eje de rotación? (Cada pala puede considerarse como una varilla.) (*b*) ¿Cuál es la energía cinética de rotación?
6. La figura 36 muestra un bloque uniforme de masa $M$ y aristas de longitudes $a$, $b$, y $c$. Calcule su inercia de rotación alrededor de un eje que pase por una esquina y

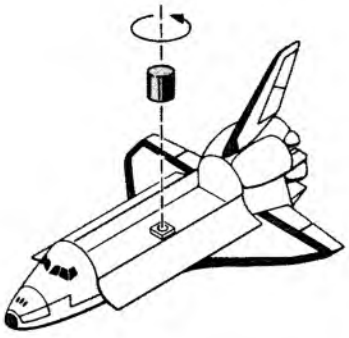


**Figura 34** Problema 4.

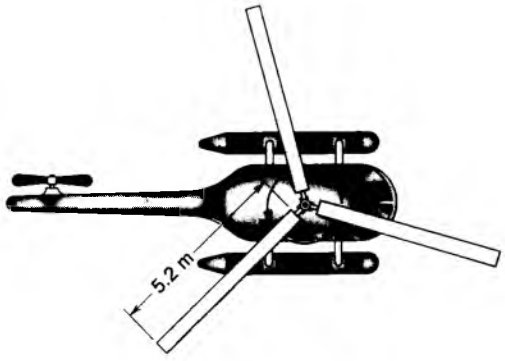



**Figura 35** Problema 5.

sea perpendicular a la cara grande del bloque. (*Sugerencia*: Véase la Fig. 9.)

7. Calcule la inercia de rotación de una regla de un metro, cuya masa es de 0.56 kg, en torno a un eje perpendicular a la regla y que está situado en la marca de 20 cm.
8. Dos partículas, cada una de masa $m$, están unidas entre sí y a un eje de rotación por dos varillas, cada una de longitud

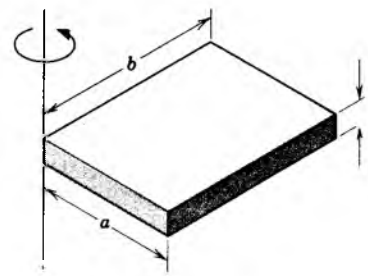



**Figura 36** Problema 6.

$L$ y masa $M$, como se muestra en la figura 37. La combinación gira alrededor del eje de rotación con una velocidad angular $\omega$. Obtenga las expresiones algebraicas para (*a*) la inercia de rotación de la combinación en torno a $O$ y (*b*) la energía cinética de rotación en torno a $O$.

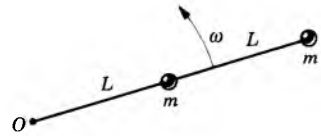



**Figura 37** Problema 8.

**9.** (*a*) Demuestre que la suma de las inercias de rotación de un cuerpo laminar plano en torno a dos ejes perpendiculares cualesquiera en el plano del cuerpo es igual a la inercia de rotación del cuerpo en torno a un eje perpendicular al plano que pase por el punto donde se intersecan. (*b*) Aplique esto a un disco circular para hallar su inercia de rotación en torno a un diámetro como eje.

**10.** En Europa se utilizan en algunos casos camiones de entregas que operan haciendo uso de la energía almacenada en un volante giratorio. Los camiones son cargados haciendo uso de un motor eléctrico para llevar al volante a su velocidad máxima de 624 rad/s. Este volante es un cilindro sólido, homogéneo, con una masa de 512 kg y un radio de 97.6 cm. (*a*) ¿Cuál es la energía cinética del volante después de la carga? (*b*) Si el camión opera con un requerimiento de potencia de 8.13 kW en promedio, ¿durante cuántos minutos puede operar entre cargas?

**11.** (*a*) Demuestre que un cilindro sólido de masa $M$ y radio $R$ es equivalente a un aro delgado de masa $M$ y radio $R/\sqrt{2}$, cuando ambos giran en torno a un eje central. (*b*) La distancia radial desde un eje dado en el que pudiera estar concentrada la masa del cuerpo sin alterarse la inercia de rotación del cuerpo en torno a ese eje se llama *radio de giro*. Sea que $k$ represente al radio de giro y demuestre que

$$k = \sqrt{I/M}.$$

Esto da el radio del "aro equivalente" en el caso general.

**12.** La figura 38 muestra la barra sólida que se consideró en la sección 12-3 (véase también la Fig. 6) dividida en un número arbitrario de $N$ trozos. (*a*) ¿Cuál es la masa $m_i$ de cada trozo? (*b*) Demuestre que la distancia de cada trozo al eje de rotación puede ser escrita así: $r_i = (i - 1)L/N + (\frac{1}{2})L/N = (i - \frac{1}{2})L/N$. (*c*) Utilice la ecuación 5 para evaluar la inercia de rotación de esta barra, y demuestre que se reduce a la ecuación 6. Usted puede necesitar las sumas siguientes:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n, \qquad \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$$

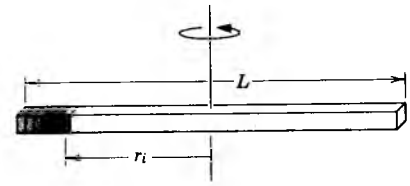



**Figura 38** Problema 12.

**13.** En este problema buscamos calcular la inercia de rotación de un disco de masa $M$ y radio $R$ en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su superficie. Considere un elemento de masa $dm$ en forma de anillo de radio $r$ y anchura $dr$ (véase la Fig. 39). (*a*) ¿Cuál es la masa $dm$ de este elemento, expresada como una fracción de la masa total $M$ del disco? (*b*) ¿Cuál es la inercia de rotación $dI$ de este elemento? (*c*) Integre el resultado de la parte (*b*) para hallar la inercia de rotación de todo el disco.

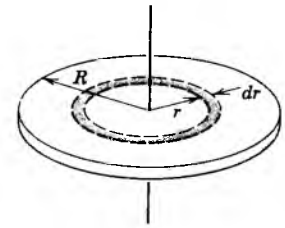



**Figura 39** Problema 13.

**14.** En este problema usamos el resultado del problema anterior de la inercia de rotación de un disco para calcular la inercia de rotación de una esfera sólida uniforme de masa $M$ y radio $R$ en torno a un eje que pase por su centro. Considérese un elemento $dm$ de la esfera en forma de disco de espesor $dz$ a una altura $z$ sobre el centro (véase la Fig. 40). (*a*) Expresada como una fracción de la masa total $M$, ¿cuál es la masa $dm$ del elemento? (*b*) Considerando al elemento como un disco, ¿cuál es su inercia de rotación $dI$? (*c*) Integre el resultado de (*b*) sobre toda la esfera para hallar la inercia de rotación de la esfera.

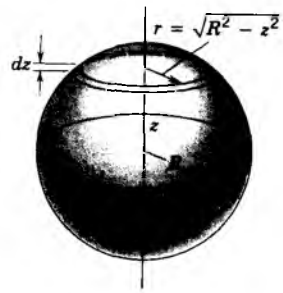



**Figura 40** Problema 14.

### *Sección 12-4 Torca que actúa sobre una partícula*

**15.** La figura 41 muestra las líneas de acción y los puntos de aplicación de dos fuerzas en torno al origen *O*. Imagine que estas fuerzas actúan sobre un cuerpo rígido pivoteado en *O*, estando todos los vectores en el plano de la figura. (*a*) Halle una expresión para la magnitud de la torca resultante sobre el cuerpo. (*b*) Si $r_1 = 1.30$ m, $r_2 = 2.15$ m, $F_1 = 4.20$ N, $F_2 = 4.90$ N, $\theta_1 = 75.0°$, y $\theta_2 = 58.0°$, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la torca resultante?

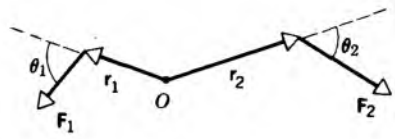



**Figura 41** Problema 15.

**16.** Vuelva a trazar la figura 12 bajo las transformaciones siguientes: (*a*) $\mathbf{F} \rightarrow -\mathbf{F}$, (*b*) $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, y (*c*) $\mathbf{F} \rightarrow -\mathbf{F}$ y $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, mostrando en cada caso la nueva dirección de la torca. Compruebe si hay consistencia con la regla de la mano derecha.

**17.** El objeto que se muestra en la figura 42 está pivoteado en *O*. Sobre él actúan tres fuerzas en las direcciones que se muestran en la figura: $F_A = 10$ N en el punto *A*, a 8.0 m de *O*; $F_B = 16$ N en el punto *B*, a 4.0 m de *O*; y $F_C = 19$ N en el punto *C*, a 3.0 m de *O*. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la torca resultante con respecto a *O*?

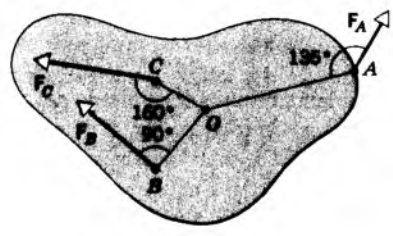



**Figura 42** Problema 17.

**18.** (*a*) Dado que $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ y $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z$, halle la torca $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. (*b*) Demuestre que si $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ están en un plano determinado, entonces $\tau$ no tiene una componente en ese plano.

### *Sección 12-5 Dinámica de la rotación de un cuerpo rígido*

**19.** Un cilindro que tiene una masa de 1.92 kg gira en torno a su eje de simetría. Se le aplican las fuerzas que se muestran en la figura 43: $F_1 = 5.88$ N, $F_2 = 4.13$ N, y $F_3 = 2.12$ N. También, $R_1 = 4.93$ cm y $R_2 = 11.8$ cm. Halle la magnitud y la dirección de la aceleración angular del cilindro.

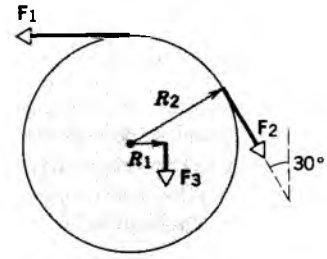



**Figura 43** Problema 19.

**20.** Un cascarón esférico tiene un radio de 1.88 m. La aplicación de una torca de 960 N · m le imparte una aceleración angular igual a 6.23 rad/s² en torno a un eje que pasa por el centro del cascarón. Calcule (*a*) la inercia de rotación del cascarón en torno al eje de rotación y (*b*) la masa del cascarón.

**21.** En el acto de saltar desde un trampolín, un clavadista cambió su velocidad angular de cero a 6.20 rad/s en 220 ms. La inercia de rotación del clavadista es de 12.0 kg · m². (*a*) Halle la aceleración angular durante el salto. (*b*) ¿Qué torca externa actuó sobre el clavadista durante el salto?

**22.** El motor de un automóvil desarrolla 133 hp (= 99.18 kW) cuando gira a 1820 rev/min. ¿Cuál es la torca desarrollada?

**23.** Una rueda de 31.4 kg y un radio de 1.21 m está girando a razón de 283 rev/min. Debe ser detenida en 14.8 s. Halle la potencia promedio requerida. Suponga que la rueda es un aro delgado.

**24.** Si en la figura 18*a* $R = 12.3$ cm, $M = 396$ g, y $m = 48.7$ g, halle la velocidad del bloque después de que descendió 54.0 cm comenzando desde el reposo. Resuelva el problema usando los principios de conservación de la energía.

**25.** Suponga que la Tierra es una esfera de densidad uniforme. (*a*) Calcule su energía cinética de rotación. (*b*) Suponga que esta energía puede ser aprovechada para nuestro uso. ¿Durante cuánto tiempo podría la Tierra suministrar 1.00 kW de potencia a cada uno de los $4.20 \times 10^9$ habitantes de la Tierra?

**26.** La figura 44 muestra una puerta blindada de gran masa en la instalación para probar neutrones del Lawrence Livermore Laboratory; ésta es la puerta de bisagras más pesada del mundo. La puerta tiene una masa de 44,000 kg, una inercia de rotación en torno a la línea de sus bisagras de $8.7 \times 10^4$ kg · m², y una anchura de 2.4 m. ¿Qué fuerza uniforme, aplicada en el borde exterior en ángulo recto

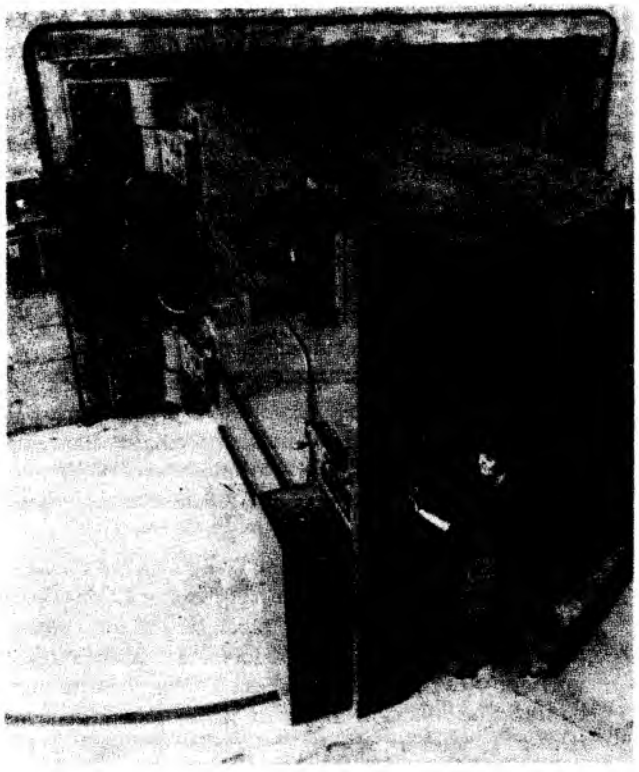


**Figura 44** Problema 26.

con la puerta, puede moverla desde el reposo en un ángulo de 90° en 30 s?

27. Sobre una polea que tiene una inercia de rotación de $1.14 \times 10^{-3}$ kg · m$^2$ y un radio de 9.88 cm actúa una fuerza, aplicada tangencialmente a su borde, que varía en el tiempo según $F = 0.496t + 0.305t^2$, donde $F$ está en newtons y $t$ está en segundos. Si la polea estaba inicialmente en reposo, halle su velocidad angular 3.60 s después.

28. La figura 45 muestra dos bloques, cada uno de masa $m$, suspendidos de los extremos de una barra rígida carente de peso de longitud $L_1 + L_2$, siendo $L_1 = 20.0$ cm y $L_2 = 80.0$ cm. La barra es sostenida en posición horizontal como se muestra en la figura y luego se deja caer. Calcule las aceleraciones lineales de los dos bloques cuando comienzan a moverse.

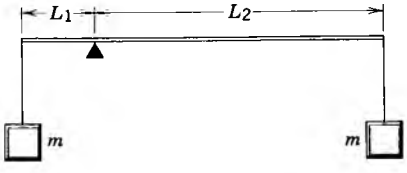



**Figura 45** Problema 28.

29. Dos bloques idénticos, cada uno de masa $M$, están unidos por un cordón que pasa sobre una polea sin fricción de radio $R$ y de inercia de rotación $I$ (Fig. 46). El cordón no se desliza sobre la polea, y no se sabe si existe o no existe fricción entre el plano y el bloque al deslizarse. Cuando este sistema se deja caer, se halla que la polea gira a través de un ángulo $\theta$ en el tiempo $t$ y que la aceleración de los bloques es constante. (*a*) ¿Cuál es la aceleración angular de la polea? (*b*) ¿Cuál es la aceleración de los dos bloques? (*c*) ¿Cuáles son las tensiones en las secciones superior e inferior del cordón? Todas las respuestas deben expresarse en términos de $M$, $I$, $R$, $\theta$, $g$, y $t$.

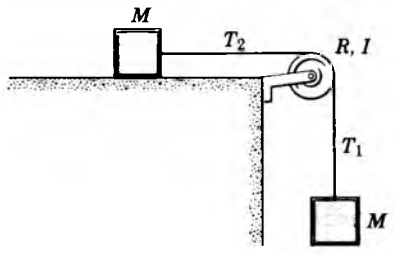



**Figura 46** Problema 29.

30. Una rueda de masa $M$ y radio de giro $k$ (véase el problema 11) gira sobre un eje horizontal fijo que pasa por su cubo. Supóngase que el cubo roce al eje de radio $a$ solamente en el punto más alto, siendo $\mu_k$ el coeficiente de fricción cinética. Se le da a la rueda una velocidad angular inicial $\omega_0$. Suponga una deceleración uniforme y halle (*a*) el tiempo transcurrido y (*b*) el número de revoluciones antes de que la rueda se detenga por completo.

31. En una máquina Atwood un bloque tiene una masa de 512 g y el otro una masa de 463 g. La polea, que está montada en chumaceras horizontales sin fricción, tiene un radio de 4.90 cm. Cuando es liberada a partir del reposo, se observa que el bloque más pesado cae 76.5 cm en 5.11 s. Calcule la inercia de rotación de la polea.

32. Una rueda en forma de disco uniforme de 23.0 cm de radio y 1.40 kg de masa gira a razón de 840 rev/min en rodamientos sin fricción. Para detener a la rueda, se oprime la zapata de un freno contra el borde de la rueda con una fuerza de 130 N, dirigida radialmente. La rueda completa 2.80 revoluciones antes de detenerse. Halle el coeficiente de fricción entre la zapata del freno y la periferia de la rueda.

33. Una vara de 1.27 m de longitud se mantiene vertical con un extremo sobre el piso y luego se deja caer. Halle la velocidad del otro extremo cuando alcanza el suelo, suponiendo que el extremo del suelo no se deslice.

34. Una esfera hueca, uniforme, gira en torno a un eje vertical en chumaceras sin fricción (Fig. 47). Un cordón delgado pasa alrededor del ecuador de la esfera, sobre una polea, y está unido a un objeto pequeño que, por otra parte, está libre de caer bajo la influencia de la gravedad. ¿Cuál es la velocidad del objeto después de que ha caído una distancia $h$ desde el reposo?

35. Una barra uniforme de acero de 1.20 m de longitud y 6.40 kg de masa tiene unida en cada extremo una pequeña bola de 1.06 kg de masa. La barra está obligada a girar en un plano horizontal con respecto a un eje vertical que pasa

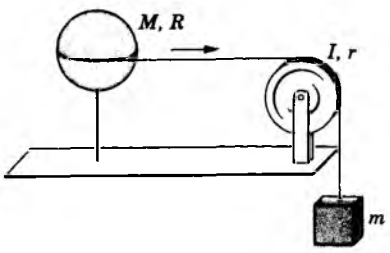



**Figura 47** Problema 34.

por su punto medio. En cierto momento se observa que está girando a una velocidad angular de 39.0 rev/s. Debido a la fricción del eje, llega al reposo 32.0 s más tarde. Calcule, suponiendo una torca por fricción constante, (*a*) la aceleración angular, (*b*) la torca retardante ejercida por la fricción del eje, (*c*) la energía disipada por la fricción del eje, y (*d*) el número de revoluciones ejecutadas durante los 32.0 s. (*e*) Supóngase ahora que se sabe que la torca por fricción no es constante. ¿Cuál, si hay alguna, de las cantidades (*a*), (*b*), (*c*), o (*d*) puede calcularse sin requerir ninguna información adicional? Si hay alguna cantidad, dé su valor.

**36.** Un cuerpo rígido está hecho de tres varillas idénticas aseguradas entre sí en forma de letra H (Fig. 48). El cuerpo está libre de girar en torno a un eje horizontal que pasa por una de las piernas de la H. Se permite que el cuerpo caiga partiendo del reposo desde una posición en que el plano de la H es horizontal. ¿Cuál es la velocidad angular del cuerpo cuando el plano de la H es vertical?

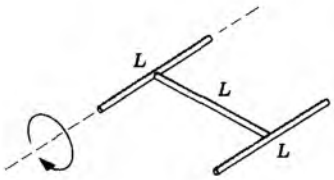



**Figura 48** Problema 36.

**37.** La pala del rotor de un helicóptero tiene una longitud de 7.80 m y una masa de 110 kg. (*a*) ¿Qué fuerza se ejerce sobre el perno que une a la pala con el eje del rotor cuando éste está girando a razón de 320 rev/min? (*Sugerencia*: Para este cálculo puede considerarse que la pala es una masa puntual situada en el centro de masa. ¿Por qué?) (*b*) Calcule la torca que debe ser aplicada al rotor para llevarlo a una velocidad plena desde el reposo en 6.70 s. Ignore la resistencia del aire. (Para este cálculo no puede considerarse que la pala sea una masa puntual. ¿Por qué no? Suponga la distribución de una barra uniforme.)

**38.** Una chimenea alta se rompe cerca de su base y cae. Exprese (*a*) la aceleración lineal radial y (*b*) la aceleración lineal tangencial de la parte superior de la chimenea en función del ángulo $\theta$ formado por la chimenea con la vertical. (*c*) ¿Puede exceder de $g$ la aceleración lineal resultante? (*d*) La chimenea se rompe durante la caída. Explique cómo puede suceder esto. (Véase "More on the Falling Chimney", por Albert A. Bartlett, *The Physics Teacher*, septiembre de 1976, pág 351).

**39.** La longitud del día aumenta alrededor de 1 ms/siglo. Esto se debe primordialmente a las fuerzas de fricción generadas por el movimiento del agua en los mares de poca profundidad del mundo en respuesta a las fuerzas de la marea ejercidas por el Sol y la Luna. (*a*) ¿En qué cantidad está perdiendo energía cinética de rotación la Tierra? (*b*) ¿Cuál es la aceleración angular? (*c*) ¿Qué fuerza tangencial, en las latitudes 60° N y 60° S, ejercen los mares sobre el lecho marino cercano a las costas?

**40.** Un disco uniforme de radio $R$ y masa $M$ gira a una velocidad angular $\omega_0$. Está colocado sobre una superficie horizontal plana; el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la superficie es $\mu_k$. (*a*) Halle la torca por fricción sobre el disco. (*b*) ¿Cuánto tiempo le tomará al disco llegar al reposo?

**41.** Un automóvil está equipado con un volante que conserva la energía el cual, en operación, está engranado a la flecha motriz de modo tal que gira a razón de 237 rev/s cuando el automóvil viaja a 86.5 km/h. La masa total del automóvil es de 822 kg, el volante pesa 194 N, y es un disco uniforme de 1.08 m de diámetro. El automóvil desciende por una pendiente de 5.00°, de 1500 m de longitud, partiendo del reposo, con el volante embragado y sin que el motor proporcione potencia alguna. Despreciando la fricción y la inercia de rotación de las ruedas, halle (*a*) la velocidad del automóvil en el pie de la pendiente, (*b*) la aceleración angular del volante en el pie de la pendiente, y (*c*) la potencia absorbida por la rotación del volante en el pie de la pendiente.

### *Sección 12-6 Movimientos de rotación y de traslación combinados*

**42.** Una esfera sólida de 4.72 cm de radio rueda hacia arriba por un plano inclinado a un ángulo de 34.0°. En el fondo del plano inclinado el centro de masa de la esfera tiene una velocidad de traslación de 5.18 m/s. (*a*) ¿Qué distancia recorrerá la esfera por el plano hacia arriba? (*b*) ¿Cuánto tiempo le toma regresar al pie del plano? (*c*) ¿Cuántas rotaciones completa la esfera durante el viaje completo?

**43.** Un aro que rueda por un plano inclinado con un ángulo de inclinación $\theta$ marcha al parejo con un bloque que se desliza por el mismo plano. Demuestre que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano está dado por $\mu_k = \frac{1}{2} \tan \theta$.

**44.** Un aro de 3.16 m de radio tiene una masa de 137 kg. Rueda a lo largo de un piso horizontal de modo que su centro de masa tiene una velocidad de 0.153 m/s. ¿Cuánto trabajo debe realizarse sobre el aro para detenerlo?

**45.** Un automóvil que viaja a 78.3 km/h tiene llantas de 77.0 cm de diámetro. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular de las llantas con respecto al eje? (*b*) Si el automóvil se detiene uniformemente en 28.6 vueltas de las llantas (sin patinar), ¿cuál será la aceleración angular de las ruedas? (*c*) ¿Cuánto avanza el automóvil durante este periodo de frenado?

**46.** Un automóvil de 1040 kg tiene cuatro ruedas de 11.3 kg. ¿Qué fracción de la energía cinética total del automóvil se debe a la rotación de las ruedas en torno a sus ejes? Suponga que las ruedas tienen la misma inercia de rotación que los discos de la misma masa y tamaño. Explique por qué no se necesita conocer el radio de las ruedas.

**47.** Un yoyo (véase el problema 7) tiene una inercia de rotación de 950 g · cm² y una masa de 120 g. El radio de su eje tiene 3.20 mm y su cordón tiene 134 cm de longitud. El yoyo rueda desde el reposo hacia abajo hasta el extremo del cordón. (*a*) ¿Cuál es su aceleración? (*b*) ¿Cuánto tiempo le toma llegar al final del cordón? (*c*) Si el yoyo se queda estancado en el extremo del cordón en un movimiento giratorio puro, ¿cuál es su velocidad angular, en rev/s? (*d*) Repita (*c*), pero esta vez suponga que el yoyo se lanza hacia abajo con una velocidad inicial de 1.30 m/s.

**48.** Una esfera uniforme rueda por un plano inclinado. (*a*) ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación si la aceleración lineal del centro de la esfera ha de ser de 0.133g? (*b*) Para este ángulo, ¿cuál sería la aceleración de un bloque sin fricción que se deslizara por el plano inclinado?

**49.** Una esfera homogénea arranca desde el reposo en el extremo superior de la pista que aparece en la figura 49 y rueda sin deslizarse hasta que se sale por el extremo de la derecha. Si $H = 60$ m y $h = 20$ m y la pista es horizontal en el extremo de la derecha, determine la distancia a la derecha del punto $A$ a la que la bola golpea la línea horizontal de base.

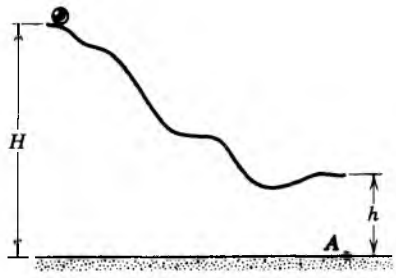



**Figura 49** Problema 49.

**50.** Una canica sólida pequeña de masa $m$ y radio $r$ rueda sin deslizamiento a lo largo de la pista en rizo que se muestra en la figura 50, habiendo sido liberada desde el reposo en algún punto de la sección recta de la pista. (*a*) ¿Desde qué altura mínima desde el fondo de la pista deberá soltarse la canica con el fin de que se quede en la pista en la parte superior del rizo? (El radio del rizo es $R$; suponga que $R \gg r$). (*b*) Si la canica se suelta desde una altura de $6R$ medida desde el fondo de la pista, ¿cuál es la componente horizontal de la fuerza que actúa sobre ella en el punto $Q$?

**51.** Un cilindro sólido de longitud $L$ y radio $R$ tiene un peso $W$. Alrededor del cilindro están enrolladas dos cuerdas, cada una de ellas cerca de cada extremo, y los extremos de las cuerdas están unidos a ganchos en el techo. El cilindro se mantiene horizontalmente con las dos cuerdas exactamente verticales y luego se deja caer (Fig. 51). Halle (*a*) la tensión en cada cuerda cuando se desenrollan y (*b*) la aceleración lineal del cilindro cuando cae.

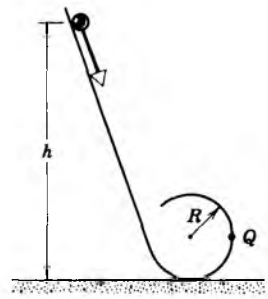



**Figura 50** Problema 50.

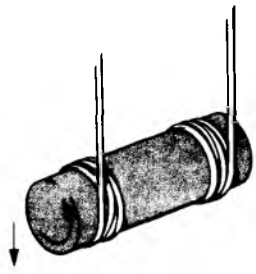


**Figura 51** Problema 51.

**52.** Una longitud $L$ de cinta flexible está enrollada firmemente. Luego se deja que se desenrolle mientras rueda por una pendiente inclinada que forma un ángulo $\theta$ con la horizontal, estando clavado el extremo superior de la cinta (Fig. 52). Demuestre que la cinta se desenrolla completamente en un tiempo $T = \sqrt{3L/g \operatorname{sen} \theta}$.

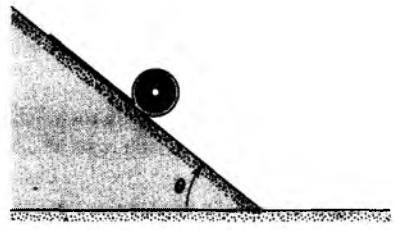



**Figura 52** Problema 52.

**53.** Demuestre que un cilindro se deslizará por un plano inclinado de ángulo de inclinación $\theta$ si el coeficiente de fricción estática entre el plano y el cilindro es menor de $\frac{1}{3} \tan \theta$.

**54.** Un cuerpo rueda horizontalmente sin deslizamiento con una velocidad $v$. Luego rueda hacia arriba en un montículo hasta una altura máxima $h$. Si $h = 3v^2/4g$, ¿qué cuerpo puede ser?

**55.** Un disco uniforme, de masa $M$ y radio $R$, está sobre un lado inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal carente de fricción. Luego se aplica una fuerza constante **F** tangencialmente en su perímetro por medio de un cordón enrollado alrededor de su borde. Describa el

movimiento (de rotación o de traslación) posterior del disco.

**56.** Un aparato para probar la resistencia al patinazo de llantas de automóvil está construido como se muestra en la figura 53. Inicialmente la llanta no tiene movimiento y está sujeta a un bastidor ligero que pivotea libremente en los puntos *A* y *B*. La inercia de rotación de la rueda en torno a su eje es de 0.750 kg · m², su masa es de 15.0 kg, y su radio es de 30.0 cm. La llanta está situada sobre la superficie de una banda transportadora que se mueve a una velocidad superficial de 12.0 m/s, de modo que *AB* es horizontal. (*a*) Si el coeficiente de fricción cinética entre la llanta y la banda transportadora es de 0.600, ¿qué tiempo necesitará la rueda para alcanzar su velocidad angular final? (*b*) ¿Cuál será la longitud de la señal que deje el patinazo sobre la superficie del transportador?

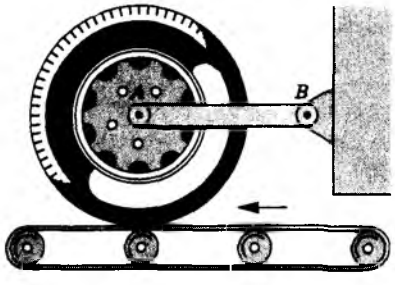



**Figura 53** Problema 56.

**57.** Un cilindro sólido de 10.4 cm de radio y 11.8 kg de masa arranca desde el reposo y rueda sin deslizarse una distancia de 6.12 m por el techo de una casa, el cual tiene una inclinación de 27.0°. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular del cilindro en torno a su centro al abandonar el techo de la casa? (*b*) La pared exterior de la casa tiene 5.16 m de altura. ¿A qué distancia de la pared golpea el cilindro el nivel del suelo? Véase la figura 54.

**58.** Un cilindro sólido de 23.4 kg de masa y 7.60 cm de radio tiene una cinta delgada enrollada a su alrededor. La cinta pasa sobre una polea ligera sin fricción hasta un objeto de 4.48 kg de masa, que cuelga verticalmente (véase la Fig. 55). El plano sobre el que se mueve el cilindro está inclinado a 28.3° sobre la horizontal. Halle (*a*) la aceleración lineal del cilindro al rodar por el plano inclinado y (*b*) la tensión en la cinta, suponiendo que no hay deslizamiento.

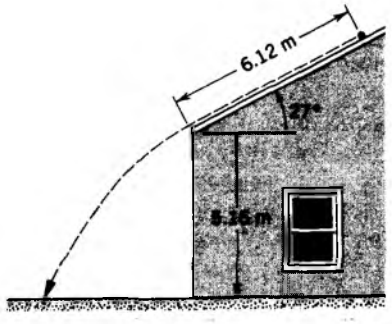



**Figura 54** Problema 57.

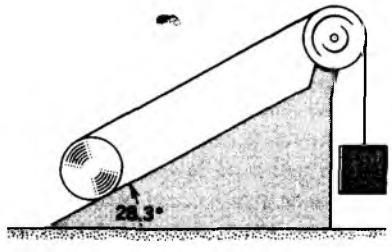



**Figura 55** Problema 58.

**59.** Una estudiante arroja una regla de longitud *L* hacia arriba en el aire. En el momento en que la regla abandona su mano la velocidad del extremo más cercano de la regla es cero. Ésta completa *N* vueltas hasta que es atrapada por la estudiante en el punto de liberación inicial. Demuestre que la altura *h* a la que se elevó el centro de masa es $h = \pi NL/4$.

**60.** Una bola de billar es golpeada por un taco como se aprecia en la figura 56. La línea de acción del impulso aplicado es horizontal y pasa por el centro de la bola. La velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la bola, su radio *R*, su masa *M*, y el coeficiente de fricción $\mu_k$ entre la bola y la mesa son todos conocidos. ¿Qué tan lejos se moverá la bola antes de que cese su deslizamiento sobre la mesa?




**Figura 56** Problema 60.

# CAPÍTULO 13

# ÍMPETU ANGULAR

*En el capítulo 12 hemos estudiado la dinámica del movimiento de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo en un marco de referencia inercial. Hemos visto que la relación escalar* $\Sigma \tau = I\alpha$, *en la que sólo se consideraban las componentes de la torca externa a lo largo del eje de rotación, era suficiente para resolver los problemas dinámicos en este caso especial.*

*En este capítulo continuamos este análisis y lo extendemos a situaciones en las que el eje de rotación puede* no *estar fijo en un marco de referencia inercial. Para resolver estos problemas dinámicos desarrollamos y empleamos una relación vectorial para el movimiento de rotación, que es análoga a la forma vectorial de la segunda ley de Newton,* $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$. *Presentamos también el* ímpetu angular *y demostramos su importancia como una propiedad dinámica de las rotaciones.*

*Finalmente, demostramos que, en sistemas en los que no actúa una torca externa neta, puede aplicarse la importante ley de la* conservación del ímpetu angular.

## 13-1 ÍMPETU ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

Hemos visto que el *ímpetu lineal* es útil en los casos que interviene el movimiento de traslación de partículas aisladas o de sistemas de partículas, incluyendo a los cuerpos rígidos. Por ejemplo, el ímpetu lineal se conserva en las colisiones. Para una partícula aislada el ímpetu lineal es $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (Ec. 19 del capítulo 9); para un sistema de partículas es $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm}$ (Ec. 25 del capítulo 9), en donde $M$ es la masa total del sistema y $\mathbf{v}_{cm}$ es la velocidad del centro de masa. En el movimiento de rotación, el análogo del ímpetu lineal se llama *ímpetu angular*, que definimos a continuación para el caso especial de una partícula aislada. Posteriormente, ampliamos la definición para incluir sistemas de partículas, y demostramos que el ímpetu angular es un concepto tan útil en el movimiento de rotación como lo es el ímpetu lineal en el movimiento de traslación.

Consideremos una partícula de masa $m$ e ímpetu lineal $\mathbf{p}$ en una posición $\mathbf{r}$ respecto al origen $O$ de un marco de referencia inercial; para mayor conveniencia (véase la Fig. 1) hemos elegido que el plano $xy$ sea el plano definido por los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{r}$. Definimos que el *ímpetu angular* $\mathbf{l}$ de la partícula *respecto al origen* $O$ sea

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \qquad (1)$$

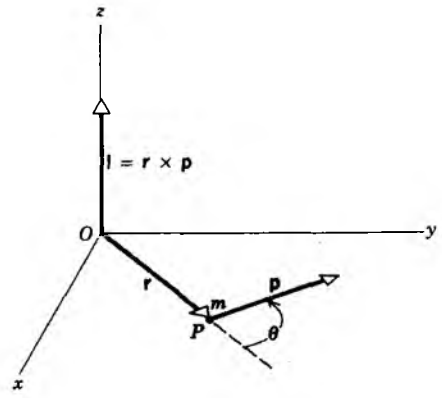



**Figura 1** Una partícula de masa $m$, localizada en el punto $P$ por el vector de posición $\mathbf{r}$, tiene un ímpetu lineal $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. (Para mayor simplificación se supone que tanto $\mathbf{r}$ como $\mathbf{p}$ están en el plano $xy$.) Respecto al origen $O$, la partícula tiene un ímpetu angular de $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, paralelo al eje $z$ en este caso.

Nótese que debemos especificar el origen $O$ con objeto de definir al vector de posición $\mathbf{r}$ en la definición del ímpetu angular.

El ímpetu angular es un vector. Su magnitud está dada por

$$l = rp \text{ sen } \theta. \tag{2}$$

donde $\theta$ es el ángulo más pequeño entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ y su dirección es normal al plano formado por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$. El sentido está dado por la regla de la mano derecha: hágase girar a $\mathbf{r}$ sobre $\mathbf{p}$, en el ángulo más pequeño entre ellos, con los dedos de la mano derecha doblados; el pulgar derecho extendido apunta entonces en la dirección de $\mathbf{l}$ (paralela al eje z en la Fig. 1).

También podemos escribir la magnitud de $\mathbf{l}$ ya sea como

$$l = (r \text{ sen } \theta)\, p = pr_{\perp}, \tag{3a}$$

o como

$$l = r(p \text{ sen } \theta) = rp_{\perp}, \tag{3b}$$

donde $r_{\perp}$ (= $r$ sen $\theta$) es la componente de $\mathbf{r}$ en ángulo recto con la línea de acción de $\mathbf{p}$, y $p_{\perp}$ (= $p$ sen $\theta$) es la componente de $\mathbf{p}$ en ángulo recto con $\mathbf{r}$. La ecuación 3*b* muestra que sólo la componente de $\mathbf{p}$ perpendicular a $\mathbf{r}$ contribuye al ímpetu angular. Cuando el ángulo $\theta$ entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ es 0° ó 180°, no existe una componente perpendicular ($p_{\perp} = p$ sen $\theta = 0$); entonces la línea de acción de $\mathbf{p}$ pasa por el origen, y $r_{\perp}$ es también cero. En este caso ambas ecuaciones 3*a* y 3*b* muestran que el ímpetu angular $l$ es cero.

Derivaremos ahora una relación importante entre la torca y el ímpetu angular para una sola partícula. Primero diferenciamos a la ecuación 1 y obtenemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}). \tag{4}$$

La derivada de un producto vectorial se considera de la misma manera que la derivada de un producto ordinario, excepto que no debemos cambiar el orden de los términos. Tenemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Pero $d\mathbf{r}/dt$ es la velocidad instantánea $\mathbf{v}$ de la partícula, y $\mathbf{p}$ es igual a $m\mathbf{v}$. Haciendo estas sustituciones en el primer producto de la derecha, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = (\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{5}$$

Ahora $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$, porque el producto vectorial de dos vectores paralelos es cero. Reemplazando a $d\mathbf{p}/dt$ en el segundo producto por la fuerza neta $\Sigma\,\mathbf{F}$ que actúa sobre la partícula, tenemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \sum \mathbf{F}.$$

El lado derecho de esta ecuación es precisamente la torca neta $\Sigma\,\tau$. Por lo tanto, obtenemos

$$\sum \tau = \frac{d\mathbf{l}}{dt}, \tag{6}$$

que afirma que *la torca neta que actúa sobre una partícula es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo de ímpetu angular*. En esta ecuación, tanto la torca $\tau$ como el ímpetu angular $\mathbf{l}$ deben definirse con respecto al mismo origen. La ecuación 6 es el análogo de rotación de la ecuación 20 del capítulo 9, $\Sigma\,\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, que establece que la *fuerza* neta que actúa sobre una partícula es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo de su ímpetu *lineal*.

La ecuación 6, como todas las ecuaciones vectoriales, es equivalente a tres ecuaciones escalares, a saber,

$$\sum \tau_x = \frac{dl_x}{dt}, \quad \sum \tau_y = \frac{dl_y}{dt}, \quad \sum \tau_z = \frac{dl_z}{dt}. \tag{7}$$

Por lo tanto, la componente $x$ de la torca externa neta está dada por el cambio con el tiempo de la componente $x$ del ímpetu angular. Se obtienen resultados similares para las direcciones $y$ y $z$.

---

**Problema muestra 1** Una partícula de masa $m$ se libera desde el reposo en el punto $P$ de la figura 2, cayendo paralela al eje $y$ (vertical). (*a*) Halle la torca que actúa sobre $m$ en cualquier tiempo $t$, con respecto al origen $O$. (*b*) Halle el ímpetu angular de $m$ en cualquier tiempo $t$, con respecto a este mismo origen. (*c*) Demuestre que la relación $\Sigma\,\tau = d\mathbf{l}/dt$ (Ec. 6) da un resultado correcto cuando se aplica a este conocido problema.

**Solución** (*a*) La torca está dada por $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, y su magnitud es

$$\tau = rF \text{ sen } \theta.$$

En este ejemplo $r$ sen $\theta = b$ y $F = mg$, de modo que

$$\tau = mgb = \text{una constante.}$$

Nótese que la torca es simplemente el producto de la fuerza $mg$ por el brazo de momento $b$. La regla de la mano derecha muestra que $\tau$ está dirigida perpendicularmente en la figura.

(*b*) El ímpetu angular está dado por la ecuación 1, $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Su magnitud es, de la ecuación 2,

$$l = rp \text{ sen } \theta.$$

En este ejemplo $r$ sen $\theta = b$ y $p = mv = m(gt)$, de modo que

$$l = mgbt.$$

La regla de la mano derecha muestra que $\mathbf{l}$ está dirigido perpendicularmente en la figura, lo que significa que $\mathbf{l}$ y $\tau$ son vectores

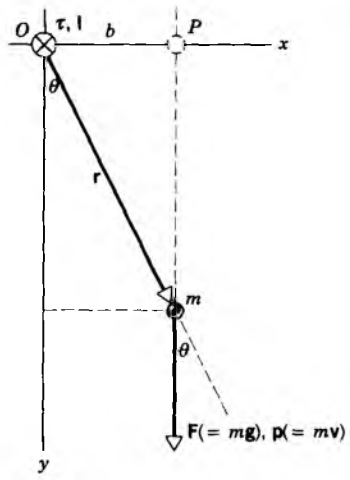



**Figura 2** Problema muestra 1. Una partícula de masa $m$ cae verticalmente desde el punto $P$. La torca $\tau$ y el ímpetu angular $\mathbf{l}$ con respecto al origen $O$ están dirigidos perpendicularmente en la figura, como se indica con el símbolo ⊗ en el punto $O$.

paralelos. El vector $\mathbf{l}$ cambia con el tiempo de magnitud solamente, su dirección permanece siempre la misma en este caso.

(*c*) Escribiendo la ecuación 6 en términos de magnitudes, tenemos

$$\tau = \frac{dl}{dt}.$$

Sustituyendo la expresión para $\tau$ y $l$ de (*a*) y (*b*) tenemos que

$$mgb = \frac{d}{dt}(mgbt) = mgb,$$

la cual es una identidad. Entonces la relación $\tau = d\mathbf{l}/dt$ rinde resultados correctos en este caso. En efecto, si cancelamos a la constante $b$ de los primeros dos términos de arriba y sustituimos a $gt$ por la cantidad equivalente $v$, tenemos

$$mg = \frac{d}{dt}(mv).$$

Puesto que $mg = F$ y $mv = p$, éste es el conocido resultado $F = dp/dt$. Entonces, como lo hemos indicado anteriormente, las relaciones como $\tau = d\mathbf{l}/dt$, aunque a menudo se usan en forma generalizada, no son postulados básicos nuevos de la mecánica clásica sino más bien la reformulación de las leyes de Newton en el caso del movimiento de rotación.

Nótese que los valores de $\tau$ y de $l$ dependen de nuestra elección del origen, esto es, de $b$. En particular, si $b = 0$, entonces $r = 0$ y $l = 0$.

## 13-2 SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Hasta aquí hemos estudiado solamente partículas aisladas. Para calcular el ímpetu angular total $\mathbf{L}$ de un *sistema de partículas* con respecto a un punto dado, debemos sumar vectorialmente los ímpetus angulares de todas las partículas individuales en torno a este punto. Para un sistema que contenga $N$ partículas, tenemos, entonces,

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \cdots + \mathbf{l}_N = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{l}_n$$

donde la suma (vectorial) se ha tomado sobre todas las partículas del sistema.

A medida que el tiempo pasa, el ímpetu angular total $\mathbf{L}$ del sistema con respecto a un punto de referencia fijo (el cual elegimos, como en nuestra definición básica de $\mathbf{l}$ en la ecuación 1, que sea el origen de un *marco* de referencia inercial) puede cambiar. Esto es,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{l}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{l}_2}{dt} + \cdots = \sum_{n=1}^{N} \frac{d\mathbf{l}_n}{dt}.$$

Para cada partícula, $d\mathbf{l}_n/dt = \tau_n$, y haciendo esta sustitución tenemos que

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \tau_n.$$

Es decir, la razón de cambio con respecto al tiempo del ímpetu angular *total* de un sistema de partículas, es igual a la *torca neta* que actúa sobre el sistema.

Entre las torcas que actúen sobre el sistema estarán (1) las torcas ejercidas sobre las partículas del sistema por fuerzas internas entre las partículas y (2) las torcas ejercidas sobre las partículas del sistema por fuerzas externas. Si la tercera ley de Newton se cumple en su llamada forma fuerte, esto es, si las fuerzas entre dos partículas cualesquiera no sólo son iguales y opuestas sino que también están dirigidas a lo largo de la línea que une a las dos partículas, entonces la torca interna total es cero porque la torca resultante de cada par de fuerzas acción-reacción internas es cero.

De aquí que la primera fuente, la torca a partir de las fuerzas internas, no contribuya al cambio en $\mathbf{L}$. Sólo permanece la segunda fuente (la torca a partir de las fuerzas externas), y podemos escribir

$$\sum \tau_{ext} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \qquad (8)$$

donde $\Sigma\tau_{ext}$ es la suma de las torcas *externas* que actúan sobre el sistema. Así, decimos que *la torca externa neta que actúa sobre un sistema de partículas es igual a la razón de cambio en el tiempo del ímpetu angular total del sistema.* La torca y el ímpetu angular deben calcularse con respecto al mismo origen de un marco de referencia inercial. En situaciones en las que no es probable que surja una confusión, evitamos el subíndice de $\tau_{ext}$ para mayor conveniencia.

La ecuación 8 es la generalización de la ecuación 6 a muchas partículas. Se cumple tanto si las partículas que forman el sistema están en movimiento unas respecto a las otras o si tienen relaciones espaciales fijas, como en un cuerpo rígido.

La ecuación 8 es la analogía de rotación de la ecuación 27 del capítulo 9, $\Sigma\mathbf{F}_{ext} = d\mathbf{P}/dt$, que nos dice que para un

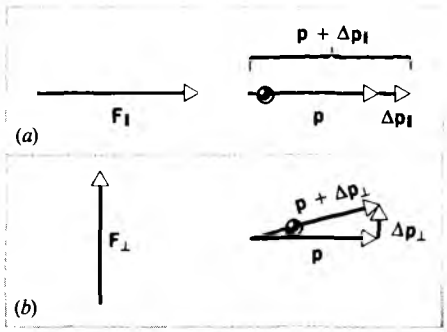



**Figura 3** (*a*) Cuando una componente de una fuerza $\mathbf{F}_{\parallel}$ actúa paralelamente al ímpetu lineal $\mathbf{p}$ de una partícula, el ímpetu lineal cambia en $\Delta\mathbf{p}_{\parallel}$, el cual es paralelo a $\mathbf{p}$. (*b*) Cuando una componente de una fuerza $\mathbf{F}_{\perp}$ actúa perpendicularmente al ímpetu lineal $\mathbf{p}$ de una partícula, el ímpetu lineal cambia en $\Delta\mathbf{p}_{\perp}$, el cual es perpendicular a $\mathbf{p}$. La partícula se mueve ahora en la dirección de la suma vectorial $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}_{\perp}$.

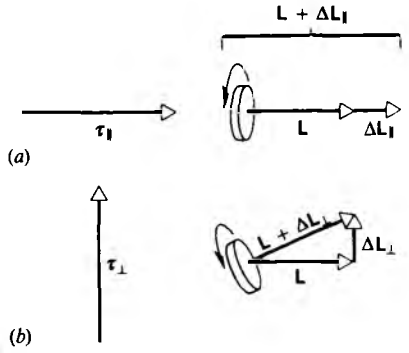



**Figura 4** (*a*) Cuando la componente $\tau_{\parallel}$ de una torca actúa paralelamente al ímpetu angular $\mathbf{L}$ de un sistema, el ímpetu angular cambia en $\Delta\mathbf{L}_{\parallel}$, el cual es paralelo a $\mathbf{L}$. (*b*) Cuando una componente $\tau_{\perp}$ de una torca actúa perpendicularmente al ímpetu angular $\mathbf{L}$ de un sistema, el ímpetu angular cambia en $\Delta\mathbf{L}_{\perp}$, el cual es perpendicular a $\mathbf{L}$. El eje de rotación apunta ahora en la dirección que corresponde a la suma vectorial $\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}_{\perp}$.

sistema de partículas (cuerpo rígido o no) la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es igual a la razón de cambio en el tiempo de su ímpetu lineal total.

Extendamos más allá la analogía entre el modo en que una fuerza cambia el ímpetu lineal y el modo en que una torca cambia el ímpetu angular. Supongamos que una fuerza $\mathbf{F}$ actúa sobre una partícula que se mueve con ímpetu lineal $\mathbf{p}$. Podemos resolver a $\mathbf{F}$ en dos componentes, como se muestra en la figura 3: una componente ($\mathbf{F}_{\parallel}$) es paralela a la dirección (instantánea) de $\mathbf{p}$ y otra ($\mathbf{F}_{\perp}$) es perpendicular a $\mathbf{p}$. En un intervalo de tiempo pequeño $\Delta t$, la fuerza produce un cambio en el ímpetu $\Delta\mathbf{p}$, determinado de acuerdo con $\mathbf{F} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t$. Así, $\Delta\mathbf{p}$ es paralelo a $\mathbf{F}$. La componente $\mathbf{F}_{\parallel}$ da un cambio en el ímpetu $\Delta\mathbf{p}_{\parallel}$ paralelo a $\mathbf{p}$, que se suma a $\mathbf{p}$ y cambia su magnitud pero no su dirección (véase la Fig. 3*a*). La componente perpendicular $\mathbf{F}_{\perp}$, por otra parte, proporciona un incremento $\Delta\mathbf{p}_{\perp}$ que cambia la dirección de $\mathbf{p}$ pero, cuando $\Delta\mathbf{p}_{\perp}$ es pequeño comparado con $\mathbf{p}$, deja a la magnitud de $\mathbf{p}$ sin alteración (véase la Fig. 3*b*). Un ejemplo de lo último es una partícula que se mueve en círculo a velocidad constante sujeta solamente a una fuerza centrípeta, la cual es siempre perpendicular a la velocidad tangencial.

El mismo análisis rige para la acción de una torca, como se muestra en la figura 4. En este caso, $\tau = \Delta\mathbf{L}/\Delta t$, y $\Delta\mathbf{L}$ debe ser paralelo a $\tau$. Una vez más resolvemos a $\tau$ en dos componentes, $\tau_{\parallel}$ paralelo a $\mathbf{L}$ y $\tau_{\perp}$ perpendicular a $\mathbf{L}$. La componente de $\tau$ paralela a $\mathbf{L}$ cambia de magnitud al ímpetu angular, pero no de dirección (Fig. 4*a*). La componente de $\tau$ perpendicular a $\mathbf{L}$ da un incremento $\Delta\mathbf{L}_{\perp}$ perpendicular a $\mathbf{L}$, que cambia la dirección de $\mathbf{L}$ pero no su magnitud (Fig. 4*b*). Esta última condición es responsable del movimiento de los trompos y de los giroscopios, como veremos en la sección 13-5. Al comparar las figuras 3 y 4 podemos ver las semejanzas entre la dinámica de rotación y la dinámica de traslación.

Una comparación adicional entre los fenómenos lineal y de rotación es que *no se efectúa ningún trabajo* si (1) la fuerza actúa en ángulo recto con el ímpetu lineal (Fig. 3*b*), o (2) la torca actúa en ángulo recto con el ímpetu angular (Fig. 4*b*). En cada caso, el agente externo no provoca un cambio en la energía cinética, y el movimiento continúa con la misma velocidad lineal o de rotación.

En la figura 5 se muestra un ejemplo de la aplicación de la ecuación 8 a la dinámica de la rotación. En la figura 5*a*, un extremo del eje de una rueda de bicicleta que está girando descansa libremente sobre un poste, y el otro extremo está detenido por la mano de un estudiante. El estudiante empuja tangencialmente a la rueda en la llanta, con objeto de hacer que gire más rápidamente. Considerada con respecto al centro de la rueda, la torca ejercida por el estudiante es paralela al ímpetu angular de la rueda, apuntando ambos vectores ($\tau$ y $\mathbf{L}$) hacia el estudiante. El resultado de esta torca es un aumento en el ímpetu angular de la rueda. En la figura 5*b*, el estudiante ha soltado un soporte del eje. Consideremos ahora las torcas respecto al punto de soporte que permanece. Existen dos fuerzas que actúan, una fuerza normal al punto de soporte, que no produce ninguna torca respecto a ese punto, y el peso de la rueda que actúa hacia abajo en el centro de masa. La torca respecto al punto $O$ debido al peso es perpendicular a $\mathbf{L}$, y su efecto es, por lo tanto, un cambio en la dirección de $\mathbf{L}$, como en la figura 4*b*. Sin embargo, puesto que la dirección de $\mathbf{L}$ es también la dirección del eje,* el efecto

* Esto se cumple sólo si el eje de rotación es también un eje de simetría del cuerpo; véase la sección 13-3.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPTO. DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA



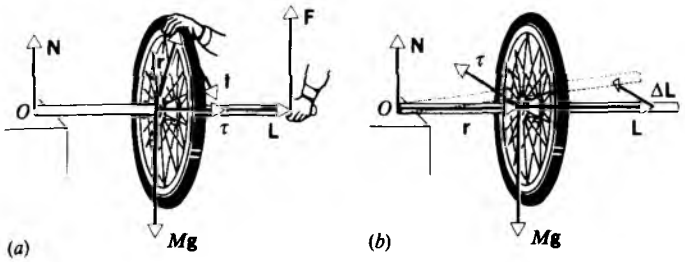



**Figura 5** (*a*) Una fuerza tangencial **f** en la llanta de la rueda proporciona una torca $\tau$ (respecto al centro de la rueda) a lo largo del eje de rotación, aumentando la magnitud de la velocidad angular de la rueda pero dejando a su dirección sin alterar. (*b*) Cuando el extremo del eje se libera, la torca de la gravitación respecto al punto *O* apunta hacia el papel, esto es, perpendicularmente al eje de rotación, como en la figura 4*b*. Esta torca cambia la dirección del eje de rotación, y el eje de la rueda se mueve en el plano horizontal hacia la posición mostrada por la línea punteada.

de la fuerza de la gravedad (hacia abajo) es girar al eje hacia un lado. La rueda pivoteará lateralmente respecto al punto de soporte. ¡Ensáyelo! (Si usted no tiene a la mano una rueda de bicicleta montada libremente, un giroscopio de juguete funciona de la misma manera.)

Como la hemos derivado, la ecuación 8 se cumple cuando $\tau$ y **L** se miden con respecto al origen de un marco de referencia inercial. Bien podríamos preguntarnos si se cumple todavía cuando medimos a estos dos vectores con respecto a un punto arbitrario (digamos, una partícula determinada) del sistema en movimiento. En general, tal punto se movería de manera complicada si el cuerpo o sistema de partículas se trasladara, se volteara y cambiara su configuración, y la ecuación 8 no se aplicaría a tal punto de referencia. Sin embargo, si se elige que el punto de referencia sea el centro de masa del sistema, aun cuando este punto pudiera estar acelerando en nuestro marco de referencia inercial, entonces la ecuación 8 sí se cumple. (Véase el problema 8.) Ésta es otra notable propiedad del centro de masa. Entonces podemos separar el movimiento general de un sistema de partículas en el movimiento de traslación de su centro de masa (Ec. 27 del capítulo 9) y un movimiento de rotación en torno a su centro de masa (Ec. 8).

## 13-3 ÍMPETU ANGULAR Y VELOCIDAD ANGULAR

Para presentar casos en los que sea absolutamente necesario considerar la naturaleza vectorial de la velocidad angular, de la torca, y del ímpetu angular, consideraremos primero un ejemplo sencillo del giro de una partícula que ilustra un caso en que la velocidad angular y el ímpetu angular no son paralelos.

La figura 6*a* muestra una partícula aislada de masa *m* unida a un flecha rígida, sin masa por un brazo rígido, sin masa, de longitud *r'* perpendicular a la flecha. La partícula se mueve en un círculo de radio *r'*, y suponemos que lo hace con una velocidad constante *v*. Imaginemos que este experimento tiene lugar en una región de gravedad despreciable, de modo que no necesitemos considerar la fuerza de la gravedad que actúa sobre la partícula. La única fuerza que actúa sobre la partícula es la fuerza centrípeta ejercida por el brazo que une a la partícula con la flecha.

La flecha se halla confinada al eje *z* por dos chumaceras delgadas ideales (sin fricción). Hagamos que la chumacera inferior defina al origen *O* de nuestro sistema de coordenadas. La chumacera superior, como veremos, es necesaria para impedir que la flecha se tambalee con respecto al eje *z*, lo cual sucede cuando la velocidad angular no es paralela al ímpetu angular.

La velocidad angular $\omega$ de la partícula apunta hacia arriba a lo largo del eje *z* (o, de manera equivalente, paralelo a él) el eje *z*, como se muestra en la figura 6*b*. Esto es consistente con la relación vectorial $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ (Ec. 16 del capítulo 11). No importa dónde se elija el origen a lo largo del eje *z*, el vector de la velocidad angular será paralelo al eje. Su magnitud es, de manera similar, independiente de la ubicación del origen, siendo (a partir del producto cruz) $v/(r \text{ sen } \theta) = v/r'$.

El ímpetu angular **l** de la partícula con respecto al origen *O* del marco de referencia está dado por la ecuación 1, o sea,

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

donde **r** y **p** (= *m***v**) se muestran en la figura 6*b*. El vector **l** es perpendicular al plano formado por **r** y **p**, lo que significa que **l** no es paralelo a $\omega$. Nótese (y véase la Fig. 6*c*) que **l** tiene una componente (vector) $\mathbf{l}_z$ que es paralela a $\omega$, pero tiene otra componente (vector) $\mathbf{l}_\perp$ que es perpendicular a $\omega$. Éste es un caso en que nuestra analogía entre el movimiento lineal y circular no es válida: **p** es siempre paralelo a **v**, pero **l** *no* siempre es paralelo a $\omega$. Si elegimos que nuestro origen esté en el plano de la partícula que describe el círculo, entonces **l** *es* paralelo a $\omega$; de otro modo, no lo será.

Consideremos ahora la relación entre $l_z$ y $\omega$ para la partícula que está girando. De la figura 6*c*, en la que hemos trasladado a **l** al centro del círculo, obtenemos

$$l_z = l \text{ sen } \theta = r(mv) \text{ sen } \theta = r(mr'\omega) \text{ sen } \theta,$$

usando $v = r'\omega$. Sustituyendo por $r'$ (el radio del círculo en el que se mueve la partícula) al producto $r$ sen $\theta$ nos da

$$l_z = mr'^2\omega. \qquad (9)$$

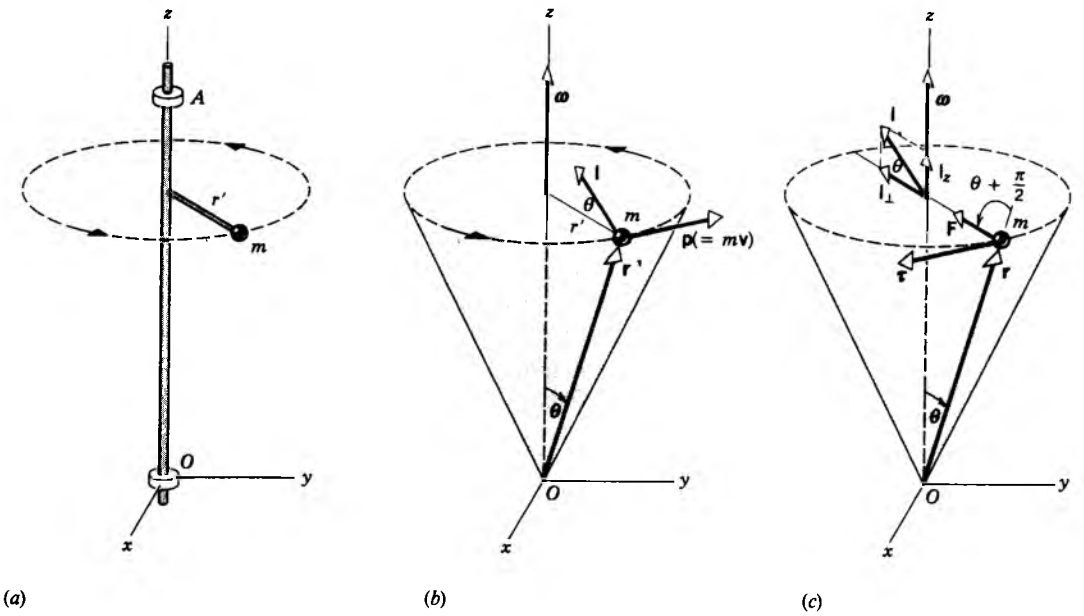



**Figura 6** (*a*) Una partícula de masa $m$ está unida por medio de un brazo de longitud $r'$ a una flecha fijada por dos chumaceras (en $O$ y $A$) para girar en torno al eje $z$. (*b*) La partícula gira a velocidad tangencial $v$ en un círculo de radio $r'$ alrededor del eje $z$ (se omiten las barras y las chumaceras para simplificar la ilustración). Se muestra el ímpetu angular $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ con respecto al origen $O$. (*c*) Para que la partícula se mueva en círculo, deberá haber una fuerza centrípeta $\mathbf{F}$ que actúe como se muestra, dando por resultado una torca $\tau$ respecto a $O$. Por conveniencia, el vector $\mathbf{l}$ del momento angular y sus componentes a lo largo y perpendiculares a $z$ se muestran en el centro del círculo.

Ahora $mr'^2$ es la inercia de rotación $I$ de la partícula con respecto al eje $z$. Entonces

$$l_z = I\omega. \tag{10}$$

Nótese que la relación vectorial $\mathbf{l} = I\boldsymbol{\omega}$ (que es análoga a la relación lineal $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) *no* es correcta en este caso, porque $\mathbf{l}$ y $\boldsymbol{\omega}$ no apuntan en la misma dirección.

¿En qué circunstancias apuntarán en la misma dirección el ímpetu y la velocidad angular? Para ilustrarlo, añadiremos otra partícula de la misma masa $m$ al sistema, como se muestra en la figura 7, por medio de otro brazo unido a la flecha central de la figura 6*a* en el mismo sitio que el primer brazo pero apuntando en la dirección opuesta. La componente $\mathbf{l}_\perp$ debida a esta segunda partícula será igual y opuesta a la de la primera partícula, y los dos vectores $\mathbf{l}_\perp$ sumarán cero. Sin embargo, los dos vectores $\mathbf{l}_z$ apuntan en la misma dirección y se suman. Entonces, en este sistema de dos partículas el ímpetu angular total $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$.

Podemos ahora extender nuestro sistema a un cuerpo rígido, formado de muchas partículas. Si el cuerpo es simétrico respecto al eje de rotación, con lo cual queremos decir que para cada elemento de masa del cuerpo deberá haber un elemento de masa idéntico diametralmente opuesto al primer elemento y a la misma distancia del eje de rotación, entonces el cuerpo puede ser visto como constituido por grupos de pares de partículas de la misma clase que hemos estado estudiando. Puesto que $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$ son paralelos para todos estos pares, serán también paralelos para cuerpos rígidos que posean esta clase de simetría, que recibe el nombre de simetría *axial*.

Para tales cuerpos rígidos simétricos $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$ son paralelos y pueden ser escritos en forma vectorial

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}. \tag{11}$$

Sin embargo, no olvidemos que si $\mathbf{L}$ representa al ímpetu angular *total*, entonces la ecuación 11 se aplica *únicamente* a cuerpos que sean simétricos con respecto al eje de rotación. Si $\mathbf{L}$ representa a la componente del vector del ímpetu angular a lo largo del eje de rotación (esto es, a $\mathbf{L}_z$), entonces la ecuación 11 se cumple para *cualquier* cuerpo rígido, simétrico o no, que gire con respecto a un eje fijo.

En cuerpos simétricos (tales como el sistema de dos partículas de la figura 7), puede ser retirada la chumacera superior de la figura 6*a*, y la flecha permanecerá paralela al eje $z$. Podemos verificar esto observando lo fácil que es hacer girar sobre un eje a un objeto simétrico tal como un trompo o una pequeña rueda abrasiva mantenidos sola-

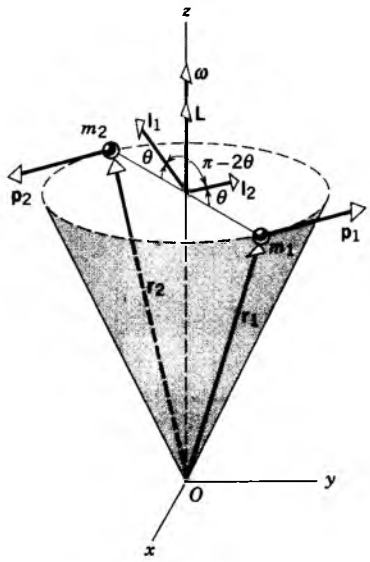



**Figura 7** Dos partículas de masa $m$ girando como en la figura 6, pero en los extremos opuestos de un diámetro. El momento angular total **L** de las dos partículas es, en este caso, paralelo a la velocidad angular $\omega$.

mente entre el pulgar y el índice de una mano. Cualquier pequeña asimetría del objeto requiere un segundo apoyo que mantenga a la flecha en una dirección fija; la chumacera debe ejercer una torca sobre la flecha, la cual se bambolea al girar el objeto, como veremos al final de esta sección. Esto es particularmente serio para objetos que giran a altas velocidades, tales como los rotores de turbina. Aunque diseñados para ser simétricos, tales rotores, debido a pequeños errores de colocación de los álabes, por ejemplo, pueden ser ligeramente asimétricos. Pueden recuperar a la simetría por la adición o eliminación de metal en los lugares apropiados; esto se lleva a cabo haciendo girar a la rueda en un aparato especial de modo que el tambaleo pueda ser medido cuantitativamente, a la vez que calculada y automáticamente indicada la medida correctiva necesaria. De manera parecida, en los rines de las llantas de los automóviles se colocan pesas de plomo en puntos estratégicos para reducir el bamboleo a altas velocidades. Para "balancear" una rueda de automóvil, el mecánico busca precisamente que los vectores del ímpetu angular y de la velocidad angular de la rueda sean paralelos, reduciendo así el esfuerzo sobre los baleros de las ruedas.

**Problema muestra 2** ¿Cuál es mayor, el ímpetu angular de la Tierra asociado con su rotación sobre su eje o el ímpetu angular de la Tierra asociado con su movimiento orbital alrededor del Sol?

**Solución** Para la rotación sobre su eje, tratamos a la Tierra como una esfera uniforme ($I = \frac{2}{5}MR_E^2$). La velocidad angular es

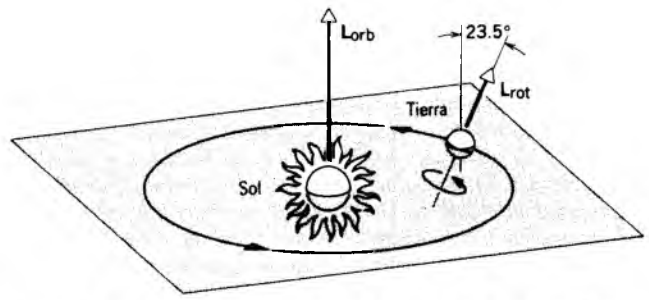



**Figura 8** Problema muestra 2. La Tierra gira en una órbita (supuesta circular) alrededor del Sol, y también gira alrededor de su eje. Los dos vectores del ímpetu angular no son paralelos, porque el eje de rotación de la Tierra está inclinado en un ángulo de 23.5° con respecto a la normal al plano de la órbita. Las longitudes de los vectores no están trazadas a escala; $L_{orb}$ deberá ser más grande que $L_{rot}$ por un factor de $4 \times 10^6$, aproximadamente.

$\omega = 2\pi/T$, donde $T$ es el periodo de rotación (24 h = $8.64 \times 10^4$ s). El ímpetu angular de rotación es, entonces,

$$L_{rot} = I\omega = \tfrac{2}{5}MR_E^2 \frac{2\pi}{T}$$

$$= \tfrac{2}{5}(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(6.37 \times 10^6\ \text{m})^2 \frac{2\pi}{8.64 \times 10^4\ \text{s}}$$

$$= 7.05 \times 10^{33}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

Para calcular el ímpetu angular orbital, necesitamos la inercia de rotación de la Tierra en torno a un eje que pase por el Sol. Para esto podemos tratar a la Tierra como una "partícula", con un ímpetu angular $L = R_{orb}p$, en donde $R_{orb}$ es el radio de la órbita y $p$ es el momento lineal de la Tierra. La velocidad angular está nuevamente dada por $\omega = 2\pi/T$, en donde $T$ es ahora el periodo orbital (1 y = $3.16 \times 10^7$ s). El ímpetu angular orbital es

$$L_{orb} = R_{orb}p = R_{orb}Mv = R_{orb}M(\omega R_{orb}) = MR_{orb}^2 \frac{2\pi}{T}$$

$$= (5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(1.50 \times 10^{11}\ \text{m})^2 \frac{2\pi}{3.16 \times 10^7\ \text{s}}$$

$$= 2.67 \times 10^{40}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

El ímpetu angular orbital es, entonces, mucho más grande que el ímpetu angular de rotación.

El vector del ímpetu angular orbital apunta en ángulo recto al plano de la órbita de la Tierra (figura 8), mientras que el ímpetu angular de rotación está inclinado a un ángulo de 23.5° con respecto a la normal al plano. Despreciando la lenta precesión del eje de rotación, los dos vectores permanecen constantes tanto en magnitud como en dirección al moverse la Tierra en su órbita.

**Problema muestra 3** En el problema muestra 5 del capítulo 12 halle la aceleración del bloque al caer por aplicación directa de la ecuación 8 ($\tau = d\mathbf{L}/dt$).

**Solución** Sobre el sistema que se muestra en la figura 9, que consiste del disco de masa $M$ y el bloque de masa $m$, actúan dos

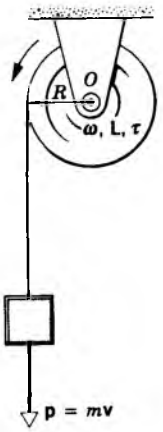



**Figura 9** Problema muestra 3. La velocidad angular, el ímpetu angular, y la torca neta apuntan todos hacia afuera de la página, como lo indica el símbolo ⊙ en *O*.

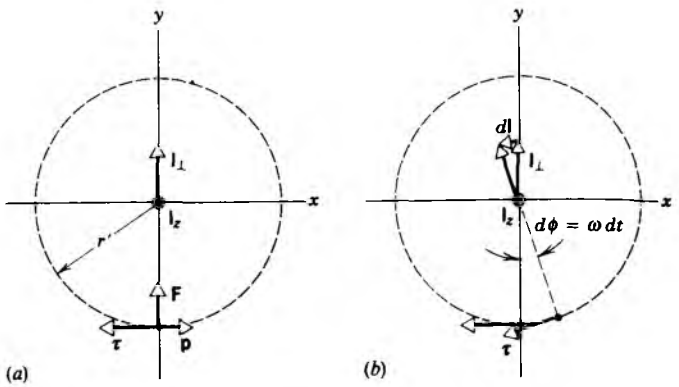



**Figura 10** (*a*) Una vista bidimensional del plano de la partícula de la figura 6, que está girando. La componente *z* del ímpetu angular apunta hacia afuera del papel. (*b*) Cuando la partícula gira a través de un ángulo $d\phi$, la componente $\mathbf{l}_\perp$ del vector en el plano cambia en $d\mathbf{l}$. Nótese que $d\mathbf{l}$ es paralelo a $\tau$.

fuerzas externas, la atracción de la gravedad (hacia abajo) $m\mathbf{g}$ que actúa sobre $m$ y la fuerza (hacia arriba) ejercida por las chumaceras de la flecha del disco, a la cual consideramos como el origen. (La tensión en el cordón es una fuerza interna y no actúa desde el exterior sobre el sistema disco + bloque.) Solamente la primera de estas fuerzas externas ejerce una torca con respecto al origen, y su magnitud es $(mg)R$.

El ímpetu angular del sistema respecto al origen $O$ en cualquier instante es

$$L = I\omega + (mv)R,$$

en donde $I\omega$ es el ímpetu angular del disco (simétrico) y $(mv)R$ es el ímpetu angular (= ímpetu lineal × brazo del momento) del cuerpo que cae con respecto al origen. Estas dos contribuciones a $\mathbf{L}$ apuntan ambas en la misma dirección, es decir, perpendicularmente hacia afuera del plano de la figura 9.

Aplicando $\tau = d\mathbf{L}/dt$ (en forma escalar) nos da

$$\begin{aligned}(mg)R &= \frac{d}{dt}(I\omega + mvR)\\ &= I\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + mR\left(\frac{dv}{dt}\right)\\ &= I\alpha + mRa.\end{aligned}$$

Puesto que $a = \alpha R$ e $I = \frac{1}{2}MR^2$, esto se reduce a

$$mgR = (\tfrac{1}{2}MR^2)(a/R) + mRa$$

o sea

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}.$$

Este resultado es idéntico al resultado del problema muestra 5 del capítulo 12.

## La torca sobre una partícula que se mueve en una trayectoria circular *(Opcional)*

El quizás inesperado resultado de que $\mathbf{l}$ y $\omega$ no sean paralelos en el caso simple mostrado en la figura 6 puede causar cierta preocupación. Sin embargo, este resultado es consistente con la relación general $\tau = d\mathbf{l}/dt$ para la torca que actúa sobre una partícula aislada. El vector $\mathbf{l}$ está cambiando con el tiempo al moverse la partícula; el cambio es totalmente en dirección y no en magnitud. Al girar la partícula, $\mathbf{l}_z$ permanece constante tanto en magnitud como en dirección, pero $\mathbf{l}_\perp$ cambia su dirección. Este cambio de $\mathbf{l}_\perp$ debe surgir de la aplicación de una torca. ¿Cuál es la fuente de esta torca?

Para que la partícula se mueva en círculo deberá actuar una fuerza centrípeta, como en la figura 6*c*, proporcionada por el brazo de soporte que une a la partícula con la flecha. (Hemos despreciado otras fuerzas externas, como la gravedad.) La única torca con respecto a $O$ es proporcionada por $\mathbf{F}$ y está dada por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

La torca $\tau$ es tangente al círculo (perpendicular al plano formado por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$) y tiene la dirección mostrada en la figura 6*c*, como puede usted verificarlo por la regla de la mano derecha.

Demostremos que esta torca satisface la forma de la rotación de la segunda ley de Newton, $\tau = d\mathbf{l}/dt$. La figura 10*a* muestra una vista bidimensional de la partícula al girar, viendo hacia abajo a lo largo del eje *z* sobre el plano *xy*. Al moverse la partícula en un pequeño ángulo $d\phi = \omega\, dt$ (Fig. 10*b*), el vector $\mathbf{l}_\perp$ cambia en el pequeño incremento $d\mathbf{l}$. Usted puede ver en la figura 10*b* que $d\mathbf{l}$ será siempre paralelo a $\tau$, y así las direcciones de $d\mathbf{l}$ y de $\tau$ son consistentes con $\tau = d\mathbf{l}/dt$. Podemos también demostrar que las magnitudes concuerdan. La torca con respecto a $O$ es, refiriéndonos de nuevo a la figura 6*c*,

$$\tau = rF \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi + \theta) = rF\cos\theta.$$

En este caso, $\mathbf{F}$ es la fuerza centrípeta y tiene una magnitud $F = mv^2/r' = m\omega^2 r'$, donde $r'$ es el radio de la trayectoria circular ($r' = r \operatorname{sen}\theta$). Entonces

$$\tau = m\omega^2 r^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta. \qquad (12)$$

De la figura 10*b*, $dl = l_\perp\, d\theta = l_\perp \omega\, dt$, donde obtenemos que

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_\perp.$$

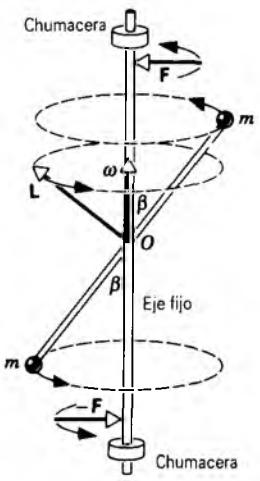



**Figura 11** Un sistema de dos partículas girando, similar a la figura 7, pero con el eje de rotación formando un ángulo $\beta$ con la barra de unión. El vector **L** del ímpetu angular gira con el sistema, como también las fuerzas **F** y **-F** ejercidas por las chumaceras.

Con $l = mvr$, entonces $l_\perp = mvr \cos\theta$. La velocidad tangencial $v$ es $\omega r' = \omega r \operatorname{sen}\theta$, de modo que

$$l_\perp = m\omega r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

y

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_\perp = m\omega^2 r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta. \qquad (13)$$

Comparando las ecuaciones 12 y 13, vemos que $\tau = dl/dt$, como se esperaba.

### Cuerpos simétricos y cuerpos asimétricos

¿En qué difiere la situación entre cuerpos simétricos y asimétricos que estén girando? Supongamos que la barra que une a las dos partículas en el cuerpo simétrico de la figura 7 estuviese inclinada en un ángulo arbitrario $\beta$ con respecto a la flecha central. La figura 11 muestra a la barra de unión, que, junto con la flecha y las dos chumaceras (que se suponen sin fricción) mantiene al eje a lo largo del eje $z$. La flecha gira con una velocidad angular constante $\omega$ en torno a este eje, apuntando entonces el vector $\omega$ a lo largo de este eje. La experiencia nos dice que tal sistema está "desbalanceado" o "colgado hacia un lado" y que, si la barra de unión no estuviera rígidamente unida a la flecha vertical cerca de $O$, tendería a moverse hasta que el ángulo $\beta$ se convirtiera en 90°, en cuya posición el sistema sería entonces simétrico con respecto a la flecha.

En el instante mostrado en la figura 11, la partícula superior se mueve hacia adentro de la página en ángulo recto, y la partícula inferior se mueve hacia afuera de la página en ángulo recto también. Los vectores del ímpetu lineal de las dos partículas son, por lo tanto, iguales pero opuestos, como también lo son sus vectores de posición con respecto a $O$. De aquí que, por aplicación de la regla de la mano derecha en $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$, hallamos que **l** es el mismo para cada partícula y que su suma, el vector del ímpetu angular total **L** del sistema, está, como se muestra en la figura, formando ángulo recto con la barra de unión y está en el plano de la página. Por lo tanto, **L** y $\omega$ no son paralelos en ese instante. Al girar el sistema, el vector del ímpetu angular, si bien de magnitud constante, gira alrededor del eje de rotación fijo.

La rotación de **L** alrededor del eje fijo de la figura 11 es perfectamente consistente con la relación fundamental $\tau = d\mathbf{L}/dt$. La torca externa de todo el sistema proviene de las fuerzas laterales desbalanceadas ejercidas por las chumaceras sobre la flecha y transmitidas por la flecha a la barra de unión. En el instante mostrado en la figura, la partícula superior tenderá a moverse hacia afuera a la derecha. La flecha sería jalada hacia la derecha contra la chumacera superior, la que a su vez ejerce una fuerza **F** sobre la flecha que apunta a la izquierda. De igual manera, la partícula inferior tiende a moverse hacia afuera a la izquierda. La flecha sería jalada a la izquierda contra la chumacera inferior, la que a su vez ejerce una fuerza **-F** sobre la flecha que apunta a la derecha. La torca $\tau$ con respecto a $O$ que resulta de estas fuerzas apunta perpendicularmente hacia afuera de la página, formando en ángulo recto con el plano formado por **L** y $\omega$, y en la dirección correcta para responder al movimiento de rotación de **L**. (Compárese con la Fig. 10*b*, en la que $\tau$ era paralelo a $d\mathbf{l}$ pero perpendicular a **l**.) Obsérvese que, a causa de que $\tau$ es perpendicular a $\omega$, no efectúa trabajo y, por lo tanto, no cambia la energía cinética del sistema que está girando. En ausencia de fricción, el sistema giraría a perpetuidad. La fricción en las chumaceras daría lugar a una torca dirigida a lo largo de la flecha (paralela a $\omega$), la cual *efectuaría* un trabajo sobre el sistema y cambiaría su energía cinética.

Las fuerzas **F** y **-F** están en el plano de la figura 11 en el instante mostrado. Al girar el sistema, estas fuerzas, y por lo tanto la torca $\tau$, giran con él, de modo que $\tau$ permanece siempre en ángulo recto al plano formado por $\omega$ y **L**. Las fuerzas de rotación **F** y **-F** causan un bamboleo en las chumaceras superior e inferior. Las chumaceras y sus soportes deben ser lo suficientemente fuertes como para proporcionar estas fuerzas. En un cuerpo simétrico que esté girando no existe un bamboleo en las chumaceras, y la flecha gira suavemente. ■

## 13-4 CONSERVACIÓN DEL ÍMPETU ANGULAR

En la ecuación 8, hallamos que la razón de cambio en el tiempo del ímpetu angular total de un sistema de partículas respecto a un punto fijo en un marco de referencia inercial (o con respecto al centro de masa) es igual a la torca *externa* neta que actúa sobre el sistema, esto es,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \qquad (8)$$

Si no actúa ninguna torca externa neta sobre el sistema, entonces el ímpetu angular del sistema no cambia con el tiempo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \text{o bien} \quad \mathbf{L} = \text{una constante}. \qquad (14)$$

La ecuación 14 es el postulado matemático del principio de *conservación del ímpetu angular*.

*Cuando la torca externa neta que actúa sobre un sistema sea cero, el vector del ímpetu angular total del sistema permanece constante.*

Ésta es la tercera de las leyes de conservación más importantes que hemos estudiado. Junto con la conservación de la energía y el ímpetu lineal, la conservación del ímpetu angular es un resultado general válido para una amplia gama de sistemas. Es válido tanto en el límite relativista como en el límite cuántico y hasta ahora, no se ha encontrado ninguna excepción alguna.

Al igual que la conservación del ímpetu lineal en un sistema en el cual no actúe ninguna *fuerza* externa neta, la conservación del ímpetu angular se aplica al ímpetu angular total de un sistema de partículas en el que no actúe ninguna *torca* externa neta. El ímpetu angular de partículas individuales de un sistema puede cambiar (del mismo modo en que puede cambiar el ímpetu lineal de cada partícula en una colisión), pero el total permanece constante.

El ímpetu angular es (como el ímpetu lineal) una cantidad *vectorial* de modo que la ecuación 14 es equivalente a tres ecuaciones escalares, una para cada dirección de coordenadas que pase por el punto de referencia. La conservación del ímpetu angular nos proporciona, por lo tanto, tres condiciones del movimiento de un sistema al cual se aplique. Cualquier componente del ímpetu angular será constante si la componente correspondiente de la torca es cero; pudiera darse el caso de que sólo una de las tres componentes de la torca sea cero, lo cual significaría que sólo será constante una componente del ímpetu angular, cambiando las otras componentes como lo determinen las componentes de la torca correspondientes.

Para un sistema que consista en un cuerpo rígido que gire alrededor de un eje (digamos, el eje $z$) que esté fijo en un marco de referencia inercial, tenemos que

$$L_z = I\omega, \tag{15}$$

donde $L_z$ es la componente (escalar) del ímpetu angular a lo largo del eje de rotación e $I$ es la inercia de rotación para este mismo eje. Es posible que la inercia de rotación $I$ de un cuerpo que gira cambie (desde $i_i$ hasta $I_f$) mediante un reacomodo de sus partes. Si no actúa ningúna torca externa neta, entonces $L_z$ debe permanecer constante y, si $I$ cambia, debería existir un cambio compensatorio en $\omega$ desde $\omega_i$ hasta $\omega_f$. En este caso, el principio de conservación del ímpetu angular se expresa así:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{una constante.} \tag{16}$$

La ecuación 16 es válida no sólo para la rotación con respecto a un eje fijo sino también para la rotación alrededor de un eje que pase por el centro de masa de un sistema que se mueva, de modo que el eje permanezca siempre paralelo a sí mismo (véase la explicación al comienzo de la Sec. 12-6).

La conservación del ímpetu angular es un principio que regula una amplia variedad de procesos físicos, desde el mundo subatómico (véase la Sec. 13-6) hasta el movimiento de los acróbatas, los clavadistas, los bailarines de ballet, la contracción de las estrellas a las que se les haya acabado el combustible, y la condensación de las galaxias. Los siguientes ejemplos muestran alguna de estas aplicaciones.

## El giro de una patinadora

Una patinadora sobre hielo, al girar, pega sus brazos al cuerpo para girar más rápidamente y los extiende para girar más despacio. Al hacerlo, no hace sino aplicar la ecuación 16. En la figura 12 se ilustra otra aplicación de este principio, mostrando a un estudiante sentado sobre un banquillo que puede girar libremente en torno a un eje vertical. Hagamos que el estudiante extienda sus brazos sosteniendo a las pesas, y que gire con una velocidad angular $\omega_i$. En la figura, el vector **L** de su ímpetu angular yace a lo largo del eje vertical.

El sistema, que consta de estudiante + banquillo + pesas, es un sistema aislado sobre el cual no actúa ninguna torca vertical externa. Por lo tanto, la componente vertical del ímpetu angular debe conservarse.

Cuando el estudiante pega sus brazos (y las pesas) hacia el cuerpo, la inercia de rotación de su sistema se reduce desde su valor inicial $I_i$ hasta un valor más pequeño $I_f$, porque las pesas están ahora más cerca del eje de rotación. Su velocidad angular final, según la ecuación 16, es $\omega_f = \omega_i(I_i/I_f)$, la cual es más grande que su velocidad angular inicial (porque $I_f < I_i$), y el estudiante gira más rápidamente. Para disminuir su velocidad sólo necesita extender sus brazos otra vez.

¿Cambia la energía cinética del sistema? De ser así, ¿cuál es la fuente del trabajo que hace cambiar a la energía cinética?

## La clavadista en el trampolín*

La figura 13*a* muestra a una clavadista abandonando el trampolín. Al saltar, se empuja a sí misma ligeramente hacia adelante, de modo que adquiera una velocidad de rotación pequeña, justo la suficiente para llevarla de cabeza hacia el agua al tiempo que su cuerpo gira en una media vuelta durante el arco.

Mientras está en el aire, no actúan sobre ella torcas externas que cambien su ímpetu angular con respecto a su centro de masa. (La única fuerza externa, la gravedad, actúa *a través* de su centro de masa y, por lo tanto, no produce una torca con respecto a ese punto. Despreciamos

* Véase "The Mechanics of Swimming and Diving", por R. L. Page, *The Physics Teacher*, febrero de 1976, pág. 72; "The Physics of Somersaulting and Twisting", por Cliff Frohlich, *Scientific American*, marzo de 1980, pág. 155.

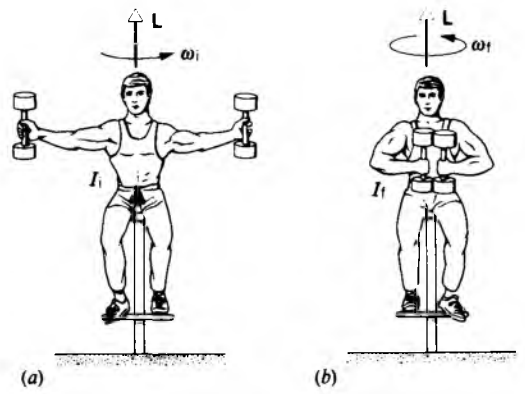



**Figura 12** (*a*) En esta configuración, el sistema (estudiante + pesas) tiene una inercia de rotación más grande y una velocidad angular más pequeña. (*b*) Aquí el estudiante ha llevado a las pesas hacia adentro, dando una inercia de rotación más pequeña, y por lo tanto, una velocidad angular más grande. El ímpetu angular **L** tiene el mismo valor en ambas situaciones.

la resistencia del aire, que podría producir una torca neta y cambiar su ímpetu angular.) Cuando ella impulsa su cuerpo hacia la *posición de escuadra*, disminuye su inercia de rotación y, por lo tanto, de acuerdo con la ecuación 16, su velocidad angular debe aumentar. El aumento en la velocidad angular le permite completar $1\frac{1}{2}$ vueltas, si bien ella había completado previamente sólo media vuelta (Fig. 13*b*). Al final del clavado, vuelve a la *posición normal de caída* y disminuye su velocidad angular para entrar en el agua.

## El giro de una rueda de bicicleta

La figura 14*a* muestra a una estudiante sentada sobre un banquillo que está libre de girar en torno a un eje vertical. La estudiante sostiene una rueda de bicicleta que ha sido puesta a girar. Cuando la estudiante le da vuelta a la rueda, el banquillo comienza a girar (Fig. 14*b*).

No actúa ninguna torca vertical sobre el sistema que consiste en estudiante + banquillo + rueda, y por lo tanto la componente vertical del ímpetu angular total del sistema debe permanecer constante. Inicialmente, la rueda está girando con un ímpetu angular $L$ hacia arriba, que es el total del sistema. Cuando la rueda se voltea, la componente vertical del ímpetu angular de la rueda es ahora $-L_i$, pero la componente vertical del ímpetu angular *total* debe permanecer constante en $+L_i$. La estudiante + el banquillo deben por lo tanto adquirir un ímpetu angular de $L' = +2L_i$, de modo que el ímpetu angular final de $+2L_i - L_i$ permanece igual al ímpetu angular inicial. Si $I_s$ es la inercia de rotación de la estudiante + el banquillo, la velocidad de rotación será $\omega = 2L_i/I_s$.

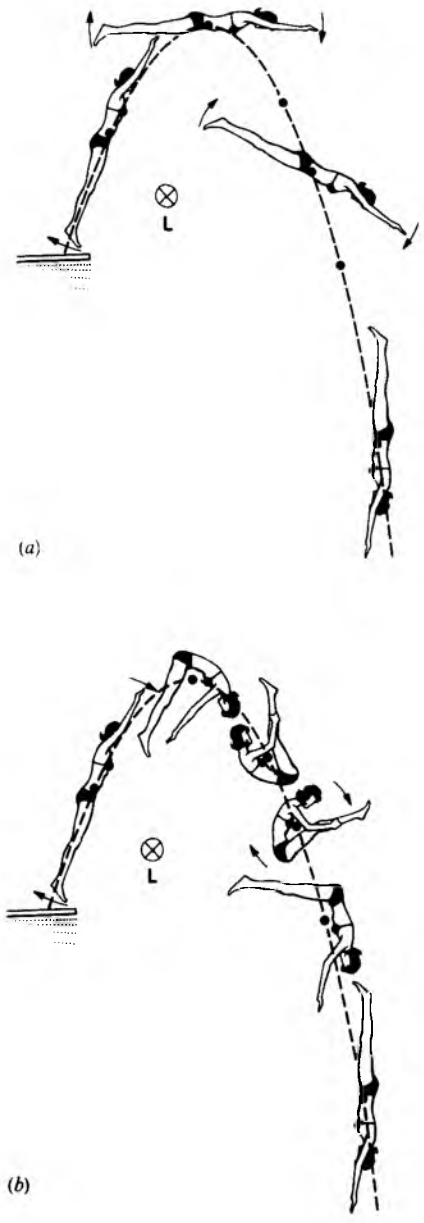



**Figura 13** (*a*) Una clavadista abandona el trampolín de manera tal que éste le imparte un ímpetu angular **L**. Ella gira con respecto a su centro de masa (indicado por el punto grueso) una media vuelta, mientras que el centro de masa sigue una trayectoria parabólica. (*b*) Al entrar a la posición de escuadra, reduce su inercia de rotación y, por lo tanto, aumenta su velocidad angular, permitiéndole dar $1\frac{1}{2}$ vueltas. Las fuerzas externas y las torcas sobre ella son las mismas en (*a*) y en (*b*), como lo indica el valor constante del ímpetu angular **L**.

Podemos también considerar esta situación desde el punto de vista de dos sistemas por separado, siendo uno la rueda y el otro la estudiante + el banquillo. Ninguno de estos sistemas está ahora aislado: la mano de la estudiante

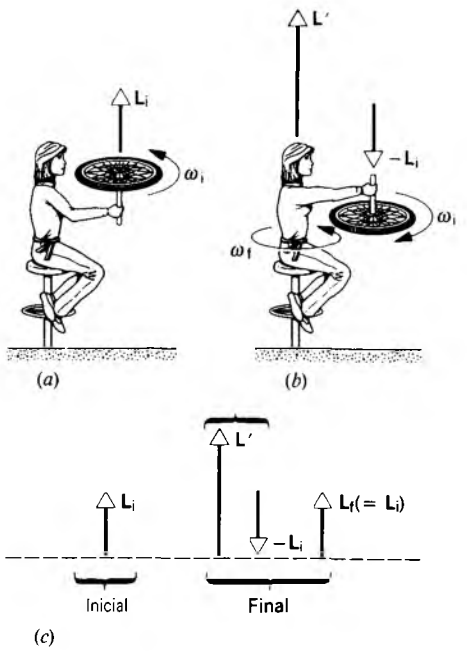



**Figura 14** (*a*) Una estudiante sostiene una rueda de bicicleta que está girando. El ímpetu angular total del sistema es $\mathbf{L}_i$. (*b*) Cuando la rueda de bicicleta es invertida, la estudiante comienza a girar. (*c*) El ímpetu angular final total debe ser igual al ímpetu angular inicial.

constituye una unión entre ellos. Cuando la estudiante intenta voltear la rueda, debe aplicar una torca para cambiar el ímpetu angular de la rueda. La fuerza que ella ejerce sobre la rueda para producir esa torca es regresada por la rueda como una fuerza de reacción sobre ella, según la tercera ley de Newton. Esta fuerza externa sobre el sistema estudiante + banquillo causa que ese sistema gire. Desde este punto de vista la estudiante ejerce una torca externa sobre la rueda para cambiar su ímpetu angular, mientras que la rueda ejerce una torca sobre la estudiante para cambiar su ímpetu angular. Si consideramos al sistema completo consistente en estudiante + banquillo + rueda, como hicimos antes, esta torca es una torca interna que no ha sido incluida en nuestros cálculos. El hecho de que consideremos a la torca como interna o como externa depende de cómo definamos a nuestro sistema.

## La estabilidad de los objetos que giran

Consideremos una vez más la figura 3*b*. Un objeto que se mueva con un ímpetu lineal $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ tiene una *estabilidad direccional*; una fuerza de desviación proporciona el impulso correspondiente a un incremento lateral del ímpetu $\Delta\mathbf{p}_\perp$ y, como resultado, la dirección del movimiento cambia según un ángulo $\theta = \tan^{-1}(\Delta p_\perp/p)$. Cuanto más grande sea el ímpetu $p$, más pequeño será el ángulo $\theta$. La misma fuerza de desviación es menos eficaz en desviar un objeto con un ímpetu lineal grande que en desviar un objeto con un ímpetu lineal pequeño.

El ímpetu angular proporciona a un objeto una *estabilidad de orientación* de manera muy similar. Un objeto en rotación tiene un cierto ímpetu angular $\mathbf{L}$. Una torca $\tau$ perpendicular a $\mathbf{L}$ cambia la dirección de $\mathbf{L}$ y, por lo tanto, la dirección del eje de rotación, en un ángulo $\theta = \tan^{-1}(\Delta L_\perp/L)$. Una vez más, cuanto más grande sea el ímpetu angular $L$, menor posibilidad tendrá una torca dada para cambiar la dirección del eje del objeto en rotación.

Cuando le damos a un objeto un ímpetu angular de rotación respecto a un eje de simetría, en efecto, estabilizamos su orientación y hacemos más difícil que las fuerzas externas cambien su orientación. Existen muchos ejemplos comunes de este efecto. Una bicicleta sin ocupante a la que se le imprima un ligero empujón puede permanecer en posición vertical durante una distancia más larga de lo que pudiéramos esperar. En este caso es el ímpetu angular de las ruedas al girar el que proporciona la estabilidad. Las protuberancias y curvas pequeñas del camino, que de otro modo derribarían o desviarían a un objeto que no estuviese girando, equilibrado en una base tan angosta como una llanta de bicicleta, tendrán menos efecto en este caso debido a la tendencia del ímpetu angular de las ruedas a fijar su orientación.*

Una pelota de fútbol americano es lanzada para un pase largo hacia el frente de modo que gire en torno a un eje que es aproximadamente paralelo a su velocidad de traslación. Esto estabiliza la orientación de la pelota de fútbol e impide que se bambolee, lo cual hace posible lanzarla con mayor precisión y atraparla más eficazmente. También mantiene el perfil más pequeño de la pelota en la dirección hacia adelante, minimizando la resistencia del aire y aumentando el alcance.

Es importante estabilizar la orientación de un satélite, en particular si éste utiliza sus impulsos para llegar a una posición orbital específica (Fig. 15). La orientación pudiera cambiar, por ejemplo, por la fricción de una atmósfera residual enrarecida en altitudes orbitales, por el viento solar (un haz de partículas cargadas proveniente del Sol), o por los impactos con pequeños meteoroides. Para reducir los efectos de tales encuentros, se hace que el artefacto gire en torno a un eje, estabilizando, por lo tanto, su orientación.

## El colapso de las estrellas

La mayoría de las estrellas giran, como lo hace nuestro Sol. Nuestro astro rey gira una vez alrededor de su eje cada

* Véase "The Stability of the Bicycle", por David E. H. Jones, *Physics Today*, abril de 1970, pág. 34.



**Figura 15** El satélite Morelos-D, un satélite de comunicaciones de México, desde el compartimiento de carga del taxi espacial el 17 de noviembre de 1985. Se hace que el satélite gire alrededor de su eje central (el eje vertical en esta foto) para estabilizar su orientación en el espacio mientras viaja hacia su órbita de geosincronismo.

mes, aproximadamente. (El Sol es una bola de gas y no gira realmente como un cuerpo rígido; las regiones cercanas a los polos tienen un periodo de rotación de unos 37 días, mientras que el ecuador gira una vez cada 26 días.) El Sol no llega al colapso a causa de su *presión de radiación*, en esencia, el efecto del impulso de las colisiones de la radiación emergente contra los átomos del Sol. Cuando el combustible nuclear del Sol se haya consumido, la presión de radiación desaparecerá, y el Sol comenzará colapsarse, aumentando su densidad en forma correspondiente. En algún punto la densidad será tan grande que los átomos simplemente no podrán aglutinarse más, y el colapso quedará detenido.

Sin embargo, en las estrellas con una masa de 1.4 veces mayor que la del Sol la fuerza de la gravedad es tan fuerte que los átomos no pueden impedir que continúe el colapso. En efecto, los átomos se aplastan por la acción de la gravedad, y el colapso continúa hasta que los núcleos se tocan entre sí. La estrella se convierte realmente en un núcleo atómico gigante, y recibe el nombre de *estrella neutrónica*. El radio de una estrella neutrónica de alrededor 1.5 veces la masa solar es de 11 km.

Supongamos que la estrella comenzó a colapsarse igual que nuestro Sol, girando una vez cada mes. Las fuerzas durante el colapso son claramente fuerzas internas, que no pueden cambiar el ímpetu angular. La velocidad angular final, por lo tanto, se relaciona con la velocidad angular inicial por la ecuación 16: $\omega_f = \omega_i (I_i/I_f)$. La razón de las inercias de rotación será la misma que la razón de los cuadrados de los radios: $I_i/I_f = r_i^2/r_f^2$. Si el radio inicial fuese aproximadamente igual al del Sol (alrededor de $7 \times 10^5$ km), entonces

$$I_i/I_f = r_i^2/r_f^2 = (7 \times 10^5 \text{ km})^2/(11 \text{ km})^2 = 4 \times 10^9.$$

Esto es, su velocidad de rotación va desde una vez por mes hasta $4 \times 10^9$ veces por mes, ¡a más de 1000 revoluciones por segundo!

Las estrellas neutrónica pueden ser observadas desde la Tierra, porque (de nuevo al igual que el Sol) tienen campos magnéticos que atrapan electrones y, al girar la estrella, los electrones se aceleran a velocidades tangenciales muy elevadas. Estos electrones acelerados emiten una radiación, que vemos desde la Tierra como si fuera un faro reflector mientras la estrella gira. Estos vivos impulsos de radiación son la causa de que estas estrellas neutrónicas en rotación reciban el nombre de *pulsares*. En la figura 16 se muestra un ejemplo de la radiación emitida por un pulsar.

La conservación del ímpetu angular se aplica a una amplia variedad de fenómenos astrofísicos. La rotación de nuestra galaxia, por ejemplo, es el resultado de una rotación inicial mucho más lenta de la nube gasosa de la cual se condensó la galaxia; la rotación del Sol y las órbitas de los planetas quedaron determinadas por la rotación original del material con que se formó nuestro Sistema solar.

---

**Problema muestra 4** Un astronauta de 120 kg, que lleva a cabo una "caminata espacial", está atado a una nave espacial por medio de una cuerda totalmente extendida de 180 m de longitud. Una operación no intencional del paquete propulsor provoca que el astronauta adquiera una pequeña velocidad tangencial de 2.5 m/s. Para regresar a la nave, el astronauta comienza a jalarse a lo largo de la cuerda a razón lenta y constante. ¿Con qué fuerza deberá jalar el astronauta hasta las distancias de (*a*) 50 m y (*b*) 5 m de la nave? ¿Cuál será la velocidad tangencial del astronauta en estos puntos?

**Solución** No actúan torcas externas sobre el astronauta, de modo que se cumple la conservación del ímpetu angular. Esto es, el ímpetu angular inicial del astronauta con relación a la nave espacial como origen ($Mv_ir_i$) cuando comienza a jalar de la cuerda, debe ser igual al ímpetu angular ($Mvr$) en cualquier punto del movimiento. Así,

$$Mvr = Mv_ir_i$$

o sea

$$v = \frac{v_ir_i}{r}$$

La fuerza centrípeta en cualquier etapa está dada por

$$F = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Mv_i^2r_i^2}{r^3}.$$

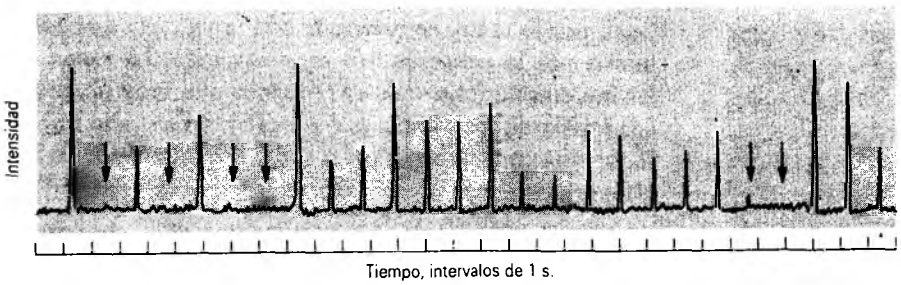



**Figura 16** Las pulsaciones electromagnéticas recibidas en la Tierra desde una estrella neutrónica que gira rápidamente. Las flechas verticales indican pulsaciones demasiado débiles como para ser detectadas. El intervalo entre pulsaciones es notablemente constante, siendo igual a 1.187,911,164 s.

Inicialmente, la fuerza centrípeta requerida es de

$$F = \frac{(120\text{ kg})(2.5\text{ m/s})^2}{180\text{ m}} = 4.2\text{ N} \quad \text{(about 1 lb)}.$$

(*a*) Cuando el astronauta esté a 50 m de la nave, la velocidad tangencial es

$$v = \frac{(2.5\text{ m/s})(180\text{ m})}{50\text{ m}} = 9.0\text{ m/s},$$

y la fuerza centrípeta es

$$F = \frac{(120\text{ kg})(2.5\text{ m/s})^2(180\text{ m})^2}{(50\text{ m})^3} = 194\text{ N (alrededor de 44 lb)}.$$

(*b*) A 5 m de la nave, la velocidad sube en un factor de 10 a 90 m/s, mientras que la fuerza aumenta en un factor de $10^3$ a $1.94 \times 10^5$ N, o ¡alrededor de 22 tons! Está claro que el astronauta no puede ejercer tal fuerza para regresar a la nave. Incluso si el astronauta fuera arrastrado hacia la nave por medio de un malacate desde el interior de la nave, la cuerda no podría soportar una tensión tan grande; en algún punto se rompería y el astronauta saldría disparado hacia el espacio con la velocidad tangencial que tuviera en el momento de romperse la cuerda. Conclusión: Los astronautas que caminen por el espacio deben evitar adquirir una velocidad tangencial. ¿Qué podría hacer el astronauta para regresar con seguridad a la nave?

**Problema muestra 5** Una tornamesa que consta de un disco de 125 g de masa y un radio de 7.2 cm gira a una velocidad angular de 0.84 rev/s en torno a un eje vertical (Fig. 17*a*). De repente, se deja caer un disco idéntico, que inicialmente no estaba girando, sobre el primero. La fricción entre los dos discos causa que eventualmente giren a la misma velocidad. Sobre estos dos, se deja luego caer un tercer disco idéntico, que inicialmente no estaba girando, siguiendo los tres en giro juntos (Fig. 17*b*). (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular de rotación de la combinación? (*b*) ¿Cuánta energía cinética de rotación se pierde debido a la fricción? (*c*) Un motor que impulse al primer disco debe restituir la velocidad angular de la combinación a su valor original en una revolución. ¿Qué torca constante deberá ejercer el motor?

**Solución** (*a*) Este problema es el análogo de rotación de la colisión completamente inelástica. No existe una torca vertical neta, de modo que la componente vertical del ímpetu angular es constante. La fuerza de fricción entre los discos es una fuerza interna, la cual no puede cambiar el ímpetu angular. Entonces se aplica la ecuación 16, y podemos escribir:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$\omega_f = \omega_i(I_i/I_f).$$

Sin hacer ningún cálculo detallado, sabemos que la inercia de rotación de tres discos idénticos en torno a su eje común será tres veces la inercia de rotación de un solo disco. Entonces, $I_i/I_f = \frac{1}{3}$ y

$$\omega_f = (0.84\text{ rev/s})(\tfrac{1}{3}) = 0.28\text{ rev/s}.$$

(*b*) La inercia de rotación de un disco con respecto a su eje es $\frac{1}{2}MR_2$, así que, para cada disco,

$$I = \tfrac{1}{2}(0.125\text{ kg})(0.072\text{ m})^2 = 3.24 \times 10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

La energía cinética de rotación inicial es

$$\begin{aligned} K_i &= \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(3.24 \times 10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(2\pi\text{ rad/rev} \times 0.84\text{ rev/s})^2 \\ &= 4.51 \times 10^{-3}\text{ J}. \end{aligned}$$

Podemos seguir un procedimiento más rápido calculando la energía cinética final, porque sabemos que la inercia de rotación final sube en un factor de 3, mientras que la velocidad angular final baja en un factor de $\frac{1}{3}$. Puesto que la energía cinética depende del cuadrado de la velocidad angular, tenemos

$$\begin{aligned} K_f = K_i \times 3 \times (\tfrac{1}{3})^2 &= (\tfrac{1}{3})(4.51 \times 10^{-3}\text{ J}) \\ &= 1.50 \times 10^{-3}\text{ J}. \end{aligned}$$

El cambio en la energía cinética es

$$\begin{aligned} \Delta K = K_f - K_i &= (1.50 \times 10^{-3}\text{ J}) - (4.51 \times 10^{-3}\text{ J}) \\ &= -3.01 \times 10^{-3}\text{ J}. \end{aligned}$$

El signo menos indica que la energía cinética se pierde.

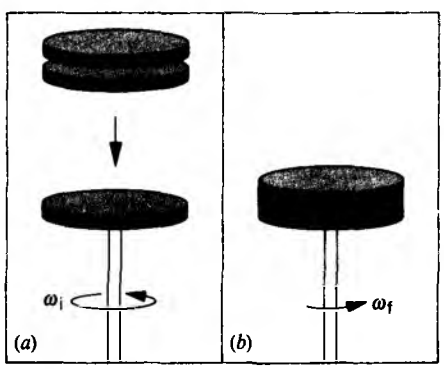



**Figura 17** Problema muestra 5. (*a*) Un disco que gira con una velocidad angular inicial $\omega_i$. (*b*) Dos discos idénticos, ninguno de los cuales está girando inicialmente, se dejan caer sobre el primero, y todo el sistema gira entonces con una velocidad angular $\omega_f$.

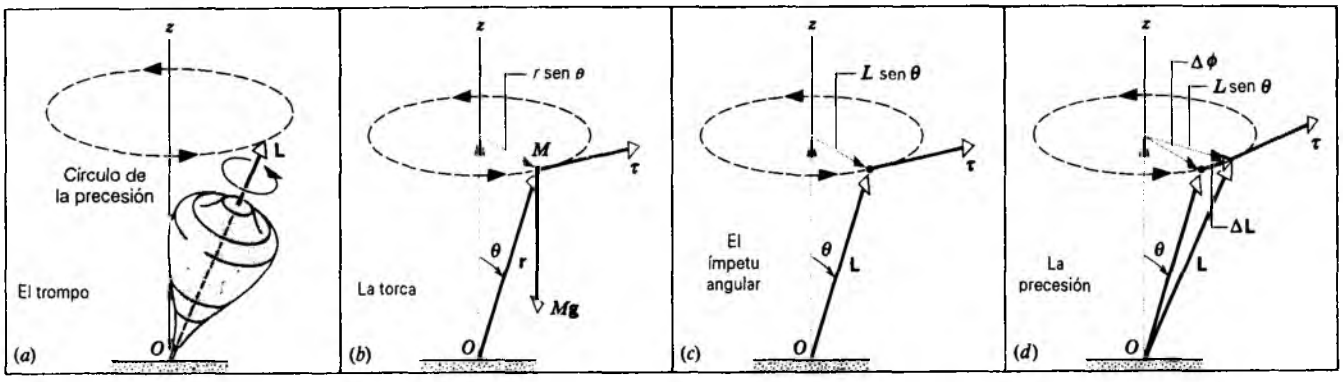



**Figura 18** (*a*) Un trompo gira en precesión alrededor de un eje vertical. (*b*) El peso del trompo ejerce una torca con respecto al punto de contacto con el suelo. (*c*) La torca es perpendicular al vector del ímpetu angular. (*d*) La torca cambia la dirección del vector del ímpetu angular, causando la precesión.

(*c*) Para restituir la velocidad angular inicial, el motor tendrá que aumentar $\omega$ desde 0.28 rev/s hasta 0.84 rev/s, esto es, en un factor de 3. Eso significa que la energía cinética debe aumentar en un factor de $3^2 = 9$, desde $1.50 \times 10^{-3}$ J hasta $13.5 \times 10^{-3}$ J. El cambio en energía cinética, que es igual al trabajo efectuado por el motor, es

$$\Delta K = 13.5 \times 10^{-3}\ \text{J} - 1.50 \times 10^{-3}\ \text{J} = 12.0 \times 10^{-3}\ \text{J}.$$

En el movimiento de rotación, el trabajo está dado por $W = \tau\phi$, donde $\phi$ (= $2\pi$ rad en este caso) es el desplazamiento angular del cuerpo que gira por medio del cual debe mantenerse la torca. Entonces

$$\tau = \frac{W}{\phi} = \frac{\Delta K}{\phi} = \frac{12.0 \times 10^{-3}\ \text{J}}{2\pi\ \text{rad}} = 1.91 \times 10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

## 13-5 EL TROMPO*

Un trompo nos proporciona el ejemplo quizá más conocido del fenómeno mostrado en la figura 4*b*, donde una torca lateral cambia la dirección pero no la magnitud de un ímpetu angular. La figura 18*a* muestra un trompo que gira en torno a su eje. Se supone que la punta inferior del trompo está fija en el origen *O* de nuestro marco de referencia inercial. Sabemos por experiencia que el eje de este trompo que gira rápidamente se moverá lentamente en torno al eje vertical. Este movimiento se llama *precesión*, y surge de la configuración ilustrada en la figura 4*b*, donde la gravedad proporciona la torca externa.

La figura 18*b* muestra un diagrama simplificado, en el cual el trompo se halla sustituido por una partícula de masa *M* ubicada en el centro de masa del trompo. La fuerza gravitatoria *Mg* proporciona una torca con respecto a *O* de magnitud

$$\tau = Mgr \operatorname{sen}\theta. \tag{17}$$

La torca, que es perpendicular al eje del trompo y, por lo tanto, perpendicular a **L** (Fig. 18*c*), puede cambiar la dirección de **L** pero no su magnitud. El cambio en **L** en un tiempo $\Delta t$ está dado por

$$\Delta\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau}\,\Delta t \tag{18}$$

y está en la misma dirección que $\tau$, esto es, perpendicular a **L**. El efecto de $\tau$ es, por lo tanto, cambiar **L** a **L** + $\Delta$**L**, un vector de la misma longitud que **L** pero que apunta en una dirección diferente. (Suponemos que el trompo gira tan rápidamente que **L** es grande, y entonces $\mathbf{L} \gg \Delta\mathbf{L}$.)

Si el trompo tiene simetría axial, entonces el ímpetu angular estará a lo largo del eje de rotación del trompo. Al cambiar **L** de dirección, el eje cambia de dirección también. La punta del vector **L** y el eje del trompo trazan un círculo en torno al eje *z*, como se muestra en la figura 18*a*. Este movimiento es la precesión del trompo.

En un tiempo $\Delta t$, el eje gira en un ángulo $\Delta\phi$ (véase la Fig. 18*d*), y entonces la rapidez angular de la precesión es

$$\omega_P = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}. \tag{19}$$

De la figura 18*d* vemos que

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L \operatorname{sen}\theta} = \frac{\tau\,\Delta t}{L \operatorname{sen}\theta}. \tag{20}$$

Entonces

$$\omega_P = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L \operatorname{sen}\theta} = \frac{Mgr \operatorname{sen}\theta}{L \operatorname{sen}\theta} = \frac{Mgr}{L}. \tag{21}$$

* Véase "The Amateur Scientist: The Physics of Spinning Tops, Including Some Far-Out Ones", por Jearl Walker, *Scientific American*, marzo de 1981, pág. 185.

La velocidad de la precesión es inversamente proporcional al ímpetu angular; cuanto más rápido esté girando el trompo, más lenta será la precesión.

El movimiento de precesión ocurre en torno al eje z, y entonces el vector $\omega_P$ está en la dirección de z. Le será posible a usted demostrar que la siguiente ecuación vectorial da la relación apropiada entre las magnitudes y las direcciones de las variables dinámicas en este cálculo:

$$\tau = \omega_P \times \mathbf{L}. \qquad (22)$$

¿Puede usted escribir una ecuación vectorial similar para el caso correpondiente de una partícula que se mueva en círculo a velocidad constante bajo la influencia de una fuerza centrípeta?

## 13-6 CUANTIZACIÓN DEL ÍMPETU ANGULAR *(Opcional)*

En la sección 8-8 hemos estudiado la cuantización de la energía, la cual se restringía a la emisión o absorción de la energía de forma que tuviese lugar solamente en haces discretos o cuantos. En el mundo microscópico de los sistemas atómicos y subatómicos, no podemos cambiar la energía en una cantidad arbitraria, sino solamente en cantidades de un tamaño predeterminado. Estos cuantos son tan diminutos que no nos es posible observar esta estructura discreta en los cambios de energía de sistemas de tamaño ordinario.

La cuantización del ímpetu angular ocurre de un modo similar. Desarrollaremos este concepto más extensamente, proporcionando una evidencia experimental y un soporte teórico, en el capítulo 51 de la versión ampliada de este texto cuando estudiemos la estructura de los átomos. Por ahora, simplemente presentaremos alguna de las ideas generales y mostraremos cómo se relacionan con las propiedades asociadas al ímpetu angular que hemos desarrollado en este capítulo.

Los cambios cuantizados del movimiento de rotación de un sistema se hallan restringidos a presentarse en unidades dadas por múltiplos enteros de una constante fundamental:

$$\Delta L = n(h/2\pi) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (23)$$

Aquí $h$ es la constante de Planck, que tiene un valor de $6.63 \times 10^{-34}$ J · s. Esta unidad básica es una cantidad de ímpetu angular extraordinariamente pequeña. Por ejemplo, un disco de fonógrafo gira con relativa lentitud pero tiene un ímpetu angular del orden de $10^{32}$ unidades de $h/2\pi$. Cuando afinamos las velocidades de nuestras tornamesas, ciertamente no nos es posible observar estos sencillos brincos discretos en una escala de ¡1 parte en $10^{32}$!

La ecuación 23 de la cuantización del ímpetu angular se aplica al movimiento de los electrones de los átomos en sus órbitas en torno al núcleo. Este sistema tiene un *ímpetu angular orbital*, el cual debe permanecer constante durante la órbita, porque la fuerza entre el electrón y el núcleo es una fuerza interna en el sistema y, por lo tanto, no puede cambiar su ímpetu angular. Las fuerzas externas, como los campos eléctricos o magnéticos, pueden provocar que el electrón brinque a otra órbita, donde su ímpetu angular pudiera tener un valor diferente, pero el cambio en $L$ debe ser un múltiplo entero de $h/2\pi$, como lo requiere la ecuación 23. El ímpetu angular orbital sirve entonces como un distintivo conveniente y útil de las órbitas electrónicas de los átomos.

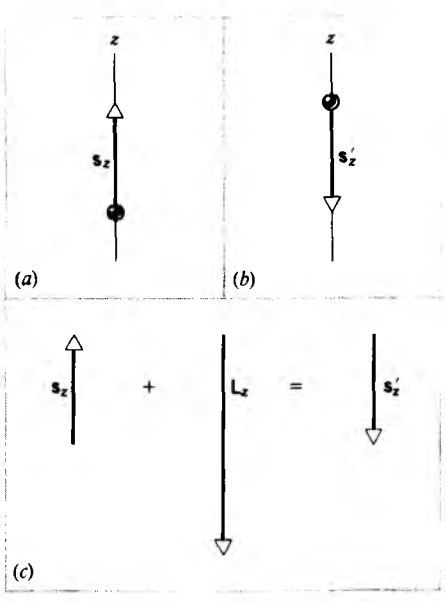



**Figura 19** (*a*) Un protón con un ímpetu angular intrínseco (espín) s tiene una componente $s_z$ a lo largo del eje z. (*b*) Después de absorber a un fotón, la componente z del espín se invierte. (*c*) La componente z del ímpetu angular inicial, igual a la unidad $+\frac{1}{2}$, se suma a la componente z del ímpetu angular del fotón, igual a la unidad −1, dando por resultado una unidad de $-\frac{1}{2}$.

Los experimentos efectuados en los años 1920 indicaban que los electrones de los átomos tenían otra clase de ímpetu angular, que no podía ser responsable del movimiento orbital. Esta nueva clase de ímpetu angular, que se conoce como *ímpetu angular intrínseco*, es una propiedad característica de la propia partícula y no es un resultado de su estado de movimiento en particular. Una manera útil (pero estrictamente incorrecta) de visualizar el ímpetu angular intrínseco es en términos del giro de la partícula sobre su eje; por esta razón, al ímpetu angular intrínseco se le llama, a menudo, "espín" y se le indica con el símbolo s.

El electrón tiene un ímpetu angular intrínseco de $\frac{1}{2}(h/2\pi)$. Esto significa que, con relación a cualquier eje z que podamos elegir para definirla, la componente z del ímpetu angular debe ser

$$s_z = +\tfrac{1}{2}(h/2\pi) \quad \text{o} \quad s_z = -\tfrac{1}{2}(h/2\pi).$$

Nótese que la diferencia entre estas dos posibilidades, la cual pudiera corresponder a un *cambio* en la dirección del ímpetu angular intrínseco de un electrón, es $h/2\pi$, consistente con la ecuación 23.

Por lo general, el ímpetu angular intrínseco se expresa asignándole el *número cuántico del espín*, que es el ímpetu angular intrínseco en unidades de $h/2\pi$; el electrón tiene entonces un número del espín cuántico de $\frac{1}{2}$. El protón y el neutrón tienen también números del espín cuántico de $\frac{1}{2}$. El fotón (el haz cuantizado de radiación electromagnética) tiene un número del espín cuántico de 1. Todas las partículas elementales pueden caracterizarse por su número del espín cuántico, el cual se considera una propiedad fundamental de la partícula junto con su masa y carga eléctrica.



**Figura 20** Vista del cráneo de un paciente mediante la imagen de resonancia magnética (MRI).

Una aplicación importante del principio de conservación del ímpetu angular cuantizado consiste en el efecto conocido como *resonancia magnética nuclear*. Consideremos al protón (el núcleo del átomo de hidrógeno), con su número del espín cuántico de $\frac{1}{2}$. En la figura 19*a* se muestra una representación del ímpetu angular intrínseco del protón en una orientación particular. La componente $z$ del momento angular es $s_z = +\frac{1}{2}(h/2\pi)$. Si exponemos protones a la radiación de la energía apropiada, la absorción de un fotón electromagnético (espín = 1, ímpetu angular = $h/2\pi$) puede cambiar la componente $z$ del ímpetu angular del protón en una unidad, desde $+\frac{1}{2}(h/2\pi)$ hasta $-\frac{1}{2}(h/2\pi)$, como en la figura 19*b*. La adición de las componentes $z$ de **s** y de **L** en la figura 19*c* muestra cómo se suman el espín inicial $s_z$ del protón y el ímpetu angular $L_z$ del fotón para dar el espín final (invertido) $s_z'$ del protón. La figura 19*c* es otro ejemplo más de la conservación del ímpetu angular, siendo el ímpetu angular inicial (**s** + **L**) igual al ímpetu angular final (**s**′) en ausencia de una torca externa.

En la resonancia magnética nuclear (NMR o *nuclear magnetic resonance*), se usa un campo magnético estático en la dirección $z$ para alinear los giros del protón con el eje $z$, como en la figura 19*a*. Un campo electromagnético separado que varía con el tiempo a frecuencias de radio proporciona fotones de apenas la energía correcta para ser absorbidos y provoca que los giros del protón se inviertan.

Puesto que el cuerpo humano está formado en su mayoría de agua, la cual es rica en hidrógeno, la absorción de esta radiación electromagnética provee un modo de formar una imagen de los órganos internos del cuerpo (figura 20). Se cree que la radiación electromagnética en forma de ondas de radio significa poco peligro para el cuerpo; los rayos **X**, que se usan también para formar imágenes, tienen un potencial mucho más grande para causar daño al organismo. Las *imágenes de resonancia magnética* pueden reemplazar ampliamente las fotografías con rayos **X** como técnica de diagnóstico. ■

## 13-7 DINÁMICA DE LA ROTACIÓN: UN REPASO

En los capítulos 11 al 13 hemos presentado una visión general de los temas de la dinámica y la cinemática de la rotación. Un tratamiento completo del tema queda fuera del alcance de este texto, pero existen muchas situaciones físicas que pueden ser analizadas usando los resultados que hemos derivado. Es importante recordar que algunos de nuestros resultados pueden aplicarse *solamente* en ciertas situaciones especiales. Para ayudar al lector a este respecto, hemos reunido algunas ecuaciones fundamentales de la dinámica de la rotación en la tabla 1.

**TABLA 1** RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE LA DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

| *Ecuación* | *Observaciones* |
|---|---|
| | I. Ecuaciones de definición |
| $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ | Torca sobre una partícula con respecto a un punto $O$ debido a una fuerza **F**. |
| $\tau_{ext} = \sum \tau_n$ | Torca externa resultante de un sistema de partículas sobre el que actúan varias torcas individuales $\tau_n$ con respecto a un punto $O$. |
| $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ | Ímpetu angular de una partícula con respecto a un punto $O$. |
| $\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_n$ | Ímpetu angular resultante de un sistema de partículas con respecto a un punto $O$. |
| | II. Relaciones generales |
| $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}$ | La ley del movimiento de una sola partícula aislada sobre la que actúa una torca $\tau$. Tanto $\tau$ como **l** se miden con respecto a un punto $O$ de un marco de referencia inercial. Esta expresión es el análogo rotatorio de la expresión $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ del movimiento de traslación. |
| $\sum \tau_{ext} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ | La ley del movimiento para un sistema de partículas sobre el que actúa una torca externa resultante. Se mantiene solamente $\tau_{ext}$ si y **L** se miden con respecto a (1) cualquier punto $O$ fijo en un marco de referencia inercial |

**TABLA 1** RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE LA DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

| *Ecuación* | *Observaciones* |
|---|---|
| | III. Caso especial |
| Los resultados siguientes se cumplen en el caso de un cuerpo rígido que gire con respecto a un eje que esté fijo en un marco de referencia inercial. | |
| $\tau = I\alpha$ | $\alpha$ debe estar a lo largo del eje; $I$ debe referirse también al eje, y $\tau$ es la componente escalar de $\tau_{ext}$ a lo largo del mismo eje. Esto es el análogo rotatorio de $F = Ma$. |
| $L = I\omega$ | $\omega$ debe estar a lo largo del eje; $I$ debe referirse también al eje,, y $L$ debe ser la componente escalar del ímpetu angular total a lo largo de este eje. Esto es el análogo rotatorio de $P = Mv$. |

## PREGUNTAS

1. Hasta aquí nos hemos encontrado con muchas cantidades vectoriales, incluyendo la posición, el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el ímpetu, y el ímpetu angular. ¿Cuáles de éstas se definen independientemente de la elección del origen en el marco de referencia?
2. Un físico ilustre (R. W. Wood), quien gusta de las bromas prácticas, montó un volante que giraba rápidamente en una maleta; la maleta la dio a un maletero con instrucciones de que éste lo siguiera. ¿Qué pasará si el maletero era conducido muy deprisa a doblar una esquina? Explique en términos de $\tau = d\mathbf{L}/dt$.
3. Un cilindro gira a una velocidad angular $\omega$ alrededor de un eje que pasa por un extremo, como en la figura 21. Elija un origen apropiado y muestre cualitativamente los vectores $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$. ¿Son estos vectores paralelos? ¿Intervienen aquí consideraciones de simetría?

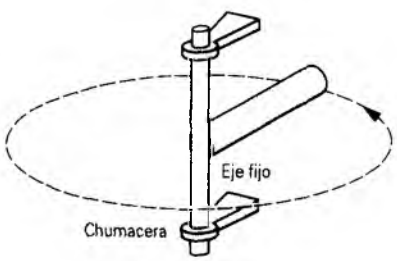



**Figura 21** Pregunta 3.

4. Suponga que una barra uniforme descansa en una posición vertical sobre una superficie de fricción despreciable. Entonces se le da a la barra un golpe horizontal en su extremo inferior. Describa el movimiento del centro de masa de la barra en su extremo superior.
5. Si el aparato de la figura 5 se ancla al piso de una gran nave espacial que se halle flotando en una región carente de gravidez, ¿de qué manera, si existe alguna, afectaría esta acción al experimento?
6. Un automóvil con impulsión en las ruedas traseras acelera rápidamente desde el reposo. El conductor observa que el automóvil "levanta la nariz". ¿Por qué sucede esto? Se comportaría de modo diferente un automóvil con impulsión en las ruedas delanteras?
7. Una saeta gira en su vuelo de modo que resulte tangente a la trayectoria del vuelo en todo momento. Sin embargo, una pelota de fútbol americano (arrojada con un giro considerable con respecto a su eje largo) no lo hace así. ¿Por qué existe diferencia en el comportamiento de una y otra?
8. Un pasador lanza una pelota de fútbol americano que vuela en espiral hacia el receptor. ¿Es su ímpetu angular constante, o casi constante? Distinga entre los casos en que la pelota se bambolea y en los que no lo hace.
9. ¿Puede usted sugerir una teoría sencilla que explique la estabilidad de una bicicleta en movimiento? Usted debe explicar por qué es mucho más difícil mantener el equilibrio sobre una bicicleta que esté en reposo que sobre una que esté en marcha. (Véase "The Stability of the Bicycle", por David E. H. Jones, *Physics Today*, abril de 1970, pág. 34.)
10. ¿Por qué una barra larga le ayuda a un equilibrista que camine por un cable a mantener el equilibrio?
11. Usted está caminando a lo largo de un riel angosto y comienza a perder el equilibrio. Si comenzara a caerse hacia la derecha, ¿de qué modo deberá hacer girar su cuerpo para recuperar el equilibrio? Explique.
12. Los pernos de montaje que fijan los motores de los aviones de propulsión a chorro al bastidor estructural del mismo están diseñados para partirse en dos instantáneamente si el motor (que gira rápidamente) se agarrotara en forma súbita debido a alguna avería. ¿Por qué se emplean estos "fusibles estructurales"?
13. Un jugador de hockey enojado arroja un palo a lo largo del hielo. El palo gira en torno a su centro de masa al deslizarse hasta que llega al reposo por la acción de la fricción. Su movimiento de rotación se detiene en el preciso momento en que su centro de masa llega al reposo, ni antes ni después. Explique por qué.
14. Cuando la velocidad angular $\omega$ de un objeto aumenta, su momento angular puede o no aumentar también. Dé un ejemplo en que lo haga y otro en que no lo haga así.
15. Un estudiante está de pie sobre una mesa que gira con una velocidad angular $\omega$ mientras sostiene dos pesas iguales

con sus brazos estirados. Sin mover nada más, deja caer las dos pesas. ¿Qué cambio, si lo hay, existe en la velocidad angular del estudiante? ¿Se conserva el ímpetu angular? Explique sus respuestas.

**16.** El helicóptero levanta el vuelo girando sus aspas. ¿Por qué no gira el fuselaje del helicóptero en la dirección opuesta?

**17.** Un aeroplano monomotor debe ser "equilibrado" para que vuele a nivel. (El arreglo consiste en elevar un alerón y bajar el opuesto.) ¿Por qué es esto necesario? ¿Es esto necesario en un aeroplano bimotor en circunstancias normales?

**18.** La hélice de un aeroplano gira en sentido de las manacillas del reloj vista la hélice desde atrás. Cuando el piloto enfila hacia arriba después de un clavado empinado, decide aplicar el timón de dirección hacia la izquierda en el fondo del clavado para mantener su rumbo. Explique.

**19.** Muchos de los grandes ríos fluyen hacia el ecuador. ¿Qué efecto produce el sedimento que acarrean hacia al mar sobre la rotación de la Tierra?

**20.** Si toda la población mundial se concentrará en la Antlántida, afectaría esto la duración del día? Si así fuera, ¿en qué forma afectaría?

**21.** Una tornamesa circular gira con velocidad angular constante en torno a un eje vertical. No existe fricción ni una torca que la impulse. Una cazuela circular descansa sobre la tornamesa y gira con ella; véase la figura 22. El fondo de la cazuela está cubierto con una capa de hielo de espesor uniforme, la cual está, por supuesto, girando también con la cazuela. El hielo se funde pero de la cacerola no escapa ni una gota de agua. ¿Es ahora la velocidad angular más grande, la misma, o menor que la rapidez original? Dé las razones de su respuesta.

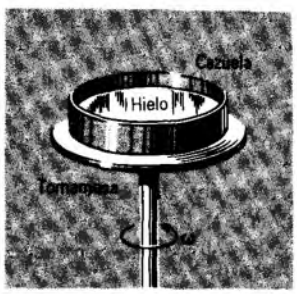



**Figura 22** Pregunta 21.

**22.** La figura 23*a* muestra a un acróbata lanzado hacia arriba por un trampolín con un ímpetu angular nulo. ¿Puede el acróbata, maniobrando su cuerpo, caer sobre su espalda como en la figura 23*b*? Como dato interesante, el 38% de los entrenadores de clavados a quienes se les preguntó y el 34% de un grupo de físicos seleccionados dieron la respuesta incorrecta. ¿Qué piensa usted? (Para un estudio completo, véase "Do Springboard Divers Violate Angular Momentum Conservation?", por Cliff Frohlich, *American Journal of Physics*, julio de 1979, pág. 583.)

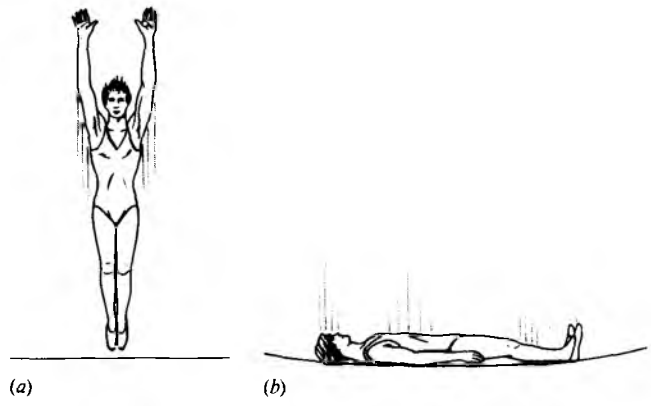



**Figura 23** Pregunta 22.

**23.** Explique exactamente, en términos del ímpetu angular y de la inercia de rotación, cómo se "genera" un balanceo en la posición de sentado en un columpio. (Véase "How to Get the Playground Swing Going: A First Lesson in The Mechanics of Rotation", por Jearl Walker, *Scientific American*, marzo de 1989, pág. 106.)

**24.** ¿Puede usted columpiarse de forma que logre girar en un círculo completo, moviéndose totalmente alrededor del soporte de un columpio? Suponga (si lo desea) que el asiento del columpio está unido a su soporte por una barra rígida en lugar de una cuerda o una cadena. Explique su respuesta.

**25.** Una tornamesa circular gira libremente en torno a un eje vertical. No existe fricción en el eje de rotación. (*a*) Un bicho, inicialmente en el centro de la tornamesa, camina hacia el borde y se detiene. ¿Cómo cambia el ímpetu angular del sistema (tornamesa + bicho)? ¿Cómo cambia la velocidad angular de la tornamesa? (*b*) Si el bicho se cae del borde de la tornamesa (sin brincar), cómo cambiará la velocidad angular de la tornamesa?

**26.** Una rueda giratoria de gran masa puede ser utilizada para producir un efecto estabilizador sobre un buque. Si está montada con su eje de rotación en ángulo recto con la cubierta del buque, ¿cuál será su efecto cuando el buque tienda a bambolearse de un lado a otro?

**27.** Si el trompo de la figura 18 no estuviese girando, se caería. Si su ímpetu angular de giro es grande comparado con el cambio causado por la torca aplicada, el trompo entraría en precesión. ¿Qué pasa entre tanto, cuando el trompo gira lentamente?

**28.** Un *Tippy-Top*, con una sección de una superficie esférica de radio grande sobre un extremo y una espiga para girar sobre el extremo opuesto, descansará sobre su superficie esférica sin girar pero deslizándose hacia un lado después de girar, de modo que se quede parado sobre la espiga. Explique. (Véase "The Tippy-Top", por George D. Freier, *The Physics Teacher*, enero de 1967, pág. 36.) Si usted no tiene a la mano un *Tippy-Top*, use un huevo duro; el comportamiento de "pararse sobre una punta" del huevo al girar se sigue más fácilmente si se pone una marca de tinta en el extremo "puntiagudo" del huevo.

## PROBLEMAS

### *Sección 13-1 Ímpetu angular de una partícula*

1. Si se nos dan $r, p$, y $\theta$, podemos calcular el ímpetu angular de una partícula a partir de la ecuación 2. Sin embargo, a veces se nos dan en su lugar las componentes $(x, y, z)$ de $\mathbf{r}$ y $(v_x, v_y, v_z)$ de $\mathbf{v}$. (*a*) Demuestre que las componentes de $\mathbf{l}$ a lo largo de los ejes $x, y$, y $z$ están entonces dados por

$$l_x = m(yv_z - zv_y),$$
$$l_y = m(zv_x - xv_z),$$
$$l_z = m(xv_y - yv_x).$$

(*b*) Demuestre que si la partícula se mueve solamente en el plano $xy$, el vector del ímpetu angular resultante tiene sólo una componente $z$. (*Sugerencia*: véase la ecuación 17 del capítulo 3.)

2. Una partícula $P$ con 2.13 kg de masa tiene una posición $\mathbf{r}$ y una velocidad $\mathbf{v}$, como se muestra en la figura 24. Sobre ella actúa la fuerza $\mathbf{F}$. Los tres vectores están en un plano común. Suponga que $r = 2.91$ m, $v = 4.18$ m/s, y $F = 1.88$ N. Calcule (*a*) el ímpetu angular de la partícula y (*b*) la torca, con respecto al origen, que actúa sobre la partícula. ¿Cuáles son las direcciones de estos dos vectores?

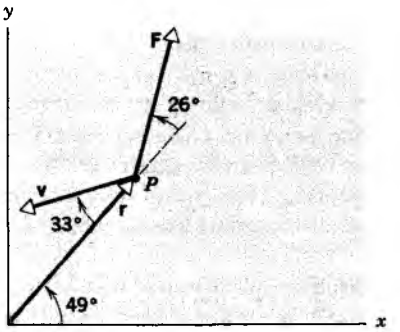



**Figura 24** Problema 2.

3. Demuestre que el ímpetu angular con respecto a cualquier punto de una sola partícula que se mueva a velocidad constante permanece constante durante el movimiento.
4. (*a*) Utilice los datos de los apéndices para calcular el ímpetu angular total de todos los planetas debido a su vuelta alrededor del Sol. (*b*) ¿Qué fracción de esto se asocia con el planeta Júpiter?
5. Dos partículas, cada una de masa $m$ y velocidad $v$, viajan en direcciones opuestas a lo largo de líneas paralelas separadas por una distancia $d$. Halle una expresión para el ímpetu angular total del sistema con respecto a cualquier origen.
6. Calcule el ímpetu angular, respecto al centro de la Tierra, de una persona de 84.3 kg situada en el ecuador de la Tierra en rotación.

### *Sección 13-2 Sistemas de partículas*

7. El ímpetu angular total de un sistema de partículas respecto al origen $O$ de un marco de referencia inercial está dado por $\mathbf{L} = \Sigma \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$, en donde $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{p}_i$ están medidos con respecto a $O$. (*a*) Utilice las relaciones $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}_i'$ y $\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{p}_i'$ para expresar a $\mathbf{L}$ en términos de las posiciones $\mathbf{r}_i'$ y los ímpetus $\mathbf{p}_i'$ en relación al centro de masa $C$; véase la figura 25. (*b*) Utilice la definición del centro de masa y la definición del ímpetu angular $\mathbf{L}'$ con respecto al centro de masa para obtener $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{v}_{cm}$. (*c*) Demuestre cómo puede ser interpretado este resultado teniendo en cuentas que el ímpetu angular total es la suma del momento angular de giro (ímpetu angular con relación al centro de masa) más el ímpetu angular orbital (ímpetu angular del movimiento del centro de masa $C$ con respecto a $O$ si toda la masa del sistema estuviese concentrada en $C$).

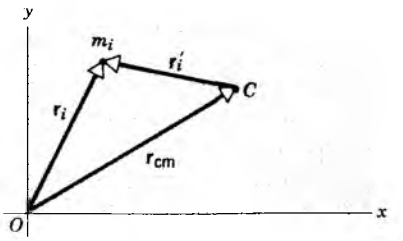



**Figura 25** Problemas 7 y 8.

8. Sea $\mathbf{r}_{cm}$ el vector de posición del centro de masa $C$ de un sistema de partículas respecto al origen $O$ de un marco de referencia inercial, y sea $\mathbf{r}_i'$ el vector de posición de la $i$ésima partícula, de masa $m_i$, con respecto al centro de masa $C$. De aquí que $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}_i'$ (véase la Fig. 25). Definamos ahora que el ímpetu angular total del sistema de partículas con relación al centro de masa $C$ sea $\mathbf{L}' = \Sigma \mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i'$, en donde $\mathbf{p}_i' = m_i\, d\mathbf{r}_i'/dt$. (*a*) Demuestre que $\mathbf{p}_i' = m_i\, d\mathbf{r}_i/dt - m_i d\mathbf{r}_{cm}/dt = \mathbf{p}_i - m_i\mathbf{v}_{cm}$. (*b*) Demuestre después que $d\mathbf{L}'/dt = \Sigma \mathbf{r}_i' \times d\mathbf{p}_i'/dt$. (*c*) Combine los resultados de (*a*) y (*b*) y, usando la definición del centro de masa y la tercera ley de Newton, demuestre que $\tau_{ext}' = d\mathbf{L}'/dt$, donde $\tau_{ext}'$ es la suma de todas las torcas externas que actúan sobre el sistema con respecto a su centro de masa.

### *Sección 13-3 Ímpetu angular y velocidad angular*

9. La integral con respecto al tiempo de una torca se llama *impulso angular*. (*a*) A partir de $\tau = d\mathbf{L}/dt$, demuestre que el impulso angular resultante es igual al cambio en ímpetu angular. Esto es la analogía de rotación de la relación impulso-ímpetu lineal. (*b*) Para una rotación alrededor de un eje fijo, demuestre que

$$\int \tau\, dt = \bar{F}r(\Delta t) = I(\omega_f - \omega_i),$$

donde $r$ es el brazo del momento de la fuerza, $\bar{F}$ es el valor promedio de la fuerza durante el tiempo que actúa sobre el objeto, y $\omega_i$ y $\omega_f$ son las velocidades angulares del objeto justo antes y justo después de actuar la fuerza.

**10.** Un disco abrasivo con una inercia de rotación de $1.22 \times 10^{-3}$ kg · m² está unido a un taladro eléctrico cuyo motor desarrolla una torca de 15.8 N · m. Halle (*a*) el ímpetu angular y (*b*) la velocidad angular del disco 33.0 ms después de haber encendido el motor.

**11.** Una rueda de 24.7 cm, que se mueve inicialmente a razón de 43.3 m/s, rueda hasta detenerse en 225 m. Calcule (*a*) su aceleración lineal y (*b*) su aceleración angular. (*c*) La inercia de rotación de la rueda es 0.155 kg · m²; calcule la torca ejercida por la fricción sobre la rueda al rodar.

**12.** Dos ruedas, *A* y *B*, están conectadas por una banda como en la figura 26. El radio de *B* es tres veces el radio de *A*. ¿Cuál sería la razón de las inercias de rotación $I_A/I_B$ si (*a*) ambas ruedas tienen los mismos ímpetus angulares y (*b*) las dos ruedas tienen la misma energía cinética de rotación? Suponga que la banda no se patina.

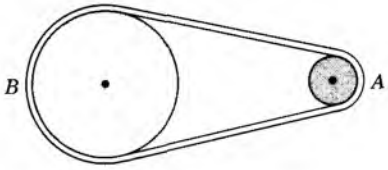



**Figura 26** Problema 12.

**13.** Demuestre que $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ para el sistema de dos partículas de la figura 7.

**14.** Usando los datos de los apéndices, halle el ímpetu angular del giro de la Tierra respecto a su propio eje de rotación. Suponga que la Tierra es una esfera uniforme.

**15.** El ímpetu angular de un volante que tiene una inercia de rotación de 0.142 kg · m² disminuye de 3.07 a 0.788 kg · m²/s en 1.53 s. (*a*) Halle la torca promedio que actúa sobre el volante durante este periodo. (*b*) Suponiendo una aceleración angular uniforme, ¿en qué ángulo habrá girado el volante? (*c*) ¿Cuánto trabajo se efectuó sobre el volante? (*d*) ¿Cuánta potencia promedio fue suministrada por el volante?

**16.** La figura 27 muestra un cuerpo rígido simétrico que gira en torno a un eje fijo. El origen de coordenadas ha sido fijado por conveniencia en el centro de masa. Probar, sumando las contribuciones hechas al ímpetu angular por todos los elementos de masa $m_i$ en que está dividido el cuerpo, que $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, donde $\mathbf{L}$ es el ímpetu angular *total*.

**17.** Un polín tiene una masa de 4.42 kg y una longitud de 1.23 m. Inicialmente está en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción y es golpeado perpendicularmente por un disco de hule que le imparte una fuerza impulsiva horizontal de 12.8 N · s de impulso a una distancia de 46.4 cm del centro. Determine el movimiento subsiguiente del polín.

**18.** Un cilindro rueda hacia abajo por un plano inclinado en un ángulo $\theta$. Demuestre, por aplicación directa de la ecuación 8 ($\Sigma\tau_{ext} = d\mathbf{L}/dt$), que la aceleración de su centro de masa es $\frac{2}{3}g$ sen $\theta$. Compare este método con el empleado en el problema muestra 8 del capítulo 12.

**19.** Para hacer que una bola de billar ruede sin deslizarse desde el reposo, el taco debe golpear a la bola no en el centro

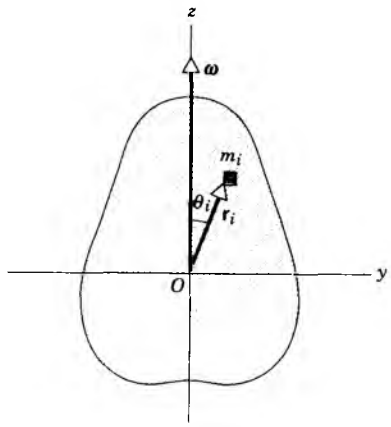



**Figura 27** Problema 16.

(esto es, no a una altura sobre la mesa igual al radio *R* de la bola) sino exactamente a una altura de $2R/5$ sobre el centro. Demuestre este resultado. [Véase Arnold Sommerfeld, *Mechanics, Volume I of Lectures on Theoretical Physics*, Academic Press, Orlando (edición en rústica de 1964), págs. 158 a 161, para un suplemento sobre la mecánica de los billares.]

**20.** El eje del cilindro de la figura 28 está fijo y el cilindro está inicialmente en reposo. El bloque de masa *M* se está moviendo inicialmente hacia la derecha sin fricción con una velocidad $v_1$. Pasa sobre el cilindro a la posición señalada en líneas punteadas. Cuando hace contacto por primera vez con el cilindro, se desliza sobre el cilindro, pero la fricción es suficientemente grande como para que el deslizamiento cese antes de que *M* pierda contacto con el cilindro. El cilindro tiene un radio *R* y una inercia de rotación *I*. Halle la velocidad final $v_2$ en términos de $v_1$, *M*, *I*, y *R*. Esto puede hacerse más fácilmente usando la relación entre el impulso y el cambio de ímpetu.

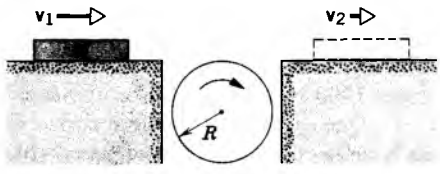



**Figura 28** Problema 20.

**21.** Un barrote de longitud *L* y masa *M* está sobre una mesa horizontal sin fricción sobre la cual puede moverse libremente de cualquier modo. Un disco de hule de los usados en el hockey sobre hielo de masa *m*, que se mueve como se muestra en la figura 29 con velocidad *v*, choca elásticamente con el barrote. (*a*) ¿Qué cantidades se conservan en la colisión? (*b*) ¿Cuál debe ser la masa *m* del disco de hule con el fin de que permanezca en reposo inmediatamente después de la colisión?

**22.** Dos cilindros que tienen radios $R_1$ y $R_2$ e inercias de rotación $I_1$ e $I_2$, respectivamente, están soportados por ejes

perpendiculares al plano de la figura 30. El cilindro grande gira inicialmente a una velocidad angular $\omega_0$. El cilindro pequeño se mueve hacia la derecha hasta que toca al cilindro grande y comienza a girar a causa de la fuerza de fricción entre los dos. Al cabo de un tiempo, el resbalamiento cesa, y los dos cilindros giran a razones constantes en direcciones opuestas. Halle la velocidad angular final $\omega_2$ del cilindro pequeño en términos de $I_1$, $I_2$, $R_1$, $R_2$, y $\omega_0$. (*Sugerencia*: No se conserva ningún ímpetu angular ni la energía cinética. Aplíquese la ecuación del impulso angular a cada cilindro. Véase el problema 9.)

**23.** Una bola de billar, inicialmente en reposo, recibe de un taco un impulso rápido. El taco es sostenido horizontalmente a una distancia $h$ sobre la línea central como en la figura 31. La bola deja el taco a una velocidad $v_0$ y, a causa de una "inglesa hacia el frente", adquiere una velocidad final de $9v_0/7$. Demuestre que $h = 4R/5$, donde $R$ es el radio de la bola.

**24.** En el problema 23, imaginemos que **F** va a ser aplicada debajo de la línea central. (*a*) Demuestre que es imposible, con esta "inglesa en reversa", reducir la velocidad hacia adelante a cero, sin que sobrevenga un rodamiento, a no ser que $h = R$. (*b*) Demuestre que es imposible darle a la bola una velocidad hacia atrás, a no ser que **F** tenga una componente vertical hacia abajo.

**25.** Un bolichista lanza una bola de boliche de radio $R$ = 11.0 cm a lo largo de la pista con una velocidad inicial $v_0$ = *8.50 m/s. La bola se lanza de forma que patina durante* cierta distancia antes de que comience a rodar. No gira en absoluto cuando toca primero la pista, siendo su movimiento una traslación pura. El coeficiente de fricción cinética entre la bola y la pista es de 0.210. (*a*) ¿Durante qué lapso de tiempo patina la bola? (*Sugerencia*: Mientras que la bola patine, su velocidad $v$ disminuye y su velocidad angular $\omega$ aumenta; el patinaje cesa cuando $v = R\omega$). (*b*) ¿A lo largo de qué distancia patina la bola? (*c*) ¿Cuántas vueltas da la bola antes de que comience a rodar? (*d*) ¿Con qué velocidad se mueve cuando empieza a rodar?

### *Sección 13-4 Conservación del ímpetu angular*

**26.** Las observaciones astronómicas demuestran que desde 1870 hasta 1900 la longitud del día aumentó unos $6.0 \times 10^{-3}$ s. (*a*) ¿Qué cambio fraccionario correspondiente resultó en la velocidad angular de la Tierra? (*b*) Supóngase que la causa de este cambio haya sido un desplazamiento del material fundido en el núcleo de la Tierra. ¿Qué cambio fraccionario resultante en la inercia de rotación de la Tierra podría considerarse para la respuesta a la parte (*a*)?

**27.** Supongamos que al Sol se le agote el combustible nuclear y súbitamente se colapse para formar la así llamada estrella enana blanca, con un diámetro igual al de la Tierra. Suponiendo que no hubiera pérdida de masa, ¿cuál sería entonces el nuevo periodo de rotación del Sol, que actualmente es de unos 25 días? Supóngase que el Sol y la estrella enana blanca sean esferas uniformes.

**28.** Una persona está de pie sobre una plataforma sin fricción que gira con una velocidad angular de 1.22 rev/s; sus brazos están en cruz y en cada mano sostiene una pesa. Con sus manos en esta posición la inercia de rotación total de la persona, junto con las pesas, y la plataforma es de 6.13 kg · m². Si al mover las pesas la persona disminuye la inercia de rotación a 1.97 kg · m², (*a*) ¿cuál es la velocidad angular resultante de la plataforma y (*b*) ¿cuál es la razón entre la nueva energía cinética y la energía cinética original?

**29.** En una clase demostrativa, se montan unos carriles de un tren de juguete sobre una rueda grande que puede girar libremente con fricción despreciable en torno a un eje vertical; véase la figura 32. Sobre los carriles se coloca un tren de juguete de masa $m$ y, con el sistema inicialmente en reposo, se conecta la potencia eléctrica. El trenecito llega a una velocidad uniforme $v$ respecto a los carriles. ¿Cuál es la velocidad angular $\omega$ de la rueda, si su masa es $M$ y su radio $R$? (Desprecie la masa de los rayos de la rueda.)

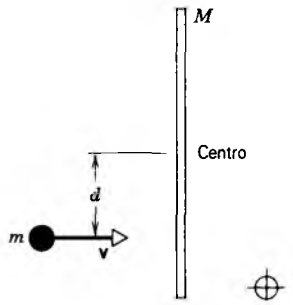



**Figura 29** Problema 21.

**30.** El rotor de un motor eléctrico tiene una inercia rotatoria $I_m = 2.47 \times 10_{-3}$ kg · m² respecto a su eje central. El motor está montado paralelo al eje de una sonda espacial que se mueve con una inercia rotatoria $I_p = 12.6$ kg · m² en torno a su eje. Calcule el número de vueltas necesarias para hacer girar a la sonda a través de 25.0° en torno a su eje.

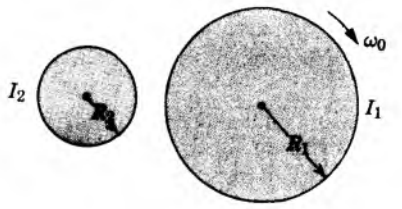



**Figura 30** Problema 22.

**31.** Una rueda con una inercia rotatoria de 1.27 kg · m² está girando a una velocidad angular de 824 rev/min en una flecha cuya inercia rotatoria es despreciable. Una segunda rueda, inicialmente en reposo y con una inercia rotatoria de 4.85 kg · m² se acopla de repente a la misma flecha. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular de la combinación resultante de la flecha y las dos ruedas? (*b*) ¿Qué fracción de la energía cinética original se pierde?

**32.** Con centro y rayos de masa despreciable, cierta rueda de bicicleta tiene un rin delgado de 36.3 cm de radio y 3.66 kg de masa; puede girar sobre su eje con una fricción despreciable. Un hombre sostiene a la rueda sobre su cabeza con

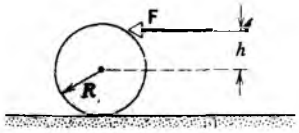



**Figura 31** Problema 23.

el eje vertical mientras está de pie sobre una tornamesa con libertad para girar sin fricción; la rueda gira en el sentido de las manecillas del reloj, vista desde arriba, con una velocidad angular de 57.7 rad/s, y la tornamesa está inicialmente en reposo. La inercia de rotación de rueda + hombre + tornamesa respecto al eje de rotación común es de 2.88 kg · m². (*a*) La mano del hombre detiene súbitamente la rotación de la rueda (relativa a la tornamesa). Determine la velocidad angular (magnitud y dirección) resultante del sistema. (*b*) Se repite el experimento introduciendo una fricción notable sobre el eje de la rueda, la cual, comenzando desde la misma velocidad angular inicial (57.7 rad/s), llega gradualmente al reposo (en relación a la tornamesa) mientras el hombre mantiene a la rueda como se describió antes. (La tornamesa puede todavía girar libremente sin fricción.) Describa qué le sucede al sistema, dando tanta información cuantitativa como los datos lo permitan.

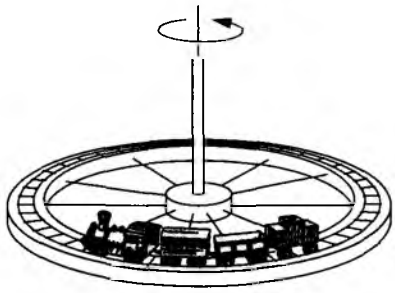


**Figura 32** Problema 29.

**33.** Una joven de 50.6 kg de masa está de pie sobre el borde de un tiovivo sin fricción de 827 kg de masa y 3.72 m de radio, que no se mueve. Lanza una piedra de 1.13 kg en una dirección horizontal tangente al borde exterior del tiovivo. La velocidad de la piedra, en relación al suelo, es de 7.82 m/s. Calcule (*a*) la velocidad angular del tiovivo y (*b*) la velocidad lineal de la joven después de haber lanzado la piedra. Suponga que el tiovivo es un disco uniforme.

**34.** En un parque de diversiones hay un pequeño tiovivo de 1.22 m de radio y 176 kg de masa. El radio de giro (véase el problema 11 del capítulo 12) es de 91.6 cm. Un niño de 44.3 kg de masa corre a una velocidad de 2.92 m/s tangente al borde del tiovivo cuando está en reposo y luego salta sobre él. Desprecie la fricción entre las chumaceras y la flecha del tiovivo y halle la rapidez angular del tiovivo y el niño.

**35.** Un disco plano uniforme de masa $M$ y radio $R$ gira en torno a un eje horizontal que pasa por su centro con una velocidad angular $\omega_0$. (*a*) ¿Cuál es su energía cinética? ¿Cuál es su ímpetu angular? (*b*) Del borde del disco se rompe en cierto momento un trozo de masa $m$, de modo que el trozo se eleva verticalmente sobre el punto en que se rompió (Fig. 33). ¿A qué altura de ese punto llegará antes de que comience a caer? (*c*) ¿Cuál es la velocidad angular final del disco roto?

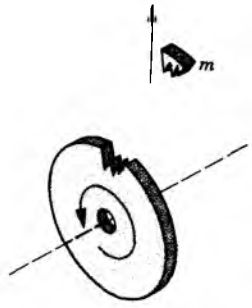



**Figura 33** Problema 35.

**36.** Una cucaracha, de masa $m$, corre en contra de las manecillas del reloj por el borde de un plato circular giratorio montado sobre un eje vertical de radio $R$ e inercia de rotación $I$ que tiene chumaceras sin fricción. La velocidad de la cucaracha (con relación a la Tierra) es $v$, mientras que el plato gira en sentido de las manecillas del reloj a una velocidad angular $\omega$. La cucaracha encuentra un miga de pan sobre el borde y, por supuesto, se detiene. (*a*) Halle la velocidad angular del plato después de haberse detenido la cucaracha. (*b*) ¿Cuánta energía cinética se ha perdido, si esto ha sucedido?

**37.** Una partícula se proyecta horizontalmente en el interior de un tazón hemisférico sin fricción de radio $r$, que se mantiene en reposo (Fig. 34). Deseamos hallar la velocidad inicial $v_0$ requerida para que la partícula llegue a la parte superior del tazón. Halle $v_0$ en función de $\theta_0$, la posición angular inicial de la partícula. (*Sugerencia*: Emplee los principios de la conservación.)

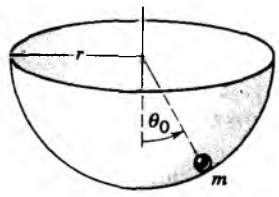
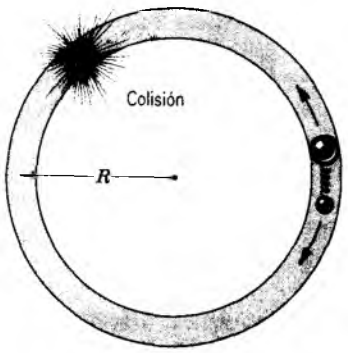



**Figura 34** Problema 37.

**38.** En una gran pista circular horizontal sin fricción, de radio $R$, se encuentran dos pequeñas bolas de masas $m$ y $M$, que pueden deslizarse libremente sobre la pista. Entre las dos bolas hay un resorte comprimido el cual, sin embargo, no se halla unido a las bolas. Las dos bolas se mantienen juntas por medio de un cordón. (*a*) Si el cordón se rompe,

el resorte comprimido (que se supone sin masa) dispara a las dos bolas en direcciones opuestas; el propio resorte queda atrás. Las bolas chocan cuando se encuentran de nuevo sobre la pista (Fig. 35). En dónde tiene lugar esta colisión? Exprese la respuesta en términos del ángulo, en radianes, a través del cual se desplaza la bola *M*. (*b*) La energía potencial inicialmente almacenada en el resorte era $U_0$. Halle el tiempo que trascurre desde que el cordón se rompe hasta que sucede la colisión. (*c*) Suponiendo que la colisión sea perfectamente elástica y de frente, ¿en dónde chocarían las bolas nuevamente después de la primera colisión?




**Figuras 35** Problema 38.

**39.** Dos patinadores, cada uno de 51.2 kg de masa, se aproximan uno al otro a lo largo de trayectorias paralelas separadas por 2.92 m. Tienen velocidades iguales y opuestas de 1.38 m/s. El primer patinador lleva en sus manos una barra ligera larga de 2.92 m de longitud, y el segundo patinador toma el extremo de ésta al pasar; véase la figura 36. Suponga que el hielo carece de fricción. (*a*) Describa cuantitativamente el movimiento de los patinadores después de que están unidos por la barra. (*b*) Ayudándose al jalar la barra, los patinadores reducen su separación a 0.940 m. Halle su velocidad angular entonces. (*c*) Calcule la energía cinética del sistema en las partes (*a*) y (*b*). ¿De dónde proviene el cambio?

**40.** Si las capas de hielo polar de la Tierra se fundiesen y el agua retornase a los océanos, éstos serían unos 30 m más profundos. ¿Qué efecto tendría esto sobre la rotación de la Tierra? Haga una estimación del cambio resultante en la longitud del día. (Se ha expresado la preocupación de que el calentamiento de la atmósfera como consecuencia de la contaminación industrial pudiera provocar que las capas de hielo se fundan.)

**41.** Se cree que la Tierra se formó hace unos 4500 millones de años, como una esfera de densidad aproximadamente uniforme. Poco tiempo después, el calor de la desintegración de elementos radiactivos hizo que gran parte de la Tierra se derritiera. Esto favoreció que el material más pesado se hundiera hacia el centro de la Tierra, formando el núcleo. Hoy día podemos representar a la Tierra con un núcleo de 3570 km de radio y 10.3 g/cm$^3$ de densidad rodeado por una capa de 4.50 g/cm$^3$ de densidad que se extiende hasta la superficie del planeta (6370 km de radio). Desconocemos la corteza de la Tierra. Calcule el cambio fraccionario en la longitud del día debido a la formación del núcleo.

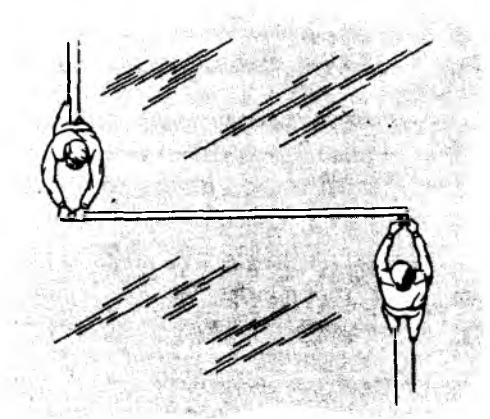


**Figura 36** Problema 39.

### *Sección 13-5 El trompo*

**42.** Un trompo gira a razón de 28.6 rev/s en torno a un eje que forma un ángulo de 34.0° con la vertical. Su masa es de 492 g y su inercia rotatoria es de $5.12 \times 10^{-4}$ kg · m$^2$. El centro de masa está a 3.88 cm del punto de pivoteo. El giro es en sentido de las manecillas del reloj visto desde arriba. Halle la magnitud (en rev/s) y la dirección de la velocidad angular de la precesión.

**43.** Un giroscopio consta de un disco rotatorio con un radio de 48.7 cm convenientemente montado en el punto central de un eje de 12.2 cm de longitud de modo que pueda girar y entrar en precesión libremente. Su velocidad de giro es de 975 rev/min. La masa del disco es de 1.14 kg y la masa del eje es de 130 g. Halle el tiempo requerido para una precesión si el eje está sujeto en un extremo y es horizontal.

### *Sección 13-6 Cuantización del ímpetu angular*

**44.** En 1913, Niels Bohr postuló que el ímpetu angular de cualquier sistema rotatorio mecánico con una inercia de rotación *I* está cuantizado. Esto es,

$$L = I\omega = n(h/2\pi),$$

donde *L* es el ímpetu angular y *n* es cualquier entero positivo o cero. (*a*) Demuestre que este postulado restringe a la energía cinética que el sistema rotatorio puede tener a un grupo de valores discretos: es decir, la energía está cuantizada; halle una expresión para la energía. (*b*) Consideremos al *rotador rígido*, consistente en una partícula de masa *m* obligada a girar en un círculo de radio *R*. ¿Con qué velocidades angulares podría girar la partícula si el postulado fuese correcto? ¿Qué valores de energía cinética podría tener? (*c*) Trace un diagrama energía-nivel como el de la figura 37, indicando cómo varía el espaciamiento entre los niveles de energía al aumentar *n*. Ciertas

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



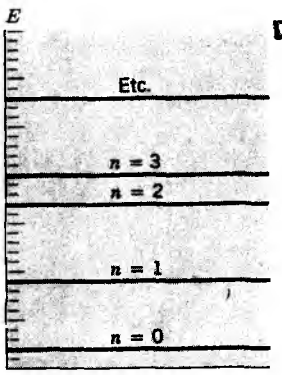



**Figura 37** Problema 44.

moléculas biatómicas de baja energía se comportan como un rotador rígido.

**45.** (*a*) Supongamos que el electrón se mueve en una órbita circular en torno al protón de un átomo de hidrógeno. La fuerza centrípeta sobre el electrón es proporcionada por una fuerza eléctrica $e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$, donde $e$ es la magnitud de la carga de un electrón y de un protón, $r$ es el radio de la órbita, y $\epsilon_0$ es una constante. Demuestre que el radio de la órbita es

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}$$

en donde $m$ es la masa del electrón y $v$ es su velocidad. (*b*) Suponga ahora que el ímpetu angular del electrón respecto al protón sólo puede tener valores que sean múltiplos enteros $n$ de $h/2\pi$, donde $h$ es *la constante de Planck*. Demuestre que las únicas órbitas posibles del electrón son aquéllas con un radio

$$r = \frac{nh}{2\pi m v}.$$

(*c*) Combine estos resultados para eliminar a $v$ y demuestre que las únicas órbitas que son consistentes con ambos requerimientos tienen radios

$$r = \frac{n^2\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}.$$

*De aquí que los radios permitidos sean proporcionales al* cuadrado de los enteros $n = 1, 2, 3$, etc. Cuando $n = 1$, $r$ es el más pequeño y tiene el valor de $0.529 \times 10^{-40}$ m.

### *Proyecto para la computadora*

**46.** Consideremos dos volantes que estén montados sobre la misma flecha pero libres de girar independientemente. El volante 1, que inicialmente gira a 100 rad/s, tiene una inercia rotatoria de 2.5 kg · m². El volante 2, que está inicialmente en reposo, tiene una inercia rotatoria de 1.5 kg · m². Al deslizar un volante a lo largo de la flecha ambos volantes entran en contacto entre sí, cara contra cara. Ejercen torcas entre sí y llegan a alcanzar la misma velocidad angular. (*a*) Suponga que no actúan otras torcas que las de cada volante entre sí y utilice el principio de la conservación del ímpetu angular para hallar la velocidad angular final de los volantes.

Si la torca de cada volante sobre el otro puede ser calculada, se puede usar una computadora para seguir a los volantes hasta que lleguen a la misma velocidad. Suponga que la torca del volante 2 sobre el volante 1 está dada por $\tau_1 = -0.20(\omega_1 - \omega_2)$, donde $\omega_1$ es la velocidad angular del volante 1 y $\omega_2$ es la velocidad angular del volante 2. Aquí $\tau_1$ está en N · m y las velocidades angulares están en rad/s. La torca del volante 1 sobre el volante 2 es $\tau_2 = +0.20(\omega_1 - \omega_2)$. Las torcas continúan actuando hasta que los volantes tengan la misma velocidad angular, y luego se anulan. Mientras están interactuando, el volante 1 obedece a $\tau_1 = I_1\alpha_1$ y el volante 2 obedece a $\tau_2 = I_2\alpha_2$. Estas ecuaciones son matemáticamente similares a las ecuaciones de la segunda ley de Newton y pueden ser integradas numéricamente de la manera descrita en la sección 6-6 y en los proyectos para la computadora al final del capítulo 6. Considere intervalos de tiempo de duración $\Delta t$ y suponga que el volante 1 tiene una posición angular $\theta_{1b}$ y una velocidad angular $\omega_{1b}$ al principio de un intervalo. Entonces, su posición angular y su velocidad angular al final del intervalo pueden aproximarse por $\theta_{1e} = \theta_{1b} + \omega_{1b}\Delta t$ y $\omega_{1e} = \omega_{1b} + \alpha_{1b}\Delta t = \omega_{1b} + (\tau_{1b}/I_1)\,\Delta t$, donde $\tau_{1b}$ es la torca al principio del intervalo. Se tienen ecuaciones similares para el volante 2. Cuanto más pequeño sea $\Delta t$ mejor será la aproximación.

(*b*) Escriba un programa de computación o diseñe una hoja de cálculo para hallar la velocidad angular de los volantes al final de cada segundo desde $t = 0$ hasta $t = 25$ s. Use un intervalo de integración de 0.001 s. Trace las velocidades angulares en función del tiempo en la misma gráfica, luego usar la gráfica o la lista de valores para hallar las velocidades angulares finales y compare el resultado con el valor obtenido en la parte (*a*).

(*c*) Para ver la influencia de una torca externa suponga que la torca que actúa sobre el volante 1 esta dada por $\tau_1 = -4.0 - 0.20\,(\omega_1 - \omega_2)$ y la torca que actúa sobre el volante 2 es $\tau_2 = +0.20(\omega_1 - \omega_2)$, donde las torcas están en N · m y las velocidades angulares en rad/s. Esto representa una torca externa de -4.0 N · m. Use el programa de computación para hallar las velocidades angulares de los volantes y el ímpetu angular total en cada 1 s desde $t = 0$ hasta $t = 25$ s. De nuevo, use un intervalo de integración de 0.001 s. Grafique las velocidades angulares en función del tiempo. Puesto que $\tau_{ext} = dL_{total}/dt$, la torca externa debería producir un cambio en el ímpetu angular total de $\Delta L = \tau_{ext}\Delta t = -4.0 \times 25 = -100$ kg · m/s durante los primeros 25 s. ¿Concuerdan sus resultados? ¿Cuál volante sufre el cambio (comparado con el caso de una torca externa nula); o queda el cambio compartido?

(*d*) La velocidad angular final no depende de los detalles de la torca que cada volante ejerce sobre el otro. ¿Qué depende de las torcas?

# CAPÍTULO 14

# EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS

*Las torres que soportan un puente colgante deben ser lo suficientemente fuertes como para que no se desplomen bajo el peso del puente y su carga de tránsito; el tren de aterrizaje de un aeroplano no debe romperse si el piloto realiza un mal aterrizaje; una silla no debe derrumbarse ni volcarse cuando nos sentemos en ella. En todos esos problemas el diseñador se preocupa de que estas estructuras supuestamente rígidas realmente permanezcan rígidas bajo las fuerzas y las torcas asociadas que actúen sobre ellas.*

*En esta clase de problemas debemos plantearnos dos preguntas: (1) ¿Qué fuerzas y torcas actúan sobre el cuerpo supuestamente rígido? (2) Teniendo en cuenta su diseño y los materiales empleados, ¿permanecerá rígido el cuerpo bajo la acción de estas fuerzas y torcas? En este capítulo nos ocuparemos a fondo de la primera pregunta. Para responder a la segunda, debemos estudiar con gran detalle las propiedades de los materiales. Queda fuera del propósito de este libro tratar este tema exhaustivamente; así, en la última sección de este capítulo ofrecemos una breve exposición.*

## 14-1 CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Se dice que un cuerpo rígido, como puede ser una silla, un puente, o un edificio, está en *equilibrio mecánico* si, visto desde un marco de referencia inercial, *tanto el ímpetu lineal* **P** *como el ímpetu angular* **L** *del cuerpo rígido tienen un valor constante.* De manera equivalente, podríamos decir que tanto la aceleración lineal $\mathbf{a}_{cm}$ de su centro de masa como la aceleración angular $\alpha$ respecto a cualquier eje fijo en el marco de referencia son cero.

Esta definición del equilibrio mecánico no requiere que el cuerpo esté en reposo; esto es, **P** y **L** no tienen necesariamente el valor constante de cero. Si *son* cero (o, lo que es lo mismo, si la velocidad del centro de masa $\mathbf{v}_{cm}$ y la velocidad angular $\omega$ respecto a cualquier eje en el marco son ambas cero), entonces estamos ante una situación de *equilibrio estático.*

En este capítulo buscamos cuáles son las restricciones que deben imponerse a las fuerzas y a las torcas que actúen sobre un cuerpo para crear una condición de equilibrio. Nos concentraremos en los casos de equilibrio estático, si bien, como veremos, las mismas restricciones son aplicables tanto si el equilibrio es estático como si no lo es.

El movimiento de traslación del centro de masa de un cuerpo rígido se rige por la ecuación 27 del capítulo 9,

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt},$$

en la que $\Sigma\, \mathbf{F}_{ext}$ es la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo. Si **P** tiene un valor constante, incluso cero, debemos tener que $d\mathbf{P}/dt = 0$. Así pues, la primera condición del equilibrio es que *la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúen sobre el cuerpo debe ser cero*, o sea

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = 0. \qquad (1)$$

Esta ecuación vectorial es equivalente a tres ecuaciones escalares:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum F_z = 0, \qquad (2)$$

donde, por conveniencia, hemos suprimido el subíndice "ext" de $F_{ext}$. Las ecuaciones 1 y 2 postulan que la suma

de las componentes de las fuerzas externas a lo largo de cada una de tres direcciones mutuamente perpendiculares es cero.

El movimiento rotatorio de un cuerpo rígido está regido por la ecuación 8 del capítulo 13, es decir,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

donde $\Sigma\tau_{\text{ext}}$ es la suma de todas las torcas externas que actúan sobre el cuerpo. Si el ímpetu angular $\mathbf{L}$ tiene cualquier valor constante, incluso cero, debemos tener que $d\mathbf{L}/dt = 0$. Por tanto, la segunda condición del equilibrio es que *la suma vectorial de todas las torcas externas que actúen sobre el cuerpo debe ser cero*, o sea,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = 0. \tag{3}$$

Esta ecuación vectorial puede expresarse como tres ecuaciones escalares (nuevamente suprimiendo el subíndice "ext"):

$$\sum \tau_x = 0, \qquad \sum \tau_y = 0, \qquad \sum \tau_z = 0, \tag{4}$$

que postulan que, en el equilibrio, la suma de las componentes de las torcas que actúan sobre un cuerpo, a lo largo de cada una de tres direcciones mutuamente perpendiculares, es cero.

La segunda condición del equilibrio es independiente de la elección del origen y de los ejes de coordenadas que se usen para calcular las componentes de las torcas. Si la torca neta es cero, entonces sus componentes son cero para *cualquier* elección de los ejes $x$, $y$, y $z$. Además, para un cuerpo en equilibrio, la elección del origen para calcular las torcas es irrelevante y puede hacerse según convenga; si $\tau = 0$ con respecto a un origen $O$ en particular, entonces es cero con respecto a cualquier otro punto en el marco de referencia de un cuerpo en equilibrio.

Probemos este último postulado. Supongamos que se aplican $N$ fuerzas externas sobre el objeto. Respecto al origen $O$, la fuerza $\mathbf{F}_1$ se ejerce en un punto ubicado en $\mathbf{r}_1$, la fuerza $\mathbf{F}_2$ en $\mathbf{r}_2$, y así sucesivamente. La torca neta con respecto a $O$ es, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\tau_O &= \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_N \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N.\end{aligned} \tag{5}$$

Supongamos que un punto $P$ está situado en el desplazamiento $\mathbf{r}_P$ con respecto a $O$ (Fig. 1). El punto de aplicación de $\mathbf{F}_1$, con respecto a $P$, es $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P)$. La torca con respecto a $P$ es

$$\begin{aligned}\tau_P &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_2 \\ &\quad + \cdots + (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_N \\ &= [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N] \\ &\quad - [\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_N].\end{aligned}$$

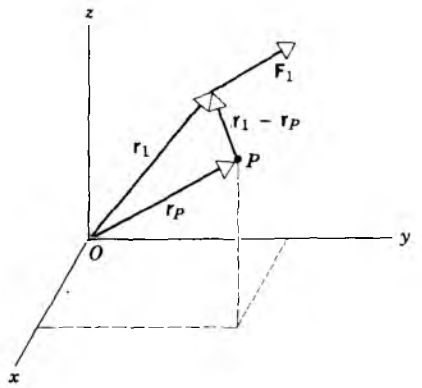



**Figura 1** La fuerza $\mathbf{F}_i$ es una de las $N$ fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido (no mostrado). El vector $\mathbf{r}_i$ sitúa al punto de aplicación de $\mathbf{F}_i$ con relación a $O$ y se usa para calcular la torca de $\mathbf{F}_i$ con respecto a $O$. El vector $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P$ se usa para calcular la torca de $\mathbf{F}_1$ con respecto a $P$.

El primer grupo de términos entre corchetes da $\tau_O$ de acuerdo con la ecuación 5. Podemos reescribir el segundo grupo suprimiendo el factor constante de $\mathbf{r}_P$:

$$\begin{aligned}\tau_P &= \tau_O - [\mathbf{r}_P \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N)] \\ &= \tau_O - \left[\mathbf{r}_P \times \left(\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}\right)\right] \\ &= \tau_O,\end{aligned}$$

donde llevamos a cabo el último paso porque $\Sigma\,\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ para un cuerpo en equilibrio de traslación. Entonces, la torca con respecto a dos puntos cualesquiera tiene el mismo valor cuando el cuerpo está en equilibrio de traslación.

A menudo tratamos con problemas en que todas las fuerzas están en un plano. En este caso las seis condiciones de las ecuaciones 2 y 4 se reducen a tres. Resolvemos las fuerzas en dos componentes:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \tag{6}$$

y, si calculamos las torcas con respecto a un punto que también esté en el plano $xy$, todos las torcas deben estar en la dirección perpendicular al plano $xy$. En este caso tenemos

$$\sum \tau_z = 0. \tag{7}$$

Nos limitaremos, sobre todo, a problemas en un plano para simplificar los cálculos; esta condición no impone ninguna restricción fundamental a la aplicación de los principios generales del equilibrio.

## 14-2 EL CENTRO DE GRAVEDAD

Una de las fuerzas que se encuentran en la dinámica del cuerpo rígido es la fuerza de la gravedad, la cual es

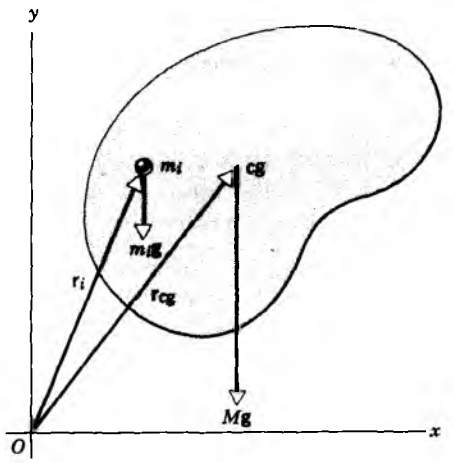



**Figura 2** Cada partícula de un cuerpo, como el representado con masa $m_i$, experimenta una fuerza gravitatoria como $m_i\mathbf{g}$. Todo el peso del cuerpo, aunque distribuido en todo su volumen como la suma de las fuerzas gravitatorias sobra todas sus partículas, puede ser reemplazado por una fuerza única de magnitud $Mg$ que actúa en el centro de gravedad. Si el campo gravitatorio es uniforme (esto es, el mismo para todas las partículas), el centro de gravedad coincide con el centro de masa, y entonces $\mathbf{r}_{cm}$ es el mismo que $\mathbf{r}_{cg}$.

responsable del peso del cuerpo. Con autoridad (y sin justificación), hemos representado a fuerza sobre un cuerpo de masa $M$ por medio de un vector aislado $M\mathbf{g}$ que actuaba en el centro de masa del cuerpo. Aquí justificaremos este paso y estudiaremos las condiciones bajo las cuales es válida.

El peso de un cuerpo extenso es en realidad la resultante de un gran número de fuerzas, cada una de ellas debida a la gravedad, que actúa sobre cada una de las partículas del cuerpo. Esto es, podemos reemplazar al vector suma de las fuerzas gravitatorias de todas las partículas de un cuerpo con una sola fuerza: el peso. Además, la resultante neta de las torcas gravitatorias correspondientes sobre todas las partículas puede ser reemplazada por la torca debida a esa fuerza única si imaginamos que actúa en un punto del cuerpo llamado el *centro de gravedad.*

Si la aceleración gravitatoria $\mathbf{g}$ tiene el mismo valor en todos los puntos del cuerpo, lo cual es así en todos los casos prácticos de interés, ocurren entonces dos simplificaciones: (1) el peso es igual a $M\mathbf{g}$, y (2) el centro de gravedad coincide con el centro de masa. Comprobemos estos dos resultados.

Imaginemos al cuerpo de masa $M$ dividido en un gran número de partículas. La fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la *i*ésima partícula de masa $m_i$ es $m_i\mathbf{g}$. Esta fuerza se halla dirigida hacia el centro de la Tierra. La fuerza neta sobre todo el objeto debida a la gravedad es la suma sobre todas y cada una de las partículas, o sea

$$\sum \mathbf{F} = \sum m_i\mathbf{g}. \tag{8}$$

Puesto que hemos supuesto que $\mathbf{g}$ tiene el mismo valor para cada partícula del cuerpo, podemos sacar el factor $\mathbf{g}$ de la suma de la ecuación 8, lo cual da

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{g} \sum m_i = M\mathbf{g}. \tag{9}$$

Esto comprueba la primera de las afirmaciones hechas anteriormente acerca de que podemos reemplazar a la fuerza resultante de la gravedad que actúa sobre todo el cuerpo por la fuerza única $M\mathbf{g}$.

Apliquemos ahora la condición de la torca, ecuación 3, tomando las torcas respecto al punto arbitrario $O$, como se muestra en la figura 2. El vector $\mathbf{r}_i$ localiza a la partícula de masa $m_i$ con relación a este origen. La torca neta en torno a este punto debida a la gravedad que actúa sobre todas las partículas es

$$\sum \tau = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g}) = \sum (m_i\mathbf{r}_i \times \mathbf{g}), \tag{10}$$

donde el último paso se toma introduciendo al escalar $m_i$ dentro de la suma. Una vez más usamos la constancia de $\mathbf{g}$ para sacarla de la suma, teniendo cuidado de no cambiar el orden de los vectores $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{g}$ de modo que el signo del producto cruz no cambie. Según la ecuación 12 del capítulo 9, la suma restante, $\Sigma\, m_i\mathbf{r}_i$ es precisamente $M\mathbf{r}_{cm}$, donde $\mathbf{r}_{cm}$ es el vector que sitúa al centro de masa del cuerpo con relación al origen $O$. En estos dos pasos, podemos expresar la ecuación 10 así:

$$\sum \tau = \left(\sum m_i\mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{g} = M\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{g}. \tag{11}$$

La torca resultante sobre el cuerpo es, entonces, igual a la torca que sería producida por la fuerza única $M\mathbf{g}$ que actúa en el centro de masa del cuerpo, y entonces el centro de gravedad (cg) coincide con el centro de masa, lo cual comprueba la segunda afirmación hecha anteriormente. Un corolario útil de la ecuación 11 es que *la torca debida a la gravedad en torno al centro de masa de un cuerpo es cero.*

¿En qué condiciones estará en equilibrio un cuerpo en la gravedad de la Tierra? Las ecuaciones 9 y 11 demuestran que, si aplicamos una fuerza única $\mathbf{F}'$ hacia arriba de magnitud $M\mathbf{g}$ en el centro de masa, entonces tanto la fuerza neta como la torca neta serán cero, y nuestras condiciones de equilibrio se cumplirán. Sin embargo, también es cierto que el cuerpo estará en equilibrio si la fuerza $\mathbf{F}'$ hacia arriba está aplicada en cualquier punto de una línea vertical que pase por el centro de masa. La torca neta es cero en este caso, porque $M\mathbf{g}$ y $\mathbf{F}'$ $(= -M\mathbf{g})$ tienen la misma línea de acción. Por lo tanto, podemos equilibrar un objeto aplicando una fuerza vertical $F'$ no sólo *en* el centro de masa, sino también en cualquier punto situado directamente *encima* o *debajo* del centro de masa.

Podemos emplear esta propiedad para hallar el centro de masa de un objeto extenso. Consideremos un cuerpo

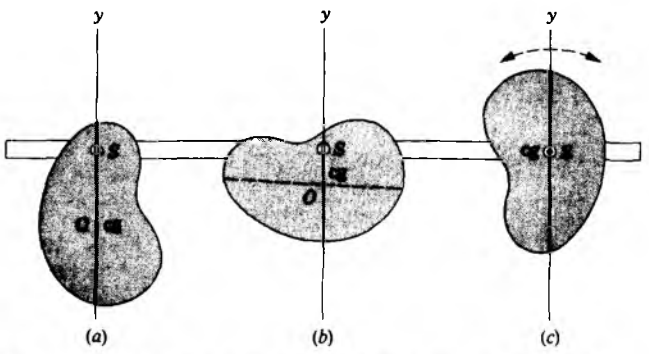



**Figura 3** Un cuerpo suspendido de un punto arbitrario *S*, como en (*a*) y (*b*), estará en equilibrio estable sólo si su centro de gravedad (cg) cuelga verticalmente bajo su punto de suspensión *S*. La línea punteada en (*b*) representa a la línea vertical en (*a*), demostrando que el centro de gravedad puede ser localizado al suspender al cuerpo de dos puntos diferentes en forma sucesiva. (*c*) Si un cuerpo es suspendido en su centro de gravedad, está en equilibrio sin importar cuál sea su orientación.

de forma arbitraria suspendido de un punto *S* (Fig. 3). El punto de soporte, que ejerce una fuerza hacia arriba $\mathbf{F}' = -M\mathbf{g}$, debe estar sobre una línea vertical con el centro de masa. Si trazamos una línea vertical a través de *S*, entonces sabemos que el centro de masa debe estar en algún punto de la línea. Podemos repetir el procedimiento tras una nueva elección del punto *S*, como en la figura 3*b*, y hallaremos una segunda línea que debe contener el centro de masa. El centro de masa debe, por lo tanto, estar en la intersección de las dos líneas.

Si suspendemos el objeto del centro de masa, como en la figura 3*c*, el cuerpo estará en equilibrio sin importar cuál sea su orientación. Podemos voltearlo a nuestro antojo y permanecerá en equilibrio. Esto ilustra el corolario de la ecuación 11: la torca debida a la gravedad es cero con respecto al centro de masa.

En esta sección hemos usado de manera indistinta los términos "centro de masa" y "centro de gravedad". El centro de masa se define así para cualquier cuerpo cuerpo y puede calcularse, según los métodos descritos en el capítulo 9, a partir del tamaño y la forma del cuerpo. Por otra parte, el centro de gravedad se define únicamente para los cuerpos situados dentro de un campo gravitatorio. Para calcular el centro de gravedad, debemos conocer no sólo los detalles geométricos del cuerpo, sino también la variación de **g** sobre el cuerpo. Si **g** no es constante sobre el cuerpo, entonces el centro de gravedad y el centro de masa no coinciden, y **g** no puede suprimirse de las sumas en las ecuaciones 8 y 10. Consideremos una barra uniforme como la que se muestra en la figura 4, cuyo eje está inclinado en cierto ángulo diferente de cero respecto a la horizontal. El centro de masa *C* está el centro geométrico de la barra. Si el eje de la barra fuese horizontal, el centro

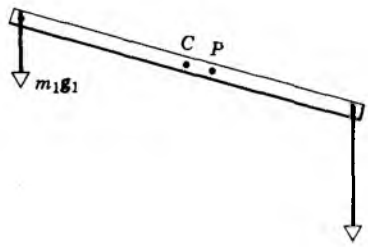



**Figura 4** Una barra uniforme en un campo gravitatorio no uniforme. El centro de gravedad está en *P*, el cual no coincide con el centro de masa *C*.

de gravedad *P* coincidiría con el centro de masa; esto es, una fuerza única hacia arriba $\mathbf{F}'$ (de igual magnitud a $Mg$) situada en *C* mantendría a la barra en equilibrio. Cuando el eje no es horizontal, esto no sucede así. Puesto que $g$ disminuye ligeramente con la distancia desde la Tierra, la partícula *N* en el extremo más bajo de la barra experimenta una atracción gravitatoria mayor que una partícula idéntica 1 en el extremo más alto. Para compensar la tendencia resultante de la barra a girar en sentido horario (o de las manecillas del reloj) en torno a *C*, el centro de gravedad *P* (el punto de aplicación de la fuerza equilibrante hacia arriba) debe estar situado un poco más abajo de *C*. Al cambiar el ángulo con la horizontal, cambiará la posición de *P*. Además, si movemos la barra a un lugar en donde $g$ tenga un valor diferente, la relación entre *P* y *C* para un ángulo de inclinación dado será diferente. Así, el centro de gravedad puede, en general, depender de la orientación del objeto, así como del campo gravitatorio local. Para una barra de un metro, inclinada en un ángulo de 45° en las cercanias de la superficie de la Tierra, la distancia entre el centro de masa y el centro de gravedad es de alrededor 18 nm, mucho más pequeña que la precisión con la que normalmente se trabaja en los problemas de equilibrio y, por lo tanto, completamente insignificante. En problemas de equilibrio, podemos suponer con seguridad que el centro de gravedad y el centro de masa coinciden.

## 14-3 EJEMPLOS DE EQUILIBRIO

Al aplicar las condiciones de equilibrio (fuerza resultante nula y torca resultante nula respecto a cualquier punto), podemos aclarar y simplificar el procedimiento como sigue.

En primer lugar, trazamos una frontera imaginaria alrededor del sistema en estudio. Esto ayuda a ver claramente a qué cuerpo o a qué sistema de cuerpos estamos aplicando las leyes de equilibrio. A este proceso se le llama *aislar al sistema.*

En segundo lugar, trazamos los vectores que representen la magnitud, la dirección, y el punto de aplicación

de todas las fuerzas *externas*. Una fuerza externa es aquella que actúa desde el exterior de la frontera que hayamos trazado en primer lugar. Ejemplos de fuerzas externas que se encuentran a menudo son las fuerzas gravitatorias y las fuerzas ejercidas por cuerdas, alambres, barras, y vigas que cruzan la frontera. Nótese que sólo es necesario considerar a las fuerzas externas que actúan sobre el sistema; todas las fuerzas internas se cancelan entre sí en pares.

Existen ciertos casos en que la dirección de una fuerza pudiera no ser obvia. Para determinar la dirección de cierta fuerza, tracemos un corte imaginario a través del miembro que ejerce la fuerza en el punto en que cruza la frontera. Si los extremos de este corte tienden a separarse, la fuerza actúa hacia afuera. En caso de duda, conviene elegir la dirección de la manera arbitraria. Un valor negativo de una fuerza en la solución significa que la fuerza actúa en dirección opuesta contraria a la que habríamos supuesto.

En tercer lugar, elegimos un sistema de coordenadas conveniente a lo largo de cuyos ejes resolvemos las fuerzas externas antes de aplicar la primera condición de equilibrio (Ecs. 1 ó 2). La meta, aquí, consiste en simplificar los cálculos. El sistema de coordenadas preferible es, por lo general, aquel que haga mínimo el número de fuerzas que deban ser resueltas en componentes.

En cuarto lugar, elegimos un sistema de coordenadas conveniente a lo largo de cuyos ejes resolvemos las torcas externas antes de aplicar la segunda condición de equilibrio (Ecs. 3 ó 4). Una vez más, la meta consiste en simplificar los cálculos, y podemos usar sistemas de coordenadas diferentes al aplicar las dos condiciones para el equilibrio estático si esto demuestra ser conveniente. Por ejemplo, al calcular las torcas con respecto a un punto a través del cual actúen varias fuerzas se eliminan las fuerzas de la ecuación de la torca.

En el equilibrio, las componentes de la torca que resulta de todas las fuerzas externas debe ser cero en torno a *cualquier* eje. Las torcas internas se cancelarán en pares y no necesitan ser consideradas. Seguimos la misma convención que en capítulos anteriores para el signo algebraico de la torca en torno a un eje en particular: tomamos a una torca como positiva si por sí misma produjera una rotación antihoraria en torno al eje.

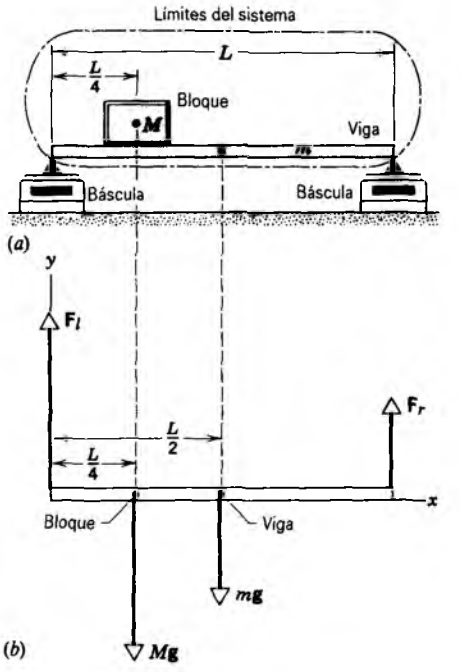



**Figura 5** Problema muestra 1. (*a*) Una viga de masa $m$ soporta a un bloque de masa $M$. Las básculas digitales muestran las fuerzas verticales ejercidas en los dos extremos de la viga. (*b*) Diagrama de cuerpo libre que muestra las fuerzas que actúan sobre el sistema consistente en viga + bloque.

**Problema muestra 1** Una viga uniforme de longitud $L$ cuya masa $m$ es de 1.8 kg descansa sobre sus extremos en dos básculas digitales, como en la figura 5*a*. Un bloque cuya masa $M$ es de 2.7 kg reposa sobre la viga, con su centro situado a un cuarto de $L$ a partir del extremo izquierdo de la viga. ¿Qué lectura arrojarán las básculas?

**Solución** Elegimos como nuestro sistema a la viga y al bloque juntos. La figura 5*b* es un diagrama de cuerpo libre de este sistema, que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. El peso de la viga, $m\mathbf{g}$, actúa hacia abajo en su centro de masa, el cual está en su centro geométrico, puesto que la viga es uniforme. De igual manera, $M\mathbf{g}$, el peso del bloque, actúa hacia abajo en su centro de masa. Las básculas empujan hacia arriba en los extremos de la viga con fuerzas $\mathbf{F}_l$ y $\mathbf{F}_r$. Lo que buscamos son las magnitudes de estas últimas dos fuerzas, reflejadas en las lecturas que dan las básculas.

Nuestro sistema está en equilibrio estático, de modo que se aplica la ecuación del equilibrio de las fuerzas (Ec. 6) y la ecuación del equilibrio de las torcas (Ec. 7). Resolveremos este problema de dos modos equivalentes.

**1.** *Primera solución.* Las fuerzas no tienen componentes $x$, y por lo tanto la condición de que $\Sigma Fx = 0$ no nos proporciona información alguna. Para las componentes $y$, tenemos

$$\sum F_y = F_l + F_r - Mg - mg = 0. \qquad (12)$$

Existen dos fuerzas desconocidas ($F_l$ y $F_r$) pero no podemos obtenerlas por separado porque sólo tenemos (hasta ahora) una ecuación. Por fortuna, tenemos otra ecuación a la mano, es decir, la ecuación 7, la ecuación de equilibrio de las torcas.

Podemos aplicar la ecuación 7 a cualquier eje que forme un ángulo recto con el plano de la figura 5. Elijamos un eje que pase por el extremo izquierdo de la viga, de modo que desaparezca la incógnita $F_l$ de la ecuación de la torca. Tendremos entonces, de la ecuación 7,

$$\sum \tau_z = (F_l)(0) + (F_r)(L) - (mg)(L/2) - (Mg)(L/4) = 0, \qquad (13)$$

o sea

$$F_r = (g/4)(M + 2m)$$
$$= (\tfrac{1}{4})(9.8\ \text{m/s}^2)[2.7\ \text{kg} + 2(1.8\ \text{kg})] = 15\ \text{N}.$$

Nótese cómo nuestra elección elimina a la fuerza $F_l$ de la ecuación de la torca y nos permite resolver directamente para la otra fuerza. Si nos hubiéramos inclinado por tomar las torcas respecto a cualquier punto arbitrario, habríamos obtenido una ecuación en la que $F_l$ y $F_r$ podrían resolverse simultáneamente con la ecuación 12. Nuestra elección de ejes nos ayuda a simplificar el álgebra un tanto pero, por supuesto, de ninguna manera cambia la solución final.

Si sustituimos el valor de $F_r$ en la ecuación 12 y resolvemos para $F_l$, hallamos que

$$F_l = (M + m)g - F_r$$
$$= (2.7 \text{ kg} + 1.8 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) - 15 \text{ N} = 29 \text{ N}.$$

Nótese que la altura del centro de masa del bloque no interviene en la solución de este problema. ¿Es esto físicamente razonable?

**2.** *Segunda solución.* Como comprobación, resolvamos este problema de un modo diferente, aplicando la ecuación de equilibrio de las torcas en torno a dos ejes diferentes. Al elegir a un eje que pase por el extremo izquierdo de la viga, como lo hicimos anteriormente, hallamos la solución $F_r = 15$ N.

Para un segundo eje que pase por el extremo derecho de la viga, la ecuación 7 nos da

$$\sum \tau_z = (F_r)(0) - (F_l)(L) + (mg)(L/2) + (Mg)(3L/4) = 0. \quad (14)$$

Resolviendo para $F_l$, hallamos

$$F_l = (g/4)(3M + 2m)$$
$$= (\tfrac{1}{4})(9.8 \text{ m/s}^2)[3(2.7 \text{ kg}) + 2(1.8 \text{ kg})] = 29 \text{ N},$$

de acuerdo con nuestro resultado anterior. Nótese que la longitud de la viga no interviene explícitamente en este problema.

La solución para las dos incógnitas en este problema ($F_l$ y $F_r$) exige dos ecuaciones independientes. En este segundo método, nuestras dos ecuaciones (Ecs. 13 y 14) provienen de las dos ecuaciones de las torcas; la ecuación de la fuerza (Ec. 12) no proporciona una información independiente. De hecho, como puede demostrarse, al restar las dos ecuaciones de las torcas nos da la ecuación de la fuerza.

**Problema muestra 2** Un bolichista sostiene en la palma de la mano una bola de boliche cuya masa $M$ es de 7.2 kg. Como lo muestra la figura 6*a*, el brazo está vertical y el antebrazo está horizontal. ¿Qué fuerzas deberán ejercer el músculo bíceps y la estructura ósea del brazo sobre el antebrazo? El antebrazo y la mano juntos tienen una masa $m$ de 1.8 kg, y las dimensiones necesarias son $d = 4.0$ cm, $D = 15$ cm, y $L = 33$ cm.

**Solución** Nuestro sistema consta del antebrazo y la bola de boliche juntos. La figura 6*b* muestra un diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas desconocidas son **T**, la fuerza ejercida por el músculo bíceps, y **F**, la fuerza ejercida por el brazo sobre el antebrazo. Al igual que en el problema muestra 1, todas las fuerzas son verticales.

Partiendo de la ecuación 6, $\Sigma F_y = 0$, hallamos

$$\sum F_y = T - F - mg - Mg = 0. \quad (15)$$

Aplicando la ecuación 7 respecto a un eje que pase por $O$ y tomando las rotaciones en sentido antihorario como positivas, obtenemos

$$\sum \tau_z = (T)(d) + (F)(0) - (mg)(D) - (Mg)(L) = 0. \quad (16)$$

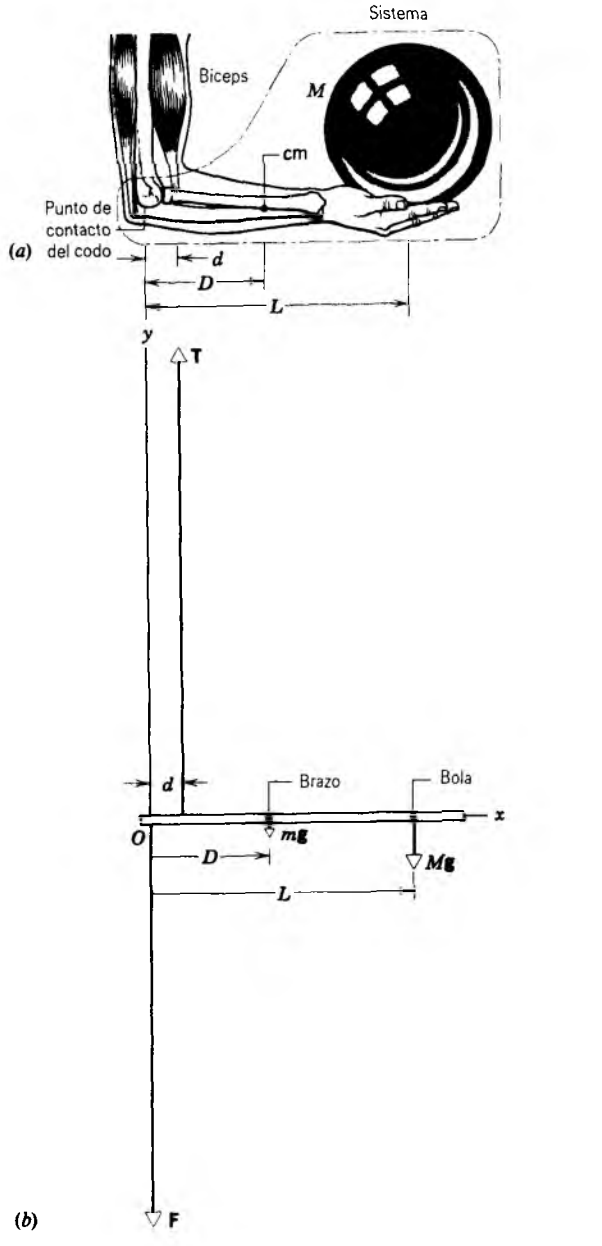



**Figura 6** Problema muestra 2. (*a*) Una mano sostiene una bola de boliche. Se marca la frontera del sistema. (*b*) Diagrama de cuerpo libre, que muestra las fuerzas que actúan. Los vectores están a escala, mostrando las potentes fuerzas ejercidas por el músculo bíceps y por el brazo en la articulación del codo (punto $O$).

Al elegir que nuestro eje pase por el punto $O$, hemos eliminado la variable $F$ de esta ecuación. La ecuación 16, resuelta para $T$, nos da

$$T = g\frac{mD + ML}{d}$$
$$= (9.8 \text{ m/s}^2)\frac{(1.8 \text{ kg})(15 \text{ cm}) + (7.2 \text{ kg})(33 \text{ cm})}{4.0 \text{ cm}}$$
$$= 648 \text{ N} = 146 \text{ lb}.$$

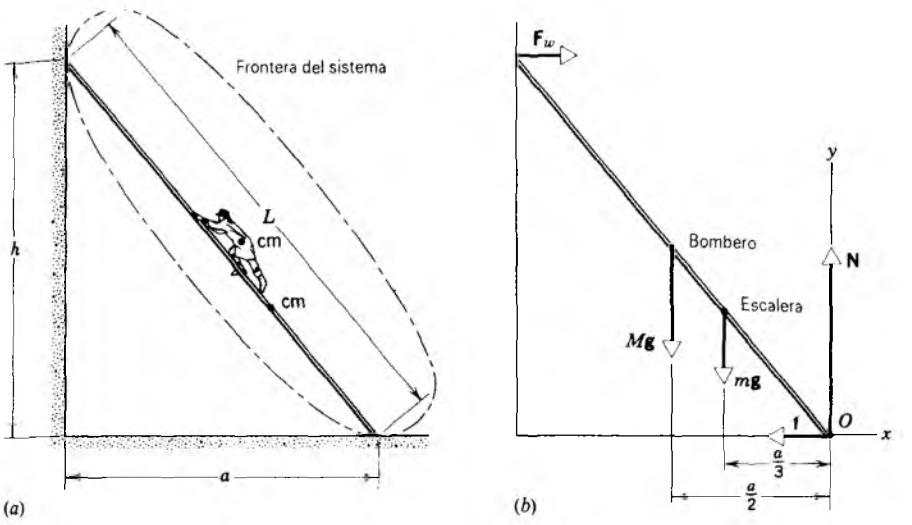



**Figura 7** Problemas muestra 3 y 4. (*a*) Un bombero está a medio camino de una escalera apoyada contra una pared sin fricción. (*b*) Diagrama de cuerpo libre, que muestra (a escala) las fuerzas que actúan.

Entonces el músculo bíceps debe jalar del antebrazo con una fuerza que sea alrededor de nueve veces más grande que el peso de la bola de boliche.

Si resolvemos la ecuación 15 para $F$ y sustituimos en ella el valor de $T$ dado arriba, hallamos

$$\begin{aligned} F &= T - g(M + m) \\ &= 648 \text{ N} - (9.8 \text{ m/s}^2)(7.2 \text{ kg} + 1.8 \text{ kg}) \\ &= 560 \text{ N} = 126 \text{ lb}. \end{aligned}$$

La fuerza $F$ es también grande, siendo alrededor de ocho veces el peso de la bola de billar.

**Problema muestra 3** Una escalera cuya longitud $L$ es de 12 m y cuya masa $m$ es de 45 kg descansa contra una pared. Su extremo superior está a una distancia $h$ de 9.3 m del suelo, como vemos en la figura 7*a*. El centro de masa de la escalera está a un tercio del camino hacia arriba. Un bombero cuya masa $M$ es de 72 kg sube por la escalera. Suponga que la pared, pero no el suelo, carece de fricción. ¿Qué fuerzas ejercen sobre la escalera la pared y el suelo?

**Solución** La figura 7*b* muestra un diagrama de cuerpo libre. La pared ejerce una fuerza horizontal $\mathbf{F}_w$ sobre la escalera; no puede ejercer fuerza vertical alguna porque se supone que el punto de contacto entre la pared y la escalera está libre de fricción. El suelo ejerce una fuerza sobre la escalera con una componente horizontal $f$ debida a la fricción y una componente vertical $N$, la fuerza normal. Elegimos los ejes de coordenadas como se muestra, con el origen $O$ en el punto en que la escalera se apoya en el suelo. La distancia $a$ desde la pared al pie de la escalera se halla fácilmente a partir de

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = \sqrt{(12 \text{ m})^2 - (9.3 \text{ m})^2} = 7.6 \text{ m}.$$

Partiendo de la ecuación 6, la ecuación de equilibrio de las fuerzas, tenemos que, respectivamente,

$$\sum F_x = F_w - f = 0 \qquad (17)$$

y

$$\sum F_y = N - Mg - mg = 0. \qquad (18)$$

La ecuación 18 da

$$\begin{aligned} N &= g(M + m) \\ &= (9.8 \text{ m/s}^2)(72 \text{ kg} + 45 \text{ kg}) = 1150 \text{ N}. \end{aligned}$$

Partiendo de la ecuación 7, la ecuación del equilibrio de las torcas, tenemos, tomando un eje que pase por $O$, el punto de contacto de la escalera con el suelo,

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (Mg)(a/2) + (mg)(a/3) = 0. \qquad (19)$$

Esta acertada elección de la posición de los ejes elimina dos variables, $f$ y $N$, de la ecuación de equilibrio de las torcas. Podemos hallar, resolviendo la ecuación 19 para $F_w$,

$$\begin{aligned} F_w &= \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} \\ &= \frac{(9.8 \text{ m/s}^2)(7.6 \text{ m})[(72 \text{ kg})/2 + (45 \text{ kg})/3]}{9.3 \text{ m}} = 410 \text{ N}. \end{aligned}$$

Partiendo de la ecuación 17 tenemos

$$f = F_w = 410 \text{ N}.$$

**Problema muestra 4** En el problema muestra 3, el coeficiente de fricción estática $\mu_s$ entre la escalera y el suelo es de 0.54. ¿A qué altura puede subir el bombero antes de que la escalera empiece a deslizarse?

**Solución** En el problema muestra 3 hallamos que, cuando el bombero está a medio camino hacia arriba en la escalera, la fuerza normal $N$ es 1150 N. La fuerza *máxima* de fricción estática es $f_{máx} = \mu_s N = (0.54)(1150 \text{ N}) = 620$ N. La fuerza real de fricción hemos hallado en ese problema era $f = 410$ N, que es menor que $f_{máx}$. Al continuar subiendo el bombero, $f$ aumentará, y ocurrirá un deslizamiento cuando el bombero haya subido una distancia $d$ a lo largo de la escalera, de modo que $f = f_{máx}$. Deseamos hallar la distancia $d$.

Las fuerzas que actúan tienen la misma nomenclatura que los de la figura 7. Al aplicar la ecuación 7 en torno a un eje que pase por el punto de contacto de la escalera con el suelo, tenemos

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (mg)(a/3) + (Mg)(da/L) = 0,$$

donde $da/L$ es la distancia horizontal entre $O$ y la línea de acción del peso $Mg$ del bombero. Resolviendo para $F_w$, hallamos

$$F_w = \frac{ga}{h}\left(M\frac{d}{L} + \frac{m}{3}\right). \tag{20}$$

La ecuación 20 nos muestra que al subir el bombero por la escalera (esto es, al aumentar $d$), la fuerza $F_w$ ejercida por la pared debe aumentar para que se mantenga el equilibrio. Para hallar a $d$ en el punto de deslizamiento, debemos primero hallar a $F_w$.

La ecuación 6 del equilibrio de fuerzas en la dirección $x$ nos da

$$\sum F_x = F_w - f = 0.$$

En el punto de deslizamiento, tendremos entonces que

$$F_w = f = f_{\max} = \mu_s N. \tag{21}$$

De la ecuación 6 para el equilibrio de fuerzas en la dirección $y$, tenemos

$$\sum F_y = N - Mg - mg = 0,$$

o sea

$$N = g(M + m). \tag{22}$$

Al combinar las ecuaciones 21 y 22, tenemos

$$F_w = \mu_s g(M + m). \tag{23}$$

Finalmente, si combinamos las ecuaciones 20 y 23 y resolvemos para $d$, tendremos

$$d = L\left[\frac{\mu_s h}{a}\frac{(M+m)}{M} - \frac{m}{3M}\right]$$

$$= (12\text{ m})\left[\frac{(0.54)(9.3\text{ m})}{7.6\text{ m}}\frac{(72\text{ kg} + 45\text{ kg})}{72\text{ kg}} - \frac{45\text{ kg}}{(3)(72\text{ kg})}\right]$$

$$= 10.4\text{ m}.$$

El bombero puede subir el 87% de la escalera antes de que comience a deslizarse.

¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo que permite que el bombero suba toda la escalera ($d = L$)? ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo necesario para hacer que la escalera no se deslice antes de que el bombero comience a subir?

**Problema muestra 5** Una viga uniforme de longitud $L$ = 3.3 m y masa $m$ = 8.5 kg está engoznada a una pared como en la figura 8*a*. Un alambre unido a la pared a una distancia $d$ = 2.1 m sobre el gozne está unido al otro extremo de la viga, siendo la longitud del alambre tal que la viga forma un ángulo de $\theta = 30°$ con la horizontal. Un cuerpo de masa $M$ = 56 kg está suspendido del extremo superior de la viga. Halle la tensión en el alambre y la fuerza ejercida por el gozne sobre la viga.

**Solución** La figura 8*b* muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre la viga, la cual hemos elegido como nuestro sistema. A causa de que dos de las fuerzas están dirigidas verticalmente hacia abajo, elegimos que nuestros ejes sean horizontal y vertical. La tensión en el alambre y la fuerza ejercida por el gozne sobre la viga están representadas por sus componentes horizontal y vertical.

Partiendo de la ecuación 6 para el equilibrio de traslación, obtenemos

$$\sum F_x = F_h - T_h = 0, \tag{24}$$

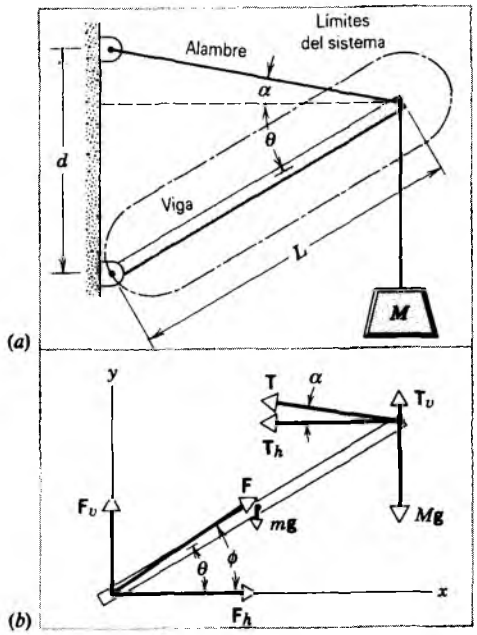



**Figura 8** Problema muestra 5. (*a*) Una viga soportada por un gozne situado en el extremo inferior de una pared y por un alambre unido a la pared en su extremo superior. Un objeto de masa $M$ cuelga del extremo superior de la viga. (*b*) Diagrama de cuerpo libre, que muestra las fuerzas que actúan sobre la viga. El gozne ejerce una fuerza $F$ y la tensión en el alambre proporciona una fuerza $T$.

y

$$\sum F_y = F_v + T_v - mg - Mg = 0. \tag{25}$$

Para aplicar la condición del equilibrio rotatorio, elegimos un eje que pase por el extremo superior de la viga. (¿Por qué?) Según la ecuación 7, tenemos entonces

$$\sum \tau_z = -F_v(L\cos\theta) + F_h(L\text{ sen }\theta) + mg\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) = 0,$$

o sea

$$F_v = F_h\tan\theta + \frac{mg}{2}. \tag{26}$$

Si sustituimos los valores numéricos, las ecuaciones 24 a 26 dan por resultado

$$F_h = T_h,$$

$$F_v + T_v = 632\text{ N},$$

y

$$F_v = (0.577)F_h + 41.7\text{ N}.$$

Observemos que tenemos cuatro incógnitas, a saber, $F_v$, $F_h$, $T_v$, y $T_h$, pero sólo tres ecuaciones que las relacionen. Necesitamos otra relación entre estas cantidades si queremos resolver este problema. Esta relación final se deduce del hecho de que $T_v$ y $T_h$ deben de sumarse para dar un vector resultante **T** dirigido a lo largo del alambre. El alambre (flexible) no puede soportar una fuerza transversal a su dimensión larga. [Nótese que esto no sucede así en el caso de la viga (rígida).] De aquí que nuestra cuarta ecuación sea

$$T_v = T_h \tan \alpha, \tag{27}$$

donde $\tan \alpha = (d - L \operatorname{sen} \theta)/(L \cos \theta) = 0.157$, que corresponde a $\alpha = 8.9°$. Así nuestra cuarta ecuación resulta ser

$$T_v = 0.157 T_h.$$

Al combinar las cuatro ecuaciones hallamos que, después de llevar a cabo el álgebra necesaria,

$$F_v = 506 \text{ N}, \quad F_h = 804 \text{ N}, \quad T_v = 126 \text{ N}, \quad T_h = 804 \text{ N}.$$

La tensión en el alambre será entonces

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = 814 \text{ N},$$

y la fuerza ejercida por el gozne sobre la viga es

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = 950 \text{ N}.$$

Nótese que tanto $T$ como $F$ son considerablemente más grandes que los pesos combinados de la viga y el cuerpo suspendido (632 N).

El vector **F** forma un ángulo con la horizontal de

$$\phi = \tan^{-1} \frac{F_v}{F_h} = 32.2°.$$

Entonces, el vector de la fuerza resultante que actúa sobre la viga en el gozne no apunta a lo largo de la dirección de la viga.

En los ejemplos anteriores hemos tenido cuidado de limitar el número de fuerzas desconocidas al número de ecuaciones independientes que relacionan a las fuerzas. Cuando todas las fuerzas actúan en un plano, podemos tener solamente tres ecuaciones de equilibrio independientes, una para el equilibrio de rotación respecto a cualquier eje normal al plano, y las otras dos para el equilibrio de traslación en el plano. Sin embargo, a menudo tenemos más de tres fuerzas desconocidas. Por ejemplo, en los problemas muestra 3 y 4, si abandonamos la hipótesis artificial de una pared sin de fricción, tenemos cuatro cantidades escalares desconocidas, es decir, las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre la escalera y la pared, y las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre la escalera en el suelo. Estas fuerzas no pueden ser determinadas porque tenemos solamente tres cantidades escalares. Al asignar cualquier valor a una fuerza desconocida, pueden determinarse las otras tres fuerzas. Pero si carecemos de una base para asignar cualquier valor particular a una fuerza desconocida, es posible, matemáticamente, un número infinito de soluciones. Por lo tanto, debe ser posible hallar otra relación independiente entre las fuerzas desconocidas si esperamos resolver el problema en forma única. (En el problema muestra 5, esta última ecuación provino de una propiedad física de uno de los elementos del sistema.) El hecho de considerar torcas respecto a un segundo eje no ofrece una cuarta ecuación independiente; podemos demostrar que tal ecuación es una combinación lineal de la primera ecuación de la torca y las dos ecuaciones de las fuerzas, y por lo tanto no contiene ninguna información nueva.

Otro ejemplo sencillo de una estructura indeterminada ocurre cuando deseamos determinar las fuerzas ejercidas por el suelo sobre cada una de las cuatro llantas de un automóvil cuando está en reposo sobre una superficie horizontal. Si suponemos que estas fuerzas son normales al suelo, tenemos cuatro cantidades escalares desconocidas. Todas las demás fuerzas, como el peso del automóvil más los pasajeros, actúan como normales al suelo. Por lo tanto, tenemos solamente tres ecuaciones independientes que nos dan las condiciones del equilibrio, una para el equilibrio de traslación en la dirección única de todas las fuerzas y dos para el equilibrio (rotatorio) con respecto a los dos ejes perpendiculares entre sí en un plano horizontal. De nuevo, la solución del problema es matemáticamente indeterminada. Una mesa de cuatro patas, con todas ellas en contacto con el piso, es un ejemplo similar.

Desde luego, puesto que existe realmente una solución única a este problema físico, debemos hallar una base física para la relación independiente adicional entre las fuerzas que nos permita resolver el problema. La dificultad desaparece cuando pensamos que las estructuras nunca son perfectamente rígidas, como lo hemos supuesto tácitamente hasta ahora. Todas las estructuras se deforman en realidad, de alguna manera. Por ejemplo, las llantas del automóvil y el suelo se deforman, como también lo hacen la escalera y la pared. Las leyes de la elasticidad y las propiedades elásticas de la estructura determinan la naturaleza de la deformación y proporcionan la relación adicional necesaria entre las cuatro fuerzas. Por lo tanto, un análisis completo requiere no solamente de las leyes de la mecánica del cuerpo rígido sino también de las leyes de la elasticidad. En la sección 14-5 consideraremos brevemente estos temas.

## 14-4 EQUILIBRIO ESTABLE, INESTABLE, Y NEUTRO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS EN UN CAMPO GRAVITATORIO

En el capítulo 8 vimos que la fuerza de la gravedad es una fuerza conservativa. Para las fuerzas conservativas podemos definir una función de la energía potencial $U(x, y, z)$, donde $U$ se relaciona con **F** según

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

En los puntos donde $\partial U/\partial x$ sea cero, una partícula sometida a esta fuerza conservativa estará en equilibrio de traslación en la dirección $x$, ya que entonces $F_x$ es igual a cero. En forma equivalente, en los puntos en que $\partial U/\partial y$ o

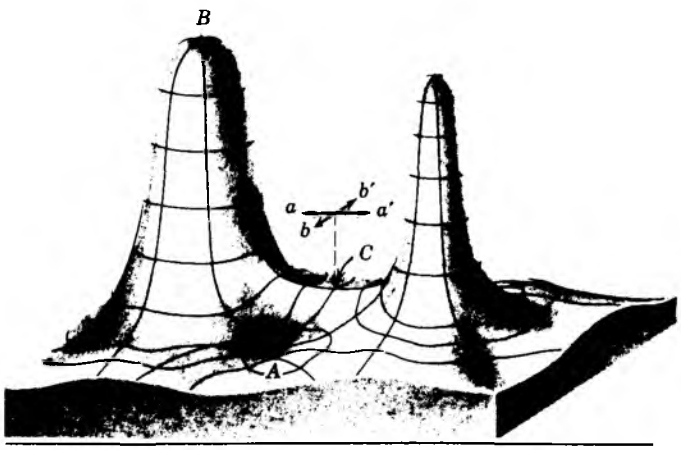



**Figura 9** Una superficie con energía potencial gravitatoria. Una partícula que experimente la fuerza gravitatoria correspondiente se comportaría de modo similar a una partícula que se deslizara sin fricción sobre una superficie sólida real de esta forma. Una partícula situada en *A*, *B*, o *C* estaría en equilibrio. El punto *A* representa un equilibrio *estable*, porque una partícula que se desplace ligeramente desde *A* tenderá a regresar allí. El punto *B* representa un equilibrio *inestable*, porque una partícula que se desplace ligeramente desde *B* tenderá a aumentar su desplazamiento. En el punto *C*, una partícula que se desplace a lo largo del eje *aa'* tenderá a regresar a *C*, pero si su desplazamiento fuera a lo largo del eje *bb'*, tendería a aumentar su desplazamiento. El punto *C* se llama *punto silla*, porque la superficie de esta región tiene forma parecida a una silla de montar. El equilibrio neutro, que no se ilustra, estaría representado por una superficie horizontal plana.

$\partial U/\partial z$ sean cero, una partícula estará en equilibrio de traslación en las direcciones *y* y *z*, respectivamente. La derivada de *U* en un punto, y la correspondiente componente de la fuerza sobre una partícula, será cero cuando *U* tenga un valor extremo (máximo o mínimo) en ese punto o cuando *U* sea constante con respecto a la coordenada variable. Entonces la partícula puede estar en equilibrio cuando *U* sea máxima, mínima, o constante. Consideremos, por orden, cada una de estas tres posibilidades.

Cuando *U* sea un *mínimo* (el punto *A* de la figura 9), la partícula está en equilibrio *estable*; cualquier desplazamiento desde esta posición dará por resultado una fuerza de restitución que tiende a regresar a la partícula a la posición de equilibrio. De igual forma, podemos decir que si un cuerpo está en equilibrio estable, para que cambie su posición deberá efectuarse un trabajo sobre él por un agente externo. Esto dará por resultado un aumento en su energía potencial.

Cuando *U* sea un *máximo* (el punto *B* en la figura 9), la partícula está en equilibrio *inestable*; cualquier desplazamiento desde esta posición dará por resultado una fuerza que tiende a empujar a la partícula más allá de la posición de equilibrio. En este caso, para que cambie su posición no deberá efectuarse trabajo alguno sobre la partícula por un agente externo; el trabajo efectuado para desplazar al cuerpo lo proporciona la fuerza conservativa, dando por resultado una disminución en su energía potencial.

Cuando *U* sea una *constante*, la partícula está en equilibrio *neutro*. En este caso una partícula puede desplazarse ligeramente sin experimentar una fuerza, sea ésta repulsiva o de restauración.

Todas estas observaciones se aplican a partículas, esto es, al movimiento de traslación. Supongamos ahora que tratamos con un cuerpo rígido. Debemos considerar tanto el equilibrio rotatorio como el equilibrio de traslación. Sin embargo, el problema de un cuerpo rígido situado en un campo gravitatorio es particularmente sencillo, porque *puede considerarse que todas las fuerzas gravitatorias de las partículas del cuerpo rígido actúan en un punto, tanto para propósitos de traslación como para propósitos de rotación*. Para propósitos del equilibrio bajo fuerzas gravitatorias, podemos reemplazar al cuerpo rígido por una sola partícula en el centro de gravedad, cuya masa sea la del cuerpo.

Por ejemplo, consideremos un cubo en reposo sobre una de sus caras situado sobre una mesa horizontal. En la figura 10*a* se muestra al centro de gravedad en la sección transversal central del cubo. Proporcionemos una fuerza al cubo de modo que lo haga girar sin deslizamiento en torno a un eje a lo largo de una arista. Nótese que el centro de gravedad se eleva y que sobre el cubo se efectúa un trabajo, lo cual aumenta su energía potencial. Si se retira la fuerza, el cubo tiende a regresar a su posición original. Por lo tanto, esta posición inicial es la de un equilibrio *estable*. En términos de una partícula de masa equivalente situada en el centro de gravedad, este proceso se describe con la línea de puntos que indica la trayectoria seguida por el centro de gravedad durante este movimiento. Se ve que la partícula tiene una energía potencial mínima en la posición de equilibrio estable, como se requiere. Podemos concluir que el cuerpo rígido estará en equilibrio estable si la aplicación de cualquier fuerza puede elevar el centro de gravedad del cuerpo, pero no bajarlo.

Si se hace girar al cubo hasta que se equilibre sobre una esquina, como en la figura 10*b*, entonces el cubo estará de nuevo en equilibrio. Esta posición de equilibrio se considera inestable, pues la aplicación de una fuerza horizontal, aun la más leve, causaría que el cubo se cayera de esta posición con una disminución de su energía potencial. La partícula de masa equivalente en el centro de gravedad sigue la trayectoria punteada que se muestra. En la posición de equilibrio inestable esta partícula tiene una energía potencial máxima, como se requiere. Podemos concluir que el cuerpo rígido estará en equilibrio inestable si la aplicación de cualquier fuerza horizontal tiende a descender el centro de gravedad del cuerpo.

Un cubo en equilibrio sobre una de sus aristas puede considerarse en equilibrio inestable si se aplica una fuerza

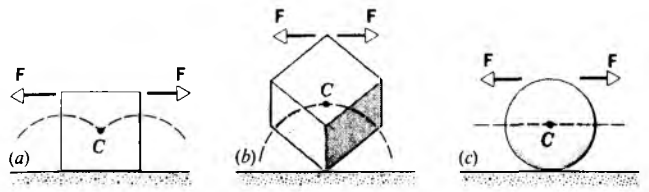



**Figura 10** El equilibrio de un cuerpo extenso. (*a*) Un cubo que descansa sobre una mesa se halla en *equilibrio estable*, porque su centro de gravedad *C* se eleva cuando el cubo es volteado por una fuerza horizontal **F**. (*b*) Un cubo en equilibrio sobre una de sus esquinas se halla en *equilibrio inestable*, porque *C* cae cuando el cubo es ladeado por **F**. (*c*) Una esfera está en *equilibrio neutro* respecto a una fuerza horizontal, porque *C* no se eleva ni cae cuando se aplica **F**. Compárense estos criterios de equilibrio de un cuerpo extenso con los de una partícula, ilustrados en la figura 9.

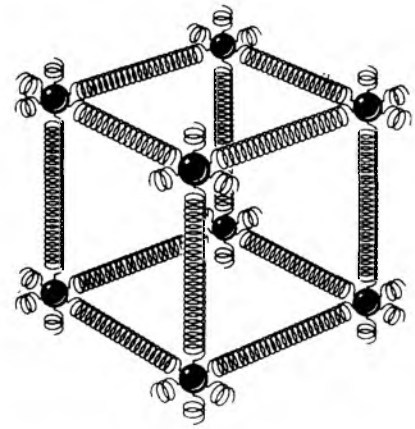


**Figura 11** Los átomos de un sólido se distribuyen en estructuras de redes tridimensionales repetitivas. Las fuerzas interatómicas se hallan representadas aquí por resortes.

horizontal perpendicular a la arista, pero está en equilibrio estable respecto a una fuerza horizontal paralela a la arista. Así, una partícula puede estar en equilibrio estable respecto a una coordenada y en equilibrio inestable respecto a otra. Esta condición recibe el nombre de *punto silla* y corresponde al punto *C* de la figura 9.

El equilibrio neutro de un cuerpo rígido se ilustra mediante la esfera sobre una mesa horizontal (Fig. 10*c*). Si la esfera se halla sometida a una fuerza horizontal, el centro de gravedad no se eleva ni desciende, sino que se mueve a lo largo de la línea punteada horizontal. La energía potencial de la esfera es constante durante el desplazamiento, como lo es la de la partícula de masa equivalente situada en el centro de gravedad. El sistema no tiende a moverse en ninguna dirección cuando se retira la fuerza aplicada. Un cuerpo rígido estará en equilibrio neutro si la aplicación de cualquier fuerza horizontal no eleva ni baja el centro de gravedad del cuerpo.

¿En qué circunstancias estaría en equilibrio estable un cuerpo rígido *suspendido*? ¿Cuándo estaría en equilibrio inestable un cuerpo rígido *suspendido*, y cuándo estaría en equilibrio neutro?

## 14-5 ELASTICIDAD

Una mesa de tres patas es una estructura que puede analizarse mediante las técnicas de este capítulo. Las tres patas están en contacto con el suelo, el cual ejerce una fuerza normal vertical sobre cada pata. Usando una ecuación de la fuerza para el equilibrio (el peso, que actúa en el centro de gravedad, debe ser igual a la suma de las tres fuerzas normales) y dos ecuaciones de la torca (considerando torcas respecto a dos ejes perpendiculares en el plano horizontal del suelo), podemos hallar las tres fuerzas normales desconocidas a partir de tres ecuaciones.

Una mesa de cuatro patas, sin embargo, nos ofrece cuatro incógnitas y no puede analizarse por estas técnicas sin tener más información respecto a la relación entre las fuerzas normales. Por ejemplo, supongamos que las patas sean de longitudes ligeramente diferentes. Cuando colocamos un peso muy pesado sobre la mesa, podemos comprimir a las patas en cantidades diferentes para que las cuatro patas estén en contacto con el suelo. A partir de la compresión de las patas, podemos hallar la relación faltante entre las fuerzas que nos permita resolver el problema (véase problema muestra 8).

La rigidez de los llamados cuerpos rígidos es en realidad una ilusión. Los sólidos están compuestos de átomos que no están en contacto rígido. Los átomos no tienen superficies duras que puedan compactarse apretadamente; sus nubes de electrones pueden ser moldeadas o deformadas por fuerzas externas. En un sólido, los átomos están unidos entre sí por fuerzas que se comportan de modo muy parecido a las fuerzas de los resortes. La figura 11 muestra una representación de una parte de una *red* sólida, que es la ordenación regular de los átomos como los podríamos encontrar en un cristal. Cada átomo está en equilibrio bajo la influencia de los seis resortes que lo rodean; las constantes efectivas de los resortes son muy grandes, de modo que se necesita una gran fuerza para cambiar la separación. A esto se debe la idea de rigidez que percibimos. En otros sólidos, los átomos pueden estar ordenados en filas largas más bien que en redes cúbicas; estos materiales no son sumamente rígidos, como no lo es, por ejemplo, el hule. Cuando estiramos un material así, aplicamos la fuerza suficiente para cambiar los espacios atómicos.

Todos los cuerpos "rígidos" reales son *elásticos* hasta cierto punto, lo cual significa que podemos cambiar sus dimensiones ligeramente al jalarlos, empujarlos, torcerlos, o comprimirlos. Para formarse una idea de los órdenes de magnitud implicados, consideremos una barra de acero

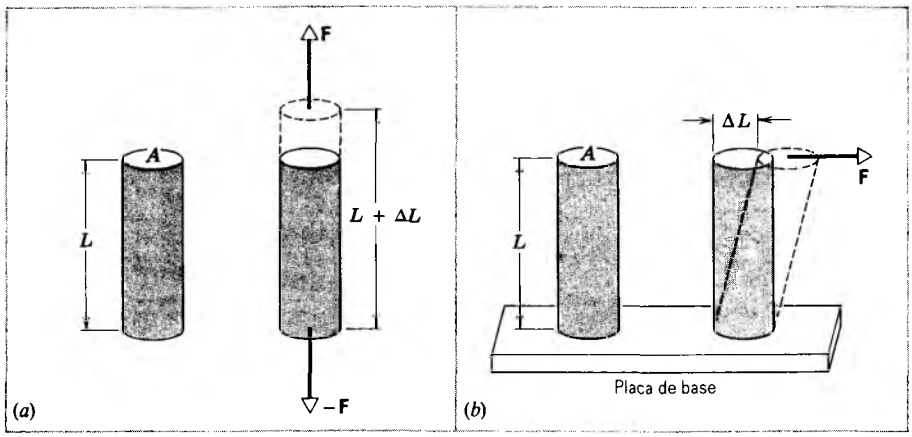



**Figura 12** (*a*) Un cilindro, sometido a un esfuerzo de tracción, es estirado en una cantidad $\Delta L$. (*b*) Un cilindro, sometido a un esfuerzo cortante, se deforma como un monte de naipes.

de 1 m de longitud y 1 cm de diámetro. Si colgamos un automóvil del extremo de la barra, ésta se estirará, pero sólo unos 0.5 mm, ó 0.05%. Más aún, la barra retornará a su longitud original cuando se haya descolgado el automóvil.

Si colgamos dos automóviles de la misma barra, ésta se estirará permanentemente y no recuperará su longitud original cuando hayamos retirado la carga. Por otra parte, si colgamos a tres automóviles de la barra, ésta se romperá. Justo antes de la rotura, la elongación de la barra será menor del 0.2%. Aunque deformaciones como ésta parecen pequeñas, en la práctica de la ingeniería son importantes.

La figura 12 muestra dos modos en que el sólido puede cambiar sus dimensiones cuando ciertas fuerzas actúan sobre él. En la figura 12*a*, un cilindro es estirado. En la figura 12*b*, el cilindro es deformado por las llamadas fuerzas cortantes, como podría deformarse un monte de naipes o un libro. (Un tercer modo es la compresión uniforme, la cual resulta de la aplicación de las fuerzas uniformemente en todas direcciones. En el capítulo 17 consideraremos la compresión uniforme). Los tres modos tienen en común que existe un *esfuerzo*, que se relaciona con las fuerzas aplicadas, y existe también una *deformación* de alguna clase.

El esfuerzo y la deformación adquieren formas diferentes en los casos de la figura 12 pero, en lo que respecta a la práctica diaria de la ingeniería, son proporcionales entre sí. La constante de proporcionalidad se llama *módulo de elasticidad*. Así pues,

$$\text{esfuerzo} = \text{módulo} \times \text{deformación} \qquad (28)$$

La figura 13 muestra la relación entre el esfuerzo y la deformación para cilindros de prueba de acero tal como el de la figura 14. Para una parte sustancial de la gama de esfuerzos aplicados, la curva esfuerzo-deformación es lineal y tiene aplicación la ecuación 28, con un módulo constante (correspondiente a la porción lineal de la figura 13). Al continuar creciendo el esfuerzo, la relación esfuerzo-deformación puede ser no lineal, pero el material permanece elástico: es decir, si se retira el esfuerzo, la muestra retorna a sus dimensiones originales.

Si el esfuerzo aumenta más allá del *límite de cedencia* o *límite elástico* del material, la muestra sufre un cambio permanente y no recupera sus dimensiones originales cuando se haya retirado el esfuerzo; esta clase de comportamiento se llama *plasticidad*. Más allá de la elasticidad o cedencia sucede, inevitablemente, la rotura, la cual se da tras un esfuerzo llamado *resistencia a la rotura* o *resistencia final*.

## Tensión y compresión

Para un estiramiento o una compresión simples, el esfuerzo se define como $F/A$, la fuerza dividida por el área sobre la que actúa, y la deformación se define como la cantidad sin dimensiones $\Delta L/L$, la fracción de cambio de longitud de la muestra. Si la muestra es una barra larga, nótese que no sólo toda la barra sino también cualquier sección de

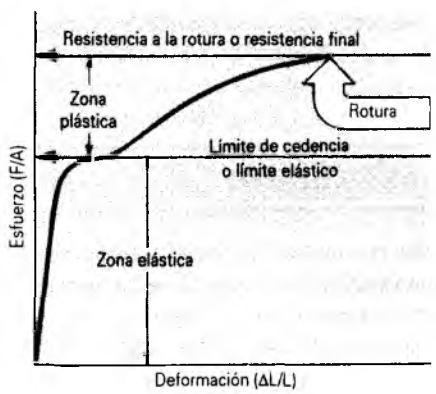



**Figura 13** Curva de esfuerzo-deformación de una muestra de prueba de acero, tal como la de la figura 14. La muestra de prueba se deforma permanentemente cuando el esfuerzo es igual al *límite de cedencia* del material. Se romperá cuando el esfuerzo sea igual a la *resistencia a la rotura* del material.

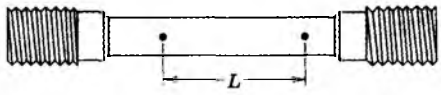



**Figura 14** Una muestra de prueba, usada para determinar la curva de esfuerzo-deformación como la de la figura 13.

ella experimenta la misma deformación cuando se le aplica un esfuerzo determinado. Puesto que el esfuerzo no tiene dimensiones, en la ecuación 28 el módulo tiene las mismas dimensiones que el esfuerzo, es decir, fuerza por unidad de área.

El módulo de los esfuerzos de tensión y de compresión se llama *módulo de Young*, y en la práctica de la ingeniería se representa mediante el símbolo $E$. La ecuación 28 se convierte en

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}$$

o bien

$$\Delta L = \frac{FL}{EA}. \qquad (29)$$

En una muestra a menudo puede medirse la deformación $\Delta L/L$ convenientemente por medio de un *medidor de deformación*; véase la figura 15. Estos aparatos sencillos y útiles, que pueden colocarse directamente en la máquina en operación con adhesivos, se basan en el principio de que la resistencia eléctrica de alambres hechos de ciertos materiales es una función de la deformación del alambre.

Aunque el módulo puede ser el mismo tanto para la compresión como para la tensión, la *resistencia a la rotura* puede ser distinta en ambos casos. Por ejemplo, el concreto es muy resistente a la compresión, pero tan débil a la tensión que casi nunca se usa de esta manera en la práctica de la ingeniería. La tabla 1 muestra los valores del módulo de Young y otras propiedades elásticas de algunos materiales de interés en ingeniería.

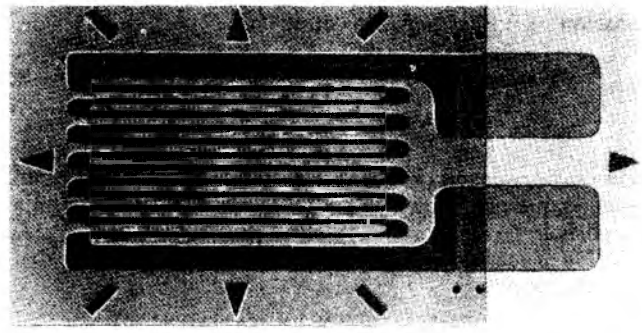


**Figura 15** Medidor de deformación, cuyas dimensiones son 9.8 mm por 4.6 mm. El medidor se fija con un adhesivo al objeto cuya deformación va a medirse. La resistencia eléctrica del medidor varía con el esfuerzo, permitiendo medir deformaciones hasta de un 3%.

## Esfuerzo cortante

En el caso del esfuerzo cortante, el esfuerzo es también una fuerza por unidad de área pero el vector de fuerza está en el plano del área en lugar de formar un ángulo recto con ella. Una vez más la deformación es una razón sin dimensiones $\Delta L/L$ estando las cantidades definidas como se muestra en la figura 12*b*. El módulo que se indica con el símbolo $G$ en la práctica de la ingeniería, recibe el nombre de *módulo del esfuerzo cortante*. La ecuación 29 se aplica a los esfuerzos cortantes, siendo el módulo $E$ reemplazado por el módulo $G$.

Los esfuerzos cortantes juegan un papel esencial en las flechas que giran bajo carga, en las fracturas de huesos provocados por torceduras, y en los resortes.

**Problema muestra 6** Una barra de acero estructural tiene un radio $R$ de 9.5 mm y una longitud $L$ de 81 cm. Se le estira axialmente con una fuerza $F$ de $6.2 \times 10^4$ N (unas 7 ton). (*a*) ¿Cuál es el esfuerzo en la barra? (*b*) ¿Cuál es el alargamiento de la barra bajo esta carga?

**TABLA 1** ALGUNAS PROPIEDADES ELÁSTICAS DE MATERIALES SELECTOS DE INTERÉS EN INGENIERÍA

| *Material* | *Densidad* (kg/m³) | *Módulo de Young* ($10^9$ N/m²) | *Límite de resistencia* ($10^6$ N/m²) | *Límite de cedencia* ($10^6$ N/m²) |
|---|---|---|---|---|
| Acero† | 7860 | 200 | 400 | 250 |
| Aluminio | 2710 | 70 | 110 | 95 |
| Vidrio | 2190 | 65 | 50‡ | — |
| Concreto§ | 2320 | 30 | 40‡ | — |
| Madera¶ | 525 | 13 | 50‡ | — |
| Hueso | 1900 | 9‡ | 170‡ | — |
| Poliestireno | 1050 | 3 | 48 | — |

† Acero estructural (ASTM-A 36).
‡ En compresión.
§ Alta resistencia.
¶ Pino.

**Solución** (*a*) El esfuerzo se define de

$$\text{stress} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{6.2 \times 10^4 \text{ N}}{(\pi)(9.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2}$$
$$= 2.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2.$$

El límite de cedencia del acero estructural es de $2.5 \times 10^8$ N/m$^2$, de modo que esta barra está peligrosamente cerca de su límite de cedencia.

(*b*) De la ecuación 29, usando el resultado que hemos calculado, obtenemos

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(2.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2)(0.81 \text{ m})}{2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2}$$
$$= 8.9 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.89 \text{ mm}.$$

Así, la deformación $\Delta L/L$ es $(8.9 \times 10^{-4}$ m)/(0.81 m), lo cual es $1.1 \times 10^{-3}$, o sea 0.11%.

**Problema muestra 7** El fémur, que es el hueso primordial del muslo, tiene un diámetro mínimo de unos 2.8 cm en un hombre adulto, lo cual corresponde a una sección transversal $A$ de $6 \times 10^{-4}$ m$^2$. ¿Con qué carga de compresión se rompería?

**Solución** De la tabla 1 vemos que la resistencia de la rotura $S_u$ del hueso sujeto a compresión es de $170 \times 10^6$ N/m$^2$. La fuerza de compresión es, entonces,

$$F = S_u A = (170 \times 10^6 \text{ N/m}^2)(6 \times 10^{-4} \text{ m}^2)$$
$$= 1.0 \times 10^5 \text{ N}.$$

Lo que significa 23,000 lb, unas 11 ton. Aunque se trata de fuerza grande, ésta puede presentarse durante, por ejemplo, un mal aterrizaje en paracaídas sobre terreno firme. La fuerza no necesita ser prolongada; unos cuantos milisegundos bastarían.

Ahora estamos preparados para comprender cómo nos pueden ayudar las propiedades elásticas de los materiales a determinar sus condiciones de equilibrio, como lo sugiere el siguiente problema muestra.

**Problema muestra 8** Una mesa de cuatro patas tiene tres de ellas de longitud $D$ = 1.00 m; la cuarta es más larga por una pequeña distancia $d$ = 0.50 mm, de modo que la mesa se bambolea ligeramente. Sobre la mesa se coloca verticalmente un pesado cilindro de acero, cuya masa $M$ es de 290 kg, de modo que las cuatro patas se comprimen y la mesa ya no se tambalea. Cada pata es un cilindro de madera cuya área de sección transversal $A$ es 1.0 cm$^2$. El módulo de Young $E$ para la madera es de $1.3 \times 10^{10}$ N/m$^2$. Supóngase que el tablero de la mesa permanece a nivel y que las patas no se pandean. ¿Con qué fuerza empujará el suelo contra cada pata?

**Solución** Consideremos al tablero de la mesa como nuestro sistema. Si el tablero permanece a nivel, cada una de las tres patas cortas debe comprimirse en la misma cantidad $\Delta L_3$, con la misma fuerza $F_3$. La única pata larga debe comprimirse en una cantidad mayor $\Delta L_1$, por una fuerza $F_1$, y debemos tener

$$\Delta L_3 + d = \Delta L_1.$$

De la ecuación 29 ($\Delta L = FL/EA$), podemos escribir esta relación así:

$$F_3 D + dAE = F_1(D + d) \approx F_1 D, \qquad (30)$$

donde despreciamos a $d$ en comparación con $D$ en el último término. De la ecuación 6 para el equilibrio de las fuerzas en la dirección vertical, tenemos

$$\sum F_y = 3F_3 + F_1 - Mg = 0. \qquad (31)$$

Si resolvemos las ecuaciones 30 y 31 para las fuerzas desconocidas, hallamos

$$F_3 = \frac{Mg}{4} - \frac{dAE}{4D}$$
$$= \frac{(290 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{4}$$
$$- \frac{(5.0 \times 10^{-4} \text{ m})(10^{-4} \text{ m}^2)(1.3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2)}{(4)(1.00 \text{ m})}$$
$$= 711 \text{ N} - 163 \text{ N} = 548 \text{ N}.$$

De igual manera,

$$F_1 = \frac{Mg}{4} + \frac{3dAE}{4D}$$
$$= 711 \text{ N} + 489 \text{ N} = 1200 \text{ N}.$$

Usted puede demostrar que, para llegar a su configuración de equilibrio, las tres patas cortas se comprimieron en 0.42 mm cada una, y la única pata larga en 0.92 mm, siendo la diferencia 0.50 mm, como se esperaba.

El cilindro debe colocarse situado más cerca de la pata larga que de cualquiera de las tres patas más cortas si el tablero ha de permanecer horizontal. Puede usarse la condición de equilibrio de las torcas para hallar su posición, si conocemos las dimensiones del tablero y la colocación de sus patas.

## PREGUNTAS

1. ¿Son ambas ecuaciones 1 y 3 condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio mecánico? ¿Para el equilibrio estático?
2. ¿Está en equilibrio una bola de béisbol en el instante en que llega al reposo en la cima de un disparo vertical?
3. En un péndulo simple, ¿está el disco en equilibrio en cualquier punto de su balanceo? Si es así, ¿dónde?
4. Una rueda que gira a una velocidad angular constante $\omega$ respecto a un eje fijo está en equilibrio mecánico porque no actúa sobre ella una fuerza externa neta o una torca. Sin

embargo, las partículas que conforman la rueda experimentan una aceleración centrípeta **a** dirigida hacia el eje. Puesto que $\mathbf{a} \neq 0$, ¿cómo podemos decir que la rueda está en equilibrio?

5. Dé varios ejemplos de un objeto que no esté en equilibrio aun cuando la resultante de todas las fuerzas que actúen sobre él sea cero.
6. ¿Coinciden el centro de masa y el centro de gravedad en un edificio? ¿Y en un lago? ¿Bajo qué condiciones resulta insignificante la diferencia entre el centro de masa y el centro de gravedad? Dé un ejemplo.
7. Si un cuerpo rígido es arrojado al aire sin darle un giro, no girará durante su vuelo, siempre que la resistencia del aire pueda despreciarse. ¿Qué implica este simple resultado respecto a la ubicación del centro de gravedad?
8. La gimnasta olímpica Mary Lou Retton realizó algunos ejercicios admirables en las barras paralelas asimétricas. Un amigo le dice a usted que un análisis cuidadoso de las películas de sus proezas demuestra que, no importa lo que haga, su centro de masa está arriba de su(s) punto(s) de apoyo en todo momento, como lo exigen las leyes de la física. Comente la afirmación de su amigo.
9. ¿Qué es más probable que se rompa con el uso: una hamaca fuertemente estirada entre dos árboles o una que se combe un poco? Explique su respuesta.
10. Una escalera de mano está en reposo con su extremo superior contra una pared y su extremo inferior sobre el suelo. ¿Es más probable que se resbale cuando alguien está parado sobre ella en la parte más baja o en la parte más alta? Explique.
11. Un libro reposa sobre una mesa. La mesa lo empuja hacia arriba con una fuerza precisamente igual al peso del libro. En términos poco formales, ¿cómo "sabe" la mesa qué fuerza hacia arriba debe proporcionar? ¿Cuál es el mecanismo por el cual entra en juego esta fuerza? (Véase "The Smart Table", por Earl Zwicker, *The Physics Teacher*, diciembre de 1981, pág. 633.)
12. Póngase de pie frente al borde de una puerta abierta, con un pie a cada lado de ella. Hallará que no le es posible estar parado sobre las puntas de los pies. ¿Por qué?
13. Siéntese en una silla de respaldo recto y trate de ponerse de pie sin inclinarse hacia el frente. ¿Por qué no puede hacerlo?
14. Una barra larga le ayuda a un equilibrista a mantener el equilibrio. ¿Cómo?
15. Un bloque compuesto hecho de madera y metal descansa sobre una mesa. ¿En qué orientación de las dos mostradas en la figura 16 puede usted volcarlo con la menor fuerza?
16. En el problema muestra 5, ¿por qué no es necesario considerar la fricción en el gozne?
17. Un cuadro está colgado de una pared por dos alambres. ¿Qué orientación deben tener los alambres para soportar una tensión mínima? Explique cómo es posible el equilibrio con cualquier número de orientaciones y tensiones, aun cuando el cuadro tenga una masa definida.

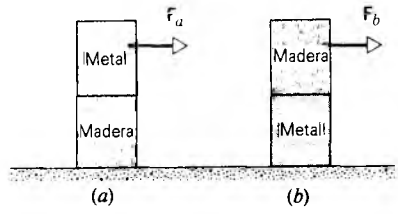



**Figura 16** Pregunta 15.

18. Demuestre cómo usar una báscula de resorte para pesar objetos bastante más allá de la lectura máxima de la báscula.
19. Explique, usando fuerzas y torcas, cómo un árbol puede mantener el equilibrio en un vendaval.
20. Un virus en un tubo lleno de líquido de una centrífuga que está en movimiento circular uniforme (es decir, en movimiento *acelerado*) como lo ve un observador en el laboratorio. Sin embargo, un observador que girara con la centrífuga declararía que el virus no está *acelerado*. Explique cómo puede estar el virus en equilibrio para este segundo observador pero no para el primero.
21. Un bloque uniforme, en forma de paralelepípedo rectangular de lados en la razón 1:2:3, se halla sobre una superficie horizontal. ¿En qué posición, en caso de que haya alguna, es decir, sobre cuál de sus tres caras, puede decirse que es más estable?
22. ¿Existe algún cuerpo que sea realmente rígido? Si existe, dé un ejemplo. Si no, explique por qué.
23. Usted está sentado en el asiento del conductor de un automóvil estacionado. Se le dice que las fuerzas ejercidas hacia arriba por el suelo sobre cada una de las cuatro llantas son diferentes. Exponga los factores que deben considerarse para formar esta afirmación como cierta o no.
24. En el problema muestra 3, si la pared no estuviese carente de fricción, ¿nos proporcionarían las leyes empíricas de la fricción una condición extra necesaria para determinar la fuerza (vertical) extra ejercida por la pared sobre la escalera?
25. Cuando el cilindro de prueba de la figura 14 se estira bajo el esfuerzo aplicado se hace más larga. ¿Qué cambio, si lo hay, esperaría usted en el diámetro del cilindro?
26. ¿Es el módulo de Young para el hule mayor o menor que el módulo de Young para el acero? Según este criterio, ¿es más elástico el hule que el acero?
27. Una viga horizontal apoyada en ambos extremos está cargada en el centro. Demuestre que la parte superior de la viga está bajo compresión mientras que la parte inferior está bajo tensión.
28. ¿Por qué se usan varillas de refuerzo en las estructuras de concreto? (Compare la resistencia a la tensión del concreto con su resistencia a la compresión.)

## PROBLEMAS

### *Sección 14-1 Condiciones de equilibrio*

1. Una familia de ocho miembros, cuyos pesos en libras se indican en la figura 17, se halla en equilibrio en un balancín de sube y baja. ¿Cuál es el número que corresponde a la persona que produce la torca más grande, respecto al punto de pivoteo, dirigido (*a*) hacia afuera de la página y (*b*) hacia adentro de la página?

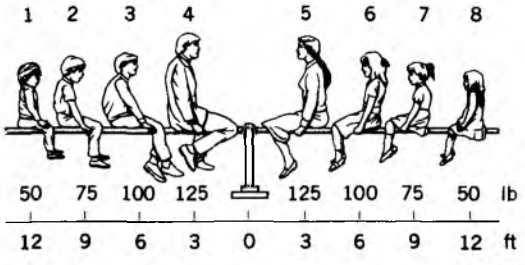



**Figura 17** Problema 1.

2. Tres fuerzas actúan sobre un objeto cuadrado rígido de peso despreciable jalando en sus esquinas como se muestra, a escala, en la figura 18. (*a*) ¿Se satisface la primera condición del equilibrio? (*b*) ¿Se satisface la segunda condición del equilibrio? (*c*) Si alguna de las respuestas precedentes es negativa, ¿podría una cuarta fuerza restituir el equilibrio del objeto? Si es así, especifique la magnitud, dirección, y punto de aplicación de la fuerza necesaria.

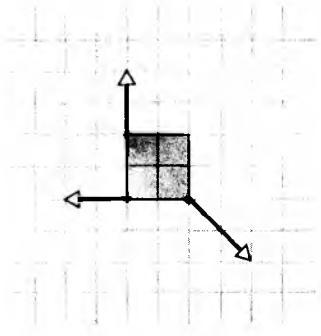


**Figura 18** Problema 2.

3. Demuestre que cuando actúan solamente tres fuerzas sobre un objeto en equilibrio, deben ser coplanares y sus líneas de acción deben encontrarse en un punto o ser paralelas.

### *Sección 14-3 Ejemplos de equilibrio*

4. Se sabe que cierta nuez requiere, para romperse, fuerzas de 46 N ejercidas sobre ella en ambos lados. ¿Qué fuerzas $F$ se requerirán cuando esté colocada en el cascanueces mostrado en la figura 19?

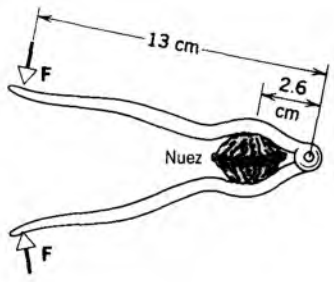



**Figura 19** Problema 4.

5. La torre inclinada de Pisa (véase la figura 20) tiene 55 m de altura y 7.0 m de diámetro. La parte superior de la torre se desplaza 4.5 m de la vertical. Considerando a la torre como un cilindro uniforme, circular, (*a*) ¿qué desplazamiento adicional, medido en la parte superior, llevará a la torre a un vuelco inminente? (*b*) ¿Qué ángulo con la vertical formará la torre en ese momento? (La razón de movimiento actual de la parte superior es de 1 mm/año.)

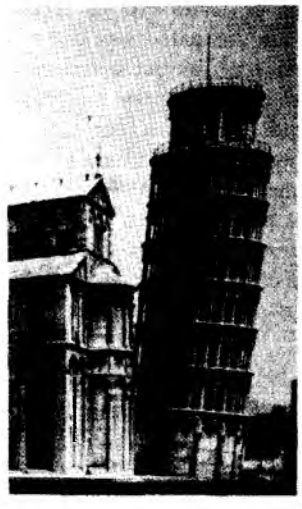


**Figura 20** Problema 5.

6. Un cubo descansa en reposo sobre una mesa horizontal cuando se le aplica una pequeña fuerza horizontal perpendicular y en el centro de una arista de la parte superior. La fuerza aumenta ahora uniformemente. ¿Qué le ocurrirá al cubo primero, se deslizará o se volcará? El coeficiente de fricción estática entre las superficies es igual a 0.46.
7. Un guacal en forma de cubo de 1.12 m contiene una pieza de maquinaria cuyo diseño es tal que el centro de gravedad del guacal y de su contenido está situado a 0.28 m sobre su centro geométrico. El guacal descansa sobre una rampa que forma un ángulo $\theta$ con la horizontal. Al aumentar $\theta$ desde cero, se llegará a un ángulo en el cual el guacal o bien comenzará a deslizarse hacia abajo o bien se volcará.

Cuál de estos fenómenos sucederá si el coeficiente de fricción estática es (*a*) ¿0.60? (*b*) ¿0.70? En cada caso dé el ángulo en el cual ocurre el fenómeno.

8. Una cadena flexible de peso $W$ cuelga entre dos puntos fijos, $A$ y $B$, situados en el mismo nivel, como lo muestra la figura 21. Halle (*a*) la fuerza ejercida por la cadena sobre cada punto extremo y (*b*) la tensión en la cadena en el punto más bajo.




**Figura 21** Problema 8.

9. En la figura 22 un hombre trata de sacar a su automóvil del lodo en el borde de una carretera. Ata fuertemente un extremo de una cuerda alrededor de la defensa delantera y el otro extremo alrededor de un poste de teléfonos que está a una distancia de 62 ft de la defensa. Luego empuja de lado a la cuerda en su punto medio con una fuerza $F$ = 120 lb, desplazando el centro de la cuerda 1.5 ft de su posición previa, y el automóvil comienza a moverse. Halle la fuerza ejercida por la cuerda sobre el automóvil. (La cuerda se estira un tanto bajo la tensión.)




**Figura 22** Problema 9.

10. Una esfera uniforme de peso $w$ y radio $r$ está sostenida mediante una cuerda amarrada a una pared sin fricción a una distancia $L$ medida desde el centro de la esfera, como se ilustra en la figura 23. Halle (*a*) la tensión en la cuerda y (*b*) la fuerza ejercida sobre la esfera por la pared.
11. Un automóvil estacionado de 1360 kg de masa tiene una base de ruedas (distancia entre el eje delantero y el trasero) de 305 cm. Su centro de gravedad está ubicado a 178 cm detrás del eje delantero. Determine (*a*) la fuerza hacia arriba ejercida por el suelo contra una de las dos ruedas delanteras (se suponen iguales) y (*b*) la fuerza hacia arriba que el suelo ejerce contra cada una de las dos ruedas traseras (se suponen iguales).
12. Una persona de 160 lb de peso camina por un puente nivelado y se detiene a más de tres cuartas partes de la distancia desde un extremo del puente. Éste es uniforme y pesa 600 lb. ¿Cuáles son los valores de las fuerzas verticales que los soportes ejercen sobre cada extremo del puente por sus apoyos?
13. Una clavadista de 582 N de peso está de pie sobre el extremo de un trampolín uniforme de 4.48 m de longitud,

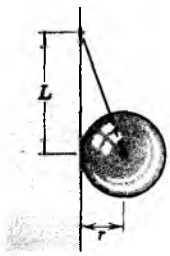



**Figura 23** Problema 10.

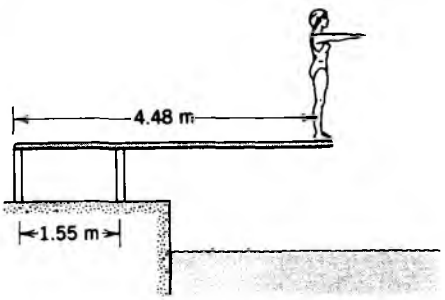



**Figura 24** Problema 13.

sujeto por dos pedestales entre los cuales hay una separación de 1.55 m, como se ilustra en la figura 24. Halle la tensión (o compresión) en cada uno de los dos pedestales.

14. Una barra de un metro se balancea sobre el borde de un cuchillo en la marca de 50.0 cm. Cuando se colocan dos monedas sobre la marca de 12.0 cm, se encuentra que la barra cargada se equilibra en la marca de 45.5 cm. Cada moneda tiene una masa de 5.00 g. Halle la masa de la barra.
15. Una viga es transportada por tres obreros, uno en un extremo y los otros dos soportando la viga entre ellos sobre un travesaño situado de modo tal que la carga se reparte igualmente entre los tres. Halle dónde está colocado el travesaño. Desprecie la masa del travesaño
16. Un limpiador de ventanas de 74.6 kg usa una escalera de mano de 10.3 kg que tiene 5.12 m de largo. Sitúa un extremo a 2.45 m de una pared y descansa la parte superior contra una ventana cuyos vidrios están quebrados y sube por la escalera. Cuando llega a 3.10 m se rompe la ventana. Despreciando la fricción entre la escalera y la ventana y suponiendo que la base de la escalera no se desliza, halle (*a*) la fuerza ejercida sobre la ventana por la escalera justo antes de que se rompa la ventana y (*b*) la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre la escalera por el suelo justo antes de que se rompa la ventana.
17. La figura 25 muestra las estructuras anatómicas de la pierna y el pie que intervienen cuando se levanta del suelo el talón de modo que el pie haga en efecto contacto con el suelo en un solo punto, mostrado como $P$ en la figura. Calcule las fuerzas que deben ejercerse sobre el pie por el músculo de la pantorrilla y por los huesos de la pierna cuando una persona de 65 kg se para de puntillas sobre un pie. Compare estas fuerzas con el peso de la persona. Suponga que $a$ = 5.0 cm y $b$ = 15 cm.

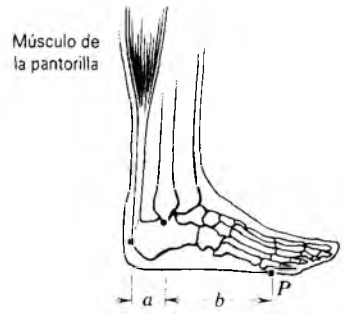



**Figura 25** Problema 17.

**18.** Dos esferas uniformes e idénticas, sin fricción, cada una con un peso $W$, descansan como se muestra en la figura 26 en el fondo de un recipiente rectangular, fijo. La línea que une los centros de las esferas forma un ángulo $\theta$ con la horizontal. Halle las fuerzas ejercidas sobre las esferas (*a*) por el fondo del recipiente, (*b*) por los costados del recipiente, y (*c*) una contra la otra.

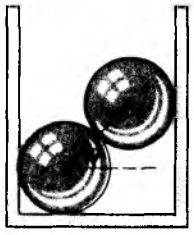


**Figura 26** Problema 18.

**19.** ¿Qué fuerza mínima $F$, aplicada horizontalmente en el eje de la rueda de la figura 27, es necesaria para elevar la rueda sobre un obstáculo de altura $h$? Tome $r$ como el radio de la rueda y $W$ como su peso.

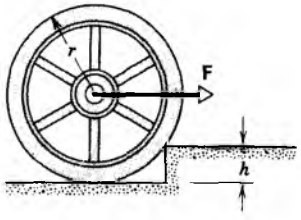



**Figura 27** Problema 19.

**20.** Una balanza está hecha de una barra rígida que puede girar libremente en torno a un punto que no está en el centro de la barra. Se equilibra con pesas desiguales situadas en los platillos a cada extremo de la barra. Cuando se coloca un objeto de masa desconocida $m$ en el platillo del lado izquierdo, se equilibra con un objeto de masa $m_1$ colocado en el platillo del lado derecho, y de igual modo cuando el objeto de masa $m$ se coloca en el platillo del lado derecho, se equilibra con un objeto de masa $m_2$ colocado en el platillo del lado izquierdo. Demuestre que

$$m = \sqrt{m_1 m_2}.$$

**21.** Una esfera uniforme de peso $w$ está en reposo encajada entre dos planos inclinados de ángulos de inclinación $\theta_1$ y $\theta_2$ (Fig. 28). (*a*) Suponga que no existe fricción y determine las fuerzas (direcciones y magnitudes) que los planos ejercen sobre la esfera. (*b*) ¿Qué cambio habría, en principio, si se tomase en cuenta la fricción?

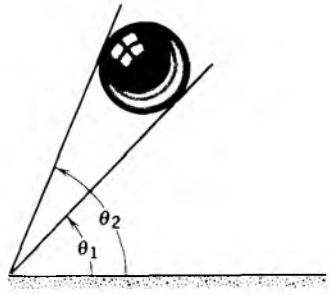



**Figura 28** Problema 21.

**22.** Un objeto de 15.4 kg es levantado por el sistema de poleas que se muestra en la figura 29. El brazo está vertical, mientras que el antebrazo forma un ángulo de 27.0° con la horizontal. ¿Qué fuerzas se ejercen en el antebrazo por (*a*) el músculo tríceps y (*b*) el hueso del brazo (el húmero)? El antebrazo y la mano juntos tienen una masa de 2.13 kg con el centro de masa a 14.7 cm (medidos a lo largo del brazo) desde el punto en que los dos huesos están en contacto. El músculo tríceps jala verticalmente hacia arriba en un punto situado a 2.50 cm detrás del punto de contacto.

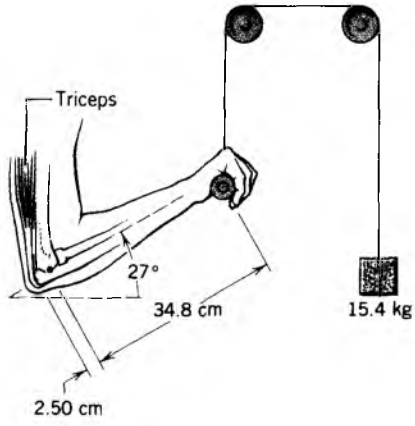



**Figura 29** Problema 22.

**23.** Un letrero cuadrado uniforme, de 52.3 kg, y 1.93 m de lado, está colgado de una barra de 2.88 m de masa despreciable. Un cable está unido al extremo de la barra y a un

punto en la pared a 4.12 m sobre el punto en que la barra se halla fija a la pared, como se muestra en la figura 30. (*a*) Halle la tensión en el cable. (*b*) Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la pared sobre la barra.

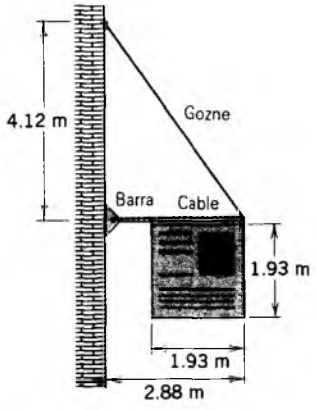



**Figura 30** Problema 23.

**24.** Una puerta de ventilación cuadrada colocada en un techo tiene 3.0 ft (= 0.91 m) de lado y pesa 25 lb (masa = 11 kg), está embisagrada en un lado y tiene un pestillo o cerradura en el lado opuesto. Si el centro de gravedad de la puerta está a 4.0 in (= 10 cm) del centro de la puerta y más cercana al lado embisagrado, ¿qué fuerzas deben sostener (*a*) el pestillo y (*b*) las bisagras?

**25.** Un extremo de una viga uniforme que pesa 52.7 lb y tiene 3.12 ft de longitud está unido a un muro por medio de un gozne. El otro extremo está soportado por un alambre que forma ángulos iguales de 27.0° con la viga y el muro (véase la Fig. 31). (*a*) Halle la tensión en el alambre. (*b*) Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza en el gozne.

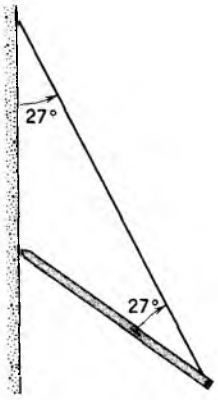



**Figura 31** Problema 25

**26.** Una puerta de 2.12 m de altura y 0.907 m de anchura tiene una masa de 26.8 kg. Una bisagra situada a 0.294 m del extremo superior y otra situada a 0.294 m del extremo inferior sostienen cada una la mitad del peso de la puerta. Suponga que el centro de gravedad está en el centro geométrico de la puerta y determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre cada bisagra por la puerta.

**27.** El sistema mostrado en la figura 32 está en equilibrio. El objeto que cuelga del extremo de la armadura *S* pesa 513 lb y la propia armadura pesa 107 lb. Halle (*a*) la tensión en el cable *C* y (*b*) las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre la armadura por el pivote *P*.

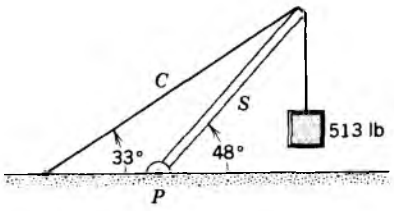



**Figura 32** Problema 27.

**28.** Una barra no uniforme de peso *W* está suspendida en reposo en una posición horizontal por dos cuerdas delgadas como se muestra en la figura 33; el ángulo que forma una cuerda con la vertical es $\theta$; la otra cuerda forma ángulo $\phi$ con la vertical. La longitud de la barra es *L*. Halle la distancia *x* desde el extremo izquierdo hasta el centro de gravedad.

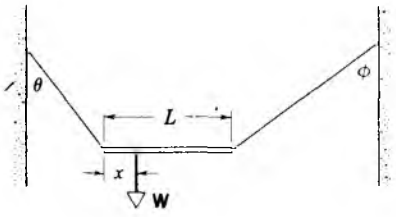



**Figura 33** Problema 28.

**29.** Una barra horizontal delgada *AB* de peso despreciable y longitud *L* está pivotada a un muro vertical en *A* y soportada en *B* por un alambre delgado *BC* que forma un ángulo $\theta$ con la horizontal. A lo largo de la barra, un peso *W* puede moverse en cualquier dirección según se defina por la distancia *x* desde el muro (Fig. 34). (*a*) Halle la tensión *T* en el alambre delgado en función de *x*. Halle (*b*) la componente horizontal y (*c*) la componente vertical de la fuerza ejercida sobre la barra por el pivote en *A*.

**30.** En la figura 34, la longitud *L* de la barra es 2.76 m y su peso *w* es de 194 N. También, *W* = 315 N y $\theta$ = 32.0°. El alambre puede soportar una tensión máxima de 520 N. (*a*) ¿Cuál es la distancia máxima *x* posible antes de que el alambre se rompa? (*b*) Con *W* situada en esta *x* máxima, ¿cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre la barra por el pivote?

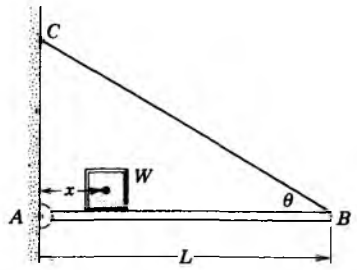



**Figura 34** Problemas 29 y 30.

**31.** Dos vigas uniformes están unidas a una pared con goznes y luego empernadas juntas con holgura como en la figura 35. Halle las componentes horizontal y vertical de (*a*) la fuerza sobre cada gozne y (*b*) la fuerza ejercida por el perno sobre cada viga.

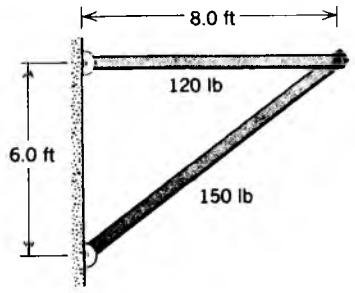



**Figura 35** Problema 31.

**32.** Una plancha de 274 N, de longitud $L = 6.23$ m, descansa sobre el suelo y sobre un rodillo sin fricción situado en la parte superior de un muro de altura $h = 2.87$ m (véase la Fig. 36). El centro de gravedad de la plancha está en su centro. La plancha permanece en equilibrio para cualquier valor de $\theta \geq 68.0°$ pero se resbala si $\theta < 68.0°$. Halle el coeficiente de fricción estática entre la plancha y el suelo.

**33.** En la escalera de tijera que se muestra en la figura 37, *AC* y *CE* tienen 8.0 ft de longitud y están embisagradas en *C*. *BD* es una barra de enlace de 2.5 ft de longitud a la mitad de la escalera. Un hombre que pesa 192 lb sube 6.0 ft por la escalera. Suponiendo que el suelo carezca de fricción y despreciando el peso de la escalera, halle (*a*) la tensión en la barra de enlace y (*b*) las fuerzas ejercidas sobre la escalera por el suelo. (*Sugerencia*: Será de ayuda aislar partes de la escalera al aplicar las condiciones del equilibrio.)

**34.** En el marco cuadrado *ABCD* que se representa en la figura 38 se produce una tensión **T** en la barra *AB* por medio de un tensor de tornillo *G*. Determine las fuerzas que se producen en las otras barras. Las diagonales *AC* y *BD* pasan libremente sobre sí mismas en *E*. Las consideraciones de simetría pueden conducir a una simplificación considerable en éste y en problemas similares.

**35.** Una caja cúbica está llena de arena y pesa 892 N. Se desea que la caja "ruede" empujándola horizontalmente en uno de los bordes superiores. (*a*) ¿Qué fuerza mínima se requiere? (*b*) ¿Qué coeficiente mínimo de fricción estática se requiere? (*c*) ¿Hay una manera más eficiente de hacer que la caja ruede? De ser así, halle la menor fuerza posible que debería aplicarse directamente a la caja.

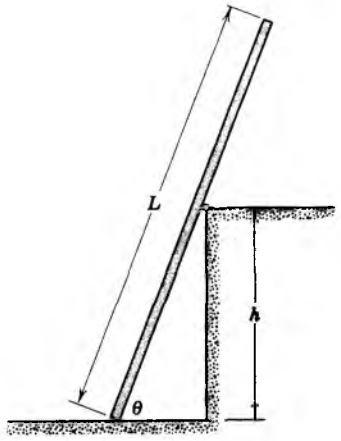



**Figura 36** Problema 32.

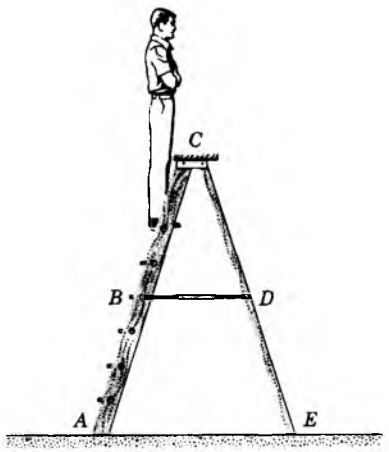



**Figura 37** Problema 33.

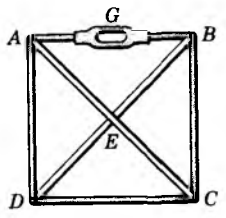



**Figura 38** Problema 34.

**36.** Un automóvil hace una parada de emergencia en una carretera horizontal accionando los frenos de modo que las cuatro ruedas se traban y el auto patina a lo largo de la carretera. El coeficiente de fricción cinética entre las llantas y la carretera es de 0.40. La separación entre los ejes delantero y trasero es de 4.20 m, y el centro de masa

UNIVERSIDAD ... ECA
FAC... ...IERIA
... DE
DOCUMENTACIÓN Y BIBLIOTECA
MONTERREY, MÉXICO



del automóvil se localiza a 1.80 m atrás del eje delantero y a 0.750 m sobre la carretera; véase la figura 39. El automóvil pesa 11.0 kN, con su ocupante. Calcule (*a*) la deceleración por el frenado del automóvil, (*b*) la fuerza normal en cada rueda delantera y trasera, y (*c*) la fuerza de frenado en cada rueda delantera y trasera. (*Sugerencia*: Aunque el automóvil no esté en equilibrio de traslación, *está* en equilibrio rotatorio.)

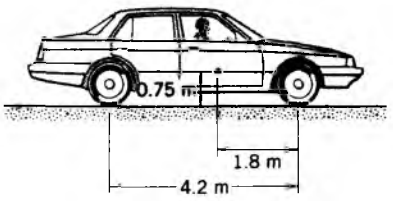



**Figura 39** Problema 36.

**37.** Un problema muy conocido es el siguiente (véase, por ejemplo, *Scientific American*, noviembre de 1964, pág. 128). Se colocan ladrillos uniformes uno sobre otro de manera que tengan el salidizo máximo. Esto se logra haciendo que el centro de gravedad del ladrillo de arriba esté directamente sobre el borde del ladrillo que está debajo, que el centro de gravedad de los dos ladrillos de arriba combinados esté directamente sobre el borde del tercer ladrillo desde arriba, y así sucesivamente. (*a*) Justifique este criterio del máximo salidizo; halle los salidizos en equilibrio más grandes para cuatro ladrillos. (*b*) Demuestre que, si el proceso continuara así, podríamos obtener un salidizo tan grande como quisiéramos. (Martin Gardner, en el artículo mencionado anteriormente, afirma: "Con 52 naipes, el primero colocado de modo que su extremo esté al ras con un borde de la mesa, el salidizo máximo es un poco más de $2-\frac{1}{4}$ longitudes de naipe... ") (*c*) Suponga ahora, en cambio, que aplicamos ladrillos uniformes de modo que el extremo de un ladrillo se salga del que está abajo por una fracción constante, $1/n$, de una longitud de ladrillo $L$. ¿Cuántos ladrillos, $N$, podemos usar en este proceso antes de que la pila se caiga? Compruebe la posibilidad de la respuesta para $n = 1$, $n = 2$, $n = \infty$.

**38.** Una esfera homogénea de radio $r$ y peso $W$ se desliza a lo largo del suelo bajo la acción de una fuerza horizontal constante **P** aplicada a un cordón, como se muestra en la figura 40. (*a*) Demuestre que si $\mu$ es el coeficiente de fricción cinética entre la esfera y el suelo, la altura $h$ está dada por $h = r(1 - \mu W/P)$. (*b*) Demuestre que la esfera no está en equilibrio de traslación bajo estas circunstancias. ¿Existe algún punto con respecto al cual la esfera esté en equilibrio rotatorio? (*c*) ¿Podemos hacer que la esfera esté en equilibrio de rotación y de traslación, eligiendo una $h$ diferente? ¿Y una dirección de **P** diferente? Explique.

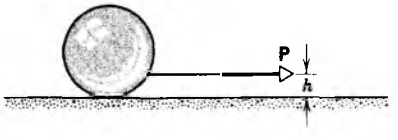



**Figura 40** Problema 38.

### *Sección 14-4 Equilibrio estable, inestable, y neutro de los cuerpos rígidos en un campo gravitatorio*

**39.** Un tazón que tiene un radio de curvatura $r$ reposa sobre una mesa horizontal. Demuestre que el tazón estará en equilibrio estable respecto al punto central de su fondo solamente si el centro de masa del material apilado en el tazón no está tan alto como $r$ sobre el centro del tazón.

**40.** Un cubo de densidad uniforme y arista $a$ está equilibrado sobre una superficie cilíndrica de radio $r$ como se muestra en la figura 41. Demuestre que el criterio para el equilibrio estable del cubo, suponiendo que la fricción sea suficiente para impedir el resbalamiento, es $r > a/2$.

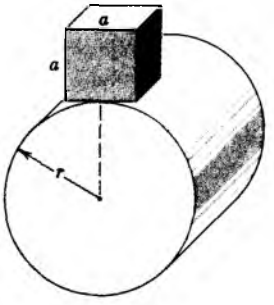



**Figura 41** Problema 40.

### *Sección 14-5 Elasticidad*

**41.** La figura 42 muestra la curva de esfuerzo-deformación de la cuarcita. Calcule el módulo de Young de este material.

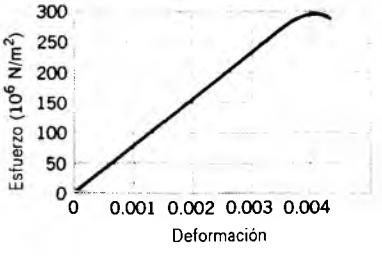



**Figura 42** Problema 41.

**42.** Después de una caída, un alpinista de 95 kg de peso queda columpiándose al final de una cuerda de 15 m de longitud y 9.6 mm de diámetro. La cuerda se estira 2.8 cm. Calcule el módulo de Young de la cuerda.

**43.** El elevador de una mina está soportado por un solo cable de acero de 2.52 cm de diámetro. La masa total de la jaula del elevador más los ocupantes es de 873 kg. ¿En cuánto se estira el cable cuando el elevador está suspendido a 42.6 m debajo del motor del elevador? (Desprecie la masa del cable.)

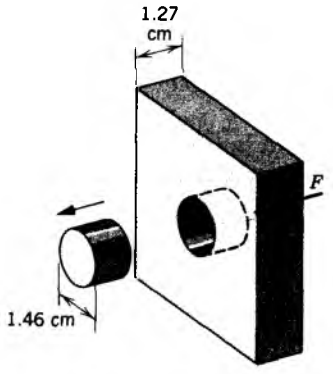



**Figura 43** Problema 45.

**44.** Un poste horizontal de aluminio de 48.0 cm de diámetro sobresale 5.30 cm de un muro. Un objeto de 120 kg está suspendido del extremo del poste. El módulo de corte del aluminio es de $3.00 \times 10^{10}$ N/m$^2$. (*a*) Calcule el esfuerzo cortante en el poste. (*b*) Halle la deflexión vertical del extremo del poste.

**45.** Calcule la fuerza $F$ necesaria para troquelar un agujero de 1.46 cm de diámetro en una placa de acero de 1.27 cm de espesor; véase la figura 43. El límite de resistencia al corte del acero es de 345 MN/m$^2$.

**46.** Una barra uniforme de 4.7 kg de masa y 1.3 m de longitud está suspendida de los extremos por dos alambres verticales. Un alambre es de acero y tiene un diámetro de 1.2 mm; el otro alambre es de aluminio y tiene un diámetro de 0.84 mm. Antes de unirlos a la barra, los alambres eran de la misma longitud, o sea, de 1.7 m. Halle el ángulo $\theta$ entre la barra y la horizontal; véase la figura 44. (Desprecie el cambio en los diámetros de los alambres; la barra y los alambres están en el mismo plano.)

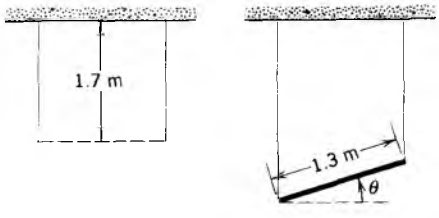



**Figura 44** Problema 46.

**47.** La pala de un rotor de 5.27 m de longitud está compuesta de un material de 4.55 g/cm$^3$ de densidad y un límite de resistencia a la tensión de 446 MN/m . Calcule la velocidad de rotación más grande posible. Suponga que la pala gira en torno a un eje perpendicular a la pala y que pasa por el extremo.

**48.** Se va a construir un túnel de 152 m de longitud, 7.18 m de altura y 5.77 m de anchura (de techo plano) a 61.5 m bajo tierra. El techo del túnel va a estar soportado enteramente por columnas de acero cuadradas, cada una con un área de sección transversal de 962 cm$^2$. La densidad del material del suelo es de 2.83 g/cm$^3$. (*a*) Calcule el peso que deben soportar las columnas. (*b*) ¿Cuántas columnas se necesitan para proporcionar un factor de seguridad de 2 contra la rotura? Véase la figura 45.

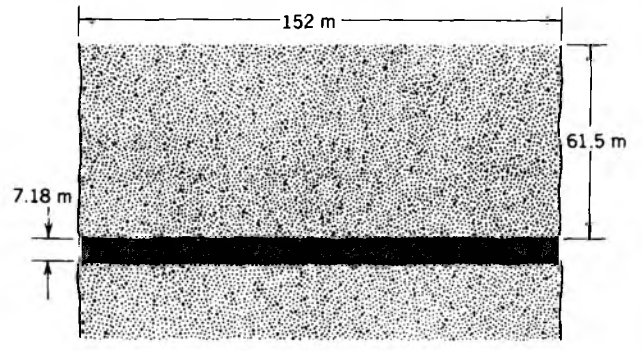



**Figura 45** Problema 48.

**49.** Una losa rectangular de roca descansa sobre un plano inclinado a 26.0°; véase la figura 46. La losa tiene las dimensiones de 43.3 m de longitud, 2.50 m de espesor, y 12.2 m de anchura. Su densidad es de 3.17 g/cm$^3$. El coeficiente de fricción estática entre la losa y la roca sobre la que está es de 0.390. (*a*) Calcule la componente del peso de la losa que actúa paralela al plano inclinado. (*b*) Calcule la fuerza estática de la fricción. (*c*) Comparando (*a*) y (*b*), convénzase usted mismo de que la losa está a punto de deslizarse. Solamente evita esto la cohesión entre la losa y el plano inclinado. Se desea estabilizar la losa con anclas dirigidas perpendicularmente al plano inclinado de modo que, despreciando la cohesión, la losa sea estable. Cada ancla tiene un área de 6.38 cm$^2$ y una resistencia al corte de 362 MN/m$^2$. Halle el número mínimo de anclas necesario. (Las tuercas de las anclas no están apretadas y por lo tanto no afectan la fuerza normal.)

**50.** Considérese una barra de metal de longitud $L$, área de la sección transversal $A$, separación atómica de equilibrio $x$, y módulo de Young $E$. Cuando se aplica una fuerza de tensión $F$ a la barra, provoca un estiramiento de $\Delta L$. Calcule la constante $k$ de la fuerza atómica derivando expresiones de (*a*) el número de cadenas de átomos en cualquier sección transversal, (*b*) el número de átomos en una sola cadena de longitud $L$, (*c*) el alargamiento microscópico $\Delta x$ entre los átomos, y (*d*) la fuerza de tracción $f$ entre los átomos. (*e*) Escriba $f = k\,\Delta x$ y demuestre que $k = EA/L$. (*f*) Calcule el valor de k para un metal típico para el cual $E = 1.2$ GN/m$^2$ y $x = 16$ nm.

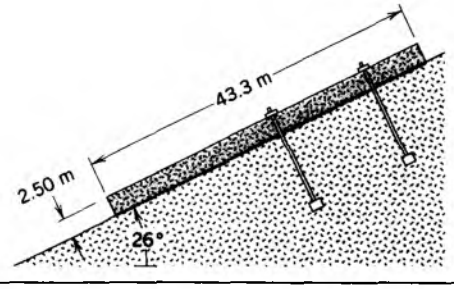



**Figura 46** Problema 49.

# CAPÍTULO 15

# OSCILACIONES

*Todos los días nos encontramos con muchas clases de movimiento oscilatorio. Entre los ejemplos más comunes podemos mencionar el péndulo de un reloj al oscilar, el salto de una persona desde un trampolín, y la cuerda de una guitarra al vibrar. En la escala microscópica, otros ejemplos son la vibración de los átomos en el cristal de cuarzo de un reloj de pulsera o la vibración de las moléculas de aire que transmiten las ondas sonoras. Los casos citados son oscilaciones mecánicas. Tampoco nos resultan desconocidas las oscilaciones electromagnéticas, como los electrones que entran y salen en circuitos que dan origen a la transmisión y la recepción de señales de radio o de televisión.*

*Una característica común de todos estos sistemas, a pesar de las diferencias en sus atributos y en las leyes que rigen su comportamiento, es la fórmula matemática que se utiliza para describir sus oscilaciones. En todos los casos, la cantidad de oscilación, ya sea el desplazamiento de una partícula o la magnitud de un campo eléctrico, puede describirse en términos de funciones seno y coseno, que son las funciones periódicas más conocidas para nosotros.*

*En este capítulo nos concentraremos en las oscilaciones mecánicas y su descripción. Más adelante, en este libro, estudiaremos las diversas clases de ondas y las oscilaciones electromagnéticas, las cuales utilizan también la misma descripción matemática.*

## 15-1 SISTEMAS OSCILATORIOS

Imaginemos un sistema que oscila, como el péndulo de un reloj o una masa suspendida de un resorte. ¿Cuáles deben ser las propiedades de la fuerza que produzca tales oscilaciones?

Si desplazamos a un péndulo en una dirección desde su posición de equilibrio, la fuerza (debida a la gravedad) impulsa de regreso hacia su posición de equilibrio. Si lo desplazamos en la otra dirección, la fuerza sigue actuando hacia la posición de equilibrio. *No importa cuál sea la dirección del desplazamiento, la fuerza siempre actúa en una dirección que restituye al sistema a su posición de equilibrio.* Esta fuerza recibe el nombre de *fuerza de restitución*. (La posición de equilibrio pertenece a la clase que llamamos *estable* en el capítulo 14; el sistema tiende a regresar al equilibrio cuando se le desplaza ligeramente.)

Consideremos un ejemplo sencillo. Supongamos que tenemos una partícula que puede moverse libremente sólo en la dirección $x$, y hagamos que la partícula experimente una fuerza de magnitud constante $F_m$ que actúe en la dirección $+x$ cuando $x < 0$ y en la dirección $-x$ cuando $x > 0$, como se muestra en la figura 1*a*. La fuerza, que se muestra en la figura 1*b*, es similar a las fuerzas seccionalmente constantes que consideramos en el capítulo 2.

Una partícula de masa $m$ en la coordenada $x = +x_m$ experimenta una fuerza cuya componente $x$ es $-F_m$, y la componente correspondiente $x$ de la aceleración de la partícula es $-a_m = -F_m/m$. La partícula se mueve hacia su posición de equilibrio en $x = 0$ y llega a esa posición con una velocidad $v = -v_m$. Cuando pasa por el origen a la $x$ negativa, la fuerza se convierte en $+F_m$, y la aceleración es $+a_m$. La partícula pierde velocidad y llega al reposo por un instante en $x = -x_m$ antes de invertir su movimiento a través del origen y regresar eventualmente a $x = +x_m$. En ausencia de la fricción y de otras fuerzas disipativas, el ciclo se repite una y otra vez.

La figura 2 muestra una gráfica del movimiento resultante, trazada al estilo de los ejemplos considerados en el capítulo 2. La posición $x(t)$ consta de una secuencia de segmentos de parábola unidos suavemente, como es siempre el caso del movimiento con aceleración constante. La

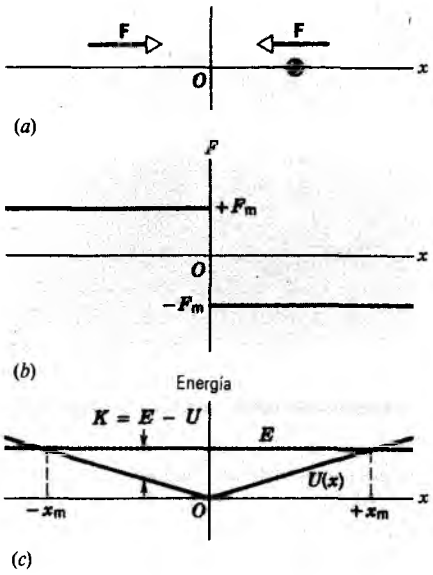



**Figura 1** (*a*) Una fuerza constante **F** que está siempre dirigida hacia el origen actúa sobre una partícula. (*b*) Diagrama de esta fuerza seccionalmente constante, igual a $+F_m$ cuando $x < 0$ y a $-F_m$ cuando $x > 0$. Cualquier fuerza real de este tipo debe estar representada por una función continua, aun cuando pueda ser de pendiente muy grande al pasar por $x = 0$. (*c*) La energía potencial que corresponde a esta fuerza. Si el sistema tiene una energía mecánica total $E$, entonces la diferencia $E - U$ da la energía cinética en cualquier posición.

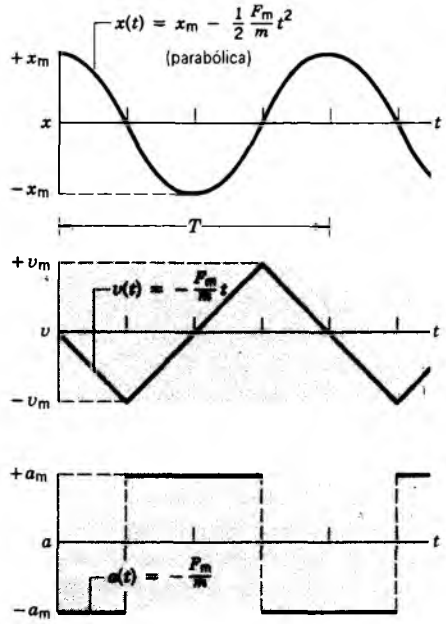



**Figura 2** La posición, la velocidad, y la aceleración de la partícula de la figura 1 graficadas en función del tiempo. La aceleración consta de segmentos horizontales alternativos con valores $+F_m/m$ y $-F_m/m$; la velocidad consta de segmentos lineales alternativos con pendientes $+F_m/m$ y $-F_m/m$, y la posición consista de secciones de parábola unidas suavemente. Puesto que la fuerza $F(x)$ es en realidad una función continua, $a(t)$ es también continua, teniendo los segmentos horizontales uniones muy empinadas. Además, los picos agudos de $v$(t) están redondeados. Sin embargo, las curvas que se muestran son aproximaciones excelentes si la fuerza cambia de $+F_m$ a $-F_m$ durante un intervalo de tiempo muy corto.

partícula oscila yendo y viniendo entre $x = +x_m$ y $x = -x_m$. La magnitud del desplazamiento máximo desde el equilibrio ($x_m$ en este caso) se llama *amplitud* de movimiento. El tiempo necesario para un ciclo completo (una repetición completa del movimiento) se llama *periodo T*, como se indica en la figura 2*a*. El número de ciclos por unidad de tiempo recibe el nombre de *frecuencia v*. La frecuencia y el periodo son recíprocos entre sí:

$$v = 1/T. \qquad (1)$$

El periodo se mide en unidades de tiempo (segundos, por ejemplo), mientras que la frecuencia se mide en una unidad SI: el hertz (Hz),* donde 1 Hz = 1 ciclo/s. Entonces, por ejemplo, una oscilación con un periodo de $T = 5$ s tiene una frecuencia $v = 0.2$ Hz.

Hasta ahora hemos usado una descripción dinámica de la oscilación, pero a menudo es conveniente una descripción en función de la energía. La figura 1*c* muestra la energía potencial que corresponde a la fuerza de la figura 1*b*. Nótese que, como se indica con la expresión $F = -dU/dx$, el negativo de la pendiente de $U(x)$ da la fuerza. La energía mecánica $E = K + U$ permanece constante en un sistema aislado. En cada punto, la diferencia $E - U$ da la energía cinética $K$ en ese punto. Si extendemos la gráfica a desplazamientos suficientemente grandes, eventualmente llegaríamos a posiciones en las que $E = U$ y entonces $K = 0$. En estos puntos, como lo muestra la figura 2, la velocidad es cero y la posición es $x = \pm x_m$. Estos puntos se llaman los *puntos de retorno* del movimiento.

Las figuras 1*b* y 1*c* ilustran dos maneras equivalentes de describir las condiciones de la oscilación: la fuerza debe actuar siempre para restituir la partícula al equilibrio, y la energía potencial debe tener un mínimo en la posición de equilibrio.

Siempre agrada trabajar con el caso de la aceleración constante, porque la matemática es sencilla, pero rara vez constituye una descripción precisa de la naturaleza. La figura 3*a* muestra un ejemplo de una fuerza más realista que puede producir un movimiento oscilatorio. Tal fuerza es la causa del enlace de las moléculas que contienen dos átomos. La fuerza aumenta rápidamente si tratamos de empujar a un átomo más cerca del otro; su componente

* La unidad de frecuencia se llama así en memoria de Heinrich Hertz (1857-1894), cuya investigación proporcionó la confirmación experimental de las ondas electromagnéticas.

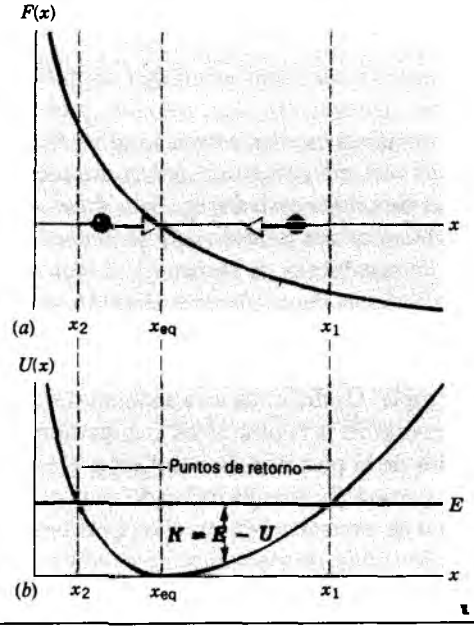



**Figura 3** (*a*) La fuerza que actúa sobre una partícula que oscila entre los límites $x_1$ y $x_2$. Nótese que la fuerza tiende siempre a empujar a la partícula hacia su posición de equilibrio, como en la figura 1. Tal fuerza puede actuar sobre un átomo en una molécula. (*b*) La energía potencial correspondiente a esta fuerza.

de repulsión impide que la molécula se colapse. Cuando tratamos de jalar a los átomos hacia espaciamientos más grandes, la fuerza trata de oponerse a nuestros intentos; esta fuerza puede ser una fuerza electrostática entre dos cargas eléctricas opuestas, pero a menudo es más compleja e implica la distribución espacial de las órbitas electrónicas de los átomos.

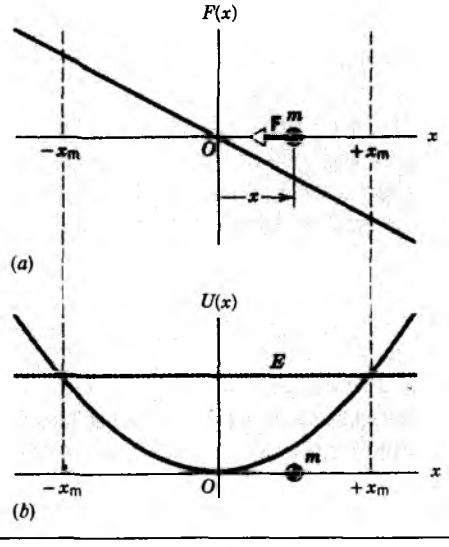



**Figura 4** (*a*) La fuerza y (*b*) la energía potencial correspondiente de un oscilador armónico simple. Nótense las similitudes y las diferencias con la figura 3.

La figura 3*b* muestra la función de la energía potencial $U(x)$ correspondiente. Nótese que, como era el caso en la figura 1, la fuerza cambia de signo en la posición de equilibrio, y la energía potencial tiene un mínimo en esa posición. Nótese también que, en este caso, los puntos de cambio ($x_1$ y $x_2$ en la Fig. 3) *no* son simétricos respecto a la posición de equilibrio. Si estirásemos la molécula un poco más allá de su configuración de equilibrio y la soltásemos (lo cual ocurre a menudo cuando una molécula absorbe radiación infrarroja), efectuaría un movimiento periódico con respecto a la posición de equilibrio, aunque la descripción matemática sería más compleja que la de la figura 2. El estudio de estas oscilaciones es una técnica importante para el entendimiento de la estructura molecular, lo cual trataremos en la sección 15-10.

## 15-2 EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

El movimiento de una partícula en un sistema complejo, como el átomo de la molécula en vibración tratado en la sección anterior, es más fácil de analizar si consideramos que el movimiento es una superposición de oscilaciones *armónicas*, las cuales pueden describirse en términos de funciones seno y coseno.

Consideremos un sistema oscilatorio consistente en una partícula sometida a una fuerza

$$F(x) = -kx, \tag{2}$$

donde $k$ es una constante y $x$ es el desplazamiento de la partícula a partir de su posición de equilibrio. Tal sistema oscilatorio recibe el nombre de *oscilador armónico simple*, y su movimiento se llama *movimiento armónico simple*. La energía potencial que corresponde a esta fuerza es

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \tag{3}$$

La fuerza y la energía potencial están, por supuesto, relacionadas por $F(x) = -dU/dx$. Como vimos por la ecuación 2 y como podemos apreciar en la gráfica de la figura 4*a*, la fuerza que actúa sobre la partícula es directamente proporcional al desplazamiento pero opuesta a él en dirección. La ecuación 3 muestra que la energía potencial varía con el cuadrado del desplazamiento, como lo ilustra la curva parabólica de la figura 4*b*.

Usted reconocerá las ecuaciones 2 y 3 como las expresiones de la fuerza y de la energía potencial de un resorte "ideal" con constante de fuerza $k$, comprimido o estirado en una distancia $x$; véase la sección 8-3. De aquí que *un cuerpo de masa m unido a un resorte ideal con constante de fuerza k y libre de moverse sobre una superficie horizontal sin fricción es un ejemplo de un oscilador armónico simple* (véase la Fig. 5). Nótese que existe una posición

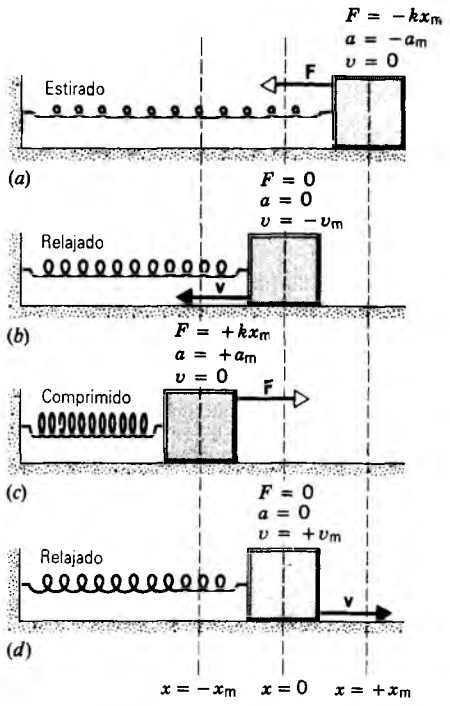



**Figura 5** Oscilador armónico simple, consistente en un resorte que actúa sobre un cuerpo que se desliza en una superficie horizontal sin fricción. En (*a*), el resorte se estira de modo que el cuerpo tenga su desplazamiento máximo a partir del equilibrio. En (*c*) el resorte está totalmente comprimido. En (*b*) y (*d*), el cuerpo pasa por la posición de equilibrio con velocidad máxima y con el resorte relajado.

(la posición de equilibrio; véase la Fig. 5*b*) en que el resorte no ejerce ninguna fuerza sobre el cuerpo. Si el cuerpo se desplaza hacia la derecha (como en la Fig. 5*a*), la fuerza ejercida por el resorte sobre el cuerpo apunta hacia la izquierda. Si el cuerpo se desplaza hacia la izquierda (como en la Fig. 5*c*), la fuerza apunta hacia la derecha. En cada caso la fuerza es una *fuerza de restitución*. (Concretamente aquí, es una fuerza de restitución *lineal*, esto es, proporcional a la primera potencia de $x$.)

Apliquemos la segunda ley de Newton, $F = ma$, al movimiento de la figura 5. Sustituimos a $F$ por $-kx$ y en vez de la aceleración $a$ ponemos $d^2x/dt^2$ ($= dv/dt$). Esto nos da

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

o sea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{4}$$

La ecuación 4 recibe el nombre de *ecuación del movimiento* del oscilador armónico simple. Su solución, la cual describiremos en la siguiente sección, es una función $x(t)$ que describe la posición del oscilador en función del tiempo, en analogía con la figura 2*a*, la cual representa la variación de la posición con el tiempo de un oscilador diferente.

El problema del oscilador armónico simple es importante por dos razones. Primera, muchos problemas que implican vibraciones mecánicas con amplitudes pequeñas se reducen al del oscilador armónico simple, o a una combinación de tales osciladores. Esto equivale a decir que si consideramos una porción suficientemente pequeña de la curva de una fuerza de restitución cerca de la posición de equilibrio, la figura 3*a*, por ejemplo, resulta arbitrariamente cercana a una línea recta, la cual, como lo muestra la figura 4*a*, es característica del movimiento armónico simple. O, dicho de otra manera, la curva de la energía potencial de la figura 3*b* es casi parabólica en las proximidades de la posición de equilibrio.

Segunda, como lo hemos ya indicado, ecuaciones como la ecuación 4 se presentan en muchos problemas físicos de acústica, de óptica, de mecánica, de circuitos eléctricos, e incluso de física atómica. El oscilador armónico simple exhibe características comunes a muchos sistemas físicos.

## 15-3 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Resolvamos ahora la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Obtuvimos la ecuación 4 para una fuerza $F = -kx$ de un resorte (donde la constante de fuerza $k$ es una medida de la rigidez del resorte) que actúa sobre una partícula de masa $m$. Veremos más adelante que otros sistemas oscilatorios se rigen por ecuaciones de movimiento similares, en las que la constante $k$ se relaciona con otras características físicas del sistema. Podemos usar el sistema oscilatorio masa-resorte como nuestro prototipo.

La ecuación 4 da una relación entre una función del tiempo $x(t)$ y su segunda derivada con respecto al tiempo, $d^2x/dt^2$. Nuestra meta es hallar una función $x(t)$ que satisfaga a esta relación. Comenzaremos por reescribir la ecuación 4 como sigue:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x. \tag{5}$$

La ecuación 5 requiere que $x(t)$ sea una función cuya segunda derivada sea la negativa de la función misma, excepto por un factor constante $k/m$. Sabemos del cálculo que las funciones seno y coseno tienen esta propiedad. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dt}\cos \omega t = -\omega \operatorname{sen} \omega t$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos \omega t = \frac{d}{dt}(-\omega \operatorname{sen} \omega t) = -\omega^2 \cos \omega t.$$

La segunda derivada de un coseno (o de un seno) nos da de nuevo la función original multiplicada por un factor negativo $-\omega^2$. Esta propiedad no sufre alteración si multiplicamos a la función coseno por cualquier constante. Elegimos que la constante sea $x_m$, de modo que el valor máximo de $x$ (la amplitud del movimiento) será $x_m$.

Escribimos una solución tentativa de la ecuación 5 como:

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi). \tag{6}$$

Aquí, puesto que

$$\begin{aligned} x_m \cos(\omega t + \phi) &= x_m \cos \phi \cos \omega t - x_m \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \omega t \\ &= a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t, \end{aligned}$$

permitiéndonos la constante $\phi$ cualquier combinación de soluciones seno y coseno.

Con las constantes (todavía) desconocidas $x_m$, $\omega$, y $\phi$, hemos escrito una solución de la ecuación 5 en la forma más general posible. Para determinar estas constantes de modo que la ecuación 6 sea realmente la solución de la ecuación 5, diferenciamos a la ecuación 6 dos veces con respecto al tiempo. Tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

y

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi).$$

Poniendo esto en la ecuación 5, obtenemos

$$-\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m} x_m \cos(\omega t + \phi).$$

Por lo tanto, si elegimos a la constante $\omega$ de modo que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \tag{7}$$

entonces la ecuación 6 es, de hecho, una solución de la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple.

Las constantes $x_m$ y $\phi$ están todavía indeterminadas y, por lo tanto, son aún completamente arbitrarias. Esto significa que *cualquier* elección de $x_m$ y de $\phi$ satisfarán a la ecuación 5, de modo que es posible una gran variedad de movimientos del oscilador (todos los cuales tienen la misma $\omega$). Más adelante veremos que $x_m$ y $\phi$ se determinan para un movimiento armónico en particular por la forma en que se inicie el movimiento.

Veamos el significado físico de la constante $\omega$. Si incrementamos el tiempo $t$ en la ecuación 6 en $2\pi/\omega$, la función resulta

$$\begin{aligned} x &= x_m \cos[\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi] \\ &= x_m \cos(\omega t + 2\pi + \phi) \\ &= x_m \cos(\omega t + \phi). \end{aligned}$$

Es decir, la función simplemente se vuelve a repetir después de un tiempo $2\pi/\omega$. Por lo tanto, $2\pi/\omega$ es el periodo del movimiento $T$. Puesto que $\omega^2 = k/m$, tenemos

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{8}$$

De aquí que todos los movimientos dados por la ecuación 5 tengan el mismo periodo de oscilación, el cual se determina solamente por la masa $m$ de la partícula oscilatoria y la constante de fuerza $k$ del resorte. La frecuencia $\nu$ del oscilador es el número de vibraciones completas por unidad de tiempo y está dada por

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{9}$$

De aquí que

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{10}$$

La cantidad $\omega$ se denomina *frecuencia angular*; difiere de la frecuencia $\nu$ en un factor $2\pi$. Tiene la dimensión del recíproco del tiempo (lo mismo que la velocidad angular), y su unidad es el radián/segundo. En la sección 15-6 ofreceremos un significado geométrico de esta frecuencia angular.

La constante $x_m$ tiene un significado físico sencillo. La función coseno toma valores desde $-1$ hasta $+1$. El desplazamiento $x$ desde la posición de equilibrio central $x = 0$ tiene por lo tanto un valor máximo de $x_m$; véase la ecuación 6. Llamamos a $x_m$ la *amplitud* del movimiento. Como $x_m$ no está determinada por la ecuación 4, son posibles movimientos de varias amplitudes, pero todos tienen la misma frecuencia y periodo. *La frecuencia de un movimiento armónico simple es independiente de la amplitud del movimiento.*

La cantidad $(\omega t + \phi)$ se llama *fase* del movimiento y llamamos a la constante $\phi$ *constante de fase*. Dos movimientos pueden tener la misma amplitud y frecuencia pero diferir en fase. Si $\phi = -\pi/2 = -90°$, por ejemplo,

$$\begin{aligned} x = x_m \cos(\omega t + \phi) &= x_m \cos(\omega t - 90°) \\ &= x_m \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

de modo que el desplazamiento es cero en el tiempo $t = 0$. Por otra parte, si $\phi = 0$, el desplazamiento $x = x_m \cos \omega t$ tiene su valor máximo $x = x_m$ en el tiempo $t = 0$. Otros desplazamientos iniciales corresponden a otras constantes de fase. Véase el problema muestra 3 para un ejemplo del método para hallar a $x_m$ y $\phi$ a partir del desplazamiento y velocidad iniciales.

La amplitud $x_m$ y la constante de fase $\phi$ de la oscilación se determinan por la posición y la velocidad iniciales de

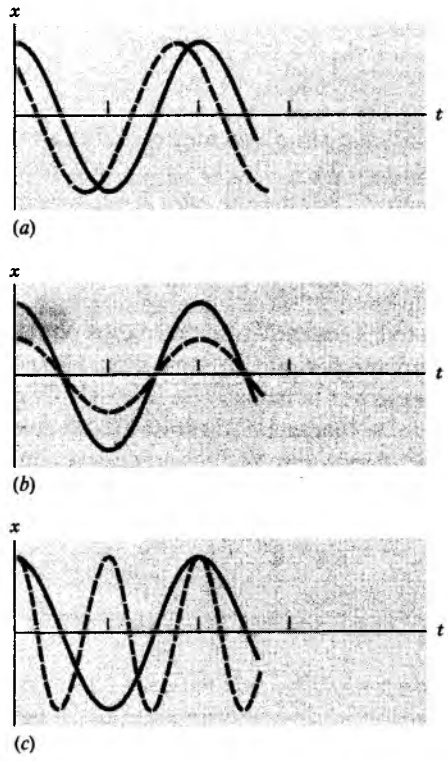



**Figura 6** (*a*) Comparación de los movimientos de dos osciladores armónicos simples de la misma amplitud y frecuencia pero con constantes de fase que difieren en 45°. Si el movimiento está representado por la ecuación 6, entonces la curva de línea continua tiene $\phi = 0°$ y la curva punteada tiene $\phi = 45°$. (*b*) Dos movimientos armónicos simples con la misma constante de fase y frecuencia pero que difieren en amplitud por un factor de 2. (*c*) Dos movimientos armónicos simples con la misma amplitud y constante de fase (0°) pero que difieren en frecuencia por un factor de 2. La curva de línea continua tiene el doble del *periodo*, y por lo tanto la mitad de la *frecuencia*, de la curva punteada.

la partícula. Estas dos condiciones iniciales determinan a $x_m$ y $\phi$ exactamente (excepto que $\phi$ puede ser aumentada o disminuida en un múltiplo cualquiera de $2\pi$ sin que cambie el movimiento). Sin embargo, una vez que haya comenzado el movimiento, la partícula continuará oscilando con una amplitud y constante de fase constantes a una frecuencia fija, a no ser que otras fuerzas alteren el sistema.

En la figura 6 trazamos el desplazamiento $x$ contra el tiempo $t$ de varios movimientos armónicos simples descritos por la ecuación 6. Se hacen tres comparaciones; en la figura 6*a*, las dos curvas tienen la misma amplitud y frecuencia pero difieren en fase en $\phi = \pi/4$, o 45°. En la figura 6*b*, las dos curvas tienen la misma frecuencia y constante de fase pero difieren en amplitud por un factor de $\frac{1}{2}$, o en periodo por un factor de 2. Conviene estudiar estas curvas cuidadosamente para familiarizarse con la terminología empleada en el movimiento armónico simple.

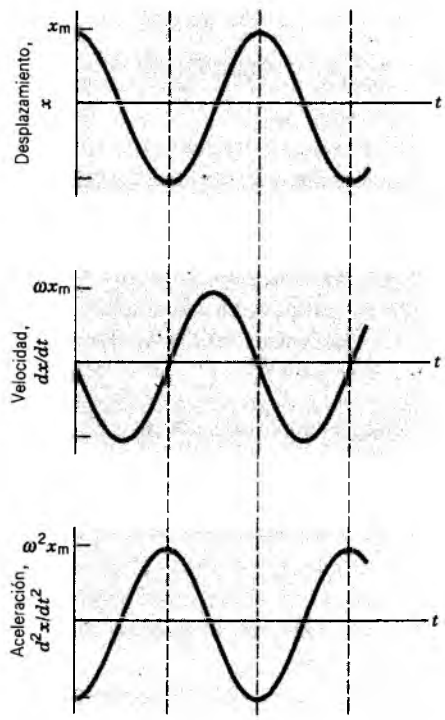



**Figura 7** El desplazamiento, la velocidad, y la aceleración de un oscilador armónico simple, según las ecuaciones 11.

Otra característica distintiva del movimiento armónico simple es la relación entre el desplazamiento, la velocidad, y la aceleración de una partícula oscilatoria. Comparemos estas cantidades. En la figura 7 trazamos separadamente el desplazamiento $x$ contra el tiempo $t$, la velocidad $v = dx/dt$ contra el tiempo $t$, y la aceleración $a = dv/dt = d^2x/dt^2$ contra el tiempo $t$. Las ecuaciones de estas curvas son

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi),$$
$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \qquad (11)$$
$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi).$$

Para el caso graficado hemos tomado $\phi = 0$. Se omiten las unidades y la escala del desplazamiento, la velocidad, y la aceleración para mayor simplificación de la comparación. El desplazamiento, la velocidad, y la aceleración oscilan todas armónicamente. Nótese que el desplazamiento máximo (amplitud) es $x_m$, la velocidad máxima (amplitud de velocidad) es $\omega x_m$, y la aceleración máxima (amplitud de aceleración) es $\omega^2 x_m$.

Cuando el desplazamiento es un máximo en cualquier dirección, la velocidad es cero porque ésta debe ahora cambiar su dirección. La aceleración en este instante, así como la fuerza de restitución, tiene una magnitud máxima

pero está dirigida en sentido opuesto al desplazamiento. Cuando el desplazamiento es cero, la velocidad de la partícula es máxima y la aceleración es cero, correspondiendo a una fuerza de restitución nula. La velocidad aumenta cuando la partícula se mueve hacia la posición de equilibrio y luego disminuye cuando se mueve hacia la posición de desplazamiento máximo. Compárese la figura 7 con la figura 2, y obsérvense sus similitudes y diferencias.

**Problema muestra 1** Cierto resorte cuelga verticalmente. Cuando se suspende de él un cuerpo de masa $M$ = 1.65 kg, su longitud aumenta en 7.33 cm. El resorte se monta luego horizontalmente, y se une a él un bloque de masa $m$ = 2.43 kg. El bloque tiene la libertad de deslizarse a lo largo de una superficie horizontal sin fricción, como en la figura 5. (*a*) ¿Cuál es la constante $k$ de la fuerza del resorte? (*b*) ¿Qué fuerza horizontal se requiere para estirar al resorte una distancia de 11.6 cm? (*c*) Cuando el bloque se desplaza a una distancia de 11.6 cm y luego se suelta, ¿con qué periodo oscilará?

**Solución** (*a*) La constante de fuerza $k$ se determina a partir de la fuerza $Mg$ necesaria para estirar el resorte en la distancia medida de 7.33 cm. Cuando el cuerpo suspendido está en equilibrio, la fuerza del resorte $kx$ equilibra al peso $Mg$:

$$kx = Mg$$

$$k = Mg/x = (1.65 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)/(0.0733 \text{ m})$$
$$= 221 \text{ N/m}.$$

(*b*) La magnitud de la fuerza necesaria para estirar el resorte en 11.6 cm se determina a partir de la ley de Hooke (Ec. 2) utilizando la constante de fuerza $k$ que obtuvimos en la parte (*a*):

$$F = kx = (221 \text{ N/m})(0.116 \text{ m}) = 25.6 \text{ N}.$$

(*c*) El periodo es independiente de la amplitud y depende solamente de los valores de la masa del bloque y de la fuerza constante. Según la ecuación 8,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.43 \text{ kg}}{221 \text{ N/m}}} = 0.6589 \text{ s} = 659 \text{ ms}.$$

(Mostramos el valor de $T$ con cuatro cifras significativas, más de las justificadas por los datos de entrada, porque necesitaremos este resultado en la solución del problema muestra 3. Para evitar errores de redondeo en etapas intermedias, es una práctica normal considerar un exceso de cifras significativas de esta manera. El resultado final, por supuesto, debe ser redondeado apropiadamente.)

## 15-4 CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

En el movimiento armónico, incluyendo el movimiento armónico simple, en el cual no actúan fuerzas disipativas,

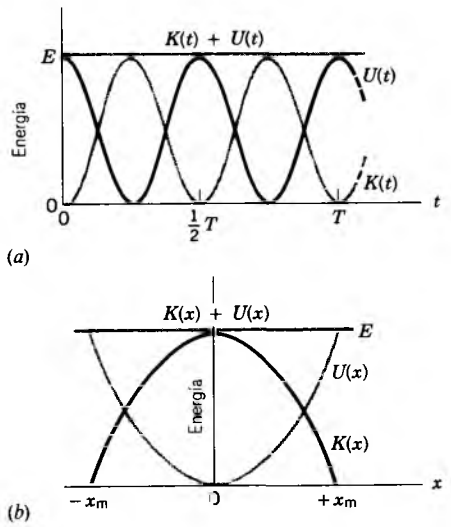



**Figura 8** La energía potencial $U$, la energía cinética $K$, y la energía mecánica total $E$ de una partícula que efectúa un movimiento armónico simple se muestran en función de (*a*) el tiempo y (*b*) el desplazamiento. Nótese que en (*a*) las energías potencial y cinética pueden alcanzar cada una sus máximos dos veces durante cada periodo del movimiento. Véase también la figura 6 del capítulo 8.

la energía mecánica total $E$ (= $K$ + $U$) se conserva (permanece constante). Ahora podemos estudiar esto con más detalle en el caso especial del movimiento armónico simple, para el cual el desplazamiento está dado por

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi).$$

La energía potencial $U$ en cualquier instante está dada por

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi). \qquad (12)$$

La energía potencial oscila entonces con el tiempo y tiene un valor máximo de $\frac{1}{2}kx_m^2$. Durante el movimiento, la energía potencial varía entre cero y este valor máximo, como lo muestran las curvas de las figura 8*a* y 8*b*.

La energía cinética $K$ en cualquier instante es $\frac{1}{2}mv^2$. Usando la ecuación 11 para $v(t)$ y la ecuación 7 para $\omega^2$, obtenemos

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2$$
$$= \tfrac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)$$
$$= \tfrac{1}{2}kx_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi). \qquad (13)$$

La energía cinética, al igual que la energía potencial, oscila con el tiempo y tiene un valor máximo de $\frac{1}{2}kx_m^2$. Durante el movimiento, la energía cinética varía entre cero y este valor máximo, como lo muestran las curvas en las figuras 8*a* y 8*b*. Nótese que las energías cinética y potencial varían con el doble de la frecuencia (mitad del periodo) del desplazamiento y de la velocidad. ¿Puede usted explicar esto?

La energía mecánica total es la suma de la energía cinética y de la energía potencial. Usando las ecuaciones 12 y 13, obtenemos

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) + \tfrac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \tfrac{1}{2}kx_m^2 . \quad (14)$$

Vemos que la energía mecánica total es constante, como lo esperábamos, y tiene el valor $\frac{1}{2}kx_m^2$. En el desplazamiento máximo la energía cinética es cero, pero la energía potencial tiene el valor $\frac{1}{2}kx_m^2$. En la posición de equilibrio la energía potencial es cero, pero la energía cinética tiene el valor $\frac{1}{2}kx_m^2$. En otras posiciones las energías potencial y cinética contribuyen cada una con términos cuya suma es siempre $\frac{1}{2}kx_m^2$. Esta energía total constante $E$ se muestra en las figuras 8*a* y 8*b*. La energía total de una partícula que efectúa un movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento. Puede demostrarse (véase el problema 38) que la energía cinética promedio del movimiento durante un periodo es exactamente igual a la energía potencial promedio y que cada una de estas cantidades promedio es la mitad de la energía total, o sea $\frac{1}{4}kx_m^2$.

La ecuación 14 puede escribirse en forma bastante general como:

$$K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2 . \quad (15)$$

A partir de esta relación obtenemos $v^2 = (k/m)(x_m^2 - x^2)$, o sea

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)} . \quad (16)$$

Esta relación muestra claramente que la velocidad es un máximo en la posición de equilibrio ($x = 0$) y es cero en los desplazamientos extremos ($x = \pm x_m$). De hecho, podemos partir de la conservación de la energía, ecuación 15 (en la cual $\frac{1}{2}kx_m^2 = E$), y por integración de la ecuación 16 obtener el desplazamiento en función del tiempo. El resultado es idéntico al de la ecuación 6, la cual deducimos de la ecuación del movimiento, ecuación 4. (Véase el problema 32.)

---

**Problema muestra 2** La combinación bloque-resorte del problema muestra 1 se estira en dirección positiva $x$ una distancia de 11.6 cm del equilibrio y luego se suelta. (*a*) ¿Cuál es la energía total almacenada en el sistema? (*b*) ¿Cuál es la velocidad máxima del bloque? (*c*) ¿Cuál es la aceleración máxima? (*d*) Si el bloque se suelta en $t = 0$, ¿cuáles son su posición, su velocidad, y su aceleración en $t = 0.215$ s?

**Solución** (*a*) La amplitud del movimiento está dada por $x_m = 0.116$ m. La energía total está dada por la ecuación 14:

$$E = \tfrac{1}{2}kx_m^2 = \tfrac{1}{2}(221 \text{ N/m})(0.116 \text{ m})^2 = 1.49 \text{ J}.$$

(*b*) La energía cinética máxima es numéricamente igual a la energía total; cuando $U = 0$, $K = K_{max} = E$. La velocidad máxima es, entonces,

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2K_{máx}}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.49 \text{ J})}{2.43 \text{ kg}}} = 1.11 \text{ m/s}.$$

(*c*) La aceleración máxima ocurre precisamente en el instante en que el bloque se suelta, cuando la fuerza es máxima:

$$a_{máx} = \frac{F_{máx}}{m} = \frac{kx_m}{m} = \frac{(221 \text{ N/m})(0.116 \text{ m})}{2.43 \text{ kg}} = 10.6 \text{ m/s}^2.$$

(*d*) A partir del periodo obtenido en el problema muestra 1, podemos hallar la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.6589 \text{ s}} = 9.536 \text{ radianes/s}.$$

Puesto que el bloque tiene su desplazamiento máximo de $x_m = 0.116$ m en $t = 0$, su movimiento puede describirse por una función coseno:

$$x(t) = x_m \cos \omega t,$$

un resultado que se deduce haciendo $\phi = 0$ en la ecuación 6. En $t = 0.215$ s, hallamos

$$x = (0.116 \text{ m}) \cos (9.536 \text{ radians/s})(0.215 \text{ s}) = -0.0535 \text{ m}.$$

Nótese que el ángulo $\omega t$, cuyo coseno debemos hallar, se expresa en radianes. La velocidad está dada por la ecuación 11, la cual, con $\phi = 0$, resulta $v(t) = -\omega x_m \operatorname{sen} \omega t$. En 0.215 s, obtenemos

$$v = -(9.536 \text{ radianes/s})(0.116 \text{ m}) \operatorname{sen} (9.536 \text{ radianes/s})(0.215 \text{ s}) = -0.981 \text{ m/s}.$$

Para hallar la aceleración, usamos de nuevo la ecuación 11 y notamos que, para toda $t$, $a = -\omega^2 x$:

$$a = -(9.536 \text{ radianes/s})^2 (-0.0535 \text{ m}) = +4.87 \text{ m/s}^2.$$

Examinemos nuestros resultados para ver si son razonables. El tiempo $t = 0.215$ s está entre $T/4 = 0.165$ s y $T/2 = 0.330$ s. Si el bloque inicia su movimiento en $x = +0.116$ m, entonces en $T/4$ pasará a través de la posición de equilibrio, y ciertamente es razonable que en $t = 0.215$ s esté en una posición coordenada $x$ negativa, como ya lo habíamos hallado. Puesto que en ese momento se está moviendo hacia $x = -x_m$, su velocidad debe ser negativa, lo cual coincide con lo que hemos obtenido. Sin embargo, ya pasó a través del punto de velocidad más negativa, y se va haciendo más lento al aproximarse a $x = -x_m$; por lo tanto, la aceleración debe ser positiva. Podemos comprobar el valor de la aceleración a partir de $a = kx/m$. Podemos también comprobar el la relación entre $v$ y $x$ usando la ecuación 16.

**Problema muestra 3** El bloque del sistema bloque-resorte del problema muestra 1 es desplazado de la posición de equilibrio por una fuerza externa en dirección $x$ positiva. En $t = 0$, cuando el desplazamiento del bloque es $x = +0.0624$ m y su velocidad es $v = +0.847$ m/s, la fuerza externa se quita y el bloque comienza a oscilar. Escriba una ecuación para $x(t)$ durante la oscilación.

**Solución** Puesto que tenemos la misma masa (2.43 kg) y la misma fuerza constante (221 N/m), la frecuencia angular es todavía 9.536 radianes/s, como lo obtuvimos en el problema muestra 2. La ecuación más general para $x(t)$ está dada por la ecuación 6,

$$x(t) = x_m \cos (\omega t + \phi),$$

y debemos obtener a $x_m$ y a $\phi$ para completar la solución. Para hallar a $x_m$, calculemos la energía total, la cual en $t = 0$ tiene términos tanto de cinética como de potencial:

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(2.43 \text{ kg})(0.847 \text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(221 \text{ N/m})(0.0624 \text{ m})^2$$
$$= 0.872 \text{ J} + 0.430 \text{ J} = 1.302 \text{ J}.$$

Haciendo esto igual a $(\frac{1}{2})kx_m^2$, como lo requiere la ecuación 15, tenemos

$$x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(1.302 \text{ J})}{221 \text{ N/m}}} = 0.1085 \text{ m}.$$

Para hallar la constante de fase, usamos la información dada para $t = 0$:

$$x(0) = x_m \cos \phi$$

$$\cos \phi = \frac{x(0)}{x_m} = \frac{+0.0624 \text{ m}}{0.1085 \text{ m}} = +0.5751.$$

En el intervalo de 0 a $2\pi$, existen dos valores de $\phi$ cuyo coseno es +0.5751; los valores posibles son $\phi = 54.9°$ o $\phi = 305.1°$. Cualquiera de ellos satisfará la condición de que $x(0)$ tenga el valor apropiado, pero sólo uno dará la velocidad inicial correcta:

$$v(0) = -\omega x_m \operatorname{sen} \phi = -(9.536 \text{ rad/s})(0.1085 \text{ m}) \operatorname{sen} \phi$$
$$= -(1.035 \text{ m/s}) \operatorname{sen} \phi$$
$$= -0.847 \text{ m/s para } \phi = 54.9°$$
$$= +0.847 \text{ m/s para } \phi = 305.1°.$$

Obviamente el segundo valor es el correcto, y por lo tanto hacemos que $\phi = 305.1° = 5.33$ radianes. Ahora podemos escribir

$$x(t) = 0.109 \cos (9.54t + 5.33),$$

donde $x$ está en metros y $t$ en segundos.

Véase el problema 31 para una derivación de las relaciones generales que permiten calcular $x_m$ y $\phi$ a partir de $x(0)$ y $v(0)$.

## 15-5 APLICACIONES DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Aquí consideraremos unos cuantos sistemas físicos que se mueven con un movimiento armónico simple. A través del texto se hallarán otros.*

### El oscilador de torsión

La figura 9 muestra un disco suspendido de un alambre o flecha unido al centro de masa del disco. El alambre está perfectamente fijo a un soporte sólido o abrazadera y al

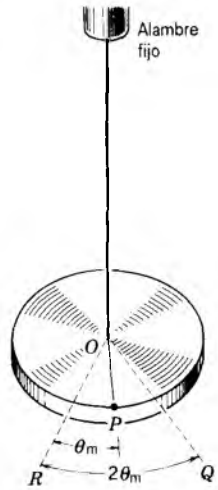



**Figura 9** Oscilador de torsión. La línea que va de $O$ a $P$ oscila entre $OQ$ y $OR$, barriendo un ángulo $2\theta_m$, donde $\theta_m$ es la amplitud angular del movimiento.

disco. Con el disco en equilibrio, trazamos una línea radial desde su centro a un punto $P$ en su borde, como se muestra. Si hacemos que el disco gire en un plano horizontal de modo que la línea de referencia $OP$ se mueva a la posición $OQ$, el alambre se retorcerá. El alambre retorcido ejercerá una torca de restitución sobre el disco que tiende a regresar a la línea de referencia a su posición de equilibrio. Para retorcimientos pequeños se halla que la torca de restitución es proporcional al desplazamiento angular (ley de Hooke), de modo que

$$\tau = -\kappa\theta. \tag{17}$$

Aquí $\kappa$ (la letra griega kappa) es una constante que depende de las propiedades del alambre y se denomina *constante de torsión*. El signo menos muestra que la torca está dirigida en sentido opuesto al desplazamiento angular $\theta$. La ecuación 17 es la condición del *movimiento armónico simple angular*.

La ecuación del movimiento para este sistema se basa en la forma angular de la segunda ley de Newton,

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}, \tag{18}$$

de modo que, usando la ecuación 17, obtenemos

$$-\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

o sea

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta. \tag{19}$$

Nótese el parecido entre la ecuación 19 para el movimiento armónico simple angular y la ecuación 5 para el movimiento armónico simple lineal. De hecho, las ecuaciones

* Para un estudio completo de 16 sistemas físicos que exhiben un movimiento armónico simple véase "A Repertoire of S.H.M.", por Eli Maor, *The Physics Teacher*, octubre de 1972, pág. 377.

son matemáticamente idénticas. Al igual que en el capítulo 11, podemos simplemente sustituir al desplazamiento lineal $x$, por el desplazamiento angular $\theta$ a la masa $m$, por la inercia de rotación $I$ y a la constante de fuerza $\kappa$ por la constante de torsión $k$. Mediante estas sustituciones, hallamos que la solución de la ecuación 19 es una oscilación armónica simple en la coordenada angular $\theta$; es decir,

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi). \tag{20}$$

Aquí $\theta_m$ es el desplazamiento angular máximo, esto es, la amplitud de la oscilación angular. Nótese que $\omega$ significa aquí la frecuencia angular, no la velocidad angular. En la ecuación 20, $\omega \neq d\theta/dt$

En la figura 9 el disco oscila con respecto a la posición de equilibrio $\theta = 0$, siendo el intervalo angular total $2\theta_m$ (desde $OQ$ hasta $OR$). Por analogía con la ecuación 8, el periodo de la oscilación es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \tag{21}$$

Si $\kappa$ es conocida y $T$ se mide, puede determinarse la inercia de rotación $I$ con respecto al eje de rotación de cualquier cuerpo rígido oscilatorio. Si $I$ es conocida y $T$ se mide, puede determinarse la constante de torsión $\kappa$ de cualquier muestra de alambre.

Un oscilador de torsión como el de la figura 9 se denomina también *péndulo de torsión*. La balanza de Cavendish, usada para medir la constante $G$ de la fuerza gravitatoria (véase el capítulo 16), es un péndulo de torsión. Al igual que el péndulo simple (que trataremos a continuación) el péndulo de torsión se usa a menudo para medir el tiempo, siendo el volante de un reloj mecánico un ejemplo común, donde la torca de restitución es proporcionada por un resorte espiral.

## El péndulo simple

Un péndulo simple es un cuerpo idealizado que de una partícula suspendida de un cordón ligero inextensible. Cuando se le lleva a un lado de su posición de equilibrio y se le suelta, el péndulo oscila en un plano vertical bajo la influencia de la gravedad. El movimiento es periódico y oscilatorio. Deseamos determinar el periodo del movimiento.

La figura 10 muestra un péndulo de longitud $L$ y masa $m$ de la partícula. En el instante mostrado, el cordón forma un ángulo $\theta$ con la vertical. Las fuerzas que actúan sobre $m$ son el peso $m\mathbf{g}$ y la tensión $\mathbf{T}$ en el cordón. El movimiento tendrá lugar a lo largo de un arco de círculo de radio $L$, y por lo tanto elegimos a los ejes tangentes al círculo y a lo largo del radio. El peso $m\mathbf{g}$ se descompone en una componente radial de magnitud $mg \cos\theta$ y una componente tangencial de magnitud $mg$ sen $\theta$. Las componentes radiales de las fuerzas suministran la aceleración

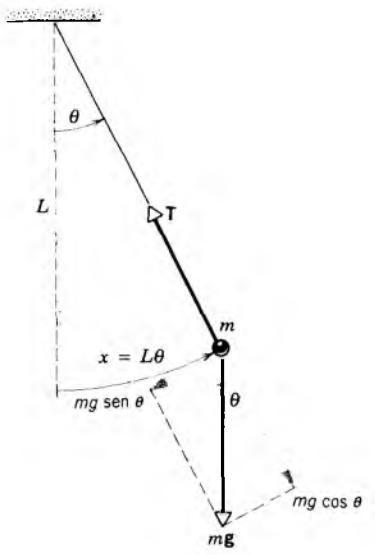



**Figura 10** El péndulo simple. Las fuerzas que actúan sobre el péndulo son la tensión $\mathbf{T}$ y la fuerza gravitatoria $m\mathbf{g}$, la cual se descompone en sus componentes radial y tangencial.

centrípeta necesaria para mantener a la partícula moviéndose en un arco circular. La componente tangencial es la fuerza de restitución que actúa sobre $m$ y que tiende a regresarla a la posición de equilibrio. De aquí que la fuerza de restitución sea

$$F = -mg \text{ sen } \theta, \tag{22}$$

indicando el signo menos que $F$ es opuesta a la dirección de $\theta$ creciente.

Nótese que la fuerza de restitución no es proporcional al desplazamiento angular $\theta$, sino a sen $\theta$. Por lo tanto, el movimiento resultante no es armónico simple. Sin embargo, si el ángulo $\theta$ es pequeño, sen $\theta$ es aproximadamente igual a $\theta$ en radianes. Por ejemplo, si $\theta = 5°$ (= 0.0873 rad), entonces sen $\theta$ = 0.0872, el cual difiere de $\theta$ por sólo alrededor del 0.1%. El desplazamiento a lo largo del arco es $x = L\theta$, y para ángulos pequeños esto es casi un movimiento en línea recta. Por lo tanto, suponiendo que

$$\text{sen } \theta \approx \theta,$$

obtenemos

$$F = -mg\theta = -mg\frac{x}{L} = -\left(\frac{mg}{L}\right)x. \tag{23}$$

Para *desplazamientos pequeños*, la fuerza de restitución es proporcional al desplazamiento y opuesta directamente. Éste es exactamente el criterio del movimiento armónico simple y, de hecho, la ecuación 23 tiene la misma forma que la ecuación 2, $F = -kx$, donde la constante $mg/L$ representa a la constante $k$. (Compruebe que las dimensiones de $k$ y de $mg/L$ son las mismas.) El periodo de un

péndulo simple cuando su amplitud es pequeña se halla entonces haciendo a $k = mg/L$ en la ecuación 8:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/L}}$$

o sea

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{24}$$

Nótese que el periodo es independiente de la masa de la partícula suspendida.

Cuando la amplitud de la oscilación no es pequeña, puede demostrarse* que la ecuación general del periodo es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left( 1 + \frac{1}{2^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_m}{2} + \frac{1}{2^2} \frac{3^2}{4^2} \operatorname{sen}^4 \frac{\theta_m}{2} + \cdots \right). \tag{25}$$

Aquí $\theta_m$ es el desplazamiento angular máximo. Obsérvese que $T$ aumenta cuando la amplitud crece. Los términos sucesivos de la serie infinita se vuelven cada vez más y más pequeños, y el periodo puede calcularse al grado de precisión deseado tomando los suficientes términos. Cuando $\theta_m = 15°$, el periodo real difiere del dado por la ecuación 24 en menos de 0.5%.

Durante los pasados tres siglos, el péndulo ha sido nuestro marcador de tiempo más confiable, sustituido sólo en las últimas décadas por los relojes basados en oscilaciones atómicas o electrónicas. Para que un reloj de péndulo sea un marcador de tiempo preciso, la amplitud de la oscilación debe mantenerse constante a pesar de las pérdidas por fricción que afectan a todos los sistemas mecánicos. Incluso un cambio de amplitud tan pequeño como de 5° a 4° provocaría que el péndulo de un reloj se adelantara en 0.25 minutos por día, cantidad inaceptable incluso para medir el tiempo en el hogar. Para mantener la constante de amplitud en un reloj de péndulo, la energía se suministra automáticamente en pequeños incrementos mediante una pesa o un resorte con la ayuda de un mecanismo de escape que compense las pérdidas por fricción. El reloj de péndulo con escape fue inventado por Christiaan Huygens (1629-1695).

El péndulo simple proporciona también un método conveniente para medir el valor de $g$, la aceleración debida a la gravedad. Podemos determinar fácilmente a $L$ y a $T$ con una precisión de menos de 0.1% usando el equipo de laboratorio para estudiantes, y entonces la ecuación 24 nos permite determinar a $g$ con esa misma precisión aproximadamente. Con aparatos mejores, ésta puede extenderse hasta alrededor de 0.0001%.

* Véase K. R. Symon, *Mechanics*, 3a. edición (Addison-Wesley, 1971), sección 5.3.

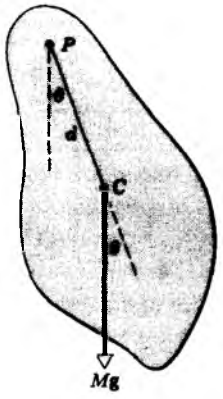



**Figura 11** Un péndulo físico. El centro de masa está en $C$, y el pivote está en el punto $P$. El péndulo es desplazado un ángulo $\theta$ desde su posición de equilibrio, la cual existe cuando $C$ cuelga directamente debajo de $P$. El peso $Mg$ proporciona la torca de restitución.

## El péndulo físico

Cualquier cuerpo rígido montado de manera que pueda oscilar en un plano vertical respecto a algún eje que pase por él recibe el nombre de *péndulo físico*. Ésta es una generalización del péndulo simple, en el cual un cordón sin peso sostiene a una partícula simple. En realidad, los péndulos que utilizamos en la práctica son péndulos físicos.

En la figura 11 un cuerpo de forma irregular está pivotado en torno a un eje horizontal sin fricción que pasa por $P$ y desplazado de la posición de equilibrio en un ángulo $\theta$. La posición de equilibrio es aquella en la que el centro de masa $C$ del cuerpo está verticalmente debajo de $P$. La distancia desde el pivote al centro de masa es $d$, la inercia de rotación del cuerpo en torno a un eje que pase por el pivote es $I$, y la masa del cuerpo es $M$. La torca de restitución para un desplazamiento angular $\theta$ es

$$\tau = -Mgd \operatorname{sen} \theta \tag{26}$$

y se debe a la componente tangencial del peso. Puesto que $\tau$ es proporcional a sen $\theta$, y no a $\theta$, la condición para el movimiento armónico simple angular no se cumple aquí, en lo general. Sin embargo, para desplazamientos angulares pequeños, la relación sen $\theta \approx \theta$ es, como antes, una aproximación excelente, de modo que para amplitudes pequeñas,

$$\tau = -Mgd\theta. \tag{27}$$

Esta expresión tiene la forma de la ecuación 17, y el periodo se deduce directamente de la ecuación 21 con la sustitución $\kappa = Mgd$, lo cual da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}. \tag{28}$$

De la ecuación 28 puede despejarse la inercia de rotación $I$, dando

$$I = \frac{T^2 Mgd}{4\pi^2}. \tag{29}$$

Las cantidades a la derecha son todas medibles directamente. De aquí que la inercia de rotación en torno a un eje de rotación (que no pase por el centro de masa) de un cuerpo de cualquier forma puede determinarse suspendiendo al cuerpo de ese eje como un péndulo físico.

El péndulo físico incluye al péndulo simple como un caso especial. Al situar al pivote lejos del objeto, usando un cordón sin peso de longitud $L$, tendríamos $I = ML^2$ y $d = L$, de modo que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{ML^2}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

que es el periodo de un péndulo simple.

Si la masa de un péndulo físico estuviese concentrada a una distancia $L$ del pivote escogida apropiadamente, el péndulo simple resultante tendría el mismo periodo que el péndulo físico original si

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

o sea

$$L = \frac{I}{Md}. \tag{30}$$

De aquí que, en lo que concierne a su periodo de oscilación, puede considerarse que la masa de un péndulo físico está concentrada en un punto $O$ cuya distancia al pivote es $L = I/Md$. Este punto se llama *centro de oscilación* del péndulo físico. Obsérvese que, en cualquier cuerpo dado, depende de la ubicación del pivote. Además, si pivotamos al péndulo físico original en torno al punto $O$, tendrá el mismo periodo que si lo pivotamos en torno al punto $P$.

**Problema muestra 4** Una barra uniforme de masa $M$ = 0.112 kg y longitud $L$ = 0.096 m está suspendida de un alambre que pasa por su centro y es perpendicular a su longitud. El alambre se retuerce y la barra se pone en oscilación. Se halla que el periodo es de 2.14 s. Cuando se suspende a un cuerpo plano en forma de triángulo equilátero de manera similar a través de su centro de masa, se halla que el periodo es de 5.83 s. Halle la inercia rotatoria del triángulo respecto a este eje.

**Solución** La inercia rotatoria de una barra, girada respecto a un eje central perpendicular a su longitud, es $ML^2/12$. De aquí que

$$I_{\text{varilla}} = \frac{(0.112\ \text{kg})(0.096\ \text{m})^2}{12} = 8.60 \times 10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

Según la ecuación 21,

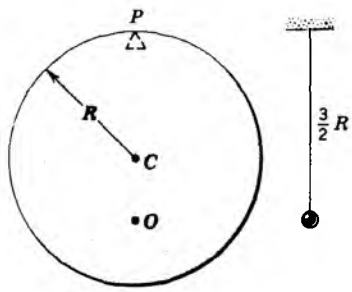



**Figura 12** Problema muestra 5. Un disco pivotado en su borde oscila como un péndulo físico. A la derecha se muestra un péndulo simple con el mismo periodo. El punto $O$ es el centro de oscilación.

$$\frac{T_{\text{varilla}}}{T_{\text{triángulo}}} = \left(\frac{I_{\text{varilla}}}{I_{\text{triángulo}}}\right)^{1/2} \quad o \quad I_{\text{triángulo}} = T_{\text{varilla}}\left(\frac{T_{\text{triángulo}}}{T_{\text{varilla}}}\right)^2,$$

de modo que

$$I_{\text{triángulo}} = (8.60 \times 10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\left(\frac{5.83\ \text{s}}{2.14\ \text{s}}\right)^2$$
$$= 6.38 \times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

¿Afecta en estos casos la amplitud de cualquier oscilación al periodo?

**Problema muestra 5** Un disco uniforme es pivotado en su borde (Fig. 12). Halle su periodo para oscilaciones pequeñas y la longitud del péndulo simple equivalente.

**Solución** La inercia rotatoria de un disco respecto a un eje que pase por su centro es $\frac{1}{2}MR^2$, donde $R$ es el radio y $M$ es la masa del disco. La inercia rotatoria respecto al pivote en el borde es, usando el teorema de los ejes paralelos,

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \tfrac{3}{2}MR^2.$$

El periodo de este péndulo físico, obtenido a partir de la ecuación 28 con $d = R$, es entonces

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}},$$

independiente de la masa del disco.

El péndulo simple que tiene el mismo periodo tiene una longitud

$$L = \frac{I}{MR} = \tfrac{3}{2}R$$

o $\frac{3}{4}$ del diámetro del disco. El centro de oscilación del disco pivotado en $P$ está por lo tanto en $O$, a una distancia $\frac{3}{2}R$ abajo del punto de soporte. ¿Se requiere del péndulo físico equivalente alguna masa en particular?

Si pivotamos al disco en un punto a medio camino entre el borde y el centro, como en $O$, hallamos que $I = \frac{1}{2}MR^2 + M(\frac{1}{2}R)^2 = \frac{3}{4}MR^2$ y $d = \frac{1}{2}R$. El periodo $T$ es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{4}MR^2}{Mg(R/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}}$$

igual que antes. Esto ilustra la igualdad de los periodos del péndulo físico cuando está pivotado respecto a $O$ y a $P$.

Si el disco fuera pivotado en el centro, ¿cuál sería su periodo de oscilación?

**Problema muestra 6** El centro de oscilación de un péndulo físico tiene otra propiedad interesante. Si una fuerza impulsiva (supuesta horizontal y en el plano de la oscilación) actúa en el centro de oscilación, no se siente ninguna reacción en el punto de soporte. Demuestre esto para una fuerza impulsiva $\mathbf{F}$ que actúe hacia la izquierda en el punto $O$ de la figura 12. Suponga que el péndulo está inicialmente en reposo.

**Solución** Este es un caso de traslación y rotación combinadas respecto al centro de masa (véase la sección 12-6). El efecto de traslación, al actuar aisladamente, ocasiona que $P$ (junto con todo el disco) en la figura 12 se mueva a la izquierda con una aceleración

$$a_{\text{izq}} = F/M.$$

El efecto rotatorio, al actuar aisladamente, produciría una aceleración angular en sentido horario respecto a $C$ de

$$\begin{aligned}\alpha &= \tau/I \\ &= (F)(\tfrac{1}{2}R)/(\tfrac{1}{2}MR^2) \\ &= F/MR.\end{aligned}$$

Debido a esta aceleración angular, $P$ se movería hacia la derecha con una aceleración

$$\begin{aligned}a_{\text{der}} &= \alpha R \\ &= (F/MR)(R) = F/M.\end{aligned}$$

Entonces $a_{\text{izq}} = a_{\text{der}}$ y no existe movimiento en el punto $P$.

Cuando se considera desde este punto de vista el centro de oscilación suele llamarse *centro de percusión*. Los jugadores de béisbol saben que, a no ser que el bate encuentre a la bola justamente en el punto correcto (el centro de percusión), el impacto repercutirá en sus manos. La "repercusión" tiene una dirección diferente que depende de si la bola golpea en un lado o en otro de este punto. El "punto amable" de una raqueta de tenis tiene una explicación similar; al golpear la bola en el "punto amable" se *elimina cualquier fuerza de reacción* sobre la mano.*

**Problema muestra 7** El periodo de un disco de 10.2 cm de radio que efectúa una pequeña oscilación respecto a un pivote en su borde es de 0.784 s. Halle el valor de $g$, la aceleración debida a la gravedad en ese lugar.

**Solución** Partiendo del problema muestra 5, tenemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}},$$

y resolviendo para $g$, obtenemos que

$$g = \frac{6\pi^2 R}{T^2}.$$

* Véase "Physics of the Tennis Racket II: The Sweet Spot", por H. Brody, *American Journal of Physics*, septiembre de 1981, pág. 816.

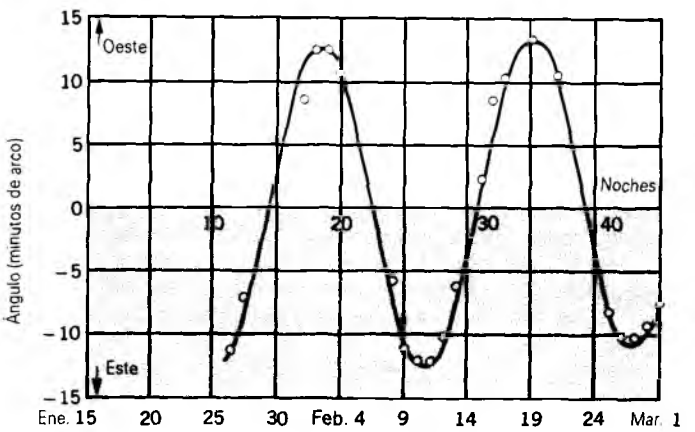



**Figura 13** La posición angular en función del tiempo de Calixto, la luna de Júpiter, medida en la Tierra. Los círculos corresponden a las medidas que realizó Galileo en 1610. La curvatura es un óptimo ajuste y sugiere un movimiento armónico simple. Cerca de 400 años después de Galileo, los movimientos de las lunas de Júpiter siguen deleitando a los astrónomos aficionados. Cada mes la revista *Sky and Telescope* publica una carta mostrando sus movimientos en términos de coordenadas angulares que varían sinusoidalmente en forma semejante a esta figura.

Con $T = 0.784$ s y $R = 0.102$ m, hallamos

$$g = \frac{6\pi^2(0.102\text{ m})}{(0.784\text{ s})^2} = 9.82\text{ m/s}^2.$$

## 15-6 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE Y MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En 1610, Galileo empleó su telescopio recién construido para observar las lunas de Júpiter. Mientras observaba una noche tras otra, medía la posición de cada luna respecto al planeta. Observó que las lunas viajaban de una parte a otra con un movimiento que nosotros llamaríamos armónico simple. La figura 13 muestra los datos originales de Galileo, trazados en forma de gráfica para mostrar el desplazamiento lateral de una luna (Calisto) en función del tiempo. Es evidente la dependencia sinusoidal característica del movimiento armónico simple.

En realidad, Calisto no oscila de un lado a otro; se mueve en órbita casi circular en torno al planeta, y lo que Galileo observó era un movimiento circular uniforme en un plano visto por su borde. Puesto que esto corresponde exactamente a la relación desplazamiento contra tiempo del movimiento armónico simple, podemos concluir que:

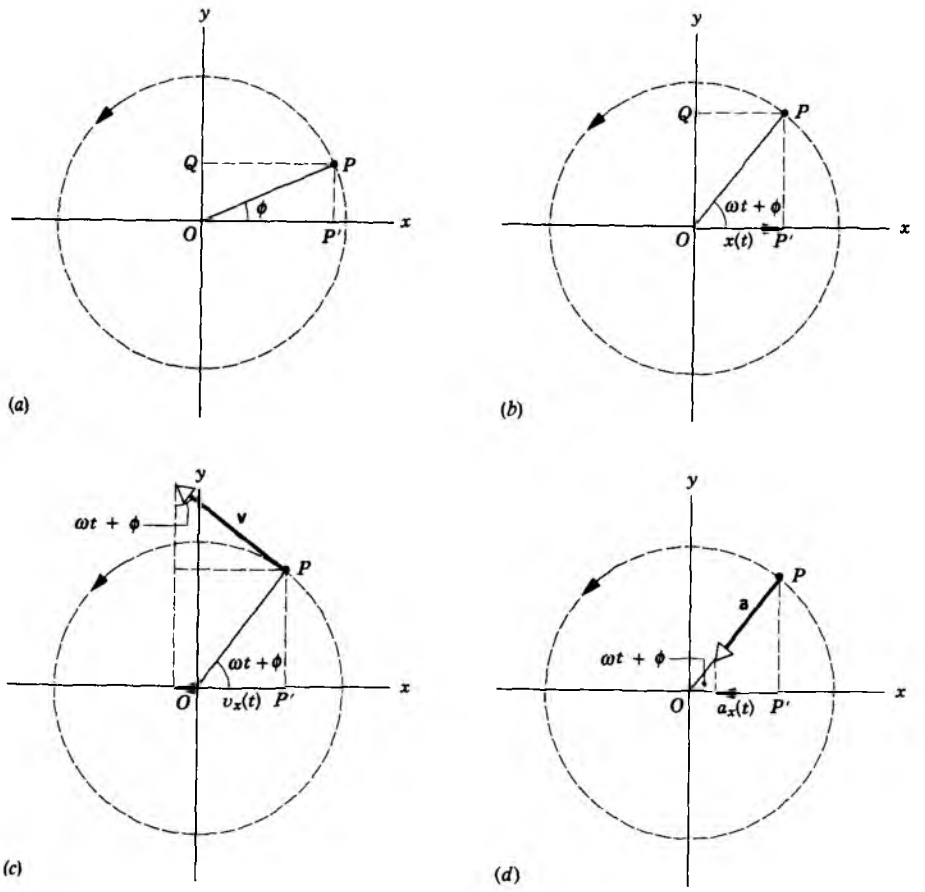



**Figura 14** (*a*) Un punto $P$ se mueve a velocidad constante en un círculo de radio $R$. La línea de referencia forma un ángulo $\phi$ con el eje $x$ en $t = 0$. La proyección $P'$ sobre el eje $x$ ejecuta un movimiento armónico simple. (*b*) Después de un tiempo $t$, el punto $P$ ha girado en un ángulo adicional $\omega t$. (*c*) La velocidad de $P$ y de su componente $x$, que representa a la velocidad de $P'$ en un movimiento armónico simple. (*d*) La aceleración de $P$ y de su componente $x$.

*El movimiento armónico simple se define como la proyección de un movimiento circular uniforme a lo largo de un diámetro del círculo.*

Examinemos con mayor detalle la base matemática de esta conclusión. La figura 14 muestra a una partícula $P$ en movimiento circular uniforme; su velocidad angular es $\omega$ y el radio del círculo es $R$. En el tiempo 0 (Fig. 14*a*) el radio $OP$ forma un ángulo $\phi$ con el eje $x$. En un tiempo $t$ más tarde (Fig. 14*b*) el radio $OP$ forma un ángulo $\omega t + \phi$ con el eje $x$, y la proyección de $OP$ a lo largo del eje $x$ (o, lo que es equivalente, la componente $x$ del radiovector que corresponde a $OP$) es

$$x(t) = R \cos(\omega t + \phi). \tag{31}$$

Esta expresión es, por supuesto, idéntica a la ecuación 6 para el desplazamiento del oscilador armónico simple, correspondiendo $x_m$ a $R$. Si hacemos que $P'$ represente a la proyección de $P$ sobre el eje $x$, entonces $P'$ ejecuta un movimiento armónico simple a lo largo del eje $x$.

En el movimiento circular uniforme, la magnitud de la velocidad tangencial constante es $\omega R$. La figura 14*c* muestra al vector que representa a la velocidad instantánea $\mathbf{v}$ en el tiempo $t$. La componente $x$ de $\mathbf{v}$, la cual da la velocidad de $P'$ a lo largo de la dirección $x$, es

$$v_x(t) = -\omega R \operatorname{sen}(\omega t + \phi). \tag{32}$$

En el movimiento circular, la aceleración centrípeta es $\omega^2 R$, y como se muestra en la figura 14*d*, la componente $x$ de la aceleración de $P$ es

$$a_x(t) = -\omega^2 R \cos(\omega t + \phi). \tag{33}$$

Las ecuaciones 32 y 33 son idénticas a las ecuaciones 11 para el movimiento armónico simple, donde una vez más $x_m$ es reemplazada por $R$. Así pues, el desplazamiento, la velocidad, y la aceleración son idénticos en el movimiento armónico simple y en la proyección del movimiento circular.

Invirtiendo el argumento anterior, podemos establecer que la ecuación 31 para el desplazamiento de un oscilador armónico simple es suficiente para describir a la componente $x$ de un vector cuya punta trace una trayectoria circular con velocidad constante. Si podemos también describir a la componente $y$, entonces tendremos una descripción completa del vector. Las figuras 14*a* y 14*b* muestran a la proyección $y$ $OQ$ en los tiempos 0 y $t$. La componente $y$ puede expresarse por

$$y(t) = R \operatorname{sen}(\omega t + \phi). \tag{34}$$

Nótese que la proyección del movimiento circular uniforme a lo largo de la dirección $y$ da también el movimiento

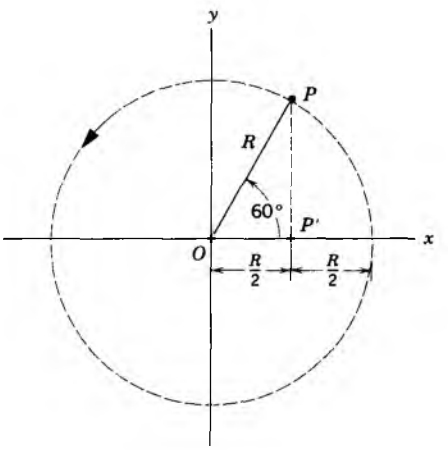



**Figura 15** Problema muestra 8. El radio $OP$ se mueve desde $\phi = 0$ en $t = 0$ hasta $\omega t = 60°$ en el tiempo $t$. La proyección $P'$ se mueve, correspondientemente, desde $x = R$ hasta $x = R/2$.

armónico simple, como lo haría la proyección a lo largo de *cualquier* dirección. Nótese también que, en todo tiempo $t$, $x^2 + y^2 = R^2$ como lo esperamos para el movimiento circular. A usted le será posible obtener expresiones para la componente $y$ de la velocidad y de la aceleración y demostrar que, como cabía suponer, $v_x^2 + v_y^2 = (\omega^2 R)^2$ y $a_x^2 + a_y^2 = (\omega^2 R)^2$.

Al usar la indentidad trigonométrica $\text{sen}\ \theta = \cos(\theta - \pi/2)$ podemos reescribir la ecuación 34 como:

$$y(t) = R\cos(\omega t + \phi - \pi/2). \qquad (35)$$

Entonces el movimiento circular puede considerarse como la combinación de dos movimientos armónicos simples en ángulo recto, con amplitudes y frecuencias idénticas pero difiriendo en fase en 90°. En la sección próxima veremos cómo pueden analizarse otros movimientos más complicados como combinaciones de movimientos armónicos simples con amplitudes, frecuencias, y fases apropiadamente escogidas.

**Problema muestra 8** Consideremos a un cuerpo que efectúa un movimiento armónico simple. La ecuación de ese movimiento es

$$x = 0.35\cos(8.3t),$$

donde $x$ está en metros y $t$ en segundos. Este movimiento puede representarse también como la proyección de un movimiento circular uniforme a lo largo de un diámetro horizontal. (*a*) Dé las propiedades del movimiento circular uniforme correspondiente. (*b*) A partir del movimiento del punto de referencia determine el tiempo requerido para que el cuerpo esté a la mitad del camino hacia el centro de movimiento a partir de su posición inicial.

**Solución** (*a*) La componente $x$ del movimiento circular está dada por

$$x = R\cos(\omega t + \phi).$$

Por lo tanto, el círculo de referencia debe tener un radio $R = 0.35$ m, la fase inicial o constante de fase debe ser $\phi = 0$, y la velocidad angular debe ser $\omega = 8.3$ rad/s, con objeto de obtener la ecuación $x = 0.35\cos(8.3t)$ para la proyección horizontal.

(*b*) Cuando el cuerpo se mueve a la mitad del camino, el punto de referencia se mueve en un ángulo de $\omega t = \pi/3 = 60°$ (Fig. 15). La velocidad angular es constante e igual a 8.3 rad/s de modo que el tiempo requerido para que se mueva a 60° es

$$t = \frac{60°}{\omega} = \frac{\pi/3\ \text{rad}}{8.3\ \text{rad/s}} = 0.13\ \text{s}.$$

El tiempo puede calcularse también a partir de la ecuación del movimiento. Con

$$x = 0.35\cos(8.3t) \quad \text{y} \quad x = \tfrac{1}{2}R = \tfrac{1}{2}(0.35),$$

obtenemos

$$\tfrac{1}{2} = \cos(8.3t) \quad \text{o} \quad 8.3t = \cos^{-1}(\tfrac{1}{2}) = \pi/3\ \text{rad}.$$

Por lo tanto

$$t = \frac{\pi/3\ \text{rad}}{8.3\ \text{rad/s}} = 0.13\ \text{s}.$$

## 15-7 COMBINACIONES DE MOVIMIENTOS ARMÓNICOS

A menudo se combinan dos movimiento armónicos simples en ángulo recto. El movimiento resultante es la suma de dos oscilaciones independientes. Consideremos primero el caso en que las frecuencias de las vibraciones sean las mismas, de modo que

$$x = x_m\cos(\omega t + \phi_x) \quad \text{y} \quad y = y_m\cos(\omega t + \phi_y). \qquad (36)$$

Los movimientos $x$ y $y$ pueden tener amplitudes diferentes y constantes de fase diferentes.

Si las constantes de fase son las mismas, el movimiento resultante es una línea recta. Esto puede demostrarse analíticamente al considerar la razón entre las expresiones para $x$ y $y$ en la ecuación 36 cuando $\phi_x = \phi_y$, lo cual da

$$y = (y_m/x_m)x.$$

Ésta es la ecuación de una línea recta, cuya pendiente es $y_m/x_m$. En las figuras 16*a* y 16*b* se muestra el movimiento resultante en los dos casos, $y_m/x_m = 1$ y $y_m/x_m = 2$. En estos casos ambos desplazamientos $x$ y $y$ alcanzan un máximo en el mismo tiempo y alcanzan un mínimo en el mismo tiempo. Están *en fase*. El punto $P$, cuyas coordenadas $x$ y $y$ están dadas por las ecuaciones 36, se mueve de un lado a otro a lo largo de la línea según varíe $t$.

Si las constantes de fase son diferentes, el movimiento resultante no será una línea recta. Por ejemplo, si las

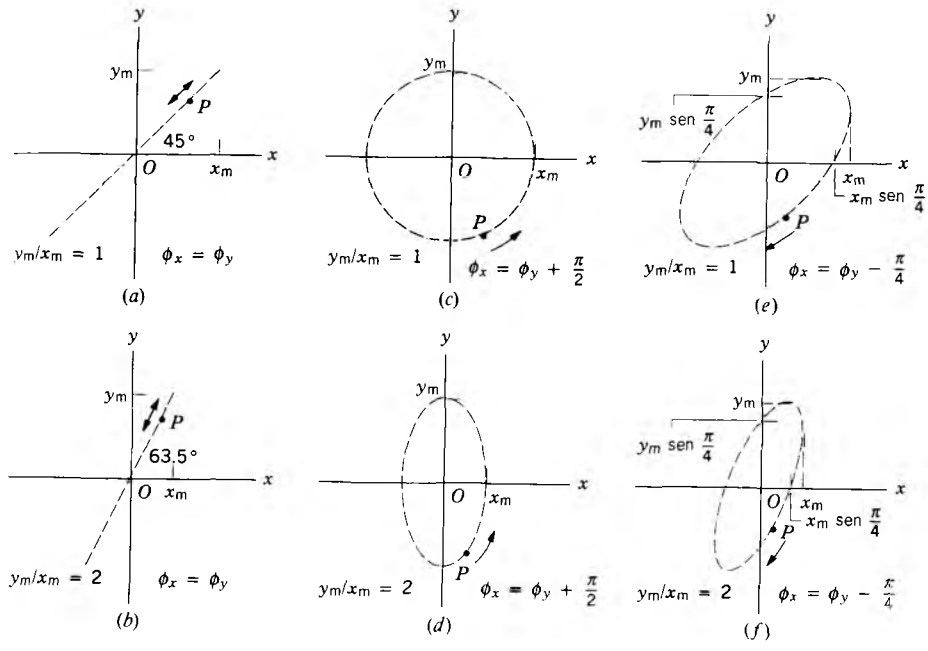



**Figura 16** Combinaciones de movimientos armónicos simples a lo largo de dos direcciones perpendiculares. Cada figura muestra el movimiento del punto $P$ cuando las amplitudes y las fases de los movimientos guardan las relaciones indicadas. Los movimientos $x$ y $y$ tienen frecuencias iguales.

constantes de fase difieren en $\pi/2$, el desplazamiento $x$ máximo sucede cuando el desplazamiento y sea cero y *viceversa*. Cuando las amplitudes son iguales el movimiento resultante es circular; cuando las amplitudes son desiguales, el movimiento resultante es elíptico. En las figuras 16*c* y 16*d* se muestran dos casos, $y_m/x_m = 1$ y $y_m/x_m = 2$, siendo $\phi_x = \phi_y + \pi/2$. Los casos $y_m/x_m = 1$ y $y_m/x_m = 2$, siendo $\phi_x = \phi_y - \pi/4$ se muestran en las figuras 16*e* y 16*f*.

Todas las combinaciones posibles de dos movimientos armónicos simples en ángulo recto que tengan la misma frecuencia corresponden a trayectorias elípticas, siendo el círculo y la línea recta casos especiales de una elipse. Esto puede demostrarse analíticamente al combinar las ecuaciones 36 y eliminar al tiempo $t$; usted puede demostrar que la ecuación resultante es la de una elipse. La forma de la elipse depende solamente de la razón entre las amplitudes, $y_m/x_m$, y de la diferencia de fase entre las dos oscilaciones, $\phi_x - \phi_y$. El movimiento real puede ser bien en sentido horario o bien en sentido antihorario, dependiendo de qué componente se adelante en fase.

Si dos oscilaciones de *frecuencias diferentes* se combinan en ángulo recto, el movimiento resultante es más complicado. El movimiento no es ni siquiera periódico a no ser que las dos frecuencias componentes $\omega_x$ y $\omega_y$ sean la razón de dos enteros (véase el problema 61). El análisis matemático de tales movimientos suele ser difícil, pero los patrones pueden exponerse gráficamente en la pantalla de un osciloscopio, en la que un haz de electrones puede ser desviado simultáneamente en las direcciones vertical y horizontal por señales electrónicas sinusoidales cuyas frecuencias, amplitudes, y fase relativa pueden variar. La figura 17 es un ejemplo de los patrones complejos y bellos que resultan.

En esta sección hemos considerado solamente combinaciones de movimientos armónicos simples en diferentes direcciones (en ángulo recto entre sí). Las combinaciones de movimientos armónicos simples en la *misma dirección*, con la misma frecuencia pero con amplitudes y fases diferentes, son de interés especial en el estudio de la difracción y la interferencia de la luz, el sonido, y la radiación electromagnética, todo lo cual se estudiará más adelante en el texto. También pueden ser combinadas oscilaciones de frecuencias diferentes en la misma dirección. El tratamiento de este movimiento es particularmente importante en el caso de las vibraciones sonoras que se estudiarán en el capítulo 20.

## 15-8 MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO *(Opcional)*

Hasta este momento hemos supuesto que no actúan fuerzas de fricción sobre el oscilador. Si esta hipótesis se mantuviese estrictamente, un péndulo o una masa unida a un resorte oscilarían de manera indefinida. En realidad, la amplitud de la oscilación disminuye en forma gradual hasta cero como resultado de la fricción. Se dice que el movimiento está *amortiguado* por la fricción y se le llama *movimiento armónico amortiguado*. A menudo la fricción surge de la resistencia del aire o de fuerzas internas. En la mayoría de los casos de interés la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad del cuerpo pero directamente opuesta a él. En la figura 18 se muestra un ejemplo de un oscilador amortiguado.

La fuerza neta sobre el cuerpo oscilatorio es la suma de la fuerza de restitución $-kx$ y la fuerza de amortiguamiento, la cual suponemos tiene la forma de $-bv$ como en el caso de la fuerza de arranque que se consideró en la sección 6-7. Aquí $b$ es una constante positiva, que depende de las propiedades del fluido, como la densidad, y de la forma y dimensiones del objeto

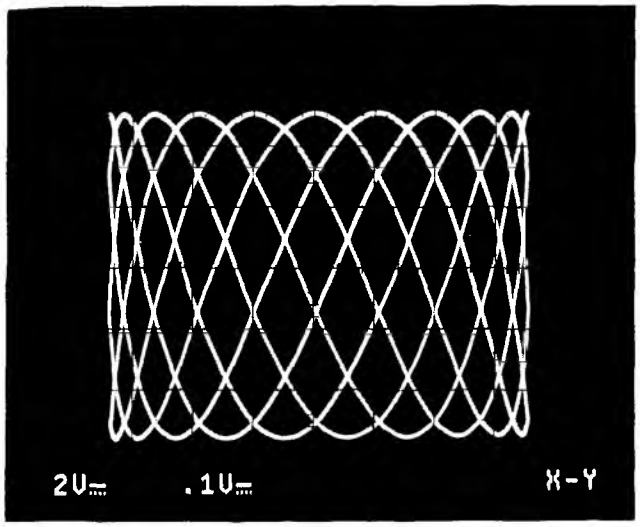



**Figura 17** Una figura Lissajous, producida en la pantalla de un osciloscopio cuando las desviaciones horizontal y vertical son señales sinusoidales cuyas frecuencias tienen razones enteras. En el caso que se muestra, la razón de las frecuencias es de 1/20.

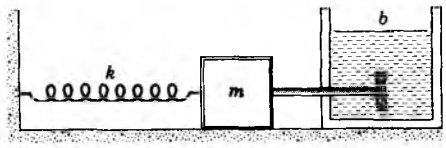



**Figura 18** Representación de un oscilador armónico amortiguado. Consideramos que el cuerpo oscilatorio (de masa $m$) está unido a una tablilla sin masa sumergida en un fluido, donde experimenta una fuerza de amortiguamiento viscoso $-bv$. No consideramos, en cambio, la fricción por deslizamiento en la superficie horizontal.

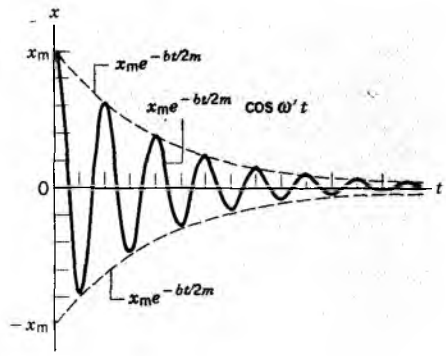



**Figura 19** Movimiento armónico amortiguado. El desplazamiento $x$ se grafica contra el tiempo $t$ considerando que la constante de fase $\phi$ sea 0. El movimiento es oscilatorio, pero la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo.

sumergido. Partiendo de la segunda ley de Newton en la forma $\Sigma F = ma$, obtenemos

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

o sea

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{37}$$

Una solución de esta ecuación (ofrecida aquí sin prueba; véase el problema 63 para su verificación)* es

$$x = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi), \tag{38}$$

donde

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{39}$$

Esta forma de solución de la ecuación 37 es válida para constantes $b$ de amortiguamiento que sean lo suficientemente pequeñas de modo que la cantidad en el radical de la ecuación 39 sea positiva. En la figura 19 se traza el desplazamiento $x$ en función del tiempo $t$ en este caso.

Existen dos características notables de esta solución. Primeramente, la frecuencia es más pequeña (y el periodo más largo) cuando está presente la fricción. La fricción retarda al movimiento, como cabe esperar. Si no hubiese fricción presente, $b$ sería igual a cero y $\omega'$ sería igual a $\sqrt{k/m}$, que es la frecuencia angular $\omega$ de un movimiento no amortiguado. Cuando la fricción está presente, $\omega'$ es ligeramente menor que $\omega$, como lo muestra la ecuación 39. En el caso mostrado en la figura 19, que representa un fuerte amortiguamiento en el que la amplitud disminuye según un factor de 10 en 5 ciclos, $\omega'$ difiere de $\omega$ en 0.3% solamente.

En segundo lugar, la amplitud del movimiento, representada en la ecuación 38 por el factor $x_m e^{-bt/2m}$ y en la figura 19 por las curvas de puntos, disminuye exponencialmente hasta cero. El intervalo de tiempo $\tau$ durante el cual la amplitud cae a $1/e$ de su valor inicial se llama *vida media* de la oscilación. El factor exponencial en la ecuación 38 tendrá el valor $e^{-1}$ cuando $t = \tau = 2m/b$. Una vez más, si no hubiese fricción presente, $b$ sería igual a cero y la amplitud tendría el valor constante $x_m$ al pasar el tiempo; la vida media sería infinita.

Las ecuaciones 38 y 39 sólo son válidas para $b \leq 2\sqrt{km}$. Si $b$ tiene su mayor valor posible en este intervalo ($b = 2\sqrt{km}$), entonces $\omega' = 0$, y el desplazamiento tiende a cero exponencialmente sin oscilación. La vida media $\tau$ tiene su valor más pequeño, el cual puede demostrarse que es igual a $\omega^{-1}$, o sea, el inverso de la frecuencia angular de la oscilación no amortiguada. Esta condición, llamada *amortiguamiento crítico*, es a menudo la meta de los ingenieros mecánicos al diseñar un sistema en el que las oscilaciones desaparezcan en el menor tiempo posible.

En el movimiento armónico amortiguado la energía del oscilador se disipa gradualmente debido a la fricción y cae a cero con el tiempo. En el caso de un amortiguamiento pequeño, cuando la ecuación 38 es válida, podemos aproximar el valor instantáneo de la energía mediante la ecuación 14, reemplazan-

* Para un estudio más completo de la derivación e interpretación de las ecuaciones del oscilador amortiguado, véase K. R. Symon, *Mechanics*, 3a. edición (Addison-Wesley, 1971), sección 2.9.

do la amplitud $x_m$ (constante) por el valor instantáneo de la amplitud, $x_m e^{-bt/2m}$. Entonces

$$E(t) = \tfrac{1}{2}k(x_m e^{-bt/2m})^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}. \quad (40)$$

**Problema muestra 9** En un oscilador amortiguado, como el de la figura 18, sea $m$ = 250 g, $k$ = 85 N/m, y $b$ = 0.070 kg/s. ¿En cuántos periodos de oscilación sería la energía mecánica del oscilador igual a la mitad de su valor inicial?

**Solución** Para un amortiguamiento pequeño, $\omega' \approx \omega$ y el periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.25\text{ kg}}{85\text{ N/m}}} = 0.34\text{ s}.$$

En $t$ = 0, la energía mecánica inicial es $\frac{1}{2}kx_m^2$. De la ecuación 40, la energía tendrá la mitad de este valor en un tiempo $t$ determinado a partir de

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}kx_m^2) = \tfrac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}.$$

Despejando a $t$, obtenemos

$$t = \frac{m\ln 2}{b} = \frac{(0.25\text{ kg})(\ln 2)}{0.070\text{ kg/s}} = 2.5\text{ s}.$$

El tiempo $t$ es alrededor de $7.5T$; entonces se requieren alrededor de 7.5 ciclos de oscilación para que la energía mecánica adquiera la mitad de su valor inicial.

La energía total debe conservarse, por supuesto. ¿A dónde va esta energía? ■

## 15-9 OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA *(Opcional)*

Hasta ahora hemos discutido solamente las oscilaciones naturales de un cuerpo, es decir, las oscilaciones que ocurren, por ejemplo, cuando el cuerpo es desplazado y luego liberado. Para una masa unida a un resorte la frecuencia *natural* es

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

en ausencia de fricción y

$$\omega' = 2\pi\nu' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

en presencia de una pequeña fuerza de fricción $b\upsilon$.

Sin embargo, surge una situación diferente cuando el cuerpo se halla sometido a una fuerza externa sinusoidal. Como ejemplos, un puente vibra bajo la influencia de una marcha de soldados; el cárter de un motor vibra por los impulsos periódicos de una irregularidad en la flecha, y nuestro tímpanos vibran cuando se exponen a la fuerza periódica de una onda sonora. Las oscilaciones resultantes se llaman oscilaciones *forzadas*. Estas oscilaciones forzadas tienen la frecuencia de la fuerza externa y no la frecuencia natural del cuerpo. Sin embargo, la respuesta del cuerpo depende de la relación entre las frecuencias forzada y natural. Una sucesión de pequeños impulsos aplicados con la frecuencia apropiada pueden producir una oscilación de gran amplitud. Un niño subido en un columpio aprende a balancearse a intervalos de tiempo apropiados para hacer que el columpio se mueva con una gran amplitud. El problema de las oscilaciones forzadas es muy general. Su solución es útil en sistemas acústicos, en circuitos de corriente alterna, y en la física atómica, así como también en la mecánica.

La ecuación del movimiento de un oscilador forzado se deduce de la segunda ley del movimiento. Además de la fuerza de restitución $-kx$ y de la fuerza de amortiguamiento $-b\upsilon$, tenemos también la fuerza externa oscilante aplicada. Para simplificar, hagamos que esta fuerza externa esté dada por $F_m \cos \omega'' t$. Aquí $F_m$ es el valor máximo de la fuerza externa y $\omega''(= 2\pi\nu'')$ es su frecuencia angular. Podemos imaginar a tal fuerza aplicada directamente a la masa oscilatoria de la figura 18, por ejemplo, reemplazando el muro fijo de la izquierda con un apoyo móvil unido a la flecha de un motor. El motor mueve el apoyo con la frecuencia angular $\omega''$.

Partiendo de la segunda ley de Newton, obtenemos

$$-kx - b\frac{dx}{dt} + F_m \cos \omega'' t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

o sea

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega'' t. \quad (41)$$

La solución a esta ecuación (que damos sin demostración)* es

$$x = \frac{F_m}{G}\operatorname{sen}(\omega'' t - \phi), \quad (42)$$

donde

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2}, \quad (43)$$

y

$$\phi = \cos^{-1}\frac{b\omega''}{G}. \quad (44)$$

Consideremos al movimiento resultante de manera cualitativa.

Nótese (Ec. 42) que el sistema vibra con la frecuencia angular $\omega''$de la fuerza motriz, en lugar de vibrar con su frecuencia natural $\omega$, y que la amplitud del movimiento es constante. Hay amortiguamiento, el cual causaría normalmente una disminución en la amplitud, pero la fuente de la fuerza motriz proporciona la energía necesaria para mantener constante la amplitud. En efecto, el oscilador transporta energía de la fuente motriz al medio de amortiguamiento, donde la energía se disipa.

El caso más sencillo es aquel en el cual no existe amortiguamiento, lo que significa que $b$ = 0 en la ecuación 43. El factor $G$, que tiene el valor $|m(\omega''^2 - \omega^2)|$ para $b$ = 0, es grande cuando la frecuencia angular $\omega''$ de la fuerza motriz es muy diferente de la frecuencia angular natural no amortiguada $\omega$ del sistema. Esto significa que la amplitud del movimiento resultante, $F_m/G$, es pequeña. Al aproximarse la frecuencia motriz a la frecuencia natural, es decir, cuando $\omega'' \to \omega$, vemos que $G \to 0$ y la amplitud $F_m/G \to \infty$. En realidad, siempre hay algún amortiguamiento de modo que la amplitud de la oscilación, aunque pudiera llegar a ser grande, permanece finita en la práctica.

* Véase K. R. Symon, *Mechanics*, 3a. edición (Addison-Wesley, 1971), sección 2.10. La ecuación 42 es una solución de estado estacionario que se presenta después de que ha transcurrido algún tiempo. Cuando el movimiento comienza, es una superposición de esta solución y de los términos transitorios de vida corta que decaen rápidamente. Examinamos el movimiento después de que estos términos se vuelven despreciables.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS
DOCUMENTACION
MONTEVIDEO



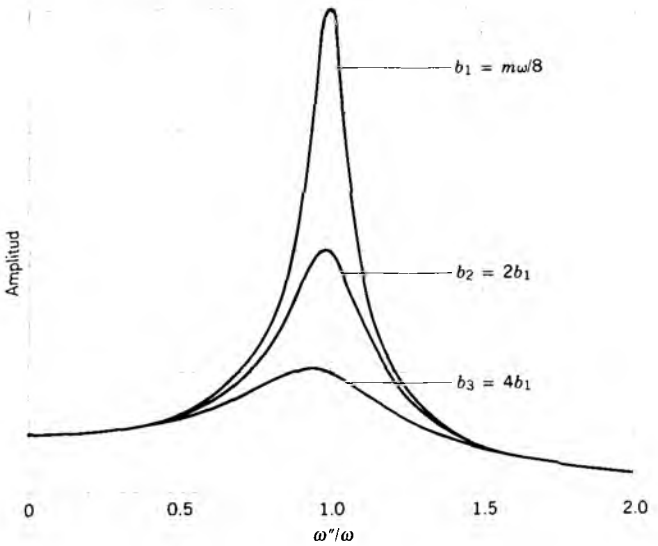



**Figura 20** La amplitud $F_m/G$ de un oscilador forzado cuando varía la frecuencia angular $\omega''$ de la fuerza motriz. Las tres curvas corresponden a niveles de amortiguamiento diferentes, correspondiendo al amortiguamiento más pequeño la curva de resonancia de mayor pico.

En osciladores amortiguados (para los cuales $b \neq 0$ en la ecuación 43), existe un valor característico de la frecuencia motriz $\omega''$ para el cual la amplitud de oscilación es un máximo. Esta condición se llama *resonancia* y el valor de $\omega''$ en el que ocurre la resonancia se llama *frecuencia angular resonante*. (La resonancia, que aquí se define como la que ocurre a la frecuencia a la cual las oscilaciones forzadas tienen su amplitud máxima, puede definirse de otras formas como, por ejemplo, la frecuencia a la cual se transfiere la máxima potencia de la unidad motriz al sistema oscilatorio o a la cual la velocidad de la masa oscilatoria es máxima. Las definiciones no son equivalentes; estudiaremos este tema más a fondo cuando tratemos con oscilaciones eléctricas forzadas; véase el problema 68.) Cuanto más pequeño sea el amortiguamiento en un sistema, más cercana se halla la frecuencia angular resonante a la frecuencia angular natural no amortiguada $\omega$. A menudo, el amortiguamiento es lo suficientemente pequeño como para que la frecuencia angular resonante pueda considerarse como igual a la frecuencia angular natural no amortiguada $\omega$ con un error pequeño.

En la figura 20 hemos trazado tres curvas que dan la amplitud de las vibraciones forzadas en función de la razón de la frecuencia motriz $\omega''$ a la frecuencia angular natural no amortiguada $\omega$. Cada una de las curvas corresponde a un valor diferente de la constante de amortiguamiento $b$. Cuando el amortiguamiento es pequeño, la curva de resonancia es aguda y la amplitud alcanza un máximo cuando $\omega'' = \omega$. Al aumentar el amortiguamiento, la curva de resonancia se vuelve más pequeña y más ancha, y la resonancia se desplaza ligeramente de $\omega'' = \omega$.

Todas las estructuras mecánicas, como edificios, puentes, y aeroplanos, tienen una o más frecuencias resonantes naturales. Puede resultar desastroso someter una estructura a una fuerza impulsora externa a una de esas frecuencias. La imagen de la soprano que puede quebrar con su voz una copa de vino es un ejemplo del resultado.

Otro ejemplo de resonancia ocurrió en el puente sobre el estrecho de Tacoma en el estado de Washington (EUA) en 1940. El viento que soplaba en el estrecho de Tacoma se dividió en torbellinos, suministrando así golpes de viento que sacudieron al puente con una frecuencia que igualó a una de sus frecuencias de vibración naturales. El resultado fue un suave movimiento de balanceo vertical, parecido a una montaña rusa, que le valió al puente el sobrenombre de "Galloping Gertie" (Gertrudis galopante). Unos cinco meses después de haberse inaugurado el puente, el suave balanceo oscilatorio se convirtió en violentas oscilaciones torsionantes, que no tardaron en provocar el colapso del puente (Fig. 21). Estas oscilaciones no fueron consecuencia de la resonancia sino de los efectos no lineales debidos a ráfagas de viento particularmente fuertes. Estos efectos complejos no pueden ser analizados en función del oscilador lineal forzado que hemos estudiado aquí. ■

## 15-10 OSCILACIONES DE DOS CUERPOS *(Opcional)*

A nivel microscópico (moléculas, átomos, núcleos), existen muchos ejemplos de oscilaciones que, de manera aproximada, son armónicas simples. Un ejemplo es la molécula diatómica, en la cual dos átomos están unidos entre sí con una fuerza de la forma ilustrada en la figura 3. Cerca de la posición de equilibrio, la energía potencial puede ser aproximada por una parábola de la forma $U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$, y si se la desplaza a una pequeña distancia de $x_{eq}$, la molécula oscilará respecto a la posición de equilibrio. Para nuestros propósitos, podemos imaginar que la molécula está representada por dos partículas de masas $m_1$ y $m_2$ unidas por un resorte de constante de fuerza $k$, como se muestra en la figura 22. En esta sección examinaremos el movimiento de este sistema.

Una manera de describir el movimiento del sistema es en función de los movimientos separados de las dos partículas, que se localizan en relación al origen $O$ por las dos coordenadas $x_1$ y $x_2$, como se muestra en la figura 22*a*. Como veremos enseguí-

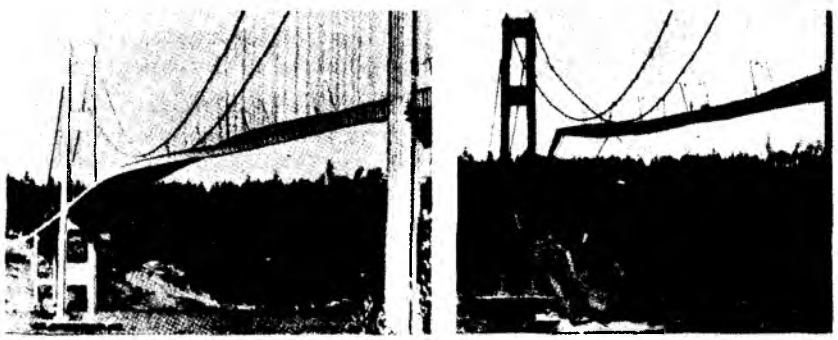


**Figura 21** El puente del estrecho de Tacoma en Puget Sound, Washington (EU). Terminado y abierto al tránsito en julio de 1940, de inmediato mostró oscilaciones de balanceo suaves debidas a la resonancia. Más tarde, el puente desarrolló violentas oscilaciones torsionantes que pueden apreciarse en la figura de la izquierda. Finalmente el claro principal se rompió, haciendo que la losa del puente se cayera al agua, como se muestra en la figura de la derecha.

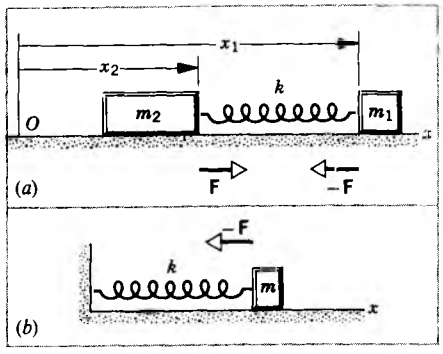



**Figura 22** (*a*) Dos cuerpos oscilatorios de masas $m_1$ y $m_2$ unidos por un resorte. (*b*) El movimiento relativo puede ser representado por la oscilación de un solo cuerpo que tenga la masa reducida $m$.

da, esto conduce a una descripción diferente y a menudo más útil, que está dada en función de la separación y de la velocidad *relativas* de las dos partículas. En efecto, reemplacemos a las dos coordenadas $x_1$ y $x_2$ por dos coordenadas diferentes: la separación relativa $x_1 - x_2$ y la localización $x_{cm}$ del centro de masa. En ausencia de fuerzas externas, el centro de masa se mueve a velocidad constante, y su movimiento no es de interés real para el estudio de la oscilación del sistema, de modo que podemos analizar al sistema en función de la coordenada relativa únicamente.

La separación relativa $x_1 - x_2$ da la longitud del resorte en cualquier momento. Supongamos que su longitud sin estirar sea $L$; entonces $x = (x_1 - x_2) - L$ es el cambio de longitud del resorte, y $F = kx$ es la magnitud de la fuerza ejercida sobre *cada partícula* por el resorte. Como se muestra en la figura 22*a*, si el resorte ejerce una fuerza $-\mathbf{F}$ sobre $m_1$, entonces ejerce una fuerza $+\mathbf{F}$ sobre $m_2$.

Apliquemos la segunda ley de Newton separadamente a las dos partículas, considerando los componentes de la fuerza a lo largo del eje $x$:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx,$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = +kx.$$

Ahora, multiplicamos la primera de estas ecuaciones por $m_2$ y la segunda por $m_1$, y luego las restamos. El resultado es

$$m_1m_2 \frac{d^2x_1}{dt^2} - m_1m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -m_2kx - m_1kx,$$

la cual podemos escribir así:

$$\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = -kx. \tag{45}$$

La cantidad $m_1m_2/(m_1 + m_2)$ tiene la dimensión de una masa y se conoce como *masa reducida* $m$:

$$m = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}. \tag{46}$$

Ya que la longitud de relajamiento $L$ del resorte es una constante, las derivadas de $(x_1 - x_2)$ son las mismas que las derivadas de $x$:

$$\frac{d}{dt}(x_1 - x_2) = \frac{d}{dt}(x + L) = \frac{dx}{dt},$$

y así la ecuación 45 se convierte en

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Ésta es idéntica en forma a la ecuación 4 para la masa oscilatoria aislada, demostrando entonces que, desde el punto de vista de las oscilaciones, el sistema de la figura 22*a* puede ser reemplazado por una sola partícula, como se representa en la figura 22*b*, con una masa igual a la masa reducida del sistema. En particular, la frecuencia de oscilación del sistema de la figura 22 está dada por la ecuación 9, usando la masa reducida.

Si deseamos examinar el movimiento detallado del sistema, podemos escribir simplemente la solución para $x(t)$, $v(t)$, y $a(t)$, dada por las ecuaciones 11, teniendo en cuenta que $x$ representa la coordenada relativa de las dos partículas y, por lo tanto, $v$ y $a$ representan su velocidad *relativa* $v_1 - v_2$ y su aceleración *relativa* $a_1 - a_2$, respectivamente.

Nótese que la masa reducida $m$ es siempre más pequeña que cualquiera de las otras masas. Si una de las masas es mucho más pequeña que la otra, entonces $m$ es aproximadamente igual a la masa más pequeña. Si las masas son iguales, entonces $m$ es igual a la mitad del tamaño de cualquiera de las masas.

**Problema muestra 10** El cloro natural consta de dos isótopos: $^{35}Cl$, con 76% de abundancia relativa y masa atómica de

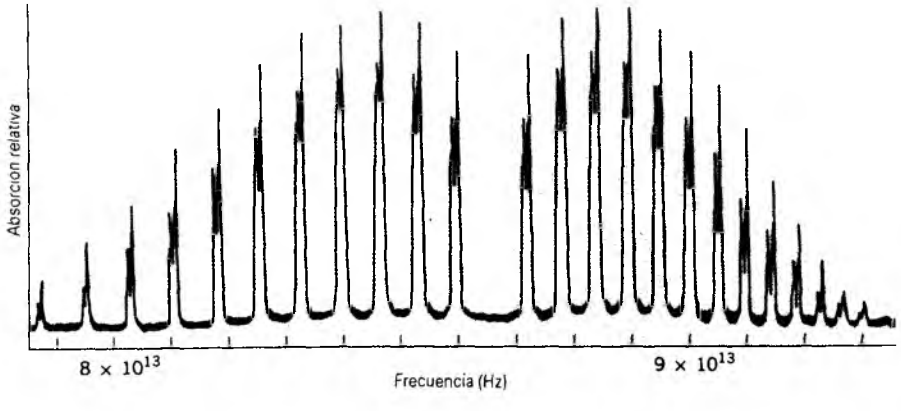



**Figura 23** El espectro de absorción de la radiación infrarroja por el HCl molecular. Cada pico corresponde a un cambio en el movimiento vibratorio de las moléculas. Los pares de picos con espaciamiento pequeño se deben a los dos isótopos del Cl.

34.968853 u, y $^{37}$Cl, con 24% de abundancia relativa y masa atómica de 36.965903 u. (*a*) ¿Cuál es la masa reducida de una molécula de HCl cuando contiene $^{35}$Cl y cuando contiene $^{37}$Cl? (*b*) La frecuencia vibratoria de una molécula de HCl es $8.5 \times 10^{13}$ Hz. Suponiendo que el HCl se comporta como un oscilador simple de dos cuerpos, halle la constante $k$ de la fuerza efectiva.

**Solución** (*a*) La masa reducida del $H^{35}Cl$ se obtiene a partir de la ecuación 46, usando la masa H de 1.007825 u:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1.007825\ \text{u})(34.968853\ \text{u})}{1.007825\ \text{u} + 34.968853\ \text{u}} = 0.979593\ \text{u}.$$

Para el $H^{37}Cl$ tenemos similarmente

$$m = \frac{(1.007825\ \text{u})(36.965903\ \text{u})}{1.007825\ \text{u} + 36.965903\ \text{u}} = 0.981077\ \text{u}.$$

(*b*) Resolviendo la ecuación 9 para la constante de fuerza, obtenemos

$$k = 4\pi^2 \nu^2 m = 4\pi^2(8.5 \times 10^{13}\ \text{Hz})^2(0.98\ \text{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u})$$
$$= 464\ \text{N/m}.$$

Esto es del mismo orden de magnitud que la constante de fuerza de resortes ordinarios (por ejemplo, véase el problema muestra 1). ¿Puede usted explicar cómo puede ser la constante de fuerza de una molécula la misma que la de un resorte?

Las moléculas pueden absorber o emitir radiación electromagnética y cambiar su estado de movimiento vibratorio en el proceso. De hecho, la observación de la radiación que es absorbida o emitida es una de las maneras que tenemos de aprender acerca de la estructura de las moléculas. La figura 23 muestra un ejemplo del espectro de absorción infrarroja del HCl. Cada pico corresponde a un cambio en el estado vibratorio del HCl cuando absorbe radiación a esa frecuencia. Las dos componentes en cada pico se deben a los dos isótopos del Cl; sus masas diferentes resultan en masas reducidas ligeramente diferentes para las moléculas del $H^{35}Cl$ y del $H^{37}Cl$, como lo hemos hallado en la parte (*a*), y por lo tanto en frecuencias vibratorias ligeramente diferentes. ■

## PREGUNTAS

1. Dé algunos ejemplos de movimientos que sean aproximadamente armónicos simples ¿Por qué son raros los movimientos que sean armónicos simples exactamente?
2. El resorte de una puerta mosquitera típica está esforzado a la tensión en su estado normal; esto es, las vueltas adyacentes se adhieren entre sí y ofrecen resistencia a ser separadas. ¿Obedece tal resorte a la ley de Hooke?
3. ¿Es obedecida la ley de Hooke, siquiera aproximadamente, por la plataforma de salto en una alberca? ¿Y por un trampolín? ¿Y por un resorte enrollado hecho de alambre de plomo?
4. ¿Qué le pasaría al movimiento de un sistema oscilatorio si cambiara el signo del término de la fuerza, $-kx$ en la ecuación 2?
5. Un resorte tiene una constante de fuerza $k$, y de él está suspendido un objeto de masa $m$. El resorte se corta a la mitad y el mismo objeto se suspende de una de las mitades. ¿Cómo se relacionan las frecuencias de oscilación antes y después de haber cortado el resorte?
6. Un resorte no estirado tiene una constante de fuerza $k$. Es estirado por una pesa colgada de él hasta una longitud de equilibrio dentro del límite elástico. ¿Tiene el resorte la misma constante de fuerza $k$ para desplazamientos a partir de esta nueva posición de equilibrio?
7. Supongamos que tenemos un bloque de masa desconocida y un resorte de constante de fuerza también desconocida. Muestre cómo podemos predecir el periodo de oscilación de este sistema bloque-resorte simplemente midiendo la extensión del resorte producida al unir el bloque a él.
8. Todo resorte real tiene masa. Si esta masa es tenida en cuenta, explique cualitativamente cómo afectará esto al periodo de oscilación de un sistema resorte-bloque.
9. ¿Puede existir un oscilador que, aun para pequeñas amplitudes, no sea armónico simple? Es decir, ¿podemos tener una fuerza de restitución no lineal en un oscilador incluso a amplitudes arbitrariamente pequeñas?
10. ¿Cómo resultan afectadas cada una de las siguientes propiedades de un oscilador armónico simple al duplicar la amplitud: el periodo, la constante de fuerza, la energía mecánica total, la velocidad máxima y la aceleración máxima?
11. ¿Qué cambios haría usted en un oscilador armónico para duplicar la velocidad máxima del objeto oscilatorio?
12. Una persona está de pie sobre una báscula de baño, la cual descansa sobre una plataforma suspendida de un resorte grande. Todo el sistema ejecuta un movimiento armónico simple en dirección vertical. Describa la variación en la lectura de la báscula durante un periodo de movimiento.
13. ¿Podríamos construir alguna vez un péndulo simple verdadero? Explique la respuesta.
14. ¿Podrían basarse los patrones de masa, longitud, y tiempo en las propiedades de un péndulo? Explique.
15. Considerando los aspectos elástico e inercial implicados, explique el hecho de que, mientras que un objeto de masa $m$ oscile verticalmente en un resorte, el periodo depende de $m$ pero es independiente de $g$, siendo lo inverso verdadero para un péndulo simple.
16. Prediga, por medio de argumentos cualitativos si un péndulo oscilatorio de gran amplitud tendrá un periodo más largo o más corto que el periodo de las oscilaciones de amplitud pequeña. (Considere casos extremos.)
17. A medida que la amplitud $\theta_m$ de la ecuación 25 se aproxima a 180°, ¿a qué valor cabe esperar que se aproxime el periodo? Explique en términos físicos.

18. ¿Qué le sucede a la frecuencia de un columpio cuando sus oscilaciones pasan de grandes amplitudes a pequeñas?
19. ¿Cómo resulta afectado el periodo de un péndulo cuando su punto de suspensión (*a*) se mueve horizontalmente en el plano de la oscilación con una aceleración $a$; (*b*) se mueve verticalmente hacia arriba con una aceleración $a$; (*c*) se mueve verticalmente hacia abajo con una aceleración $a < g$; y con una aceleración $a > g$? ¿Cuál caso, si lo hay, se aplica a un péndulo montado en una carreta que rueda hacia abajo de un plano inclinado?
20. ¿Por qué se excluyó a un eje que pasara por el centro de masa al usar la ecuación 29 para determinar $I$? ¿Se aplica esta ecuación a esta clase de eje? ¿Cómo puede determinarse $I$ para este eje usando los métodos del péndulo físico?
21. Una esfera hueca se llena de agua a través de un pequeño orificio. Se cuelga de un cordón largo y, cuando el agua va saliendo por el orificio en el fondo, hallamos que el periodo de oscilación primero aumenta y luego disminuye. Explique.
22. (*a*) El efecto de la masa, $m$, de la cuerda atada al disco, de masa $M$, de un péndulo, es aumentar el periodo sobre el de un péndulo simple en el cual $m = 0$. Explique esto (*b*) Aunque el efecto de la masa de la cuerda del péndulo es aumentar su periodo, una cuerda de longitud $L$, que oscila sin tener nada en el extremo ($M = 0$) tiene un periodo menor que el de un péndulo simple de longitud $L$. Explique esto.
23. ¿Habría en la Luna un cambio en la frecuencia de oscilación de un péndulo de torsión si fuera éste trasladado allí? ¿De un péndulo simple? ¿De un oscilador resorte-bloque? ¿De un péndulo físico?
24. ¿Cómo puede usarse un péndulo para trazar una curva sinusoidal?
25. ¿Qué componentes de movimientos armónicos simples produciría la figura de un 8 como movimiento resultante?
26. ¿Existe alguna conexión entre la relación $F$ contra $x$ a nivel molecular y la relación macroscópica entre $F$ y $x$ en un resorte? Explique la respuesta.
27. (*a*) ¿En qué circunstancias sería igual la masa reducida de un sistema de dos cuerpos a la masa de uno de los cuerpos? Explique. (*b*) ¿Cuál es la masa reducida si los cuerpos tienen igual masa? (*c*) ¿Dan los casos (*a*) y (*b*) los valores extremos de la masa reducida?
28. ¿Por qué se monta sobre resortes la tina de una máquina lavadora?
29. ¿Por qué se emplean a menudo los aparatos amortiguadores en maquinaria? Dé un ejemplo.
30. Dé algunos ejemplos de fenómenos comunes en los que la resonancia juegue un papel importante.
31. La marea lunar es mucho más importante que la marea solar. Sin embargo, ocurre lo contrario con las mareas en la atmósfera de la Tierra. Explique esto, usando ideas de resonancia, dado el hecho de que la atmósfera tiene un periodo de oscilación natural de casi 12 horas.
32. En la figura 20, ¿a qué valor se aproxima la amplitud de las oscilaciones forzadas cuando la frecuencia impulsora $\omega''$ se aproxima a (*a*) cero y (*b*) al infinito?
33. Los edificios de diferentes alturas sufren diferentes daños durante un terremoto. Explique por qué.
34. Un cantante, al sostener una nota de la frecuencia adecuada, puede quebrar un vaso si el cristal de éste es de alta calidad, lo cual no sucede si el cristal del vaso es de baja calidad. Explique por qué.

## PROBLEMAS

*Sección 15-3 Movimiento armónico simple*

1. Un bloque de 3.94 kg estira a un resorte de 15.7 cm desde su posición no estirada. El bloque se retira y en su lugar se cuelga un objeto de 0.520 kg. Halle el periodo de su oscilación.
2. Un oscilador consta de un bloque de 512 g de masa unido a un resorte. Cuando es puesto en oscilación con una amplitud de 34.7 cm, se observa que repite su movimiento cada 0.484 s. Halle (*a*) el periodo, (*b*) la frecuencia, (*c*) la frecuencia angular, (*d*) la constante de fuerza, (*e*) la velocidad máxima, y (*f*) la fuerza máxima ejercida sobre el bloque.
3. Las frecuencias de vibración de los átomos de los sólidos a temperaturas normales son del orden de 10.0 THz. Imagínese que los átomos estuviesen unidos entre sí por "resortes". Supóngase que un átomo de plata aislado vibre con esta frecuencia y que los demás átomos estén en reposo. Calcúlese la constante de fuerza efectiva. Un mol de plata tiene una masa de 108 g y contiene $6.02 \times 10^{23}$ átomos.
4. Un altoparlante produce un sonido musical por medio de la oscilación de un diafragma. Si la amplitud de la oscilación está limitada a $1.20 \times 10^{-3}$ mm, ¿qué frecuencias darán por resultado que la aceleración del diafragma exceda de $g$?
5. Un objeto de 5.22 kg está unido a la parte inferior de un resorte vertical y es puesto a vibrar. La velocidad máxima del objeto es de 15.3 cm/s y el periodo es de 645 ms. Halle (*a*) la constante de fuerza del resorte, (*b*) la amplitud del movimiento, y (*c*) la frecuencia de oscilación.
6. En una rasuradora eléctrica, la hoja se mueve de un lado a otro sobre una distancia de 2.00 mm. El movimiento es armónico simple, con una frecuencia de 120 Hz. Halle (*a*) la amplitud, (*b*) la velocidad máxima de la hoja, y (*c*) la aceleración máxima de la hoja.
7. Puede considerarse que un automóvil está montado sobre cuatro resortes en lo que respecta a oscilaciones verticales.

Los resortes de cierto automóvil de 1460 kg de masa están ajustados de modo que las vibraciones tengan una frecuencia de 2.95 Hz. (*a*) Halle la constante de fuerza de cada uno de los cuatro resortes (supuestos idénticos). (*b*) ¿Cuál será la frecuencia de vibración si viajan en el automóvil cinco personas con una masa promedio de 73.2 kg cada una?

**8.** Un cuerpo oscila con movimiento armónico simple de acuerdo con la ecuación

$$x = (6.12 \text{ m}) \cos [(8.38 \text{ rad/s})t + 1.92 \text{ rad}].$$

Halle (*a*) el desplazamiento, (*b*) la velocidad, y (*c*) la aceleración en el tiempo $t = 1.90$ s. Halle también (*d*) la frecuencia y (*e*) el periodo del movimiento.

**9.** La carátula de un dinamómetro que lee desde 0 hasta 50.0 lb tiene 4.00 in de longitud. Se encuentra que un paquete suspendido del dinamómetro oscila verticalmente con una frecuencia de 2.00 Hz. ¿Cuánto pesa el paquete?

**10.** El émbolo en el cilindro de una locomotora tiene una carrera de 76.5 cm. ¿Cuál es la velocidad máxima del émbolo si las ruedas impulsoras dan 193 rev/m y el émbolo se mueve con un movimiento armónico simple?

**11.** La figura 24 muestra a un astronauta en un aparato de medición de la masa de un cuerpo (BMMD, *Body Mass Measurement Device*). Diseñado para usarse en vehículos espaciales en órbita, su objeto es permitir que los astronautas midan su masa en las condiciones de ingravidez en órbita alrededor de la Tierra. El aparato es una silla montada sobre resortes; el astronauta mide su periodo de oscilación en la silla; la masa se deduce de la fórmula para el periodo de un sistema oscilatorio bloque-resorte. (*a*) Si $M$ es la masa del astronauta y $m$ la masa efectiva de esa parte del aparato que también oscila, demuestre que

$$M = (k/4\pi^2)T^2 - m,$$

donde $T$ es el periodo de oscilación y $k$ es la constante de fuerza. (*b*) La constante de fuerza es $k = 605.6$ N/m para el aparato en la Misión Skylab 2; el periodo de oscilación de la silla vacía es de 0.90149 s. Calcule la masa efectiva de la silla. (*c*) Con el astronauta en la silla, el periodo de oscilación resulta ser de 2.08832 s. Calcule la masa del astronauta.

**12.** Un objeto de 2.14 kg cuelga de un resorte. Un cuerpo de 325 g colgado abajo del objeto estira adicionalmente al resorte 1.80 cm. El cuerpo de 325 g es retirado y el objeto entra en oscilación. Halle el periodo del movimiento.

**13.** En cierto puerto marítimo, las mareas causan que la superficie del mar se eleve y descienda en movimiento armónico simple, con un periodo de 12.5 h. ¿Cuánto tiempo le toma al agua descender desde su altura máxima hasta la mitad de su altura máxima con respecto a su nivel promedio (de equilibrio)?

**14.** Dos bloques ($m = 1.22$ kg y $M = 8.73$ kg) y un resorte ($k = 344$ N/m) están dispuestos sobre una superficie horizontal, sin fricción, como se muestra en la figura 25. El coeficiente de fricción estática entre los bloques es de 0.42. Halle la amplitud máxima posible del movimiento armónico simple sin que ocurra un deslizamiento entre los bloques.

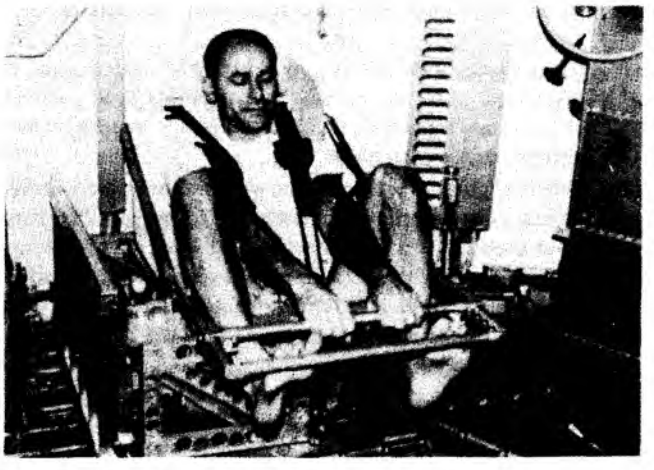


**Figura 24** Problema 11.

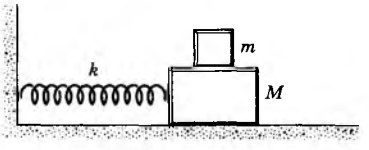



**Figura 25** Problema 14

**15.** Un bloque está sobre una superficie horizontal (una mesa vibratoria) que se mueve horizontalmente con un movimiento armónico simple de 2.35 Hz de frecuencia. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano es de 0.630. ¿A qué amplitud puede llegar sin que el bloque resbale a lo largo de la superficie?

**16.** Un bloque está sobre un émbolo que se mueve verticalmente con movimiento armónico simple. (*a*) ¿A qué amplitud del movimiento se separarán el bloque y el émbolo si el periodo del movimiento del émbolo es de 1.18 s? (*b*) Si el émbolo tiene una amplitud de 5.12 cm en su movimiento, halle la frecuencia máxima a la cual estarán en contacto el bloque y el émbolo continuamente.

**17.** La fuerza de interacción entre dos átomos de ciertas moléculas diatómicas puede representarse por $F = -a/r^2 + b/r^3$, donde $a$ y $b$ son constantes positivas y $r$ es la distancia de separación entre los átomos. Haga una gráfica de $F$ contra $r$. Luego (*a*) demuestre que la separación en el equilibrio es $b/a$; (*b*) demuestre que, para pequeñas oscilaciones respecto a esta separación de equilibrio, la constante de fuerza es $a^4/b^3$; (*c*) halle el periodo de este movimiento.

**18.** Un oscilador consta de un bloque unido a un resorte ($k = 456$ N/m). En cierto tiempo $t$, la posición (medida desde la posición de equilibrio), la velocidad, y la aceleración del bloque son $x = 0.112$ m, $v = -13.6$ m/s, $a = -123$ m/s$^2$. Calcule (*a*) la frecuencia, (*b*) la masa del bloque, y (*c*) la amplitud de la oscilación.

**19.** Dos partículas oscilan en movimiento armónico simple a lo largo de un segmento de línea recta común de longitud

*L*. Cada partícula tiene un periodo de 1.50 s pero difieren en fase en 30.0°. (*a*) ¿Qué separación hay entre ellas (en términos de *L*) 0.500 s después de que la partícula que va atrás deja un extremo de la trayectoria? (*b*) ¿Se mueven en la misma dirección, una hacia la otra, o una alejándose entre sí en ese momento?

**20.** Dos partículas efectúan un movimiento armónico simple de la misma amplitud y frecuencia a lo largo de la misma línea recta. Se cruzan entre sí cuando van en direcciones opuestas cada vez que su desplazamiento es la mitad de su amplitud. Halle la diferencia de fase entre ellas.

**21.** Dos resortes están unidos a un bloque de masa $m$ que puede deslizarse libremente sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura 26. Demuestre que la frecuencia de oscilación del bloque es

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2},$$

donde $\nu_1$ y $\nu_2$ son las frecuencias a las que oscilaría el bloque si se uniera solamente al resorte 1 o al resorte 2. (La analogía eléctrica de este sistema es una combinación en serie de dos capacitores.)

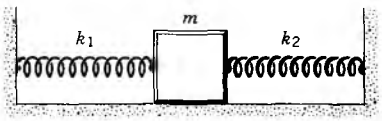



**Figura 26** Problema 21.

**22.** Dos resortes unidos entre sí se enlazan al bloque de masa $m$ como se muestra en la figura 27. Las superficies carecen de fricción. Si los resortes, por separado, tienen constantes de fuerza $k_1$ y $k_2$, demuestre que la frecuencia de oscilación del bloque es

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} = \frac{\nu_1 \nu_2}{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}},$$

donde $\nu_1$ y $\nu_2$ son las frecuencias a las que oscilaría el bloque si estuviera unido solamente al resorte 1 o al resorte 2. (La analogía eléctrica de este sistema es una combinación en paralelo de dos capacitores.)

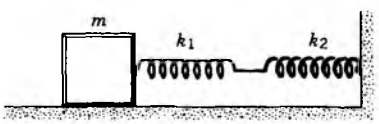



**Figura 27** Problema 22.

**23.** Tres vagones de mineral de 10,000 kg se mantienen en reposo en una pendiente de 26.0° sobre los rieles de una mina usando un cable paralelo a la pendiente (Fig. 28). Se observa que el cable se estira 14.2 cm justo antes de que se rompa el acoplamiento, desenganchando a uno de los vagones. Halle (*a*) la frecuencia de las oscilaciones resultantes de los dos vagones restantes y (*b*) la amplitud de la oscilación.

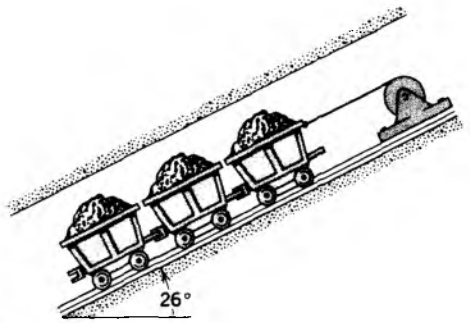



**Figura 28** Problema 23.

**24.** Un resorte sin masa de 3.60 N/cm de constante de fuerza es cortado en dos mitades. (*a*) ¿Cuál es la constante de fuerza de cada mitad? (*b*) Las dos mitades, suspendidas por separado, soportan un bloque de masa $M$ (véase la Fig. 29). El sistema vibra con una frecuencia de 2.87 Hz. Halle el valor de la masa $M$.

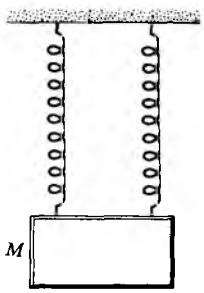



**Figura 29** Problema 24.

**25.** Si la masa de un resorte $m_s$ no es despreciable, pero es pequeña comparada con la masa $m$ del objeto suspendido de él, el periodo del movimiento es $T = 2\pi\sqrt{(m + m_s/3)/k}$. Derive este resultado. (*Sugerencia*: La condición $m_s \ll m$ equivale a la hipótesis de que el resorte se estira proporcionalmente a lo largo de su longitud.) (Véase H. L. Armstrong, *American Journal of Physics*, Vol 37, pág. 447, 1969, para una solución completa del caso general.)

### *Sección 15-4 Consideraciones energéticas en el movimiento armónico simple*

**26.** Un sistema oscilatorio bloque-resorte tiene una energía mecánica de 1.18 J, una amplitud de 9.84 cm, y una velocidad máxima de 1.22 m/s. Halle (*a*) la constante de fuerza del resorte, (*b*) la masa del bloque, y (*c*) la frecuencia de oscilación.

**27.** Una gran resortera (hipotética) se estira 1.53 m para lanzar un proyectil de 130 g con una velocidad suficiente para

que escape de la Tierra (11.2 km/s). (*a*) ¿Cuál es la constante de fuerza del aparato, si toda la energía potencial se convierte en energía cinética? (*b*) Supóngase que una persona promedio puede ejercer una fuerza de 220 N. ¿Cuántas personas se necesitan para estirar la resortera?

**28.** (*a*) Cuando el desplazamiento es la mitad de la amplitud $x_m$, ¿qué fracción de la energía total es cinética y qué fracción es potencial en el movimiento armónico simple? (*b*) ¿A qué desplazamiento es la energía mitad cinética y mitad potencial?

**29.** Una partícula de 12.3 kg se halla en movimiento armónico simple con una amplitud de 1.86 mm. La aceleración máxima de la partícula es de 7.93 km/s$^2$. (*a*) Halle el periodo del movimiento. (*b*) ¿Cuál es la velocidad máxima de la partícula? (*c*) Calcule la energía mecánica total de este oscilador armónico simple.

**30.** Un objeto de 5.13 kg se mueve sobre una superficie horizontal sin fricción bajo la influencia de un resorte de constante de fuerza 9.88 N/cm. El objeto es desplazado 53.5 cm y se le da una velocidad inicial de 11.2 m/s hacia la posición de equilibrio. Halle (*a*) la frecuencia del movimiento, (*b*) la energía potencial inicial del sistema, (*c*) La energía cinética inicial, y (*d*) la amplitud del movimiento.

**31.** Demuestre que las relaciones generales entre los dos valores iniciales de posición $x(0)$ y de velocidad $v(0)$, y la amplitud $x_m$ y el ángulo fase $\phi$ de la ecuación 6 son

$$x_m = \sqrt{[x(0)]^2 + [v(0)/\omega]^2}, \qquad \tan\phi = -v(0)/\omega x(0).$$

**32.** Resuelva la ecuación 16, que expresa la conservación de la energía, para $dt$ e integre el resultado. Supóngase que $x = x_m$ en $t = 0$, y demuestre que se obtiene la ecuación 6 (con $\phi = 0$) o sea, el desplazamiento en función del tiempo.

**33.** Un objeto de 1.26 kg de masa unido a un resorte de 5.38 N/cm de constante de fuerza se pone en oscilación estirando el resorte 26.3 cm y dando al objeto una velocidad de 3.72 m/s hacia la posición de equilibrio del resorte. Usando los resultados obtenidos en el problema 31, calcule (*a*) la amplitud y (*b*) el ángulo fase del movimiento armónico simple resultante.

**34.** Un bloque de masa $M$, en reposo sobre una mesa horizontal sin fricción, está unido a un soporte rígido por medio de un resorte de constante de fuerza $k$. Una bala de masa $m$ y velocidad $v$ golpea al bloque como se muestra en la figura 30. La bala se queda empotrada en el bloque. Determine la amplitud del movimiento armónico simple resultante en términos de $m$, $M$, $v$ y $k$.

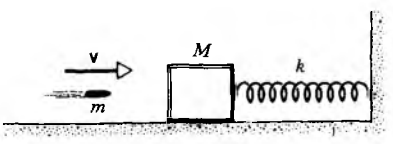



**Figura 30** Problema 34.

**35.** Considérese un resorte sin masa de constante de fuerza $k$ en un campo gravitatorio uniforme y unamos a él un objeto de masa $m$. (*a*) Demuestre que si $x = 0$ marca la posición relajada del resorte, la posición de equilibrio estático está dada por $x = mg/k$ (véase la Fig. 31). Demuestre que la ecuación de movimiento del sistema masa-resorte es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg$$

y que la solución para el desplazamiento en función del tiempo es $x = x_m \cos(\omega t + \phi) + mg/k$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$ como anteriormente. (c) Demuestre, por lo tanto, que el sistema tiene las mismas $\omega$, $v$, $a$, $v$ y $T$ en un campo gravitatorio uniforme y en ausencia de tal campo, con el único cambio de que la posición de equilibrio se ha desplazado en $mg/k$. (*d*) Considere ahora la energía del sistema, $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mg(h - x) =$ constante, y demuestre que la diferenciación respecto al tiempo conduce a la ecuación de movimiento de la parte (*b*). (*e*) Demuestre que cuando el objeto cae desde $x = 0$ a la posición de equilibrio estático, $x = mg/k$, la pérdida de energía potencial gravitatoria va una mitad a una ganancia en energía potencial elástica y la otra mitad a una ganancia en energía cinética. (*f*) Por último, considérese al sistema en movimiento respecto a la posición de equilibrio estático. Calcule por separado el cambio de la energía potencial gravitatoria y de la energía potencial elástica cuando el objeto se mueve *hacia arriba* con un desplazamiento $x_m$, y cuando el objeto se mueva *hacia abajo* con un desplazamiento $x_m$. Demuestre que el cambio *total* en la energía potencial es el mismo en cada caso, es decir, $\frac{1}{2}kx_m^2$. A la vista de los resultados (*c*) y (*f*), podemos simplemente despreciar el campo gravitatorio uniforme en el análisis haciendo el cambio de la posición de referencia de $x = 0$ a $x_0 = x - mg/k = 0$. La curva de la nueva energía potencial [$U(x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2$ + constante] tiene la misma forma parabólica que la curva de la energía potencial en ausencia de campo gravitatorio [$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$].

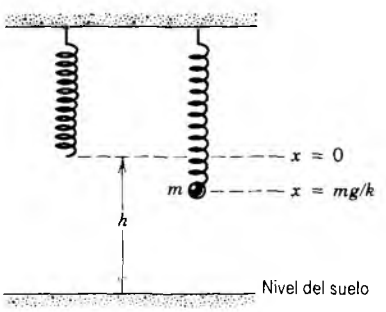



**Figura 31** Problema 35.

**36.** Un bloque de 4.00 kg está suspendido de un resorte con una constante de fuerza de 5.00 N/cm. Una bala de 50.0 g se dispara hacia el bloque desde abajo a una velocidad de 150 m/s y llega al reposo dentro del bloque. (*a*) Halle la amplitud del movimiento armónico simple resultante. (*b*) ¿Qué fracción de la energía cinética original de la bala aparece como energía mecánica en el oscilador?

**37.** Un cilindro sólido está unido a un resorte horizontal sin masa de modo que puede *rodar sin resbalar* a lo largo de

una superficie horizontal, como en la figura 32. La constante de fuerza $k$ del resorte es de 2.94 N/cm. Si el sistema parte del reposo desde una posición en que el resorte está estirado 23.9 cm, halle (*a*) la energía cinética de traslación y (*b*) la energía cinética de rotación del cilindro al pasar por la posición de equilibrio. (*c*) Demuestre que en estas condiciones el centro de masa del cilindro efectúa un movimiento armónico simple con un periodo

$$T = 2\pi\sqrt{3M/2k},$$

donde $M$ es la masa del cilindro.

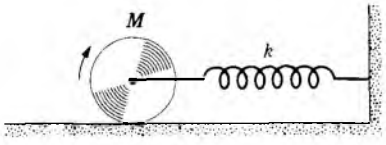



**Figura 32** Problema 37.

**38.** (*a*) Demuestre que en el movimiento armónico simple la energía potencial promedio es igual a la energía cinética promedio cuando el promedio se toma respecto al tiempo durante un periodo del movimiento, y que cada promedio es igual a $\frac{1}{4}kx_m^2$. (*b*) Demuestre que cuando el promedio se toma respecto a la posición durante un ciclo, la energía potencial promedio es igual a $\frac{1}{6}kx_m^2$ y que la energía cinética promedio es igual a $\frac{1}{3}kx_m^2$. (*c*) Explique físicamente por qué los dos resultados de arriba (*a* y *b*) son diferentes.

***Sección 15-5 Aplicaciones del movimiento armónico simple***

**39.** Halle la longitud de un péndulo simple cuyo periodo sea 1.00 s en una localidad donde $g$ = 9.82 m/s$^2$.

**40.** Un péndulo simple de 1.53 m de longitud efectúa 72.0 oscilaciones completas en 180 s en una cierta localidad. Halle la aceleración debida a la gravedad en este punto.

**41.** Una bola de demolición de 2500 kg se halla suspendida del extremo de una grúa, como se muestra en la figura 33. La longitud del cable que cuelga es de 17.3 m. Halle el periodo de balanceo, suponiendo que el sistema pueda ser tratado como un péndulo simple.

**42.** Existe una relación interesante entre el sistema bloque-resorte y el péndulo simple. Supongamos que usted cuelga un objeto de masa $M$ del extremo de un resorte, y que cuando el objeto está en equilibrio el resorte es estirado una distancia $h$. Demuestre que la frecuencia de este sistema bloque-resorte es la misma que la de un péndulo simple de masa $m$ y longitud $h$, aun cuando $m \neq M$; véase la figura 34.

**43.** Un aro circular de 65.3 cm de radio y 2.16 kg de masa está suspendido de un clavo horizontal. (*a*) Halle la frecuencia de oscilación para desplazamientos pequeños desde el equilibrio. (*b*) ¿Cuál es la longitud del péndulo simple equivalente?

**44.** Un ingeniero desea hallar la inercia rotatoria de un objeto de forma rara de 11.3 kg de masa respecto a un eje que pase por su centro de masa. El objeto está soportado con un alambre que pasa por su centro de masa y a lo largo del eje deseado. El alambre tiene una constante de torsión $\kappa$ = 0.513 N · m. El ingeniero observa que este péndulo de torsión efectúa 20.0 ciclos completos en 48.7 s. ¿Qué valor se calcula para la inercia rotatoria?

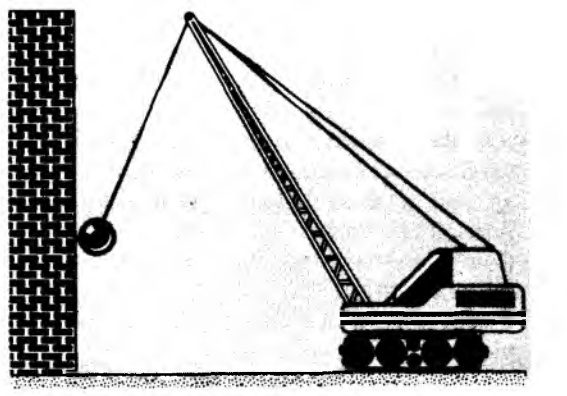


**Figura 33** Problema 41.

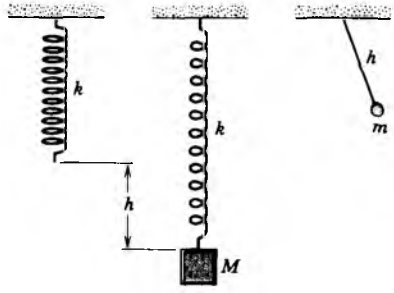



**Figura 34** Problema 42.

**45.** Un péndulo físico consta de un disco sólido uniforme de masa $M$ = 563 g y radio $R$ = 14.4 cm soportado en un plano vertical por un pivote situado a una distancia $d$ = 10.2 cm del centro del disco, como se muestra en la figura 35. El disco se desplaza un pequeño ángulo y luego se suelta. Halle el periodo del movimiento armónico simple resultante.

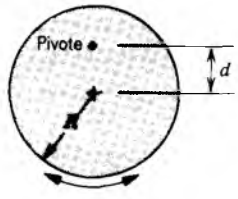



**Figura 35** Problema 45.

**46.** Una esfera sólida de 95.2 kg con un radio de 14.8 cm está suspendida de un alambre vertical unido al techo de una sala. Se requiere una torca de 0.192 N · m para retorcer a la esfera en un ángulo de 0.850 rad. Halle el

periodo de oscilación cuando la esfera se suelte desde esta posición.

**47.** Un péndulo físico consta de una barra de un metro pivotada en un pequeño orificio taladrado a través de la barra a una distancia $x$ de la marca de 50.0 cm. Se observa que el periodo de oscilación es de 2.50 s. Halle la distancia $x$.

**48.** Un péndulo consta de un disco uniforme de 10.3 cm de radio y 488 g de masa unido a una barra de 52.4 cm de longitud que tiene una masa de 272 g; véase la figura 36. (*a*) Calcule la inercia rotatoria del péndulo respecto al pivote. (*b*) ¿Cuál es la distancia entre el pivote y el centro de masa del péndulo? (*c*) Calcule el periodo de oscilación para ángulos pequeños.

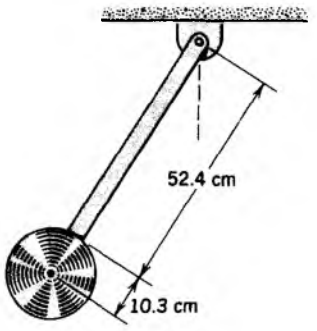



**Figura 36** Problema 48.

**49.** Se forma un péndulo al pivotar una barra larga de longitud $L$ y masa $m$ en torno a un punto en la barra que está a una distancia $d$ sobre el centro de la varilla. (*a*) Halle el periodo de pequeña amplitud de este péndulo en términos de $d$, $L$, $m$, y $g$. (*b*) Demuestre que el periodo tiene un valor mínimo cuando $d = L/\sqrt{12} = 0.289L$.

**50.** Una rueda puede girar en torno a su eje fijo. Se une un resorte a uno de sus rayos a una distancia $r$ del eje, como se muestra en la figura 37. Suponiendo que la rueda sea un aro de masa $M$ y radio $R$, obtenga la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones de este sistema en términos de $M$, $R$, $r$, y la constante de fuerza $k$. Discuta los casos especiales $r = R$ y $r = 0$.

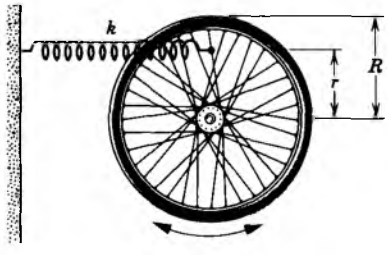



**Figura 37** Problema 50.

**51.** Una barra de un metro se balancea de un extremo y oscila con una frecuencia $\nu_0$. ¿Cuál sería la frecuencia, en términos de $\nu_0$, si se cortase el tercio inferior de la barra?

**52.** Una partícula se suelta desde el reposo en un punto $P$ dentro de un tazón hemisférico sin fricción de radio $R$. (*a*) Demuestre que cuando $P$ está cerca del fondo del tazón la partícula experimenta un movimiento armónico simple. (*b*) Halle la longitud del péndulo simple equivalente.

**53.** Un péndulo físico tiene dos puntos de pivoteo posibles; uno tiene una posición fija y el otro es ajustable a lo largo de la longitud del péndulo, como se muestra en la figura 38. El periodo del péndulo cuando está suspendido del pivote fijo es $T$. El péndulo es luego invertido y suspendido del pivote ajustable. La posición de este pivote se mueve hasta que, por medio de pruebas sucesivas, el péndulo tenga el mismo periodo que antes, es decir, $T$. Demuestre que la aceleración de caída libre $g$ está dada por

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2},$$

donde $L$ es la distancia entre los dos puntos de pivoteo. Nótese que $g$ puede medirse de esta manera sin que sea necesario conocer la inercia rotatoria del péndulo o cualquiera de sus demás dimensiones excepto $L$.

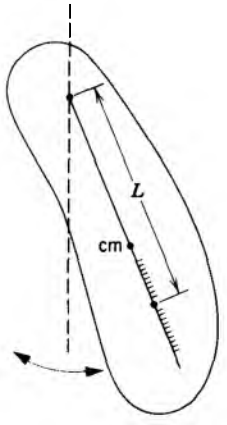



**Figura 38** Problema 53.

**54.** Un disco de 2.50 kg y diámetro de 42.0 cm, está soportado por una barra ligera de 76.0 cm de largo, la cual está pivotada en su extremo, como se muestra en la figura 39. (*a*) Inicialmente el ligero resorte de torsión no está unido. ¿Cuál es el periodo de oscilación? (*b*) Ahora se une el resorte de torsión de modo que la barra cuelgue verticalmente en equilibrio. ¿Cuál sería la constante de torsión del resorte de modo que el nuevo periodo de oscilación sea 500 ms más corto que antes?

**55.** Un péndulo simple de longitud $L$ y masa $m$ está suspendido en un automóvil que viaja a una velocidad constante $v$ alrededor de un círculo de radio $R$. Si el péndulo experimenta pequeñas oscilaciones en dirección radial respecto a su posición de equilibrio, ¿cuál será su frecuencia de oscilación?

**56.** La figura 40 muestra un péndulo físico construido a partir de secciones de igual longitud de un mismo tubo. El radio interior del tubo es 10.2 cm y el espesor es 6.40 mm. (*a*)

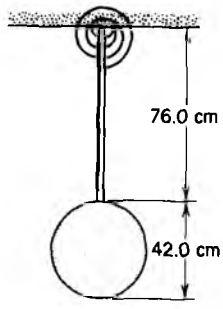



**Figura 39** Problema 54.

Calcule el periodo de oscilación respecto al pivote mostrado. (*b*) Supóngase que se construye un nuevo péndulo físico al girar la sección del fondo a 90° en torno a un eje vertical que pase por su centro. Demuestre que el nuevo periodo de oscilación respecto al mismo pivote es alrededor del 2% menor que el periodo del péndulo original.




**Figura 40** Problema 56.

### *Sección 15-7 Combinaciones de movimientos armónicos*

**57.** Trace la trayectoria de una partícula que se mueva en el plano *xy* de acuerdo a $x = x_m \cos(\omega t - \pi/2)$, $y = 2x_m \cos(\omega t)$.

**58.** El diagrama que se muestra en la figura 41 es el resultado de combinar los dos movimientos armónicos simples $x = x_m \cos \omega_x t$ y $y = y_m \cos(\omega_y t + \phi_y)$. (*a*) Cuál es el valor de $x_m/y_m$? (*b*) ¿Cuál es el valor de $\omega_x/\omega_y$? (*c*) Cuál es el valor de $\phi_y$?

**59.** Los electrones de un osciloscopio son desviados por dos campos eléctricos mutuamente perpendiculares de modo que en cualquier tiempo *t* el desplazamiento está dado por

$$x = A \cos \omega t, \qquad y = A \cos(\omega t + \phi_y).$$

Describa la trayectoria de los electrones y determine sus ecuaciones cuando (*a*) $\phi_y = 0°$, (*b*) $\phi_y = 30°$, y (*c*) $\phi_y = 90°$

**60.** Una partícula de masa *m* se mueve en un plano fijo a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r} = \mathbf{i}A \cos \omega t + \mathbf{j}A \cos 3\,\omega t$. (*a*) Trace la trayectoria de la partícula. (*b*) Halle la fuerza que actúa sobre la partícula. Halle también (*c*) su energía potencial y (*d*) su energía total, ambas en función del tiempo. (*e*) ¿Es periódico el movimiento? De ser así, halle el periodo.

**61.** Cuando se combinan oscilaciones en ángulo recto, las frecuencias del movimiento de la partícula en las direcciones *x* y *y* no necesitan ser iguales, de modo que, en el caso general, las ecuaciones 36 resultan ser

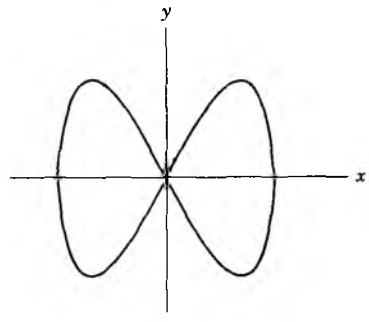



**Figura 41** Problema 58

$$x = x_m \cos(\omega_x t + \phi_x) \quad \text{y} \quad y = y_m \cos(\omega_y t + \phi_y).$$

La trayectoria de la partícula ya no es una elipse, sino que ahora recibe el nombre de *curva Lissajous*, en memoria de Jules Antoine Lissajous quien fue el primero en demostrar estas curvas en 1857. (*a*) Si $\omega_x/\omega_y$ es un número racional, de modo que las frecuencias angulares $\omega_x$ y $\omega_y$ sean "conmensurables", entonces la curva es cerrada y el movimiento se repite a sí mismo a intervalos de tiempo regulares. Suponga que $x_m = y_m$ y que $\phi_x = \phi_y$ y trace la curva Lissajous para $\omega_x/\omega_y = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, y $\frac{2}{3}$. (*b*) Sea $\omega_x/\omega_y$ un número racional, por ejemplo $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ó $\frac{2}{3}$ y demuestre que la forma de la curva Lissajous depende de la diferencia de fase $\phi_x - \phi_y$. Trace curvas para $\phi_x - \phi_y = 0, \pi/4$, y $\pi/2$ rad. (*c*) Si $\omega_x/\omega_y$ no es un número racional, entonces la curva es "abierta". Convénzase de que después de un tiempo prolongado la curva habrá pasado a través de cada punto que estuviera en el rectángulo limitado por $x = \pm x_m$ y $y = \pm y_m$, sin que la partícula pase nunca dos veces por un punto determinado y a la misma velocidad. Con fines de precisión, supóngase que $\phi_x = 0$ en todo momento.

### *Sección 15-8 Movimiento armónico amortiguado*

**62.** En el sistema mostrado en la figura 18, el bloque tiene una masa de 1.52 kg y la constante de fuerza es de 8.13 N/m. La fuerza de fricción está dada por $-b(dx/dt)$, donde $b = 227$ g/s. Supóngase que el bloque se jala hacia un lado una distancia de 12.5 cm y luego se suelta. (*a*) Calcule el intervalo de tiempo necesario para que la amplitud disminuya a un tercio de su valor inicial. (*b*) Cuántas oscilaciones efectúa el bloque en este tiempo?

**63.** Verifique, usando derivadas, que la ecuación 38 es la solución de la ecuación 37 para el oscilador amortiguado, a condición de que la frecuencia $\omega'$ esté dada por la ecuación 39.

**64.** Un oscilador armónico amortiguado consta de un bloque ($m = 1.91$ kg), un resorte ($k = 12.6$ N/m), y una fuerza de amortiguamiento $F = -bv$. Inicialmente, oscila con una amplitud de 26.2 cm; a causa del amortiguamiento, la amplitud disminuye a tres cuartas partes de este valor inicial después de cuatro ciclos completos. (*a*) ¿Cuál es el valor de *b*? (*b*) ¿Cuánta energía se ha "perdido" durante estos cuatro ciclos?

**65.** *Supóngase que está examinando* las características de un sistema de suspensión de un automóvil de 2000 kg. La suspensión "se comprime" 10 cm cuando se comprime sobre ella el peso de todo el automóvil. Además, la amplitud de la oscilación disminuye en 50% durante una oscilación completa. Calcule los valores de $k$ y $b$ para el resorte y el sistema amortiguador en cada rueda. Supóngase que cada rueda soporte 500 kg.

### *Sección 15-9 Oscilaciones forzadas y resonancia*

**66.** Considérense las oscilaciones forzadas de un sistema bloque-resorte amortiguado. Demuestre que, en resonancia, (*a*) la amplitud de la oscilación es $x_m = F_m/b\omega$, y (*b*) la velocidad máxima del bloque oscilatorio es $v_{max} = F_m/b$.

**67.** Un automóvil de 2200 ib que transporta a cuatro personas de 180 lb viaja por una carretera de terracería "ondulada". Las ondulaciones de la carretera tienen una separación de 13 ft. Se observa que el automóvil rebota con amplitud máxima cuando su velocidad es de 10 mi/h. Ahora se detiene el automóvil y se bajan las cuatro personas ¿En cuánto se eleva la carrocería del automóvil sobre su suspensión debido a esta disminución del peso?

**68.** A partir de la ecuación 42 halle la velocidad $v(= dx/dt)$ en el movimiento oscilatorio forzado. Demuestre que la amplitud de la velocidad es $v_m = F_m/[(m\omega'' - k/\omega'')^2 + b^2]^{1/2}$. Las ecuaciones de la sección 15-9 son idénticas en su forma a las que representan un circuito eléctrico que contiene una resistencia $R$, una inductancia $L$, y una capacitancia $C$ en serie con una fem alternante $V = V_m \cos \omega'' t$. De aquí que $b$, $m$, $k$, y $F_m$ sean análogas a $R$, $L$, $1/C$, y $V_m$, respectivamente y que $x$ y $v$ sean análogas a la carga eléctrica $q$ y la corriente $i$, respectivamente. En el caso eléctrico, se usa la amplitud de la corriente $i_m$, análoga a la amplitud de la velocidad $v_m$ para describir la calidad de la resonancia.

### *Sección 15-10 Oscilaciones de dos cuerpos*

**69.** Supóngase que el resorte de la figura 22*a* tiene una constante de fuerza $k = 252$ N/m. *Sean* $m_1 = 1.13$ kg y $m_2 = 3.24$ kg. Calcule el periodo de oscilación del sistema de dos cuerpos.

**70.** (*a*) Demuestre que cuando $m_2 \to \infty$ en la ecuación 46, $m \to m_1$. (*b*) Demuestre que el efecto de un muro no infinito ($m_2 < \infty$) sobre las oscilaciones de un cuerpo de masa $m_1$ situado en el extremo de un resorte unido a la pared es reducir el periodo, o aumentar la frecuencia de la oscilación en comparación con (*a*). (*c*) Demuestre que cuando $m_2 = m_1$ el efecto es como si el resorte se cortara a la mitad, oscilando cada cuerpo independientemente con respecto al centro de masa situado en el punto medio.

**71.** (*a*) Calcule la masa reducida de cada una de las siguientes moléculas diatómicas: $O_2$, HCl, y CO. Exprese sus respuestas en unidades atómicas de masa unificadas, siendo 1.00 u la masa de un átomo de hidrógeno. (*b*) Se sabe que una molécula de HCl vibra a una frecuencia fundamental de $\nu = 8.7 \times 10^3$ Hz. Halle la "constante de fuerza" efectiva $k$ de las fuerzas de acoplamiento entre los átomos. En función de su experiencia con resortes ordinarios, ¿diría usted que este "resorte molecular" es relativamente rígido o que no lo es?

**72.** Demuestre que la energía cinética del oscilador de dos cuerpos de la figura 22*a* está dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, donde $m$ es la masa reducida y $v\ (= v_1 - v_2)$ es la velocidad relativa. Puede servir de ayuda notar que el ímpetu lineal se conserva mientras el sistema oscila.

### *Proyectos para la computadora*

**73.** Escriba un programa de computación o diseñe una hoja de cálculo para calcular la amplitud y la fase de un movimiento armónico simple cuando se proporcionan la constante de fuerza $k$, la masa $m$, la coordenada inicial $x_0$, y la velocidad inicial $v_0$. Escriba la coordenada como $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$ y utilice $\omega = \sqrt{k/m}$, $x_m = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$, y $\phi = \tan^{-1}(-v_0/\omega x_0)$. Asegúrese de comprobar que el valor calculado de $\phi$ es correcto verificando que $\cos\phi$ tenga el mismo signo que $x_0$ y que $\operatorname{sen}\phi$ tenga el mismo signo que $v_0$. Si no lo tienen, sume 180° (o $\pi$ rad) al valor calculado. Sea cuidadoso y evite dividir entre cero. Si $x_0 = 0$, automáticamente ponga $\phi = +90°$ ó $-90°$ sin intentar el cálculo de $v_0/\omega x_0$. Por supuesto, el ángulo que usted elija depende del signo de $v_0$. Escriba el programa de modo que una vez que se haya terminado un cálculo regrese al principio y pida los datos para el siguiente problema. He aquí algunas oscilaciones a tratar. En todas sostiene una masa de 250 g y un resorte con una constante de fuerza de 200 N/m. (*a*) $x_0 = 2.8$ cm, $v_0 = 0$. (*b*) $x_0 = -2.8$ cm, $v_0 = 0$. (*c*) $x_0 = 0$, $v_0 = 56$ cm/s. (*d*) $x_0 = 0$, $v_0 = -56$ cm/s. (*e*) $x_0 = 2.8$ cm, $v_0 = 56$ cm/s. (*f*) $x_0 = 2.8$ cm, $v_0 = -56$ cm/s. (*g*) $x_0 = -2.8$ cm, $v_0 = 56$ cm/s. (*h*) $x_0 = -2.8$ cm, $v_0 = -56$ cm/s.

**74.** Usted puede usar una computadora para estudiar las oscilaciones amortiguadas. Considérese una masa $m$ en el extremo de un resorte con constante de fuerza $k$, sujeto a una fuerza de arrastre proporcional a su velocidad. La segunda ley de Newton da $md^2x/dt^2 = -kx - bv$. Escriba un programa de computación o diseñe una hoja de cálculo para calcular la coordenada $x$, la velocidad $v$, y la energía mecánica total $E$ al final de cada intervalo de tiempo de duración $\Delta t$ desde $t = 0$ hasta $t = t_f$. Véase la sección 6-6 y los proyectos para la computadora al final del capítulo 6. Use el programa para resolver los problemas siguientes. En cada caso tomar $m = 2.0$ kg, $k = 350$ N/m, $x_0 = 0.070$ m, $v_0 = 0$, $t_f = 1.0$ s. Use un intervalo de integración de 0.001 s. (*a*) Considere que $b = 2.8$ kg/s y, en gráficas por separado, trace $x(t)$ y $E(t)$. Nótese la disminución en la amplitud con el transcurso del tiempo. La disminución se asocia íntimamente a una pérdida de energía por la fuerza de arrastre. Nótese que la gráfica de la energía tiene oscilaciones pequeñas y que existen regiones pequeñas donde la energía es casi constante. ¿Dónde se presentan estas regiones en el movimiento oscilatorio? Ofrezca una explicación física de su existencia. ¿Cambia la fuerza de arrastre al movimiento el periodo de la oscilación? Úsese la gráfica para calcular el tiempo entre máximos sucesivos y compare el resultado con $2\pi\sqrt{m/k}$. (*b*) Si la fuerza de arrastre se aumenta lo suficiente, no ocurren oscilaciones y se dice que el movimiento está *sobreamortiguado*. Tome $b = 110$ kg/s y use el programa para trazar a $x(t)$ y a $E(t)$.

**75.** Si se aplica una fuerza sinusoidal a un objeto colocado en el extremo de un resorte, la segunda ley de Newton se convierte en $md^2x/dt^2 = -kx - bv + F_m \cos \omega' t$. Escriba un programa de computación o diseñe una hoja de cálculo para calcular la coordenada $x$, la velocidad $v$, y la energía mecánica total $E$ del oscilador al final de cada intervalo de tiempo de duración $\Delta t$ desde $t = 0$ hasta $t = t_f$. Véase la sección 6-6 y los proyectos de computación al final del capítulo 6. Para los siguientes problemas tome $m = 2.0$ kg, $k = 350$ N/m, $x_0 = 0.070$ m, $v_0 = 0$, $t_f = 2.0$ s. Use un intervalo de integración de 0.001 s. (*a*) Desprecie el amortiguamiento haciendo que $b = 0$ y considere que $F_m = 18$ N y $\omega' = 35$ rad/s. Use su programa para trazar $x(t)$ y $E(t)$ en gráficas por separado. Nótese que la fuerza aplicada causa desviaciones ligeras de la forma sinusoidal. Nótese también que la fuerza aplicada transfiere energía al oscilador durante ciertas porciones del movimiento y la quita durante otros. Como resultado, la amplitud cambia ligeramente con el tiempo. Use la gráfica para estimar la amplitud promedio. Calcule también el periodo y use su valor para calcular la frecuencia angular. ¿Está más cerca de 35 rad/s o de $\omega = \sqrt{k/m}$? (*b*) Una vez más tome $b = 0$ y considere que $F_m = 18$ N pero suponga que $\omega' = 15$ rad/s, mucho más cerca de $\sqrt{k/m}$. Trace $x(t)$ y $E(t)$ y note el crecimiento de la amplitud y de la energía. La fuerza aplicada pone energía en el oscilador durante periodos mucho más largos que cuando absorbe energía. (*c*) Tome en cuenta ahora el amortiguamiento haciendo que $b = 15$ kg/s. Una vez más considere que $F_m = 18$ N y $\omega' = 35$ rad/s, lejos de $\sqrt{k/m}$. Trace $x(t)$ y $E(t)$. Use su gráfica para hallar la frecuencia angular cerca de $t = 0$ y cerca de $t = 2$ s. Usted podría medir la mitad de un periodo y duplicar el resultado. Nótese que al principio el movimiento está cerca del movimiento natural, el movimiento en ausencia de una fuerza aplicada. En 1 s aproximadamente el movimiento natural se ha amortiguado de manera considerable y el movimiento subsiguiente es aquel que resulta de la aplicación de una fuerza externa a la masa. Calcule la amplitud cerca de $t = 2$ s. (*d*) Repita la parte (*c*) pero tomando $\omega' = 15$ rad/s. Calcule la amplitud. (*e*) ¿Para cuál de las situaciones consideradas es más grande la amplitud cerca de $t = 2$ s? ¿Y la más pequeña?

# CAPÍTULO 16

# GRAVITACIÓN

*Hasta aquí hemos estudiado los efectos de las fuerzas, sin ser demasiado específicos acerca de lo que determina su magnitud y dirección. En este capítulo trataremos los detalles de una fuerza particularmente importante, la* gravitación. *En 1665 Newton dedujo que la fuerza que rige la caída de las manzanas cerca de la Tierra es la misma que la que mantiene a la Luna en su órbita. Éste fue el primer paso hacia el desarrollo de una ley de la gravitación que pudiera servir para cualquier cuerpo en el universo.*

*Después de presentar la ley de Newton de la gravitación universal, exponemos sus consecuencias y sus pruebas experimentales. Demostramos que la gravedad de la Tierra puede entenderse como un caso particular de esta ley universal, y que los movimientos de los planetas pueden explicarse de modo similar. Concluimos con una visión de la teoría gravitatoria moderna, llamada teoría general de la relatividad de Einstein, la cual da resultados correctos cuando la fuerza gravitatoria es fuerte (donde la teoría de Newton no sirve) y coincide con la teoría de Newton cuando la fuerza gravitatoria es débil.*

*Al estudiar este capítulo conviene observar que muchos de los conceptos básicos de la dinámica estudiados en capítulos anteriores encuentran aquí una aplicación. Así, aplicamos las leyes básicas para las fuerzas, la energía potencial, la conservación de la energía y el ímpetu angular, el movimiento armónico, y las propiedades de los cuerpos extensos. Presentaremos también conceptos nuevos, incluyendo la noción de campo, la cual tendrá aplicación en capítulos siguientes.*

## 16-1 LA GRAVITACIÓN DESDE LA ANTIGÜEDAD HASTA KEPLER

Cuando menos desde los tiempos de la antigua Grecia, dos problemas constituían el centro de búsqueda de conocimiento: (1) la tendencia de los objetos, como las piedras, a regresar a la Tierra al dejarlos caer, y (2) los movimientos de los planetas, incluyendo el Sol y la Luna, los cuales se consideraban como planetas en aquellos tiempos. En la antigüedad se creía que estos dos problemas eran temas completamente separados uno del otro. Uno de los grandes logros de Newton consiste en que él los vio claramente como aspectos de un solo problema y sometido a las mismas leyes.

Los primeros intentos serios para explicar la cinemática del sistema solar fueron llevados a cabo por los antiguos griegos. Ptolomeo (Claudius Ptolemaeus, siglo II) desarrolló un esquema geocéntrico (con la Tierra como centro) para el sistema solar según el cual, como lo implica su nombre, la Tierra permanecía estacionaria en el centro mientras los planetas, incluidos el Sol y la Luna, giraban alrededor de ella. Esto no debería tomarse como una deducción sorprendente. La Tierra resulta para nosotros un cuerpo sustancial. Shakespeare se refiere a ella como "esta hermosa armazón, la Tierra..." Incluso hoy en día, usamos un marco de referencia geocéntrico en la astronáutica, y en la conversación cotidiana empleamos términos como "la salida del Sol", lo cual implica la idea de un marco así.

Puesto que las órbitas circulares simples no pueden ser explicación de los movimientos complicados de los planetas, Ptolomeo tuvo que echar mano del concepto de epiciclo, según el cual un planeta se mueve alrededor de un círculo cuyo centro se mueve alrededor de otro círculo cuyo centro es la Tierra (véase la Fig. 1*a*). También tuvo que recurrir a otros diversos esquemas geométricos, cada uno de los cuales preservaba la supuesta santidad del círculo como una característica central de los movimientos planetarios. Ahora sabemos que no es un

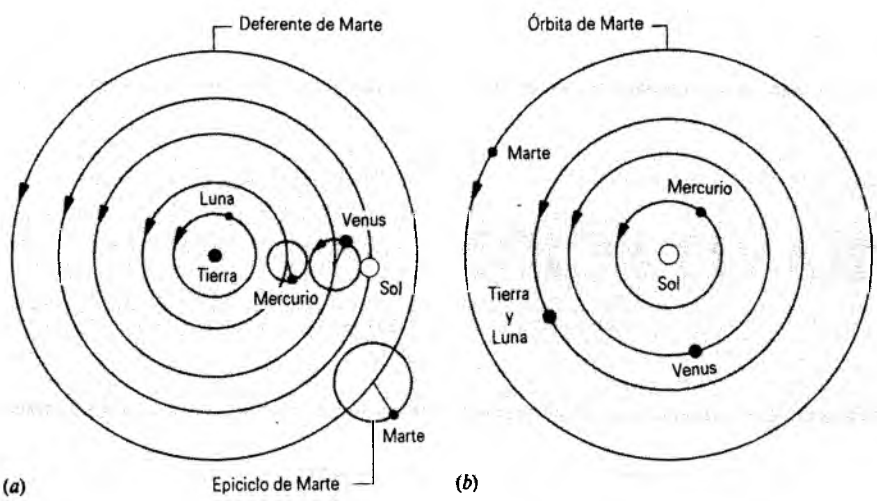



**Figura 1** (*a*) La visión ptolemaica del sistema solar. La Tierra está en el centro, y el Sol y los planetas se mueven alrededor de ella. Los planetas se mueven en círculos pequeños (epiciclos), cuyos centros viajan a lo largo de círculos grandes (deferentes). (*b*) La visión copernicana del sistema solar. El Sol está en el centro, y los planetas se mueven alrededor de él.

círculo el fundamental sino una elipse, con el Sol en un centro, como lo veremos más adelante.

En el siglo XVI Nicolás Copérnico (1473-1543) propuso un esquema heliocéntrico (con el Sol como centro), en el cual la Tierra (junto con los demás planetas) se movía alrededor del Sol (véase la Fig. 1*b*). Aun cuando el esquema de Copérnico parece mucho más sencillo que el de Ptolomeo, no tuvo aceptación inmediata. Copérnico aún creía en la santidad de los círculos, y su uso de los epiciclos y otros esquemas (que no se muestran en la Fig. 1*b*) era casi tan grande como el de Ptolomeo. Sin embargo, al poner al Sol como el centro de las cosas, Copérnico proporcionó el marco de referencia correcto desde el cual pudo desarrollarse nuestra moderna visión del sistema solar.

Para resolver el conflicto entre los esquemas ptolemaico y copernicano, se necesitaron datos de observación más precisos. Tales datos fueron compilados por Tycho Brahe* (1546-1601), que fue el último gran astrónomo en hacer observaciones sin el uso de un telescopio. Sus datos sobre los movimientos planetarios fueron analizados e interpretados por Johannes Kepler (1571-1630), quien había sido asistente de Brahe. Kepler encontró importantes regularidades en el movimiento de los planetas, lo cual le condujo a desarrollar tres leyes (que se estudian en la sección 16-8) que rigen el movimiento de los planetas.

Las leyes de Kepler mostraron la gran sencillez con que podían describirse los movimientos planetarios al considerar al Sol como el cuerpo central, si abandonamos la noción de círculos perfectos en que se basaban tanto el sistema de Ptolomeo como el de Copérnico. Sin embargo, las leyes de Kepler eran empíricas; simplemente describían los movimientos observados de los planetas sin ninguna base en términos de fuerzas.† Por lo tanto, constituyó un enorme triunfo el que Newton fuera capaz más tarde de derivar las leyes de Kepler a partir de sus leyes del movimiento y su ley de la gravitación, la cual especificaba la fuerza que actúa entre cada planeta y el Sol.

Así pues, Newton pudo explicar el movimiento de los planetas en el sistema solar y de los cuerpos que caían en las cercanías de la Tierra con un concepto común. En efecto, él unificó en una sola teoría las ciencias anteriormente separadas de la mecánica terrestre y de la mecánica celeste. El significado científico real del trabajo de Copérnico radica en el hecho de que la teoría heliocéntrica abrió el camino para esta síntesis. Posteriormente, bajo la hipótesis de que la Tierra gira sobre sí misma y alrededor del Sol, fue posible explicar fenómenos diversos tales como el movimiento diario y anual aparente de las estrellas, el aplastamiento de la Tierra a partir de su forma esférica, el comportamiento de los vientos alisios, y muchas otras observaciones que no podrían ser explicadas tan fácilmente en una teoría geocéntrica.

El desarrollo histórico de la teoría gravitatoria puede ser visto como el ejemplo modelo de la manera en que el método de la investigación científica conduce a la comprensión y al conocimiento. Copérnico proporcionó el marco de referencia apropiado para visualizar el problema, y Brahe suministró datos experimentales sistemáticos y precisos. Kepler usó los datos para proponer algunas leyes empíricas, y Newton propuso una ley de fuerza universal a partir de la cual pudieran derivarse las leyes de Kepler. Por último, Einstein llegó a una nueva teoría que podía explicar ciertas pequeñas discrepancias en la teoría newtoniana.

* Véase "Copernicus and Tycho", por Owen Gingerich, *Scientific American*, diciembre de 1973, pág. 86.

† Véase "How Did Kepler Discover His First Two Laws", por Curtis Wilson, *Scientific American*, marzo de 1972, pág. 92.

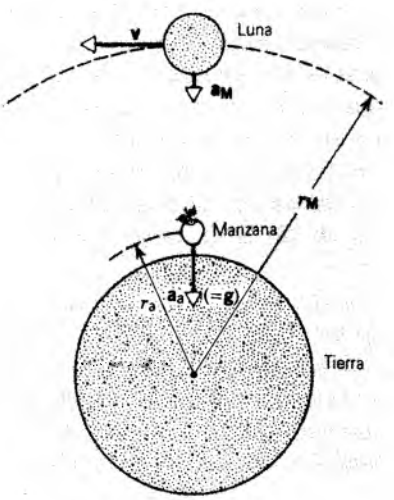



**Figura 2** Tanto la Luna como la manzana son atraídas hacia el centro de la Tierra. La diferencia en sus movimientos surge de que la Luna tiene la suficiente velocidad tangencial $v$ para mantener una órbita circular.

## 16-2 NEWTON Y LA LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

En 1665 Newton, a los 23 años de edad, dejó la Universidad de Cambridge para trasladarse a Lincolnshire cuando aquélla tuvo que clausurarse a causa de la peste. Unos 50 años más tarde escribió: "En el mismo año (1665) comencé a pensar que la gravedad se extendía también a la órbita de la Luna ... y después de haber comparado la fuerza necesaria para mantener a la Luna en su órbita con la fuerza de la gravedad en la superficie de la Tierra, les encontré una respuesta bastante semejante."

Un joven amigo de Newton, William Stukeley, escribió acerca de una ocasión en que, tomando la merienda con Newton bajo unos manzanos, Newton comentó que el escenario en que se hallaban era el mismo que cuando concibió la idea de la gravitación. "Fue ocasionado por la caída de una manzana estando él sentado mientras meditaba, ... y entonces, poco a poco, comenzó a aplicar esta propiedad de la gravitación al movimiento de la Tierra y a los cuerpos celestes... " (véase la Fig. 2).

Podemos calcular la aceleración de la Luna hacia la Tierra a partir de su periodo de revolución y del radio de su órbita. Obtenemos 0.0027 m/s$^2$ (véase el problema muestra 5, capítulo 4). Este valor es aproximadamente 3600 veces menor que $g$, la aceleración de la caída libre en la superficie de la Tierra. Newton, guiándose por la tercera ley de Kepler (véase el problema 58), visualizó esta diferencia suponiendo que la aceleración de un cuerpo al caer es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a la Tierra.

Surge de inmediato la pregunta de qué queremos decir por "distancia a la Tierra". Newton llegó finalmente a considerar que cada partícula de la Tierra contribuía a la atracción gravitatoria que tenía sobre otros cuerpos. Tuvo la audacia de suponer que la masa de la Tierra podría ser tratada como si estuviese toda ella concentrada en su centro. (Véase la sección 16-5.)

Podemos tratar a la Tierra como una partícula con respecto al Sol, por ejemplo. Sin embargo, no es obvio que podamos tratar a la Tierra como una partícula respecto a una manzana situada a sólo un par de metros sobre su superficie. Si asumimos esta hipótesis, un cuerpo que caiga cerca de la superficie de la Tierra está a una distancia de un radio terrestre (6400 km) del centro efectivo de atracción de la Tierra. La Luna está a unos 380,000 km de distancia. El inverso de los cuadrados de la razón de estas distancias es $(6400/380{,}000)^2 = 1/3600$, de acuerdo con la razón de las aceleraciones de la Luna y de la manzana. En las palabras de Newton citadas anteriormente, en verdad coinciden en una "respuesta bastante parecida".

Existen tres ámbitos entrelazados dentro de los cuales podemos estudiar la gravitación. (1) La atracción gravitatoria entre dos bolas de boliche, por ejemplo, aunque medible según técnicas sensibles, es demasiado débil como para caber dentro de nuestras percepciones sensoriales ordinarias. (2) La atracción de la Tierra sobre nosotros y los objetos que nos rodean es una característica que controla nuestras vidas, de la cual podemos escapar sólo con medidas extremas. Los diseñadores del programa espacial no descuidan por ningún momento la fuerza gravitatoria. (3) En la escala del sistema solar y de la interacción de las estrellas y las galaxias, la gravitación es por mucho la fuerza dominante. Es notable que las tres situaciones puedan ser descritas por la misma ley de fuerza.

Esta ley de fuerza, la ley de la gravitación universal de Newton, puede ser enunciada como sigue:

> *Todas las partículas del universo se atraen entre sí con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La dirección de esta fuerza es a lo largo de la línea que las une.*

Así pues, la magnitud de la fuerza gravitatoria $F$ que ejercen entre sí dos partículas de masas $m_1$ y $m_2$ separadas por una distancia $r$ es

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (1)$$

Aquí $G$, llamada constante gravitatoria, es una constante universal que tiene el mismo valor para todos los pares de partículas.

Es importante observar que las fuerzas gravitatorias entre dos partículas son un par acción-reacción. La prime-

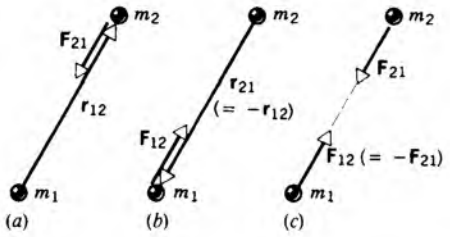



**Figura 3** (*a*) La fuerza $\mathbf{F}_{21}$ ejercida sobre $m_2$ (por $m_1$) tiene dirección opuesta al vector de posición, $\mathbf{r}_{12}$, de $m_2$ respecto a $m_1$. (*b*) La fuerza $\mathbf{F}_{12}$ ejercida sobre $m_1$ (por $m_2$) tiene dirección opuesta al vector de posición, $\mathbf{r}_{21}$, de $m_1$ respecto a $m_2$. (*c*) $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, siendo las fuerzas un par acción-reacción.

ra partícula ejerce una fuerza sobre la segunda partícula que se dirige hacia la primera partícula a lo largo de la línea que las une. De igual modo, la segunda partícula ejerce una fuerza sobre la primera partícula que se dirige hacia la segunda partícula a lo largo de la línea que las une. Estas fuerzas son de igual magnitud pero se oponen directamente.

La constante universal $G$ no debe confundirse con la $g$ que es la aceleración de un cuerpo que sale de la gravedad de la Tierra. La constante $G$ tiene las dimensiones $L^3/MT^2$ y es un escalar, mientras que $g$ es la magnitud de un vector, tiene las dimensiones $L/T^2$, y no es ni universal ni constante.

Nótese que la ley de la gravitación universal de Newton no es una ecuación definitoria de cualquiera de las cantidades físicas (fuerza, masa, o longitud) contenida en ella. De acuerdo con nuestro programa de la mecánica clásica en el capítulo 5, la fuerza se define a partir de la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. La fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula se entiende que está relacionada de una manera simple con las propiedades medibles de una partícula y de su entorno. La ley de la gravitación universal tiene esta clase de simplicidad. Una vez que ha sido determinada $G$ a partir de un experimento para cualquier par de cuerpos, ese valor de $G$ puede ser usado en la ley de la gravitación para determinar la fuerza gravitatoria entre cualquier otro par de cuerpos.

Nótese también que la ecuación 1 expresa la fuerza entre *partículas*. Si queremos determinar la fuerza entre cuerpos extensos, como, por ejemplo, la Tierra y la Luna, debemos considerar a cada cuerpo como compuesto de partículas. Así pues, debe calcularse la interacción entre todas las partículas. El cálculo integral hace posible tal cálculo. Los motivos que Newton tuvo para desarrollar el cálculo surgieron en parte del deseo de resolver tales problemas. Aunque, en general, y para propósitos gravitatorios, es incorrecto suponer que toda la masa de un cuerpo pueda estar concentrada en su centro de masa, la hipótesis *es correcta para cuerpos esféricamente simétricos*. A menudo usamos este resultado, el cual demostraremos en la sección 16-5.

La experimentación ofrece pruebas muy obvias de que la fuerza gravitatoria entre dos partículas es independiente de la presencia de otros cuerpos y de las propiedades del medio en que están inmersas las partículas. La fuerza gravitatoria entre dos bolas de boliche permanece inmutable ya sea que las bolas estén en el espacio libre, o bajo el agua, o separadas por un muro de tabique. De hecho, las "pantallas contra la gravedad" de la ciencia-ficción carecen de base.

La ley de la gravitación universal es una *ley vectorial*, la cual puede ser expresada como sigue. Hagamos que el vector de posición $\mathbf{r}_{12}$ apunte desde la partícula de masa $m_1$ a la partícula de masa $m_2$, como lo muestra la figura 3*a*. La fuerza gravitatoria $\mathbf{F}_{21}$, ejercida sobre $m_2$ por $m_1$, está dada en dirección y magnitud por la relación vectorial

$$\mathbf{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}, \qquad (2a)$$

donde $\mathbf{r}_{12}$ es la magnitud de $\mathbf{r}_{12}$. El signo menos en la ecuación 2*a* muestra que $\mathbf{F}_{21}$ apunta en una dirección opuesta a $\mathbf{r}_{12}$; esto es, la fuerza gravitatoria es de atracción, experimentando $m_2$ una fuerza dirigida hacia $m_1$. El vector de posición dividido entre su propia magnitud, $\mathbf{r}_{12}/r_{12}$, es simplemente un vector unitario $\mathbf{u}$, en dirección del vector, así que la última parte de la ecuación 2*a* muestra la naturaleza de inverso de los cuadrados de la fuerza. La fuerza ejercida sobre $m_1$ por $m_2$ (véase la Fig. 3*b*) es, similarmente,

$$\mathbf{F}_{12} = -G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^3}\mathbf{r}_{21} = -G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^2}\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}}. \qquad (2b)$$

Nótese en las ecuaciones 2*a* y 2*b* que $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$ (véanse las Figs. 3*a* y 3*b*), de modo que, como lo esperábamos, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ (véase la Fig. 3*c*); esto es, las fuerzas gravitatorias que actúan sobre los dos cuerpos forman un par acción-reacción.

## 16-3 LA CONSTANTE GRAVITATORIA *G*

Puede parecer que determinar el valor de $G$ es una tarea sencilla. Todo lo que necesitamos hacer es medir la fuerza gravitatoria $F$ entre dos masas conocidas $m$ y $m_2$ separadas por una distancia conocida $r$. Podemos calcular entonces $G$ a partir de la ecuación 1.

Un sistema a gran escala como el de la Tierra y la Luna o la Tierra y el Sol no sirven para determinar el valor de $G$. Las distancias son tan grandes que los objetos pueden ser considerados aproximadamente como masas puntuales, pero los valores de las masas no se determinan en forma independiente. De hecho, las masas de esos cuerpos, como pronto lo veremos, se determinan usando el valor de $G$.

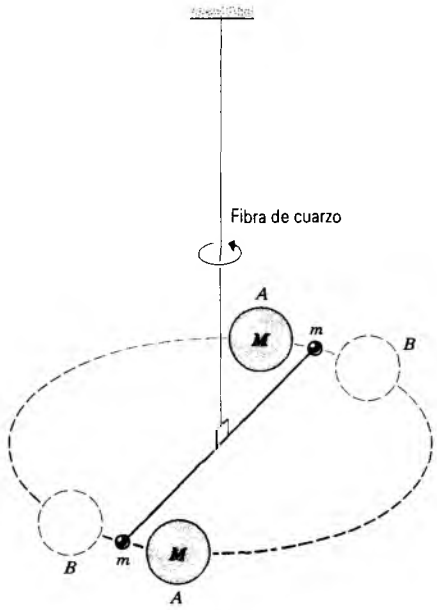



**Figura 4** Vista esquemática del aparato usado en 1798 por Henry Cavendish para medir la constante gravitatoria *G*. Las esferas grandes de masa *M*, mostradas en la posición *AA*, pueden también moverse a la posición *BB*.

En vez de esto debemos basarnos en mediciones a pequeña escala para lo que usamos dos muestras de laboratorio de masas conocidas y medimos la fuerza entre ellos. La fuerza es muy débil y las marcas deben colocarse cerca entre sí para hacer que la fuerza sea lo más grande posible. Al hacerlo así, no podemos considerar a las masas como concentradas en puntos por lo que la ecuación 1 no es aplicable. Sin embargo, hay un caso especial en que podemos usar la ecuación 1 para objetos grandes. Como demostraremos en la sección 16-5, para distribuciones esféricas de la masa podemos considerar el objeto como una masa puntual concentrada en su centro. Esto *no* es una aproximación sino una relación exacta.

La primera determinación en laboratorio del valor de *G*, a partir de la fuerza entre masas esféricas situadas entre sí a corta distancia, fue realizada por Henry Cavendish en 1798. Él usó un método basado en la balanza de torsión, que se ilustra en la figura 4. Dos bolas pequeñas, cada una de masa *m*, están unidas a los extremos de una barra ligera. Esta mancuerna rígida se suspende, con su eje hrizontal, de una fina fibra vertical. Dos bolas grandes, cada una de masa *M*, se colocan cerca de los extremos de la mancuerna, en lados opuestos. Cuando las masas grandes están en las posiciones *A*, atraen a las masas pequeñas de acuerdo con la ley de la gravitación, y sobre la mancuerna se ejerce una torca que la hace girar en sentido antihorario vista desde arriba. La barra llega a una posición de equilibrio bajo las acciones opuestas de la torca gravitatoria, ejercida por las masas *M* y la torca de restitución ejercida por la fibra. Cuando las masas grandes están en las posiciones *B*, la mancuerna gira en sentido horario hacia una nueva posición de equilibrio. El ángulo $2\theta$, a través del cual se retuerce la fibra cuando las bolas se mueven de una posición (*AA*) a la otra (*BB*), se mide observando la desviación de un haz de luz reflejado en un pequeño espejo unido a la fibra. A partir del valor de $\theta$ y la constante de torsión de la fibra, determinada al medir su periodo de oscilación (véase la seccion 15-5), puede determinarse la torca y obtenerse la fuerza gravitatoria. Conociendo los valores de las masas *m* y *M* y la separación de sus centros, podemos calcular *G*. (Véase el problema muestra 1.)

El experimento original de Cavendish dio un valor para *G* de $6.75 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$. En los casi 200 años desde los tiempos de Cavendish, se ha usado la misma técnica básica de la balanza de torsión para repetir esta medición muchas veces, conduciendo al valor de *G* aceptado actualmente,

$$G = 6.67259 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2},$$

con una incertidumbre de $\pm 0.00085 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ o alrededor de ±0.013%. En comparación con los resultados de la medición de otras constantes físicas, esta precisión no es excepcionalmente notable; por ejemplo, la velocidad de la luz fue medida con una precisión de alrededor de $10^{-8}$% antes de que su valor fuese establecido como un patrón. Es difícil mejorar sustancialmente la precisión del valor medido de *G* a causa de su pequeña magnitud y el valor correspondientemente pequeño de la fuerza entre los dos objetos de nuestros experimentos de laboratorio. Si usamos dos esferas de plomo de 10 cm de diámetro (y 6 kg de masa), la fuerza gravitatoria máxima entre ellas cuando están lo más cerca posible es de alrededor de $2 \times 10^{-7}$ N, que aproximadamente corresponde al peso de un trozo de papel de 1 $\mathrm{mm^2}$ de área.

Esta dificultad para medir *G* es desafortunada, ya que la gravitación tiene un papel esencial en las teorías del origen y la estructura del universo. Por ejemplo, nos gustaría saber si *G* es realmente una constante. ¿Cambia con el tiempo? ¿Depende del estado químico o físico de las masas? ¿Depende de su temperatura? A pesar de muchas investigaciones experimentales, hasta ahora no han sido confirmadas tales variaciones de *G* sin ambigüedad; sin embargo, las mediciones continúan depurándose y mejorándose, y siguen adelante las pruebas experimentales.*

* Para una lista de referencias de las mediciones de *G*, véase "The Newtonian Gravitational Constant", por George T. Gillies, *Metrologia*, vol. 24, pág. 1, 1987. Un estudio de estos experimentos y de otros que prueban la ley del inverso de los cuadrados puede ser hallada en "Experiments on Gravitation", por Alan Cook, *Reports on Progress in Physics*, vol. 51, pág. 707, 1988.

La gran fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre todos los cuerpos cerca de su superficie se debe a la gran masa de la Tierra. De hecho, la masa de la Tierra puede ser determinada a partir de la ley de la gravitación universal y el valor de $G$ calculado a partir del experimento de Cavendish. Por esta razón se dice que Cavendish ha sido la primera persona que "pesó" la Tierra. (De hecho, el título del escrito de Cavendish para describir sus experimentos se refería no a la medición de $G$, sino a la determinación de la densidad de la Tierra a partir de su peso y volumen.) Consideremos a la Tierra, de masa $M_T$, y a un objeto en su superficie, de masa $m$. La fuerza de atracción está dada por

$$F = mg \quad \text{y} \quad F = \frac{GmM_T}{R_T^2}.$$

Aquí $R_T$ es el radio de la Tierra, el cual es la separación de los dos cuerpos, y $g$ es la aceleración en caída libre en la superficie de la Tierra. Al combinar estas ecuaciones obtenemos

$$M_T = \frac{gR_T^2}{G} = \frac{(9.80\ \text{m/s}^2)(6.37 \times 10^6\ \text{m})^2}{6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2}$$
$$= 5.97 \times 10^{24}\ \text{kg}.$$

Dividiendo la masa de la Tierra entre su volumen, obtenemos que la densidad promedio de la Tierra es de 5.5 g/cm$^3$, o alrededor de 5.5 veces la densidad del agua. La densidad promedio de las rocas de la superficie de la Tierra es mucho menor que este valor. Concluimos que el interior de la Tierra contiene material de una densidad mayor de 5.5 g/cm$^3$. ¡El experimento de Cavendish nos dio información acerca del núcleo de la Tierra! (Véase el problema 26.)

**Problema muestra 1** En el aparato de Cavendish que se ilustra en la figura 4, supongamos que $M$ = 12.7 kg y $m$ = 9.85 g. La longitud $L$ de la barra que une a las dos pequeñas esferas es de 52.4 cm. La barra y la fibra forman un péndulo de torsión cuya inercia rotatoria $I$ respecto al eje central es de $1.25 \times 10^{-3}$ kg · m$^2$ y cuyo periodo de oscilación $T$ es de 769 s. El ángulo $2\theta$ entre las dos posiciones de equilibrio de la barra es de 0.516° cuando la distancia $R$ entre los centros de las esferas grande y pequeña es de 10.8 cm. ¿Cuál es el valor de la constante gravitatoria que resulta de estos datos?

**Solución** Hallemos primero a $\kappa$, la constante de torsión de la fibra. El periodo de oscilación torsionante está dado por la ecuación 21 del capítulo 15,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}.$$

Resolviendo para $\kappa$ nos da

$$\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{(4\pi^2)(1.25 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)}{(769\ \text{s})^2} = 8.34 \times 10^{-8}\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

La barra está en equilibrio bajo la influencia de dos torcas opuestas, resultantes de las acciones de la fibra y de las esferas grandes. La magnitud de la torca ejercida por la fibra se relaciona con el desplazamiento angular $\theta$ de acuerdo con la ecuación 17 del capítulo 15,

$$\tau = \kappa\theta = (8.34 \times 10^{-8}\ \text{N}\cdot\text{m})\left(\frac{0.516^\circ}{2} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{360^\circ}\right)$$
$$= 3.75 \times 10^{-10}\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

Esta torca está equilibrada por la torca total debida a la fuerza gravitatoria ejercida por cada esfera grande sobre la esfera pequeña vecina. La fuerza $F$ sobre cada esfera pequeña es igual a $GMm/R^2$, y el brazo del momento es la mitad de la longitud $L$ de la barra. La torca gravitatoria total es entonces

$$\tau = (2F)(L/2) = FL = \frac{GMmL}{R^2}.$$

Resolviendo para $G$ nos da

$$G = \frac{\tau R^2}{MmL} = \frac{(3.75 \times 10^{-10}\ \text{N}\cdot\text{m})(0.108\ \text{m})^2}{(12.7\ \text{kg})(0.00985\ \text{kg})(0.524\ \text{m})}$$
$$= 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2.$$

**Problema muestra 2** Calcule las fuerzas gravitatorias (*a*) entre dos bolas de boliche de 7.3 kg separadas por 0.65 m entre sus centros y (*b*) entre la Tierra y la Luna.

**Solución** (*a*) Usando la ecuación 1, tenemos

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(7.3\ \text{kg})(7.3\ \text{kg})}{(0.65\ \text{m})^2}$$
$$= 8.4 \times 10^{-9}\ \text{N}.$$

(*b*) Usando los datos de la Tierra y de la Luna que aparecen en el apéndice C, hallamos

$$F = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(7.36 \times 10^{22}\ \text{kg})}{(3.82 \times 10^8\ \text{m})^2}$$
$$= 2.01 \times 10^{20}\ \text{N}.$$

## 16-4 LA GRAVEDAD CERCA DE LA SUPERFICIE DE LA TIERRA

Supongamos, por el momento, que la Tierra es esférica y que su densidad depende solamente de la distancia radial desde su centro. La magnitud de la fuerza gravitatoria que actúa sobre una partícula de masa $m$, situada en un punto externo a una distancia $r$ desde el centro de la Tierra, puede entonces expresarse, partiendo de la ecuación 1, como:

$$F = G\frac{M_Tm}{r^2},$$

donde $M_T$ es la masa de la Tierra. Esta fuerza gravitatoria puede también expresarse, partiendo de la segunda ley de Newton, como:

$$F = mg_0.$$

**TABLA 1** VARIACIÓN DE $g_0$ CON LA ALTITUD

| *Altitud (km)* | $g_0$ *(m/s²)* |
|---|---|
| 0 | 9.83 |
| 5 | 9.81 |
| 10 | 9.80 |
| 50 | 9.68 |
| 100 | 9.53 |
| 400† | 8.70 |
| 35,700‡ | 0.225 |
| 380,000§ | 0.0027 |

† Altitud típica de una nave espacial.
‡ Altitud de los satélites de comunicación.
§ Distancia a la Luna.

Aquí $g_0$ es la aceleración en caída libre debida únicamente a la atracción gravitatoria de la Tierra. Al combinar las dos ecuaciones de arriba nos da

$$g_0 = \frac{GM_T}{r^2}. \qquad (3)$$

La tabla 1 muestra algunos valores de $g_0$ en diversas altitudes sobre la superficie de la Tierra, calculadas a partir de esta ecuación. Nótese que, contrariamente a la impresión de que la gravedad desciende a cero en un satélite en órbita, hallamos que $g_0 = 8.7$ m/s² para altitudes típicas de las naves espaciales.

La Tierra real difiere de nuestro modelo de la Tierra de tres maneras.

**1.** *La corteza de la Tierra no es uniforme.* Existen variaciones de densidad locales en todas partes. La medición precisa de las variaciones locales en la aceleración en caída libre da información que es útil, por ejemplo, en las exploraciones de petróleo. La figura 5 muestra un levantamiento de la gravedad en un domo salino subterráneo. Los contornos unen puntos con la misma aceleración en caída libre, trazados como desviaciones de un valor de referencia conveniente. La unidad, llamada así en honor de Galileo, es el miligal, donde 1 gal = $10^3$ mgal = 1 cm/s².

**2.** *La Tierra no es una esfera.* La Tierra es aproximadamente un elipsoide, achatada en los polos y abultada en el ecuador. El radio ecuatorial de la Tierra es mayor que su radio polar en 21 km. Así pues, un punto en los polos está más cerca del núcleo denso de la Tierra que un punto en el ecuador. Cabría esperar que la aceleración en caída libre aumentara cuando se va al nivel del mar, desde el ecuador a los polos. La figura 6 muestra qué es lo que sucede en realidad. Los valores medidos de $g$ en esta figura incluyen tanto el efecto del abultamiento ecuatorial como los efectos resultantes de la rotación de la Tierra.

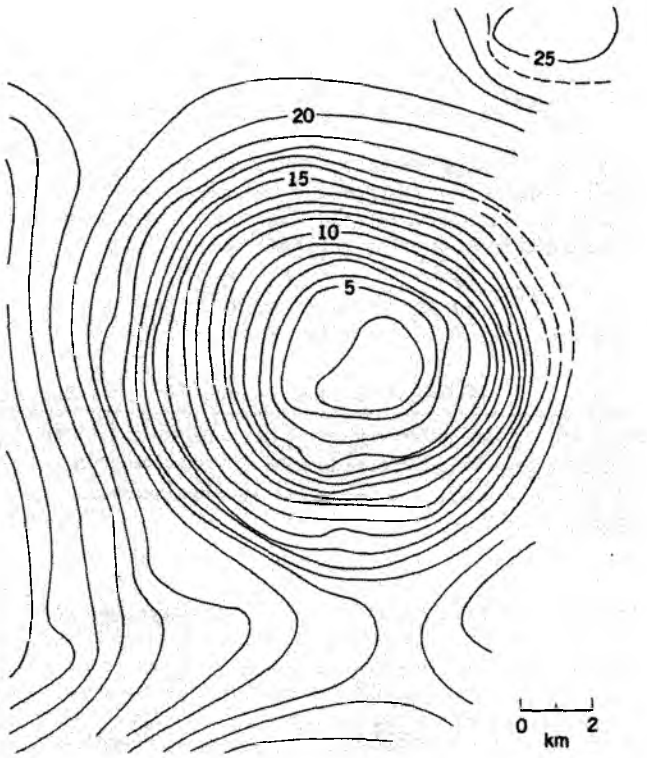



**Figura 5** Un levantamiento gravimétrico en la superficie en un domo salino subterráneo en Dinamarca. Las líneas unen puntos con el mismo valor de $g$. La diferencia entre el valor de $g$ en una línea y el valor en el centro está en unidades miligal, equivalentes a $10^{-5}$ m/s² o alrededor de $10^{-6}$ $g$. Está claro que hay aquí algo enterrado que ejerce una fuerza centrada en esta región. Suele suceder que a menudo se halla petróleo en una formación como ésta.

**3.** *La Tierra está girando.* La figura 7*a* muestra a la Tierra girando desde una posición en el espacio por encima del polo Norte. Un guacal de masa $m$ descansa sobre una báscula de plataforma en el ecuador. Este guacal está en un movimiento circular uniforme debido a la rotación de la Tierra y se acelera hacia el centro de la Tierra. La fuerza resultante que actúa sobre él debe entonces apuntar en esa dirección.

La figura 7*b* es un diagrama de cuerpo libre del guacal. La Tierra ejerce una atracción gravitatoria hacia abajo de magnitud $mg_0$. La báscula de plataforma empuja hacia arriba al guacal con una fuerza $mg$, el peso del guacal. Estas dos fuerzas no se equilibran realmente, y así tenemos, partiendo de la segunda ley de Newton,

$$F = mg_0 - mg = ma$$

o sea

$$g_0 - g = a,$$

donde $a$ es la aceleración centrípeta del guacal. Para $a$ podemos escribir $\omega^2 R_T$, donde $\omega$ es la velocidad angu-

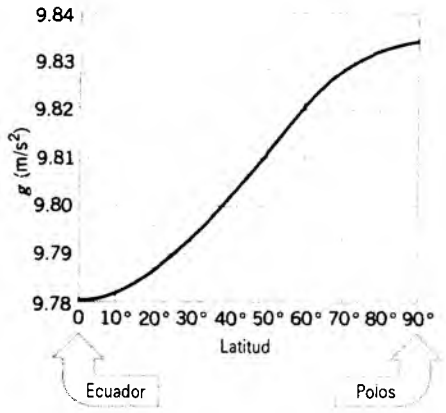



**Figura 6** La variación de $g$ con la latitud al nivel del mar. Alrededor del 65% del efecto se debe a la rotación de la Tierra; el 35% restante se debe a la forma ligeramente achatada de la Tierra.

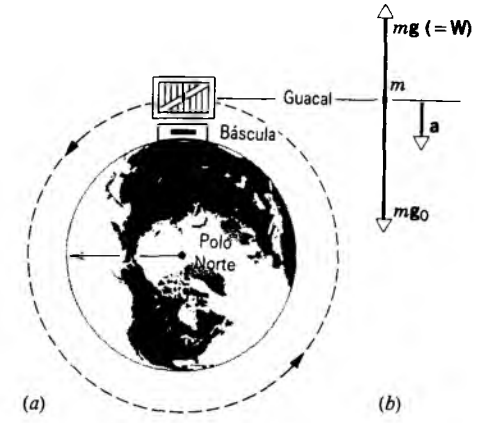



**Figura 7** (*a*) Un guacal sobre la Tierra en rotación, descansa sobre una báscula de plataforma situada en el ecuador. La vista es a lo largo del eje rotatorio de la Tierra, viendo hacia abajo al polo norte. (*b*) Un diagrama de cuerpo libre del guacal. El guacal está en un movimiento circular uniforme y, por lo mismo, se acelera hacia el centro de la Tierra.

lar de la Tierra y $R_T$ es su radio. Esta sustitución nos lleva a

$$g_0 - g = \omega^2 R_T = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_T , \qquad (4)$$

donde $T = 24$ h, es el periodo de rotación de la Tierra. Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación 4 nos da

$$g_0 - g = 0.034 \text{ m/s}^2.$$

Vemos que $g$, la aceleración en caída libre medida en el ecuador de la Tierra mientras gira, es menor que $g_0$, el resultado esperado si la Tierra no estuviese girando, por únicamente 0.034/9.8, ó 0.35%. El efecto disminuye cuando se va a latitudes mayores y se anula en los polos.

**Problema muestra 3** (*a*) Una estrella neutrónica es una estrella colapsada de densidad extraordinariamente alta. La estrella pulsante (pulsar) en la nebulosa del Cangrejo es la más conocida de muchos de estos ejemplos. Consideremos una estrella neutrónica con una masa $M$ igual a la masa del Sol, $1.99 \times 10^{30}$ kg, y un radio $R$ de 12 km. ¿Cuál es la aceleración en caída libre en su superficie? Desprecie los efectos rotatorios. (*b*) El asteroide Ceres tiene una masa de $1.2 \times 10^{21}$ kg y un radio de 470 km. ¿Cuál es la aceleración en caída libre en su superficie?

**Solución** (*a*) Partiendo de la ecuación 3 tenemos

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(1.99 \times 10^{30}\ \text{kg})}{(12{,}000\ \text{m})^2}$$
$$= 9.2 \times 10^{11}\ \text{m/s}^2.$$

Aun cuando los pulsares giran a velocidad extraordinaria, los efectos rotatorios tienen solamente una influencia pequeña sobre el valor de $g$, a causa del pequeño tamaño de esas estrellas.

(*b*) En el caso del asteroide Ceres, tenemos

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(1.2 \times 10^{21}\ \text{kg})}{(4.7 \times 10^5\ \text{m})^2}$$
$$= 0.36\ \text{m/s}^2.$$

¡Existe un acentuado contraste entre las fuerzas gravitatorias en la superficie de estos dos cuerpos!

## 16-5 EFECTO GRAVITATORIO DE UNA DISTRIBUCIÓN ESFÉRICA DE LA MATERIA *(Opcional)*

Probaremos ahora un resultado que ya hemos utilizado: *un cuerpo esféricamente simétrico atrae partículas del exterior como si su masa estuviese concentrada en su centro.* Comenzamos considerando un cascarón esférico uniformemente denso de masa $M$ cuyo espesor $t$ es pequeño en comparación con su radio $R$ (figura 8). Buscamos la fuerza gravitatoria que ejerce sobre una partícula externa $P$ de masa $m$.

Suponemos que cada partícula del cascarón ejerce sobre $P$ una fuerza que es propocional a la masa de la partícula, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre esa partícula del casco y $P$, y dirigida a lo largo de la línea que las une. Debemos entonces obtener la fuerza resultante sobre $P$, atribuible a todas las partes del cascarón esférico.

Una pequeña parte del cascarón en $A$ atrae a $m$ con una fuerza $\mathbf{F}_A$. Una pequeña parte de igual masa en $B$, igualmente alejada de $m$ pero diametralmente opuesta a $A$, atrae a $m$ con una fuerza $\mathbf{F}_B$. La resultante de estas dos fuerzas que actúan sobre $m$ es $\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$. Cada una de estas fuerzas tiene una componente $F \cos \alpha$ a lo largo del eje de simetría y una componente $F$ sen $\alpha$ perpendicular al eje. Las componentes perpendiculares de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ se cancelan, como en el caso de todos los pares de puntos opuestos. Para hallar la fuerza resultante sobre $P$ para todos los puntos del cascarón, necesitamos solamente considerar las componentes paralelas al eje.

Tomemos como elemento de masa del cascarón a una faja circular $dM$. Su radio es $R$ sen $\theta$, su longitud es $2\pi(R \text{ sen } \theta)$, su anchura es $R\, d\theta$, y su espesor es $t$. De aquí que tenga un volumen

$$dV = 2\pi t R^2 \text{ sen } \theta\, d\theta.$$

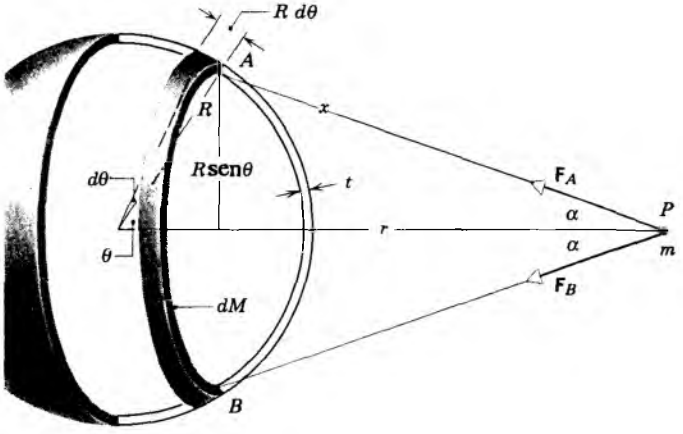



**Figura 8** Atracción gravitatoria de una sección de un cascarón esférico de materia sobre una partícula de masa $m$ en $P$.

Sea $\rho$ la densidad del cascarón, de modo que la masa de la faja es

$$dM = \rho\, dV = 2\pi t\rho R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta.$$

Cada partícula de la faja, tal como la de masa $dm_A$ en $A$, atrae a $P$ con una fuerza que tiene una componente axial

$$dF_A = G\frac{m\, dm_A}{x^2}\cos\alpha.$$

Sumando las contribuciones de todas las partículas del anillo nos da

$$dF_A + dF_B + \cdots = \frac{Gm}{x^2}(\cos\alpha)(dm_A + dm_B + \cdots)$$

o

$$dF = \frac{Gm\, dM}{x^2}\cos\alpha,$$

donde $dM$ es la masa total del anillo y $dF$ es la fuerza total sobre $m$ ejercida por el anillo.

Sustituyendo a $dM$, obtenemos

$$dF = 2\pi G t\rho m R^2\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{x^2}\cos\alpha. \tag{5}$$

Las variables $x$, $\alpha$, y $\theta$ se relacionan. En la figura vemos que

$$\cos\alpha = \frac{r - R\cos\theta}{x}. \tag{6}$$

Usando la ley de los cosenos, $x^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$, obtenemos

$$R\cos\theta = \frac{r^2 + R^2 - x^2}{2r}. \tag{7}$$

Al diferenciar la ecuación 7 nos da

$$\operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{x}{rR}\, dx. \tag{8}$$

Ponemos ahora la ecuación 7 en la ecuación 6 y luego ponemos a las ecuaciones 6 y 8 en la ecuación 5. Como resultado eliminamos a $\theta$ y $\alpha$ y obtenemos

$$dF = \frac{\pi G t\rho m R}{r^2}\left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1\right)dx. \tag{9}$$

Esta es la fuerza ejercida por la faja circular $dM$ sobre la partícula $m$.

Debemos ahora considerar a cada elemento de masa en el cascarón al sumar todas las fajas circulares de todo el cascarón. Esto implica una integración sobre el cascarón con respecto a la variable $x$, la cual va desde un valor mínimo $r - R$ hasta un valor máximo $r + R$. La integral necesaria es

$$\int_{r-R}^{r+R}\left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1\right)dx = \left[\frac{-(r^2 - R^2)}{x} + x\right]\Bigg|_{r-R}^{r+R} = 4R,$$

la cual da para la fuerza, usando la ecuación 9,

$$F = \int_{r-R}^{r+R} dF = \frac{\pi G t\rho m R}{r^2}(4R) = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{10}$$

donde

$$M = 4\pi R^2 t\rho$$

es la masa total del cascarón. La ecuación 10 es exactamente el mismo resultado que obtendríamos para la fuerza entre *partículas* de masas $M$ y $m$ separadas por una distancia $r$. Por lo tanto, hemos probado el importante resultado general siguiente:

> *Un cascarón esférico de densidad uniforme atrae a una masa puntual externa como si toda la masa del cascarón estuviese concentrada en su centro.*

Una esfera sólida puede considerarse como compuesta de un gran número de cascarones concéntricos. Si cada cascarón esférico tiene una densidad uniforme, aunque diferentes cascarones puedan tener densidades diferentes, se aplica el mismo resultado a la esfera sólida. De aquí que cuerpos como la Tierra, la Luna, o el Sol, en la medida en que son tales esferas, pueden considerarse gravitatoriamente como partículas puntuales para cuerpos afuera de ellos.

Téngase en cuenta que nuestra demostración se aplica solamente a esferas y únicamente cuando la densidad de la esfera es uniforme o es una función del radio únicamente.

## Fuerza sobre una partícula interior

Demostraremos ahora otro importante resultado: la fuerza ejercida por un cascarón esférico sobre una partícula situada *en su interior* es *cero*. La figura 9 muestra a la partícula situada en el punto $P$ adentro del cascarón. Nótese que $r$ es ahora más pequeño que $R$. La integración sobre $x$, ahora con los límites $R - r$ a $r + R$, da

$$\int_{R-r}^{r+R}\left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1\right)dx = \left[\frac{-(r^2 - R^2)}{x} + x\right]\Bigg|_{R-r}^{r+R} = 0,$$

y por lo tanto $F = 0$. Así pues, obtenemos otro resultado general:

> *Un cascarón esférico uniforme de materia no ejerce ninguna fuerza gravitatoria sobre una partícula ubicada dentro de él.*

Este último resultado, aunque no sea obvio, es aceptable porque los elementos de masa del cascarón a la izquierda y a la derecha de $m$ en la figura 9 ejercen ahora fuerzas en direcciones opuestas sobre $m$. Existe más masa a la izquierda que mueve a

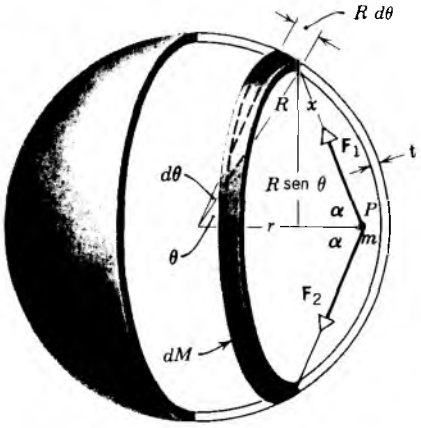



**Figura 9** Atracción gravitatoria de una sección de un cascarón esférico de materia sobre una partícula de masa $m$ situada en un punto $P$ adentro del cascarón.

$m$ hacia la izquierda, pero la masa más pequeña de la derecha está más cerca de $m$; los dos efectos se cancelan exactamente sólo si la fuerza varía precisamente según un cuadrado inverso de la distancia que separa a las dos partículas. (Véase el problema 29.) En los capítulos sobre electricidad se estudiarán las importantes consecuencias de este resultado. Allí veremos que la fuerza eléctrica entre partículas cargadas depende también inversamente del cuadrado de la distancia entre ellas.

El resultado anterior para una partícula situada adentro de un cascarón esférico implica que la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre una partícula disminuye a medida que la partícula se halle a mayor profundidad en la Tierra, suponiendo para ésta una densidad constante. A medida que la partícula esté a mayor profundidad, más masa de la Tierra estará en cascarones que son externos a la posición de la partícula, y la fuerza neta sobre la partícula de esos cascarones es cero. La fuerza gravitatoria se convierte en cero en el centro de la Tierra. De aquí que $g$ tendría un máximo en la superficie de la Tierra y decrecería tanto hacia afuera como hacia adentro de ese punto si la Tierra tuviese una densidad constante. ¿Puede usted imaginar una distribución esférica simétrica de la masa de la Tierra que no diese este resultado? (Véase el problema 26.)

**Problema muestra 4** Supongamos que pudiera cavarse un túnel que atravesara la Tierra a lo largo de su diámetro, como se muestra en la figura 10. (*a*) Demuestre que el movimiento de una partícula dejada caer adentro del túnel es un movimiento armónico simple. Desprecie todas las fuerzas de fricción y suponga que la Tierra tiene una densidad uniforme. (*b*) Si se entregara el correo a través de este tubo, ¿cuánto tiempo transcurriría entre el depósito en un extremo y la entrega en el otro extremo?

**Solución** (*a*) La atracción gravitatoria de la Tierra sobre la partícula situada a una distancia $r$ del centro de la Tierra proviene enteramente de esa porción de materia de la Tierra situada en cascarones internos a la posición de la partícula. Los cascarones externos no ejercen ninguna fuerza sobre la partícula. Supongamos que la densidad de la Tierra es uniforme con un valor $\rho$. Entonces la masa $M'$ adentro de una esfera de radio $r$ y volumen $V'$ es

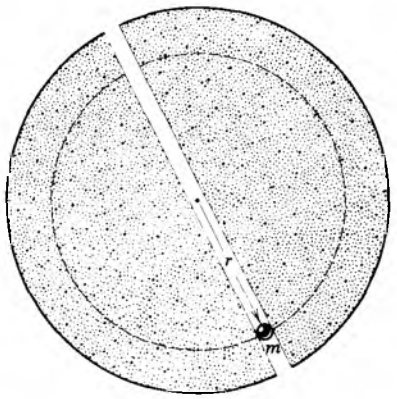



**Figura 10** Problema muestra 4.Una partícula se mueve en un túnel que atraviesa la Tierra.

$$M' = \rho V' = \rho \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Para propósitos gravitatorios, esta masa puede ser tratada como si estuviese concentrada en el centro de la Tierra. De aquí que la componente radial de la fuerza sobre la partícula de masa $m$ sea

$$F = -\frac{GM'm}{r^2}.$$

El signo menos indica que la fuerza es de atracción y, por tanto, dirigida hacia el centro de la Tierra.

Sustituyendo a $M'$, obtenemos

$$F = -G\frac{\rho 4\pi r^3 m}{3r^2} = -\left(G\rho\frac{4\pi m}{3}\right)r = -kr.$$

Aquí $G\rho 4\pi m/3$ es una constante, a la cual hemos llamado $k$. Por lo tanto, la fuerza es proporcional al desplazamiento $r$ pero directamente opuesta. Éste es exactamente el criterio del movimiento armónico simple.

(*b*) El periodo de este movimiento armónico simple es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{G\rho 4\pi m}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

Siendo $\rho = 5.51 \times 10^3$ kg/m$^3$, tenemos

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.51 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)}}$$
$$= 5060\ \text{s} = 84.4\ \text{min}.$$

El tiempo para la entrega es medio periodo, o unos 42 min. Este tiempo es *independiente de la masa del correo*. Puede demostrarse que resultaría el mismo periodo si el túnel fuera cavado a lo largo de cualquier cuerda en lugar de a lo largo del diámetro.

La densidad de la Tierra no es en realidad uniforme. ¿Cuál sería en este problema el efecto si hiciéramos que $\rho$ fuese alguna función de $r$, en lugar de ser una constante?

## Prueba de la ley del inverso de los cuadrados

Como lo discutiremos en la sección 16-8, las leyes de Kepler dan evidencia directa de una fuerza gravitatoria $1/r^2$. Por lo tanto

podemos considerar a la ley $1/r^2$ como bien comprobada para distancias del orden de tamaño del sistema solar ($10^{13}$ m). La teoría general de la relatividad de Einstein explica pequeñas excepciones en el movimiento de los planetas interiores; esta teoría reemplaza a la ley de Newton cuando la fuerza gravitatoria es intensa, pero se reduce a la ley de Newton cuando la fuerza es más débil; véase la sección 16-10.

Por lo tanto, nos gustaría probar la ley $1/r^2$ para las distancias de laboratorio. A causa de que la fuerza es tan débil, es difícil hacer tal prueba repitiendo el experimento de Cavendish con separaciones diferentes entre las masas. Un método más preciso hace uso del anulamiento de la fuerza gravitatoria sobre una partícula de prueba situada dentro de un cascarón esférico. Si pudiéramos aislar a una partícula de prueba, digamos en un brazo de una balanza de torsión, y luego rodearla con un cascarón esférico, cualquier ligera rotación de la balanza cuando la partícula de prueba se moviese dentro del cascarón indicaría una desviación de la ley $1/r^2$. La rotación podría ser detectada por un mecanismo apropiado unido al otro brazo de la balanza.

Desafortunadamente, rodear una masa de prueba con un cascarón esférico y moverla en su interior presenta grandes dificultades técnicas; como alternativa se usa un cilindro largo. Partiendo de un cálculo parecido al que usamos para el cascarón esférico, puede demostrarse que la fuerza gravitatoria ejercida por un cilindro largo hueco sobre una masa de prueba situada en el interior del cilindro se anula si el cilindro es infinitamente largo; para un cilindro de longitud finita puede aplicarse una pequeña pero fácilmente calculable corrección.

La figura 11 muestra la geometría de un experimento típico. Al moverse la masa de prueba en un plano horizontal, se detectarían con la balanza de torsión las variaciones en la fuerza gravitatoria entre el cilindro y la masa de prueba. Si la fuerza gravitatoria entre las partículas tuviera una variación diferente de $1/r^2$, la fuerza sobre la masa de prueba no se anularía y variaría al moverse la masa de prueba en el plano horizontal.

Tales experimentos demuestran que la fuerza tiene realmente la forma $1/r^2$ en dimensiones de laboratorio (centímetros o metros). Una manera de expresar los resultados de estos experimentos es suponer que la fuerza tiene la forma $1/r^{2+\delta}$, donde $\delta = 0$ en la teoría Newtoniana, y luego demostrar que el experimento fija un pequeño límite superior sobre $\delta$. El límite superior actual sobre $\delta$ es alrededor de $10^{-4}$; con la mejor precisión obtenible de los estudios de laboratorio, parece no haber desviación de la forma $1/r^2$ de la ley de la gravitación. Por comparación, los experimentos de prueba de la fuerza $1/r^2$ entre cargas eléctricas (véase la sección 29-6) señalan un límite superior de alrededor de $10^{-16}$ sobre $\delta$ en este caso. ■

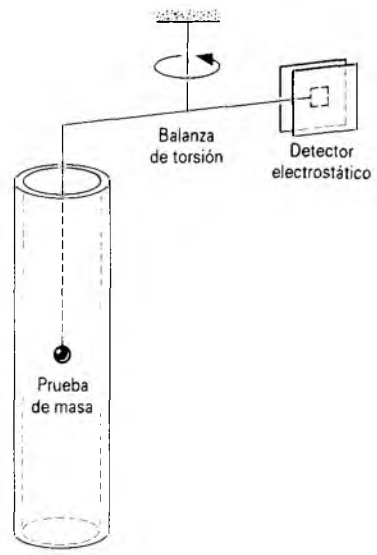



**Figura 11** Una masa de prueba en el interior de un cilindro largo. Para una fuerza $1/r^2$, la atracción gravitatoria entre la masa de prueba y el cilindro se anularía (despreciando los efectos de los extremos). Una balanza de torsión permite medir cambios en la fuerza que actúa sobre la masa de prueba en diferentes lugares en el interior del cilindro.

## 16-6 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

En el capítulo 8 hemos tratado la energía potencial gravitatoria de una partícula (masa $m$) y de la Tierra (masa $M$). Consideramos únicamente el caso especial en que la partícula permanece cerca de la Tierra de modo que podríamos suponer que la fuerza gravitatoria que actúa sobre la partícula es de magnitud $mg$ constante. En esta sección eliminamos esa restricción y consideramos las separaciones partícula-Tierra que pueden ser apreciablemente más grandes que el radio de la Tierra.

La ecuación 4 del capítulo 8, la cual podemos escribir como

$$\Delta U = U_b - U_a = -W_{ab},$$

define el cambio $\Delta U$ en la energía potencial de cualquier sistema, en el cual actúe una fuerza conservativa (digamos, la gravedad), cuando el sistema cambia de la configuración $a$ a la configuración $b$. $W_{ab}$ es el trabajo efectuado por esa fuerza conservativa cuando el sistema cambia.

La energía potencial del sistema en una configuración arbitraria $b$ es

$$U_b = -W_{ab} + U_a. \tag{11}$$

Para dar un valor a $U_b$ elegimos que la configuración $a$ sea una configuración de referencia acordada, y le asignamos a $U_a$ un valor de referencia arbitrario, usualmente cero. Por ejemplo, en el capítulo 8 hemos considerado la energía potencial de una partícula sometida a la fuerza de gravedad $mg$ cerca de la superficie de la Tierra. A una altura $y$, la energía potencial es $U(y) = mgy$, donde el valor de referencia $U = 0$ se toma en $y = 0$.

Consideraremos ahora el caso más general de dos partículas de masas $m$ y $M$ separadas por una distancia $r$. Inicialmente, las partículas están separadas por $r_a$, y la separación cambia a $r_b$. Para hallar el cambio $\Delta U$ correspondiente en la energía potencial debemos evaluar a $W_{ab}$ de acuerdo con la ecuación 11. La figura 12 muestra el esquema geométrico. Hagamos que $M$ esté en el origen de las coordenadas, y movamos a $m$ hacia $M$. Nótese que




**Figura 12** Una partícula $M$ ejerce una fuerza gravitatoria **F** sobre una partícula de masa $m$ situada en **r**. La partícula de masa $m$ se desplaza una corta distancia $d\mathbf{s}$.

**r** y $d\mathbf{s}$ (el vector de desplazamiento) están en direcciones opuestas, de modo que $d\mathbf{s} = -d\mathbf{r}$. El trabajo efectuado por **F** cuando la partícula se mueve de $a$ a $b$ es

$$W_{ab} = \int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int_a^b F\,dr$$
$$= -\int_{r_a}^{r_b} \frac{GmM}{r^2}\,dr = -GmM\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2}$$
$$= -GmM\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_a}^{r_b} = GmM\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right). \quad (12)$$

Entonces

$$\Delta U = -W_{ab} = GmM\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right). \quad (13)$$

Elegimos que nuestra configuración de referencia sea una separación infinita de las partículas ($r_a \to \infty$), y definimos $U(\infty)$ igual a cero. A una separación $r$ arbitraria, la energía potencial es

$$U(r) = -W_{\infty r} + 0 \quad (14)$$

o

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (15)$$

El signo menos indica que la energía potencial es negativa en cualquier distancia finita; esto es, la energía potencial es cero en el infinito y disminuye al disminuir la distancia de separación. Esto corresponde al hecho de que la fuerza gravitatoria ejercida sobre $m$ por $M$ es de atracción. Cuando la partícula se acerca desde el infinito, el trabajo $W_{\infty r}$ efectuado por esta fuerza sobre la partícula es positivo, lo cual significa, basados en la ecuación 14, que $U(r)$ es negativa.

La ecuación 15 se cumple para cualquier trayectoria seguida por la partícula al moverse desde el infinito al radio $r$. Podemos demostrarlo dividiendo una trayectoria arbitraria cualquiera en porciones escalonadas, las cuales

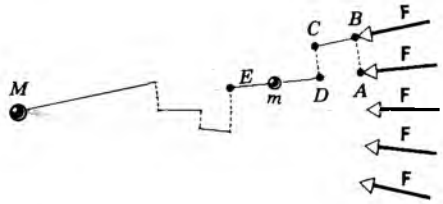



**Figura 13** El trabajo efectuado al llevar a una partícula desde $A$ hasta $E$ es independiente de la trayectoria.

se trazan alternativamente a lo largo del radio y perpendiculares a él. (Fig. 13.) No se efectúa ningún trabajo a lo largo de segmentos perpendiculares como $AB$, porque a lo largo de ellos la fuerza es perpendicular al desplazamiento. El trabajo total efectuado a lo largo de todas las partes radiales de la trayectoria, una de las cuales es $BC$, es igual al trabajo efectuado al ir directamente a lo largo de una trayectoria radial como $AE$. *El trabajo efectuado por la fuerza gravitatoria al moverse la partícula entre dos puntos cualesquiera es independiente de la trayectoria real que une a estos puntos.* De aquí que la fuerza gravitatoria sea una fuerza *conservativa*.

La ecuación 15 demuestra que la energía potencial es una propiedad del *sistema* consistente en las dos partículas $M$ y $m$, más bien que de cualquier cuerpo aislado. La energía potencial cambia si se desplazan $M$ o $m$; sobre cada una actúa la fuerza gravitatoria de la otra. Tampoco tiene ningún sentido asignar parte de la energía potencial a $M$ y parte a $m$. Sin embargo, a menudo hablamos de la energía potencial de un cuerpo $m$ (digamos, un planeta o una piedra) sobre el que actúa una fuerza gravitatoria de un cuerpo $M$ mucho más masivo (el Sol o la Tierra, respectivamente). La justificación para hablar como si la energía potencial perteneciera al planeta o a la piedra únicamente es ésta: cuando la energía potencial de un sistema de dos cuerpos cambia a energía cinética, el cuerpo más ligero adquiere la mayor parte de la energía cinética. El Sol es mucho más masivo que un planeta, de modo que difícilmente adquirirá algo de la energía cinética; y lo mismo sucede con la Tierra en el sistema Tierra-piedra.

Podemos invertir el cálculo anterior y derivar la fuerza gravitatoria a partir de la energía potencial. En las funciones de energía potencial esféricamente simétricas, la relación $F = -dU/dr$ da la componente radial de la fuerza; véase la ecuación 13 del capítulo 8. Con la energía potencial de la ecuación 15, obtenemos

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}. \quad (16)$$

El signo menos muestra aquí que la fuerza es de atracción, dirigida hacia adentro a lo largo del radio.

Podemos demostrar que la energía potencial definida por la ecuación 13 conduce a la conocida expresión $mgy$ para una diferencia pequeña en elevación $y$ cerca de la

superficie de la Tierra. Evaluemos la ecuación 13 para la diferencia en energía potencial entre la ubicación a una altura $y$ sobre la superficie (esto es, $r_b = R_T + y$, donde $R_T$ es el radio de la Tierra) y en la superficie ($r_a = R_T$):

$$\Delta U = U(R_T + y) - U(R_T) = GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + y}\right)$$
$$= \frac{GM_T m}{R_T}\left(1 - \frac{1}{1 + y/R_T}\right).$$

Cuando $y \ll R_T$, que sería el caso para desplazamientos pequeños de los cuerpos cerca de la superficie de la Tierra, podemos usar la expansión binomial para aproximar el último término como $(1 + x)^{-1} = 1 - x + \cdots \approx 1 - x$, lo cual nos da

$$\Delta U \approx \frac{GM_T m}{R_T}\left[1 - \left(1 - \frac{y}{R_T}\right)\right] = \frac{GM_T my}{R_T^2} = mgy,$$

usando la ecuación 3 para reemplazar a $GM_T/R_T^2$ por $g$. Esto demuestra que la ecuación 13 para la diferencia en la energía potencial gravitatoria es consistente con nuestro uso anterior de $mgy$ para situaciones cerca de la superficie de la Tierra. De hecho, podemos usar la aproximación $\Delta U = mgy$ para la diferencia en la energía potencial entre dos alturas a cualquier distancia $R$ del centro de la Tierra, en tanto que $y \ll R$ y usemos el valor de $g$ (véase la tabla 1) apropiado para ese $R$.

**Problema muestra 5** ¿Cuál es la energía potencial gravitatoria del sistema Luna-Tierra, respecto a la energía potencial a una separación infinita?

**Solución** Las masas de la Tierra y de la Luna son de $5.98 \times 10^{24}$ kg y $7.36 \times 10^{22}$ kg, respectivamente, y su distancia de separación media $d$ es de $3.82 \times 10^8$ m. Entonces, según la ecuación 15:

$$U = -\frac{GMm}{d}$$
$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(7.36 \times 10^{22}\ \text{kg})}{3.82 \times 10^8\ \text{m}}$$
$$= -7.68 \times 10^{28}\ \text{J}.$$

Una energía de esta magnitud es aproximadamente igual a la producción de energía industrial mundial, a su tasa actual, durante aproximadamente $10^8$ años.

**Problema muestra 6** ¿Qué velocidad inicial mínima deberá tener un proyectil en la superficie de la Tierra para escapar de la Tierra? Desprecie los efectos causados por la fricción atmosférica y la rotación terrestre.

**Solución** Un proyectil disparado hacia arriba usualmente irá perdiendo velocidad, llegará momentáneamente al reposo, y retornará a la Tierra. Sin embargo, con una cierta velocidad inicial se moverá hacia arriba para siempre, llegando al reposo solamente en el infinito.

Consideremos un proyectil tal, de masa $m$, que deja la superficie de la Tierra a esta velocidad inicial crítica $v$. Tiene una energía cinética $K$ dada por $\frac{1}{2}mv^2$ y una energía potencial $U$ dada por la ecuación 15, es decir,

$$U(R_T) = -\frac{GM_T m}{R_T},$$

donde $M_T$ es la masa de la Tierra y $R_T$ su radio.

Cuando el proyectil haya llegado al infinito, no tendrá energía cinética (recuerde que buscamos la velocidad *mínima* para el escape) ni tampoco energía potencial (recuerde que ésta es nuestra configuración energía-potencial-cero). Por lo tanto, su energía total en el infinito es cero. A partir de la conservación de la energía, su energía total en la superficie debe ser también cero, es decir,

$$K + U = 0.$$

Esto nos conduce a

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \left(\frac{-GM_T m}{R_T}\right) = 0,$$

o sea

$$v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}. \qquad (17)$$

Sustituyendo valores en la ecuación 17 nos da

$$v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}{6.37 \times 10^6\ \text{m}}}$$
$$= 1.12 \times 10^4\ \text{m/s} = 11.2\ \text{km/s} = 25{,}000\ \text{mi/h}.$$

La velocidad de escape no depende de la dirección en que se dispare el proyectil. Sin embargo, la rotación de la Tierra, que hasta ahora hemos despreciado, sí juega un papel. Dispararlo hacia el este tiene la ventaja de que la velocidad superficial tangencial de la Tierra, la cual es de 0.46 km/s en Cabo Cañaveral, puede restarse del valor calculado con la ecuación 17. La tabla 2 muestra velocidades de escape para la Tierra y para algunos otros cuerpos.

**TABLA 2** CIERTAS VELOCIDADES DE ESCAPE

| *Cuerpo* | *Masa (kg)* | *Radio (m)* | *Velocidad de escape (km/s)* |
|---|---|---|---|
| Ceres† | $1.17 \times 10^{21}$ | $3.8 \times 10^5$ | 0.64 |
| Luna | $7.36 \times 10^{22}$ | $1.74 \times 10^6$ | 2.38 |
| Tierra | $5.98 \times 10^{24}$ | $6.37 \times 10^6$ | 11.2 |
| Júpiter | $1.90 \times 10^{27}$ | $7.15 \times 10^7$ | 59.5 |
| Sol | $1.99 \times 10^{30}$ | $6.96 \times 10^8$ | 618 |
| Sirio B‡ | $2 \times 10^{30}$ | $1 \times 10^7$ | 5200 |
| Una estrella neutrón | $2 \times 10^{30}$ | $1 \times 10^4$ | $2 \times 10^5$ |

† El más masivo de los asteroides.
‡ Una enana blanca, la compañera de la brillante estrella Sirio.

## Energía potencial de sistemas de muchas partículas

Consideremos ahora otra interpretación de $U(r)$. Supondremos que equilibramos la fuerza gravitatoria con una *fuerza externa* aplicada por algún agente externo, y la dispondremos de modo que, en todo momento, esta fuerza

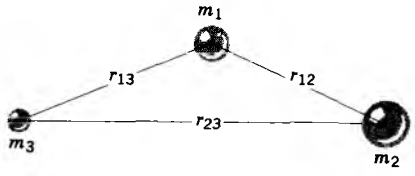



**Figura 14** Tres masas reunidas desde el infinito.

externa sea igual y opuesta a la fuerza gravitatoria de cada partícula. (Por ejemplo, mantenemos a cada partícula en nuestra mano y la movemos en equilibrio.) El trabajo efectuado por la fuerza *externa* cuando las partículas se mueven desde una separación infinita a la separación $r$ no es $W_{\infty r}$ sino $-W_{\infty r}$; esto se debe a que los desplazamientos son los mismos pero las fuerzas son iguales y opuestas. Entonces podemos interpretar la ecuación 14 como sigue:

> *La energía potencial de un sistema de partículas es igual al trabajo que debe efectuar un agente externo para armar el sistema, a partir de la configuración estándar de referencia.*

Así pues, si usted levanta una piedra de masa $m$ a una distancia $y$ sobre la superficie de la Tierra, usted es el agente externo (que separa a la piedra de la Tierra) y el trabajo que usted hace para "armar el sistema" es $+mgy$, lo cual es también la energía potencial. Del mismo modo, el trabajo efectuado *por el agente externo*, cuando un cuerpo de masa $m$ se mueve desde el infinito hasta una distancia $r$ de la Tierra, es *negativo* porque el agente debe ejercer una fuerza restrictiva sobre el cuerpo; esto va de acuerdo con la ecuación 14.

Estas consideraciones se cumplen también para sistemas que contienen más de dos partículas. Consideremos tres cuerpos de masas $m_1$, $m_2$, y $m_3$. Supondremos que, inicialmente, están en reposo infinitamente lejos una de otra. El problema es calcular el trabajo efectuado por un agente externo que las lleve a las posiciones que se muestran en la figura 14. Primero, traemos a $m_1$ desde el infinito hasta su posición final. La gravedad o un agente externo no efectúan ningún trabajo porque la separación entre las tres partículas permanece infinita. Traigamos luego a $m_2$ hacia $m_1$ desde una separación infinita hasta la separación $r_{12}$. El trabajo efectuado por el agente externo al oponerse a la fuerza gravitatoria ejercida por $m_1$ sobre $m_2$ es $-Gm_1m_2/r_{12}$. Traigamos ahora a $m_3$ desde el infinito hasta la separación $r_{13}$ desde $m_1$ y $r_{23}$ desde $m_2$. El trabajo efectuado por el agente externo al oponerse a la fuerza gravitatoria ejercida por $m_1$ sobre $m_3$ es $-Gm_1m_3/r_{13}$, y la que se opone a la fuerza gravitatoria ejercida por $m_2$ sobre $m_3$ es $-Gm_2m_3/r_{23}$. La energía potencial total de este sistema es igual al trabajo total efectuado por el agente externo para armar el sistema, es decir,

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \quad (18)$$

Nótese que no se necesitan cálculos vectoriales con este método.

No importa cómo armemos el sistema, es decir, independientemente del orden en que se muevan las partículas o de las trayectorias que sigan, siempre hallamos esta misma cantidad para el trabajo requerido para traer a los cuerpos a la configuración de la figura 14 desde una separación infinita inicial. La energía potencial debe, por lo tanto, estar asociada al sistema más bien que con uno o dos cuerpos cualesquiera. Si quisiéramos separar al sistema en tres masas aisladas una vez más, tendríamos que proporcionar una cantidad de energía

$$E = +\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right).$$

Esta energía se considera como la *energía de descarga* o también de sujeción, porque mantiene a las partículas juntas entre sí en la configuración mostrada. En el problema muestra 5, por ejemplo, hallamos que la energía potencial del sistema Tierra-Luna era $-7.68 \times 10^{28}$ J, y, por lo tanto, la energía de sujeción del sistema Tierra-Luna es de $7.68 \times 10^{28}$ J. Ésta es la cantidad de energía que un agente externo debe proporcionar para mover a la Tierra y a la Luna desde su separación actual hasta una separación infinita, en un sistema aislado que conste únicamente de Tierra y Luna (despreciando en este cálculo el importante efecto del Sol).

Estos conceptos se presentan de nuevo en relación con fuerzas de origen eléctrico o magnético, o, bien, de origen nuclear. Su aplicación es bastante amplia en la física. Una ventaja del método de la energía sobre el método dinámico consiste en que el primero emplea cantidades escalares y operaciones con escalares en lugar de cantidades vectoriales y operaciones con vectores. Cuando no se conocen las fuerzas reales, como a menudo sucede en física nuclear, el método de la energía es esencial.

## 16-7 EL CAMPO GRAVITATORIO Y EL POTENCIAL *(Opcional)*

Un hecho básico de la gravitación es que dos partículas ejercen sobre ellas fuerzas mutuas. Podemos considerar esto como una interacción directa entre las dos partículas, si lo deseamos. Este punto de vista se denomina *acción-a-distancia*, según el cual las partículas interactúan aunque no estén en contacto. Otro punto de vista es el concepto de *campo*, que considera que una partícula modifica de algún modo al espacio alrededor de ella y genera un *campo gravitatorio*. Este campo, cuya intensidad depende de la masa de la partícula, actúa entonces sobre cualquier otra partícula, ejerciendo la fuerza de atracción gravitatoria sobre ella. Por lo tanto, el campo desempeña un papel intermedio en nuestro pensamiento sobre las fuerzas entre partículas.

De acuerdo con este punto de vista tenemos dos partes separadas en nuestro problema. Primero, debemos determinar el campo gravitatorio generado por una distribución dada de partículas. Segundo, debemos calcular la fuerza gravitatoria que ejerce este campo sobre otra partícula situada en él.

Usaremos este mismo enfoque más adelante en nuestro texto cuando estudiemos el electromagnetismo, en cuyo caso partículas con carga eléctrica generan un campo *eléctrico*, y la fuerza sobre otra partícula cargada se determina por la intensidad del campo eléctrico en el punto donde se encuentre la partícula.

Consideremos a la Tierra como una partícula aislada y despreciemos todos los efectos rotatorios y otros que no sean los gravitatorios. Utilizamos un pequeño cuerpo de prueba de masa $m_0$ como una sonda del campo gravitatorio. Si este cuerpo se coloca en la vecindad de la Tierra, experimentará una fuerza que tiene una dirección y una magnitud definidas en cada punto situado en el espacio. La dirección es radial hacia el centro de la Tierra, y la magnitud es $m_0 g$. Podemos asociar un vector $\mathbf{g}$ con cada punto cerca de la Tierra, el cual es la aceleración que ese cuerpo experimentaría si se dejara caer en ese punto. Definimos a la *intensidad del campo gravitatorio* en un punto como la *fuerza gravitatoria por unidad de masa* en ese punto o, en términos de nuestra masa de prueba,

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m_0} . \tag{19}$$

Al mover a la masa de prueba a varias posiciones, podemos hacer un mapa que muestre al campo gravitatorio en cualquier punto en el espacio. Entonces podremos hallar la fuerza sobre una partícula situada en cualquier punto de ese campo multiplicando la masa $m$ de la partícula por el valor del campo gravitatorio $\mathbf{g}$ en ese punto: $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$.

El campo gravitatorio es un ejemplo de un *campo vectorial*, teniendo cada punto situado en este campo un vector asociado con él. Existen también *campos escalares*, como el campo de temperatura en un sólido conductor del calor. El campo gravitatorio que surge de una distribución de materia fija es también un ejemplo de un *campo estático*, porque el valor del campo en un punto dado no cambia con el tiempo.

El concepto de campo es particularmente útil para entender las fuerzas electromagnéticas entre cargas eléctricas en movimiento. Tiene claras ventajas, tanto conceptualmente como en la práctica, sobre el concepto de acción-a-distancia. El concepto de campo es particularmente superior en el análisis de las ondas electromagnéticas (por ejemplo, las ondas de luz o las ondas de radio); la acción-a-distancia sugiere que las fuerzas pueden ser transmitidas instantáneamente a cualquier distancia, mientras que en teorías basadas en campos las fuerzas se propagan con una velocidad finita (cuando más a la velocidad de la luz). Las ondas gravitatorias (véase la sección 16-10), que, aunque se sabe que existen no han podido observarse directamente, serían de igual manera difíciles de entender con la teoría de la acción-a-distancia. El concepto de campo, que no se utilizó en la época de Newton, fue desarrollado mucho más tarde por Faraday para el electromagnetismo y sólo entonces aplicado a la gravitación. Posteriormente, este punto de vista fue adoptado para la gravitación en la *teoría general de la relatividad*. Todas las teorías actuales que tratan de la naturaleza última de la materia y de las interacciones entre las partículas fundamentales son teorías de campo de una clase u otra.

Podemos también describir al campo gravitatorio de un cuerpo por una función escalar llamada *potencial*. (El potencial no es lo mismo que la energía potencial, aunque estén íntimamente relacionados.) Una vez más medimos la intensidad del campo usando una partícula de prueba de masa $m_0$. Comencemos con la partícula de prueba con una separación infinita del cuerpo (donde el campo es cero) y movamos a la partícula de prueba hacia el cuerpo hasta que la separación sea $r$, donde la energía potencial es $U(r)$. Luego, definimos el *potencial gravitatorio* $V$ en ese punto como:

$$V(r) = \frac{U(r)}{m_0} . \tag{20}$$

Es decir, el potencial es lo mismo que la *energía potencial por unidad de masa de prueba*. Nótese que el potencial es un escalar, siendo definido como la razón de los escalares $U$ y $m$.

Por ejemplo, la energía potencial de $m_0$ en el campo de un cuerpo esféricamente simétrico de masa $M$ está dada por la ecuación 15 como $U(r) = -GMm_0/r$. El potencial gravitatorio puede entonces hallarse empleando la ecuación 20:

$$V(r) = \frac{U(r)}{m_0} = -\frac{GM}{r} . \tag{21}$$

Nótese que el potencial $V(r)$ es independiente del valor de la masa de prueba $m_0$; de igual manera, el campo gravitatorio $\mathbf{g}$, definido de acuerdo con la ecuación 19, es independiente de $m_0$.

Del mismo modo en que podemos hallar la componente radial de la fuerza $\mathbf{F}$ a partir de $U(r)$ de acuerdo con $F = -dU/dr$, podemos hallar también la componente radial del campo $\mathbf{g}$ a partir de $V(r)$ de acuerdo con $g = -dV/dr$. Por lo tanto, podemos considerar el campo y el potencial como modos alternos de analizar la gravitación; de un modo similar, la fuerza y la energía potencial pueden adoptarse como modos alternos de describir la dinámica de un sistema. ■

## 16-8 LOS MOVIMIENTOS DE PLANETAS Y SATÉLITES

Mediante las leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal de Newton, podemos entender y analizar el comportamiento de todos los cuerpos en el sistema solar: las órbitas de los planetas y de los cometas con respecto al Sol y de los satélites naturales o artificales con respecto a sus planetas. Adoptamos dos hipótesis que simplifiquen el análisis: (1) consideramos a la fuerza gravitatoria solamente entre el cuerpo en órbita (la Tierra, por ejemplo) y el cuerpo central (el Sol), ignorando el efecto perturbador de la fuerza gravitatoria de otros cuerpos (tales como otros planetas); (2) suponemos que el cuerpo central es más masivo que el cuerpo en órbita de modo que podemos despreciar su movimiento bajo su interacción mutua. En realidad, ambos objetos orbitan con respecto a su centro de masa común, pero si un objeto es mucho más masivo que el otro, el centro de masa está aproximadamente en el centro del cuerpo más masivo. Se señalarán las excepciones a esta segunda hipótesis.

La base empírica para entender los movimientos de los planetas son las tres leyes de Kepler, y ahora demostraremos cómo pueden relacionarse estas leyes con los resultados analíticos de las leyes de Newton:

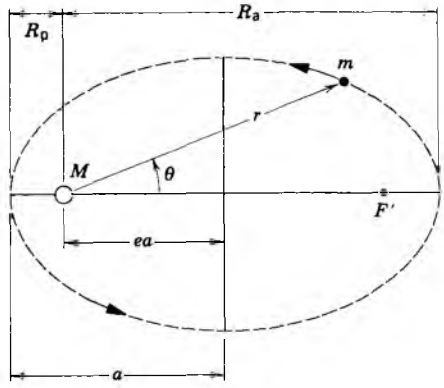



**Figura 15** Un planeta de masa $m$ se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. El Sol, de masa $M$, está en uno de los focos de la elipse. $F'$ se encuentra en el otro foco "vacío". Se muestran también el semieje mayor $a$ de la elipse, el perihelio $R_p$, y el afelio $R_a$. La distancia $ea$ localiza a los puntos focales, siendo $e$ la excentricidad de la órbita.

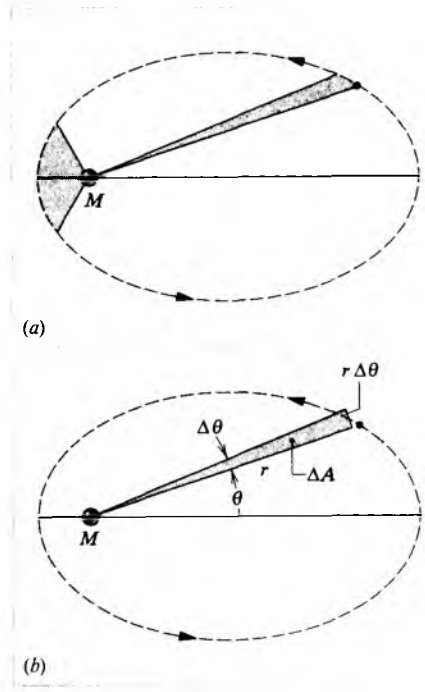



**Figura 16** (*a*) Las áreas iguales sombreadas son barridas en tiempos iguales por una línea que une al planeta con el Sol, demostrando la ley de las áreas. (*b*) El área $\Delta A$ es barrida en un tiempo $\Delta t$, durante el cual la línea barre un ángulo $\Delta\theta$.

**1.** *La ley de las órbitas: Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas teniendo al Sol como uno de los focos.* Newton fue el primero en darse cuenta que existe una relación matemática directa entre el inverso de los cuadrados de las fuerzas ($1/r^2$) y las órbitas elípticas. La figura 15 muestra una órbita elíptica típica. El origen de las coordenadas está en el cuerpo central, y el cuerpo que gira en torno está localizado en las coordenadas polares $r$ y $\theta$. La órbita se halla descrita por dos parámetros: el *semieje mayor a* y la *excentricidad e*. La distancia desde el centro de la elipse a cualquiera de los focos es $ea$. Una órbita circular es un caso especial de una órbita elíptica con $e = 0$, en cuyo caso los dos focos se funden en un solo punto situado en el centro del círculo. Para los planetas del sistema solar, las excentricidades son pequeñas y las órbitas son casi circulares, como se muestra en el apéndice C.

La distancia máxima $R_a$ del cuerpo en órbita al cuerpo central se indica con el prefijo griego *apo*, que significa lejos, como en *afelio* (que proviene de apo (lejos) y helios (Sol) y que significa la distancia máxima desde el Sol) o en *apogeo* (que significa la distancia máxima desde la Tierra). De igual manera, la distancia más cercana $R_p$ está indicada por el prefijo *peri*, como en *perihelio* o en *perigeo*. Como podemos ver en la figura 15, $R_a = a(1 + e)$ y $R_p = a(1 - e)$. Para órbitas circulares, $R_a = R_p = a$.

**2.** *La ley de las áreas: Una línea que una a cualquier planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.* La figura 16*a* ilustra esta ley; en efecto, dice que el cuerpo en órbita se mueve más rápidamente cuando está cerca del cuerpo central que cuando está lejos. Demostraremos ahora que la ley de las áreas es idéntica a la ley de conservación del ímpetu angular.

Consideremos el pequeño incremento de área $\Delta A$ barrido en un intervalo de tiempo $\Delta t$, como se muestra en la figura 16*b*. El área de esta cuña aproximadamente triangular es la mitad de su base $r\,\Delta\theta$, por su altura $r$, La tasa a la cual esta área es barrida es $\Delta A/\Delta t = \frac{1}{2}(r\Delta\theta)(r)/\Delta t$. En el límite instantáneo esto resulta ser

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\tfrac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}r^2\omega.$$

El ímpetu angular instantáneo del cuerpo que orbita es $L = mr^2\omega$, y entonces

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}. \qquad (22)$$

En la medida en que podamos considerar a los dos cuerpos como un sistema aislado, $L$ es una constante, y, por lo tanto, $dA/dt$ es una constante. Por lo tanto, el aumento en la velocidad de un cometa que al pasar cerca del Sol es precisamente una demostración de la conservación del ímpetu angular.

Debe observarse que la conservación del ímpetu angular es válida para *cualquier* fuerza central, es decir, para cualquier fuerza que actúe a lo largo de una línea que une a dos partículas y que dependa solamente de la magnitud de la separación entre dos partículas. Obsérvese también que, al verificar la ley de las áreas, no hemos empleado la ley

**TABLA 3** LEY DE LOS PERIODOS DE KEPLER PARA EL SISTEMA SOLAR

| *Planeta* | *Semieje mayor* $a$ ($10^{10}$ m) | *Periodo* T(y) | $T^2/a^3$ ($10^{-34}$ $y^2/m^3$) |
|---|---|---|---|
| Mercurio | 5.79 | 0.241 | 2.99 |
| Venus | 10.8 | 0.615 | 3.00 |
| Tierra | 15.0 | 1.00 | 2.96 |
| Marte | 22.8 | 1.88 | 2.98 |
| Júpiter | 77.8 | 11.9 | 3.01 |
| Saturno | 143 | 29.5 | 2.98 |
| Urano | 287 | 84.0 | 2.98 |
| Neptuno | 450 | 165 | 2.99 |
| Plutón | 590 | 248 | 2.99 |

del inverso de los cuadrados; la validez de la ley de las áreas no nos dice nada con respecto a cómo varía $F$ con $r$.

3. *La ley de los periodos: El cuadrado del periodo de cualquier planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol.* Probemos este resultado en órbitas circulares. La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r. \tag{23}$$

Reemplazando a $\omega$ por $2\pi/T$, obtenemos

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3. \tag{24}$$

Se obtiene un resultado similar para órbitas elípticas, con el radio $r$ reemplazado por el semieje mayor $a$.

Las relación entre $T^2$ y $a^3$ debe estar determinada por la cantidad $4\pi^2/GM$. Para todos los planetas que giran en torno al Sol, la razón $T^2/a^3$ debe ser una constante; la tabla 3 muestra que éste es, en efecto, el caso. Si podemos medir $T$ y $a$ para un cuerpo en órbita, podemos determinar la masa del cuerpo central. Este procedimiento es independiente de la masa del cuerpo que orbita, y así no nos da información con respecto a su masa.

**Problema muestra 7** (*a*) Calcule la masa del Sol a partir del periodo y del radio de la órbita de la Tierra. (*b*) Calcule la masa de Júpiter a partir del periodo (1.77 d) y radio ($4.22 \times 10^5$ km) de su segunda luna más cercana, Io.

**Solución** (*a*) Partiendo de la ecuación 24, tenemos

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2(1.50 \times 10^{11}\ \text{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(3.15 \times 10^7\ \text{s})^2}$$
$$= 2.01 \times 10^{30}\ \text{kg}.$$

(*b*)

$$M = \frac{4\pi^2(4.22 \times 10^8\ \text{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(1.53 \times 10^5\ \text{s})^2}$$
$$= 1.90 \times 10^{27}\ \text{kg}.$$



**Figura 17** El cometa Halley, fotografiado durante su acercamiento al Sol en 1986.

Nótese que la masa de Júpiter no puede ser obtenida de los parámetros de su órbita alrededor del Sol; para determinar la masa de un objeto a partir de la tercera ley de Kepler, necesitamos conocer el periodo y el semieje mayor de objetos que giren en torno a él como cuerpo central.

**Problema muestra 8** Un satélite gira en órbita a una altura de $h$ = 230 km sobre la superficie de la Tierra. ¿Cuál es el periodo del satélite?

**Solución** De nuevo al usar la ecuación 24, con $r = R_T + h$ = 6370 km + 230 km = 6600 km, obtenemos

$$T = \left(\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi^2(6.60 \times 10^6\ \text{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}\right)^{1/2}$$
$$= 5330\ \text{s} = 88.9\ \text{min}.$$

Este periodo no es muy dependiente de $h$ cuando $h$ es mucho menor que $R_T$; las órbitas de baja altura de los satélites de la Tierra tienen periodos de alrededor de 90 min.

**Problema muestra 9** Se desea colocar un satélite de comunicaciones en órbita de modo que permanezca fijo sobre un punto dado en el ecuador de la Tierra en rotación. ¿Cuál es la altura sobre la Tierra de esa órbita?

**Solución** Para que el satélite permanezca sobre un punto dado de la superficie de la Tierra, debe girar a la misma velocidad angular que el punto. El periodo del satélite debe ser por lo tanto de 24 h, o bien 86,400 s. El radio de la órbita debe entonces ser

$$r = \left(\frac{GT^2 M_T}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$
$$= \left(\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(86{,}400\ \text{s})^2(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$
$$= 4.22 \times 10^7\ \text{m},$$

y su altura sobre la superficie de la Tierra es

$$h = r - R_T = 4.22 \times 10^7\ \text{m} - 6.37 \times 10^6\ \text{m}$$
$$= 3.58 \times 10^7\ \text{m} = 22{,}300\ \text{mi}.$$

Esta órbita se denomina la Órbita Geosíncrona Clarke, en honor a Arthur C. Clarke, quien propuso la idea por primera vez en 1948. Clarke también es bien conocido como el autor de

muchos trabajos de ciencia-ficción, incluyendo *2001: Odisea en el espacio*.

**Problema muestra 10** El cometa Halley (Fig. 17) tiene un periodo de 76 años. En 1986, su acercamiento mayor al Sol (perihelio) fue $8.9 \times 10^{10}$ m (entre las órbitas de Mercurio y Venus). Halle su afelio, o distancia más alejada del Sol, y la excentricidad de su órbita.

**Solución** Partiendo de la ecuación 24 hallamos el semieje mayor:

$$a = \left(\frac{GT^2M}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$
$$= \left(\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(2.4 \times 10^9\ \text{s})^2(2.0 \times 10^{30}\ \text{kg})}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$
$$= 2.7 \times 10^{12}\ \text{m}.$$

Según la figura 15, tenemos que $R_a = a - ae$ y $R_p = a + ae$, de modo que

$$R_a + R_p = 2a$$
$$R_p = 2a - R_a = 2(2.7 \times 10^{12}\ \text{m}) - 8.9 \times 10^{10}\ \text{m}$$
$$= 5.3 \times 10^{12}\ \text{m},$$

entre las órbitas de Neptuno y Plutón. La excentricidad es

$$e = \frac{R_a - R_p}{2a} = \frac{6.3 \times 10^{12}\ \text{m} - 8.9 \times 10^{10}\ \text{m}}{2(2.7 \times 10^{12}\ \text{m})} = 0.96.$$

Una excentricidad tan grande (1.0 es el máximo posible) corresponde a una elipse larga, aplanada.

## Movimiento en torno al centro de masa

La figura 18 muestra, para el caso de órbitas circulares, dos objetos que se mueven en torno a su centro de masa común. Si consideramos el movimiento del cuerpo más pequeño, entonces la ecuación 23 se convierte en

$$\frac{GMm}{(r+R)^2} = m\omega^2 r,$$

y el resultado corregido para la ley de los periodos es

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \left(1 + \frac{R}{r}\right)^2. \qquad (25)$$

La diferencia entre las ecuaciones 24 y 25 es el factor $(1 + R/r)^2$. En el caso de la Tierra y el Sol,

$$\frac{R}{r} = \frac{m}{M} = \frac{5.98 \times 10^{24}\ \text{kg}}{1.99 \times 10^{30}\ \text{kg}} = 3.01 \times 10^{-6},$$

y el error cometido al despreciar el factor del centro de masa y aplicar la ley de los periodos es menor de 0.001%. La figura 19, por otra parte, muestra un diagrama de un sistema de estrellas binarias. Aquí los dos objetos tienen masas comparables, y la corrección para el centro de masa es significativa.

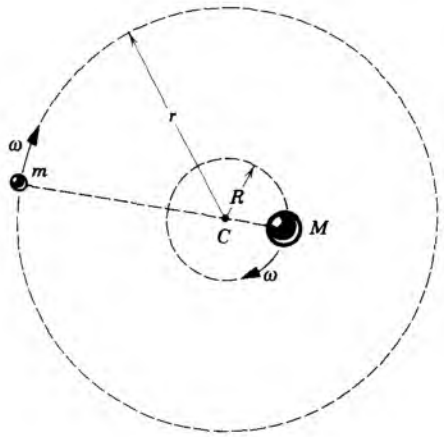



**Figura 18** Dos cuerpos se mueven en órbitas circulares bajo la influencia de la atracción gravitatoria entre ellos. Ambos tienen la misma velocidad angular $\omega$. El punto $C$ es su centro de masa.

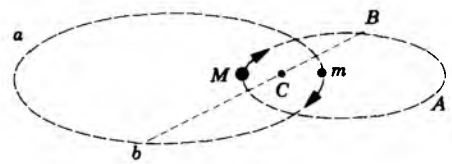



**Figura 19** Un sistema de estrellas binarias, en el que cada estrella gira en torno al centro de masa $C$. Los puntos $A$ y $B$ muestran las posiciones de la estrella de masa $M$ cuando la estrella de masa $m$ está en las posiciones $a$ y $b$ respectivamente.

## Consideraciones energéticas en el movimiento de planetas y satélites

Consideremos una vez más el movimiento de un cuerpo de masa $m$ (planeta o satélite, por ejemplo) en torno a un cuerpo masivo de masa $M$ (el Sol o la Tierra, por ejemplo). Consideraremos que $M$ está en reposo en un marco de referencia inercial con el cuerpo $m$ moviéndose con respecto a él en una órbita circular. La energía potencial del sistema es

$$U(r) = -\frac{GMm}{r},$$

donde $r$ es el radio de la órbita circular. La energía cinética del sistema es

$$K = \tfrac{1}{2}m\omega^2 r^2,$$

estando el Sol en reposo. A partir de la ecuación 23 obtenemos

$$\omega^2 r^2 = \frac{GM}{r},$$

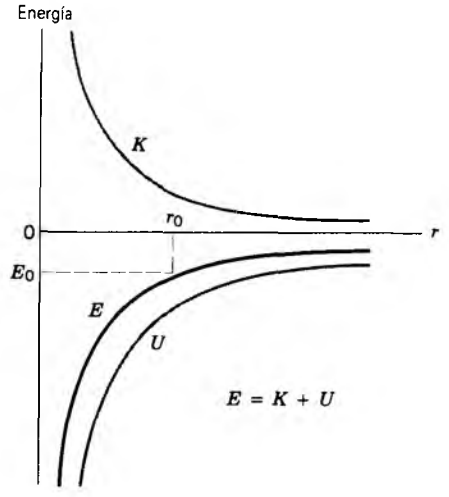



**Figura 20** Energía cinética *K*, energía potencia *U*, y energía total $E = K + U$ de un cuerpo en movimiento circular planetario. Un planeta con energía total $E_0 < 0$ permanecerá en órbita con un radio $r_0$. Cuanto mayor sea la distancia al Sol, mayor será (esto es, menos negativa) su energía total *E*. Para escapar del centro de fuerza y seguir teniendo energía cinética en el infinito, el planeta necesitaría una energía total positiva.

de modo que

$$K = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}. \tag{26}$$

La energía total es

$$E = K + U = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}. \tag{27}$$

Esta energía es constante y negativa. La energía cinética nunca puede ser negativa, pero según la ecuación 26 vemos que debe tender hacia cero cuando la separación tiende al infinito. La energía potencial es siempre negativa excepto cuando su valor es cero en la separación infinita. Una consecuencia de la energía total negativa es, entonces, que el sistema es un sistema cerrado, estando ligado el planeta *m* siempre al centro solar *M* que lo atrae y sin escapar jamás de él (Fig. 20).

Puede demostrarse* que la ecuación 27 es también válida para órbitas elípticas, si reemplazamos a *r* por el semieje mayor *a*. La energía total es todavía negativa, y es también constante, correspondiendo al hecho de que las fuerzas gravitatorias son conservativas. De aquí que tanto la energía total como el ímpetu angular total sean constantes en el movimiento planetario. Estas cantidades suelen llamarse *constantes del movimiento*.

* Véase, por ejemplo, *Newtonian Mechanics*, por A. P. French (Norton, 1971), págs. 585 a 591.

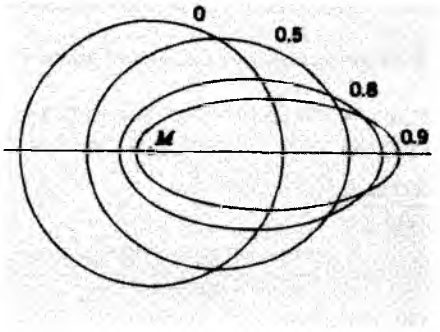



**Figura 21** Las cuatro órbitas tienen el mismo semieje mayor *a* y por lo tanto corresponden a la misma energía total *E*. Se señalan sus excentricidades.

A causa de que la energía total no depende de la excentricidad de la órbita, todas las órbitas con el mismo semieje mayor *a* tienen la misma energía total. La figura 21 muestra varias órbitas diferentes que tienen la misma energía.

Si proporcionamos la cantidad apropiada de energía cinética, podemos arreglar que la energía total sea cero o positiva, en cuyo caso las órbitas ya no serán elípticas. Las órbitas son parabólicas para $E = 0$ e hiperbólicas para $E > 0$. Este caso ocurre a menudo en la dispersión de partículas por un núcleo, donde la fuerza electrostática varía también según $1/r^2$. Al vehículo espacial *Pioneer 10* se le dio la energía cinética inicial suficiente para permitirle escapar del sistema solar; lanzado el 3 de marzo de 1972, pasó la órbita de Plutón, el planeta más exterior, el 14 de junio de 1983, en una órbita hiperbólica.

La ecuación 27 muestra que no podemos cambiar la velocidad de un satélite en órbita sin cambiar también el radio de su órbita. Por ejemplo, supongamos que dos satélites se sigan uno al otro en la misma órbita circular. Si el satélite rezagado trata de alcanzar al que va adelante acelerando hacia adelante, y aumentando por lo tanto la energía cinética, la energía total resulta menos negativa y el radio aumenta. ¡El atraque de dos vehículos espaciales no es precisamente un simple ejercicio de acercar un vehículo al otro! De hecho, como lo demuestra el siguiente problema muestra, el procedimiento apropiado que debe seguirse para dar alcance a un vehículo espacial en órbita implica a menudo perder velocidad más bien que ganarla.

**Problema muestra 11** Dos vehículos espaciales idénticos, cada uno con una masa de 3250 kg, están en la misma órbita circular a una altura de 270 km sobre la superficie de la Tierra. El vehículo espacial *A* va 105 s adelante del vehículo espacial *B*; es decir, *A* llega a cualquier punto fijo 105 s antes que *B*. En un punto particular *P*, el piloto de *B* dispara un pequeño cohete hacia adelante, reduciendo la velocidad de *B* en 0.95%. Halle

los parámetros orbitales (energía, periodo, semieje mayor) de *B* antes y después del "disparo del cohete", y halle el orden de los dos vehículos cuando regresan después al punto *P*.

**Solución** Para $h = 270$ km, $r = R_T + h = 6370$ km + 270 km = 6640 km. Entonces, antes de disparar el cohete, $a = 6640$ km, y

$$E = -\frac{GmM_T}{2a}$$
$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(3250\ \text{kg})(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}{2(6.64 \times 10^{6}\ \text{m})}$$
$$= -9.76 \times 10^{10}\ \text{J},$$
$$T = \left(\frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}\right)^{1/2}$$
$$= \left(\frac{4\pi^2(6.64 \times 10^{6}\ \text{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}\right)^{1/2}$$
$$= 5.38 \times 10^{3}\ \text{s}.$$

Las ecuaciones 26 y 27 muestran que (¡para sólo una órbita circular!) la energía cinética es numéricamente igual al negativo de la energía total, de modo que $K = +9.76 \times 10^{10}$ J, y

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(9.76 \times 10^{10}\ \text{J})}{3250\ \text{kg}}} = 7.75 \times 10^{3}\ \text{m/s}.$$

Después del disparo, la velocidad disminuye en la cantidad dada de 0.95% a $v' = (1 - 0.0095)v = 7.68 \times 10^3$ m/s, y la nueva energía cinética de *B* es

$$K' = \tfrac{1}{2}(3250\ \text{kg})(7.68 \times 10^{3}\ \text{m/s})^2 = 9.58 \times 10^{10}\ \text{J}.$$

La energía potencial de *B* en el punto *P* inmediatamente después del disparo no ha cambiado, y es igual al valor inicial $E - K$ o $2E$, de acuerdo con la ecuación 27. La energía total $E'$ de *B* después del disparo debe ser entonces

$$E' = K' + U' = 9.58 \times 10^{10}\ \text{J} + 2(-9.76 \times 10^{10}\ \text{J})$$
$$= -9.94 \times 10^{10}\ \text{J},$$

y el nuevo semieje mayor es

$$a' = -\frac{GmM_T}{2E'}$$
$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(3250\ \text{kg})(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}{2(-9.94 \times 10^{10}\ \text{J})}$$
$$= 6.52 \times 10^{6}\ \text{m}.$$

El periodo correspondiente es

$$T' = \left(\frac{4\pi^2 a'^3}{GM_T}\right)^{1/2}$$
$$= \left(\frac{4\pi^2(6.52 \times 10^{6}\ \text{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}\right)^{1/2}$$
$$= 5.24 \times 10^{3}\ \text{s}.$$

La diferencia entre los periodos es de 140 s. Es decir, si *A* pasa originalmente por el punto *P* en $t = 0$ y *B* pasa (y dispara su cohete) en $t = 105$ s, entonces *A* regresa a *P* en $t = 5380$ s (determinado por el periodo *T*), y *B* regresa a *P* en 5240 s después de su paso inicial, o en $t = 105$ s + 5240 s = 5345 s. Entonces, *B* está ahora 35 s *adelante de A* en el punto *P*. Ahora *B* puede disparar un segundo cohete idéntico en fuerza y duración al primero, pero en dirección inversa. Esto trae a *B* a la órbita circular original, ahora 35 s adelante de *A*. La figura 22 muestra la relación entre *A* y *B* durante la primera órbita después del disparo.

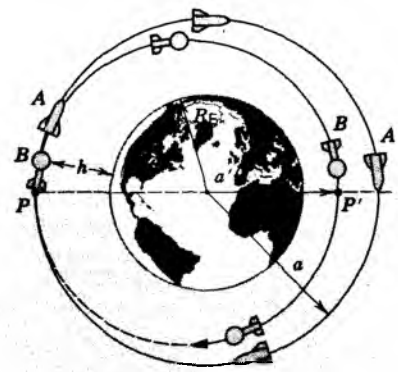



**Figura 22** Problema muestra 11. Se muestran las órbitas de los vehículos espaciales *A* y *B*. Nótese que *B* alcanza a *A* al moverse a una órbita no circular de menor altura sobre la Tierra. Los tamaños relativos de la Tierra y de las alturas orbitales no están a escala.

Vea el problema 71 para ayudarle a entender cómo *B* puede reducir su velocidad en *P* y sin embargo rebasar a *A*.

## 16-9 GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Hasta aquí hemos estudiado aplicaciones de la ley de gravitación de Newton en la escala del sistema solar, donde sus predicciones han sido bien probadas. Volvamos ahora a los efectos gravitatorios a escalas mucho mayores.

La figura 23 muestra fotografías de galaxias cuyas estructuras espirales son muy similares a la de nuestra propia galaxia, la Vía Láctea. Quizá haya $10^{11}$ estrellas unidas entre sí por sus fuerzas gravitatorias mutuas en tal estructura. El diámetro de una galaxia espiral típica podría ser de 50 kpc.* La galaxia de Andrómeda, una prominente vecina galáctica, está a una distancia aproximada de 0.7 Mpc ó $2 \times 10^6$ años-luz.

La estructura espiral es común en las galaxias. Una región central brillante está rodeada por un disco plano con varios brazos espirales. Toda la estructura gira en torno a un eje perpendicular al plano del disco.

* Una unidad astronómica (UA) (también conocida por sus siglas en inglés AU, de *astronomical unit*) es igual a la distancia promedio entre la Tierra y el Sol. Un parsec (pc) se define como la distancia a la cual 1 UA subtendería un ángulo de 1″ y tiene el valor numérico de $3.084 \times 10^{13}$ km ó 3.26 años-luz. Los tamaños galácticos se miden típicamente en kiloparsec (kpc) y sus separaciones en megaparsec (Mpc). Véase el capítulo 1, problema 23.

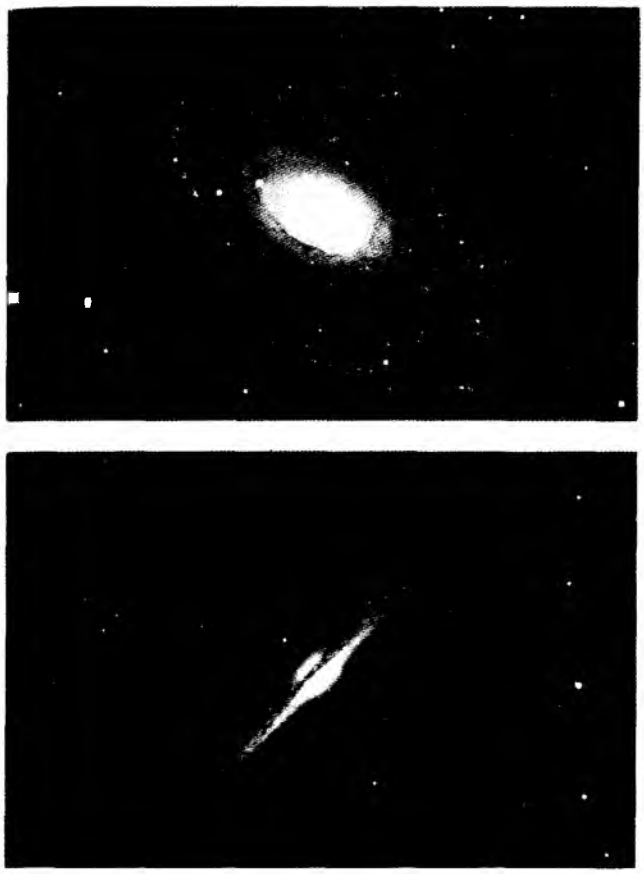


**Figura 23** *Galaxias espirales típicas similares a nuestra* Vía Láctea, vistas desde dos perspectivas diferentes, una normal al plano y otra a lo largo del plano.

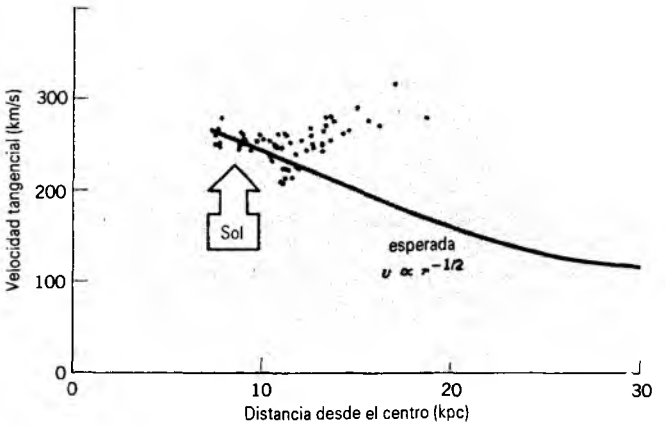



**Figura 24** Velocidades tangenciales de las estrellas de nuestra galaxia, deducidas de la medición de los desplazamientos Doppler de sus luces. La línea gruesa muestra la dependencia de $v$ sobre $r$ dada por la ecuación 28 y calculada partiendo de la tercera ley de Kepler, suponiendo que las estrellas son atraídas únicamente por la gran masa central de la galaxia. La discrepancia entre los puntos medidos y la curva sugiere que existe materia invisible que atrae a las estrellas en la región exterior de nuestra galaxia.

Las estrellas individuales están unidas gravitatoriamente a la galaxia por una fuerza dirigida hacia su centro. Podemos usar las leyes de Kepler, tal y como lo hicimos para el sistema solar, para analizar la fuerza gravitatoria. Se ha medido que la velocidad tangencial del Sol respecto al centro galáctico es de alrededor de 220 km/s. (Compárese esto con la velocidad tangencial de la Tierra con respecto al Sol de 30 km/s.) Nuestra distancia al centro de la galaxia es de 8.5 kpc; estamos en uno de los brazos espirales aproximadamente a dos tercios del camino hacia afuera desde el centro de la galaxia. A partir de estas cifras podemos calcular que la velocidad angular del Sol respecto al centro galáctico es $\omega = v/r = 8.4 \times 10^{-16}$ rad/s. A esta velocidad, una rotación completa toma 240 millones de años, y entonces durante su vida de alrededor de 5000 millones de años el Sol ha efectuado ya quizá 20 revoluciones.

La galaxia no gira como un cuerpo rígido; su rotación se parece más bien a la del sistema solar. Suponiendo que podemos aplicar las leyes de Kepler a este sistema, podemos hallar la relación entre la velocidad tangencial y el radio. Para esto conviene reescribir la tercera ley de Kepler, ecuación 24, reemplazando a $T$ por $2\pi r/v$:

$$T^2 = \left(\frac{2\pi r}{v}\right)^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3$$

o sea

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \qquad (28)$$

Aquí $M$ se refiere a la masa contenida en la región dentro del radio $r$. Basados en la velocidad tangencial del Sol, podríamos estimar que dentro de la órbita del Sol se encuentra una masa equivalente a $10^{11}$ masas solares.

Si suponemos que casi toda la masa de nuestra galaxia está en esta región interior, entonces, con base en la ecuación 28 y $M$ considerada como constante, cabría esperar que la $v$ de las estrellas más allá del Sol decreciera al aumentar $r$. Hasta el punto en que es válida la tercera ley de Kepler y la masa adicional más allá del Sol sea despreciable, $v$ debería disminuir de acuerdo con $r^{-1/2}$.

En vez de esto, observamos que $v$ es constante o quizás aumente ligeramente, incluso hasta el borde mismo de la región visible de nuestra galaxia (Fig. 24). Otras galaxias espirales muestran el mismo efecto. (Estas observaciones se basan en el corrimiento Doppler de la luz emitida por la galaxia; el movimiento de la galaxia en relación a nosotros causa un cambio en la longitud de onda o la frecuencia de su luz en comparación con su valor para el movimiento no relativo; véanse las secciones 21-7 y 42-3. En una galaxia distante en rotación, las partes cuyo movimiento rotatorio es en sentido hacia nosotros tienen corrimiento Doppler opuesto al de las partes que se mue-

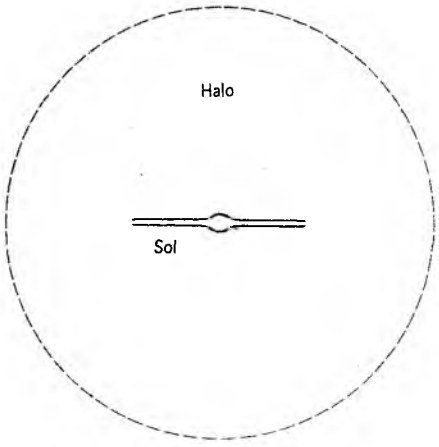



**Figura 25** Una representación del "halo" sugerido de materia oscura en nuestra galaxia. Esta materia se hace necesaria para explicar la discrepancia ilustrada en la figura 24, pero no se ha encontrado hasta ahora evidencia directa de ella.

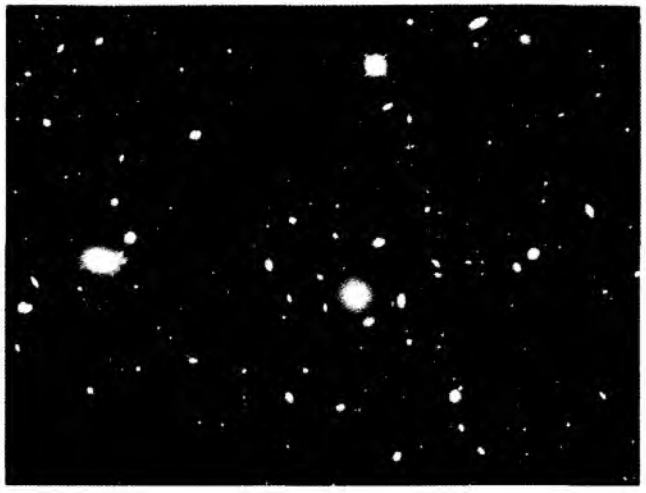


**Figura 26** Enjambre de galaxias (llamado el enjambre Coma). Estas galaxias están reunidas en enjambre por sus atracciones gravitatorias entre ellas.

ven alejándose de nosotros, y la velocidad rotatoria a diferentes distancias desde el centro pueden determinarse directamente.) La velocidad permanece aproximadamente constante hasta el límite de la parte visible de las galaxias.

Podemos explicar este efecto con la ecuación 28 si $M$, que representa la masa contenida dentro de una región esférica de radio $r$, aumenta al menos linealmente con $r$. Esto deberá ser así incluso en el límite más externo de la galaxia.

Si suponemos que la masa de una galaxia está en su mayor parte en forma de estrellas (los planetas añaden muy poca masa), entonces este aumento de $M$ con $r$ es inconsistente con las observaciones (Fig. 23), lo cual demuestra claramente la luz (y, por lo tanto, presumiblemente el número de estrellas) concentrada cerca del centro y que disminuye según crece $r$. Por lo tanto, debe existir una cantidad considerable de *materia oscura* en la galaxia, la cual puede adquirir la forma de un "halo" casi esférico, como se muestra en la figura 25. La forma real de esta materia oscura se desconoce; las hipótesis varían desde estrellas apagadas hasta objetos del tamaño de Júpiter y hasta partículas elementales, pero hasta ahora no hay evidencia experimental directa de la existencia de alguna de ellas.

Se observa que las galaxias forman enjambres (Fig. 26) de quizás 100, ligadas por fuerzas gravitatorias. El tamaño de un enjambre típico es del orden de 1 Mpc, esto es, 100 veces el tamaño de una galaxia típica. Como en el caso de las galaxias mismas, existe un problema de "masa perdida" en los enjambres; la cantidad calculada de materia necesaria para que los enjambres formen un sistema ligado gravitatoriamente es de 10 a 100 veces la cantidad total de materia visible en las galaxias que comprenden los enjambres. Por lo tanto, se ha especulado que puede existir materia oscura no sólo en los halos galácticos sino también en el espacio entre las galaxias; se necesita un halo similar que permee a los enjambres para proporcionar la fuerza gravitatoria que forme un sistema ligado.

Existen también superenjambres ligados gravitatoriamente (enjambres de enjambres en una escala de más allá de los 10 Mpc). Un mapa de los enjambres (Fig. 27) muestra que tienden a concentrarse en superficies que dejan grandes espacios vacíos intermedios con muy poca materia en ellos. La explicación de tales "burbujas" cósmicas aún no se conoce.

La cadena de razonamientos que va de la balanza de Cavendish a los superenjambres es lineal; parte de una medida en laboratorio de la constante $G$, pasando por un conjunto de leyes dinámicas bien verificadas en el Sistema Solar y llega hasta la extrapolación de que la $G$ medida y de que las leyes de Newton son válidas en todo el universo. Aunque aún queda un buen número de preguntas abiertas, no existe ninguna evidencia firme de que este razonamiento sea incorrecto o de que la gravitación no sea universal.

## 16-10 LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD *(Opcional)*

La ley de la gravitación universal de Newton ha tenido un éxito sorprendente en sus aplicaciones. Nos proporciona los medios para calcular con gran precisión los movimientos de los cuerpos en campos gravitatorios. Por ejemplo, podemos enviar sondas espaciales a los planetas y controlar sus trayectorias con aproximación en unos cuantos metros.

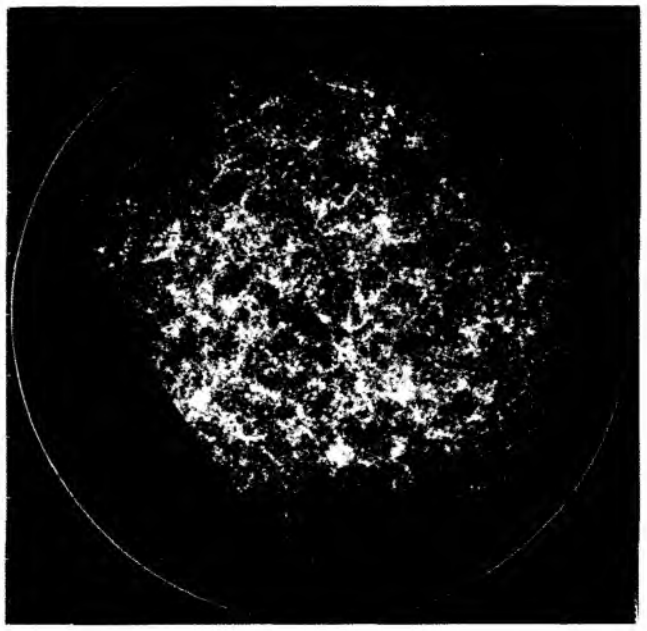


**Figura 27** Cada punto representa una galaxia. El mapa, con sus grupos y filamentos, sugiere la existencia de supergrupos. Las proyecciones tridimensionales confirman esta interpretación.

En 1916, Albert Einstein presentó un enfoque diferente para entender la gravitación. En su teoría general de la relatividad propuso que, en contraste con el enfoque de Newton, no es posible separar un sistema de coordenadas de la materia que contiene. La materia gravitatoria, de acuerdo con Einstein, modifica la geometría de su entorno y determina así, en consecuencia, el comportamiento de los cuerpos cercanos.

La relatividad general es difícil tanto conceptual como matemáticamente y pertenece a un nivel superior al de este texto. Así, exponemos aquí algo del fundamento de la teoría, estudiamos alguna de sus implicaciones, y resumimos alguna de las pruebas experimentales principales que distinguen a la teoría de Einstein de la de Newton. Deberá notarse que, en campos gravitatorios débiles, la teoría de Einstein se reduce a la de Newton, de modo que todo lo que hemos hecho hasta ahora en este capítulo permanece correcto. Únicamente en campos gravitatorios fuertes, como en las cercanías del Sol, resultan importantes las diferencias.

## Masa inercial y masa gravitatoria

En el capítulo 5 discutimos un procedimiento para asignar masa a un objeto, al comparar su respuesta a una fuerza determinada (es decir, a su aceleración) con la de una masa estándar. Se hace esta comparación con base en la segunda ley de Newton, y la masa que aparece en $F = ma$ se llama *masa inercial*. Podemos también emplear un procedimiento basado en la ley de la gravitación de Newton para medir la masa de un objeto. Midamos la fuerza de un kilogramo patrón en el campo gravitatorio de la Tierra (es decir, su peso), y determinemos luego la fuerza sobre nuestra masa desconocida de la misma manera. De acuerdo con la ecuación 1, la razón entre aquellas fuerzas deberá ser la misma que la razón entre las masas, y por tanto tenemos un segundo método para determinar la masa. En este caso estamos midiendo la masa *gravitatoria*.

Parece razonable preguntar si estas masas son de hecho la misma. ¿Es igual la masa inercial a la masa gravitatoria? No existe nada en el marco de la dinámica de Newton que exija que sean iguales. Su igualdad debe ser reconocida en la teoría de Newton como una coincidencia asombrosa, pero surge natural en la relatividad general.

Newton fue el primero en probar la igualdad de las masas inercial y gravitatoria, usando un péndulo hecho en forma de caja vacía. Llenó la caja con muestras de materiales diferentes y midió el periodo del péndulo resultante. Si repetimos la derivación de la sección 15-5 para el periodo del péndulo simple, pero ahora teniendo cuidado de separar la masa gravitatoria de la inercial, el resultado es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_i L}{m_g g}} \tag{29}$$

donde la $m_i$ del numerador se refiere a la masa inercial de la lenteja del péndulo, y la $m_g$ del denominador se refiere a su masa gravitatoria. Por supuesto, esta ecuación se reduce al resultado conocido cuando $m_i = m_g$. Newton usó pesos idénticos de sustancias diferentes y tuvo cuidado de mantener idénticas a las circunstancias físicas (por ejemplo, la amplitud) en todos los ensayos. Él concluyó que las masas inercial y gravitatoria eran las mismas aproximadamente en una parte en $10^3$.

Una mejora considerable en el experimento fue realizada por Eötvös en 1909. Él usó una balanza de torsión con diferentes materiales en los dos extremos, y comparó la masa gravitatoria (su peso) de cada material con la masa inercial (determinada a partir de la fuerza centrífuga inercial debida a la rotación de la Tierra). Cualquier diferencia entre las masas inercial y gravitatoria de los dos materiales sería observada como una rotación de la balanza de torsión. Eötvös concluyó que las masas inercial y gravitatoria eran iguales dentro de una parte en $10^9$. Posteriores experimentos de Dicke en 1964 y Braginsky en 1972 extendieron los límites hasta una parte entre $10^{11}$ y $10^{12}$ usando una técnica similar de la balanza de torsión pero refiriéndola a la atracción gravitatoria del Sol y a la fuerza centrífuga inercial producida por la órbita de la Tierra respecto al Sol. Estos experimentos extremadamente precisos sugieren que no existe una diferencia entre las masas inercial y gravitatoria, y nos obliga a reexaminar nuestras leyes de la dinámica para explicar esta igualdad aparentemente accidental.*

## El principio de equivalencia

He aquí cómo se le ocurrió la idea a Einstein: "Estaba yo sentado en la oficina de patentes de Berna cuando de repente acudió a mi mente un pensamiento: Si una persona cae libremente no sentirá su propio peso. Me quedé sobrecogido. Este sencillo pensamiento me causó una honda impresión. Me impulsó hacia una teoría de la gravitación."

La figura 28*a* muestra a una persona dentro de una cámara aislada en caída libre bajo la gravedad de la Tierra, y la figura 28*b* muestra a una persona que flota libremente en el espacio interestelar, donde los campos gravitatorios son sumamente débiles. Ningún instrumento de medición que opere completamente dentro de la cámara es capaz de distinguir entre los dos casos.

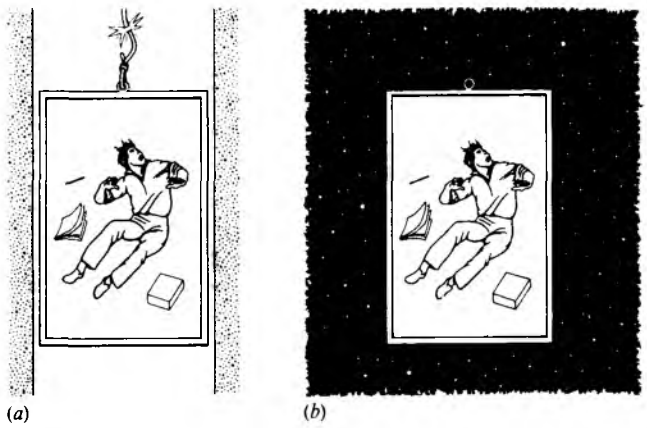
* Véase "Searching for the Secrets of Gravity", por John Boslough, *National Geographic*, mayo de 1989, pág. 563.

Einstein fue un paso más adelante, como se muestra en la figura 29. Consideremos ahora a la persona dentro de la cámara en reposo sobre la Tierra (Fig. 29*a*). Se observa que una bola acelera hacia el piso a razón de 9.8 m/s$^2$. Un péndulo sencillo de longitud especificada tiene cierto periodo de oscilación. Una masa colgada de un resorte estira al resorte en cierta cantidad. El piso ejerce una determinada fuerza normal sobre los cuerpos que reposan en él.

Supongamos ahora que la cámara es parte de un cohete en el espacio interestelar, y además que los motores se hallan encendidos para darle al cohete una aceleración de exactamente 9.8 m/s$^2$ (véase la Fig. 29*b*). Nuestro viajero deja caer ahora una bola y la observa moverse con esa aceleración con relación al suelo.

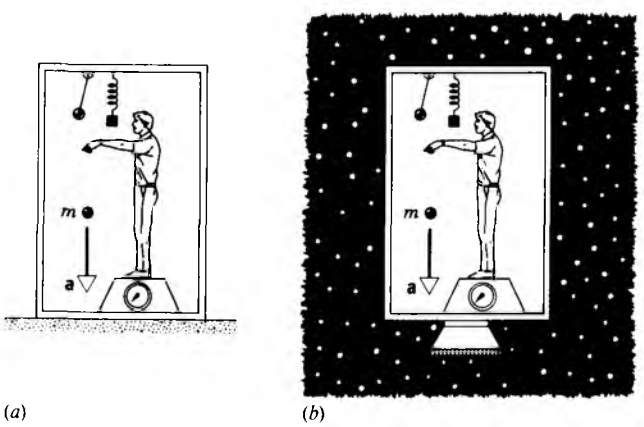
El péndulo oscila normalmente, la masa estira al resorte en la cantidad apropiada, y el suelo ejerce su fuerza normal correcta. En resumen, no existe ningún experimento que pueda ser llevado a cabo dentro de la cámara que distinga entre la figura 29*a* (la condición de reposo en un marco inercial dentro de un campo gravitatorio **g**) y la figura 29*b* (aceleración **a** = −**g** con relación a un marco inercial en el espacio, de gravedad despreciable). Este es el *principio de equivalencia*.

La igualdad de las masas inercial y gravitatoria se deduce directamente del principio de equivalencia. Hagamos descansar a un objeto sobre una báscula de resorte situada sobre el suelo de la cámara. Cuando la cámara acelera en el cohete, el suelo debe ejercer una fuerza hacia arriba $m_i a$ para acelerar al objeto; aquí $m_i$ es la masa inercial, y la báscula de resorte lee la fuerza de reacción (también $m_i a$) ejercida por el objeto. En cambio, cuando la cámara está en reposo en un campo gravitatorio la báscula marca el peso $m_g g$ (que depende de la masa gravitatoria). Hemos dispuesto nuestros experimentos de modo que $a = g$, y si las lecturas de la báscula han de ser idénticas (como lo exige el principio de equivalencia) entonces las masas inercial y gravitatoria deben ser iguales.



(*a*) (*b*)

**Figura 28** Los efectos de caer libremente bajo la gravedad de la Tierra (*a*) son idénticos a los de flotar libremente en el espacio interestelar (*b*). Ningún experimento llevado a cabo dentro de la cámara podría señalar la diferencia.




(*a*) (*b*)

**Figura 29** Los efectos de estar en un campo gravitatorio de intensidad $g$ (*a*) son idénticos a los de acelerar a $a = g$ en el espacio interestelar (*b*). Ningún experimento llevado a cabo dentro de la cámara podría señalar la diferencia. Esto ilustra el principio de equivalencia de Einstein.

## La teoría general de la relatividad

La relatividad general es esencialmente una teoría de geometría. Proporciona un procedimiento para construir un sistema de coordenadas cuya forma esencial depende de la presencia de materia y de energía. En la teoría de Einstein, la materia dobla o curva el espacio; nuestro conocido sistema de coordenadas rectangulares ya no es estrictamente válido en presencia de la materia. El efecto de la masa que gravita sobre otra es entonces meramente el movimiento de la segunda masa en la geometría distorsionada establecida por la primera.

Este enfoque es similar al concepto de campo que hemos tratado anteriormente en este mismo capítulo. En la teoría del campo, una masa establece un campo gravitatorio, y la segunda masa interactúa entonces con el campo directamente (en lugar de interactuar con la primera masa directamente, como en el enfoque de acción-a-distancia).

La figura 30 muestra una analogía bidimensional de la curvatura del espacio. Imaginemos una lámina de hule con una red de coordenadas extendida sobre ella. Todo movimiento se halla confinado al sistema de coordenadas de la lámina. Imaginemos ahora a una bola de acero estirando a la lámina. La distancia más corta entre dos puntos ya no es aquí una línea recta; de hecho, en tal geometría debemos redefinir precisamente qué entendemos por el término "línea recta."

La relación entre materia y geometría en la relatividad general se ha sintetizado como sigue: "La geometría le dice a la materia cómo moverse, y la materia le dice a la geometría cómo curvarse." Las fórmulas de la relatividad general dan la curvatura para cualquier distribución de materia y de energía, y de ello se deduce directamente el movimiento subsiguiente de los haces de luz o de las partículas.

## Pruebas de la relatividad general

Se han llevado a cabo muchas pruebas experimentales para estudiar las pequeñísimas desviaciones entre las teorías gravitatorias de Newton y de Einstein. Las diferencias entre las dos aparecen únicamente en campos gravitatorios fuertes, y en la mayoría de los casos debemos por tanto hacer mediciones cerca del Sol, el cual nos da el campo gravitatorio vecino más fuerte. Existen cuatro pruebas principales de la teoría:

**1.** *Precesión del perihelio de Mercurio.* Según la relatividad general, la órbita de un planeta no es realmente una elipse

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACIÓN Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO URUGUAY



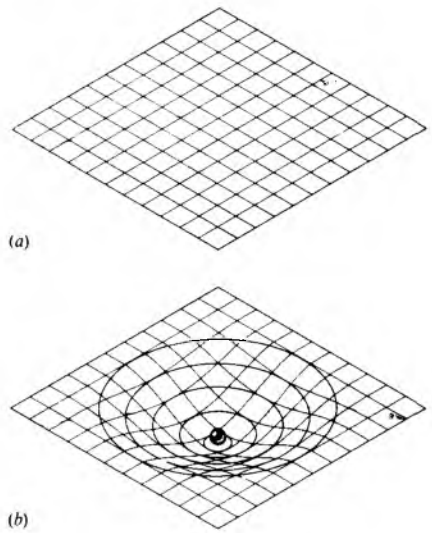



**Figura 30** Una analogía que muestra la curvatura del espacio como consecuencia de la presencia de la masa gravitatoria, de acuerdo con la teoría general de la relatividad. La masa distorsiona a la red de coordenadas y cambia su geometría misma.

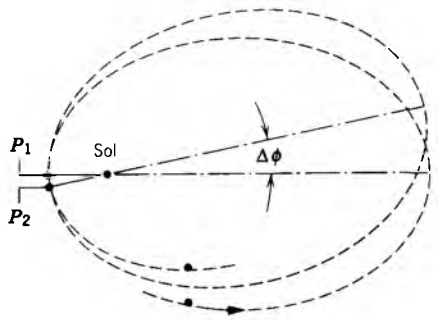



**Figura 31** La precesión del perihelio de Mercurio. Con cada órbita alrededor del Sol, la posición del perihelio gira en un pequeño ángulo $\Delta\phi$. El esquema se ha exagerado a propósito; el ángulo real es de alrededor de 0.1″ por órbita.

cerrada; el eje de la elipse gira un tanto en cada órbita (Fig. 31). Para Mercurio, que está más cerca del Sol y que por lo tanto mostraría el efecto más grande, la rotación predicha es de 42.98 segundos de arco por siglo. Ésta es una rotación increíblemente pequeña, pero que puede medirse con gran precisión: el valor medido es, actualmente, de 43.11 ± 0.21 segundos de arco por siglo, en excelente concordancia con las predicciones de la relatividad general. (Es interesante observar que esta desviación fue advertida por vez primera en 1859 y constituyó un problema serio para la teoría gravitatoria newtoniana antes de que Einstein proporcionara la explicación correcta.)

**2.** *Desviación de la luz de una estrella cerca del Sol.* Aquí la analogía de la lámina de hule de la figura 30 ofrece una buena imagen de lo que sucede. Cuando la luz de una estrella distante viaja a la Tierra después de haber rozado primero el borde del Sol, su trayectoria se desvía al seguir la ruta más directa a través del espacio curvo (Fig. 32). La posición aparente de la estrella

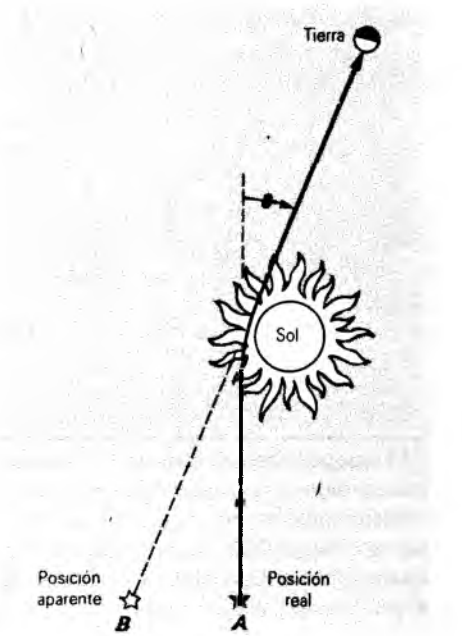



**Figura 32** La desviación de la luz de una estrella al pasar cerca del Sol. La curvatura del espacio a causa de la masa del Sol obliga a la luz a viajar en una trayectoria similar a la mostrada en la figura 30*b*. Como resultado, vemos a una estrella desde la Tierra en una posición aparente *B* en lugar de verla en su posición real *A* en que estaría si el Sol no estuviera presente.

vista desde la Tierra se halla un poco desviada de su posición real. Para que las estrellas cercanas al Sol sean visibles, la observación debe efectuarse durante un eclipse solar. Se han llevado a cabo diversas mediciones; la más antigua fue realizada en 1919 justo después de que Einstein propuso su teoría. Aquí, de nuevo la teoría y el experimento están en excelente concordancia a pesar del pequeño efecto; la predicción del ángulo de desviación es de 1.75 segundos de arco, y las observaciones experimentales de las estrellas y de los cuásares confirman este valor dentro del 1% aproximadamente.

**3.** *Retardo de los ecos de radar.* Cuando un planeta como Venus está detrás del Sol visto desde la Tierra, una señal de radar enviada desde la Tierra a Venus y reflejada por éste sufre un retardo, ya que debe pasar a través del espaciotiempo distorsionado cerca del Sol (Fig. 33). De nuevo la analogía de la lámina de hule proporciona un medio de entender el efecto. Desde este punto de vista, el retardo no está asociado a la curvatura de la trayectoria, sino al "estiramiento" del espacio cerca del Sol. El retardo previsto es del orden de una parte en $10^4$, y ha sido confirmado dentro de un pequeño porcentaje. El límite de la precisión lo imponen las incertidumbres de la superficie del planeta; no sabemos si las señales están siendo reflejadas por montañas o por valles. Una gran mejora fue llevada a cabo mediante los aterrizajes de los *Viking* en Marte a finales de la década de 1970, lo que dio resultados consistentes con la relatividad general dentro del 0.1%.

**4.** *Radiación gravitatoria.* Al igual que las cargas eléctricas aceleradas emiten radiación electromagnética que viaja con la velocidad de la luz, así también las masas aceleradas emiten

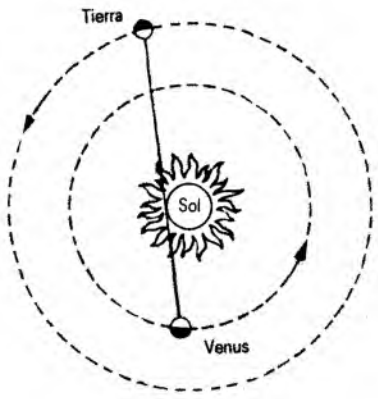



**Figura 33** El tiempo necesario para que una onda electromagnética viaje de la Tierra a Venus se demora a causa de la distorsión de la geometría provocada por la masa del Sol, como en la figura 30*b*. Esta demora puede medirse al observar señales de radar reflejadas a la Tierra desde Venus.

ondas gravitatorias que también viajan con la velocidad de la luz. Muchos grupos experimentales han construido antenas para detectar esta radiación gravitatoria, pero hasta ahora ninguna ha producido una observación carente de ambigüedad. Una evidencia indirecta, y sin embargo muy fuerte, de la emisión de radiación gravitatoria proviene de un pulsar binario. Los pulsares emiten pulsos de radiación electromagnética bien definidos, que varían poco en el tiempo y que pueden ser medidos con gran precisión. (Véase la Fig. 16 del capítulo 13). Uno de estos pulsares, llamado PSR 1913 + 16, orbita con una estrella acompañante como parte de un sistema binario; el periodo orbital es muy corto, de alrededor de 7.75 h. Los picos agudos de radio proporcionan una manera directa de medir el tiempo de revolución con gran precisión, y poco después de su descubrimiento en 1974 se supo que su periodo orbital había disminuido en alrededor de 64 ns por órbita. El sistema parecía estar perdiendo energía cinética rotatoria, y la única explicación razonable de la pérdida es la energía irradiada como radiación gravitatoria. La pérdida de energía está de acuerdo con la teoría de Einstein en un 3% aproximadamente.

Estas pruebas experimentales precisas han confirmado las predicciones de la relatividad general de manera espectacular. Si bien existen otras teorías gravitatorias no newtonianas, sólo la relatividad general ha sobrevivido a la prueba experimental. Al igual que la relatividad especial, la relatividad general ofrece nuevas nociones acerca del espacio y el tiempo, y quedan aún por hacer diversas pruebas de características aun más exóticas de la teoría. Aun cuando la distinción entre la gravitación newtoniana y einsteiniana tiene poco efecto en nuestra vida cotidiana, las implicaciones fundamentales de nuestra comprensión de este aspecto, por demás básico de la naturaleza demandan que continuemos extendiendo estas mediciones hasta el límite.* ■

* Para un tratamiento elemental y altamente legible de estas mediciones, véase *Was Einstein Right?*, por Clifford M. Will (Basic Books, 1986).

## PREGUNTAS

1. La astronomía de observación y los procedimientos de navegación modernos hacen uso del punto de vista geocéntrico (o ptolemaico) que emplea la "esfera celeste" giratoria. ¿Es esto erróneo? Si no lo es, ¿qué criterio determina el sistema (copernicano o ptolemaico) que empleamos? ¿Cuándo usaríamos el sistema heliocéntrico (o copernicano)?
2. Existen dos planetas que nunca son visibles a medianoche. ¿Cuáles y por qué no se ven? Puede esto considerarse como una evidencia en favor de la teoría heliocéntrica y contra la teoría geocéntrica?
3. Si la fuerza de la gravedad actúa sobre todos los cuerpos en proporción a sus masas, ¿por qué no cae, en consecuencia, un cuerpo pesado más rápido que un cuerpo ligero?
4. ¿Cómo varía el peso de una sonda espacial en ruta de la Tierra a la Luna? ¿Cambiaría su masa?
5. Nuestro análisis del experimento de Cavendish (véase la Fig. 4 y el problema muestra 1) consideraba la atracción de cada esfera grande sólo para una pequeña esfera cercana a ella. Cada esfera grande atrae también a la esfera pequeña colocada en el extremo opuesto de la varilla. ¿Cuál es el efecto de esta atracción en el cálculo efectuado en el problema muestra 1? Calcule el error que pudiera hacerse en el valor de $G$ calculado, despreciando esta atracción.
6. ¿Se afecta la fuerza gravitatoria mutua ejercida por un par de objetos por la naturaleza del medio entre ellos? ¿Por las temperaturas de los objetos? ¿Por la orientación de los objetos? ¿Cómo podríamos comprobar estos efectos por medio de la experimentación?
7. Debido a que la Tierra está abultada cerca del ecuador, la fuente del río Mississippi (a una latitud de 50° N), aunque a bastante altura sobre el nivel del mar, está alrededor de 5 km más cerca del centro de la Tierra que su desembocadura (a una latitud de 30° N aproximadamente). ¿Cómo puede correr el río "cuesta arriba" al fluir hacia el Sur?
8. ¿Habría en el polo más azúcar en una libra que en el ecuador? ¿Habría más azúcar en un kilogramo?
9. ¿Cómo podríamos determinar la masa de la Luna?
10. Un reloj está basado en un resorte oscilatorio, el otro en un péndulo. Ambos se trasladan a Marte. ¿Indicarán el mismo tiempo allí que el que indicaban en la Tierra? ¿Estarán en consonancia los dos? Explique. Marte tiene

una masa de alrededor de un décimo de la Tierra y un radio de alrededor de la mitad.

**11.** En la superficie de la Tierra, se le da un golpe horizontal con un martillo a un objeto que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. El objeto es luego llevado a la Luna, soportado de la misma manera, y se le da un golpe igual con el mismo martillo. Hasta donde mejor sabemos, ¿cuál sería la velocidad impartida al objeto en la Luna comparada con la velocidad resultante del golpe en la Tierra (despreciando cualquier efecto atmosférico)?

**12.** Use argumentos cualitativos para explicar por qué los cuatro periodos siguientes son iguales (todos ellos son de 84 min, suponiendo una densidad uniforme de la Tierra): (*a*) el tiempo de revolución de un satélite sobre el borde de la superficie de la Tierra; (*b*) el periodo de oscilación del correo en un túnel que atraviese a la Tierra; (*c*) el periodo de un péndulo simple que tenga una longitud igual al radio de la Tierra en un campo uniforme de 9.8 $m/s^2$; (*d*) el periodo de un péndulo simple infinito en el campo gravitatorio real de la Tierra.

**13.** La fuerza gravitatoria ejercida por el Sol sobre la Luna es de alrededor del doble de la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la Luna. ¿Por qué, entonces, no escapa la Luna de la Tierra?

**14.** Explique por qué es erróneo el razonamiento siguiente: "El Sol atrae a todos los cuerpos de la Tierra. A medianoche, cuando el Sol está directamente abajo, atrae a un objeto en la misma dirección que la atracción de la Tierra sobre ese objeto; al mediodía, cuando el Sol está directamente arriba, atrae al objeto en dirección opuesta a la atracción de la Tierra. De aquí que todos los objetos deberían ser más pesados a la medianoche (o de noche) que al mediodía (o de día)."

**15.** La atracción gravitatoria del Sol y de la Luna sobre la Tierra produce mareas. El efecto del Sol sobre las mareas es de aproximadamente la mitad que el de la Luna. Sin embargo, la atracción directa del Sol sobre la Tierra es de alrededor de 175 veces la de la Luna. ¿Por qué, entonces, causa la Luna las mareas más altas?

**16.** Mareas particularmente altas, llamadas *mareas vivas*, ocurren durante la luna llena y la luna nueva, cuando las configuraciones del Sol, la Tierra, y la Luna son como se muestra en la figura 34. A partir de la figura podríamos concluir (¡incorrectamente!) que los efectos del Sol y de la Luna sobre las mareas tienden a sumarse durante la Luna nueva pero tienden a cancelarse durante la Luna llena. En cambio, se suman en ambas configuraciones. Explique por qué.

**17.** Si las mareas lunares hacen más lenta la rotación de la Tierra (debido a la fricción), el ímpetu angular de la Tierra disminuye. ¿Qué le pasa al movimiento de la Luna como consecuencia de la conservación del ímpetu angular? ¿Juega aquí el Sol (y las mareas solares) un papel? (Véase "Tides and the Earth-Moon System", por Peter Goldreich, *Scientific American*, abril de 1972, pág. 42).

**18.** De acuerdo con la segunda ley de Kepler y las observaciones del movimiento del Sol como se le ve desde la Tierra, ¿cómo podemos deducir que la Tierra, en el hemisferio Norte, está más cerca del Sol durante el invierno que durante el verano? ¿Por qué no hace más frío en el verano que en el invierno?

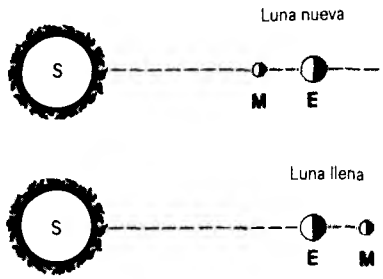



**Figura 34** Pregunta 16.

**19.** En el problema muestra 4, el tiempo de tránsito en el túnel se dedujo de la hipótesis de una Tierra de densidad uniforme. ¿Sería este tiempo más largo o más corto si fuese tomada en cuenta la distribución real de la densidad de la Tierra, con su denso núcleo interno? Explique la respuesta.

**20.** ¿Por qué podemos aprender más sobre la forma de la Tierra estudiando el movimiento de un satélite artificial que por el estudio del movimiento de la Luna?

**21.** Un satélite en órbita terrestre experimenta una pequeña fuerza de arrastre cuando comienza a ingresar a la atmósfera de nuestro planeta. ¿Qué le sucede a su velocidad? (¡Cuidado!).

**22.** ¿Cabría esperar que la energía total del sistema solar fuese constante? ¿Y el ímpetu angular total? Explique sus respuestas.

**23.** ¿Necesita siempre un cohete la velocidad de escape de 11.2 km/s para escapar de la Tierra? De no ser así, ¿qué significa entonces realmente la "velocidad de escape"?

**24.** Los objetos en reposo sobre la superficie de la Tierra se mueven en trayectorias circulares con un periodo de 24 h. ¿Están en órbita en el sentido en el que un satélite está en órbita? ¿Por qué no? ¿Cuál sería la duración que tendría que tener el "día" para poner a dichos objetos realmente en órbita?

**25.** Despreciando la fricción del aire y las dificultades técnicas, ¿puede un satélite ponerse en órbita al ser disparado por un cañón enorme en la superficie de la Tierra? Explique su respuesta.

**26.** ¿Qué ventaja tiene Florida sobre California para lanzar satélites (no polares) en Estados Unidos?

**27.** ¿Puede un satélite navegar en una órbita estable en un plano que no pase a través del centro de la Tierra? Explique su respuesta.

**28.** Tal como lo mide un observador en la Tierra, ¿existiría alguna diferencia en los periodos de dos satélites, cada uno en una órbita circular cercana a la Tierra en un plano ecuatorial, pero uno de ellos moviéndose hacia el este y el otro hacia el oeste?

**29.** Después de que el *Sputnik I* fue puesto en órbita, se dijo que no retornaría a la Tierra sino que se quemaría durante

su *descenso*. Considerando el hecho de que no se quemó durante su *ascenso*, ¿cómo es posible esto?

**30.** Un satélite artificial está en una órbita circular terrestre. ¿Cómo cambiará su órbita si uno de sus motores se enciende momentáneamente (*a*) dirigido hacia la Tierra, (*b*) dirigido alejándose de la Tierra, (*c*) dirigido hacia adelante, (*d*) dirigido hacia atrás, y (*e*) dirigido en ángulo recto con el plano de la órbita?

**31.** Dentro de un vehículo espacial, ¿qué dificultades encontraría usted para caminar, saltar, y beber?

**32.** Todos hemos visto transmisiones de TV de vehículos espaciales en órbita y hemos observado objetos flotando en una gravedad efectiva nula. Supongamos que un astronauta, abrazado a un marco en el vehículo, le da una patada a una bola de boliche flotante. ¿Resentirá su pie la reacción de la patada? Explique la respuesta.

**33.** Si un planeta de determinada densidad se hiciera más grande al adherirse a él material del espacio, su fuerza de atracción sobre un objeto situado en su superficie aumentaría a causa de la mayor masa del planeta, pero disminuiría a causa de la mayor distancia del objeto al centro del planeta. ¿Cuál de los dos efectos domina?

**34.** El campo gravitatorio asociado a la Tierra es de cero tanto en el infinito como en el centro de la Tierra. ¿Es también nulo el potencial gravitatorio en esos lugares? ¿Es realmente el mismo en cada lugar? ¿*Puede* ser nulo en cualquiera de esos lugares? *Debe* ser nulo necesariamente en cualquiera de los dos lugares?

**35.** Las órbitas de los satélites que rodean a la Tierra son elípticas (o circulares) y, sin embargo, hemos sostenido en el capítulo 4 que los proyectiles lanzados desde la Tierra siguen trayectorias parabólicas. ¿Qué es lo correcto?

**36.** Los satélites artificiales de la Tierra pueden localizar el nivel medio del mar con gran precisión. Sin embargo, sobre rocas bituminosas, el nivel medio del mar puede estar hasta 1 m más alto que sobre otras rocas (las cuales son generalmente más densas). Explique esto.

**37.** (*a*) Con objeto de que dos observadores situados en dos posiciones cualesquiera en el ecuador de la Tierra mantengan comunicación por radio al usar satélites en órbita geosíncrona, debe haber cuando menos tres de esos satélites. Explique. (*b*) Halle la separación angular máxima de dos cualesquiera de esos satélites.

**38.** Una piedra se deja caer a lo largo del centro del tiro vertical de una mina profunda. Suponga que no existe resistencia del aire pero considere la rotación de la Tierra. ¿Continuaría la piedra a lo largo del centro del tiro? De no ser así, describa el movimiento.

**39.** ¿Por qué, de hecho no hay atmósfera en la Luna?

**40.** ¿Requiere la ley de la gravitación universal que los planetas del sistema solar tengan las órbitas realmente observadas? ¿Tendrían las mismas órbitas los planetas de otra estrella similar a nuestro Sol? Sugiera los factores que pudieran haber determinado las órbitas especiales observadas.

**41.** ¿Importa de qué modo se apunta un cohete para que escape de la Tierra? Suponga, por supuesto, que se apunta sobre el horizonte y desprecie la resistencia del aire.

**42.** Para llevar a cabo un vuelo a Marte, un cohete se dispara en la dirección en que la Tierra se mueve en su órbita. Para un vuelo a Venus, se le dispara hacia atrás a lo largo de esa órbita. Explique por qué.

**43.** Saturno está aproximadamente seis veces más alejado del Sol que Marte. ¿Cuál de los dos planetas tiene (*a*) el periodo de revolución mayor, (*b*) la velocidad orbital mayor, y (*c*) la velocidad angular mayor?

**44.** Véase la figura 35. ¿Qué se expresa en esta gráfica? Asigne números con unidades en cada eje.

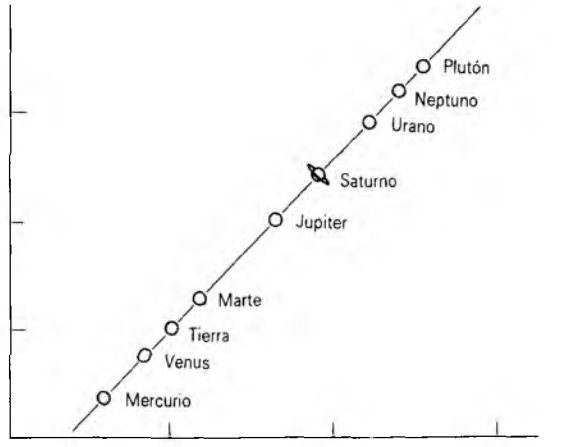



**Figura 35** Pregunta 44.

**45.** ¿Cómo puede deducir el valor de *g* en la superficie de un planeta previamente desconocido el capitán de un vehículo espacial que navegue hacia ese planeta?

**46.** Un cubo de hierro se coloca cerca de una esfera de hierro en un lugar alejado de la gravedad de la Tierra. ¿Qué puede usted decir con respecto a la ubicación del centro de gravedad del cubo? ¿Y de la esfera? En general, ¿depende la ubicación del centro de gravedad de un objeto, de la naturaleza del campo gravitatorio en el que esté situado el objeto?

**47.** ¿Cómo podría usted determinar si dos objetos tienen (*a*) la misma masa gravitatoria, (*b*) la misma masa inercial, y (*c*) el mismo peso?

**48.** Usted es un pasajero del *S.S. Arthur C. Clarke*, el primer vehículo espacial interestelar. El *Clarke* gira en torno a un eje central para simular la gravedad de la Tierra. Si usted está dentro de una cabina cerrada, ¿cómo podría decir que no está en la Tierra?

**49.** ¿Puede uno considerar la gravedad como una fuerza "ficticia" que surge de la aceleración del marco de referencia propio con relación a un marco de referencia inercial, en lugar de verla como una fuerza "real"?

**50.** La representación de la "acción-a-distancia" de la fuerza gravitatoria implica que la acción es instantánea. Realmente, la teoría física actual supone que la gravitación se propaga con una velocidad finita y esto se toma en cuenta en la modificación de la física clásica representada por la teoría general de la relatividad. (Para un estudio de las

ideas e intentos de verificación experimental, véase "Gravitational Waves —A Progress Report", por Jonathan L. Logan, *Physics Today*, marzo de 1973, pág. 44). ¿Qué les sucedería a las deducciones clásicas si se supusiese que la acción no es instantánea? (Véase también "Infinite Speed of Propagation of Gravitation in Newtonian Physics", por I. J. Good, *American Journal of Physics*, julio de 1975, pág. 640).

## PROBLEMAS

*Sección 16-3 La constante gravitatoria G*

1. En la balanza de Cavendish del problema muestra 1, calcule la fuerza gravitatoria ejercida por una de las esferas grandes sobre la otra esfera grande.
2. El Sol y la Tierra ejercen cada uno una fuerza gravitatoria sobre la Luna. Calcule la razón $F_{Sol}/F_{Tierra}$ de estas dos fuerzas. (La distancia Sol-Luna promedio es igual a la distancia Sol-Tierra).
3. ¿A qué distancia de la Tierra puede estar una sonda espacial a lo largo de una línea dirigida hacia el Sol de modo que la atracción gravitatoria del Sol equilibre a la de la Tierra?

*Sección 16-4 La gravedad cerca de la superficie de la Tierra*

4. Uno de los satélites *Echo* constaba de un globo de aluminio inflado de 30 m de diámetro y 20 kg de masa. Un meteorito con masa de 7.0 kg pasa a 3.0 m de la superficie del satélite. Si se ignora el efecto de otros cuerpos distintos al meteorito y al satélite, ¿qué fuerza gravitatoria experimenta el meteorito cuando está más cerca del satélite?
5. Si un péndulo tiene un periodo de 1.00 s en el ecuador, ¿cuál sería su periodo en el polo Sur? Véase la figura 6.
6. Suponga que usted pesa 120 lb al nivel de la banqueta afuera del Centro Mundial de Comercio de la ciudad de Nueva York. Suponga que usted va desde este nivel hasta la cima de una de sus torres de 1350 ft. ¿Cuánto menos pesaría allí a causa de que está ligeramente más alejado del centro de la Tierra?
7. ¿A qué altitud sobre la superficie de la Tierra es la aceleración en caída libre igual a 7.35 m/s² (tres cuartos de su valor en la superficie)?
8. Demuestre que la aceleración en caída libre en un planeta hipotético que tenga la mitad del diámetro de la Tierra, pero el doble de su densidad, es la misma que en la Tierra.
9. Una estrella de neutrones típica puede tener una masa igual a la del Sol pero un radio de 10 km únicamente. (*a*) ¿Cuál es la aceleración gravitatoria en la superficie de una estrella de éstas? (*b*) ¿A qué velocidad se movería un objeto si cayese desde el reposo a una distancia de 1.20 m en una estrella así?
10. (*a*) Calcule $g_0$ en la superficie de la Luna a partir de los valores de la masa y el radio de la Luna dados en el apéndice C. (*b*) ¿Cuál es el periodo de un "péndulo de segundos" (periodo = 2.00 s en la Tierra) en la superficie de la Luna? (*c*) ¿Cuánto pesaría un objeto en la superficie de la Luna si pesa 100 N en la superficie de la Tierra? (*d*) ¿A cuántos radios de la Tierra debe estar este mismo objeto de la superficie de la Tierra para pesar lo mismo que en la superficie de la Luna?
11. El hecho de que $g$ varía de lugar a lugar sobre la superficie de la Tierra llamó la atención cuando Jean Richer llevó en 1672 un reloj de péndulo desde París hasta Cayena, Guayana Francesa, y halló que se atrasaba 2.5 min/día. Si $g = 9.81$ m/s² en París, calcule $g$ en Cayena.
12. Si $g$ se determina dejando caer un objeto a una distancia de 10 m (exactamente), ¿con qué precisión debe medirse el tiempo para obtener un resultado correcto dentro del 0.1%? Calcule un error en porcentaje y un error absoluto, en milisegundos. (*b*) ¿Con qué precisión tendría que medirse el tiempo (en segundos) de 100 oscilaciones de un péndulo de 10 m de longitud para conseguir el mismo porcentaje de error en la medición de $g$?
13. Considérese un marco de referencia inercial cuyo origen esté fijo en el centro de masa del sistema Tierra + objeto que cae. (*a*) Demuestre que la aceleración hacia el centro de masa de *cualquier* cuerpo es independiente de la masa de ese cuerpo. (*b*) Demuestre que la aceleración mutua, o relativa, de los dos cuerpos depende de la suma de las masas de los dos cuerpos. Comente entonces el significado de la aseveración de que un cuerpo cae hacia la Tierra con una aceleración que es independiente de su masa.
14. Dos objetos, cada uno de masa $m$, se hallan suspendidos de cuerdas de diferentes longitudes de una balanza en la superficie de la Tierra, como se muestra en la figura 36. Si las cuerdas tienen masa despreciable y difieren en longitud por $h$, (*a*) demuestre que el error en el peso, asociado al hecho de que $W'$ está más cerca de la Tierra

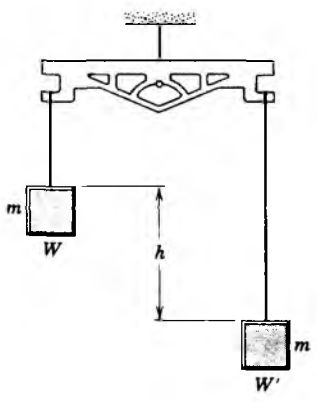



**Figura 36** Problema 14.

que $W$, es $W' - W = 8\pi G\rho mh/3$, donde $\rho$ es la densidad media de la Tierra (5.5 g/cm³). (*b*) Halle la diferencia de longitud que dará un error de una parte en un millón.

**15.** (*a*) Escriba una expresión para la fuerza ejercida por la Luna, de masa $M$, sobre una partícula de agua, de masa $m$, situada en la Tierra en $A$, directamente bajo la Luna, como se muestra en la figura 37. El radio de la Tierra es $R$, y la distancia entre los centros de la Tierra y de la Luna es $r$. (*b*) Suponga que la partícula de agua está en el centro de la Tierra. ¿Qué fuerza ejercería la Luna allí sobre ella? (*c*) Demuestre que la diferencia de estas fuerzas está dada por

$$F_T = \frac{2GMmR}{r^3}$$

y que representa a la *fuerza de mareas*, que es la fuerza sobre el agua con relación a la Tierra. ¿Cuál es la dirección de esta fuerza? (*d*) Repita el cálculo para una partícula de agua situada en $B$, en el lado más lejano de la Tierra respecto a la Luna. ¿Cuál es la dirección de esta fuerza? (*e*) Explique por qué existen dos protuberancias de marea en los océanos (y en la Tierra firme), una que apunta hacia la Luna y la otra en sentido opuesto.

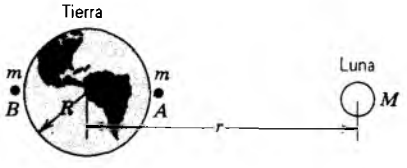



**Figura 37** Problema 15.

**16.** Un objeto está suspendido de una báscula de resorte en un buque que navega a lo largo del ecuador con una velocidad $v$. Demuestre que la lectura de la escala será muy cercana a $W_0(1 \pm 2\,\omega v g)$, donde $\omega$ es la velocidad angular de la Tierra y $W_0$ es la lectura de la escala cuando el buque está en reposo. Explique los signos más o menos.

**17.** La rotación más rápida posible de un planeta es aquella para la cual la fuerza gravitatoria sobre la materia en el ecuador proporciona apenas la fuerza centrípeta necesaria para la rotación. (¿Por qué?) (*a*) Demuestre luego que el periodo de rotación más corto correspondiente está dado por

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}},$$

donde $\rho$ es la densidad del planeta, suponiendo que ésta sea homogénea. (*b*) Evalúe el periodo de rotación suponiendo una densidad de 3.0 g/cm³, típica de muchos planetas, satélites y asteroides. No se ha encontrado ningún objeto que esté girando con un periodo más corto que el hallado por este análisis.

**18.** Pueden emplearse medidores sensibles que midan la aceleración en caída libre $g$ local para detectar la presencia de depósitos de rocas cercanos a la superficie de densidad significativamente mayor o menor que la de su entorno; también pueden localizarse cavidades como cavernas y tiros de minas abandonadas. (*a*) Demuestre que la componente vertical de $g$ a una distancia $x$ de un punto situado directamente sobre el centro de una caverna esférica (véase la Fig. 38) es menor de lo que cabría suponer, suponiendo una distribución uniforme de roca de densidad $\rho$, por la cantidad

$$\Delta g = \frac{4\pi}{3} R^3 G\rho \frac{d}{(d^2 + x^2)^{3/2}},$$

donde $R$ es el radio de la caverna y $d$ es la profundidad de su centro. (*b*) Estos valores de $\Delta g$, llamados *anomalías*, son usualmente muy pequeños y se expresan en miligal, siendo 1 gal = 1 cm/s². Los ingenieros petroleros, al hacer un levantamiento gravimétrico, hallan que $\Delta g$ varía desde 10.0 miligal hasta un máximo de 14.0 miligal dentro de una distancia de 150 m. Suponiendo que la anomalía más grande haya sido registrada directamente sobre el centro de una caverna esférica que se sabe está en la región, halle su radio y la profundidad del techo de la caverna en ese punto. Las rocas cercanas tienen una densidad de 2.80 g/cm³. (*c*) Suponga que la caverna, en lugar de estar vacía, está completamente inundada de agua. ¿Qué indican ahora las lecturas de la gravedad hallada en (*b*) acerca de su radio y su profundidad?

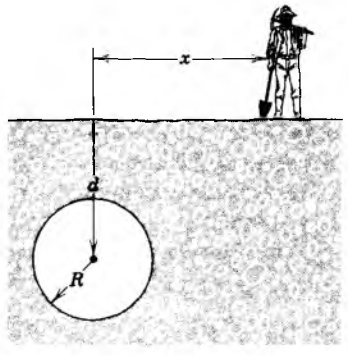



**Figura 38** Problema 18.

**19.** Para repetir un experimento realizado por vez primera públicamente por Foucault en París en 1851 puede emplearse un péndulo cuyo extremo superior esté sujeto de modo que permita al péndulo oscilar libremente en cualquier dirección. Si el péndulo oscila, el plano de la oscilación gira lentamente respecto a una línea trazada sobre el suelo, aun cuando la tensión en el alambre que soporta a la lenteja y la atracción gravitatoria de la Tierra sobre la lenteja estén en un plano vertical. (*a*) Demuestre que esto es consecuencia de que la Tierra no es un marco de referencia inercial. (*b*) Demuestre que para un péndulo de Foucault situado en una latitud $\theta$, el periodo de rotación del plano, en horas, es de 24/sen $\theta$. (*c*) Explique en términos sencillos el resultado en $\theta = 90°$ (los polos) y $\theta = 0°$ (el ecuador).

### *Sección 16-5 Efecto gravitatorio de una distribución esférica de la materia*

**20.** Dos cascarones esféricos concéntricos de densidad uniforme con masas $M_1$ y $M_2$ están situados como se muestra

en la figura 39. Halle la fuerza sobre una partícula de masa $m$ cuando la partícula esté ubicada en (*a*) $r = a$, (*b*) $r = b$, y (*c*) $r = c$. La distancia $r$ se mide desde el centro de los cascarones.

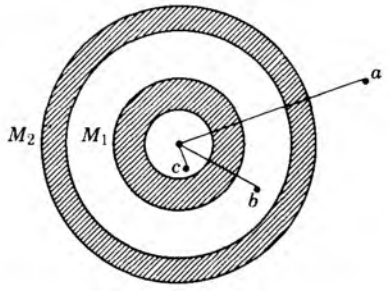



**Figura 39** Problema 20.

**21.** ¿A qué velocidad pasaría el correo por el centro de la Tierra si fuese entregado por medio del ducto del problema muestra 4?

**22.** Demuestre que, en el fondo de un tiro de mina vertical cavado hasta una profundidad $D$, el valor medido de $g$ será

$$g = g_s\left(1 - \frac{D}{R}\right),$$

siendo $g_s$ el valor en la superficie. Suponga que la Tierra es una esfera uniforme de radio $R$.

**23.** El siguiente problema proviene de un examen "Olímpic" de la Universidad estatal de Moscú en 1946 (véase la Fig. 40): Se practica una oquedad esférica dentro de una esfera de plomo de radio $R$, de modo que su superficie toque la superficie exterior de la esfera de plomo y pase por su centro. La masa de la esfera antes de practicar la oquedad era $M$. ¿Con qué fuerza, de acuerdo con la ley de la gravitación universal, atraerá la esfera de plomo ahuecada a una esfera pequeña de masa $m$, que esté situada a una distancia $d$ del centro de la esfera de plomo en la línea recta que une a los centros de las esferas y de la oquedad?

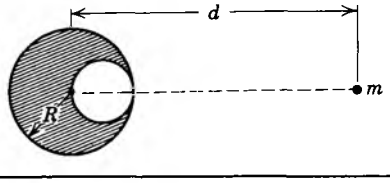



**Figura 40** Problema 23.

**24.** (*a*) Demuestre que en un ducto que atraviese la Tierra a lo largo de una cuerda en lugar de a lo largo de un diámetro, el movimiento de un objeto sería armónico simple; supóngase una densidad uniforme de la Tierra. (*b*) Halle el periodo. (*c*) ¿Adquirirá el objeto la misma velocidad máxima a lo largo de una cuerda que como lo hace a lo largo de un diámetro?

**25.** La figura 41 muestra, no a escala, una sección transversal del interior de la Tierra. En lugar de ser uniforme, la Tierra está dividida en tres zonas: una *corteza*, un *manto*, y un *núcleo*. Se muestran en la figura las dimensiones de estas zonas y la masa contenida en ellas. La Tierra tiene una masa total de $5.98 \times 10^{24}$ kg y un radio de 6370 km. Despréciese la rotación y supóngase que la Tierra es esférica. (*a*) Calcule $g$ en la superficie. (*b*) Suponga que se perfora un orificio hasta la superficie de contacto entre corteza y manto (el *Moho*); ¿cuál sería el valor de $g$ en el fondo del orificio? (*c*) Suponga que la Tierra es una esfera uniforme con la misma masa total y el mismo tamaño. ¿Cuál sería el valor de $g$ a una profundidad de 25 km? Úsese el resultado del problema 22. Las mediciones precisas de $g$ son muestras sensibles de la estructura interior de la Tierra, aunque los resultados puedan estar oscurecidos por las variaciones de densidad locales y la falta de un conocimiento preciso del valor de $G$.

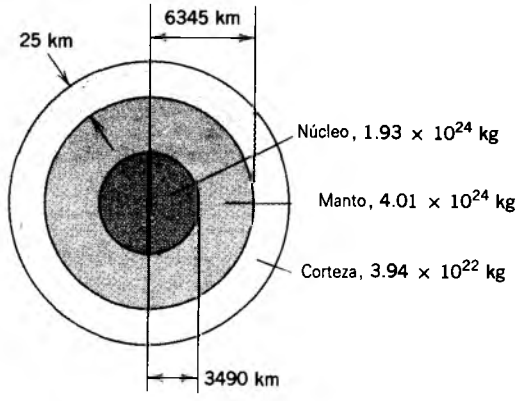



**Figura 41** Problemas 25 y 26.

**26.** Utilice el modelo de la Tierra mostrado en la figura 41 para examinar la variación de $g$ con la profundidad en el interior de la Tierra. (*a*) Halle $g$ en la superficie de contacto núcleo-manto. ¿Cómo varía $g$ desde esta superficie de contacto hasta el centro de la Tierra? (*b*) Demuestre que $g$ tiene un mínimo local dentro del manto; halle la distancia del centro de la Tierra donde ocurre esto y el valor de $g$ asociado. (*c*) Haga un diagrama que muestre la variación de $g$ dentro de la Tierra.

**27.** (*a*) La figura 42*a* muestra un objeto planetario de densidad uniforme $\rho$ y radio $R$. Demuestre que el esfuerzo de compresión $S$ cerca del centro está dado por

$$S = \tfrac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2.$$

(*Sugerencia*: Construya una columna angosta de área $A$ en su sección transversal que se extienda desde el centro hasta la superficie. El peso del material de la columna es $mg_{prom}$, donde $m$ es la masa de material en la columna y $g_{prom}$ es el valor de $g$ en el punto medio entre el centro y la superficie.) (*b*) En nuestro sistema solar, los objetos (por ejemplo los asteroides, los satélites pequeños, los cometas) con "diámetros" menores de 600 km pueden ser de

$$S = \tfrac{4}{3}\pi G\rho^2 R^2.$$

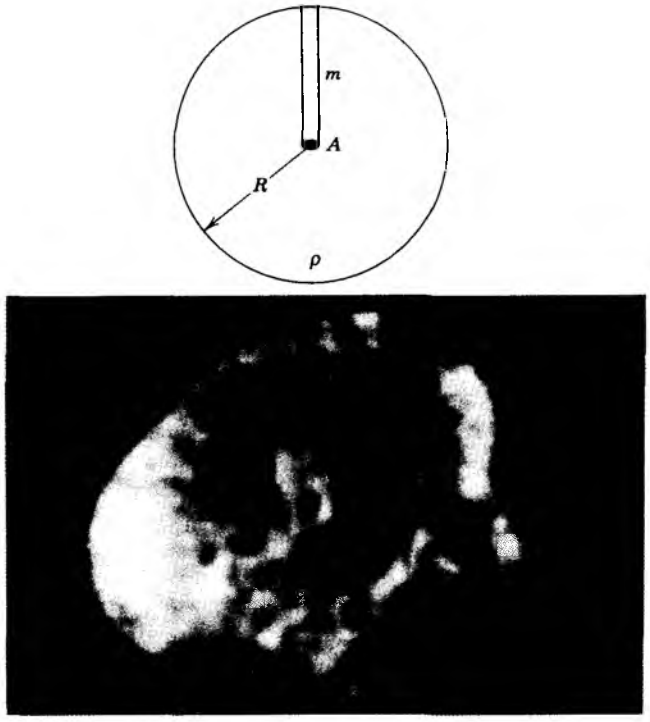



**Figura 42** Problema 27.

forma muy irregular (véase la Fig. 42*b*, que muestra a Hiperión, un pequeño satélite de Saturno), mientras que los de diámetros más grandes son esféricos. Un objeto puede mantener una forma distinta a la esférica únicamente si las rocas que lo constituyen tienen la resistencia suficiente para resistir a la fuerza de la gravedad. Calcule el límite de resistencia a la compresión de las rocas que forman a los asteroides. Suponga una densidad de 4000 kg/m³. (*c*) ¿Cuál es el tamaño más grande posible de un satélite autogravitante no esférico hecho de concreto (véase la tabla 1, capítulo 14); supóngase que $\rho = 3000$ kg/m³.

**28.** Una partícula de masa $m$ está situada a una distancia $y$ de una barra infinitamente larga de densidad de masa lineal $\lambda$. Demuestre que la fuerza gravitatoria entre la barra y la partícula es $F = 2Gm\lambda/y$, dirigida perpendicularmente a la barra. (*Sugerencia:* Haga que la perpendicular de la partícula a la barra defina el origen. Considere dos incrementos de masa $dm = \lambda\, dx$ ubicados a $\pm x$ a lo largo de la barra. Calcule la fuerza total $dF$ (magnitud y dirección) ejercida sobre la partícula por estos dos incrementos de masa. Luego, integre sobre $x$ desde cero hasta el infinito).

**29.** Considere una partícula en un punto $P$ situado en cualquier lugar dentro de un cascarón esférico de materia. Suponga que el cascarón es de espesor y densidad uniformes. Contruya un doble cono angosto con las puntas en $P$ que intercepte las áreas $dA_1$ y $dA_2$ del cascarón (Fig. 43). (*a*) Demuestre que la fuerza gravitatoria resultante ejercida sobre la partícula en $P$ por los elementos de masa interceptados es cero. (*b*) Demuestre luego que la fuerza gravitatoria resultante de todo el cascarón sobre una partícula interna es cero. (Este método fue ideado por Newton.)

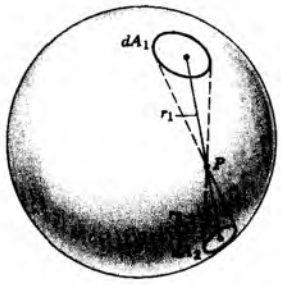



**Figura 43** Problema 29.

### *Sección 16-6 Energía potencial gravitatoria*

**30.** Se ha conjeturado que una estrella en "extinción" pudiera colapsarse a un "radio gravitatorio", definido como el radio para el cual el trabajo necesario para retirar a un objeto de masa $m$ de la superficie de la estrella hasta el infinito es igual a la energía en reposo $mc^2$ del objeto. Demuestre que el radio gravitatorio del Sol es $GM_s/c^2$ y determine su valor en términos del radio actual del Sol. (Para una revisión de este fenómeno véase "Black Holes: New Horizons in Gravitational Theory", por Philip C. Peters, *American Scientist*, sept.-oct. de 1974, pág. 575).

**31.** Un vehículo espacial marcha inactivo en la periferia de nuestra galaxia, a 80,000 años luz del centro galáctico. ¿Qué velocidad mínima deberá tener si queremos que escape enteramente de la atracción gravitatoria de la galaxia? La masa de la galaxia es $1.4 \times 10^{11}$ veces la de nuestro Sol. Suponga, para simplificar, que el material que forma a la galaxia está distribuido con una simetría esférica.

**32.** Demuestre que la velocidad de escape desde el Sol a la distancia de la Tierra al Sol es $\sqrt{2}$ veces la velocidad de la Tierra en su órbita, suponiendo que ésta sea circular. (Éste es un caso específico de resultado general para las órbitas circulares: $v_{esc} = \sqrt{2}\, v_{orb}$.)

**33.** Un cohete es acelerado hasta que alcanza una velocidad de $v = \sqrt{2gR_T}$ cerca de la superficie de la Tierra y entonces se aleja radialmente sin propulsión. (*a*) Demuestre que escapará de la Tierra. (*b*) Demuestre que muy lejos de la Tierra su velocidad es $V = \sqrt{2gR_T}$.

**34.** El Sol, de $2.0 \times 10^{30}$ kg de masa, gira alrededor del centro de la galaxia de la Vía Láctea, que está a una distancia de $2.2 \times 10^{20}$ m. Completa una revolución cada $2.5 \times 10^8$ años. Calcule el número de estrellas en la Vía Láctea. (*Sugerencia*: Suponga, para simplificar, que las estrellas están distribuidas con simetría esférica en torno al centro galáctico y que nuestro Sol está en el borde de la galaxia.)

**35.** Una esfera de materia, de masa $M$ y radio $a$, tiene una cavidad concéntrica de radio $b$, como se muestra en sección transversal en la figura 44. (*a*) Grafique la fuerza gravitatoria $F$ ejercida por la esfera sobre una partícula de

masa $m$, situada a una distancia $r$ del centro de la esfera, en función de $r$ en el intervalo $0 \leq r \leq \infty$. Considere en partícular los puntos $r = 0, b, a, \text{e } \infty$. (*b*) Grafique la energía potencial $U(r)$ del sistema. (*c*) A partir de estas gráficas, ¿cómo podrían obtenerse gráficas de la intensidad del campo gravitatorio y del potencial gravitatorio debido a la esfera?

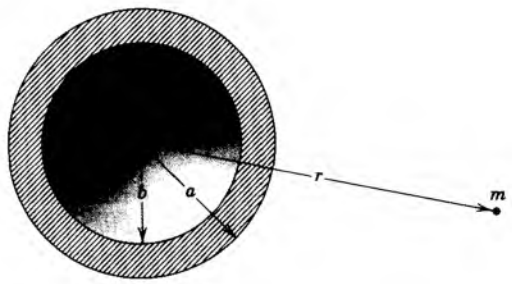



**Figura 44** Problema 35.

**36.** Un proyectil se dispara verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 9.42 m/s. Despreciando la fricción atmosférica, ¿a qué distancia de la superficie de la Tierra llegará?

**37.** Esferas de 2.53 kg y 7.16 kg de masa están fijas a una distancia de 1.56 m entre sus centros. Una esfera de 212 g se coloca a 42.0 cm del centro de la esfera de 7.16 kg, a lo largo de la línea de los centros. ¿Cuánto trabajo deberá efectuar un agente externo para mover la esfera de 212 g a lo largo de la línea de los centros y situarla a 42.0 cm del centro de la esfera de 2.53 kg?

**38.** Un cohete agota su combustible a una altitud $h$ sobre la superficie de la Tierra. Su velocidad $v_0$ al agotarse el combustible supera a la velocidad de escape $v_{esc}$ correspondiente a la altitud de agotamiento. Demuestre que la velocidad $v$ del cohete muy lejos de la Tierra está dada por

$$v = (v_0^2 - v_{esc}^2)^{1/2}.$$

**39.** (*a*) Calcule la velocidad de escape de Europa, un satélite del planeta Júpiter. El radio de Europa es de 1569 km y su aceleración en caída libre en la superficie es de 1.30 m/s$^2$. (*b*) ¿A qué altura se elevará una partícula si abandona la superficie del satélite con una velocidad vertical de 1.01 km/s? (*c*) ¿Con qué velocidad golpeará un objeto al satélite si se deja caer desde una altura de 1000 km? (*d*) Calcule la masa de Europa.

**40.** Un sistema de dos estrellas de $3.22 \times 10^{30}$ kg de masa cada una gira en torno a su centro de masa común, situado a una distancia de $1.12 \times 10^{11}$ m. (*a*) Calcule su periodo de revolución común, en años. (*b*) Suponga que un meteoroide (pequeña partícula sólida en el espacio) pase por este centro de masa moviéndose en ángulo recto con el plano orbital de las estrellas. ¿Cuál debe ser su velocidad para escapar del campo gravitatorio de la estrella doble?

**41.** Dos estrellas neutrónicas están separadas por una distancia de 93.4 km entre centros. Cada una tiene una masa de $1.56 \times 10^{30}$ kg y un radio de 12.6 km. Inicialmente están en reposo una respecto a la otra. (*a*) ¿A qué velocidad se moverán cuando su separación haya disminuido a la mitad de su valor inicial? (*b*) ¿A qué velocidad se mueven en el momento antes de colisionar? Desprecie los efectos relativistas.

**42.** Varios planetas (los gigantes gaseosos Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno) poseen anillos circundantes casi circulares, compuestos quizá de un material que no se constituyó en satélite. Además, muchas galaxias contienen estructuras en forma de anillo. Considere un anillo homogéneo de masa $M$ y radio $R$. (*a*) Halle una expresión para la fuerza gravitatoria ejercida por el anillo sobre una partícula de masa $m$ localizada a una distancia $x$ del centro del anillo a lo largo de su eje. Véase la figura 45. (*b*) Suponga que la partícula cae desde el reposo como consecuencia de la atracción del anillo de materia. Halle una expresión para la velocidad con la que pasa por el centro del anillo.

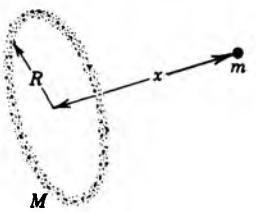



**Figura 45** Problema 42.

**43.** Dos partículas de masas $m$ y $M$ están inicialmente en reposo a una distancia infinita entre ellas. Demuestre que en cualquier instante su velocidad relativa de acercamiento atribuible a la atracción gravitatoria es $\sqrt{2G(M+m)/d}$, donde $d$ es su separación en ese instante.

### *Sección 16-8 Los movimientos de planetas y satélites*

**44.** La distancia media de Marte al Sol es 1.52 veces la de la Tierra al Sol. A partir de esto, calcule el número de años necesario para que Marte complete una revolución en torno al Sol; compare su respuesta con el valor dado en el apéndice C.

**45.** El planeta Marte tiene un satélite, Fobos, que viaja en una órbita de 9400 km de radio con un periodo de 7 h 39 min. Calcule la masa de Marte a partir de esta información. (La masa de Fobos es despreciable comparada con la de Marte.)

**46.** Determine la masa de la Tierra a partir del periodo $T$ y del radio $r$ de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra: $T = 27.3$ días y $r = 3.82 \times 10^5$ km.

**47.** Un satélite se sitúa en una órbita circular con un radio igual a la mitad del radio de la órbita de la Luna. ¿Cuál es el periodo de revolución en meses lunares? (Un mes lunar es el periodo de revolución de la Luna.)

**48.** Se han colocado satélites espía en la órbita geosíncrona sobre el ecuador de la Tierra. ¿Cuál es la mayor latitud $L$ desde la que los satélites son visibles en la superficie de la Tierra? Véase la figura 46.

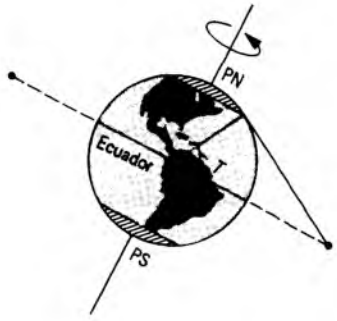



**Figura 46** Problema 48.

**49.** Un vehículo espacial de reconocimiento rodea a la Luna a una altitud muy baja. Calcule (*a*) su velocidad y (*b*) su periodo de revolución. Refiérase al apéndice C para los datos necesarios de la Luna.

**50.** Considere dos satélites *A* y *B* de igual masa *m*, que se mueven en la misma órbita circular de radio *r* alrededor de la Tierra *T* pero en sentidos de revolución opuestos y, por lo tanto, en vías de colisión (véase la Fig. 47). (*a*) En términos de *G*, $M_T$, *m* y *r*, halle la energía mecánica total del sistema Tierra más los dos satélites antes de la colisión. (*b*) Si la colisión es completamente inelástica de modo que los restos permanezcan como una sola pieza de material mezclado, halle la energía mecánica total inmediatamente después de la colisión. (*c*) Describa el movimiento subsiguiente de los restos.

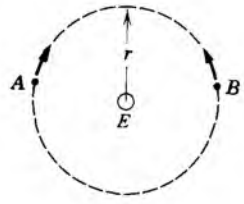



**Figura 47** Problema 50.

**51.** El centro del Sol está en uno de los focos de la órbita de la Tierra. ¿A qué distancia está el otro foco? Exprese su respuesta en términos del radio del Sol $R_S = 6.96 \times 10^8$ m. La excentricidad de la órbita de la Tierra es de 0.0167 y el semieje mayor tiene $1.50 \times 10^{11}$ m.

**52.** Use la conservación de la energía y la ecuación 27 de la energía total para demostrar que la velocidad *v* de un objeto situado en una órbita elíptica satisface la relación

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

**53.** Un cometa que se mueve en una órbita con 0.880 de excentricidad tiene una velocidad de 3.72 km/s cuando está más distante del Sol. Halle su velocidad cuando está más cercano al Sol.

**54.** Un satélite que se mueve en una órbita elíptica está a 2360 km sobre la superficie de la Tierra en su punto más alejado y a 1180 km en su punto más cercano. Calcule (*a*) el semieje mayor, (*b*) la excentricidad de la órbita, y (*c*) el periodo de revolución.

**55.** Considere un satélite artificial situado en una órbita circular alrededor de la Tierra. Establezca cómo varían las siguientes propiedades del satélite con el radio *r* de su órbita: (*a*) periodo, (*b*) energía cinética, (*c*) ímpetu angular, y (*d*) velocidad.

**56.** (*a*) Exprese la constante *G* de la gravitación universal que aparece en la ley de la gravedad de Newton en términos de la unidad astronómica UA como unidad de longitud, la masa solar $M_S$ como unidad de masa, y el año como unidad de tiempo. (1 UA = $1.496 \times 10^{11}$ m, 1 $M_S$ = $1.99 \times 10^{30}$ kg, 1 año = $3.156 \times 10^7$ s.) (*b*) ¿Qué forma adquiere la tercera ley de Kepler (Ec. 24) en estas unidades?

**57.** En el año de 1610 Galileo construyó un telescopio, lo dirigió hacia Júpiter, y descubrió cuatro lunas prominentes. Los radios de sus órbitas medias *a* y sus periodos *T* son

| *Nombre* | *a* ($10^8$ m) | *T* (días) |
|---|---|---|
| Io | 4.22 | 1.77 |
| Europa | 6.71 | 3.55 |
| Ganimedes | 10.7 | 7.16 |
| Calixto | 18.8 | 16.7 |

(*a*) Grafique el log *a* (eje *y*) contra el log *T* (eje *x*) y demuestre que se obtiene una *línea recta*. (*b*) Mida su pendiente y compárela con el valor que cabe esperar partiendo de la tercera ley de Kepler. (*c*) Halle la masa de Júpiter a partir de la intersección de esta línea con el eje *y*. (*Nota*: puede usar también papel log-log para gráficas.)

**58.** Demuestre cómo, guiado por la tercera ley de Kepler, Newton pudo deducir que la fuerza que mantiene a la Luna en su órbita, supuesta circular, debe variar según el inverso de los cuadrados de la distancia desde el centro de la Tierra.

**59.** La mayoría de los asteroides giran alrededor del Sol entre Marte y Júpiter. Sin embargo, varios "asteroides Apolo" de diámetros de unos 30 km se mueven en órbitas que cruzan la órbita terrestre. En la figura 48 se muestra la órbita de uno de ellos. Tomando las medidas directamente de la figura, deduzca el periodo de revolución del asteroide en años. (Se calcula que, finalmente, estos asteroides chocarán con la Tierra.)

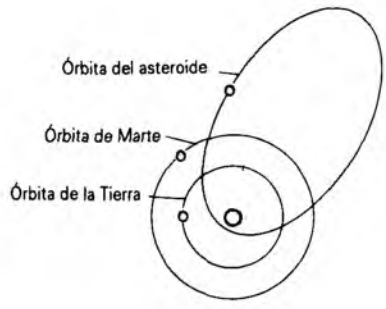



**Figura 48** Problema 59.

**60.** Un satélite en órbita elíptica de excentricidad $e$ tiene una velocidad $v_a$ en el apogeo, $v_p$ en el perigeo, y $v_0$ en los extremos del eje menor de su órbita. Demuestre que (*a*) $v_p/v_a = (1 + e)/(1 - e)$, y (*b*) $v_0/v_a = (v_p/v_a)^{1/2}$.

**61.** Cierto sistema de estrellas triples consta de dos estrellas, cada una de masa $m$, que giran en torno a una estrella central, de masa $M$, en la misma órbita circular. Las dos estrellas están situadas en los extremos opuestos de un diámetro de la órbita circular; véase la figura 49. Derive una expresión para el periodo de revolución de las estrellas; el radio de la órbita es $r$.

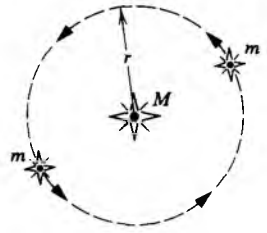



**Figura 49** Problema 61.

**62.** Un par de estrellas gira con respecto a su centro de masa común. Una de las estrellas tiene una masa $M$ que es el doble de la masa $m$ de la otra; esto es, $M = 2m$. Sus centros están a una distancia $d$ entre sí, siendo $d$ grande en comparación con el tamaño de cualquiera de las estrellas. (*a*) Derive una expresión para el periodo de revolución de las estrellas alrededor de su centro de masa común en términos de $d$, $m$, y $G$. (*b*) Compare los ímpetus angulares de las dos estrellas en torno a su centro de masa común calculando la razón $L_m/L_M$. (*c*) Compare las energías cinéticas de las dos estrellas calculando la razón $K_m/K_M$.

**63.** Un satélite viaja inicialmente en una órbita aproximadamente circular a 640 km sobre la superficie de la Tierra; su masa es de 220 kg. (*a*) Determine su velocidad. (*b*) Determine su periodo de revolución. (*c*) Por varias causas el satélite pierde energía mecánica a razón de (en promedio) $1.40 \times 10^5$ J por revolución orbital. Adoptando la aproximación razonable de que la trayectoria sea un "círculo con un radio que disminuye lentamente", determine la distancia desde la superficie de la Tierra, la velocidad, y el periodo del satélite al final de su revolución orbital núm. 1500. (*d*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza retardante promedio? (*e*) ¿Se conserva el ímpetu angular?

**64.** Un sistema binario de estrellas consta de dos estrellas, cada una con la misma masa que el Sol, que gira en torno al centro de masa común del sistema. La distancia entre ellas es la misma que la distancia entre la Tierra y el Sol. ¿Cuál es el periodo de revolución en años?

**65.** (*a*) ¿Se consume la misma energía al llevar un satélite a 1600 km de la Tierra que al ponerlo en órbita una vez que está a esa distancia? (*b*) ¿Qué sucede con 3200 km? (*c*) ¿Y qué, a 4800 km? Considere que el radio de la Tierra es de 6400 km.

**66.** Una posibilidad de dañar a un satélite en órbita terrestre es lanzar un enjambre de bolitas de modo tal que se muevan en la misma órbita que el satélite pero en dirección opuesta. Considere un satélite en órbita circular cuya altitud sobre la superficie de la Tierra es de 500 km. Un sensor a bordo detecta una bolita de 10.0 g que se acerca y determina que es inevitable una colisión frontal. (*a*) ¿Cuál es la energía cinética de la bolita que se acerca en el marco de referencia del satélite? (*b*) ¿Cómo se compara ésta con la energía cinética de la posta de un rifle moderno del ejército? Una posta de éstas tiene una masa de 4.00 g y una velocidad de salida de 950 m/s.

**67.** El asteroide Eros, uno de los muchos planetas menores que giran alrededor del Sol en la región comprendida entre Marte y Júpiter, tiene un radio de 7.0 km y una masa de $5.0 \times 10^{15}$ kg. (*a*) Si usted estuviera en Eros, ¿podría levantar un camión de 2000 kg? (*b*) ¿Podría correr lo suficientemente rápido como para ponerse a sí mismo en órbita? Desprecie los efectos debidos a la rotación del asteroide. (*Nota*: Los récords olímpicos para los 400 m planos corresponden a velocidades de 9.1 m/s para los hombres y 8.2 m/s para las mujeres.)

**68.** La órbita de la Tierra en torno al Sol es *casi* circular. Las distancias más cercana y más lejana son de $1.47 \times 10^8$ km y $1.52 \times 10^8$ km, respectivamente. Determine las variaciones máximas de (*a*) la energía potencial, (*b*) la energía cinética, (*c*) la energía total, y (*d*) la velocidad orbital que resulta del cambio en la distancia Tierra-Sol en el transcurso de 1 año. (*Sugerencia*: Use la conservación de la energía y el ímpetu angular.)

**69.** Suponga que un satélite de comunicaciones geosíncrono está en órbita en la longitud de Chicago. Usted está en Chicago y quiere captar sus señales. ¿En qué dirección debería usted apuntar el eje de su antena parabólica? La latitud de Chicago es de 47.5° N.

**70.** ¿Qué velocidad inicial mínima (medida respecto a la Tierra) debe ser impartida a un objeto que está en reposo sobre la superficie de la Tierra para que escape no solamente del campo gravitatorio terrestre sino también del Sol? Desprecie la rotación de la Tierra pero no su movimiento orbital alrededor del Sol. (*Sugerencia*: Observe que para una velocidad mínima el objeto debe proyectarse en dirección del movimiento orbital de la Tierra. Trate el problema en dos etapas, el escape desde el Sol después del escape de la Tierra. La velocidad orbital de la Tierra, $v_0$, une a los dos marcos de referencia implicados.)

**71.** Usando los datos del problema muestra 11, calcule (*a*) la velocidad del vehículo espacial $B$ cuando pasa por el punto $P'$, y (*b*) la velocidad promedio del vehículo espacial $B$ en la órbita después de haber agotado su combustible. Aproxime la trayectoria de $B$ a un círculo. Compare estos resultados con las cantidades correspondientes del vehículo espacial $A$.

**72.** Un satélite meteorológico está un una órbita geosíncrona, quieto sobre Nairobi, ciudad muy cercana al ecuador. Si el radio de su órbita se aumenta en 1.00 km, ¿a qué razón y en qué dirección se movería su punto de referencia, que anteriormente estaba estacionario, en la superficie de la Tierra?

**73.** Tres estrellas idénticas de masa $M$ están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado $L$. ¿A qué

velocidad deben moverse si giran todas bajo la influencia de la gravedad mutua en una órbita circular que circunscribe al triángulo equilátero y cuya forma se mantiene?

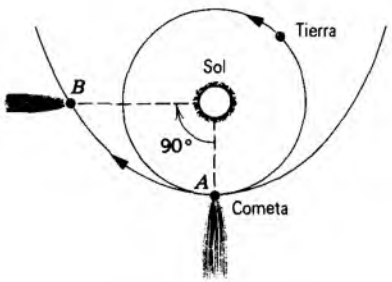



**Figura 50** Problema 74.

**74.** ¿Cuánto tiempo le tomaría a un cometa, que se mueve en una trayectoria parabólica, moverse desde su punto de acercamiento más próximo al Sol en *A* (véase la Fig. 50) en un ángulo de 90°, medido en el Sol, hasta *B*? Sea la distancia de acercamiento más próxima al Sol igual al radio de la órbita de la Tierra, supuesta circular.

**75.** Imaginemos un planeta de masa $M$ con una pequeña luna de masa $m$ y radio $a$ que gira a su alrededor manteniendo la misma cara hacia él. Si ahora la luna se aproxima al planeta, existirá una distancia crítica medida desde el centro del planeta a la cual se levantaría material suelto de la superficie de la luna. Demuestre que esta distancia está dada por $r_c = a(3M/m)^{1/3}$. Esta distancia crítica recibe el nombre de *límite de Roche*.

**76.** (*a*) Demuestre que el problema de los dos cuerpos de la sección 16-8 puede simplificarse a un problema de un cuerpo con el uso del concepto de masa reducida de la sección 15-10. Es decir, demuestre que si usamos $\mu = mM/(m + M)$ en lugar de $m$, donde $\mu$ es la masa reducida, podemos tratar el movimiento de $m$ con relación a $M$ exactamente como si $M$ fuese el origen de nuestro marco de referencia inercial. (*b*) Demuestre que la hipótesis expresada en la sección 16-8 de que $R$ es despreciablemente pequeño comparado con $r$ es equivalente a suponer que la masa reducida $\mu$ es igual a $m$. (*c*) Compare a $\mu$ del sistema Tierra-Sol con la masa de la Tierra; compare a $\mu$ del sistema Luna-Tierra con la masa de la Luna. (*d*) Si utilizáramos la masa reducida $\mu$ del sistema de dos cuerpos en lugar de $m$, ¿en qué afectaría esto a las ecuaciones de la sección 16-8?

# CAPÍTULO 17

# ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS

*La mayor parte de la materia puede ser convenientemente descrita clasificándola dentro de una de las tres* fases: *sólida, líquida, o gaseosa. Los sólidos y los líquidos (llamados también* materia condensada*) tienen cierto grupo de propiedades en común; por ejemplo, son relativamente incompresibles a la vez que su densidad permanece relativamente constante cuando varía su temperatura (manteniendo también otras propiedades, como la presión, constantes). Por otra parte, los gases son fácilmente compresibles y su densidad cambia de manera sustancial con la temperatura cuando la presión se mantiene constante.*

*Desde una perspectiva diferente, podemos agrupar en forma conjunta a los gases y a los líquidos bajo la denominación común de* fluidos. *La palabra "fluido" proviene del latín* fluere, *que significa "fluir o manar". Los fluidos fluyen, por ejemplo, para adquirir la forma del recipiente que los contenga; los sólidos no comparten esta propiedad. En el sólido, los átomos permanecen relativamente fijos en su ordenamiento; en el fluido, los átomos pueden moverse entre sí.*

*En este capítulo consideraremos las propiedades de los fluidos en reposo y las leyes por las que se rigen. En el capítulo siguiente estudiaremos las propiedades dinámicas de los fluidos en movimiento.*

## 17-1 FLUIDOS Y SÓLIDOS

En nuestra experiencia cotidiana tenemos una idea clara de la distinción entre fluidos y sólidos pero, como suele suceder en la ciencia, las experiencias cotidianas se obtienen dentro de circunstancias muy limitadas, y extrapolarlas demasiado lejos puede conducir a conclusiones incorrectas. Por ejemplo, partiendo de la experiencia cotidiana podemos proponer la distinción siguiente: el sólido conserva su forma pero el fluido fluye para adoptar la forma de su recipiente. Por otra parte, ciertas sustancias no pueden ser clasificadas con tanta facilidad. Por ejemplo, el vidrio debería clasificarse como fluido; aunque parece que mantiene su forma, el vidrio fluye durante un periodo grande de tiempo. Las ventanas de vidrio que han permanecido durante muchos años son, si las medimos más gruesas en la parte inferior que en la parte superior.

Otra forma un tanto intermedia es la sustancia plástica, la cual puede moldearse o dársele forma. Consideremos, por ejemplo, la arcilla. Mantiene su forma relativamente bien, y nos resistiríamos a clasificarla como un fluido, pero al aplicar *presión* sobre ella podemos forzarla a adoptar la forma de su recipiente. Puede hacerse que otras sustancias, a las que podríamos identificar como sólidas en la experiencia ordinaria, fluyan bajo una presión lo bastante elevada.

Por supuesto, estamos familiarizados con el cambio de estado de la materia al cambiar su temperatura, que podría fundir o evaporar esa materia. Pero estamos menos familiarizados con el cambio de estado de la materia cuando cambia la presión sobre ella, en parte porque el intervalo de presiones necesarias está, generalmente, más allá de nuestra experiencia normal. Por ejemplo, el aluminio puede estirarse para hacer de él alambre si lo hacemos pasar a través de un orificio pequeño y puede moldearse de formas diversas sometiéndolo en un troquel, a la acción de una presión elevada. Las capas de roca en plegamientos profundos que vemos a menudo en las carreteras que cruzan una montaña, son evidencia de que la "roca sólida" llega a fluir también bajo una presión suficientemente elevada.

Existe aún otra fase de la materia que no puede fácilmente clasificarse como sólido, líquido, o gas. Un *plasma* es un gas en el que los átomos están ionizados, de modo que forman una mezcla eléctricamente neutra que con-

tiene números iguales de iones cargados positivamente y electrones cargados negativamente. Las fuertes interacciones eléctricas que se dan con el entorno y entre los átomos hacen que su comportamiento sea bastante diferente al de un gas ordinario. El gas que hay dentro de una lámpara fluorescente se convierte en plasma cuando la lámpara se enciende. En una escala mucho más grande, el Sol y las demás estrellas son bolas de plasma y, así, mucha de la materia del Universo existe en esta forma. Crear y confinar plasmas de tamaño suficiente en el laboratorio son los obstáculos principales que encaran los investigadores que buscan maneras de aprovechar las reacciones de la fusión controlada para generar energía eléctrica.

Microscópicamente, ¿cómo difieren estas formas de materia unas de otras? Los sólidos son capaces de soportar una variedad de esfuerzos, como ya hemos visto en el capítulo 14. Estos esfuerzos incluyen la tensión, la compresión y el corte, entre otros. Los sólidos pueden soportar y transmitir tales esfuerzos debido a que existen fuerzas relativamente fuertes entre sus moléculas y porque tienen un *orden de largo alcance*, es decir, sus moléculas están dispuestas de manera ordenada, como los tabiques en una pared, de modo que no se puede desplazar a un átomo fácilmente de un lugar sin desplazar también a muchos otros átomos.

En los líquidos, las distancias intermoleculares son generalmente más grandes que en los sólidos; de aquí que las fuerzas intermoleculares, que varían fuertemente con la distancia, tiendan a ser más débiles en los líquidos que en los sólidos. Muchos líquidos son, como los sólidos, relativamente incompresibles, de modo que los líquidos soportan y transmiten esfuerzos de compresión; como lo veremos más adelante en este capítulo, los sistemas hidráulicos dependen de esta propiedad de los fluidos. Hasta un grado limitado, los líquidos pueden soportar también esfuerzos de tensión, lo cual estudiaremos en la sección 17-6. Sin embargo, los líquidos no pueden soportar esfuerzos cortantes porque las capas del líquido se deslizan entre sí con gran facilidad.

En los gases, las moléculas interactúan sólo débilmente, por lo que son incapaces de transmitir esfuerzos estáticos de tensión o de corte; así, son por lo general mucho más compresibles que los sólidos o los líquidos. Sin embargo, en un plasma existen fuerzas electromagnéticas de largo alcance entre las partículas. Por lo tanto, si bien un plasma parece hallarse en estado gaseoso tiene mayor similitud con un líquido en su capacidad para transmitir esfuerzos.

Hemos desarrollado un grupo de leyes mecánicas que nos permiten analizar la dinámica de partículas individuales, y hemos desarrollado también otro grupo similar de leyes que nos permiten analizar la dinámica de conjuntos de partículas en sólidos rígidos. Es importante observar que lo hicimos aun sin una teoría que explicase las fuerzas entre las partículas de que está compuesto un sólido. Aun para el caso de los sólidos que no pueden ser considerados como perfectamente rígidos, tenemos una teoría de la elasticidad (véase el capítulo 14).

La mecánica de los fluidos adquiere un planteamiento similar. Al igual que la mecánica de los cuerpos rígidos, la primera se deriva de las leyes de Newton. Para los fluidos, como para los sólidos, es conveniente desarrollar una formulación especial de estas leyes.

## 17-2 PRESIÓN Y DENSIDAD

### Presión

A un sólido podemos aplicarle una fuerza a un ángulo arbitrario con su superficie. En la sección 14-5 hemos considerado el efecto del esfuerzo cortante sobre un sólido, donde la fuerza actúa en el plano de un elemento de área de la superficie. La capacidad de fluir hace que el fluido sea incapaz de soportar un esfuerzo cortante, y en condiciones estáticas la única componente de la fuerza que debe tomarse en cuenta es la que actúa en forma *normal* o *perpendicular* a la superficie del fluido. Sin importar cuál sea la forma del fluido, las fuerzas entre el interior y el exterior actúan en todas partes en ángulo recto con las capas frontera del fluido.

La magnitud de la fuerza normal por unidad de área superficial se llama *presión*. La presión es una cantidad escalar; no tiene propiedades direccionales. Por ejemplo, cuando nadamos bajo el agua ésta ejerce una presión sobre nuestro cuerpo en todas direcciones. Incluso si la presión es producida por una fuerza que tiene propiedades direccionales y es un vector, la presión es, en sí misma, un escalar.

Microscópicamente, la presión ejercida por un fluido sobre una superficie en contacto con él es causada por colisiones de moléculas del fluido con la superficie. Como resultado de una colisión, la componente del ímpetu de una molécula perpendicular a la superficie se invierte. La superficie debe ejercer una fuerza impulsiva sobre la molécula y, según la tercera ley de Newton, las moléculas ejercen una fuerza igual perpendicular a la superficie. El resultado neto de la fuerza de reacción ejercida por muchas moléculas sobre la superficie da origen a la presión en la superficie. En el capítulo 23 desarrollaremos este cuadro más cuantitativamente para el caso de los gases.

Un fluido sometido a presión ejerce una fuerza hacia afuera sobre cualquier superficie que esté en contacto con él. Consideremos una superficie cerrada que contenga a un fluido, como en la figura 1. El fluido que está dentro de la superficie empuja al entorno. Un elemento pequeño de la superficie puede estar representado por el vector $\Delta\mathbf{A}$, cuya magnitud es numéricamente igual al elemento de

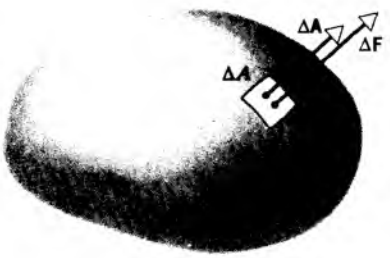



**Figura 1** Un elemento de superficie $\Delta A$ puede ser representado por un vector $\Delta \mathbf{A}$ de longitud igual a la magnitud del área del elemento y dirección perpendicular al elemento. El fluido encerrado por la superficie ejerce una fuerza $\Delta \mathbf{F}$ contra el elemento. La fuerza es perpendicular al elemento y por lo tanto paralela a $\Delta \mathbf{A}$.

área y cuya dirección es a lo largo de la normal a la superficie hacia afuera. La fuerza $\Delta \mathbf{F}$ ejercida por el fluido contra esta superficie depende de la presión $p$ de acuerdo con

$$\Delta \mathbf{F} = p\, \Delta \mathbf{A}. \tag{1}$$

Puesto que los vectores que representan a la fuerza y al área son paralelos, podemos escribir la presión en términos de la relación escalar

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}. \tag{2}$$

Tomamos al elemento $\Delta A$ como lo suficientemente pequeño para que la presión $p$ definida según la ecuación 2 sea independiente del tamaño del elemento. En general, la presión puede variar de un punto a otro de la superficie.

La presión tiene las dimensiones de fuerza dividida por área, y una unidad común para la presión es $N/m^2$. Esta unidad se denomina *pascal* (abreviatura Pa; 1 Pa = 1 $N/m^2$) en el SI. Puede encontrarse una amplia variedad de otras unidades. En Estados Unidos los medidores de la presión en las llantas de los vehículos dan una lectura en $lb/in^2$. La presión ejercida por la atmósfera de la Tierra al nivel del mar se designa como 1 atmósfera (atm; 1 atm = 14.7 $lb/in^2$ = $1.01325 \times 10^5$ Pa, exactamente). Debido a que el pascal es una unidad pequeña (1 Pa $\approx 10^{-5}$ atm), los pronosticadores del tiempo usan a menudo la unidad bar (1 bar = $10^5$ Pa, o 1 atm aproximadamente) para expresar la presión atmosférica. Otra unidad común se basa en la presión ejercida en su base por una columna vertical de mercurio de una altura específica; una columna de 760 mm de altura a una temperatura de 0° C en una localidad donde $g$ = 9.80665 $m/s^2$ ejerce una presión igual a la de la atmósfera, y así tenemos la equivalencia de 760 mm Hg = 1 atm. La altura de esta columna en pulgadas es de 29.9 in; en Estados Unidos, los barómetros comunes (y los pronosticadores del tiempo en la TV) dan la presión atmosférica en pulgadas de mercurio. Las lecturas de presión en el laboratorio se expresan a menudo en la unidad *torr*, que es la presión ejercida por una columna de mercurio de 1 mm de altura bajo las condiciones especificadas.

La tabla 1 da algunas presiones representativas en unidades pascal. El término "sobrepresión" indica un valor excesivo de la presión atmosférica normal. Obsérvese que en el laboratorio podemos producir presiones que varían dentro de 22 órdenes de magnitud. En el apéndice G el lector hallará los factores de conversión necesarios para convertir las mediciones de la presión de un grupo de unidades a otro.

## Densidad

La densidad $\rho$ de un elemento pequeño de cualquier material es la masa $\Delta m$ del elemento dividida entre su volumen $\Delta V$:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{3}$$

La densidad en un punto es el valor límite de esta razón cuando el elemento de volumen se hace pequeño. La densidad no tiene propiedades direccionales y es un escalar.

Si la densidad de un objeto tiene el mismo valor en todos los puntos, la densidad del objeto es igual a la masa de todo el objeto dividida por su volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{4}$$

La densidad de un material en general depende de factores ambientales, incluyendo la presión y la temperatura. En los líquidos y en los sólidos, la variación de la densidad es muy pequeña dentro de intervalos grandes de presión y de temperatura, y en muchas aplicaciones podemos considerar a la densidad como una constante. La

**TABLA 1** ALGUNAS PRESIONES

| *Sistema* | *Presión (Pa)* |
|---|---|
| Centro del Sol | $2 \times 10^{16}$ |
| Centro de la Tierra | $4 \times 10^{11}$ |
| Mayor presión sostenida en el laboratorio | $1.5 \times 10^{10}$ |
| La fosa oceánica más profunda | $1.1 \times 10^{8}$ |
| Tacones puntiagudos sobre una pista de baile | $2 \times 10^{7}$ |
| Llanta de automóvil (sobrepresión) | $2 \times 10^{5}$ |
| Atmósfera al nivel del mar | $1.0 \times 10^{5}$ |
| Presión normal de la sangre† | $1.6 \times 10^{4}$ |
| El sonido más fuerte tolerable‡ | 30 |
| El sonido más débil detectable‡ | $3 \times 10^{-5}$ |
| El mejor vacío en el laboratorio | $10^{-12}$ |

† La sobrepresión sistólica, correspondiente a 120 mm Hg en el esfigmomanómetro del médico.

‡ Sobrepresión en el tímpano del oído, a 1000 Hz.

**TABLA 2 ALGUNAS DENSIDADES**

| *Material u objeto* | *Densidad (kg/m³)* |
|---|---|
| Espacio interestelar | $10^{-20}$ |
| El mejor vacío en el laboratorio | $10^{-17}$ |
| Aire: 20° C y 1 atm | 1.21 |
| 20° C y 50 atm | 60.5 |
| Espuma de estireno | $1 \times 10^2$ |
| Hielo | $0.917 \times 10^3$ |
| Agua: 20° C y 1 atm | $0.998 \times 10^3$ |
| 20° C y 50 atm | $1.000 \times 10^3$ |
| Agua de mar: 20° C y 1 atm | $1.024 \times 10^3$ |
| Sangre entera | $1.060 \times 10^3$ |
| Hierro | $7.8 \times 10^3$ |
| Mercurio | $13.6 \times 10^3$ |
| La Tierra: promedio | $5.5 \times 10^3$ |
| núcleo | $9.5 \times 10^3$ |
| corteza | $2.8 \times 10^3$ |
| El Sol: promedio | $1.4 \times 10^3$ |
| núcleo | $1.6 \times 10^5$ |
| Estrella enana blanca (núcleo) | $10^{10}$ |
| Núcleo del uranio | $3 \times 10^{17}$ |
| Estrella de neutrones (núcleo) | $10^{18}$ |
| Hoyo negro (1 masa solar) | $10^{19}$ |

tabla 2 presenta algunas densidades representativas, que varían en alrededor de 21 órdenes de magnitud en el laboratorio y en casi 40 órdenes de magnitud desde los objetos más densos del Universo (un hoyo negro hipotético) hasta el casi vacío del espacio mismo.

En analogía con la exposición del concepto esfuerzo contra deformación unitaria de la sección 14-5, un cambio $\Delta p$ en la presión aplicada a cualquier material es un esfuerzo. La deformación unitaria correspondiente es un cambio de volumen, el cual escribimos como: $\Delta V/V$. La relación entre esfuerzo y deformación unitaria se llama *módulo volumétrico B*:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}. \qquad (5)$$

En esta definición se inserta el signo menos para que $B$ sea una cantidad positiva, porque $\Delta p$ y $\Delta V$ tienen signos opuestos. Esto es, un *aumento* de presión ($\Delta p > 0$) causa una *disminución* de volumen ($\Delta V < 0$). Obsérvese que $B$ tiene la misma dimensión que la presión, porque $\Delta V/V$ es una cantidad sin dimensión.

Si el módulo volumétrico de un material es grande, entonces (según la Ec. 5) un cambio grande de presión $\Delta p$ produce únicamente un cambio pequeño en su volumen. En este caso, podemos considerar al material como si fuese prácticamente incompresible. El módulo volumétrico del agua, por ejemplo, es de $2.2 \times 10^9$ N/m². A la presión en el fondo del Océano Pacífico ($4.0 \times 10^7$ N/m², alrededor de 400 atm), el cambio relativo de volumen causado por la presión es de sólo 1.8%. Los sólidos tienen por lo general módulos volumétricos más elevados que los líquidos, a causa del acoplamiento mayor de los átomos en los sólidos. Una presión dada produce entonces un cambio más pequeño en el volumen de un sólido que en el de un líquido. En circunstancias ordinarias, podemos por tanto considerar como incompresibles tanto a los sólidos como a los líquidos.

Si $B$ es pequeño, el volumen puede ser cambiado por un cambio de presión modesto, y se dice que el material es compresible. Los gases típicos tienen módulos volumétricos de alrededor de $10^5$ N/m². Un pequeño cambio de presión de 0.1 atm puede cambiar el volumen de un gas en un 10%. Así, los gases son fácilmente compresibles.

## 17-3 VARIACIÓN DE LA PRESIÓN EN UN FLUIDO EN REPOSO

Si un fluido está en equilibrio, cada porción del fluido está en equilibrio. Es decir, tanto la fuerza neta como la torca neta sobre cada elemento del fluido debe ser cero. Consideremos un pequeño elemento de volumen del fluido sumergido dentro del cuerpo del fluido. Consideremos que este elemento tenga la forma de un disco delgado y esté a una distancia $y$ arriba de algún nivel de referencia, como se muestra en la figura 2*a*. El espesor del disco es $dy$ y cada cara tiene un área $A$. La masa de este elemento es $dm = \rho\, dV = \rho A\, dy$, y su peso es $(dm)g = \rho g A\, dy$. Las fuerzas ejercidas sobre el elemento por el fluido que lo rodea son perpendiculares a su superficie en cada punto (Fig. 2*b*).

La fuerza horizontal resultante es cero porque el elemento no tiene aceleración horizontal. Las fuerzas horizontales se deben únicamente a la presión del fluido, y por simetría la presión debe ser la misma en todos los puntos comprendidos en un plano horizontal en $y$.

El elemento de fluido no estará acelerado en dirección vertical, de modo que la fuerza vertical resultante sobre él debe ser cero. En la figura 2*c* se muestra un diagrama de cuerpo libre del elemento de fluido. Las fuerzas verticales son debidas no sólo a la presión del fluido que lo rodea en sus caras, sino también al peso del elemento. Si tomamos a $p$ como la presión en la cara inferior y $p + dp$ como la presión en su cara superior, la fuerza hacia arriba es $pA$, y las fuerzas hacia abajo son $(p + dp)A$ y el peso del elemento $(dm)g = \rho g A\, dy$. De aquí que, para el equilibrio vertical,

$$\sum F_y = pA - (p + dp)A - \rho g A\, dy = 0,$$

de donde obtenemos

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g. \qquad (6)$$

Esta ecuación nos dice cómo varía la presión con la elevación sobre cierto nivel de referencia en un fluido en

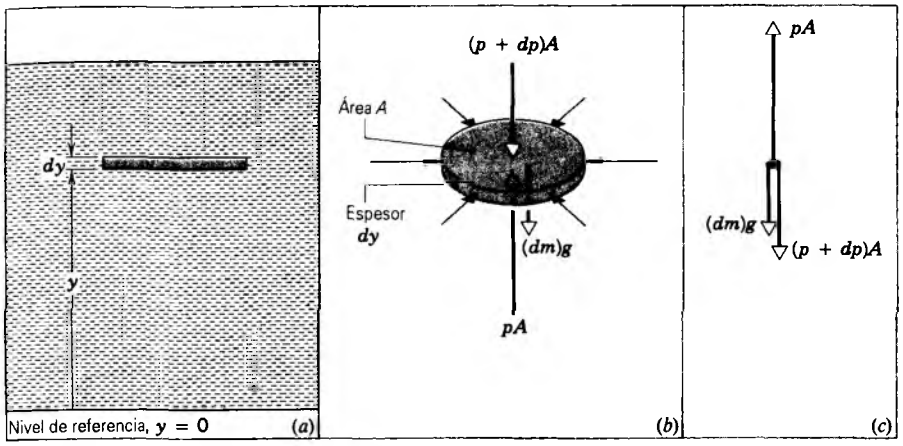



**Figura 2** (*a*) Un pequeño elemento de volumen del fluido en reposo. (*b*) Las fuerzas sobre el elemento. (*c*) Diagrama de cuerpo libre del elemento.

equilibrio estático. Al aumentar la elevación ($dy$ positiva), la presión disminuye ($dp$ negativa). La causa de la variación de esta presión es el peso por unidad de área de la sección transversal de las capas de fluido que están entre los puntos cuya diferencia de presión está siendo medida.

La cantidad $\rho g$ suele llamarse *peso específico* del fluido; y es el peso por unidad de volumen del fluido. Por ejemplo, para el agua, el peso específico es 9800 N/m$^3$ = 62.4 lb/ft$^3$.

Si $p_1$ es la presión en la elevación $y_1$, y $p_2$ es la presión en la elevación $y_2$ sobre algún nivel de referencia, la integración de la ecuación 6 da

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g \, dy$$

o sea

$$p_2 - p_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g \, dy. \tag{7}$$

En los líquidos, que son casi incompresibles, $\rho$ es prácticamente constante, y las diferencias de nivel raramente son tan grandes que haya de considerarse algún cambio en $g$. Así pues, tomando a $\rho$ y a $g$ como constantes, obtenemos

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \tag{8}$$

para un líquido homogéneo.

Si un líquido tiene una superficie libre, ésta es el nivel natural desde el cual se miden las distancias (Fig. 3). Sea $y_2$ la elevación de la superficie, en cuyo punto la presión $p_2$ que actúa sobre el fluido es usualmente la ejercida por la atmósfera de la Tierra $p_0$. Consideramos que $y_1$ está en cualquier nivel del fluido, y representamos a la presión de ese lugar como $p$. Entonces,

$$p_0 - p = -\rho g(y_2 - y_1).$$

Pero $y_2 - y_1$ es la profundidad $h$ bajo la superficie a la cual la presión es $p$ (véase la Fig. 3), de modo que

$$p = p_0 + \rho g h. \tag{9}$$

Esto demuestra claramente que en un líquido la presión aumenta con la profundidad, pero es la misma en todos los puntos situados a la misma profundidad. El segundo término a la derecha de la ecuación 9 da la contribución a la presión en un punto del líquido debida al peso del fluido de altura $h$ sobre ese punto.

La ecuación 8 da la relación entre las presiones en dos puntos cualesquiera de un fluido, sin que importe la forma de la vasija que lo contiene. Al no importar la forma de la vasija que lo contiene, dos puntos del fluido pueden estar unidos por una trayectoria hecha de etapas verticales y horizontales. Por ejemplo, consideremos los puntos $A$ y $B$ en el líquido homogéneo contenido en el tubo en forma de U de la figura 4*a*. A lo largo de la trayectoria en zigzag de $A$ a $B$ existe una diferencia de presión $\rho g y'$ en cada segmento vertical de longitud $y'$, mientras que a lo largo de cada segmento horizontal no existe un cambio de presión. De aquí que la diferencia de presión $p_B - p_A$ sea $\rho g$ veces la suma algebraica de los segmentos verticales desde $A$ hasta $B$, o $\rho g(y_2 - y_1)$.

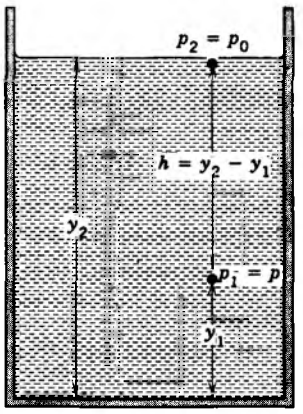



**Figura 3** Un recipiente contiene un líquido cuya superficie superior está abierta a la atmósfera. La presión en cualquier punto del líquido depende de la profundidad $h$.

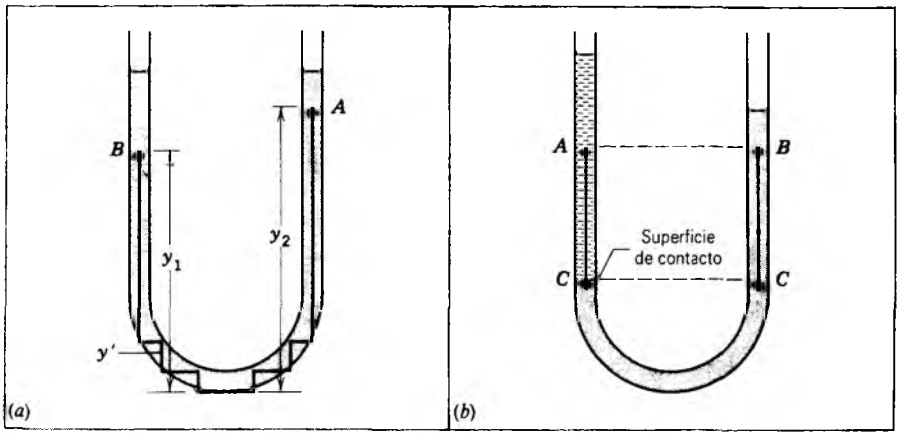



**Figura 4** (*a*) La diferencia de presión entre dos puntos *A* y *B* de un líquido homogéneo depende únicamente de su diferencia en altura $y_2 - y_1$. (*b*) Dos puntos *A* y *B* a la misma altura pueden estar a diferentes presiones si ahí las densidades difieren.

Si el tubo en U contiene líquidos inmiscibles diferentes, digamos, un líquido denso en el tubo de la derecha y otro menos denso en el tubo de la izquierda, como se muestra en la figura 4*b*, la presión puede ser diferente en un mismo nivel (puntos *A* y *B*) en lados diferentes. El líquido bajo la línea *CC* está en equilibrio, entonces, la fuerza ejercida por la columna de la izquierda sobre *C* debe ser igual a la fuerza ejercida por la columna de la derecha sobre *C*. La presión en *C* es la misma en ambos lados, pero la presión decae menos desde *C* hasta *A* que desde *C* hasta *B*, porque el líquido a la izquierda es menos denso que el líquido a la derecha. Entonces, la presión en *A* es mayor que en *B*.

## Variación de la presión en la atmósfera

Para los gases, $\rho$ es comparativamente pequeña y la diferencia de presión entre dos puntos vecinos suele ser despreciable (véase la Ec. 8). Entonces en una vasija razonablemente pequeña que contenga un gas, la presión puede ser considerada como la misma en cualquier parte. Sin embargo, éste no es el caso cuando $y_2 - y_1$ es muy grande. La presión del aire varía notablemente cuando ascendemos a grandes alturas en la atmósfera. Además, la densidad $\rho$ varía con la altitud, y $\rho$ debe ser conocida en función de $y$ antes de que podamos integrar la ecuación 7.

Podemos obtener una idea razonable de la variación de la presión con la altitud en la atmósfera de la Tierra si suponemos que la densidad $\rho$ es proporcional a la presión. Esto sería así de manera muy aproximada (de acuerdo con la ley del gas ideal, la cual estudiaremos en el capítulo 23) si la temperatura del aire permaneciese igual en todas las altitudes. Haciendo uso de esta hipótesis, y suponiendo también que la variación de $g$ con la altitud sea despreciable, podemos hallar la presión $p$ a cualquier altitud $y$ sobre el nivel del mar.

Partiendo de la ecuación 6 tenemos que

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g.$$

Puesto que $\rho$ es proporcional a $p$, tenemos

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}, \tag{10}$$

donde $\rho_0$ y $p_0$ son los valores de la densidad y de la presión al nivel del mar. Entonces,

$$\frac{dp}{dy} = -g\rho_0 \frac{p}{p_0},$$

de modo que

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0}\, dy. \tag{11}$$

Integrando la ecuación 11 desde la presión $p_0$ a una altitud $y = 0$ (nivel del mar) hasta la presión $p$ a una altitud $y$, obtenemos

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\int_0^y \frac{g\rho_0}{p_0}\, dy,$$

lo cual da

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g\rho_0}{p_0}\, y$$

o sea

$$p = p_0 e^{-(g\rho_0/p_0)y}. \tag{12}$$

Usando los valores $g = 9.80$ m/s$^2$, $\rho_0 = 1.21$ kg/m$^3$ (a 20° C), y $p_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa, obtenemos

$$\frac{g\rho_0}{p_0} = 1.17 \times 10^{-4}\ \text{m}^{-1} = 0.117\ \text{km}^{-1}.$$

De aquí que

$$p = p_0 e^{-y/a} \tag{13}$$

donde $1/a = g\rho_0/p_0 = 0.117$ km$^{-1}$ o $a = 8.55$ km. La constante $a$ da el cambio de altitud para el cual la presión decae por un factor de $e$. O, lo que es lo mismo, la presión atmosférica decae por un factor de 10 cuando la altitud cambia en $a$ ln 10 = $2.30a$ = 20 km. A una altitud de $h$ = 20 km sobre el nivel del mar, la presión atmosférica sería

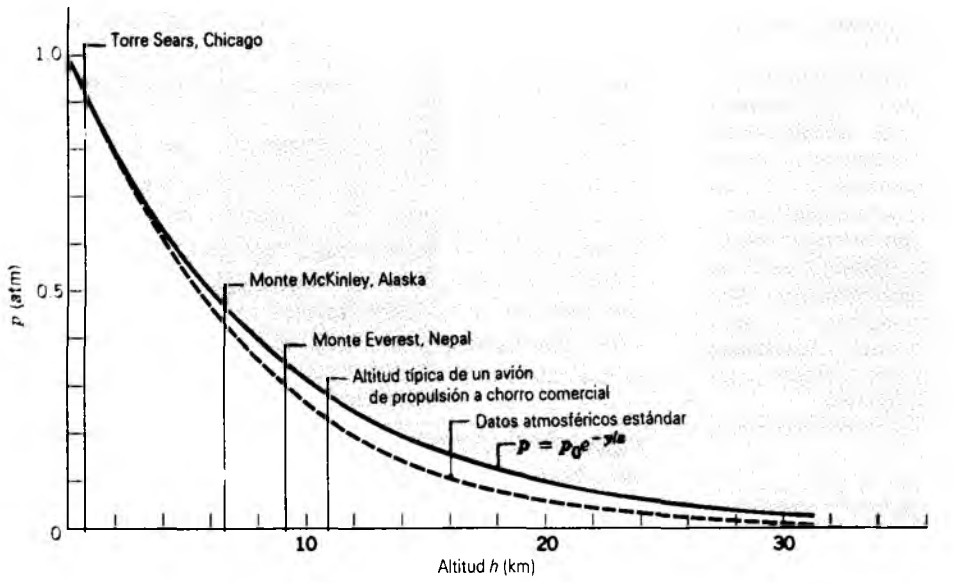



**Figura 5** Comparación entre los datos de la presión atmosférica estándar (línea de puntos) con las predicciones de la ecuación 13 (línea continua). Las dos curvas difieren porque nuestro cálculo despreció la variación de la densidad con la temperatura al aumentar la altitud.

entonces 0.1 atm; en $h$ = 40 km sobre el nivel del mar, sería 0.01 atm. La figura 5 muestra una comparación entre la variación de la presión con la altitud predicha por la ecuación 13 y la medida para la atmósfera.

Para los gases a una temperatura uniforme la densidad $\rho$ de cualquier capa es proporcional a la presión $p$ en esa capa. Sin embargo, los líquidos son casi incompresibles, de modo que las capas más bajas no resultan notablemente comprimidas por el peso de las capas más altas sobreimpuestas a ellas, y la densidad $\rho$ es prácticamente constante en todos los niveles. La variación de la presión con la distancia sobre el fondo del fluido en un gas es diferente de la de un líquido, como lo indica la ecuación 9 para un líquido y la ecuación 13 para un gas.

**Problema muestra 1** Un tubo en U, en el cual ambos extremos están abiertos a la atmósfera, contiene cierta cantidad de agua. En el otro lado se vierte aceite, sustancia que no se mezcla con el agua, hasta que llega a una distancia $d$ = 12.3 mm sobre el nivel del agua, del otro lado, nivel que se ha elevado mientras tanto a una distancia $a$ = 67.5 mm desde su nivel original (Fig. 6). Halle la densidad del aceite.

**Solución** En la figura 6 los puntos $C$ están a la misma presión. (Si esto no fuera así, entonces el elemento de fluido en forma de U que está abajo del nivel $CC$ experimentaría una fuerza neta no balanceada y se aceleraría, violando la hipótesis estática que hacemos en este problema.) La caída de presión desde $C$ hasta la superficie del lado del agua es $\rho_w g 2a$, donde $2a$ es la altura de la columna de agua que está sobre $C$. La caída de presión en el otro lado desde $C$ hasta la superficie es $\rho g(2a + d)$, donde $\rho$ es la densidad del aceite, desconocida. Igualando las presiones en el punto $C$ de cada lado, obtenemos

$$p_0 + \rho_w g 2a = p_0 + \rho g(2a + d)$$

y así

$$\rho = \rho_w \frac{2a}{(2a + d)}$$

$$= (1.000 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \frac{2(67.5 \text{ mm})}{2(67.5 \text{ mm}) + 12.3 \text{ mm}}$$

$$= 916 \text{ kg/m}^3.$$

La razón de la densidad de una sustancia a la densidad del agua se llama *densidad relativa* ( o *gravedad específica*)

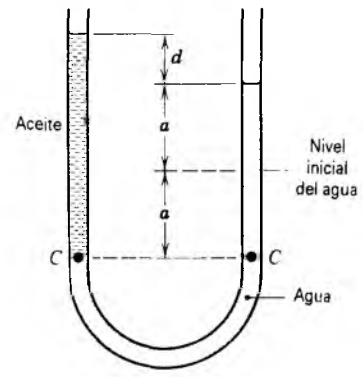



**Figura 6** Problema muestra 1 Un tubo en U se llena parcialmente de agua y parcialmente de aceite de densidad desconocida.

de esa sustancia. En este caso la gravedad específica del aceite es 0.916.

Obsérvese que al resolver este problema hemos supuesto que la presión es continua sobre la superficie de contacto entre el aceite y el agua en el punto $C$ del lado izquierdo del tubo. Si no fuera así y las presiones fueran diferentes, entonces la fuerza ejercida por el fluido en un lado de la superficie de contacto diferiría de la del fluido en el otro lado, y la superficie de contacto se aceleraría bajo la influencia de una fuerza no balanceada. Puesto que estamos suponiendo una situación estática, no puede haber movimiento y por lo tanto las presiones deben ser las mismas. Sin embargo, cuando vertemos primero el aceite en el tubo puede haber una diferencia de presión y una fuerza no balanceada que causaría que el sistema se moviese hasta llegar a la situación estática mostrada en la figura 6.

## 17-4 PRINCIPIO DE PASCAL Y PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Cuando oprimimos un tubo de pasta dental, la pasta fluye hacia afuera por la abertura del tubo. Esto demuestra la acción del *principio de Pascal*. Cuando se aplica presión en cualquier lugar del tubo, ésta se resiente en cualquier lugar del tubo obligando a la pasta dental a salir de él. He aquí el postulado del principio de Pascal, quien lo presentó por vez primera en 1652:

> *La presión aplicada a un fluido confinado se transmite íntegramente a todas las partes del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene.*

Es decir, si aumentamos en un lugar la presión sobre un fluido en una cantidad $\Delta p$, cualquier otra parte del fluido experimenta el mismo aumento de presión.

El principio de Pascal es la base de la operación de todos los mecanismos transmisores de fuerza hidráulica, tales como los que podrían encontrarse en la maquinaria para el movimiento de tierras o en el sistema de frenos de un automóvil. Ello nos permite amplificar una fuerza aplicada relativamente pequeña para elevar un peso mucho más grande (como en la plataforma de elevación de automóviles o en la silla del dentista) y para transmitir fuerzas a grandes distancias hasta lugares relativamente inaccesibles (como en los mecanismos de control de los alerones que se usan en los aeroplanos).

Probaremos el principio de Pascal para un líquido incompresible. La figura 7 muestra al líquido dentro de un cilindro que está equipado con un émbolo. Se aplica al émbolo una fuerza externa, por ejemplo, por medio del peso de algunos objetos apilados sobre él. La fuerza externa da por resultado una presión externa $p_{ext}$ aplicada al líquido que se halla inmediatamente debajo del émbolo. Si el líquido tiene una densidad $\rho$, entonces, según la ecuación 9, podemos escribir la presión en un punto arbitrario $P$ a una distancia $h$ bajo la superficie:

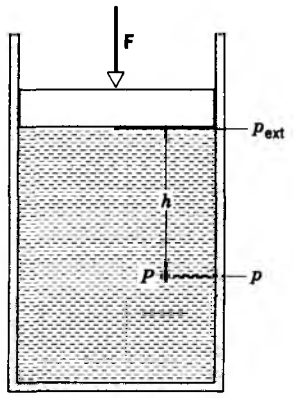



**Figura 7** Un fluido dentro de un cilindro equipado con un émbolo móvil. La presión en cualquier punto $P$ se debe no solamente al peso del fluido sobre el nivel de $P$ sino también a la fuerza ejercida por el émbolo.

$$p = p_{ext} + \rho gh. \tag{14}$$

Supongamos ahora que la presión externa aumenta en una cantidad $\Delta p_{ext}$, quizá por haber añadido algo de más peso sobre el émbolo. ¿Cómo cambia la presión $p$ en el fluido como resultado de este cambio en la presión externa? Suponemos que el líquido es incompresible, de modo que la densidad $\rho$ permanece constante. El cambio en la presión externa da por resultado un cambio en la presión del fluido que se deduce de la ecuación 14:

$$\Delta p = \Delta p_{ext} + \Delta(\rho gh). \tag{15}$$

Puesto que el líquido es incompresible, la densidad es constante, y el segundo término a la derecha en la ecuación 15 es igual a cero. En este caso, obtenemos

$$\Delta p = \Delta p_{ext}\,. \tag{16}$$

El cambio de presión en cualquier punto del fluido es sencillamente igual al cambio de la presión externa aplicada. Este resultado confirma el principio de Pascal y demuestra que se deduce directamente de nuestra consideración previa de la presión estática en un fluido. Por lo tanto, no es un principio independiente sino una consecuencia directa de nuestra formulación de la estática de los fluidos.

Si bien hemos derivado el resultado anterior para los líquidos incompresibles, el principio de Pascal se cumple en todos los casos de fluidos reales (compresibles), ya sean gases o líquidos. El cambio en la presión externa causa un cambio en la densidad que se propaga en el fluido como una onda a la velocidad del sonido, pero una vez que la perturbación termina y se establece el equilibrio, se encuentra que el principio de Pascal permanece válido.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACIÓN Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



## La palanca hidráulica

La figura 8 muestra un dispositivo que se usa a menudo para levantar un objeto pesado, como un automóvil. Sobre un pistón de área $A_i$ se ejerce una fuerza externa $F_i$. El objeto que va a ser levantado ejerce una fuerza $Mg$ sobre el émbolo grande de área $A_o$. En equilibrio, la magnitud de la fuerza hacia arriba $F_o$ ejercida por el fluido sobre el émbolo grande debe ser igual a la de la fuerza hacia abajo $Mg$ del peso del objeto (despreciando el peso del propio émbolo). Deseamos hallar la relación entre la fuerza aplicada $F_i$ y la "fuerza de salida" $F_o$ que el sistema puede ejercer sobre el émbolo grande.

La presión sobre el fluido en el émbolo pequeño, debida a nuestra fuerza externa aplicada, es $p_i = F_i/A_i$. De acuerdo con el principio de Pascal, esta presión de "entrada" debe ser igual a la presión de "salida" $p_o = F_o/A_o$, que el fluido ejerce *sobre* el émbolo grande. Entonces $p_i = p_0$, y entonces

$$\frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_o},$$

o sea

$$F_i = F_o \frac{A_i}{A_o} = Mg \frac{A_i}{A_o}. \qquad (17)$$

La razón $A_i/A_o$ es generalmente mucho menor de 1, y entonces la fuerza aplicada puede ser mucho menor que el peso $Mg$ que está siendo levantado.

El movimiento hacia abajo del émbolo pequeño a lo largo de una distancia $d_i$ desplaza un volumen de fluido $V = d_i A_i$. Si el fluido es incompresible, entonces este volumen debe ser igual al volumen desplazado por el movimiento hacia arriba del émbolo grande:

$$V = d_i A_i = d_o A_o,$$

o

$$d_o = d_i \frac{A_i}{A_o}. \qquad (18)$$

Si $A_i/A_o$ es un número pequeño, entonces la distancia a la que se desplaza el émbolo grande es mucho más pequeña que la distancia a la que se desplaza el émbolo pequeño

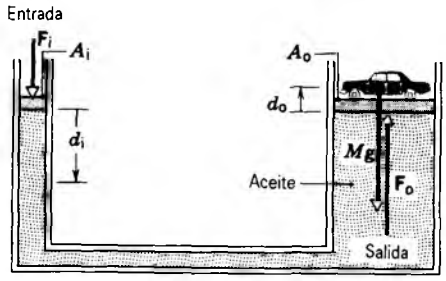



**Figura 8** La palanca hidráulica. Una fuerza $\mathbf{F}_i$ aplicada al émbolo pequeño puede producir una fuerza $\mathbf{F}_o$ mucho mayor sobre el émbolo grande, que pueda levantar un peso $Mg$.

a causa de la fuerza aplicada. El precio que pagamos por la posibilidad de levantar una carga grande es el de perder la posibilidad de trasladarla muy lejos.

Al combinar las ecuaciones 17 y 18 vemos que $F_i d_i = F_o d_o$, lo cual demuestra que el trabajo efectuado por la fuerza externa sobre el émbolo pequeño es igual al trabajo efectuado por el fluido sobre el émbolo grande. Entonces, (despreciando la fricción y otras fuerzas disipativas) no existe una ganancia (o pérdida) neta de energía al usar este sistema hidráulico.

**Problema muestra 2** La figura 9 muestra una vista esquemática de un gato hidráulico empleado para elevar un automóvil. El fluido hidráulico es aceite (densidad = 812 kg/m³). Se emplea una bomba de mano, con la cual se aplica una fuerza de magnitud $F_i$ al émbolo menor (de 2.2 cm de diámetro) cuando la mano aplica una fuerza de magnitud $F_h$ al extremo del mango de la bomba. La masa combinada del automóvil que va a ser elevado y la plataforma de elevación es de $M$ = 1980 kg, y el émbolo grande tiene un diámetro de 16.4 cm. La longitud $L$ del mango de la bomba es de 36 cm, y la distancia $x$ desde el pivote hasta el émbolo es de 9.4 cm. (*a*) ¿Cuál es la fuerza aplicada $F_h$ necesaria para elevar el automóvil? (*b*) Por cada carrera hacia abajo de la bomba, en la que la mano se mueve una distancia vertical de 28 cm, ¿a qué altura se eleva el automóvil?

**Solución** (*a*) Partiendo de la ecuación 17,

$$F_i = Mg \frac{A_i}{A_o} = (1980 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \frac{\pi(1.1 \text{ cm})^2}{\pi(8.2 \text{ cm})^2} = 349 \text{ N}.$$

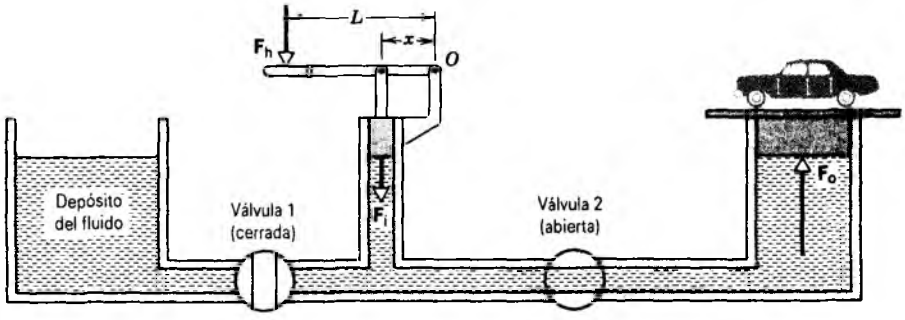



**Figura 9** Problema muestra 2. Se emplea una bomba hidráulica para elevar un automóvil. En la carrera hacia abajo, se cierra la válvula 1 y se abre la válvula 2. Durante la carrera hacia arriba, se abre la válvula 1 y se cierra la válvula 2, permitiendo que se transfiera fluido adicional a la cámara hidráulica.

Considerando las torcas sobre el mango de la bomba con respecto al punto de pivoteo $O$, despreciando las masas del mango de la bomba y del émbolo pequeño, y suponiendo que el mango de la bomba se mueva con una aceleración angular despreciablemente pequeña, obtenemos

$$\sum \tau = F_h L - F_i x = 0,$$

donde hemos empleado la tercera ley de Newton para relacionar a la fuerza $\mathbf{F}_i$ ejercida *por* el mango de la bomba *sobre* el émbolo con la fuerza $-\mathbf{F}_i$ ejercida *por* el émbolo *sobre* el mango de la bomba. Resolviendo para $F_h$, hallamos que

$$F_h = F_i \frac{x}{L} = (349 \text{ N}) \frac{9.4 \text{ cm}}{36 \text{ cm}} = 91 \text{ N}.$$

Tal fuerza, alrededor de 20 lb, puede ser aplicada fácilmente a mano.

(*b*) Cuando la mano se mueve a lo largo de una distancia vertical $h$, el émbolo pequeño se moverá a lo largo de la distancia

$$d_i = h \frac{x}{L} = (28 \text{ cm}) \frac{9.4 \text{ cm}}{36 \text{ cm}} = 7.3 \text{ cm}.$$

La ecuación 18 da entonces la distancia recorrida por el émbolo grande:

$$d_o = d_i \frac{A_i}{A_o} = (7.3 \text{ cm}) \frac{\pi(1.1 \text{ cm})^2}{\pi(8.2 \text{ cm})^2} = 0.13 \text{ cm} = 1.3 \text{ mm}.$$

Elevar el automóvil sólo a una distancia tan corta es el precio que pagamos por ejercer una fuerza tan pequeña para elevarlo. Por supuesto, si queremos un aparato que sea útil debemos poder elevar el automóvil a una distancia más grande, lo cual se consigue por medio de muchas carreras de la bomba. Para evitar que el automóvil descienda durante la carrera hacia arriba de la bomba, se emplea el dispositivo de válvulas mostrado en la figura 9. Durante la carrera hacia abajo, las válvulas están en la posición mostrada en la figura 9, y el automóvil se eleva a una distancia $d_o$. Durante la carrera de retorno se cierra la válvula 2, atrapando al fluido del lado derecho de la cámara y manteniendo el automóvil a una altura fija; luego, se abre la válvula 1, de modo que la carrera de retorno reciba fluido adicional del depósito del lado izquierdo de la cámara. En la siguiente carrera hacia abajo, las válvulas retornan a la posición mostrada en la figura, y el automóvil es elevado en otro incremento $d_o$. En efecto, el volumen de fluido hidráulico recibido del lado izquierdo de la cámara durante la carrera hacia arriba se bombea hacia el lado derecho de la cámara durante la carrera hacia abajo. Cuando se completa el proceso, el automóvil descenderá abriendo ambas válvulas y permitiendo que el fluido se drene directamente al depósito.

¿Cómo cambia la operación del gato hidráulico cuando el automóvil es levantado y la altura del fluido en la columna derecha aumenta? Haga un cálculo numérico.

## Principio de Arquímedes

La figura 10*a* muestra cierto volumen de agua contenida en una bolsa de plástico delgado situada bajo el agua. El agua de la bolsa está en equilibrio estático. Por lo tanto, su peso debe estar equilibrado por una fuerza hacia arriba de igual magnitud. Esta fuerza hacia arriba es la suma vectorial de todas las fuerzas hacia adentro ejercidas por el fluido que rodea a la bolsa. Las flechas de la figura 10*a* representan a las fuerzas ejercidas sobre el volumen de líquido como resultado de la presión del fluido que lo rodea. Nótese que las fuerzas hacia arriba sobre el fondo de la bolsa son más grandes que las fuerzas hacia abajo sobre la parte superior, debido a que la presión aumenta con la profundidad. La fuerza neta hacia arriba que resulta de esta diferencia de presiones se denomina *fuerza de flotación o empuje*.

La presión ejercida sobre un objeto sumergido por el líquido que lo rodea ciertamente no depende del material del cual está hecho el objeto. Por lo tanto, podríamos sustituir la bolsa de agua por un trozo de madera del mismo tamaño y forma exactas, y la fuerza de flotación no cambiaría. La fuerza hacia arriba sigue siendo igual al peso del volumen original de agua. Esto nos conduce al principio de Arquímedes:

*Todo cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido sufre un empuje de abajo arriba por una fuerza de magnitud igual al del peso del fluido que desaloja.*

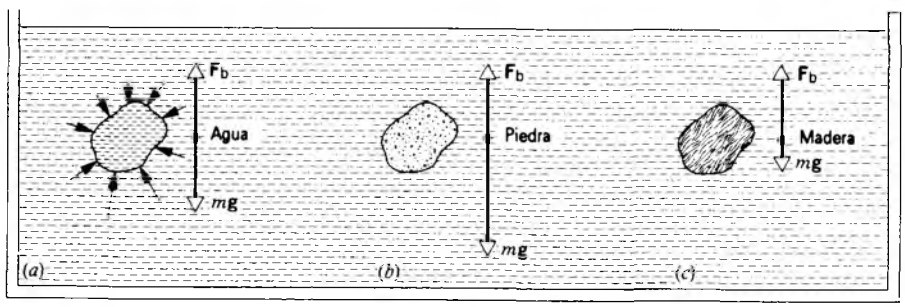



**Figura 10** (*a*) Una bolsa de plástico delgado llena de agua en equilibrio bajo el agua. El agua que rodea a la bolsa ejerce fuerzas de presión sobre su superficie, siendo la resultante una fuerza de rotación o empuje hacia arriba $\mathbf{F}_b$ que actúa sobre la bolsa. (*b*) Para una piedra del mismo volumen, la fuerza de flotación es la misma, pero el peso excede a la fuerza de flotación, y así, la piedra no está en equilibrio. (*c*) En el caso de una pieza de madera del mismo volumen, el peso es menor que la fuerza de flotación.

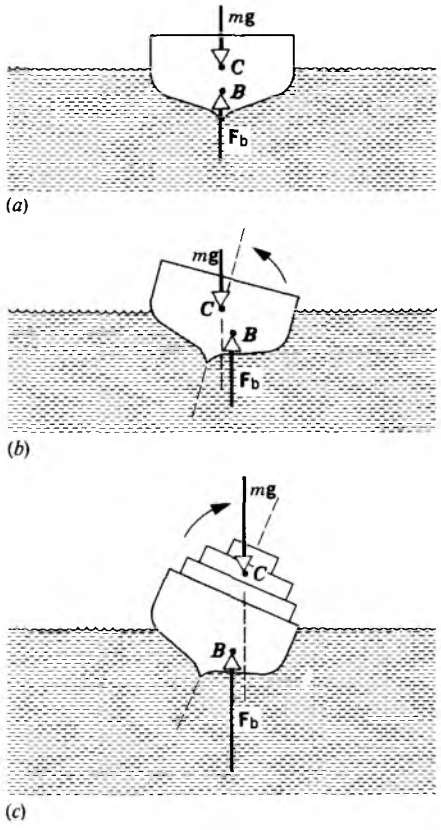



**Figura 11** (*a*) Una sección transversal de un barco que flota en posición normal. La fuerza de flotación $\mathbf{F}_b$ actúa en el centro de flotación *B*, y el peso actúa en el centro de gravedad *C*. El barco está en equilibrio bajo la acción de estas fuerzas. (*b*) Cuando el barco se ladea, el centro de flotación puede ya no estar situado en la misma línea vertical que el centro de gravedad, y puede actuar una torca neta sobre el barco. Aquí, la torca con respecto a *C* actúa para regresar al barco a la posición normal. (*c*) Aquí, el centro de gravedad está situado más arriba, de modo que la torca respecto a *C* debido a la fuerza de flotación tiende a ladear al barco aun más.

Un objeto de mayor densidad que el agua (Fig. 10*b*) desaloja un volumen de agua cuyo peso es menor que el peso del objeto. Por lo tanto, el objeto se hunde en el agua, porque la fuerza del empuje es menor que el peso del objeto. Si tratamos de elevar al objeto mientras esté bajo el agua, encontramos que exige menos fuerza que el peso normal del objeto, siendo la diferencia la fuerza del empuje. Los objetos sumergidos parecen pesar menos de lo que pesan normalmente. Los astronautas se preparan para sus viajes practicando tareas en grandes tanques bajo el agua, para simular un tanto la condición ingravidez en el espacio.

Un objeto de densidad menor que el agua (Fig. 10*c*) *experimenta una fuerza neta hacia arriba cuando está* completamente sumergido, porque el peso del agua desalojada es mayor que el peso del objeto. Por lo tanto, el objeto se eleva hasta subir a la superficie, y continúa elevándose hasta que la parte de él que quede sumergida sea del volumen necesario para desalojar al agua cuyo peso es igual al peso total del objeto. En esa situación el objeto flota en equilibrio.

La fuerza de flotación puede verse como si actuase en el centro de gravedad del fluido desalojado por la parte sumergida de un objeto flotante. Este punto se conoce como *centro de flotación*. El peso actúa en el centro de gravedad de todo el objeto. Estos dos puntos no son en general los mismos (Fig. 11*a*). Si los dos puntos están situados en la misma línea vertical, entonces el objeto puede flotar en equilibrio: tanto la fuerza neta como la torca neta son nulos. Si el objeto flotante se ladea ligeramente sacándolo de su posición de equilibrio, entonces la forma total del fluido desalojado cambia, y el *centro de flotación* cambia su posición con respecto al centro de gravedad del objeto flotante. Así pues, sobre el objeto flotante actúa una torca que podría inclinar al objeto nuevamente hacia su posición de equilibrio (Fig. 11*b*), o podría actuar en la otra dirección para volcarlo completamente (Fig. 11*c*).

**Problema muestra 3** ¿Qué fracción del volumen total de un iceberg queda expuesta?

**Solución** El peso del iceberg es

$$W_i = \rho_i V_i g,$$

donde $V_i$ es el volumen del iceberg. El peso del volumen $V_a$ del agua de mar desalojada (o, lo que es lo mismo, del volumen de la parte sumergida del iceberg) es la fuerza de flotación

$$F_b = \rho_w V_w g.$$

Pero $F_b$ es igual a $W_i$, porque el iceberg está en equilibrio, de modo que

$$\rho_w V_w g = \rho_i V_i g,$$

y, usando las densidades de la tabla 2,

$$\frac{V_w}{V_i} = \frac{\rho_i}{\rho_w} = \frac{917 \text{ kg/m}^3}{1024 \text{ kg/m}^3} = 0.896 = 89.6\%.$$

El volumen del agua desalojada $V_a$ es el volumen de la porción sumergida del iceberg, de modo que el 10.4% del iceberg se halla expuesto sobre la superficie.

## 17-5 MEDICIÓN DE LA PRESIÓN

La presión ejercida por un fluido puede medirse usando técnicas ya sea estáticas o dinámicas. Los métodos dinámicos se basan en la velocidad del flujo de un fluido en movimiento y se estudian en el capítulo 18. En esta

sección trataremos los métodos estáticos para medir la presión.

La mayoría de los aparatos de medición de la presión usan la presión atmosférica como nivel de referencia y miden la diferencia entre la presión real y la presión atmosférica, llamada *presión manométrica*. La presión real en un punto de un fluido se llama *presión absoluta*, que es entonces la presión atmosférica más la presión manométrica. La presión manométrica se da ya sea arriba o abajo de la presión atmosférica y puede entonces ser positiva o negativa; la presión absoluta, por su parte, siempre es positiva.

El barómetro de mercurio es un tubo largo de vidrio, lleno con mercurio y luego invertido dentro de una cubeta que contiene el mismo metal, como se muestra en la figura 12. El espacio sobre la columna de mercurio es, en efecto, un vacío que contiene únicamente vapor de mercurio, cuya presión $p_2$ es tan pequeña a las temperaturas ordinarias que puede ser despreciada. La presión $p_1$ sobre la superficie de la cubeta de mercurio es la presión desconocida $p$ que deseamos medir. Partiendo de la ecuación 8, obtenemos

$$p_2 - p_1 = 0 - p = -\rho g(y_2 - y_1) = -\rho g h,$$

o

$$p = \rho g h.$$

Midiendo la altura de la columna sobre la superficie de la cubeta nos da entonces la presión.

El barómetro de mercurio se utiliza para medir la presión de la atmósfera, $p_0$. La columna de mercurio del barómetro tiene una altura de unos 760 mm al nivel del mar, variando de acuerdo con la presión atmosférica. La presión de 1 atmósfera (1 atm) es equivalente a la ejercida por una columna de mercurio de 760 mm de altura a 0° C sometida a la gravedad normal ($g$ = 9.80665 m/s$^2$). La densidad del mercurio a esta temperatura es de 1.35955 × 10$^4$ kg/m$^3$. De aquí que 1 atmósfera sea equivalente a

$$1 \text{ atm} = (1.35955 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9.80665 \text{ m/s}^2)(0.76 \text{ m})$$
$$= 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \quad (= 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}).$$

La presión de la atmósfera en cualquier punto es numéricamente igual al peso de una columna de aire de área unitaria en su sección transversal que se extienda desde ese punto hasta la parte más alta de la atmósfera. Puesto que la presión atmosférica normal puede expresarse como 14.7 lb/in$^2$, sabemos que la columna vertical de aire que se extiende desde cada pulgada cuadrada de la superficie de la Tierra hasta la parte más alta de la atmósfera tiene un peso de 14.7 libras. Como ya vimos en la sección 17-3, la presión atmosférica disminuye con la altitud. Existen también variaciones de la presión atmosférica en una localidad determinada de un día a otro a causa de que la atmósfera no es estática.

Las lecturas del barómetro se expresan a veces en torr, donde 1 torr es la presión ejercida por una columna de mercurio de 1 mm de altura en un lugar donde $g$ = 9.80665 m/s$^2$ y a una temperatura (0° C) a la cual el mercurio tiene una densidad de 1.35955 × 10$^4$ kg/m$^3$. Entonces,

$$1 \text{ torr} = (1.35955 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9.80665 \text{ m/s}^2)(0.001 \text{ m})$$
$$= 133.326 \text{ Pa}.$$

El manómetro de tubo abierto (Fig. 13) mide la presión manométrica. Consta de un tubo en forma de U lleno de líquido, el tubo está abierto por un extremo a la atmósfera y conectado en el otro extremo al sistema (tanque) cuya presión $p$ deseamos medir. Partiendo de la ecuación 9 obtenemos

$$p - p_0 = \rho g h.$$

Entonces, la presión manométrica, $p - p_0$, es proporcional a la diferencia de altura en las columnas de líquido del tubo en U. Si el recipiente contiene gas a una presión elevada, se emplea en el tubo un líquido más denso como el mercurio; cuando se manejan presiones bajas, puede utilizarse agua.

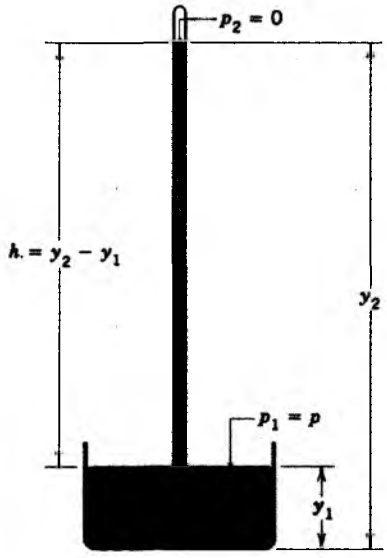



**Figura 12** Barómetro de mercurio. El mercurio que está en la cubeta se halla en equilibrio bajo la influencia de la presión atmosférica y del peso del mercurio contenido en la columna vertical.

**Problema muestra 4** La columna de mercurio de un barómetro tiene una altura $h$ de 740.35 mm. La temperatura es de -5.0° C, a cuya temperatura la densidad del mercurio es de 1.3608 × 10$^4$ kg/m$^3$. La aceleración en caída libre $g$ en el sitio del barómetro es de 9.7835 m/s$^2$. ¿Cuál es la presión atmosférica?

**Solución** Partiendo de la ecuación 8 tenemos

$$p_0 = \rho g h$$
$$= (1.3608 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9.7835 \text{ m/s}^2)(0.74035 \text{ m})$$
$$= 9.8566 \times 10^4 \text{ Pa} = 739.29 \text{ torr}.$$

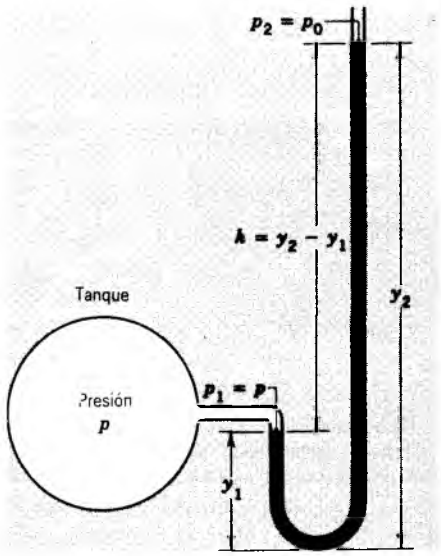



**Figura 13** Un manómetro de tubo abierto, que puede utilizarse para medir la presión de un fluido en un tanque.

Nótese que el valor de la presión en torr (739.29 torr) es numéricamente cercano al valor de la altura $h$ de la columna de mercurio expresada en mm (740.35 mm). Estas dos cantidades serán numéricamente iguales sólo si el barómetro está localizado en un sitio donde $g$ tenga su valor normal y cuando la temperatura del mercurio sea 0° C.

Otra manera de expresar el resultado de este problema muestra sería como 0.98566 bar o 985.66 milibar, donde 1 bar = $10^5$ Pa.

### Notas históricas *(Opcional)*

El barómetro de mercurio fue inventado por el italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), en memoria de quien ha sido nombrada la unidad torr. Torricelli describió en 1644 sus experimentos con el barómetro de mercurio en cartas a su amigo Michelangelo Ricci, de Roma. Le explicaba a Ricci que el propósito de su investigación era "no simplemente producir un vacío, sino fabricar un instrumento que mostrase las mutaciones del aire, ora más pesado y denso, ora más ligero y tenue". Al oír de los experimentos del italiano, Blas Pascal, en Francia, dedujo que si la columna de mercurio se mantenía simplemente por la acción de la presión del aire, la columna debería ser más corta si se encontraba a una altitud elevada. Realizó la prueba en el campanario de una iglesia de París, pero, como deseara resultados más contundentes, le escribió a su cuñado para que ensayase el experimento en la Puy de Dôme, una alta montaña de Auvernia. La diferencia medida en la altura del mercurio fue de 8 cm, resultado "que nos llenó de admiración y asombro". El propio Pascal construyó un barómetro usando vino tinto y un tubo de vidrio de 14 m de longitud.

El principal significado de estos experimentos en aquel tiempo consiste en que ofrecieron una prueba fehaciente de que podía crearse un espacio evacuado. Aristóteles creía que no podía existir un vacío y, muchos años después, el propio filósofo Descartes mantenía el mismo punto de vista. Durante 2000 años los filósofos hablaron del "horror" que la naturaleza sentía por un espacio vacío: el *horror vacui*. Se decía que la naturaleza impedía la formación de un vacío abrazándose a todo lo cercano y con ello llenando cualquier espacio evacuado. De aquí que el mercurio o el vino deberían llenar el tubo invertido a causa de que "la naturaleza aborrecía al vacío". Los experimentos de Torricelli y de Pascal demostraron que existían limitaciones a la habilidad de la naturaleza para impedir el vacío. Causaron una conmoción en aquellos tiempos. La meta de producir un vacío se convirtió en una realidad práctica gracias a la invención de las bombas por Otto von Guericke en Alemania alrededor de 1650 y por Robert Boyle en Inglaterra alrededor de 1660. Aun cuando estas bombas fueron relativamente primitivas, proporcionaron una herramienta para la experimentación. Con una bomba y un cántaro de agua, pudo habilitarse un espacio experimental en el cual estudiar cómo resultan afectadas las propiedades del calor, la luz, el sonido, y más tarde la electricidad y el magnetismo por una atmósfera cada vez progresivamente enrarecida. Si bien incluso hoy día no puede hacerse desaparecer completamente todo rastro de gas de un recipiente cerrado, estos sabios del siglo XVII liberaron a la ciencia del falso principio del *horror vacui* y estimularon los esfuerzos para crear sistemas de alto vacío.

En el curso de varias décadas del siglo XVII se desarrollaron no menos de seis instrumentos importantes. Éstos son el barómetro, la bomba de aire, el reloj de péndulo, el telescopio, el microscopio, y el termómetro. Todos ellos suscitaron gran asombro y curiosidad. ■

## 17-6 TENSIÓN SUPERFICIAL *(Opcional)*

Con frecuencia podemos observar a las hojas y a los insectos flotar sobre la *superficie* de un cuerpo de agua (Fig. 14*a*). *No* se hallan parcialmente sumergidos y por lo tanto *no* reciben el empuje según enuncia el principio de Arquímedes. En este caso el objeto está en la superficie por completo y nada de él se halla sumergido.

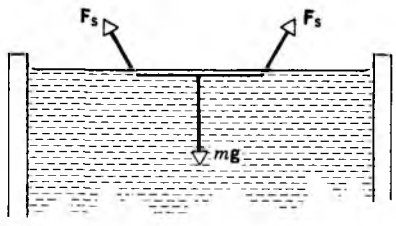
El objeto se mantiene a flote a causa de la *tensión superficial* del líquido. Podemos demostrar la tensión superficial del agua haciendo flotar con cuidado una aguja de acero o una hoja de afeitar. Por supuesto, no existe manera de que el acero flote según el principio de Arquímedes, puesto que su densidad es mayor que la del agua. Si sumergimos a la aguja o a la hoja de afeitar, éstas quedarán hundidas tal como lo enuncia el principio de Arquímedes. Solamente podrán flotar cuando estén enteramente en la superficie. Si añadimos al agua un producto químico, llamado agente tensoactivo o surfactante, éste reduce la tensión superficial (al reducir la fuerza de cohesión entre las moléculas), impidiendo así que el objeto flote. Los detergentes son surfactantes comunes. Si introducimos cuidadosamente detergente en el agua sobre la que esté flotando una hoja de afeitar, la tensión superficial disminuye súbitamente y la hoja de afeitar se hunde hasta el fondo.

Un objeto flotante, como el que se muestra en la figura 14*a*, causa una ligera depresión en la capa superficial del líquido (Fig. 14*b*), estirándola, y por lo tanto tiende a aumentar su energía potencial. Como la red de acrobacia en un circo, la superficie estirada ejerce una fuerza de restitución, cuya componente vertical puede mantener el equilibrio con el peso del objeto. Sin embargo, pronto veremos que esta analogía del comportamiento de la capa superficial no es del todo correcta.

La figura 15 muestra una manera de medir la tensión superficial de un líquido. Se dobla un alambre delgado para formar tres de los cuatro lados de un rectángulo y como cuarto lado se coloca un alambre deslizante. Si una película del líquido cubre las dos esquinas de la parte inferior (introduciendo esta parte en



(*a*)




(*b*)

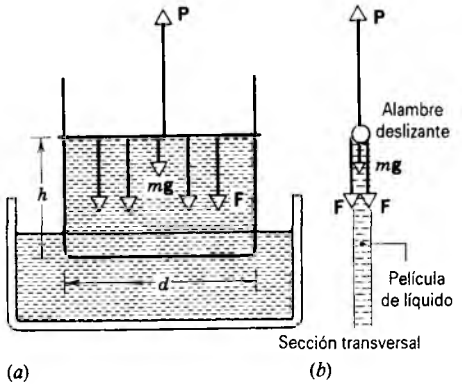
**Figura 14** (*a*) Una hoja de afeitar flota sobre la superficie del agua, soportada únicamente por la tensión superficial. (*b*) La superficie se halla distorsionada por el objeto flotante, el cual se mantiene a flote a causa de las componentes verticales de la fuerza superficial $\mathbf{F}_s$.

un recipiente con el líquido), la tensión superficial tenderá a jalar hacia abajo al alambre deslizante que queda arriba. Aplicamos una fuerza externa hacia arriba $P$ necesaria para mantener al alambre deslizante en equilibrio. Esta fuerza hacia arriba debe equilibrar a la fuerza total hacia abajo que actúa sobre el alambre deslizante, y que es igual a su peso más la fuerza $F$ debida a la tensión superficial.

Por experimentación hallamos que la fuerza $F$ depende de la longitud $d$ del alambre deslizante y que no depende en absoluto de la altura $h$ del rectángulo. Si bien podríamos pensar que la capa superficial es como una especie de tela elástica estirada sobre el líquido, esta observación nos demuestra que tal imagen es incorrecta. Imaginemos a la película de la figura 15 cortada en un número grande $N$ de franjas verticales angostas de longitud $h$ y anchura $\Delta d = d/N$. Si la película se comportase como una tela elástica, cada franja se comportaría como un resorte, y así la fuerza total dependería tanto del número de franjas a modo de resorte (y por tanto de $d$) como de la longitud $h$ de cada franja. Puesto que la tensión superficial depende únicamente de $d$ y no de $h$, la analogía de la tela elástica no es correcta.

La tensión superficial $\gamma$ se define como *la fuerza superficial $F$ por unidad de longitud $L$ sobre la cual actúa*, es decir,

$$\gamma = \frac{F}{L}. \tag{19}$$




(*a*) (*b*)

**Figura 15** (*a*) Diagrama esquemático de un experimento para medir la tensión superficial de un líquido. Una película de líquido se halla sostenida en la parte rectangular vertical, cuyo borde superior es un alambre deslizante. Una fuerza externa equilibra al peso del alambre deslizante más la fuerza total hacia abajo $F$ de la tensión superficial. (*b*) Diagrama de la sección transversal de la película, donde se muestra que la tensión superficial actúa sobre dos superficies.

Nótese que la tensión superficial no es una fuerza sino una fuerza por unidad de longitud. Nuestro uso previo del término *tensión* siempre ha servido para indicar la presencia de una fuerza, pero aquí el uso es un poco diferente.

En la película de la figura 15, la fuerza actúa a lo largo de una longitud $L$ de $2d$, a causa de que existen *dos* capas superficiales de longitud $d$ cada una. Por lo tanto, la tensión superficial en el arreglo experimental mostrado en la figura 15 sería

$$\gamma = \frac{F}{2d}.$$

Para el agua a la temperatura ambiente, el valor de la tensión superficial es de $\gamma = 0.073$ N/m. La adición de jabón reduce la tensión superficial a 0.025 N/m. Los líquidos orgánicos y las soluciones acuosas tienen típicamente tensiones superficiales dentro de este intervalo. La tensión superficial de los metales líquidos es típicamente de un orden de magnitud mayor que la del agua. Por ejemplo, el mercurio líquido a la temperatura ambiente tiene una tensión superficial de 0.487 N/m. (Esta tensión superficial más elevada de los metales se debe a que las fuerzas entre las moléculas están típicamente dentro de un orden de magnitud mayor en los metales que en el agua. Por esta misma razón, los puntos de ebullición de los metales son mucho más elevados que los del agua.)

Podemos también analizar a la tensión superficial desde el punto de vista de la energía. Si movemos al alambre deslizante de la figura 15 a lo largo de un desplazamiento $\Delta x$, el trabajo efectuado por la fuerza de la tensión superficial es igual a $F\,\Delta x$ y es positivo o negativo según $\Delta x$ tenga el sentido de la fuerza superficial o el sentido opuesto. La fuerza superficial satisface nuestra definición de fuerza conservativa, de la que hablamos en el capítulo 8, y por tanto podemos asociar un cambio en la energía potencial $\Delta U$ con la acción de la fuerza superficial, de modo que

$$\Delta U = F\,\Delta x = \gamma L\,\Delta x, \tag{20}$$

donde $L$ es la longitud de la capa superficial. El producto $L\,\Delta x$ es justamente el cambio en el área $\Delta A$ de la superficie que tiene



**Figura 16** Las gotas que flotan libremente adquieren de manera natural una forma esférica. Aquí el astronauta Dr. Joseph P. Allen, en órbita alrededor de la Tierra a bordo del transbordador *Columbia*, observa una bola de jugo de naranja que él formó usando su distribuidor especial de bebida.

lugar cuando la estiramos. Por lo tanto, podemos expresar a la tensión superficial como:

$$\gamma = \frac{\Delta U}{\Delta A}. \tag{21}$$

Esto nos proporciona otra interpretación de la tensión superficial en términos de la *energía potencial superficial por unidad de área de la superficie*.

La tensión superficial causa que gotas suspendidas de un líquido adquieran forma esférica (Fig. 16). Para una gota de una masa o volumen dados, la energía superficial (igual a $\gamma$ veces el área superficial) es menor cuando el área es más pequeña, y una esfera tiene la razón de superficie/volumen más pequeña de todas las formas geométricas. Si no actúa ninguna otra fuerza sobre la gota, ésta adoptará naturalmente una superficie esférica. En el equilibrio, la tensión superficial produce una fuerza neta hacia adentro sobre un elemento de superficie, la cual es equilibrada por una fuerza igual hacia afuera debida a la presión del líquido contenido en la gota. En una burbuja de jabón (la cual tiene dos superficies y por lo tanto el doble de la tensión superficial de una gota de líquido de igual tamaño), la presión manométrica del gas confinado dentro de la burbuja proporciona la fuerza hacia afuera necesaria para el equilibrio.

Al igual que las moléculas de una gota de líquido, los protones y los neutrones de un núcleo experimentan fuerzas de corto alcance ejercidas por sus vecinos. El núcleo experimenta una tensión superficial similar a la de una gota de líquido. En el caso del núcleo, la fuerza hacia afuera tiene su origen en la repulsión electrostática de los protones cargados. En muchos núcleos, la forma de equilibrio se determina por el balance entre las fuerzas superficial y electrostática, y por lo tanto no debería sorprendernos que la forma preferida de los núcleos sea la esférica. El cálculo de la energía de amarre, también llamada de descarga, de los núcleos debe incluir un término que corresponda a la energía superficial, la cual típicamente es responsable del 30% de la energía total de amarre.

El hecho de considerar que el núcleo se comporta como una gota de líquido cargada nos proporciona una visión muy clara para entender muchas de las propiedades del núcleo, especialmente de la fisión nuclear, donde el núcleo se divide en dos partes de tamaño comparable. Tal procedimiento se denomina *modelaje*, mediante el cual tratamos de entender a un sistema complejo, cuyas propiedades no pueden a menudo ser calculadas o entendidas directamente, sobre la base de un sistema físico más sencillo de un comportamiento relativamente similar y cuyas propiedades puedan ser calculadas y luego probadas por medio de la experimentación. El *modelo de la gota de agua del núcleo* ha jugado un papel importante en nuestro entendimiento de los núcleos atómicos, como lo estudiaremos en los capítulos 54 y 55 del texto ampliado.

**Problema muestra 5** En el experimento que se muestra en la figura 15*a*, se encuentra que el alambre móvil está en equilibrio cuando la fuerza hacia arriba $P$ es de $3.45 \times 10^{-3}$ N. El alambre tiene una longitud $d$ de 4.85 cm y una densidad de masa lineal $\mu$ de $1.75 \times 10^{-3}$ kg/m. Halle la tensión superficial del líquido.

**Solución** A partir de la condición de equilibrio de la figura 15*b*, tenemos

$$\sum F_y = P - F - mg = 0,$$

o

$$F = P - mg.$$

Siendo $F = 2d\gamma$ y $m = \mu d$, obtenemos

$$2d\gamma = P - \mu dg$$

o sea que

$$\gamma = \frac{P - \mu dg}{2d}$$

$$= \frac{3.45 \times 10^{-3}\ \text{N} - (1.75 \times 10^{-3}\ \text{kg/m})(0.0485\ \text{m})(9.80\ \text{m/s}^2)}{2(0.0485\ \text{m})}$$

$$= 0.027\ \text{N/m}. \blacksquare$$

## PREGUNTAS

1. Explique cómo es posible que la presión sea una cantidad escalar cuando las fuerzas, que son vectores, pueden producirse por la acción de las presiones.
2. Haga una estimación de la densidad promedio de nuestro cuerpo. Explique un modo por el cual podríamos obtener un valor preciso usando las ideas de este capítulo.

3. En el capítulo 20 aprenderemos que una sobrepresión de sólo 20 PA corresponde al umbral de la sensación de dolor debida a un sonido intenso. Sin embargo, un buceador a 2 m bajo la superficie del agua experimenta una presión mucho mayor que ésta (¿de cuánto?) y no siente dolor. ¿Por qué esta diferencia?
4. Las personas confinadas a una cama tienen menos probabilidades de desarrollar llagas en su cuerpo si usan una cama de agua en lugar de un colchón ordinario. Explique.
5. Explique por qué una persona podría estar sobre una cama de clavos sin sentir dolor.
6. Explique la aseveración "el agua busca su propio nivel".
7. Se vierte agua hasta el mismo nivel en cada uno de los recipientes mostrados en la figura, todos los cuales tienen la misma área en su base (Fig. 17). Si la presión es la misma en el fondo de cada recipiente, la fuerza experimentada por la base de cada recipiente es la misma. ¿Entonces por qué dan los tres recipientes pesos diferentes cuando se les pone en una báscula? Este resultado aparentemente contradictorio es conocido comúnmente como *paradoja hidrostática*.



**Figura 17** Pregunta 7.

8. ¿Se cumple el principio de Arquímedes en una vasija en caída libre o en un satélite que se mueva en órbita circular?
9. Una bola esférica hecha de corcho flota medio sumergida en una marmita de té en reposo sobre la Tierra. ¿Flotará, o se hundirá el corcho, a bordo de un navío espacial que (*a*) se desplace libremente en el espacio y (*b*) que se encuentre sobre la superficie de Marte?
10. ¿Cómo trabaja una ventosa (copa de succión)?
11. ¿Tiene la fuerza de flotación sobre un submarino sumergido la misma intensidad a cualquier profundidad?
12. Explique cómo asciende un submarino, cómo se sumerge, y cómo se mantiene a una profundidad fija. ¿Emplean los peces los mismos principios? (Véase "The Buoyancy of Marine Animals", por Eric Denton, *Scientific American*, julio de 1960, pág. 118, y "Submarine Physics", por G. P. Harnwell, *American Journal of Physics*, marzo de 1948, pág. 127).
13. Un trozo de madera flota en una palangana de agua dentro de un elevador. Cuando el elevador parte del reposo y acelera hacia abajo, ¿flotará el trozo de madera más arriba sobre la superficie del agua?
14. Dos cubetas iguales se llenan hasta el borde con agua, pero una tiene un trozo de madera que flota. ¿Cuál de las dos cubetas (acaso) pesa más?
15. Calcule con cierto cuidado la fuerza de flotación que ejerce la atmósfera sobre usted.
16. De acuerdo con el problema muestra 3, el 89.6% de un iceberg se halla sumergido. Sin embargo, ocasionalmente los icebergs se vuelcan, con resultados posiblemente desastrosos sobre un navío cercano. ¿Cómo puede esto suceder considerando que la mayor parte de su masa está bajo el nivel del mar?
17. ¿Podemos hundir a un barco de hierro sifoneando agua de mar hacia dentro de él?
18. Se les advierte a los buceadores con tanques de aire que no contengan la respiración al nadar hacia arriba. ¿Por qué?
19. Una vasija está completamente llena de agua líquida en el punto de congelación y tiene un cubo de hielo que flota, también en el punto de congelación. Al fundirse el cubo, ¿qué le sucede al nivel de agua en estos tres casos: (*a*) el cubo es hielo sólido; (*b*) el cubo contiene algunos granos de arena; y (*c*) el cubo contiene algunas burbujas?
20. Aunque se supone que los paracaídas frenan la caída, suelen diseñarse con un agujero en la parte superior. Explique por qué.
21. Una pelota flota sobre la superficie del agua en un recipiente expuesto a la atmósfera. ¿Permanecerá sumergida la pelota a su profundidad anterior o se hundirá o elevará un poco si (*a*) se tapa el recipiente y se le retira el aire o (*b*) si se tapa el recipiente y se comprime el aire?
22. Explique por qué un globo inflado sólo se elevará hasta una altura limitada una vez que comienza a elevarse, mientras que un submarino se hundirá hasta el lecho mismo del océano una vez que haya comenzado a hundirse, a no ser que se lleve a cabo algún cambio.
23. ¿Por qué un globo pesa lo mismo cuando está vacío que cuando está lleno de aire a la presión atmosférica? ¿Serían los pesos iguales si se pesaran en un vacío?
24. Los recipientes de líquidos tienden a gotear cuando se les eleva en un aeroplano. ¿Por qué? ¿Importa que estén con el lado correcto hacia arriba o no? ¿Importa que estén inicialmente llenos o no?
25. Durante la Segunda Guerra Mundial un carguero dañado que apenas era capaz de flotar en el Mar del Norte se dirigió por el estuario del Támesis hacia los muelles de Londres. Se hundió antes de que pudiera llegar. ¿Por qué?
26. ¿Es verdad que un objeto flotante estará en un equilibrio estable únicamente si su centro de flotación está encima de su centro de gravedad? Ilustre con ejemplos.
27. Los troncos que se descargan verticalmente en un estanque no permanecen verticales, sino que flotan "planos" sobre el agua. Explique.
28. ¿Por qué un barco que se hunde, a menudo se voltea al sumergirse en el agua?
29. Una barcaza llena de chatarra de hierro está en la esclusa de un canal. Si se arroja al hierro por la borda, ¿qué le pasa al nivel de agua de la esclusa? ¿Y qué si se le arroja sobre el terreno al lado del canal?
30. Una cubeta de agua está suspendida de un dinamómetro. ¿Cambiará la lectura del dinamómetro cuando un trozo de hierro suspendido de un cordón se sumerja en el agua? ¿Y cuando se pone en el agua un trozo de corcho?
31. Si se le añade suficiente hierro a un extremo de una viga o de un leño de madera uniforme, ¿flotará verticalmente en lugar de horizontalmente (vea la pregunta 27)? Explique por qué.

**32.** Aunque existen dificultades prácticas, es posible, en principio, hacer flotar a un trasatlántico en unos cuantos barriles de agua. ¿Cómo emprendería usted esta labor?

**33.** Una cubeta de agua destapada está sobre un plano sin fricción inclinado a un ángulo $\alpha$ con respecto a la horizontal. Halle la inclinación de equilibrio con la horizontal de la superficie libre del agua cuando (*a*) la cubeta se mantenga en reposo; (*b*) se permita que la cubeta se deslice plano abajo a una velocidad constante ($a = 0$, $v$ = constante); y (*c*) se deslice la cubeta hacia abajo sin restricción ($a$ = constante). ¿Qué pasará si el plano es curvo de modo que $a \neq$ constante?

**34.** En un barómetro, ¿qué tan importante es que su diámetro interior sea uniforme? ¿Y que el tubo del barómetro esté absolutamente vertical?

**35.** Un manómetro de tubo abierto tiene un tubo de diámetro igual al doble del otro. Explique cómo afecta esto a la operación del manómetro. ¿Importa cuál de los dos extremos esté conectado a la cámara cuya presión se quiere medir?

**36.** Hemos considerado a los líquidos bajo compresión. ¿Pueden ser puestos bajo tensión los líquidos? De ser esto posible, ¿se separarán bajo la tensión suficiente como lo hacen los sólidos? (Véase "The Tensile Strength of Liquids", por Robert E. Apfel, *Scientific American*, diciembre de 1972, pág. 58).

**37.** Explique por qué dos placas de vidrio que contienen una película delgada de agua entre ellas son difíciles de separar por medio de un jalón directo, pero pueden separarse con facilidad deslizándolas.

**38.** Dé una explicación molecular de por qué la tensión superficial disminuye al aumentar la temperatura.

**39.** Las películas de jabón son mucho más estables que las películas de agua. ¿Por qué? (Considérese cómo reacciona la tensión superficial al estiramiento.)

**40.** Explique por qué una película de jabón se revienta al aparecer un orificio pequeño en ella.

**41.** Explique estas observaciones: (*a*) el agua forma glóbulos sobre una placa engrasada pero no sobre una limpia; (*b*) las burbujas pequeñas en la superficie del agua se unen entre sí.

**42.** Si el jabón reduce la tensión superficial del agua, ¿por qué soplamos burbujas de jabón en lugar de burbujas de agua?

**43.** Ciertos insectos pueden caminar sobre el agua. Calcule el peso máximo que puede tener tal insecto y aún sostenerse de este modo.

**44.** ¿Cuál es la fuente de energía que permite que un fluido se eleve en un tubo capilar (es decir, en un tubo de vidrio hueco y fino)?

**45.** ¿Qué significa decir que ciertos líquidos pueden ejercer una pequeña presión negativa?

## PROBLEMAS

### *Sección 17-2 Presión y densidad*

**1.** Halle el aumento de presión en el fluido de una jeringa cuando una enfermera aplica una fuerza de 42.3 N al émbolo de la jeringa de 1.12 cm de diámetro.

**2.** Tres líquidos que no se mezclan se vierten dentro de un recipiente cilíndrico. Las cantidades y densidades de los líquidos son 0.50 L, 2.6 g/cm$^3$; 0.25 L, 1.0 g/cm$^3$; y 0.40 L, 0.80 g/cm$^3$ (L = litro). Halle la fuerza total sobre el fondo del recipiente. (Despréciese la contribución debida a la atmósfera.) ¿Importa que se mezclen los líquidos?

**3.** La ventana de una oficina tiene 3.43 m por 2.08 m. Como resultado del paso de una tormenta, la presión del aire exterior decae a 0.962 atm, pero en el interior la presión se mantiene en 1.00 atm. ¿Qué fuerza neta empujará a la ventana hacia afuera?

**4.** Un cubo sólido de cobre tiene un borde de 85.5 cm de longitud. ¿Cuánta presión debe ejercerse para reducir a 85.0 cm la longitud del borde del cubo? El módulo volumétrico del cobre es de 140 GPa.

**5.** A una caja herméticamente cerrada con una tapa de 12 in$^2$ de área se le practica un vacío parcial. Si se requiere una fuerza de 108 lb para retirar la tapa de la caja, y la presión atmosférica exterior es de 15 lb/in$^2$, ¿cuál es la presión dentro de la caja?

**6.** En 1654 Otto Von Guericke, burgomaestre de Magdeburgo e inventor de la bomba de aire, dio una demostración ante la Dieta imperial en la que dos tiros de caballos no pudieron separar a dos semiesferas de latón al vacío. (*a*) Demuestre que la fuerza $F$ necesaria para separar a las semiesferas es $F = \pi R^2 \Delta p$, donde $R$ es el radio (exterior) de las semiesferas y $\Delta p$ es la diferencia de presiones dentro y fuera de la esfera (Fig. 18). (*b*) Haciendo que $R$ sea igual a 0.305 m y que la presión interior sea de 0.100 atm, ¿qué fuerza deberían ejercer los tiros de caballos para separar a las semiesferas? (*c*) ¿Por qué se emplearon dos tiros de caballos? ¿No habría demostrado lo mismo un solo grupo de caballos?

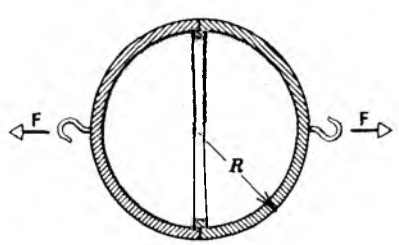



**Figura 18** Problema 6.

***Sección 17-3 Variación de la presión en un fluido en reposo***

7. El pulmón humano funciona contra una diferencial de presión de menos de 0.050 atm. ¿A qué profundidad del nivel del agua puede nadar un buceador que respire por medio de un tubo largo (snorkel)?
8. Calcule la diferencia hidrostática en la presión de la sangre entre el cerebro y los pies de una persona de 1.83 m de altura.
9. Halle la presión total, en pascal, a 118 m bajo la superficie del océano. La densidad del agua de mar es de 1.024 g/cm$^3$ y la presión atmosférica al nivel del mar es de $1.013 \times 10^5$ Pa.
10. Las descargas del drenaje de una casa construida en una pendiente están a 8.16 m por debajo del nivel de la calle. Si el drenaje está a 2.08 m bajo el nivel de la calle, halle la diferencia de presión mínima que debe crear la bomba de drenaje para transferir los desperdicios cuya densidad media es de 926 kg/m$^3$.
11. La figura 19 muestra el diagrama de fase del carbono, indicando los intervalos de temperatura y de presión en que se cristalizará el carbono como diamante o como grafito. ¿Cuál es la profundidad mínima a la que pueden formarse los diamantes si la temperatura local es de 1000° C y las rocas bajo la superficie tienen una densidad de 3.1 g/cm$^3$? Suponga que, como en un fluido, la presión se debe al peso del material que está encima.

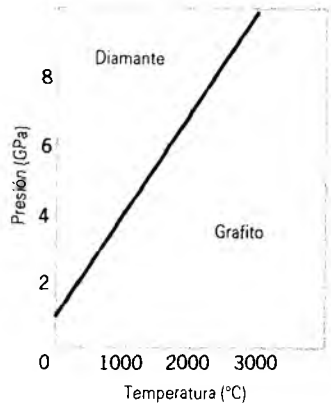



**Figura 19** Problema 11.

12. De acuerdo con el modelo de temperatura constante de la atmósfera de la Tierra, ¿cuál es la presión (en atm) a una altitud de 5.00 km, y (*b*) ¿a qué altitud es la presión igual a 0.500 atm? Compare sus respuestas con la figura 5.
13. Un tubo en U sencillo contiene mercurio. Cuando se vierten 11.2 cm de agua en la rama derecha, ¿a qué altura se elevará el mercurio en la rama izquierda a partir de su nivel inicial?
14. Detrás de la cara vertical aguas arriba de una presa se almacena agua con una profundidad $D$, como se muestra en la figura 20. Sea $W$ el ancho de la presa. (*a*) Halle la fuerza horizontal resultante ejercida sobre la presa por la presión manométrica del agua y (*b*) la torca neta debida a la presión manométrica del agua ejercida respecto a una línea que pase por $O$ paralela al ancho de la presa. (*c*) ¿Dónde está situada la línea de acción de la fuerza resultante equivalente?

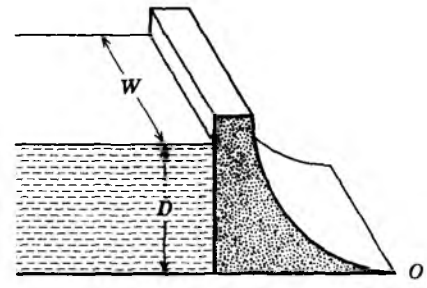



**Figura 20** Problema 14.

15. Una alberca tiene las dimensiones de 80 ft × 30.0 ft × 8.0 ft. (*a*) Cuando está llena de agua, ¿cuál es la fuerza (debida al agua únicamente) sobre el fondo? ¿Y sobre los extremos? ¿Y sobre los costados? (*b*) Si se ha preguntado usted si las paredes de concreto se volcarán o no, ¿es apropiado tomar en cuenta para responder a esto la presión atmosférica?
16. ¿Cuál sería la altura de la atmósfera si la densidad del aire (*a*) fuese constante y si (*b*) decreciese linealmente hasta cero con la altura? Suponga una densidad al nivel del mar de 1.21 kg/m$^3$.
17. Los miembros de una tripulación tratan de escapar de un submarino averiado que está a 112 m bajo la superficie. ¿Cuánta fuerza deberán aplicar contra la escotilla que abre hacia afuera, la cual tiene 1.22 m por 0.590 m, para poder abrirla?
18. Un barril cilíndrico tiene un tubo angosto fijo a la tapa, como se muestra junto con sus dimensiones en la figura 21. El recipiente está lleno de agua hasta la parte superior del tubo. Calcule la razón de la fuerza hidrostática ejercida sobre el fondo del barril y el peso del agua contenida en su interior. ¿Por qué no es igual a uno esta razón? (Despréciese la presencia de la atmósfera.)

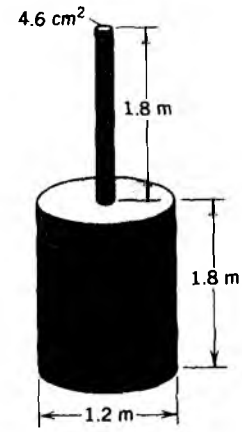



**Figura 21** Problema 18.

**19.** Al analizar ciertas características geológicas de la Tierra, suele ser conveniente suponer que la presión a cierto *nivel de compensación* horizontal, a cierta profundidad en la Tierra, es la misma dentro de una gran región e igual a la ejercida por el peso del material que está encima. Esto es, la presión en el nivel de compensación está dada por la fórmula de la presión hidrostática (fluida). Esto requiere, por ejemplo, que las montañas tengan *raíces* de baja densidad; véase la figura 22. Considere una montaña de 6.00 km de altura. Las rocas continentales tienen una densidad de 2.90 g/cm$^3$; bajo el continente se encuentra el manto, con una densidad de 3.30 g/cm$^3$. Calcule la profundidad $D$ de la raíz. (*Sugerencia*: Iguale la presión en los puntos $a$ y $b$; la profundidad $y$ del nivel de compensación se cancelará.)

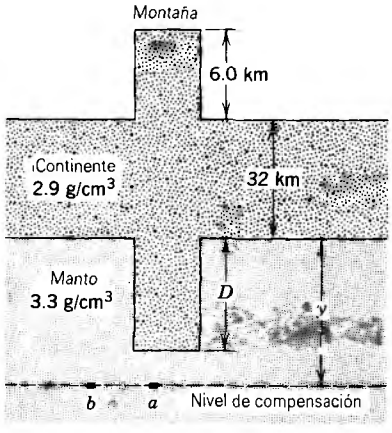



**Figura 22** Problema 19.

**20.** (*a*) Demuestre que la densidad $\rho$ del agua a una profundidad $y$ en el océano se relaciona con la densidad superficial $\rho_s$ según

$$\rho \approx \rho_s[1 + (\rho_s g/B)y],$$

donde $B$ = 2.2 GPa es el módulo volumétrico del agua. Despréciense las variaciones de la temperatura. (*b*) ¿En qué fracción excederá la densidad a una profundidad de 4200 m a la densidad de la superficie?

**21.** Una probeta de 12.0 cm de longitud llena de agua se hace girar en un plano horizontal en una centrífuga a 655 rev/s. Calcule la presión hidrostática en la base exterior de la probeta. El extremo inferior de la probeta está a 5.30 cm del eje de rotación.

**22.** La superficie de contacto de dos fluidos de densidades diferentes que están en reposo y no se mezclan es horizontal. Demuestre que este resultado general surge (*a*) del hecho de que la energía potencial de un sistema debe ser mínima en equilibrio estable; (*b*) del hecho de que en dos puntos cualesquiera en un plano horizontal en cualquiera de los fluidos las presiones son iguales.

**23.** Dos vasijas cilíndricas idénticas con sus bases al mismo nivel contienen cada una un líquido de densidad $\rho$. El área de cualquiera de las bases es $A$, pero en una vasija la altura del líquido es $h_1$ y en la otra $h_2$. Halle el trabajo efectuado por la gravedad al igualarse los niveles cuando las dos vasijas se conectan entre sí.

**24.** Un tubo en U está lleno con un líquido homogéneo. El líquido se presiona temporalmente en uno de los lados por un émbolo. El émbolo se retira y el nivel del líquido en cada lado oscila. Demuestre que el periodo de oscilación es $\pi\sqrt{2L/g}$, donde $L$ es la longitud total del líquido en el tubo.

**25.** (*a*) Demuestre que la ecuación 13, la variación de la presión con la altitud en la atmósfera (tomando la temperatura como uniforme), puede escribirse en términos de la densidad $\rho$ como:

$$\rho = \rho_0 e^{-y/a},$$

donde $\rho_0$ es la densidad en el suelo ($y$ = 0). (*b*) Suponga que la fuerza de arrastre $D$ debida al aire sobre un objeto que se mueve con una velocidad $v$ está dada por $D = CA\rho v^2$, donde $C$ es una constante, $A$ es el área frontal de la sección transversal del objeto, y $\rho$ es la densidad local del aire. Halle la altitud a la cual la fuerza de arrastre sobre un cohete es máxima si el cohete se lanza verticalmente y se mueve con una aceleración constante hacia arriba $a_r$.

**26.** (*a*) Considere un recipiente de fluido sometido a una aceleración *vertical a hacia arriba*. Demuestre que la variación de la presión con la profundidad en el fluido está dada por

$$p = \rho h(g + a),$$

donde $h$ es la profundidad y $\rho$ es la densidad. (*b*) Demuestre también que si todo el fluido experimenta una aceleración *vertical a hacia abajo*, la presión a una profundidad $h$ está dada por

$$p = \rho h(g - a).$$

(*c*) ¿Qué pasa en caída libre?

**27.** Considere la aceleración horizontal de una masa de líquido en un tanque abierto. Una aceleración de esta clase causa que la superficie del líquido decaiga en el frente del tanque y se eleve en la parte trasera. Demuestre que la superficie del líquido adquiere una pendiente que forma un ángulo $\theta$ con la horizontal, donde tan $\theta = a/g$, siendo $a$ la aceleración horizontal. (*b*) ¿Cómo varía la presión con $h$, la profundidad *vertical* bajo la superficie?

**28.** La tensión en un resorte que mantiene a un bloque sólido bajo la superficie de un líquido (de densidad mayor que el sólido) es $T_0$ cuando la vasija que lo contiene (Fig. 23) está en reposo. Demuestre que la tensión $T$, cuando la vasija tenga una aceleración vertical $a$ hacia arriba, está dada por $T_0(1 + a/g)$.

**29.** (*a*) Un fluido está girando con una velocidad angular constante $\omega$ con respecto al eje vertical central de un recipiente cilíndrico. Demuestre que la variación de la presión en la dirección radial está dada por

$$\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2 r.$$

(*b*) Sea $p = p_c$ en el eje de rotación ($r$ = 0) y demuestre entonces que la presión $p$ en cualquier punto $r$ es

$$p = p_c + \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 r^2.$$

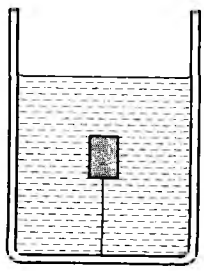


**Figura 23** Problema 28.

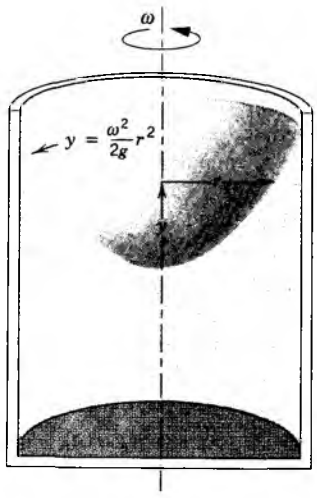



**Figura 24** Problema 29.

(*c*) Demuestre que la superficie del líquido tiene la forma de un paraboloide (Fig. 24); es decir, una sección transversal vertical de la superficie es la curva $y = \omega^2 r^2/2g$. (*d*) Demuestre que la variación de la presión con la profundidad es $p = \rho g h$.

### *Sección 17-4 Principio de Pascal y principio de Arquímedes*

**30.** (*a*) Si el pequeño émbolo de una palanca hidráulica tiene un diámetro de 3.72 cm, y el émbolo grande uno de 51.3 cm, ¿qué peso sobre el émbolo pequeño soportará 18.6 kN (p. ej., un automóvil) sobre el émbolo grande? (*b*) ¿A qué distancia debe moverse el émbolo pequeño para que el automóvil se eleve 1.65 m?

**31.** Un bote que flota en agua dulce desaloja 35.6 kN de agua. (*a*) ¿Qué peso de agua desalojaría este bote si estuviese flotando en agua salada de 1024 kg/m³ de densidad? (*b*) ¿Cambia el volumen del agua desalojada? Si cambia, ¿en cuánto?

**32.** Un bloque de madera flota en el agua con 0.646 de su volumen sumergido. En el aceite tiene 0.918 de su volumen sumergido. Halle la densidad (*a*) de la madera y (*b*) del aceite.

**33.** Un bote de hojalata tiene un volumen total de 1200 cm³ y una masa de 130 g. ¿Cuántos gramos de perdigones de plomo podría contener sin hundirse en el agua? La densidad del plomo es 11.4 g/cm³.

**34.** Alrededor de una tercera parte del cuerpo de un físico que se halla nadando en el Mar Muerto está sobre el nivel del agua. Suponiendo que la densidad del cuerpo humano sea de 0.98 g/cm³, halle la densidad del agua en el Mar Muerto. ¿Por qué es mucho más grande que 1.0 g/cm³?

**35.** Suponga que la densidad de unas pesas de latón sea de 8.0 g/cm³ y que la del aire sea de 0.0012 g/cm³. ¿Qué error fraccionario surge de despreciar la flotabilidad del aire al pesar un objeto de 3.4 g/cm³ de densidad en una balanza de brazos?

**36.** Una pieza de hierro fundido que contiene cierto número de porosidades pesa 6130 N en el aire y 3970 N en el agua. ¿Cuál es el volumen de las porosidades de la pieza de fundición? La densidad del hierro es de 7870 kg/m³.

**37.** Un objeto cúbico de dimensión $L = 0.608$ m de lado y de peso $W = 4450$ N determinado en el vacío está suspendido de un alambre en un tanque abierto que contiene un líquido de densidad $\rho = 944$ kg/m³, como en la figura 25. (*a*) Halle la fuerza total hacia abajo ejercida por el líquido y por la atmósfera sobre la parte superior del objeto. (*b*) Halle la fuerza total hacia arriba en el fondo del objeto. (*c*) Halle la tensión en el alambre. (*d*) Calcule la fuerza de flotación sobre el objeto usando el principio de Arquímedes. ¿Qué razón existe entre todas estas cantidades?

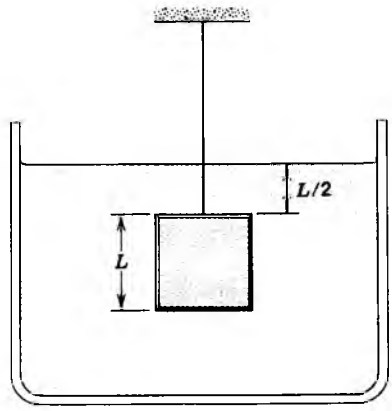



**Figura 25** Problema 37.

**38.** Un pez mantiene su profundidad en el agua salada ajustando el contenido de aire de su hueso poroso o de sus bolsas de aire para hacer que su densidad promedio sea la misma que la del agua. Suponga que el pez tiene una densidad de 1.08 g/cm³ con sus bolsas de aire aplastadas. ¿A qué fracción del volumen de su cuerpo expandido deberá el pez inflar las bolsas de aire para reducir su densidad promedio a la del agua? Suponga que la densidad del aire es de 0.00121 g/cm³.

**39.** Se ha propuesto un proyecto de traslado de gas natural desde los campos de gas del Mar del Norte en dirigibles enormes, usando el propio gas para proporcionar la fuerza de ascenso. Calcúlese la fuerza necesaria para amarrar al navío aéreo a la tierra para un aterrizaje cuando llegue completamente cargado con $1.17 \times 10^6$ m³ de gas con una densidad de 0.796 kg/m³. La densidad del aire es de

1.21 kg/m³. (El peso del navío es despreciable en comparación.)

**40.** El pequeño dirigible *Columbia* de Goodyear (véase la Fig. 26) está navegando lentamente a baja altitud, lleno como es costumbre de gas helio. Su carga útil máxima, incluyendo la tripulación y la carga, es de 1280 kg. ¿Cuánta carga más podría transportar el *Columbia* si sustituimos el helio por hidrógeno? ¿Por qué no se hace? El volumen del espacio interior ocupado por el helio es de 5000 m³. La densidad del gas helio es de 0.160 kg/m³ y la densidad del hidrógeno es de 0.0810 kg/m³.




**Figura 26** Problema 40.

**41.** Una esfera hueca de hierro flota casi completamente sumergida en agua; véase la figura 27. El diámetro exterior es de 58.7 cm y la densidad del hierro es de 7.87 g/cm³. Halle el diámetro interior de la esfera.

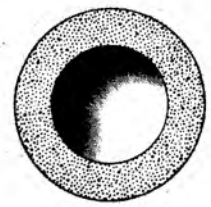


**Figura 27** Problema 41.

**42.** Un bloque de madera tiene una masa de 3.67 kg y una densidad de 594 kg/m³. Va a ser cargado con plomo para que flote en el agua con 0.883 de su volumen sumergido. ¿Qué masa de plomo se necesita (*a*) si el plomo está encima de la madera y (*b*) si el plomo está amarrado debajo de la madera? La densidad del plomo es de $1.14 \times 10^4$ kg/m³.

**43.** Tres niños que pesan 82.4 lb cada uno construyen una balsa enlazando entre sí troncos de 1.05 ft de diámetro y 5.80 ft de longitud. ¿Cuántos troncos se necesitarán para mantenerla a flote? Considere que la densidad de la madera es de 47.3 lb/ft³.

**44.** (*a*) ¿Cuál es el área mínima de un bloque de hielo de 0.305 m de espesor que flota en el agua para que sostenga encima de sí a un automóvil de 1120 kg de masa? (*b*) ¿Importa dónde esté colocado el automóvil sobre el bloque de hielo? La densidad del hielo es de 917 kg/m³.

**45.** Un objeto que flota en mercurio tiene una cuarta parte de su volumen sumergida. Si se añade agua suficiente para cubrir al objeto, ¿qué fracción de su volumen permanecerá sumergida en el mercurio?

**46.** Un leño cilíndrico lleva una carga de plomo en un extremo de modo que flote en posición erecta en el agua, como en la figura 28. La longitud de la parte sumergida es $L = 2.56$ m. El leño es puesto a oscilar verticalmente. (*a*) Demuestre que la oscilación es armónica simple. (*b*) Halle el periodo de la oscilación. Desprecie el hecho de que el agua tiene un efecto amortiguador sobre el movimiento.

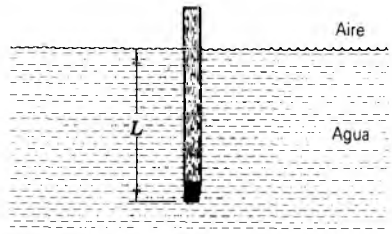



**Figura 28** Problema 46.

**47.** Un automóvil tiene una masa total de 1820 kg. El volumen del espacio de aire del compartimiento de pasajeros es de 4.87 m³. El volumen del motor y de las ruedas frontales es de 0.750 m³, y el volumen de las ruedas traseras, el tanque de gas y la cajuela es 0.810 m³. El agua no puede entrar en estas áreas. El automóvil está estacionado en una colina; el cable del freno de mano se revienta y el automóvil rueda cuesta abajo hasta un lago; véase la figura 29. (*a*) Al principio no entra nada de agua al compartimiento de pasajeros. ¿Qué volumen del automóvil, en metros cúbicos, está bajo la superficie del agua cuando el automóvil flota como se muestra en la figura? (*b*) El automóvil se hunde al entrar el agua lentamente. ¿Cuántos metros cúbicos de agua han entrado al automóvil cuando desaparece bajo la superficie del agua? (El automóvil permanece horizontal debido a una carga pesada en la cajuela.)

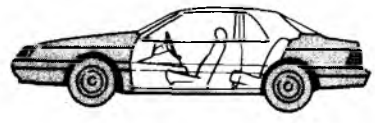


**Figura 29** Problema 47.

**48.** Usted coloca un frasco de vidrio, parcialmente lleno de agua, dentro de una tina (Fig. 30). Tiene una masa de 390 g y un volumen interior de 500 $cm^3$. Ahora comienza usted a llenar la tina de agua y halla, por experimentación, que si el frasco está lleno a menos de la mitad flotará; pero si está lleno a más de la mitad permanece en el fondo de la tina mientras el agua se eleva hasta su borde. ¿Cuál es la densidad del material de que está hecho el frasco?



**Figura 30** Problema 48.

### *Sección 17-5 Medición de la presión*

**49.** Calcule la densidad del vino tinto que Pascal usó en su barómetro de 14 m de longitud. Suponga que el vino llenaba el tubo.

**50.** La presión en la superficie del planeta Venus es de 90 atm (es decir, 90 veces la presión en la superficie de la Tierra). ¿De qué longitud tendría que ser un barómetro de mercurio para medir esta presión? Suponga que el mercurio se mantiene a 0° C.

### *Sección 17-6 Tensión superficial*

**51.** ¿Cuánta energía está almacenada en la superficie de una burbuja de jabón de 2.1 cm de radio si su tensión superficial es de $4.5 \times 10^{-2}$ N/m?

**52.** Una película delgada de agua de 80.0 $\mu$m de espesor está emparedada entre dos placas de vidrio y forma una mancha circular de 12.0 cm de radio. Calcule la fuerza normal necesaria para separar a las placas si la tensión superficial del agua es de 0.072 N/m.

**53.** Al emplear una solución de jabón en la que la tensión superficial es de 0.025 N/m un niño sopla una burbuja de jabón de 1.40 cm de radio. ¿Cuánta energía se usa para estirar la superficie del jabón?

**54.** La tensión superficial del $^4$He líquido es de 0.35 mN/m y la densidad líquida es de 145 $kg/m^3$. Estime (*a*) el número de átomos/$m^2$ de superficie y (*b*) la energía por enlace, en eV, en el líquido a esta temperatura. La masa de un átomo de helio es de $6.64 \times 10^{-27}$ kg. Imagine a cada átomo como un cubo y suponga que cada átomo interactúa únicamente con sus cuatro vecinos más cercanos.

**55.** Demuestre que la diferencia de presión entre el interior y el exterior de una burbuja de radio $r$ es $4\gamma/r$, donde $\gamma$ es la tensión superficial del líquido con el cual ha sido soplada la burbuja.

**56.** Una barra sólida de vidrio de radio $r$ = 1.3 cm está colocada coaxialmente dentro de un cilindro de vidrio de radio interno $R$ = 1.7 cm. Sus extremos del fondo están alineados y situados en contacto con la superficie de un tanque abierto de agua y perpendiculares a ella (véase la Fig. 31). ¿A qué altura $y$ se elevará el agua en la región entre la barra y el cilindro? Suponga que el ángulo de contacto sea 0° y use 72.8 mN/m para la tensión superficial del agua.

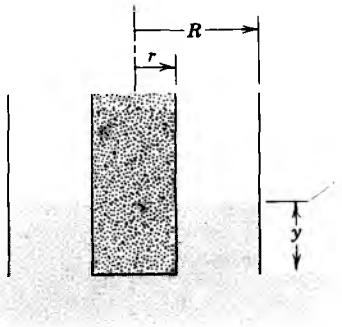



**Figura 31** Problema 56.

**57.** Una burbuja de jabón en el aire tiene un radio de 3.20 cm. Se la sopla luego hasta un radio de 5.80 cm. Use 26.0 mN/m para la tensión superficial (constante) de la burbuja. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de presión inicial en la película de la burbuja? (*b*) Halle la diferencia de presión en la película para el tamaño más grande. (*c*) ¿Cuánto trabajo se efectuó contra la atmósfera para hacer más grande a la burbuja? (*d*) ¿Cuánto trabajo se efectuó para estirar la superficie de la burbuja?

# CAPÍTULO 18

# DINÁMICA DE LOS FLUIDOS

*Pasamos ahora de la estática de los fluidos a la dinámica de los fluidos en movimiento. En esencia, existe poca diferencia entre la dinámica del movimiento de los fluidos y la dinámica de los movimientos de la partícula y del cuerpo rígido, que ya hemos estudiado en capítulos anteriores. Empleamos aquí conceptos ya conocidos para analizar la dinámica de los fluidos, incluyendo las leyes de Newton del movimiento y la conservación de la masa y de la energía. Así pues, en este capítulo aplicaremos estos principios a los fluidos, los que describimos empleando variables tales como la presión y la densidad que hemos presentado en el capítulo 17.*

*Comenzaremos con un modelo simplificado del flujo fluido, del cual no tendremos en cuenta las fuerzas de disipación. Este enfoque es similar a nuestro estudio previo de la dinámica de la partícula, donde en un principio no tomábamos en cuenta a las fuerzas de disipación (de fricción). Una ventaja de este acceso es que permite un análisis en términos de la conservación de la energía mecánica, como lo hicimos en el capítulo 8 en el caso de las partículas. Más adelante en el presente capítulo ofreceremos una descripción breve de los resultados interesantes y poco usuales que suceden en los fluidos reales cuando se toman en cuenta las fuerzas de disipación, llamadas* fuerzas viscosas.

## 18-1 CONCEPTOS GENERALES DEL FLUJO DE LOS FLUIDOS

Una manera de describir el movimiento de un fluido consiste en dividirlo en elementos de volumen infinitesimal, a los cuales podemos llamar *partículas fluidas*, y seguir el movimiento de cada partícula. Si conocemos a las fuerzas que actúan sobre cada partícula del fluido, podemos entonces resolver para las coordenadas y velocidades de cada partícula en función del tiempo. Este procedimiento, que es una generalización directa de la mecánica de la partícula, fue desarrollado por primera vez por Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Puesto que el número de partículas de fluido es generalmente muy grande, el uso de este método es una tarea formidable.

Existe otro tratamiento distinto, desarrollado por Leonhard Euler (1707-1783), que es más conveniente en la mayoría de los casos. En él abandonamos el intento de especificar la historia de cada partícula del fluido y, en cambio, especificamos la densidad y la velocidad del fluido en cada punto en el espacio y en cada instante de tiempo. Éste es el método que usaremos. Describiremos al movimiento del fluido especificando la densidad $\rho(x, y, z, t)$ y la velocidad $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ en el punto $x, y, z$ en el tiempo $t$. Centraremos entonces nuestra atención en qué está sucediendo en un punto en particular del espacio en ese tiempo determinado, en lugar de ocuparnos de qué le sucede a una partícula dada de fluido. Cualquier cantidad empleada para describir el estado del fluido, por ejemplo, la presión $p$, tendrá un valor definido en cada punto en el espacio y en cada instante de tiempo. Si bien, esta descripción del movimiento del fluido centra la atención sobre un punto en el espacio en lugar de sobre una partícula del fluido, no podemos evitar seguir a las partículas del fluido en sí mismas, cuando menos durante intervalos de tiempo cortos $dt$. Después de todo, las leyes de la mecánica se aplican a partículas y no a puntos en el espacio.

Consideraremos en primer lugar algunas características generales del flujo de los fluidos.

**1.** *El flujo de los fluidos puede ser estacionario o no estacionario.* Describamos al flujo en términos de los valores de variables tales como la presión, la densidad, y la velocidad de flujo en cada punto del fluido. Si estas variables son constantes en el tiempo, se dice que el flujo es *estacionario*. Los valores de estas variables cambian por lo general de un punto a otro, pero no cambian con el

tiempo en cualquier punto en particular. A menudo puede conseguirse esta condición a velocidades de flujo bajas; una corriente que fluya continuamente es un ejemplo. En el flujo no es estacionario, como en una ola grande provocada por la marea, las velocidades v son funciones del tiempo. En el caso del flujo *turbulento*, tal como en los rápidos de un río o en una caída de agua, las velocidades varían erráticamente de punto a punto así como de tiempo a tiempo.

2. *El flujo de un fluido puede ser compresible o incompresible.* Si la densidad $\rho$ de un fluido es constante, independiente de $x$, $y$, $z$, y $t$, su flujo se llama *flujo incompresible*. Puede considerarse usualmente que los líquidos fluyen incompresiblemente. Pero aun en un gas altamente compresible la variación de la densidad puede ser insignificante, y para objetos prácticos podemos considerar que el flujo es incompresible. Por ejemplo, al volar a velocidades mucho menores que la velocidad del sonido en el aire (que se describe como aerodinámica subsónica), el flujo del aire sobre las alas es casi incompresible.

3. *El flujo de los fluidos puede ser viscoso o no viscoso.* En el movimiento de los fluidos la viscosidad es el análogo de la fricción en el movimiento de los sólidos. Cuando un fluido fluye de modo que no disipe energía por medio de fuerzas viscosas, se dice que el fluido es *no viscoso*. En muchos casos, como en problemas de lubricación, la viscosidad es extremadamente importante; por ejemplo, los aceites para motor se denominan de acuerdo a su viscosidad y a su variación con la temperatura. En otros casos, la viscosidad puede ser de poca importancia relativamente, y al despreciarla podemos emplear una descripción más sencilla en términos de flujo no viscoso.

4. *El flujo de los fluidos puede ser rotatorio o no rotatorio.* Si un elemento del fluido en movimiento no gira en torno a un eje que pase por el centro de masa del elemento, se dice que el flujo es *no rotatorio*. Podemos imaginar a una pequeña rueda de paletas sumergida en el flujo en movimiento (Fig. 1). Si la rueda se mueve sin girar, el movimiento es no rotatorio; de otro modo será rotatorio. Nótese que un elemento en particular del fluido puede moverse en una trayectoria circular y experimentar también un flujo no rotatorio; una analogía es el movimiento de las góndolas colgantes de una "rueda gigante" de feria: aun cuando la rueda gire, las personas que viajan en las góndolas no giran respecto a sus centros de masa. El remolino que se forma cuando el agua fluye por el drenaje de la bañera es un ejemplo de esta clase de flujo no rotatorio.

Para simplificar la descripción matemática del movimiento de un fluido, limitaremos nuestra exposición de la dinámica de los fluidos en su mayor parte al flujo estacionario, incompresible, no viscoso, no rotatorio. Sin embargo, corremos el riesgo de que, con tantas suposiciones simplificantes, ya no estemos estudiando un fluido real. Además, a veces es difícil decidir si una propiedad determinada de un fluido (digamos, su viscosidad) puede ser despreciada en una situación particular. A pesar de todo esto, el análisis restringido que vamos a llevar a cabo tiene una aplicación amplia en la práctica, como veremos.

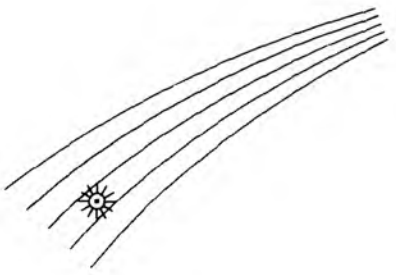


**Figura 1** Una rueda de paletas pequeña que flota libremente en un líquido al fluir. Si la rueda gira, llamamos al flujo *rotatorio*; si no, el flujo es *no rotatorio*.

## 18-2 TRAYECTORIA DE UNA CORRIENTE Y LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En el flujo estacionario la velocidad v en un punto dado es constante en el tiempo. Consideremos al punto $P$ (Fig. 2) dentro del fluido. Puesto que v en $P$ no cambia con el tiempo en el flujo estacionario, cada partícula de fluido que llegue a $P$ pasará con la misma velocidad y en la misma dirección. El movimiento de cada partícula que pase por $P$ sigue entonces la misma trayectoria, llamada *línea de corriente*. Cada partícula de fluido que pase por $P$ pasará más tarde por puntos más a lo largo de la línea de corriente, tal como $Q$ y $R$ en la figura 2. Además, cada partícula de fluido que pase por $R$ debe haber pasado previamente por $P$ y $Q$.

La magnitud del vector velocidad de la partícula de fluido cambiará, en general, al moverse a lo largo de la línea de corriente. La dirección del vector de la velocidad

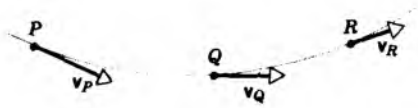



**Figura 2** En el flujo estacionario, una partícula de fluido que pase por $P$ traza una línea de corriente, pasando más tarde por los puntos $Q$ y $R$ corriente abajo. Cualquier otra partícula que pase por $P$ debe seguir esta misma trayectoria.

NIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
OCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



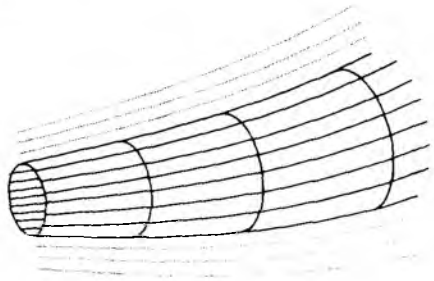


**Figura 3** Un haz de líneas de corriente forma un tubo de flujo.

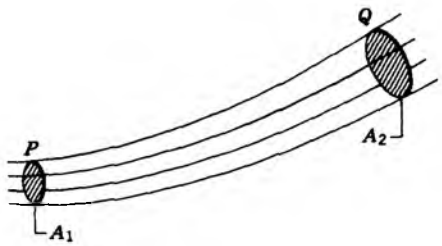



**Figura 4** Un tubo de flujo que tiene un área $A_1$ de la sección transversal en $P$, y un área $A_2$ en $Q$.

en cualquier punto a lo largo de la línea de corriente es siempre tangente a ella.

Dos líneas de corriente no pueden cruzarse entre sí ya que, si lo hicieran, una partícula de fluido que llegue podría seguir un camino u otro, y el flujo no podría ser estacionario. En el flujo estacionario el patrón de las líneas de corriente no cambia con el tiempo.

En principio podemos trazar una línea de una corriente a través de cada punto del fluido. Suponiendo un flujo estacionario, elegimos un número finito de líneas de corriente para formar un haz, como el patrón de líneas de corriente de la figura 3. Esta región tubular se llama *tubo de flujo*. La frontera de este tubo consiste en líneas de corriente a las cuales la velocidad de las partículas fluidas es siempre tangente. Así pues, ningún fluido puede cruzar la frontera de un tubo de flujo, y el tubo se comporta un tanto como una tubería de la misma forma. El fluido que entra por un extremo debe salir por el otro.

Consideremos en detalle el flujo del fluido por un tubo de flujo como el que se muestra en la figura 4. El fluido entra en $P$ donde el área de la sección transversal es $A_1$ y sale en $Q$ donde el área es $A_2$. Sea $v_1$ la velocidad de las partículas del fluido en $P$ y $v_2$ la de las partículas en $Q$. En el intervalo de tiempo $\Delta t$ un elemento de fluido recorre aproximadamente la distancia $v\,\Delta t$. Entonces el fluido que cruce $A_1$ en el intervalo de tiempo $\Delta t$ tiene un volumen de $A_1 v_1 \Delta t$, aproximadamente. Si su densidad en esa ubicación es $\rho_1$, entonces la masa de fluido $\Delta m_1$ que cruza por $A_1$ es, de alrededor de

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1\, \Delta t.$$

El *flujo de masa*, definido como la masa de fluido por unidad de tiempo que pasa por cualquier sección transversal, es entonces $\Delta m_1/\Delta t = \rho_1 A_1 v_1$ en $P$, aproximadamente. Debemos considerar que $\Delta t$ sea lo suficientemente pequeño como para que en este intervalo de tiempo ni $v$ ni $A$ varíen en forma considerable durante la distancia que viaja el fluido. En el límite según $\Delta t \to 0$, obtenemos el resultado preciso:

$$\text{flujo de masa en } P = \rho_1 A_1 v_1,$$

y, según un análisis similar,

$$\text{flujo de masa en } Q = \rho_2 A_2 v_2,$$

donde $\rho_2$, $A_2$, y $v_2$ representan, respectivamente, la densidad, el área de la sección transversal, y la velocidad del flujo en $Q$.

Hemos supuesto que el fluido entra en el tubo únicamente en $P$ y sale únicamente en $Q$. Esto es, entre $P$ y $Q$ no existen otras "fuentes" por donde el fluido pueda entrar al tubo ni "sumideros" por donde pueda salir. Además, el flujo es estacionario, de modo que la densidad del fluido entre $P$ y $Q$ no cambia con el tiempo (aun cuando pueda cambiar de lugar a lugar). Entonces el flujo de masa en $P$ debe ser igual al flujo de masa en $Q$:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2, \tag{1}$$

o, en términos más generales que se refieran a cualquier ubicación en el tubo de flujo,

$$\rho A v = \text{constante}. \tag{2}$$

Este resultado expresa la *ley de conservación de la masa* en la dinámica de los fluidos.

Si el fluido es incompresible, como lo supondremos de ahora en adelante, entonces $\rho_1 = \rho_2$, y la ecuación 1 adquiere la forma más sencilla

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \tag{3}$$

o, al definir que $R$ sea la *razón de flujo volumétrico* (o *flujo volumétrico*) $A v$,

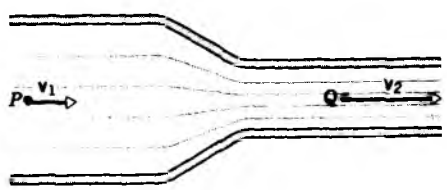



**Figura 5** La velocidad debe aumentar al estrecharse el área de un tubo horizontal. Si no actúa ninguna otra fuerza sobre el fluido, la presión en $P$ debe ser mayor que la presión en $Q$, de modo que en dirección $PQ$ actúa una fuerza para proporcionar la aceleración necesaria.

$$R = Av = \text{constante}. \qquad (4)$$

Las unidades de $R$ en el SI son $m^3/s$. Nótese que la ecuación 3 predice que en el flujo estacionario incompresible la velocidad del flujo varía inversamente con el área de la sección transversal, siendo mayor en las partes más angostas del tubo.

La constancia del flujo volumétrico a lo largo de un tubo de flujo ofrece una interpretación gráfica importante de las líneas de la corriente, como se ve en la figura 5. En una parte angosta del tubo, las líneas de corriente deben de estar más apretadas que en una parte ancha. De aquí que, cuando la distancia entre líneas de corriente disminuya, la rapidez del fluido debe aumentar. Por lo tanto, concluimos que las líneas de corriente espaciadas indican regiones de velocidad relativamente baja, y que las líneas de corriente apretadas indican regiones de velocidad relativamente elevada.

Podemos obtener otro resultado interesante al aplicar la segunda ley de Newton para el movimiento al flujo del fluido entre $P$ y $Q$ (Fig. 5). Una partícula de fluido en $P$ con una velocidad $v_1$ debe ser acelerada en dirección hacia adelante al adquirir la velocidad hacia adelante $v_2$ más elevada en $Q$. Esta aceleración puede provenir únicamente de una fuerza ejercida en la dirección $PQ$, y (si no existe ninguna otra fuerza externa, por ejemplo, la gravedad) la fuerza debe surgir de un cambio de la presión en el seno del fluido. Para proporcionar esta fuerza, la presión debe ser mayor en $P$ que en $Q$. Por lo tanto, en ausencia de otras fuentes de aceleración, las regiones de mayor velocidad del fluido deben estar asociadas con presiones del fluido más bajas. En la sección siguiente, trataremos más a fondo esta conclusión preliminar respecto a la dinámica del fluido.

¿Ha formado usted parte, alguna vez, de un "fluido humano" en el que una muchedumbre de personas tratara de pasar por una puerta angosta? Hacia la parte de atrás de la muchedumbre, el área de la sección transversal es grande, la presión es grande, pero la velocidad de avance es bastante pequeña. Una vez atravesando la puerta, la muchedumbre se mueve más rápidamente: la velocidad del flujo aumenta. Este "fluido" es compresible y viscoso, y el flujo puede ser tanto rotatorio ¡como turbulento!

**Problema muestra 1** La figura 6 muestra cómo se angosta al caer la corriente de agua que sale por un grifo. El área de la sección transversal $A_0$ es de 1.2 $cm^2$ y la de $A$ es de 0.35 $cm^2$. Los dos niveles están separados por una distancia vertical $h$ (= 45 mm). ¿En qué cantidad fluye el agua de la llave?

**Solución** Partiendo de la igualdad del flujo volumétrico (Ec. 3) tenemos

$$A_0 v_0 = Av,$$

donde $v_0$ y $v$ son las velocidades del agua a los niveles correspondientes. Partiendo de la ecuación 20 del capítulo 2 podemos también escribir, puesto que cada elemento de agua está cayendo libremente debido a la gravedad,

$$v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

Eliminando a $v$ entre estas dos ecuaciones y resolviendo para $v_0$, obtenemos

$$v_0 = \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_0^2 - A^2}} = \sqrt{\frac{(2)(9.8\ \text{m/s}^2)(0.045\ \text{m})(0.35\ \text{cm}^2)^2}{(1.2\ \text{cm}^2)^2 - (0.35\ \text{cm}^2)^2}}$$
$$= 0.286\ \text{m/s} = 28.6\ \text{cm/s}.$$

La razón de flujo volumétrico $R$ es entonces

$$R = A_0 v_0 = (1.2\ \text{cm}^2)(28.6\ \text{cm/s})$$
$$= 34\ \text{cm}^3/\text{s}.$$

Con esta cantidad, tardaríamos unos 3 s en llenar un frasco de 100 mL.

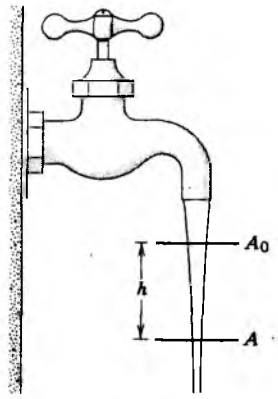



**Figura 6** Problema muestra 1. Cuando el agua cae de una llave, su velocidad aumenta. Como la cantidad de flujo debe ser la misma en todas las secciones transversales, la corriente debe volverse más angosta al caer. (Se desprecian los efectos asociados con la tensión superficial.)

## La ecuación de continuidad *(Opcional)*

Las ecuaciones 2 y 4 son ejemplos de relaciones matemáticas conocidas como *ecuaciones de continuidad*. Una ecuación de continuidad es, en efecto, una ley de conservación de la materia. Ésta nos dice que si no existen fuentes (lugares por donde se introduzca materia nueva) ni sumideros (lugares por donde la materia que fluye pueda escapar), entonces la masa $dm$ contenida en cualquier volumen $dV$ debe permanecer constante. Hemos derivado estas ecuaciones para condiciones muy especiales; una ecuación de continuidad más general es

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \qquad (5)$$

Esta ecuación se basa en la consideración de un volumen arbitrario de *espacio* (no de fluido) $dV = dx\,dy\,dz$. El elemento de volumen permanece fijo en el espacio mientras que el fluido fluye a través de él. Los primeros tres términos, cuando se les multiplica por $dV$, dan el flujo de salida neto de la masa de fluido que proviene del volumen, en términos de sus componentes de velocidad $v_x$, $v_y$, y $v_z$. El cuarto término, de nuevo multiplicado por $dV$, da la cantidad a la cual está cambiando la

masa dentro del elemento de volumen. Cuando estos términos suman cero, significa que cualquier flujo de salida (o de entrada) neto de masa debe ser compensado por un cambio equivalente en la masa dentro del elemento. Una vez más, esto es precisamente un postulado de la conservación de la masa. Si el elemento de volumen $dV$ contiene fuentes o sumideros, éstos estarían incluidos en la ecuación 5 haciendo al lado derecho igual a la cantidad a la que la materia está entrando en, o saliendo de, $dV$. (Las derivadas que aparecen en la ecuación 5 son derivadas parciales, porque la densidad y las componentes de la velocidad pueden ser funciones de más de una variable).

Las ecuaciones de continuidad son comunes en física y juegan un papel fundamental no solamente en la mecánica de los fluidos, sino en cualquier materia o tema en el cual intervenga un flujo. Por ejemplo, en electromagnetismo consideramos no el flujo de masa sino el flujo de carga eléctrica. Las componentes de **v** en la ecuación 5 son reemplazadas por componentes correspondientes de la corriente eléctrica, mientras que la densidad de masa es reemplazada por la densidad de carga. La interpretación de la ecuación no cambia, excepto que entonces se refiere a la conservación de la carga eléctrica más que a la masa. (Véanse los capítulos 27 y 32.) ■

## 18-3 LA ECUACIÓN DE BERNOULLI*

La ecuación de Bernoulli, que es una relación fundamental en la mecánica de los fluidos, no es un principio nuevo sino que es derivable de las leyes básicas de la mecánica newtoniana. Hallamos conveniente derivarla del teorema trabajo-energía (véase la Sec. 7-4), ya que es esencialmente un postulado del teorema trabajo-energía para el flujo de los fluidos.

Consideremos el flujo estacionario, incompresible, no viscoso y no rotatorio de un fluido a lo largo de la tubería o tubo de flujo de la figura 7. La porción de tubería que se muestra en la figura tiene una sección transversal $A_1$ uniforme a la izquierda. Allí es horizontal con una elevación $y_1$ sobre cierto nivel de referencia. Gradualmente se ensancha y eleva, y a la derecha tiene una sección transversal $A_2$ uniforme. Allí es horizontal en una elevación $y_2$. Concentrémonos en la porción de fluido representada por los sombreados suave e intenso y llamemos a este fluido "el sistema". Consideremos luego el movimiento del sistema desde la posición mostrada en la figura 7*a* hasta la mostrada en la figura 7*b*. En todos los puntos de la parte angosta de la tubería la presión es $p_1$ y la velocidad $v_1$; en todos los puntos de la porción ancha la presión es $p_2$ y la velocidad $v_2$.

El teorema trabajo-energía (véase la Ec. 19 del capítulo 7) establece: el trabajo efectuado por la fuerza resultante que actúa sobre un sistema es igual al cambio en la energía cinética del sistema. En la figura 7 las fuerzas que efectúan un trabajo sobre el sistema, suponiendo que podamos despreciar a las fuerzas viscosas, son las fuerzas de la presión $p_1A_1$ y $p_2A_2$ que actúan sobre los extremos a mano izquierda y derecha del sistema, respectivamente, y la fuerza de la gravedad. Al circular el fluido por la tubería el efecto neto, como lo muestra la comparación de las figuras 7*a* y 7*b*, es elevar al fluido representado por el área de sombreado intenso de la figura 7*a* a la posición mostrada en la figura 7*b*. La cantidad de fluido representada por el sombreado suave no cambia a causa del flujo.

Podemos hallar el trabajo $W$ efectuado sobre el sistema por la fuerza resultante como sigue:

**1.** El trabajo efectuado sobre el sistema por la fuerza de la presión $p_1A_1$ es $p_1A_1\,\Delta l_1$.

**2.** El trabajo efectuado sobre el sistema por la fuerza de la presión $p_2A_2$ es $-p_2A_2\,\Delta l_2$. Nótese que es negativo, porque la fuerza actúa en dirección opuesta al desplazamiento horizontal.

**3.** El trabajo efectuado sobre el sistema por la gravedad está asociado con la elevación del elemento de fluido en sombreado intenso desde la altura $y_1$ hasta la altura $y_2$ y es $-\Delta m\, g(y_2 - y_1)$ donde $\Delta m$ es la masa de fluido en cualquiera de las áreas con sombreado intenso. Esta contribución es también negativa a causa de que la fuerza gravitatoria actúa en dirección opuesta al desplazamiento vertical.

El trabajo neto $W$ efectuado sobre el sistema por todas las fuerzas se halla al sumar estos tres términos, es decir,

$$W = p_1A_1\,\Delta l_1 - p_2A_2\,\Delta l_2 - \Delta m\, g(y_2 - y_1).$$

Ahora bien, $A_1\,\Delta l_1$ ($= A_2\,\Delta l_2$) es el volumen $\Delta V$ del elemento de fluido en sombreado intenso, el cual podemos escribir como $\Delta m/\rho$, en donde $\rho$ es la densidad (constante) del fluido. Recordemos que los dos elementos de fluido tienen la misma masa, de modo que al disponer que $A_1\,\Delta l_1 = A_2\,\Delta l_2$ hemos supuesto que el fluido es incompresible. Con esta hipótesis tenemos

$$W = (p_1 - p_2)(\Delta m/\rho) - \Delta m\, g(y_2 - y_1). \qquad (6)$$

El cambio en la energía cinética del elemento de fluido es

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}\Delta m\, v_2^2 - \tfrac{1}{2}\Delta m\, v_1^2.$$

Partiendo del teorema trabajo-energía, $W = \Delta K$, y entonces tenemos

$$(p_1 - p_2)(\Delta m/\rho) - \Delta m\, g(y_2 - y_1) = \tfrac{1}{2}\Delta m\, v_2^2 - \tfrac{1}{2}\Delta m\, v_1^2, \qquad (7)$$

lo que, después de cancelar al factor común de $\Delta m$, puede reacomodarse para leerse como sigue:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2. \qquad (8)$$

* En la *Encyclopaedia Britannica* (edición undécima) figuran ocho miembros de la familia Bernoulli. Aquí nos referimos a Daniel Bernoulli (1700-1782), quizá el más notable de esta destacada familia.

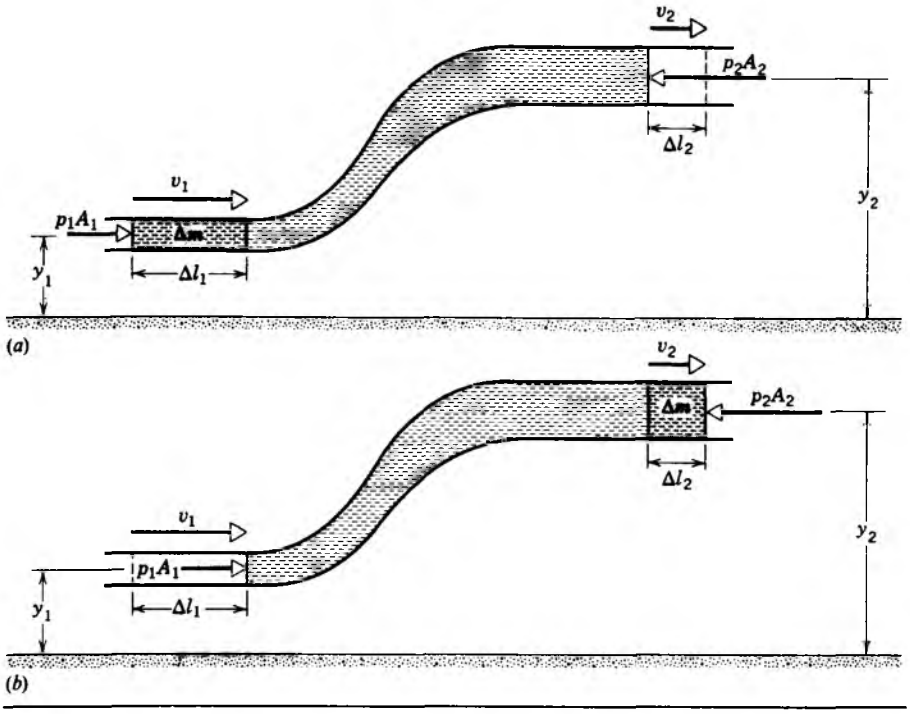



**Figura 7** El fluido fluye por una tubería en forma estacionaria. Durante el intervalo de (*a*) a (*b*), el efecto neto del flujo es la transferencia del elemento de fluido indicado por el sombreado intenso desde el extremo de entrada de la tubería hasta el extremo de salida.

Puesto que los subíndices 1 y 2 se refieren a dos ubicaciones cualesquiera a lo largo de la tubería, podemos suprimir los subíndices y escribir

$$p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante}. \tag{9}$$

La ecuación 9 recibe el nombre de *ecuación de Bernoulli* para el flujo estacionario, incompresible, no viscoso y no rotatorio. Fue presentada por vez primera por Daniel Bernoulli en su *Hydrodynamica* en 1738.

La ecuación de Bernoulli es estrictamente aplicable únicamente al flujo estacionario, siendo evaluadas las cantidades implicadas a lo largo de la línea de corriente. En nuestra figura, la línea de corriente usada está a lo largo del eje de la tubería. Sin embargo, si el flujo es no rotatorio puede demostrarse (véase el problema 33 para un caso especial) que la constante de la ecuación 9 es la misma para *todas* las líneas de corrientes.

Así como la estática de una partícula es un caso especial de la dinámica de la partícula, la estática de los fluidos es un caso especial de la dinámica de los fluidos. No debería sorprendernos, por lo tanto, que la ley del cambio de la presión con la altura en un fluido en reposo esté incluida en la ecuación de Bernoulli como un caso especial. Si el fluido está en reposo, entonces $v_1 = v_2 = 0$ y la ecuación 8 se convierte en

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$$

o

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1),$$

que es la misma que la ecuación 8 del capítulo 17.

De la ecuación 8 se deduce otro resultado básico cuando $y_1 = y_2$ (es decir, la tubería es horizontal, de modo que no es preciso considerar los efectos gravitatorios). Entonces

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2. \tag{10}$$

Cuando la velocidad es grande, la presión debe ser pequeña, y a la inversa. Éste es el postulado matemático que confirma la conclusión de lo expuesto como consecuencia de la ecuación 4. En la ecuación 9 todos los términos tienen la dimensión de una presión (lo cual debe usted verificar). La presión $p + \rho g y$, la cual estaría presente aun cuando no hubiese flujo ($v = 0$), se llama *presión estática*; el término $\frac{1}{2}\rho v^2$ se denomina *presión dinámica*.

La ecuación de Bernoulli es en efecto un postulado de la conservación de la energía mecánica en un sistema. En analogía con nuestro tratamiento de la conservación de la energía en el capítulo 8, podemos reescribir la ecuación 7 como:

$$\Delta K + \Delta U = W,$$

donde los tres términos se refieren, respectivamente, a los cambios en las energías cinética y potencial y al trabajo efectuado por la fuerza de la presión, siendo consideradas

todas las cantidades por unidad de volumen del fluido. Si el fluido es compresible, puede adquirir energía interna por medios mecánicos; por ejemplo, la fuerza de la presión puede empujar a las moléculas acercándolas más, aumentando por lo tanto su energía potencial interna. Entonces en un fluido compresible deberíamos incluir otro término $\Delta E_{\text{int}}$ correspondiente al cambio en la energía interna por unidad de volumen, y el postulado de la conservación de la energía se convierte en

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W.$$

Este resultado es idéntico a la ecuación 28 del capítulo 8. Si, además, el flujo es viscoso, las fuerzas similares a la fricción realizan un trabajo que puede parecer como un aumento en la energía interna del fluido.

En la práctica, podemos modificar a la ecuación de Bernoulli como sea necesario para justificar la conversión de la energía mecánica del fluido en energía interna. Si el flujo puede considerarse como aproximadamente incompresible y no viscoso, estas correcciones son despreciables.

**Problema muestra 2** Un tanque elevado de altura $h$ = 32 m y diámetro $D$ = 3.0 m abastece de agua a una casa (Fig. 8). Una tubería horizontal en la base del tanque tiene un diámetro $d$ = 2.54 cm (1 in, típico de las tuberías de abastecimiento doméstico en Estados Unidos). Para satisfacer las necesidades del hogar, la tubería de abastecimiento debe ser capaz de sustituir agua a razón de $R$ = 0.0025 m³/s (alrededor de $\frac{2}{3}$ de galón por segundo). (*a*) Si el agua estuviese fluyendo a la cantidad máxima, ¿cuál sería la presión en la tubería horizontal? (*b*) Una tubería más pequeña, de diámetro $d'$ = 1.27 cm (= 0.5 in) abastece al segundo piso de la casa, a una distancia de 7.2 m sobre el nivel del suelo. ¿Cuáles son la velocidad del flujo y la presión del agua en esta tubería? Desprecie la viscosidad del agua.

**Solución** (*a*) Aplicamos la ecuación de Bernoulli a lo largo de la línea de flujo *ABC* mostrada en la figura 8. En los puntos *A* y *B* tenemos

$$p_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g y_A = p_B + \tfrac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g y_B.$$

En *A*, la presión es la de la atmósfera, $p_0$. Con $y_A = h$ y $y_B = 0$, obtenemos, para la presión desconocida,

$$p_B = p_0 + \rho g h + \tfrac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2).$$

Podemos hallar $v_A$ y $v_B$ a partir de la igualdad del flujo volumétrico (Ec. 4), lo que nos da

$$v_A A_A = v_B A_B = R,$$

donde $R$ es la cantidad de flujo volumétrico constante. Entonces

$$v_A = \frac{R}{A_A} = \frac{0.0025\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(1.5\ \text{m})^2} = 3.5 \times 10^{-4}\ \text{m/s},$$

$$v_B = \frac{R}{A_B} = \frac{0.0025\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.0127\ \text{m})^2} = 4.9\ \text{m/s}.$$

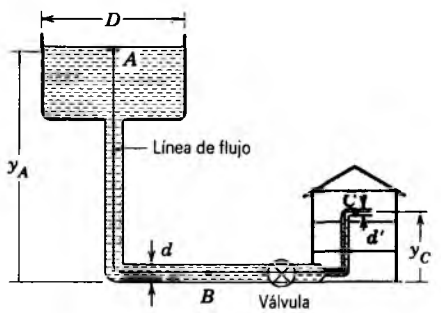



**Figura 8** Problema muestra 2.

Obsérvese que el término $\frac{1}{2}\rho v_A^2$ en la expresión para $p$ es despreciable comparado con el término $\frac{1}{2}\rho v_B^2$. Esto es, la velocidad del flujo en la parte superior del tanque es bastante pequeña, debido a la gran área de su sección transversal.

Ahora podemos resolver para la presión en la tubería:

$$\begin{aligned} p_B &= p_0 + \rho g h - \tfrac{1}{2}\rho v_B^2 \\ &= 1.01 \times 10^5\ \text{Pa} + (1.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)(32\ \text{m}) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(1.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(4.9\ \text{m/s})^2 \\ &= 1.01 \times 10^5\ \text{Pa} + 3.14 \times 10^5\ \text{Pa} - 0.12 \times 10^5\ \text{Pa} \\ &= 4.03 \times 10^5\ \text{Pa}. \end{aligned}$$

Si el agua de la tubería horizontal no estuviese fluyendo (esto es, si la válvula estuviese cerrada), la presión *estática* en *B* incluiría únicamente a los primeros dos términos de arriba, lo cual daría $4.15 \times 10^5$ Pa. La presión cuando el agua fluye se reduce de este valor estático a la cantidad de la presión dinámica.

(*b*) Si la tubería más angosta al segundo piso ha de tener la misma cantidad de flujo *R*, la velocidad en *C* debe ser

$$v_C = \frac{R}{A_C} = \frac{0.0025\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.0064\ \text{m})^2} = 19.7\ \text{m/s},$$

o cuatro veces el valor en *B*. La ecuación de Bernoulli da

$$p_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g y_A = p_C + \tfrac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g y_C$$

o

$$\begin{aligned} p_C &= p_0 + \tfrac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_C^2) + \rho g(y_A - y_C) \\ &= 1.01 \times 10^5\ \text{Pa} - \tfrac{1}{2}(1.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(19.7\ \text{m/s})^2 \\ &\quad + (1.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)(32\ \text{m} - 7.2\ \text{m}) \\ &= 1.01 \times 10^5\ \text{Pa} - 1.95 \times 10^5\ \text{Pa} + 2.43 \times 10^5\ \text{Pa} \\ &= 1.49 \times 10^5\ \text{Pa}. \end{aligned}$$

A causa de la mayor velocidad del flujo a lo largo de la tubería más pequeña, la contribución dinámica a la presión es mucho mayor en *C* que en *B*. Los efectos tanto estáticos como dinámicos tienden a reducir la presión en ese punto con relación a *B*.

## 18-4 APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI Y DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En esta sección consideraremos un número de aplicaciones de la ecuación de Bernoulli, que ilustran su uso y demuestran la amplitud de su aplicabilidad.

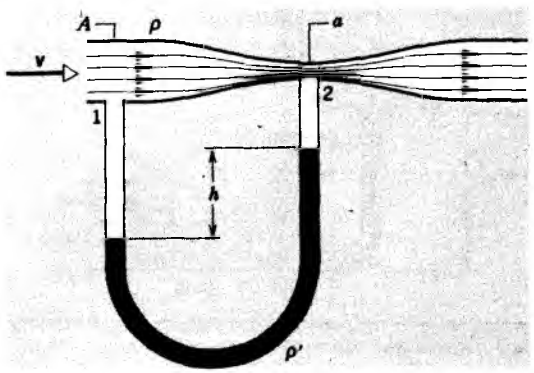



**Figura 9** Un medidor de Venturi, usado para medir la velocidad del flujo de un fluido en una tubería.

## El medidor de Venturi

Este aparato (Fig. 9) es un medidor de la velocidad del flujo de un fluido en una tubería. Un fluido de densidad $\rho$ fluye por una tubería de área de su sección transversal $A$. El área se reduce a $a$ en el cuello, y allí se acopla un tubo manométrico, como se muestra. Hagamos que el líquido del manómetro, digamos mercurio, tenga una densidad $\rho'$. Al aplicar la ecuación de Bernoulli y la igualdad del flujo volumétrico en los puntos 1 y 2, puede demostrarse (véase el problema 31) que la velocidad del flujo en el punto 1 es

$$v = a\sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}}. \tag{11}$$

## El tubo de Pitot

Este aparato (Fig. 10) se usa para medir la velocidad del flujo de un gas. Consideremos que el gas (por ejemplo, aire) fluye con una densidad $\rho$ y una velocidad $\mathbf{v}_a$ paralelas a los planos de las aberturas en $a$. La presión en el brazo izquierdo del manómetro, que está conectado a estas aberturas, es entonces la presión estática en la línea de gas, $p_a$. La abertura del brazo derecho del manómetro está en ángulo recto con la corriente. La velocidad se reduce a cero en $b$, y el gas está estancado en ese punto. Al aplicar la ecuación de Bernoulli a los puntos $a$ y $b$, obtenemos

$$p_a + \tfrac{1}{2}\rho v_a^2 = p_b.$$

Sustituyendo la lectura $\rho' gh$ del manómetro por la diferencia de presión $p_b - p_a$, podemos resolver para $v_a$ y obtener

$$v_a = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}}. \tag{12}$$

Este aparato puede calibrarse para que dé una lectura de $v_a$ directamente. El indicador de la velocidad del aire que se encuentra en las puntas de las alas de un aeroplano se basa en este principio.

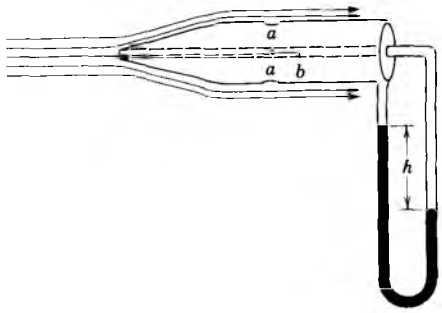



**Figura 10** Tubo de Pitot, que se emplea para medir la velocidad del flujo de un gas.

## La fuerza ascensional

Es la fuerza que actúa sobre un cuerpo, como puede ser el ala de un aeroplano, una hidroala, o las aspas de un helicóptero, en virtud de su movimiento en el seno del fluido. Ésta es distinta a la fuerza ascensional estática, que es la fuerza de flotabilidad que actúa sobre un globo o sobre un iceberg de acuerdo con el principio de Arquímedes (sección 17-4).

En el vuelo de una bola de béisbol, de una pelota de tenis, o de una pelota de golf tenemos ejemplos comunes de fuerza ascensional dinámica. Ésta, que se origina con la rotación de la pelota al volar, puede hacer que la pelota trace una curva o que ascienda o descienda con relación a una trayectoria parabólica. Puesto que el fluido (el aire en este caso) es un tanto viscoso, existe fricción a medida que la pelota avanza, y ésta tiende a transportar consigo una capa delgada de fluido llamada *capa frontera*. Vista desde el marco de reposo de una pelota que no gire, la velocidad del fluido desciende del valor más allá de la capa frontera (igual a la velocidad de vuelo de la pelota) a cero en la superficie de la pelota.

La figura 11*a* muestra, en el marco de reposo de la pelota, líneas de corrientes del flujo estacionario del aire al pasar por una pelota no rotatoria, a velocidades lo suficientemente bajas como para que no exista turbulencia. La figura 11*b* muestra las líneas de corriente de aire que acompañan a una pelota que gira rápidamente. Sin la viscosidad y sin la capa frontera, la bola, al girar, no puede transportar así aire a su alrededor y esta circulación (como se le llama) no existiría. Las pelotas de golf son sistemáticamente rugosas gracias a los hoyuelos que tienen para aumentar esta circulación y la fuerza ascensional dinámica que resulta de ello. Las bolas de béisbol a veces se raspan artificialmente (Lo cual no está permitido por las reglas del juego) por los lanzadores, por la misma razón.

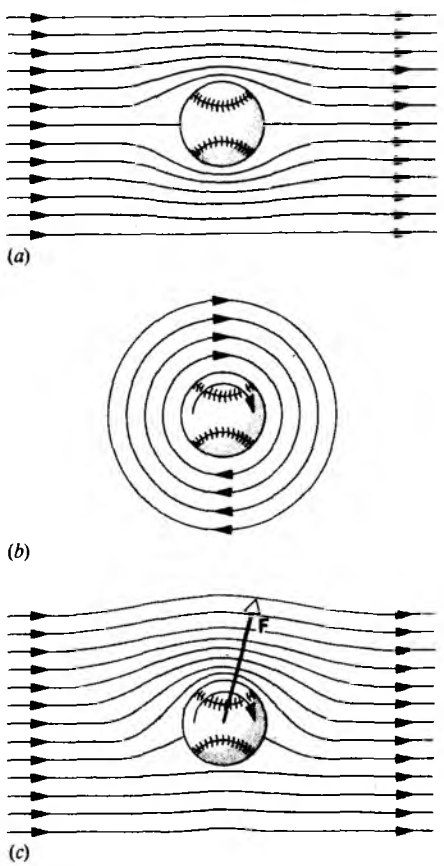



**Figura 11** (*a*) Flujo de líneas de corriente alrededor de una pelota que no gira. (*b*) La circulación del aire alrededor de una pelota que gira, como consecuencia de la capa frontera. El espesor de la capa frontera se ha exagerado aquí a propósito. (*c*) Los efectos combinados de ambos movimientos. Partiendo de la ecuación de Bernoulli vemos que una fuerza ascensional dinámica actúa hacia arriba sobre la pelota. El fluido ejerce sobre la pelota una fuerza neta *F* que tiene una componente transversal al flujo del fluido (ascenso) y una componente paralela al flujo del fluido (arrastre).

La figura 11*c* muestra el efecto de combinar la circulación (resultante de la rotación de la pelota) y el flujo estacionario (resultante de la traslación de la pelota por el aire). En el caso mostrado, las dos velocidades se suman en la parte de arriba de la pelota y se restan en la parte de abajo. A partir del espaciamento de las líneas de corriente resultantes, vemos que la velocidad del aire debajo de la pelota es menor que la de encima de ella. Según la ecuación de Bernoulli, la presión del aire debajo de la pelota debe entonces ser mayor que la de encima, de modo que la pelota experimenta una fuerza de sustentación dinámica.

Esencialmente, una bola de béisbol lanzada se curva en su trayectoria por la misma razón. Por ejemplo, si la figura 11 representa una vista desde arriba de la bola que gira mientras avanza hacia el bateador, el "ascenso" actúa en dirección hacia un lado para mover a la bola horizontalmente hacia el bateador o alejándose de él, como en el caso de una bola curva. Si la figura 11 representa una vista lateral, la bola es lanza con contragiro, como en el caso de una bola rápida. La fuerza ascensional actúa hacia arriba, provocado que la bola se eleve con relación a su trayectoria parabólica.

La fuerza de asecenso que actúa sobre el ala de un aeroplano tiene una explicación parecida. La figura 12 muestra las líneas de corriente alrededor de un plano aerodinámico (o sección tranversal del ala) adosado a un aeroplano. Elijamos al aeroplano como marco de referencia, como haríamos en el experimento en un túnel de viento, y supongamos que el aire se mueve de izquierda a derecha al pasar por el ala. Obsérvense las similitudes entre las figuras 12 y 11*c*. (De hecho, la explicación de la fuerza ascencional sobre el ala de un aeroplano implica una circulación similar a la Fig. 11*b*.).

El *ángulo de ataque* del ala provoca que el aire se desvíe hacia abajo. De la tercera ley de Newton la reacción de esta fuerza hacia abajo del ala sobre el aire es una fuerza hacia arriba **F**, el ascenso, que el aire ejerce sobre el ala.

Si bien la sola ecuación de Bernoulli no puede servir para predecir el patrón de las líneas de corriente alrededor de un plano aerodinámico, esta ecuación puede emplearse para verificar que sobre el plano aerodinámico se ejerce una fuerza de ascenso. Encima del ala (punto 1) las líneas de corriente están más cerca entre sí que lo están debajo del ala (punto 2). Entonces $v_1 > v_2$ y, según el principio de Bernoulli, $p_1 < p_2$, lo que debe ser así para que exista elevación.*

## Empuje sobre un cohete

Como ejemplo final calculemos el empuje sobre un cohete producido por el escape de los gases que expele. Consideremos una cámara (Fig. 13) de sección transversal $A$ llena de un gas de densidad $\rho$ a una presión $p$. En el fondo de la cámara se encuentra un pequeño orificio de área de

* Para mayor información sobre cómo vuelan los aeroplanos, véase "The Science of Flight", por Peter P. Wegener, *American Scientist*, mayo-junio de 1986, pág. 268. Véase también "Bernoulli's Law and Aerodynamic Lifting Force", por Klaus Weltner, *The Physics Teacher*, febrero de 1990, pág. 84. La fuerza ascensional dinámica se trata en "Physics and Sports: The Aerodynamics of Projectiles", por Peter J. Brancazio, en *Fundamentals of Physics*, 3a. edición, por David Halliday y Robert Resnick (Wiley, 1988). La fuerza ascencional dinámica puede emplearse también para proveer una fuerza horizontal que impulse a un navío; véase "The Flettner Ship", por Albert Einstein, en *Essays in Science* (Philosophical Library, 1955), pág. 92.

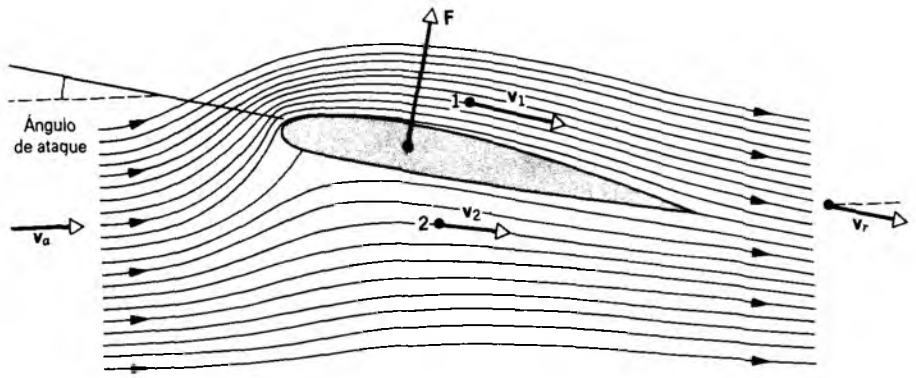



**Figura 12** Los líneas de corriente alrededor de un plano aerodinámico o ala de un aeroplano. La velocidad $\mathbf{v}_a$ del aire que se aproxima es horizontal, mientras que el aire que se aleja del plano aerodinámico tiene una velocidad $\mathbf{v}_r$, con una componente hacia abajo. El plano aerodinámico ha ejercido entonces una fuerza hacia abajo sobre el aire, y según la tercera ley de Newton, el aire debe haber ejercido por tanto una fuerza hacia arriba sobre el plano aerodinámico. Esta fuerza hacia arriba está representada por la fuerza ascensional **F**.

sección transversal $A_0$. Deseamos hallar la velocidad $v_0$ a la cual escapa el gas por el orificio.

Escribamos la ecuación de Bernoulli (Ec. 8) así:

$$p - p_0 = \rho g(y_0 - y) + \tfrac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2),$$

donde $p_0$ representa a la presión atmosférica justamente afuera del orificio. En un gas la densidad es tan pequeña que podemos despreciar la variación de presión por la altura de la cámara, lo que nos da

$$p - p_0 = \tfrac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2)$$

o

$$v_0^2 = \frac{2(p - p_0)}{\rho} + v^2, \tag{13}$$

donde $v$ es la velocidad del gas que fluye dentro de la cámara y $v_0$ es la velocidad del gas que pasa por el orificio. Si bien un gas es compresible y el flujo puede volverse turbulento, podemos considerar al flujo como estacionario e incompresible para presiones y velocidades de salida que no sean demasiado grandes.

Supongamos ahora una continuidad en el flujo de masa (en el motor de un cohete esto se consigue cuando la masa del gas que escapa es igual a la masa del gas que se origina al quemar el combustible), de modo que (para una densidad supuesta constante)

$$Av = A_0 v_0.$$

Si el orificio es muy pequeño de modo que $A_0 \ll A$, entonces $v_0 \gg v$, y podemos despreciar a $v^2$ en comparación con $v_0^2$ en la ecuación 13. De aquí que la velocidad de escape sea

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}. \tag{14}$$

Si nuestra cámara es la cámara de escape de un cohete, el empuje sobre el cohete (sección 9-8) es $v_0\, dM/dt$. Pero la masa del gas que fluye hacia afuera en el tiempo $dt$ es $dM = \rho A_0 v_0\, dt$, de modo que

$$v_0 \frac{dM}{dt} = v_0 \rho A_0 v_0 = \rho A_0 v_0^2,$$

y al usar la ecuación 14 el empuje es

$$v_0 \frac{dM}{dt} = 2A_0(p - p_0). \tag{15}$$

## 18-5 CAMPOS DE FLUJO *(Opcional)*

En la sección 16-7 vimos cómo representar la situación en las proximidades de las masas al usar un campo gravitatorio. Cada punto del campo puede considerarse como si tuviera un vector asociado con él, digamos, **g**, la fuerza gravitatoria por unidad de masa en ese punto. Podemos llevar a cabo una representación gráfica del campo trazando líneas en dirección del campo cuyo espaciamiento sea proporcional a la intensidad del campo. Emplearemos un enfoque similar cuando estudiemos el campo eléctrico en el capítulo 28.

Del mismo modo, en la dinámica de los fluidos podemos resumir la situación dentro de un fluido en movimiento por medio de un campo de flujo. En general, el campo de flujo es un campo *vectorial*. Asociamos una cantidad vectorial a cada

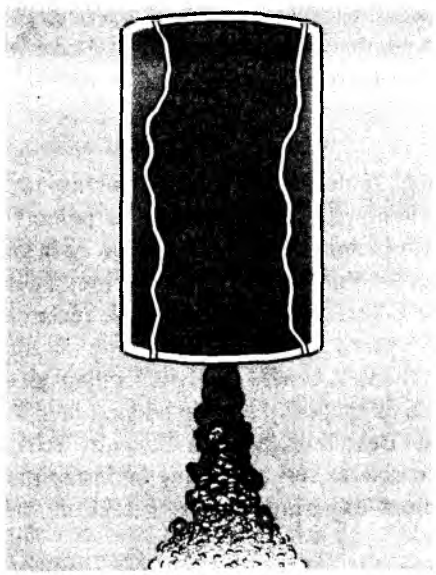


**Figura 13** Corriente de fluido que se sale de una cámara, que podría representar a la cámara de escape de un cohete.

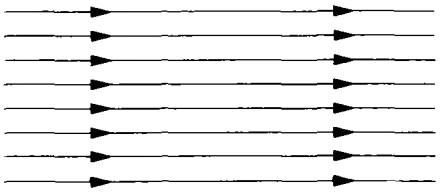


**Figura 14** Líneas de corriente (líneas horizontales) en un campo de flujo no viscoso, homogéneo.

punto en el espacio, es decir, la velocidad de flujo **v** en ese punto. En un flujo estacionario el campo de flujo es estacionario. Por supuesto, aun en este caso, determinada partícula de fluido en particular puede incluso tener una velocidad variable al moverse de punto a punto del campo. El campo ofrece algunas de las propiedades del flujo, y podemos usarlo para deducir el comportamiento de las partículas en movimiento.*

Una masa de fluido puede siempre, al fluír, dividirse en tubos de flujo. Cuando el flujo es estacionario, los tubos permanecen sin cambiar de forma, y el fluido que ya está en un tubo permanece a partir de entonces adentro del mismo tubo. Hemos visto que la velocidad del flujo dentro de un tubo de flujo es paralela al tubo y tiene una magnitud inversamente proporcional al área de la sección transversal (Ec. 2). Asignemos secciones transversales a los tubos de modo que la constante de proporcionalidad sea la misma para todos ellos; de ser posible tomaremos a esta constante como la unidad. Es decir, el flujo volumétrico es el mismo para todos los tubos, es decir, un flujo unitario. Entonces la magnitud de la velocidad de flujo puede ser determinada a partir de las áreas de las secciones transversales de los tubos de flujo. Existe otro procedimiento equivalente a éste que consiste en colocar un área unitaria perpendicular a la dirección de flujo y trazar a través de él tantas líneas de corriente como el número de unidades de magnitud de la velocidad en ese punto.

Consideremos algunos ejemplos de campos de flujo. Para propósitos de trazo tomaremos en cuenta únicamente dos ejemplos bidimensionales. En ellos, la velocidad de flujo es la misma en todos los puntos de una línea perpendicular al plano en cualquier punto.

En la figura 14 hemos trazado un *campo de flujo homogéneo*, igual que el que podría existir en el flujo estacionario, no viscoso de un líquido por un tubo con paredes interiores lisas. Aquí todas las líneas de corriente son paralelas, y la velocidad de flujo **v** es la misma en todos los puntos.

En la figura 15 mostramos un campo de *flujo rotatorio uniforme*, tal como el que se produciría haciendo girar a una cubeta de agua sobre una mesa giratoria (véase el problema 29, capítulo 17). Aquí $v$ es proporcional a $r$, porque la velocidad angular $\omega$ es constante. En la figura 16 trazamos el campo de flujo de un *torbellino* (o remolino), tal como el que podría obtenerse al destapar una bañera llena de agua. En este caso $v$ es proporcional a $1/r$, porque el ímpetu angular $L = mvr$ es

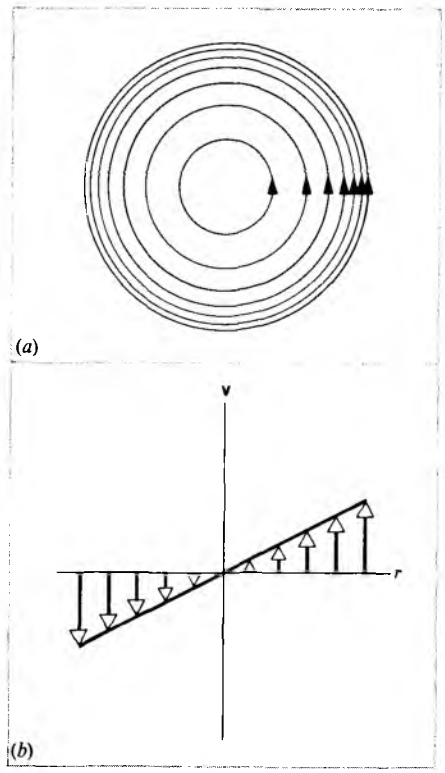



**Figura 15** (*a*) Campo de flujo rotatorio uniforme. (*b*) Variación de la velocidad del fluido a partir del centro.

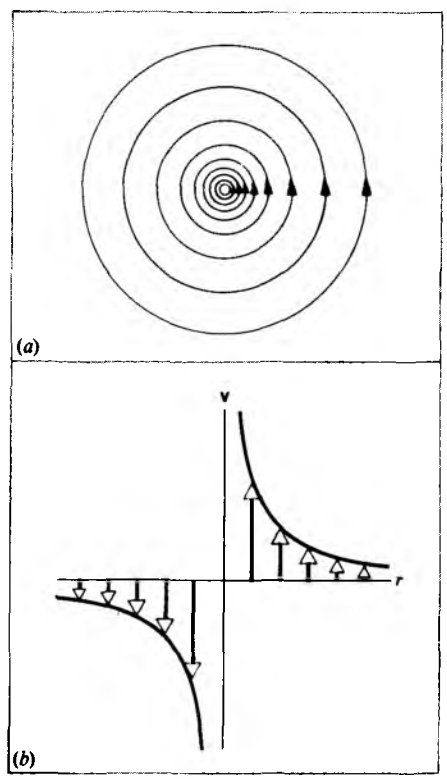
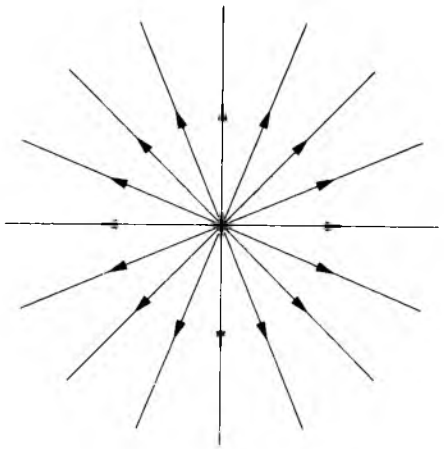



**Figura 16** (*a*) Campo de flujo de un torbellino. (*b*) Variación de la velocidad del fluido a partir del centro.

* Si el flujo es no rotatorio al mismo tiempo que estacionario, lo denominamos *flujo potencial*. Entonces, la velocidad de flujo **v** puede ser relacionada con un potencial de velocidad $\psi$, del mismo modo que, en la gravitación, **g** puede ser relacionada con el potencial gravitatorio $V$ (véase la sección 16-7). De aquí que un campo vectorial para el flujo potencial sea análogo a un campo de una fuerza conservativa.

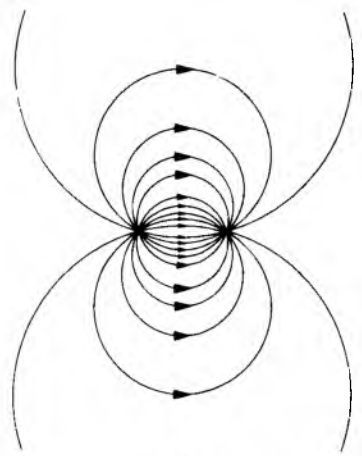


(*a*)



(*b*)

**Figura 17** (*a*) Flujo de una fuente lineal. (*b*) Mapa del flujo del fluido a partir de una fuente lineal. El mapa se forma permitiendo que el agua fluya entre una capa horizontal de vidrio laminado y una capa horizontal de yeso. El agua pasa por un orificio en el centro y sale fluyendo hacia los bordes. La dirección del flujo se hace visible rociando al yeso con cristales de permanganato de potasio, el cual se disuelve en el agua y la tiñe de color púrpura. El mapa del flujo del fluido fue elaborado y fotografiado por el profesor A. D. Moore en la Universidad de Michigan y está tomado de *Introduction to Electric Fields*, por W. E. Rogers (McGraw-Hill, 1954).



(*a*)



(*b*)

**Figura 18** (*a*) Flujo bipolar lineal, cuya fuente se halla a la izquierda; el sumidero está a la derecha. (*b*) Mapa del flujo del fluido en un bipolo lineal, construido como se describe para la figura 17.

constante, y el flujo es no rotatorio (véase el problema 36). Nótese que tanto la rotación uniforme como el movimiento de un torbellino se representan con líneas de corriente circulares pero son clases de flujo por completo diferentes. Obviamente, las formas de las líneas de la corriente dan sólo una información limitada; es necesario conocer también su espaciamiento.

La figura 17 representa el campo de flujo de una fuente. Todas las líneas de corriente se dirigen hacia afuera en forma radial. La fuente es una línea que pasa por el centro perpendicular al papel. La intensidad de una fuente se especifica dando la masa por la unidad de tiempo de emisión. El campo de flujo alrededor de un sumidero lineal es el mismo que el de una fuente excepto por el signo del flujo, que se dirige radialmente hacia adentro.

En una fuente lineal y en un sumidero lineal que tengan las mismas fuerzas y estén ligeramente separados, obtenemos el campo combinado llamado flujo bipolar lineal, que se muestra en la figura 18.

Según veremos más adelante, el campo electrostático, el campo magnético, y el campo de flujo de una corriente eléctrica son también campos vectoriales. En este aspecto, el campo homogéneo (Fig. 14) corresponde al campo eléctrico de un condensador (o capacitor) plano, el campo de la fuente o el campo del sumidero (Fig. 17) corresponden al campo eléctrico de un condensador cilíndrico o a un alambre recto de carga positiva o negativa, respectivamente, y el campo bipolar lineal (Fig. 18) corresponde al campo eléctrico de dos alambres opuestamente cargados. En todos ellos el campo de flujo es un flujo potencial, y los campos eléctricos son conservativos.

El campo homogéneo de la figura 14 representa también al campo magnético dentro de un solenoide. El campo vertiginoso de la figura 16 representa al campo magnético alrededor de un alambre recto portador de corriente. Este último es un ejemplo de campo que es rotatorio (respecto al eje del vertiginoso).

A causa de estas analogías entre el campo fluido y el electromagnético, a menudo podemos determinar un campo de flujo difícil de calcular por los métodos matemáticos actuales, por

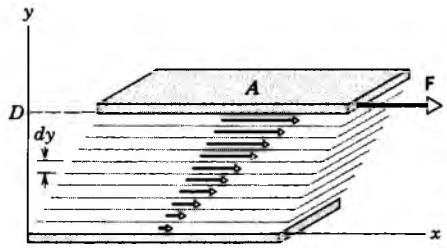



**Figura 19** Un fluido viscoso llena el espacio entre dos placas planas separadas por una distancia *D*. La placa inferior está en reposo y la placa superior se mueve hacia la derecha con una fuerza constante **F**. La velocidad de cada capa de fluido disminuye uniformemente desde la placa superior hasta la placa inferior.

medio de mediciones experimentales en aparatos eléctricos apropiados.

Como hemos visto a lo largo de este capítulo, las ideas básicas del campo y los principios de conservación hallan aplicación en muchas áreas de la física, y nos encontraremos con ellos muchas veces más todavía. ■

## 18-6 VISCOSIDAD, TURBULENCIA, Y FLUJO CAÓTICO *(Opcional)*

La viscosidad en el flujo de los fluidos es similar a la fricción en el movimiento de los cuerpos sólidos. Al deslizar a un cuerpo sólido sobre otro, debemos proporcionar una fuerza externa **F** que se oponga a la fuerza de rozamiento **f** si queremos mantener al cuerpo en movimiento a velocidad constante. En el caso del movimiento de los fluidos podemos considerar a un fluido entre dos placas paralelas, como se ilustra en la figura 19. Una fuerza **F** está aplicada a la placa superior, de modo que esté en movimiento a velocidad constante **v** respecto a la placa inferior, la cual suponemos está en reposo. La fuerza **F** se opone al arrastre viscoso de la placa superior para mantener constante su velocidad.

Podemos imaginar que el fluido está dividido en capas paralelas a las placas. La viscosidad actúa no solamente entre el fluido y la placa superior, sino entre cada capa de fluido y sobre las capas adyacentes. La velocidad de cada capa difiere en una cantidad $dv$ de la velocidad de la que está bajo ella. El flujo del fluido en el que la velocidad varía capa a capa se denomina flujo *estacionario*. En esta exposición, suponemos que la capa de fluido más alta tiene la misma velocidad $v$ que la placa de arriba y que la capa de fluido del fondo tiene la misma velocidad que la placa del fondo, es decir, cero.

**TABLA 1** VISCOSIDAD DE UNA SELECCIÓN DE FLUIDOS

| *Fluido* | $\eta$(N · s/m²) |
|---|---|
| Glicerina (20° C) | 1.5 |
| Aceite para motores† (0° C) | 0.11 |
| Aceite para motores† (20° C) | 0.03 |
| Sangre (37° C) | $4.0 \times 10^{-3}$ |
| Agua (20° C) | $1.0 \times 10^{-3}$ |
| Agua (90° C) | $0.32 \times 10^{-3}$ |
| Gasolina (20° C) | $2.9 \times 10^{-4}$ |
| Aire (20° C) | $1.8 \times 10^{-5}$ |
| $CO_2$(20° C) | $1.5 \times 10^{-5}$ |

† Peso medio (S.A.E. 30).

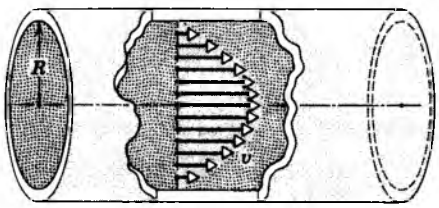



**Figura 20** El fluido fluye por un tubo cilíndrico de radio *R*. Se muestra la variación en la velocidad desde la pared hasta el centro.

Por analogía con el esfuerzo cortante aplicado a los sólidos (Sec. 14-5), podemos definir que el esfuerzo cortante sobre el fluido es $F/A$, donde $A$ es el área de la capa de fluido. Un sólido puede responder a este esfuerzo cortante con un cambio en su forma (la deformación al corte, la cual es un desplazamiento lateral a través de cada capa), pero un fluido responde mediante el movimiento, o sea, mediante un cambio de velocidad $dv$ a través de cada capa de espesor $dy$. La razón entre el esfuerzo y la deformación en el fluido se llama *coeficiente de viscosidad* $\eta$ (letra griega eta) del fluido:

$$\eta = \frac{F/A}{dv/dy}. \tag{16}$$

Según nuestra hipótesis de que la capa superior se mueve a velocidad $v$ y que la capa del fondo lo hace a $v = 0$, el *gradiente de velocidad* $dv/dy$ es simplemente $v$. donde $D$ es el espaciamiento entre las dos placas. Así,

$$\eta = \frac{F/A}{v/D} = \frac{FD}{vA}. \tag{17}$$

La unidad SI de la viscosidad es el N · s/m². La unidad cegesimal equivalente es la dina · s/cm², llamada *poise*. (La unidad recibe el nombre en memoria del fisiólogo francés Jean-Louis-Marie Poiseuille, quien fue el primero en investigar el flujo de los fluidos viscosos por de tubos, como una ayuda para entender la circulación de la sangre.) Al comparar estas unidades vemos que 1 poise = 0.1 N · s/m². La tabla 1 muestra algunos valores típicos de la viscosidad de los fluidos.

Una aplicación práctica de la viscosidad tiene lugar en el flujo de fluidos en tuberías cilíndricas. El flujo es de nuevo estacionario, pero en este caso las capas del fluido son cilindros de paredes delgadas de radios diversos. La velocidad del flujo varía con el radio; su valor máximo se da en el eje y su valor mínimo, que suponemos es cero, en las paredes (Fig. 20). Nótese que el flujo ilustrado en la figura 20 es rotatorio, aunque los elementos del fluido viajen en línea recta. Si colocásemos una pequeña rueda de paletas en cualquier parte del flujo, excepto a lo largo de la línea de corriente central, se pondría a girar debido a la variación en la velocidad de las partículas fluidas que inciden en sus paletas.

En el caso de un tubo cilíndrico, como se muestra en la figura 20, la variación de la velocidad con la posición a lo largo del tubo no es lineal. Suponiendo, una vez más, que la capa cercana a las paredes esté en reposo, puede demostrarse que la velocidad en el cuerpo cilíndrico de radio $r$ es (véase el problema 41)

$$v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \tag{18}$$

donde $v_0$ es la velocidad en el centro del tubo. En términos de la diferencia de presión $\Delta p$ a largo de la longitud $L$ del tubo, la velocidad central es

$$v_0 = \frac{\Delta p\, R^2}{4\eta L}. \tag{19}$$

Al considerar el flujo en cada cuerpo cilíndrico delgado, podemos demostrar (véase el problema 42) que el flujo de masa total $dm/dt$ (la masa del fluido que fluye por el tubo por unidad de tiempo) es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\rho\pi R^4\, \Delta p}{8\eta L}. \tag{20}$$

Este resultado se conoce como la *ley de Poiseuille*. Conociendo el coeficiente de viscosidad del fluido, podemos entonces determinar la diferencia de presión que debe proveer un agente externo (una bomba, quizás) para mantener determinado flujo de masa en el tubo. En forma equivalente, si forzamos al fluido a lo largo de un tubo con una diferencia de presión conocida, la medición del flujo de masa nos permite determinar el coeficiente de viscosidad del fluido.

La viscosidad en los líquidos se origina por las fuerzas de cohesión intermoleculares. Al aumentar la temperatura, el coeficiente de viscosidad de un líquido disminuye, porque la energía cinética creciente de las moléculas debilita el efecto de las fuerzas intermoleculares. Al contrario, en los gases la viscosidad aumenta con el aumento de la temperatura, porque las propias moléculas pueden desplazarse entre las capas. A temperaturas más elevadas, existe más movimiento molecular y por lo tanto más mezclado. Sin embargo, nótese que en un tubo existen siempre más moléculas lentas cerca de las paredes que moléculas rápidas cerca del eje central, de modo que mayor mezcla significa siempre más moléculas lentas que se mueven hacia el eje e impiden el movimiento de las moléculas que se mueven más rápidamente. (El efecto es parecido al del tráfico lento cuando se mezcla en el carril rápido de una carretera.)

**Problema muestra 3** Por un tubo de sección transversal circular se bombea aceite de castor, el cual tiene una densidad de $0.96 \times 10^3$ kg/m$^3$ a la temperatura ambiente, por medio de una bomba que mantiene una presión de medición de 950 Pa. El tubo tiene un diámetro de 2.6 cm y una longitud de 65 cm. El aceite de castor que sale por el extremo libre del tubo a la presión atmosférica se junta en un recipiente. Después de 90 s, se ha juntado un total de 1.23 kg. ¿Cuál es el coeficiente de viscosidad del aceite de castor a esta temperatura?

**Solución** El flujo de masa es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1.23\ \text{kg}}{90\ \text{s}} = 0.0137\ \text{kg/s}.$$

El coeficiente de viscosidad puede obtenerse ahora directamente de la ecuación 20 si resolvemos primero para $\eta$, que nos da

$$\eta = \frac{\rho\pi R^4\, \Delta p}{8(dm/dt)L} = \frac{(0.96 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)\pi(0.013\ \text{m})^4(950\ \text{Pa})}{8(0.0137\ \text{kg/s})(0.65\ \text{m})}$$
$$= 1.15\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2.$$



**Figura 21** El humo que asciende tiene primeramente un flujo estacionario, pero no tarda en convertirse en turbulento.

Los aceites pesados tienen típicamente viscosidades dentro de este margen.

## Turbulencia

Después de elevarse a corta distancia, la columna suave de humo de un cigarrillo se fragmenta en un patrón irregular y en apariencia caprichoso (Fig. 21). De modo similar, una corriente de fluido que pase a través de un obstáculo se rompe en remolinos y torbellinos (Fig. 22), que dan al flujo componentes de velocidad irregulares transversales a la dirección del flujo. Un ejemplo de este caso es el ondear de una bandera al viento: si el flujo de aire fuese estacionario, la bandera ocuparía una posición fija a lo largo de las líneas de corriente, pero el asta rompe el flujo en un patrón irregular parecido al de la figura 22, que da origen al movimiento de aleteo transversal de la bandera. Éstos son ejemplos de un flujo *turbulento* del fluido. Otros ejemplos incluyen las estelas dejadas en el agua por el movimiento de los buques y en el aire por el movimiento de los automóviles y de los aeroplanos. Los sonidos producidos por el silbido y por los instrumentos de viento son consecuencia del flujo turbulento del aire.

En un fluido viscoso, el flujo a baja velocidad puede describirse como estacionario, lo cual sugiere que las capas se deslizan suavemente una sobre otra. Cuando la velocidad del flujo es suficientemente grande, el movimiento se vuelve desordenado e irregular; esto es el flujo turbulento. Una analogía de la mecánica es un bloque empujado a lo largo de una superficie

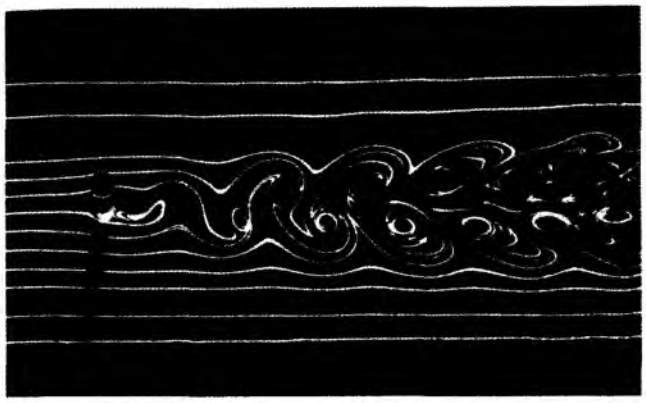


**Figura 22** El fluido que corre de izquierda a derecha luego de pasar un obstáculo cilíndrico claramente sufre un cambio de estacionario a turbulento. Nótense los remolinos y torbellinos que se forman corriente abajo a partir del obstáculo.

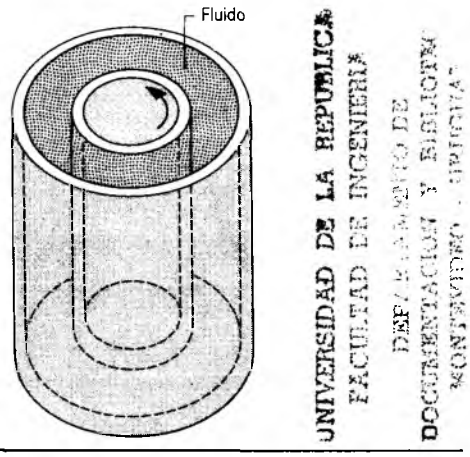



**Figura 23** Aparato experimental para medir la viscosidad de los fluidos. El fluido se coloca entre los dos cilindros, estando fijo el cilindro exterior y girando el cilindro interior a una velocidad angular $\omega$. La torca necesaria para hacer girar al cilindro interior a esta velocidad angular está determinada por la viscosidad del fluido.

rugosa. Si la fuerza de fricción es pequeña, el bloque se deslizará por la superficie si la fuerza aplicada $F$ es por lo menos tan grande como la fuerza de fricción $f$. Si la fuerza de fricción fuese mayor, la fuerza aplicada $F$ deberá también ser mayor, llegando a ser al final lo suficientemente grande como para volcar el bloque. La volcadura del bloque es la analogía de la transición del flujo estacionario al flujo turbulento.

Podemos determinar la velocidad crítica a la cual el flujo se convierte en turbulento por medio de un análisis dimensional. Hagamos que $v_c$ represente la velocidad crítica, la cual consideramos que sea un promedio en el tubo porque, como lo sugiere la figura 20, la velocidad varía en la sección transversal del tubo. Esperamos que esta velocidad crítica dependa de la viscosidad $\eta$ y de la densidad $\rho$ del fluido y del diámetro $D$ del tubo. Usando nuestra técnica usual de análisis dimensional, procedemos como sigue:

$$v_c \propto \eta^a \rho^b D^c$$

$$[v_c] = [\eta^a][\rho^b][D^c]$$

$$\mathrm{LT}^{-1} = (\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1})^a(\mathrm{ML}^{-3})^b(\mathrm{L})^c,$$

donde las dimensiones de la viscosidad han sido obtenidas a partir de sus unidades de $\mathrm{N} \cdot \mathrm{s/m^2}$. Resolviendo, obtenemos

$$a = 1, \qquad b = -1, \qquad c = -1.$$

Entonces, la velocidad crítica puede escribirse:

$$v_c \propto \frac{\eta}{\rho D},$$

o, introduciendo una constante de proporcionalidad $R$,

$$v_c = R\frac{\eta}{\rho D}. \tag{21}$$

La constante sin dimensión $R$ se denomina *número de Reynolds*. Resolviendo la ecuación 21 para $R$, podemos escribir el número de Reynolds para *cualquier* velocidad del flujo $v$ como:

$$R = \frac{\rho D v}{\eta}. \tag{22}$$

En esta interpretación, el número de Reynolds puede utilizarse para caracterizar a *cualquier* flujo, y podemos determinar por experimentación el valor del número de Reynolds para el cual el flujo se convierte en turbulento.

En tubos cilíndricos, el número de Reynolds que corresponden a la velocidad crítica es de alrededor de 2000. Así, para el agua que fluya por una tubería de 2 cm de diámetro (la típica manguera de jardín casera, por ejemplo), la velocidad crítica es

$$v_c = 2000\,\frac{1 \times 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot s/m^2}}{(10^3\ \mathrm{kg/m^3})(0.02\ \mathrm{m})} = 0.1\ \mathrm{m/s} = 10\ \mathrm{cm/s}.$$

Ésta es una velocidad bastante baja, lo cual sugiere que el flujo del agua es turbulento en una tubería doméstica ordinaria. (La velocidad de flujo de un grifo doméstico típico es de alrededor de 1 m/s.)

Nótese de la ecuación 21 que la velocidad de flujo crítica aumenta con la viscosidad. Esto es, cuanto más grande sea el rozamiento viscoso ejercido por el fluido circundante, con más probabilidad el flujo será estacionario.

## Flujo caótico

La geometría de la figura 19 no es particularmente conveniente para medir la viscosidad. La figura 23 muestra un dispositivo más conveniente. El espacio entre cilindros coaxiales está lleno con el fluido cuya viscosidad está por determinarse. Se hace que el cilindro interior gire, mientras se mantiene fijo al cilindro exterior. Puede determinarse la viscosidad del fluido a partir de la fuerza necesaria para mantener girando al cilindro interior a una velocidad constante.

Para velocidades rotatorias pequeñas, el flujo en la figura 23 será estacionario y laminar. Al aumentar la velocidad rotatoria del cilindro interior, el flujo acaba por ser turbulento. Podemos observar que la transición de flujo estacionario a flujo turbulento se lleva a cabo de manera ordenada. La figura 24 muestra dos etapas intermedias. Primeramente el fluido forma torbellinos toroidales (un poco similar a un montón de donas apiladas) y

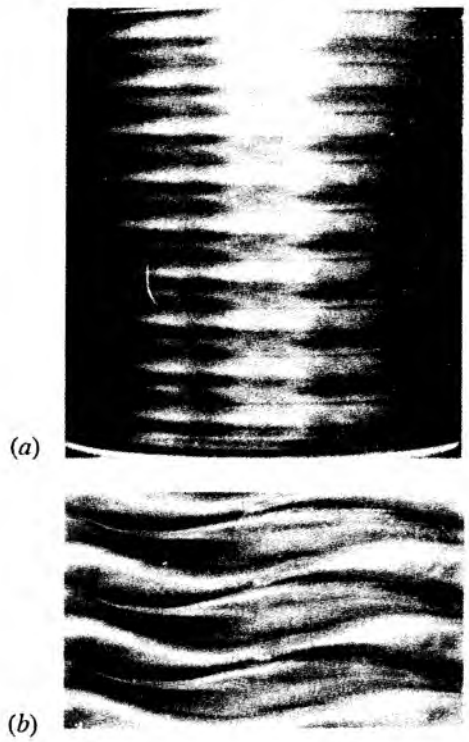



**Figura 24** Cuando la velocidad del fluido en el aparato de la figura 23 excede a la velocidad crítica, el flujo se vuelve inestable y se rompe en (*a*) torbellinos toroidales y luego en (*b*) ondas sobreimpuestas a los torbellinos.

luego se manifiesta con un patrón de ondas de frecuencia definida que se superpone a los torbellinos. Al continuar creciendo la velocidad de rotación, aparecen ondas con nuevas frecuencias. Podemos imaginar que el flujo turbulento es la ampliación de este movimiento que incluye tantas componentes de frecuencia que parece que el movimiento se vuelve completamente desordenado y confuso (algo así como el ruido electrónico). Puede existir una estructura periódica subyacente, pero es demasiado compleja para seguirla.

La teoría del caos (véase la Secc. 6-9) adquiere un enfoque diferente para explicar el surgimiento de la turbulencia. El movimiento turbulento que resulta de la teoría del caos es verdaderamente *aperiódico*, no simplemente la combinación de un gran número de movimientos periódicos. Existe una distinción crítica entre estos dos casos. Si la transición de flujo estacionario a flujo turbulento tiene lugar por medio de una sucesión de movimientos periódicos ordenados, entonces dos partículas de fluido que se muevan en forma parecida en el flujo estacionario permanecerán en estados de movimiento relacionados íntimamente durante la transición al flujo turbulento. Sin embargo, si la condición intermedia puede describirse como caótica, entonces el movimiento deja de ser susceptible de predicción y las dos partículas pueden hallarse en el flujo turbulento en estados de movimiento muy diferentes. La teoría del caos, aplicable a una amplia variedad de sistemas físicos, proporciona una base teórica alterna para entender sistemas complejos como el movimiento turbulento de los fluidos. ■

## PREGUNTAS

1. Describa brevemente lo que significa cada uno de los conceptos siguientes e ilústrelos con un ejemplo: (*a*) flujo de fluido estacionario; (*b*) flujo de fluido no estacionario; (*c*) flujo de fluido rotatorio; (*d*) flujo de fluido no rotatorio; (*e*) flujo de fluido compresible; (*f*) flujo de fluido incompresible; (*g*) flujo de fluido viscoso; (*h*) flujo de fluido no viscoso.
2. Explique las variaciones de presión de la sangre al circular por el organismo.
3. Expliquer cómo mide un médico la presión sanguínea.
4. En el flujo estacionario, el vector de la velocidad es constante en cualquier punto. ¿Puede existir entonces un movimiento acelerado de las partículas del fluido? Explique.
5. Describa las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido al correr por una tubería de sección transversal no uniforme.
6. En una demostración en el aula, una pelota de ping pong se mantiene en el aire por medio de un chorro vertical de aire. ¿Es el equilibrio estable, inestable, o neutro? Explique.
7. La altura del líquido en los tubos derechos de la figura 25 indica que la presión disminuye a lo largo del conducto, aun cuando éste tenga una sección transversal uniforme y el líquido que fluye sea incompresible. Explique.

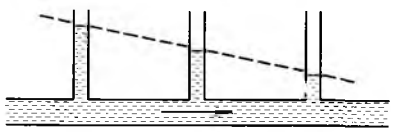


**Figura 25** Pregunta 7.

8. Explique por qué una chimenea más alta crea un mejor tiro para extraer el humo fuera del hogar. ¿Por qué no se extiende el humo en el recinto en que se halla el fuego?
9. (*a*) Explique cómo puede hacer un lanzador de béisbol que la bola se curve a su derecha o a su izquierda. ¿Podemos justificarlo aplicando la ecuación de Bernoulli a una bola que gire así? (Véase "Bernoulli and Newton in Fluid Mechanics", por Norman F. Smith, *The Physics Teacher*, noviembre de 1972, pág. 451.) (*b*) ¿Por qué es más fácil

lograr una curva con una pelota de tenis que con una bola de béisbol?

**10.** No solamente puede hacerse que una bola de superficie rugosa se curve al lanzarla sino también una bola lisa, pero estas bolas se curvarán en direcciones *opuestas*. ¿Por qué? (Véase "Effect of Spin and Speed on the Curve of a Baseball and the Magnus Effect for Smooth Spheres", por Lyman J. Briggs, *American Journal of Physics*, noviembre de 1959, pág. 589.)

**11.** Dos lanchas de remos que se mueven paralelamente entre sí y en la misma dirección son arrastradas una hacia la otra. Dos automóviles que se muevan paralelamente también son arrastrados entre sí. Explique tal fenómeno con base en la ecuación de Bernoulli.

**12.** Al construir los "rascacielos", ¿qué fuerzas producidas por el movimiento del aire deben ser contrarrestadas? ¿Cómo se hace esto? (Véase "The Wind Bracing of Buildings", por Carl W. Condit, *Scientific American*, febrero de 1974, pág. 92.)

**13.** Explique, mediante la ecuación de Bernoulli, la acción de un paracaídas para retardar la caída libre.

**14.** ¿Por qué se vuelve más angosta la corriente de agua al salir por un grifo?

**15.** ¿Puede usted explicar por qué el agua fluye en corriente continua cuando corre por un tubo vertical hacia abajo, mientras que se divide en gotas al caer libremente?

**16.** ¿Cómo trabaja la descarga de un excusado? En la realidad. (Véase *Flushed with Pride: The Story of Thomas Crapper* , por W. Reyburn, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.)

**17.** A veces, es posible sacar una carta del sobre cortando una tira delgada del lado estrecho, sujetándolo firmemente, y soplando hacia él. Explique, empleando la ecuación de Bernoulli, por qué tiene éxito este procedimiento.

**18.** ¿Sería mejor que un aeroplano al despegar se moviese contra el viento o con el viento? ¿Y al aterrizar?

**19.** Explique cómo depende la diferencia de presión entre las superficies baja y alta del ala de un aeroplano de la altitud del plano que se mueve.

**20.** La acumulación de hielo en el ala de un aeroplano puede reducir significativamente su fuerza ascensional. Explique. (El *peso* del hielo no es lo que aquí importa.)

**21.** ¿Cómo es que un aeroplano puede volar "panza" arriba?

**22.** "La forma de plátano característica de la mayoría de los bumerangs no tiene mucho que ver con su capacidad de retorno... La cuestión esencial consiste en la sección transversal de los brazos, la cual debe ser más convexa en un lado que en el otro, como en el perfil del ala de un aeroplano. (De "The Aerodynamics of Boomerangs", por Felix Hess, *Scientific American*, noviembre de 1968, pág. 124.) Explique.

**23.** ¿Cómo se impulsan los pájaros para remontar el vuelo? (Véase "The Soaring Flight of Birds", por C. D. Cone, Jr., *Scientific American*, abril de 1962, pág. 130.)

**24.** ¿Por qué aparece el factor "2" en lugar del factor "1"? Uno podría ingenuamente esperar que el empuje fuera simplemente la diferencia de presión multiplicada por el área, esto es, $A_0(p - p_0)$.

**25.** Explique por qué el efecto destructivo de un tornado es mayor cerca del centro de la perturbación que cerca del borde.

**26.** Cuando se retira el tapón de una tina llena, el agua se cuela por el orificio mientras forma un pequeño remolino. La velocidad angular de un elemento de fluido en torno a un eje vertical que pase por el orificio parece ser más grande cerca del orificio. Explique.

**27.** ¿Es verdad que en las bañeras situadas en el hemisferio norte el agua se drena con una rotación en sentido antihorario y en las del hemisferio sur lo hacen en sentido horario? De ser así, explique y prediga lo que pasaría en el ecuador. (Véase "Bath-Tub Vortex", por Ascher H. Shapiro, *Nature*, diciembre 15, 1962, pág. 1080.)

**28.** Explique por qué no es posible retirar el filtro de papel del embudo de la figura 26 soplando por el extremo angosto.

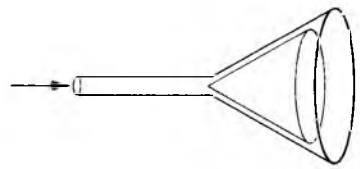


**Figura 26** Pregunta 28.

**29.** De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, un aumento de velocidad debe estar asociado a una disminución de la presión. Sin embargo, cuando ponemos la mano fuera de la ventanilla de un automóvil en movimiento, aumentando la velocidad a la cual fluye el aire, sentimos un *aumento* de presión. ¿Por qué no es esto una violación de la ecuación de Bernoulli?

**30.** ¿Por qué la presencia de la atmósfera reduce el alcance máximo de ciertos objetos (por ejemplo, las pelotas de tenis) pero aumenta el alcance máximo de otros (por ejemplo, los discos voladores o las pelotas de golf)?

**31.** Un disco puede llegar más lejos lanzado *contra* un viento de 25 mi/h que a favor del viento. ¿Cuál es la explicación? (*Sugerencia*: Piense en la fuerza ascensional dinámica y en el arrastre.)

**32.** Explique por qué las pelotas de golf tienen hoyuelos.

**33.** Cuanto más largo sea el tablón y haya menos profundidad en el agua, más lejos se deslizará una tabla para flotar sobre las olas (*surf board*). Explique. (Véase "The Surf Skimmer", por R. D. Edge, *American Journal of Physics*, Julio de 1968, pág. 630.)

**34.** Si se vierte de una tetera, el agua tiene una tendencia a salir a lo largo del borde inferior de la boca de salida. Explique. (Véase "The Teapot Effect... a Problem)", por Markus Reiner, *Physics Today*, septiembre de 1956, pág. 16.)

**35.** Las marmotas viven en colonias grandes en sistemas complejos de madrigueras interconectadas. Encaran el problema de mantener en sus madrigueras un abastecimiento de aire suficiente para evitar la asfixia. La evitan construyendo montículos cónicos de tierra sobre algunas de sus muchas aberturas de madriguera. En términos de la ecuación de Bernoulli, ¿cómo trabaja este esquema de aire

acondicionado? Obsérvese que, debido a las fuerzas viscosas, la velocidad del viento en la pradera está menos cerca del nivel del suelo de lo que lo está incluso a unas cuantas pulgadas más arriba. (Véase *New Scientist*, enero 27, 1972, pág. 191.)

**36.** La viscosidad es un ejemplo de un fenómeno de transporte. ¿Qué propiedad está siendo transportada? ¿Puede usted pensar en otros fenómenos de transporte y en sus propiedades correspondientes?

**37.** En tiempo de frío, ¿por qué recomiendan los fabricantes de automóviles emplear aceites "multigrado" (multiviscosidad) para el motor?

**38.** ¿Por qué es más importante tener en cuenta la viscosidad en un fluido que circula por un conducto angosto que en un conducto relativamente sin restricción?

**39.** La viscosidad puede retrasar la presencia de turbulencia en el flujo de los fluidos; es decir, tiende a estabilizar el flujo. Considere el jarabe y el agua, por ejemplo, y encuentre una explicación aceptable.

## PROBLEMAS

### *Sección 18-2 Trayectoria de una corriente y la ecuación de continuidad*

**1.** Un tubo de 34.5 cm de diámetro conduce agua que circula a razón de 2.62 m/s. ¿Cuánto tiempo le tomará descargar 1600 $m^3$ de agua?

**2.** Una manguera de jardín que tiene un diámetro interno de 0.75 in está conectada a un aspersor que consta simplemente de un accesorio con 24 orificios, cada uno de 0.050 in de diámetro. Si el agua de la manguera tiene una velocidad de 3.5 ft/s, ¿a qué velocidad sale por los orificios del aspersor?

**3.** La figura 27 muestra la confluencia de dos corrientes que forman un río. Una corriente tiene una anchura de 8.2 m, una profundidad de 3.4 m, y una velocidad de 2.3 m/s. La otra corriente tiene 6.8 m de anchura, 3.2 m de profundidad, y fluye a razón de 2.6 m/s. La anchura del río es de 10.7 m y la velocidad de su corriente es de 2.9 m/s. ¿Cuál es su profundidad?

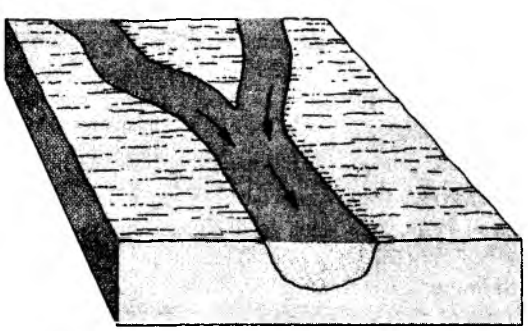


**Figura 27** Problema 3.

**4.** Se bombea continuamente agua que se extrae de un sótano inundado con una velocidad de 5.30 m/s por medio de una manguera uniforme de 9.70 mm de radio. La manguera pasa por una ventana situada a 2.90 m sobre el nivel del agua. ¿Cuánta potencia proporciona la bomba?

**5.** Un río de 21 m de anchura y 4.3 m de profundidad irriga una superficie de 8500 $km^2$ donde la precipitación (pluvial) promedio es de 48 cm/año. Una cuarta parte de ésta regresa posteriormente a la atmósfera por evaporación, pero el resto corre finalmente por el río. ¿Cuál es la velocidad promedio de la corriente del río?

**6.** Las corrientes de las mareas en los canales angostos que unen a las bahías costeras con el océano pueden ser muy rápidas. El agua debe fluir hacia la bahía al elevarse la marea y salir de nuevo al mar durante la bajamar. Considere la bahía rectangular mostrada en la figura 28*a*. La bahía está unida al mar por medio de un canal de 190 m de anchura y 6.5 m de profundidad respecto al nivel medio del mar. La gráfica (figura 28*b*) muestra la variación diurna del nivel del agua en la bahía. Calcule la velocidad promedio de la corriente de las mareas en el canal.

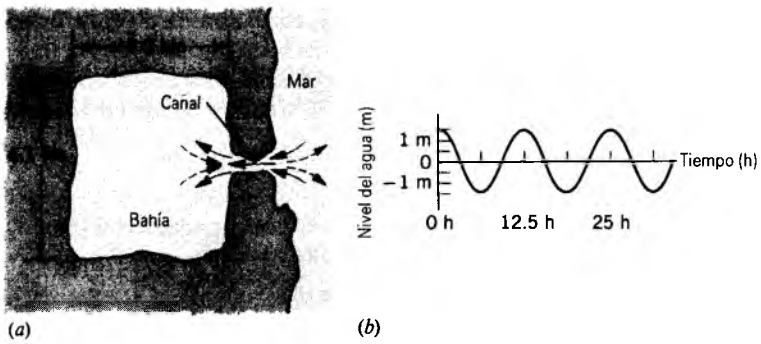
### *Sección 18-3 La ecuación de Bernoulli*

**7.** ¿Cuánto trabajo efectúa la presión al bombear 1.4 $m^3$ de agua por un tubo de 13 mm de diámetro interno si la diferencia de presión entre los extremos del tubo es de 1.2 atm?

**8.** La toma de agua de una presa (véase la Fig. 29) tiene un área de sección transversal de 7.60 $ft^2$. El agua fluye en ella a una velocidad de 1.33 ft/s. En la planta de generación que está situada a 572 ft abajo del punto de toma, el agua fluye a razón de 31 ft/s. (*a*) Halle la diferencia de presión, en $lb/in^2$, entre la toma y la descarga. (*b*) Halle el área del tubo de descarga. La densidad promedio del agua es de 62.4 $lb/ft^3$.

**9.** A veces, se prueban modelos de torpedos en un tubo horizontal por el que fluye el agua, muy similar al túnel de viento que se emplea para probar modelos de aeroplanos. Considere un tubo circular de 25.5 cm de diámetro interno y un modelo de torpedo, alineado a lo largo del eje del tubo, con un diámetro de 4.80 cm. El torpedo va a ser probado con agua que circula a razón de 2.76 m/s. (*a*) ¿A qué velocidad deberá fluir el agua en la parte no reducida del tubo? (*b*) Halle la diferencia de presión entre la parte no reducida y la parte reducida del tubo.

**10.** Por una tubería con un área de la sección transversal de 4.20 $cm^2$ circula el agua a una velocidad de 5.18 m/s. El agua desciende gradualmente 9.66 m mientras que el área



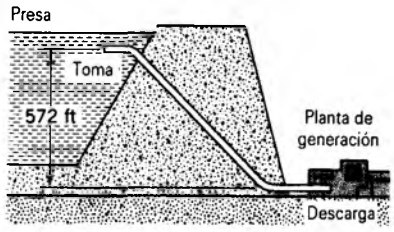




**Figura 29** Problema 8.

del tubo aumenta en 7.60 cm². (*a*) ¿Cuál es la velocidad del flujo en el nivel inferior? (*b*) La presión en el nivel superior es de 152 kPa; halle la presión en el nivel inferior.

**11.** Supóngase que dos tanques, 1 y 2, cada uno con una gran abertura en la parte superior, contienen líquidos diferentes. Se practica un pequeño orificio en el costado de cada tanque a la misma profundidad $h$ debajo de la superficie del líquido, pero el orificio del tanque 1 tiene la mitad del área de sección transversal que tiene el orificio del tanque 2. (*a*) ¿Cuál es la razón $\rho_1/\rho_2$ de las densidades de los fluidos si se observa que el flujo de masa es el mismo a través de los dos orificios? (*b*) ¿Cuál es la razón de los flujos volumétricos de los dos tanques? (*c*) Se desea igualar los dos flujos añadiendo o drenando fluido en el tanque 2. ¿Cuál sería la nueva altura del fluido sobre el orificio del tanque 2 para hacer que la cantidad de flujo en el tanque 2 sea igual a la del tanque 1?

**12.** Durante un huracán está soplando aire (densidad = 1.2 kg/m³) sobre el tejado de una casa a una velocidad de 110 km/h. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de presión entre el interior y el exterior que tiende a levantar el tejado? (*b*) ¿Cuál sería la fuerza ascensional en un tejado de 93 m² de área?

**13.** Las ventanas de un edificio de oficinas tienen 4.26 m por 5.26 m. En un día tempestuoso, el aire sopla a razón de 28.0 m/s al pasar por una ventana en el piso 53. Calcúlese la fuerza neta sobre la ventana. La densidad del aire es de 1.23 kg/m³.

**14.** Un líquido fluye por una tubería horizontal cuyo radio interior es de 2.52 cm. La tubería se dobla hacia arriba hasta una altura de 11.5 m donde se ensancha y se une con otra tubería horizontal de 6.14 cm de radio interior. ¿Cuál debe ser el flujo volumétrico si la presión en las dos tuberías horizontales es la misma?

**Figura 28** Problema 6.

**15.** La figura 30 muestra un líquido que está siendo descargado por un orificio practicado en un tanque grande y situado a una distancia $h$ bajo la superficie del líquido. El tanque está abierto por arriba. (*a*) Aplique la ecuación de Bernoulli a una línea de corriente líquida que una a los puntos 1, 2, y 3, y demuestre que la velocidad de salida es

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Esta ecuación se conoce como la *ley de Torricelli*. (*b*) Si el orificio estuviese curvado directamente hacia arriba, ¿a qué altura se elevaría la línea de corriente líquida? (*c*) ¿Cómo afectaría al análisis la viscosidad o la turbulencia?

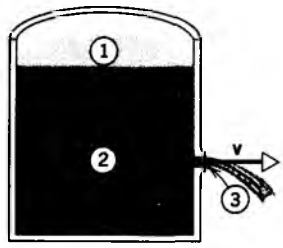



**Figura 30** Problema 15.

**16.** Un tanque está lleno de agua hasta una altura $H$. En una de sus paredes se taladra un orificio a una profundidad $h$ bajo la superficie del agua (Fig. 31). (*a*) Demuestre que la distancia $x$ desde la base de la pared hasta donde cae la corriente al suelo está dada por $x = 2\sqrt{h(H-h)}$. (*b*) Podría taladrarse un orificio a otra profundidad de modo que esta segunda corriente tuviese el mismo alcance? De ser así, a qué profundidad? (*c*) ¿A qué profundidad debería estar el orificio para hacer que la corriente de salida caiga al suelo a la distancia máxima a partir de la base del tanque? ¿Cuál es esta distancia máxima?

**17.** Un francotirador dispara una bala de rifle contra un tanque de gasolina, haciéndole un orificio a 53.0 m bajo la superficie de la gasolina. El tanque se ha sellado y se ha sometido a una presión absoluta de 3.10 atm, como se muestra en la figura 32. La gasolina almacenada tiene una densidad de 660 kg/m³. ¿A qué velocidad comienza la gasolina a salir disparada por el orificio?

**18.** Considérese un tubo en U uniforme con un diafragma en el fondo y lleno de un líquido a alturas diferentes en cada

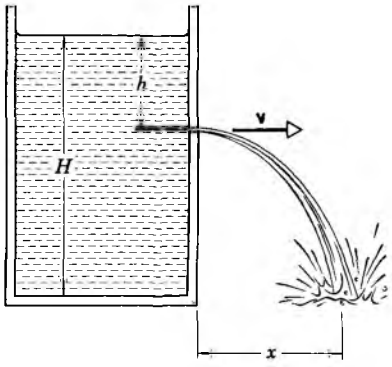



**Figura 31** Problema 16.

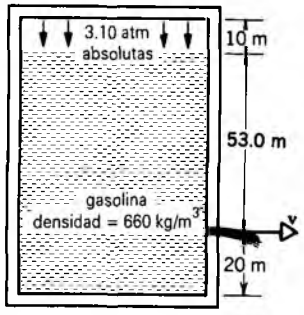



**Figura 32** Problema 17.

brazo (véase la Fig. 33). Imaginemos ahora que el diafragma se perfora de modo que el líquido fluye de izquierda a derecha. (*a*) Demuestre que la aplicación de la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 3 conduce a una contradicción. (*b*) Explique por qué la ecuación de Bernoulli no es aplicable aquí. (*Sugerencia*: ¿Es estacionario el flujo?)

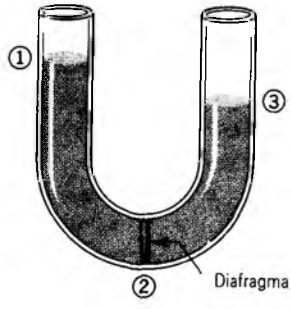



**Figura 33** Problema 18.

**19.** Si una persona sopla aire a una velocidad de 15.0 m/s en la parte superior de un lado de un tubo en U que contiene agua, ¿cuál será la diferencia entre los niveles del agua en los dos lados? Suponga que la densidad del aire sea de 1.20 kg/m³.

**20.** El agua dulce embolsada tras la cortina de una presa tiene una profundidad de 15.2 m. Un tubo horizontal de 4.30 cm de diámetro pasa a través de la cortina a 6.15 m bajo la superficie del agua, como se muestra en la figura 34. En la salida del tubo se ha colocado un tapón. (*a*) Halle la fuerza de fricción entre el tapón y las paredes del tubo. (*b*) Se retira el tapón. ¿Qué volumen de agua sale por el tubo en 3.00 h?

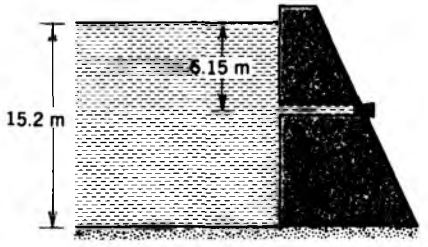



**Figura 34** Problema 20.

**21.** Un sifón es un aparato para extraer líquido de un recipiente sin inclinarlo. Funciona como se muestra en la figura 35. El tubo debe estar lleno inicialmente, pero una vez se ha hecho esto, el líquido fluirá hasta que el nivel descienda por debajo de la abertura del tubo en *A*. El líquido tiene una densidad $\rho$ y una viscosidad despreciable. (*a*) ¿A qué velocidad sale el líquido del tubo en *C*? (*b*) ¿Cuál es la presión del líquido en el punto más elevado *B*? (*c*) ¿Cuál es la mayor altura *h* posible a la que el sifón puede elevar el agua?

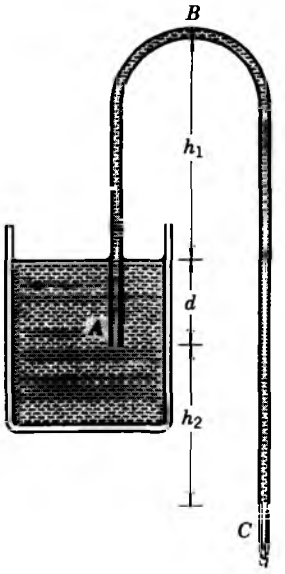



**Figura 35** Problema 21.

**22.** (*a*) Considérese una corriente de fluido de densidad $\rho$ con velocidad $v_1$ que pasa *repentinamente* de un tubo cilíndrico de área de sección transversal $a_1$ a un tubo cilíndrico más ancho de área de sección transversal $a_2$ (véase la Fig. 36). El chorro se mezclará con el fluido circundante

y, después de mezclarse, fluirá casi uniformemente a una velocidad promedio $v_2$. Sin referirse a los detalles del mezclado, use argumentos del ímpetu para demostrar que el aumento de presión debido al mezclado es aproximadamente

$$p_2 - p_1 = \rho v_2(v_1 - v_2).$$

(*b*) Demuestre a partir de la ecuación de Bernoulli que en un tubo que se vacíe *gradualmente* obtendríamos

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2).$$

(*c*) Halle la pérdida de presión debida al ensanchamiento repentino del tubo. ¿Puede usted trazar una analogía con las colisiones elásticas e inelásticas de la mecánica de la partícula?

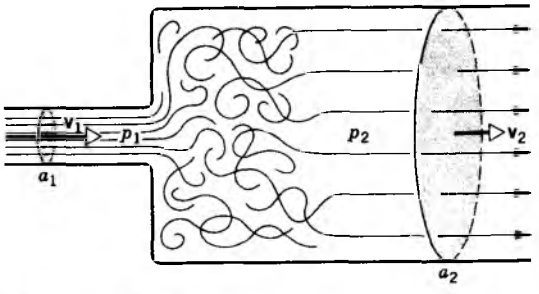



**Figura 36** Problema 22.

**23.** Una jarra contiene 15 vasos de jugo de naranja. Cuando se abre la espita del fondo transcurren 12.0 s para llenar de jugo un vaso. Si dejamos la espita abierta, ¿cuánto tiempo tardarán en llenarse los 14 vasos restantes hasta agotar el jugo?

### *Sección 18-4 Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli y de la ecuación de continuidad*

**24.** Un tubo de Pitot está montado en el ala de un aeroplano para determinar la velocidad del aeroplano con relación al aire, el cual tiene una densidad de 1.03 kg/m³. El tubo contiene alcohol e indica una diferencia de nivel de 26.2 cm. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano respecto al aire? La densidad del alcohol es de 810 kg/m³ .

**25.** Un tubo hueco tiene un disco *DD* adosado a su extremo (Fig. 37). Cuando se sopla aire de densidad $\rho$ por el tubo, el disco atrae a la tarjeta *CC*. Sea $A$ el área de la tarjeta y $v$ la velocidad promedio del aire entre la tarjeta y el disco. Calcule la fuerza hacia arriba resultante sobre *CC*. Desprecie el peso de la tarjeta; suponga que $v_0 \ll v$, donde $v_0$ es la velocidad del aire en el tubo hueco.

**26.** Una placa cuadrada de 9.10 cm de lado y 488 g de masa está embisagrada a lo largo de uno de los lados. Si se sopla aire sobre la superficie superior únicamente, ¿qué velocidad debe tener el aire para mantener horizontal a la placa? El aire tiene una densidad de 1.21 kg/m³.

**27.** Sobre la parte superior del ala, de área $A$, de un aeroplano fluye el aire a una velocidad $v_1$ y pasa por debajo del ala a una velocidad $v_u$. Demuestre que la ecuación de Bernoulli predice que la fuerza ascensional $L$ sobre el ala será de

$$L = \tfrac{1}{2}\rho A(v_1^2 - v_u^2),$$

en donde $\rho$ es la densidad del aire. (*Sugerencia*: Aplíquese la ecuación de Bernoulli a la línea de corriente que pasa justo sobre la superficie superior del ala y a la línea de corriente que pasa justo por debajo de la superficie inferior del ala. ¿Puede usted justificar que las constantes de las dos líneas de corriente sean iguales?)

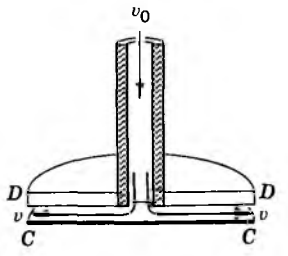



**Figura 37** Problema 25.

**28.** Un aeroplano tiene un área de ala (de cada ala) de 12.5 m². A cierta velocidad del aire, éste fluye sobre la superficie superior del ala a razón de 49.8 m/s y sobre la superficie inferior del ala a 38.2 m/s. (*a*) Halle la masa del aeroplano. Suponga que el aeroplano viaja a velocidad constante y que los efectos de la fuerza ascensional asociados con el fuselaje y el conjunto de la cola son pequeños. Explique la fuerza ascensional si el aeroplano, que vuela a la misma velocidad que el aire está (*b*) en vuelo nivelado; (*c*) ascendiendo a 15°, y (*d*) descendiendo a 15°. La densidad del aire es de 1.17 kg/m³. Véase el problema 27.

**29.** Considérese el aire estancado en el borde frontal de un ala y el aire que circula sobre la superficie del ala a una velocidad $v$. Suponga que la presión en el borde de entrada es la atmosférica aproximadamente y halle el mayor valor posible para $v$ del flujo de corriente; suponga también que el aire es incompresible y utilice la ecuación de Bernoulli. Tome como densidad del aire 1.2 kg/m³. ¿Cómo se compara esto con la velocidad del sonido bajo estas condiciones (340 m/s)? ¿Puede usted explicar la diferencia? ¿Por qué habría de existir alguna conexión entre estas cantidades?

**30.** Un tubo de Venturi tiene un diámetro de 25.4 cm y una garganta de 11.3 cm de diámetro. La presión del agua en el tubo es 57.1 kPa y en la garganta es de 32.6 kPa. Calcule el flujo volumétrico del agua a través del tubo.

**31.** Considérese el medidor Venturi de la figura 9. Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2, y la ecuación de continuidad (Ec. 3), verifique la ecuación 11 para la velocidad del flujo en el punto 1.

**32.** Considérese el medidor Venturi de la figura 9, que contiene agua, sin el manómetro. Sea $A = 4.75a$. Suponga que la presión en el punto 1 sea 2.12 atm. (*a*) Calcule los valores de $v$ en el punto 1 y de $v'$ en el punto 2 que harían que la presión $p'$ en el punto 2 fuese igual a cero. (*b*)

Calcule la cantidad de flujo volumétrico correspondiente si el diámetro en el punto 1 fuese 5.20 cm. El fenómeno en el punto 2 cuando $p'$ decae a casi cero es conocido como *cavitación*. El agua se evapora en pequeñas burbujas.

### *Sección 18-5 Campos de flujo*

**33.** Demuestre que la constante en la ecuación de Bernoulli es la misma para *todas* las líneas de corriente en el caso del flujo estacionario, no rotatorio de la figura 14.

**34.** Un campo de fuerza es conservativo si $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$. El círculo del signo de la integración significa que la integración va a ser considerada a lo largo de una curva cerrada (un viaje redondo) en el campo. Un flujo es un flujo potencial (y por tanto no rotatorio) si $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$ para cada una de las líneas cerradas en el campo. Usando este criterio, demuestre que los campos (*a*) de la figura 14 y (*b*) de la figura 17 son campos de flujo potencial.

**35.** Los efectos centrífugos son considerables en flujos que estén fuertemente curvados. Considérese un elemento de fluido que se mueva a una velocidad $v$ a lo largo de la línea de corriente de un flujo curvo en un plano horizontal (Fig. 38). (*a*) Demuestre que $dp/dr = \rho v^2/r$, de modo que la presión aumenta en una cantidad $\rho v^2/r$ por unidad de distancia perpendicular a la línea de la corriente yendo del lado cóncavo al lado convexo de ésta. (*b*) Luego, utilice la ecuación de Bernoulli y este resultado para demostrar que $vr$ es igual a una constante, de modo que las velocidades aumentan hacia el centro de curvatura. De aquí que las líneas de corriente que estén espaciadas uniformemente en una tubería recta se agrupen hacia la pared interior del pasaje curvo y se separen hacia la pared exterior. Este problema debe de compararse con el problema 29 del capítulo 17, donde el movimiento curvo se produce al hacer girar un recipiente. Allí la velocidad variaba directamente con $r$, pero aquí varía inversamente. (*c*) Demuestre que este flujo es no rotatorio.

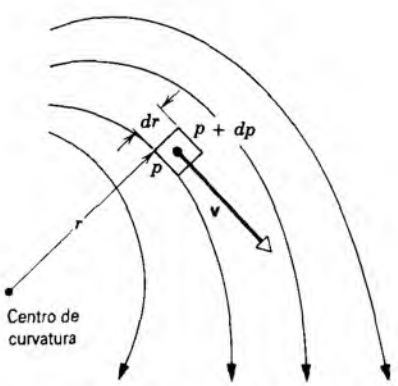



**Figura 38** Problema 35.

**36.** Un modelo del movimiento planetario propuesto por René Descartes fue ampliamente aceptado antes de que Newton propusiera su teoría de la gravitación. En el modelo de Descartes los planetas eran atrapados y arrastrados por un remolino de partículas de éter centrado alrededor del Sol. Newton demostró que este esquema de torbellino contradecía las observaciones porque: (*a*) la velocidad de una partícula de éter en el vértice varía inversamente a su distancia al Sol; (*b*) el periodo de revolución de una partícula tal varía directamente con el cuadrado de su distancia al Sol, y (*c*) este resultado contradice a la tercera ley de Kepler. Demuestre (*a*), (*b*), y (*c*).

### *Sección 18-6 Viscosidad, turbulencia, y flujo caótico*

**37.** La figura 39 muestra una sección transversal de las capas superiores de la Tierra. La superficie de la Tierra se divide en varios bloques rígidos, llamados placas, que se deslizan (¡lentamente!) sobre una capa "fangosa" más baja llamada astenosfera. En la figura se relacionan las dimensiones típicas. Supóngase que la velocidad de la placa rígida mostrada sea $v_0 = 48$ mm/y (mm/año), y que la base de la astenosfera no se mueva. Calcule el esfuerzo cortante en la base de la placa. La viscosidad del material de la astenosfera es de $4.0 \times 10^{19}$ Pa · s. Ignore la curvatura de la Tierra.

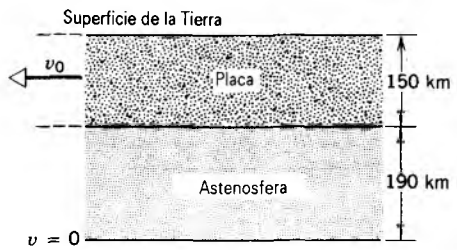



**Figura 39** Problema 37.

**38.** Calcular la mayor velocidad a la cual puede fluir la sangre, a 37° C, por una arteria de 3.8 mm de diámetro si el flujo ha de permanecer estacionario.

**39.** Por un tubo horizontal de 1.88 cm de radio interno y 1.26 m de longitud fluye mercurio líquido (viscosidad = $1.55 \times 10^{-3}$ N · s/m$^2$). El flujo volumétrico es de $5.35 \times 10^{-2}$ L/min. (*a*) Demuestre que el flujo es estacionario. (*b*) Calcule la diferencia de presión entre los dos extremos del tubo.

**40.** En la figura 40 se muestran las líneas de corriente de un campo de flujo de Poiseuille. El espaciamiento de las líneas de corriente indica que aunque el movimiento es rectilíneo, existe un gradiente de velocidad en dirección transversal. Demuestre que el flujo de Poiseuille es rotatorio.

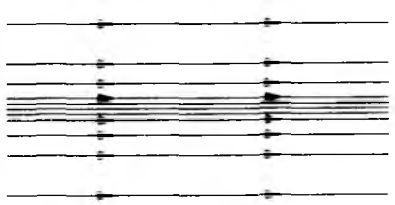


**Figura 40** Problema 40.

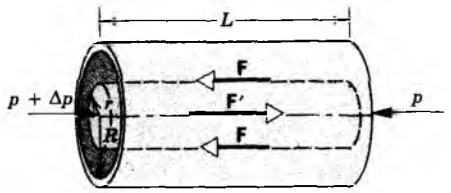



**Figura 41** Problemas 41 y 42.

**41.** Un fluido de viscosidad $\eta$ fluye estacionariamente por un tubo cilíndrico horizontal de radio $R$ y longitud $L$, como se muestra en la figura 41. (*a*) Considere un cilindro arbitrario de fluido de radio $r$. Demuestre que la fuerza viscosa $F$ debida a la capa circundante es $F = -\eta(2\pi rL)dv/dr$. (*b*) Demuestre que la fuerza $F'$ que empuja a ese cilindro de fluido a lo largo del tubo es $F' = (\pi r^2)\Delta p$. (*c*) Utilice la condición de equilibrio para obtener una expresión para $dv$ en términos de $dr$. Integre la expresión para obtener la ecuación 18.

**42.** Considere una vez más el fluido que corre por el tubo descrito en el problema 41 e ilustrado en la figura 41. Halle una expresión para el flujo de masa por un anillo anular entre los radios $r$ y $r + dr$; luego integre este resultado para hallar el flujo de masa total por el tubo, verificando por lo tanto la ecuación 20.

**43.** Se sopla una burbuja de jabón de 38.2 mm de radio por el extremo de un tubo angosto de 11.2 cm de longitud y 1.08 mm de diámetro interno. El otro extremo del tubo se halla expuesto a la atmósfera. Halle el tiempo que tarda el radio de la burbuja en descender a 21.6 mm. Suponga un flujo de Poiseuille en el tubo. (Use $2.50 \times 10^{-2}$ N/m para la tensión superficial de la solución de jabón; la viscosidad del aire es de $1.80 \times 10^{-5}$ N · s/m$^2$.)

# CAPÍTULO 19

# MOVIMIENTO ONDULATORIO

*El movimiento ondulatorio se manifiesta en casi todas las ramas de la física. En los cuerpos acuosos se pueden observar, comúnmente, ondas superficiales. Las ondas sonoras y las ondas luminosas son esenciales para nuestra percepción del entorno, a causa de que hemos desarrollado receptores (los ojos y los oídos) capaces de detectarlas. En el siglo pasado el ser humano aprendió a producir y utilizar las ondas de radio. Podemos también entender la estructura de los átomos y de los sistemas subatómicos basados en las propiedades ondulatorias de las partículas que los constituyen. La similitud de las descripciones físicas y matemáticas de estas distintas clases de ondas indican que el movimiento ondulatorio es uno de los temas unificadores de la física.*

*En este capítulo y en el siguiente desarrollaremos las descripciones tanto verbales como matemáticas de las ondas. Utilizamos el ejemplo de las* ondas mecánicas, *en parte porque ya hemos desarrollado las leyes de la mecánica en este texto. Más adelante, desarrollaremos las leyes que rigen para otros tipos de ondas (por ejemplo, las ondas de luz y otras ondas electromagnéticas). A efectos de simplificación, nos concentraremos en el estudio de las ondas armónicas (es decir, aquellas que pueden ser representadas por funciones del seno y del coseno), pero los principios que desarrollamos se aplican igualmente a formas ondulatorias más complejas.*

## 19-1 ONDAS MECÁNICAS

Las ondas marinas viajan miles de millas a través del océano, pero las partículas de agua no llevan a cabo ese viaje. Cuando usted le grita a un amigo, la onda de sonido recorre la sala, pero las moléculas de aire no recorren esa distancia. Estamos familiarizados con el hecho de que la energía y el ímpetu se transportan de un lugar a otro en virtud del movimiento de las partículas; el movimiento ondulatorio proporciona una manera alternativa de que la energía y el ímpetu se muevan de un lugar a otro sin que las partículas materiales hagan ese viaje.

Las ondas de agua y las ondas sonoras son ejemplos de *ondas mecánicas* que viajan a través de un medio deformable o elástico. Se originan cuando cierta parte del medio se desplaza de su posición normal y queda liberada. Debido a las propiedades elásticas del medio, la perturbación se propaga a través de éste. A nivel microscópico, propiedades mecánicas tales como las fuerzas entre los átomos son las causantes de la propagación de las ondas mecánicas.

En este capítulo nos concentraremos en el estudio de las ondas mecánicas. Para ilustrar algunas propiedades generales de las ondas hemos elegido como ejemplo a un tipo sencillo de onda mecánica, que implica la oscilación de una cuerda estirada como las que se utilizan en una guitarra.

Cuando una onda alcanza a una partícula situada en el medio pone a esa partícula en movimiento y la desplaza, transfiriéndole así energía tanto cinética como potencial. Mediante el movimiento ondulatorio, puede transmitirse a grandes distancias no solamente energía, sino además información sobre la naturaleza de la fuente de ondas. Podemos decir que las partículas del medio se mueven, al pasar la onda, únicamente distancias pequeñas con respecto a sus posiciones previas, sin experimentar un desplazamiento neto en la dirección del viaje de la onda. Por ejemplo, los objetos flotantes pequeños, como una hoja o un corcho muestran que el movimiento real del agua al pasb de la onda es más bien hacia arriba y hacia abajo, y quizás ligeramente en vaivén; una vez que pasa la onda, el objeto está más o menos en el mismo lugar en que estaba

antes de haber pasado ésta. Este hecho era ya conocido en el siglo XV por Leonardo da Vinci, quien escribió de las ondas de agua: "A menudo sucede que la onda escapa del sitio de su creación, mientras que el agua no; como las ondas que se forman en un campo de trigo por efecto del viento, donde las vemos correr a través del campo mientras las espigas permanecen en su lugar."

## 19-2 TIPOS DE ONDAS

Al enumerar a las ondas de agua, de luz, y de sonido como ejemplo de movimiento ondulatorio, estamos clasificando a las ondas de acuerdo a sus propiedades físicas más amplias. Las ondas pueden clasificarse también de otras maneras.

Podemos distinguir diferentes clases de ondas mecánicas si consideramos cómo se relacionan la dirección del movimiento de las partículas de materia con la dirección de propagación de la onda. Si el movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación de la onda misma, hablamos de una onda *transversal*. Por ejemplo, cuando una cuerda en tensión se hace oscilar en vaivén desde un extremo, a lo largo de la cuerda viaja una onda transversal; la perturbación se mueve a lo largo de la cuerda pero las partículas de la cuerda vibran en ángulo recto a la dirección de propagación de la perturbación (Fig. 1*a*). Las ondas de luz, aunque no sean ondas mecánicas, son también ondas transversales.

Sin embargo, si el movimiento de las partículas de una onda mecánica es de vaivén a lo largo de la dirección de propagación, tenemos una onda *longitudinal*. Por ejemplo: cuando un resorte en tensión se pone a oscilar en vaivén desde uno de sus extremos, a lo largo del resorte viaja una onda longitudinal; los arrollamientos vibran en vaivén paralelos a la dirección en la que viaja la perturbación a lo largo del resorte (Fig. 1*b*). Las ondas de sonido que viajan en un gas son ondas longitudinales y las estudiaremos con mayor detalle en el capítulo 20.

Ciertas ondas no son ni puramente longitudinales ni puramente transversales. Por ejemplo, en las ondas que vemos sobre la superficie del agua las partículas de ésta se mueven tanto de arriba abajo como en vaivén, trazando trayectorias elípticas al moverse.

Las ondas pueden también clasificarse como uni, bi, o tridimensionales, de acuerdo con el número de dimensiones en que propaguen la energía. Las ondas que se mueven a lo largo de la cuerda o del resorte de la figura 1 son unidimensionales. Las ondas superficiales o rizos de agua, que se forman al arrojar una piedra a un estanque tranquilo, son bidimensionales. Las ondas de sonido y de luz que viajen radialmente partiendo de una pequeña fuente son tridimensionales.

Puede ampliarse la clasificación de las ondas según como se muevan las partículas del medio en el tiempo. Por ejemplo, podemos producir una *pulsación* que viaje por una cuerda estirada aplicándole un solo movimiento lateral en su extremo (Fig. 1*c*). Cada partícula permanece

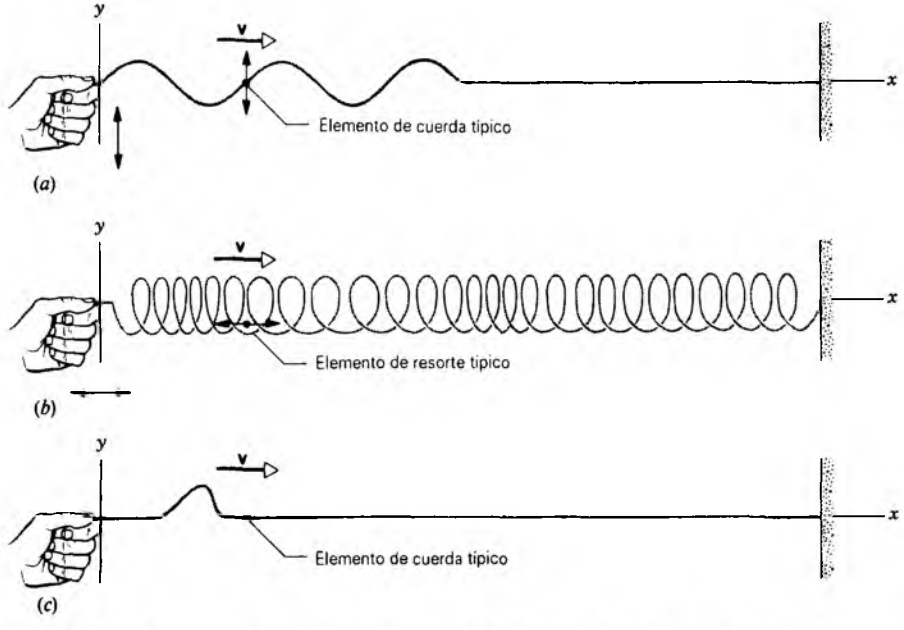



**Figura 1** (*a*) Envío de una onda transversal a lo largo de una cuerda. Cada elemento de la cuerda vibra en ángulo recto a la dirección de propagación de la onda. (*b*) Envío de una onda longitudinal a lo largo de un resorte. Cada elemento del resorte vibra paralelo a la dirección de propagación de la onda. (*c*) Envío de una pulsación transversal única a lo largo de una cuerda.

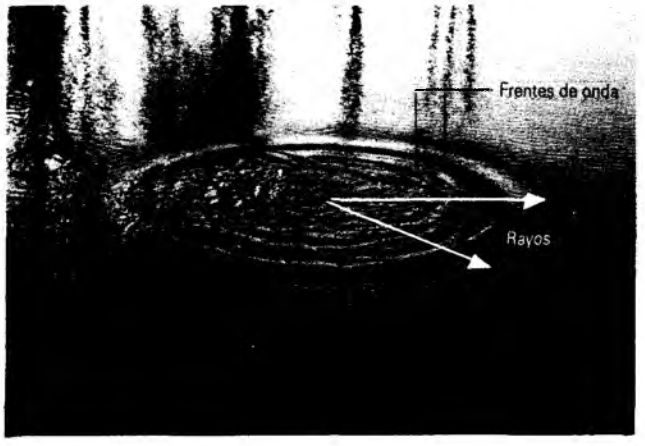



**Figura 2** Ondas en la superficie de un lago. Los rizos circulares representan frentes de onda. Los rayos, que son perpendiculares a los frentes de onda, indican la dirección del movimiento de la onda.

en reposo hasta que la pulsación llega hasta ella, luego se mueve durante un tiempo corto y luego permanece nuevamente en reposo. Si continuamos moviendo el extremo de la cuerda en vaivén (Fig. 1*a*), produciremos un *tren de ondas* que viajará a lo largo de la cuerda. Si nuestro movimiento es periódico, produciremos un *tren de ondas periódico*, donde cada partícula de la cuerda tendrá un movimiento periódico. El caso especial más sencillo de una onda periódica es una *onda armónica*, donde cada partícula experimenta un movimiento armónico simple.

Imaginemos una piedra lanzada a un lago tranquilo. Los rizos circulares se esparcen hacia afuera desde el punto en que la piedra entró al agua (Fig. 2). A lo largo de un rizo circular dado, todos los puntos están en el mismo estado de movimiento. Esos puntos definen una superficie llamada *frente de onda*. Si el medio es de densidad uniforme, la dirección del movimiento de las ondas está en ángulo recto al frente de la onda. Una línea normal a los frentes de onda, que indique la dirección del movimiento de las ondas, se llama *rayo*.

Los frentes de onda pueden tener muchas formas. Una fuente central en la superficie del agua produce ondas bidimensionales con frentes de onda circulares y rayos que salen hacia afuera a partir del punto de la perturbación (como en la figura 2). En cambio, un palo muy largo arrojado horizontalmente al agua produciría (cerca de su centro) perturbaciones que viajan como líneas rectas, y cuyos rayos sería líneas paralelas. La analogía tridimensional, en la cual las perturbaciones viajan en una sola dirección, es la *onda plana*. En un instante dado, las condiciones son las mismas en todas partes de cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. Los frentes de onda son planos, y los rayos son líneas rectas paralelas (Fig. 3*a*). La analogía tridimensional de las ondas circulares son las ondas esféricas. Aquí, la perturbación se propaga hacia afuera en todas direcciones desde una fuente puntual de ondas. Los frentes de onda son esferas, y los rayos son líneas radiales que salen de la fuente puntual en todas direcciones (Fig. 3*b*). Lejos de esta fuente los frentes de onda esféricos tienen una curvatura muy pequeña, y dentro de una región limitada pueden considerarse a menudo como planos. Por supuesto, existen otras muchas formas de frentes de onda posibles.

## 19-3 ONDAS VIAJERAS

Como ejemplo del comportamiento de las ondas mecánicas consideraremos a una forma de onda transversal que viaje en una cuerda estirada larga. Suponemos una cuerda "ideal", en la cual la perturbación, ya sea una pulsación o un tren de ondas, mantiene su forma mientras viaja. Para que esto suceda, las pérdidas por fricción y otros medios de disipación de la energía deben ser despreciablemente pequeños. La perturbación está en el plano $xy$ y viaja en dirección $x$.

La figura 4*a* muestra una forma de onda arbitraria en $t = 0$; podemos considerar que ésta es una instantánea de la pulsación que viaja a lo largo de la cuerda mostrada

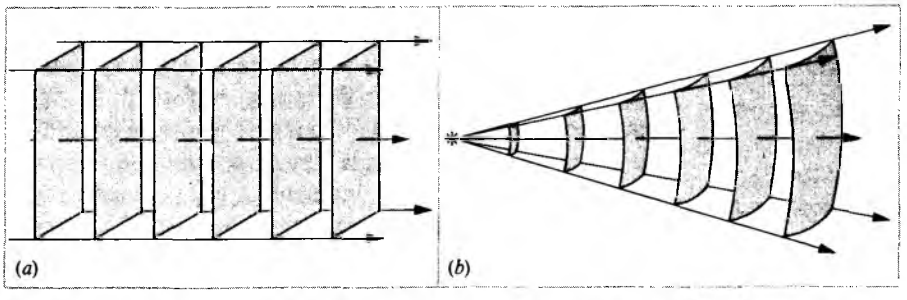



**Figura 3** (*a*) Onda plana. Los planos representan frentes de onda espaciados en una longitud de onda, y las flechas representan rayos. (*b*) Onda esférica. Los frentes de onda, espaciados en una longitud de onda, son superficies esféricas y los rayos están en dirección radial.

en la figura 1*c*. Hagamos que la pulsación se mueva en dirección $x$ positiva con una velocidad $v$. En un tiempo $t$ más tarde, la pulsación se ha movido una distancia $vt$, como se muestra en la figura 4*b*. Nótese que la forma de onda es la misma en $t = 0$ que en tiempos posteriores.

La coordenada $y$ indica el desplazamiento transversal de un punto en particular de la cuerda. Esta coordenada depende tanto de la posición $x$ como del tiempo $t$. Indicamos esta dependencia de dos variables como $y(x,t)$.

Podemos representar a la forma de onda de la figura 4*a* como:

$$y(x,0) = f(x), \tag{1}$$

donde $f$ es una función que describe la forma de la onda. En el tiempo $t$, la forma de onda debe todavía describirse por la misma función $f$, porque hemos supuesto que la forma no cambia al viajar la onda. Con relación al origen $O'$ de un marco de referencia que viaje con la pulsación, la forma se describe por la funcion $f(x')$, como se indica en la figura 4*b*. La relación entre las coordenadas $x$ de los dos marcos de referencia es $x' = x - vt$, como puede verse en la figura 4*b*. Entonces, en el tiempo $t$, la onda se describe por

$$y(x,t) = f(x') = f(x - vt). \tag{2}$$

Es decir, la función $f(x - vt)$ tiene la misma forma relativa al punto $x = vt$ en el tiempo $t$ que la función $f(x)$ la tiene con relación al punto $x = 0$ en el tiempo $t = 0$.

Para describir por completo a la onda, debemos especificar a la función $f$. Más adelante, consideraremos a las ondas armónicas, en las cuales $f$ es una función seno o coseno.

Las ecuaciones 1 y 2 juntas indican que podemos cambiar una función de cualquier forma en una onda que viaje en dirección $x$ positiva simplemente sustituyendo a $x$ por la cantidad $x - vt$ en todo lugar en que aparezca en la $f(x)$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(x - vt) = (x - vt)^2$. Además, una onda que viaje en dirección $x$ positiva debe depender de $x$ y de $t$ *únicamente* en la combinación $x - vt$; así pues, $x^2 - (vt)^2$ no representa a tal onda viajera.

Sigamos el movimiento de determinada parte (o *fase*) de la onda, tal como la de la posición $P$ de la forma de onda de la figura 4. Si la onda ha de mantener su forma mientras viaja, entonces la coordenada $y_P$ del punto $P$ no debe cambiar. Vemos en la ecuación 2 que el único modo de que pueda suceder esto es que la coordenada $x$ de $P$ aumente mientras aumenta $t$, de modo que la cantidad $x - vt$ mantenga un valor fijo. Es decir, la evaluación de la cantidad $x - vt$ da el mismo resultado en $P$ de la figura 4*b* que en $P$ de la figura 4*a*. Esto continúa así en cualquier posición de la forma de onda y en todos los tiempos $t$. Entonces para el movimiento de cualquier fase particular de la onda debemos tener

$$x - vt = \text{constante}. \tag{3}$$

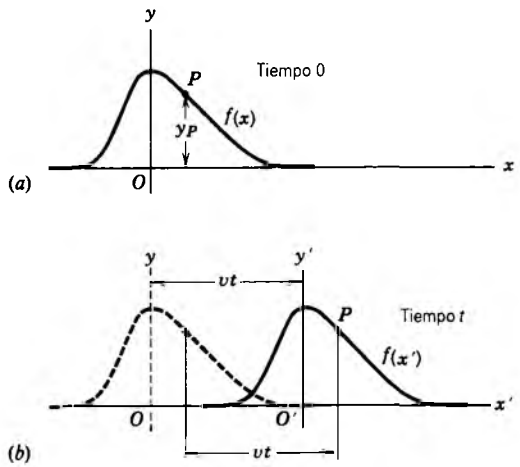



**Figura 4** (*a*) Una pulsación transversal mostrada como una instantánea en el tiempo $t = 0$. El punto $P$ representa una posición particular en la fase del pulso, *no* un punto particular del medio (la cuerda, por ejemplo). (*b*) En un tiempo $t$ más tarde, la pulsación se ha movido una distancia $vt$ en la dirección $x$ positiva. El punto $P$ de la fase se ha movido también una distancia $vt$. El máximo de la pulsación define el origen de la coordenada $x'$.

Podemos verificar que la ecuación 3 caracteriza al movimiento de la fase de la forma de onda al diferenciar respecto al tiempo, lo cual da

$$\frac{dx}{dt} - v = 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{dx}{dt} = v. \tag{4}$$

La velocidad $dx/dt$ describe al movimiento de la fase de la onda, y por ello se conoce como *velocidad de fase*. Consideramos que $v$ es una constante positiva, independiente de cualquier propiedad de la onda pero posiblemente (como lo veremos) dependiente de las propiedades del medio.

Si la onda se mueve en dirección $x$ *negativa*, debemos reemplazar a $v$ por $-v$. En este caso, obtendríamos

$$y(x,t) = f(x + vt), \tag{5}$$

donde una vez más $f(x)$ representa a la forma en $t = 0$. Esto es, al sustituir en $f(x)$ la cantidad $x + vt$ en lugar de $x$ nos da una onda que se movería hacia la izquierda en la figura 4. El movimiento de cualquier fase de la onda estaría entonces caracterizado por el requisito de que $x + vt$ = constante, y por analogía con la ecuación 4 podemos demostrar que $dx/dt = -v$, indicando que la componente $x$ de la velocidad de fase es realmente negativa en este caso.

La función $y(x,t)$ contiene la descripción completa de la forma de la onda y de su movimiento. En cualquier tiempo determinado, digamos $t_1$, la función $y(x,t_1)$ da a $y$ en función de $x$, lo cual define a una curva; esta curva representa la forma real de la cuerda en ese tiempo y puede considerarse como una "instantánea" de la onda. Por otra




**Figura 5** Un observador estacionado en un punto particular sobre el eje $x$ registraría este desplazamiento $y$ en función del tiempo en el transcurso de la pulsación de la figura 4. Nótese que la forma parece estar invertida, porque el borde delantero de la pulsación viajera llega al observador en los primeros momentos. Es decir, los desplazamientos registrados por el observador en los primeros momentos están aquí más cerca del origen.

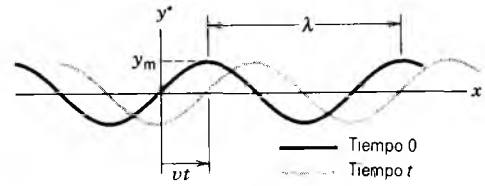



**Figura 6** En $t = 0$ (en tono más intenso), la cuerda tiene la forma sinusoidal dada por $y = y_m \text{ sen } 2\pi x/\lambda$. En un tiempo $t$ más tarde (en tono más claro), la onda se ha movido hacia la derecha una distancia $x = vt$, y la cuerda tiene una forma dada por $y = y_m \text{ sen } 2\pi(x - vt)/\lambda$.

parte, podemos tener en cuenta el movimiento de un punto particular sobre la cuerda, digamos en la coordenada fija $x_1$. La función $y(x_1,t)$ nos da entonces la coordenada $y$ de ese punto en función del tiempo. La figura 5 muestra cómo podría moverse un punto sobre el eje $x$ con el tiempo en el transcurso de la pulsación de la figura 4, moviéndose en dirección $x$ positiva. En los tiempos cercanos a $t = 0$, el punto no se mueve en absoluto. Luego, comienza a moverse gradualmente a medida que llega al borde delantero de la pulsación de la figura 4. Después de pasar el máximo de la onda, el desplazamiento del punto cae rápidamente hasta regresar a cero al pasar el borde de salida.

## Ondas sinusoidales

La descripción anterior es bastante general. Es válida para formas de onda arbitrarias, y se cumple tanto para ondas transversales como longitudinales. Por ejemplo, consideremos una forma de onda transversal que tenga una forma sinusoidal, lo cual tiene aplicaciones particularmente importantes. Supongamos que en el tiempo $t = 0$ tenemos un tren de ondas a lo largo de la cuerda dado por

$$y(x,0) = y_m \text{ sen } \frac{2\pi}{\lambda} x. \tag{6}$$

En la figura 6 se muestra la forma de onda. El desplazamiento máximo $y_m$ se llama *amplitud* de la curva seno. El desplazamiento transversal $y$ tiene el mismo valor en cualquier $x$, como también en $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente. El símbolo $\lambda$ representa la *longitud de onda* del tren de ondas e indica la distancia entre dos puntos adyacentes de la onda que tengan la misma fase. Si la onda viaja en dirección $+x$ con velocidad de fase $v$, entonces la ecuación de la onda es

$$y(x,t) = y_m \text{ sen } \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt). \tag{7}$$

Nótese que ésta tiene la forma $f(x - vt)$, necesaria para una onda viajera (Ec. 2).

El *periodo* $T$ de la onda es el tiempo necesario para que un punto en cualquier coordenada $x$ efectúe un ciclo completo de movimiento transversal. Durante este tiempo $T$, la onda viaja una distancia $vT$ que debe corresponder a una longitud de onda $\lambda$, de modo que

$$\lambda = vT. \tag{8}$$

El inverso del periodo se llama *frecuencia* $\nu$ de la onda; $\nu = 1/T$. La frecuencia tiene unidades de ciclos por segundo, o hertz (Hz). El periodo y la frecuencia son dos temas tratados previamente en el capitulo 15.

Poniendo la ecuación 8 en la ecuación 7, obtenemos otra expresión para la onda:

$$y(x,t) = y_m \text{ sen } 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right). \tag{9}$$

Según esta forma es claro que $y$, en cualquier tiempo dado, tiene el mismo valor en $x$, $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente, y que $y$, en cualquier posición dada, tiene el mismo valor en los tiempos $t$, $t + T$, $t + 2T$, y así sucesivamente.

Para reducir la ecuación 9 a una forma más compacta, introducimos dos cantidades, el *número de onda* $k$ y la *frecuencia angular* $\omega$. Éstas se definen por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{10}$$

El número de onda $k$ es, al igual que $\omega$, una cantidad angular, y las unidades de ambos implican radianes. Las unidades de $k$ podrían ser, por ejemplo, rad/m, y de $\omega$, rad/s. En términos de estas cantidades, la ecuación de una onda seno que viaje en dirección $x$ positiva (hacia la derecha en la Fig. 6) es

$$y(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t). \tag{11}$$

La ecuación de una onda seno que viaje en dirección $x$ negativa (hacia la izquierda en la Fig. 6) es

$$y(x,t) = y_m \text{ sen } (kx + \omega t). \tag{12}$$

Al comparar las ecuaciones 8 y 10, vemos que la velocidad de fase $v$ de la onda está dada por

$$v = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}. \qquad (13)$$

## Fase y constante de fase

En las ondas viajeras de las ecuaciones 11 y 12 hemos supuesto que el desplazamiento $y$ es cero en la posición $x = 0$ en el tiempo $t = 0$. Esto, por supuesto, no tiene que ser aquí así. La expresión general para una onda sinusoidal que viaje en dirección $x$ positiva es

$$y(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t - \phi). \qquad (14)$$

La cantidad que aparece en el argumento del seno, es decir, $kx - \omega t - \phi$, se llama *fase* de la onda. Se dice que dos ondas con la misma fase (o con fases que difieran en cualquier múltiplo entero de $2\pi$) están "en fase"; ejecutan el mismo movimiento en el mismo tiempo.

El ángulo $\phi$ se llama la *constante de fase*. La constante de fase no afecta a la forma de la onda; mueve a la onda hacia adelante o hacia atrás en el espacio o en el tiempo. Para ver esto, reescribiremos la ecuación 14 en dos formas equivalentes:

$$y(x,t) = y_m \text{ sen } \left[k\left(x - \frac{\phi}{k}\right) - \omega t\right] \qquad (15a)$$

o

$$y(x,t) = y_m \text{ sen } \left[kx - \omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right]. \qquad (15b)$$

La figura 7*a* muestra una "instantánea" en cualquier tiempo $t$ de las dos ondas representadas por las ecuaciones 11 (donde $\phi = 0$) y 14. Nótese que cualquier punto en particular de la onda descrita por la ecuación 15*a* (digamos, cierta cresta de onda) está a una distancia $\phi/k$ *adelante del* punto correspondiente de la onda descrita por la ecuación 11.

En forma equivalente, si observáramos el desplazamiento en una posición fija $x$ resultante de cada una de las dos ondas representadas por las ecuaciones 11 y 14, obtendríamos el resultado indicado por la figura 7*b*. La onda descrita por la ecuación 15*b* está similarmente *adelante de* la onda que tiene a $\phi = 0$, en este caso por una diferencia de tiempo $\phi/\omega$.

Cuando la constante de fase de la ecuación 14 es positiva, la onda correspondiente está adelante de una onda descrita por una ecuación similar que tiene a $\phi = 0$. Por esta razón, introdujimos a la constante de fase con signo negativo en la ecuación 14. Cuando una onda está adelante de otra en el tiempo o en el espacio, se dice que es la "guía". En cambio, al poner una constante de fase negativa en la ecuación 14, se mueve la onda correspondiente

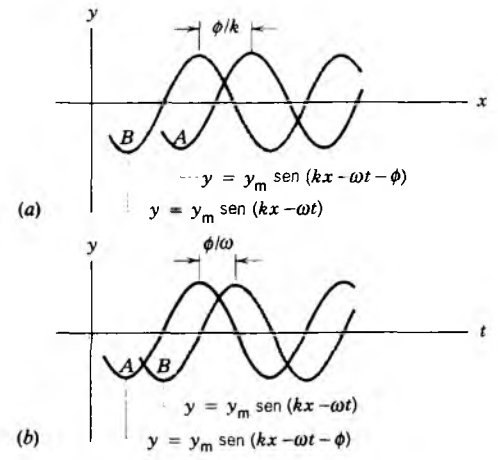



**Figura 7** (*a*) Instantánea de dos ondas seno que viajan en dirección $x$ positiva. La onda $A$ tiene una constante de fase $\phi$, y la onda $B$ tiene a $\phi = 0$. La onda $A$ está a una distancia $\phi/k$ adelante de la onda $B$. (*b*) Movimiento de un punto en el tiempo debido a las mismas dos ondas. La onda $A$ está un tiempo $\phi/\omega$ adelante de la onda $B$. Nótese que, en una gráfica de $y$ contra $t$, "adelante de" significa "a la izquierda de", mientras que en una gráfica de $y$ contra $x$, "adelante de" significa "a la derecha de", si las ondas viajan en dirección $x$ positiva.

detrás de la otra que tenga $\phi = 0$; tal onda se dice que es la "rezagada".

Si fijamos nuestra atención en un punto en particular de la cuerda, digamos $x_1$, el desplazamiento $y$ en ese punto puede expresarse:

$$y(t) = -y_m \text{ sen } (\omega t + \phi'),$$

donde hemos sustituido una constante de fase nueva $\phi' = \phi - kx_1$. Esta expresión de $y(t)$ es similar a la ecuación 6 del capítulo 15 para el movimiento armónico simple. De aquí que cualquier elemento particular de la cuerda experimente un movimiento armónico simple con respecto a su posición de equilibrio al viajar este tren de ondas a lo largo de la cuerda.

## Velocidad de grupo y dispersión

Las ondas sinusoidales puras son elementos matemáticos útiles para ayudarnos a entender el movimiento ondulatorio. En la práctica, usamos otras clases de ondas para transportar energía e información. Estas ondas pueden ser periódicas pero no sinusoidales, tales como las ondas cuadradas o las de "diente de sierra", o pueden ser pulsaciones no periódicas, como las de la figura 4.

Hemos usado la velocidad de fase para describir el movimiento de dos clases de ondas: la onda pulsátil, que conserva su forma al viajar (Fig. 4) y la onda seno pura

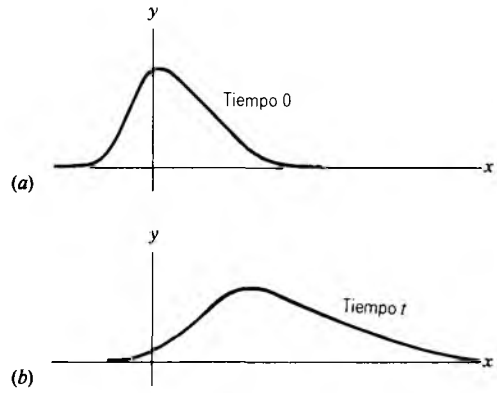



**Figura 8** En un medio dispersivo, la forma de onda cambia al viajar la onda.

(Fig. 6). En otros casos, debemos usar una velocidad diferente, llamada la *velocidad de grupo*, que es la velocidad a la cual viaja la energía o la información en una onda real.

La figura 8 muestra una pulsación que viaja a través de un medio. La forma de la pulsación cambia al viajar; la pulsación se esparce, o *dispersa*. (Dispersión no es lo mismo que disipación de energía. El contenido de energía de la pulsación de la figura 8 puede permanecer constante mientras viaja, aunque la pulsación se disperse. Suponemos que el medio es *dispersivo*, pero no necesariamente *disipativo*.) Como veremos en la sección 19-7, cualquier onda periódica puede ser considerada como la suma o superposición de una serie de ondas sinusoidales de frecuencias diferentes o de longitudes de onda diferentes. Las frecuencias, amplitudes, y fases de las ondas sinusoidales componentes deben elegirse con cuidado de acuerdo con un procedimiento matemático, conocido como *análisis de Fourier*, de modo que las ondas se sumen para dar la forma de onda deseada. En muchos medios reales, la velocidad de propagación de estas ondas componentes (es decir, la velocidad de fase) depende de la frecuencia o de la longitud de onda de la componente en particular. Cada onda componente puede viajar con su velocidad propia. Entonces, al viajar la onda, las relaciones de fase de las componentes pueden cambiar, y la forma de onda de la suma de las componentes cambiaría de manera correspondiente al viajar la onda. Éste es el origen de la dispersión: las ondas componentes viajan a velocidades de fase diferentes. No existe una relación sencilla entre las velocidades de fase de las componentes y la velocidad de grupo de la onda; la relación depende de la dispersión del medio.

Ciertos medios reales son no dispersivos aproximadamente, en cuyo caso la onda mantiene su forma, y todas las ondas componentes viajan con la misma velocidad. Un ejemplo son las ondas sonoras en el aire. Si el aire fuese fuertemente dispersivo de las ondas sonoras, la conversación sería imposible, porque la forma de onda producida por las cuerdas vocales de quien habla confundiría siendo irreconocible al momento en que llegase a nuestros oídos. Además, el esmero que ponen los miembros de una orquesta por tocar precisamente al mismo tiempo no tendría ningún valor, porque (si el aire fuese dispersivo del sonido) las notas de alta frecuencia viajarían hasta el oído del oyente a una velocidad diferente de la de las notas de baja frecuencia, y el oyente escucharía los sonidos en tiempos diferentes. Por fortuna, esto no ocurre con las ondas sonoras. Las ondas de la luz en el vacío son perfectamente no dispersivas; la dispersión de las ondas de luz en medios reales es la causa de efectos tales como el espectro de colores del arcoiris.

En un medio no dispersivo, todas las ondas componentes de una forma de onda compleja viajan a la misma velocidad de fase, y la velocidad de grupo de la forma de onda es igual a ese valor común de la velocidad de fase. Únicamente en este caso podemos hablar de la velocidad de fase de la forma de onda entera. En este capítulo tratamos de las ondas mecánicas que se propagan en medios no dispersivos.

## 19-4 VELOCIDAD DE ONDA

La velocidad de onda, lo que aquí significa la velocidad de fase de una onda sinusoidal o la velocidad de grupo de una pulsación en un medio no dispersivo, no depende de la frecuencia o de la longitud de onda. Es posible calcular la velocidad de una onda mecánica a partir de las propiedades del medio aplicando los principios básicos de la mecánica newtoniana. En esta sección continuaremos centrando nuestra atención en las ondas transversales de una cuerda en tensión, y en la sección siguiente mostraremos cómo calcular la velocidad de tales ondas de la manera más general. Los cálculos de la velocidad de otras ondas, por ejemplo las ondas sonoras en el aire, siguen métodos similares.

Aquí consideraremos dos enfoques: un tratamiento basado en el análisis dimensional y un análisis mecánico un poco menos general por medio del cual calcularemos la velocidad de una pulsación transversal a lo largo de una cuerda tensa.

### Análisis dimensional

La velocidad de las ondas de una cuerda musical depende de la masa de un elemento de la cuerda y de la fuerza entre elementos vecinos, la cual es la tensión $F$ con la que se estira la cuerda. Si aumentamos la tensión (como al ajustar las clavijas de una cuerda de guitarra), la fuerza entre elementos vecinos aumentará, y podemos esperar que la

velocidad de la onda aumente también. Caracterizaremos a la masa de un elemento de la cuerda en términos de la *densidad de masa lineal* $\mu$, la masa por unidad de longitud de la cuerda. Suponiendo que la velocidad de onda $v$ dependa únicamente de $F$ y de $\mu$, podemos usar el método del análisis dimensional (véase la sección 1-7) y escribir

$$v \propto F^a \mu^b,$$

donde $a$ y $b$ son exponentes por determinarse a partir del análisis dimensional. En términos de las dimensiones de masa M, longitud L, y tiempo T, esto puede expresarse como:

$$[v] = [F^a][\mu^b]$$
$$LT^{-1} = (MLT^{-2})^a(ML^{-1})^b,$$

y resolviendo por igualación de las potencias correspondientes de M, L, y T se obtiene $a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}$. Así, $v \propto \sqrt{F/\mu}$, o, introduciendo una constante de proporcionalidad $C$,

$$v = C\sqrt{\frac{F}{\mu}}. \tag{16}$$

Lo más que podemos decir de este análisis es que la velocidad de la onda es igual a una constante sin dimensiones multiplicada por $\sqrt{F/\mu}$. El valor de la constante puede obtenerse de un análisis mecánico del problema o por medio de la experimentación. Estos métodos demuestran que la constante es igual a la unidad.

## Análisis mecánico

Derivemos ahora por medio de un análisis mecánico una expresion para la velocidad de una pulsación en una cuerda tensa. En la figura 9 se muestra una "instantánea" de una pulsación de onda que se mueve de izquierda a derecha en la cuerda con una velocidad $v$. Podemos imaginar en su lugar que toda la cuerda se mueve de derecha a izquierda con esta misma velocidad, de modo que la pulsación de la onda permanece fija en el espacio (quizás metiendo a la cuerda en un tubo carente de fricción que tenga la forma deseada de la pulsación). Esto significa simplemente que, en lugar de considerar que nuestro marco de referencia sean las paredes entre las que se estira la cuerda, escogemos un marco de referencia que esté en movimiento uniforme con respecto a aquél. En efecto, observamos a la pulsación mientras corremos a lo largo de la cuerda con la misma velocidad que la pulsación. Puesto que las leyes de Newton implican sólo aceleraciones, las cuales son iguales en ambos marcos, podemos emplearlas en cualquiera de los marcos. Nos inclinamos, entonces, por el marco que para nosotros resulta más conveniente.

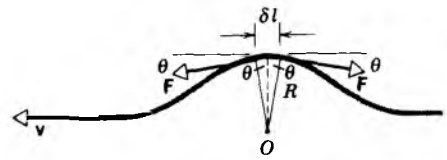



**Figura 9** Una pulsación que se mueva hacia la derecha en una cuerda estacionaria es equivalente a una pulsación en posición fija en una cuerda que se mueva hacia la izquierda. Consideramos las fuerzas en una sección de cuerda de longitud $\delta l$ en la pulsación "fija".

Consideremos a una pequeña sección de la pulsación de longitud $\delta l$, como se muestra en la figura 9. Esta sección forma aproximadamente un arco de círculo de radio $R$. La masa $\delta m$ de este elemento es $\mu\,\delta l$, donde $\mu$ es la masa por unidad de longitud de la cuerda. La tensión $F$ en la cuerda es un tirón tangencial en cada extremo de este pequeño segmento de la cuerda. Las componentes horizontales de $F$ se cancelan, y las componentes verticales son cada una igual a $F$ sen $\theta$. De aquí que la fuerza vertical total $F_\perp$ sea $2F$ sen $\theta$. Debido a que $\theta$ es pequeño, podemos considerar que sen $\theta \approx \theta$. Partiendo de la figura 9, vemos que $2\theta = \delta l/R$, y así obtenemos

$$F_\perp = 2F \text{ sen } \theta \approx 2F\theta = F\frac{\delta l}{R}. \tag{17}$$

Esto da la fuerza que suministra la aceleración centrípeta de las partículas de cuerda dirigidas hacia $O$. La fuerza centrípeta que actúa sobre una masa $\delta m$ ($= \mu\,\delta l$) que se mueve en círculo de radio $R$ a velocidad $v$ es $\delta m\, v^2/R$. Nótese que la velocidad tangencial $v$ de este elemento de masa a lo largo de la parte superior del arco es horizontal y de magnitud igual a la velocidad de la onda. Igualando la fuerza vertical neta sobre el elemento, ecuación 17, con la fuerza centrípeta necesaria, obtenemos

$$F_\perp = \frac{\delta m\, v^2}{R}$$

o bien

$$F\frac{\delta l}{R} = \frac{\mu\,\delta l\, v^2}{R}$$

por lo que

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \tag{18}$$

La ecuación 18 muestra, a partir de un análisis mecánico, que la constante $C$ en la ecuación 16 tiene el valor 1.

Si la amplitud de la pulsación fuese muy grande en comparación con la longitud de la cuerda, no habríamos tenido la posibilidad de usar la aproximación sen $\theta \approx \theta$. Además, la tensión $F$ de la cuerda cambiaría por la presencia de la pulsación, mientras que hemos supuesto que

$F$ no cambia a partir de la tensión original de la cuerda estirada. Por lo tanto, nuestro resultado cumple únicamente para desplazamientos transversales de la cuerda relativamente pequeños, un caso que es ampliamente aplicable en la práctica.

Una onda periódica que entra en un medio suele ser consecuencia de una influencia externa que perturba al medio a una cierta frecuencia. La onda que viaja a través de ese medio tendrá la misma frecuencia que la fuente de la onda. La velocidad de la onda está determinada por las propiedades del medio. Dadas la frecuencia $\nu$ de la onda y su velocidad $v$ en el medio, la longitud de onda de la onda periódica *en ese medio* se determina por la ecuación 13, $\lambda = v/\nu$. Cuando una onda pasa de un medio a otro de velocidad de onda diferente (por ejemplo, dos cuerdas con densidades de masa lineal diferentes), la frecuencia en un medio debe ser la misma que la frecuencia en el otro. (De otro modo existiría una discontinuidad en el punto en que se junten las dos cuerdas.) Sin embargo, las longitudes de onda diferirán una de otra. La relación entre las longitudes de onda se deduce de la igualdad de las frecuencias $\nu_1$ y $\nu_2$ en los dos medios; es decir, $\nu_1 = \nu_2$ da

$$\frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}. \tag{19}$$

## Velocidad transversal de una partícula

El movimiento de una partícula en una onda transversal como la de la figura 6 es en dirección $y$. La velocidad de la onda describe el movimiento de la onda a lo largo de la dirección de viaje (la dirección $x$). La velocidad de la onda *no* caracteriza el movimiento transversal de las partículas de la cuerda.

Para hallar la velocidad transversal de una partícula de la cuerda necesitamos el cambio en la coordenada $y$ con el tiempo. Así, centramos nuestra atención en una partícula aislada de la cuerda, es decir, en cierta coordenada $x$. Por lo tanto, necesitaremos la derivada de $y$ con respecto a $t$ siendo $x$ constante. Esto se representa por el símbolo $\partial y/\partial t$, el cual indica la *derivada parcial* de $y$ con respecto a $t$, manteniendo constantes a todas las demás variables de las que pueda depender $y$. Representamos a la velocidad de la partícula, la cual varía tanto con $x$ (la posición de la partícula) como con $t$, con la expresión $u(x,t)$. Suponiendo que tenemos una onda sinusoidal de la forma de la ecuación 14, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[y_m \operatorname{sen}\,(kx - \omega t - \phi)\right] \\ &= -y_m\omega \cos\,(kx - \omega t - \phi). \end{aligned} \tag{20}$$

Continuando de esta manera, podemos hallar la aceleración transversal de la partícula en esta posición de $x$ de acuerdo con

$$\begin{aligned} a(x,t) &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} = -y_m\omega^2 \operatorname{sin}\,(kx - \omega t - \phi) \\ &= -\omega^2 y. \end{aligned} \tag{21}$$

La ecuación 21 tiene la misma forma que la ecuación 5 del capítulo 15; la aceleración transversal de cualquier punto es proporcional a su desplazamiento transversal, pero dirigida en sentido opuesto. Esto demuestra que cada partícula de la cuerda experimenta un movimiento armónico simple transversal al pasar la onda sinusoidal.

---

**Problema muestra 1** En un extremo de una cuerda horizontal larga se genera una onda sinusoidal transversal por medio de una barra que mueve al extremo de arriba a abajo en una distancia de 1.30 cm. El movimiento es continuo y se repite regularmente 125 veces por segundo. (*a*) Si la cuerda tiene una densidad lineal de 0.251 kg/m y se mantiene sometida a una tensión de 96 N, halle la amplitud, la frecuencia, la velocidad, y la longitud de onda del movimiento de la onda. (*b*) Suponiendo que la onda se mueva en dirección $+x$ y que, en $t = 0$, el elemento de la cuerda en $x = 0$ esté en su posición de equilibrio $y = 0$ y moviéndose hacia abajo, halle la ecuación de la onda.

**Solución** (*a*) Al moverse la barra un total de 1.30 cm, el extremo de la cuerda se mueve $\frac{1}{2}(1.30\text{ cm}) = 0.65$ cm fuera de su posición de equilibrio, primero sobre ella, luego bajo ella; por lo tanto, la amplitud $y_m$ es 0.65 cm.

El movimiento íntegro se repite 125 veces cada segundo, y entonces la frecuencia es de 125 vibraciones por segundo, o $\nu = 125$ Hz.

La velocidad de la onda está dada por la ecuación 18,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{96\text{ N}}{0.251\text{ kg/m}}} = 19.6\text{ m/s}.$$

La longitud de onda está dada por $\lambda = v/\nu$, de modo que

$$\lambda = \frac{19.6\text{ m/s}}{125\text{ Hz}} = 0.156\text{ m} = 15.6\text{ cm}.$$

(*b*) La expresión general para una onda sinusoidal transversal que se mueve en la dirección $+x$ está dada por la ecuación 14,

$$y(x,t) = y_m \operatorname{sen}\,(kx - \omega t - \phi).$$

Imponiendo las condiciones iniciales dadas ($y = 0$ y $\partial y/\partial t < 0$ para $x = 0$ y $t = 0$) tenemos

$$y_m \operatorname{sen}\,(-\phi) = 0 \quad \text{y} \quad -y_m\omega \cos\,(-\phi) < 0,$$

lo cual significa que puede considerarse que la constante de fase $\phi$ es cero (o cualquier entero múltiplo de $2\pi$). De aquí que, para esta onda,

$$y(x,t) = y_m \operatorname{sen}\,(kx - \omega t),$$

y con los valores que acabamos de hallar,

$$y_m = 0.65\text{ cm},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.156\text{ m}} = 40.3\text{ rad/m} = 0.403\text{ rad/cm},$$

$$\omega = vk = (19.6\text{ m/s})(40.3\text{ rad/m}) = 789\text{ rad/s},$$

obtenemos como ecuación de la onda

$$y(x,t) = 0.65 \text{ sen } (0.403x - 789t),$$

donde $x$ y $y$ están en centímetros y $t$ está en segundos.

**Problema muestra 2** Cuando la onda del problema muestra 1 pasa a lo largo de la cuerda, cada partícula de la cuerda se mueve hacia arriba y hacia abajo en ángulo recto con la dirección del movimiento de la onda. (*a*) Halle espresiones para la velocidad y la aceleración de una partícula $P$ situada en $x_p$ = 0.245 m. (*b*) Evalúe el desplazamiento transversal, la velocidad, y la aceleración de esta partícula en $t$ = 1.5 s.

**Solución** (*a*) Para una partícula en $x_p$ = 0.245 m = 24.5 cm en la onda del problema muestra 1, obtenemos, usando la ecuación 20 con $\phi = 0$,

$$u(x_P,t) = -(0.65)(789) \cos [(0.403)(24.5) - 789t]$$
$$= -513 \cos (9.87 - 789t),$$

donde $u$ está en cm/s y $t$ está en segundos. De modo similar, usando la ecuación 21, hallamos que la aceleración es

$$a(x_P,t) = -(0.65)(789)^2 \text{ sen } (9.87 - 789t)$$
$$= -(4.05 \times 10^5) \text{ sen } (9.87 - 789t),$$

donde $a$ está en cm/s$^2$.

(*b*) En $t$ = 1.5 s, evaluamos las expresiones para $y$, $u$, y $a$ para dar

$$y = +0.63 \text{ cm}, \quad u = -125 \text{ cm/s}, \quad a = -3.93 \times 10^5 \text{ cm/s}^2.$$

Es decir, la partícula está cerca de su desplazamiento positivo máximo, se mueve en dirección $y$ negativa (alejándose de ese máximo), y está acelerando en dirección $y$ negativa (su velocidad está creciendo en magnitud al moverse la partícula hacia su posición de equilibrio).

## 19-5 LA ECUACIÓN DE LA ONDA *(Opcional)*

En el capítulo 15 hemos tratado el fenómeno de la oscilación que comúnmente encontramos. Una razón de que este fenómeno sea tan común es que la ecuación básica que describe a un sistema oscilatorio [$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$, ecuación 6 del capítulo 15] es una solución de la ecuación 5 del capítulo 15,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x,$$

que es una ecuación de una forma general que puede derivarse a partir de un análisis mecánico de una variedad de situaciones físicas, alguna de las cuales se trataron en la sección 15-5.

La situación es similar en el caso del movimiento ondulatorio. Como lo demostramos en esta sección, el análisis mecánico da una ecuación de otra forma encontrada comúnmente, cuya solución es una onda de la forma dada por la ecuación 2 o por la ecuación 5.

La figura 10 muestra un elemento de una cuerda larga que sometido a una tensión $F$. El tránsito de una onda ha provocado que el elemento sea desplazado de su posición de equilibrio en $y$ = 0. Consideramos al elemento de la cuerda de longitud $\delta x$, y

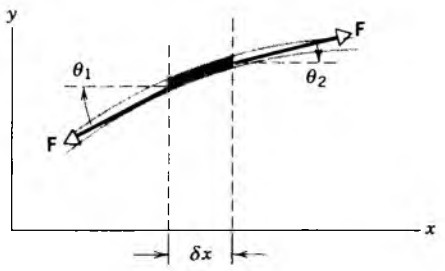



**Figura 10** Un pequeño elemento de longitud $\delta x$ de una cuerda larga en tensión $F$. La figura representa una instantánea del elemento en un tiempo en particular durante el tránsito de una onda.

aplicamos la segunda ley de Newton para analizar *cómo* se mueve este elemento.

Sobre el elemento actúan dos fuerzas ejercidas por las partes de la cuerda a cada lado del elemento. Estas fuerzas tienen magnitudes iguales, porque la tensión está distribuida uniformemente a lo largo de la cuerda, pero tienen direcciones ligeramente distintas, porque actúan tangentes a la cuerda en los puntos extremos del elemento. La fuerza neta en la dirección $y$ es

$$F_y = F \text{ sen } \theta_2 - F \text{ sen } \theta_1.$$

Consideramos únicamente desplazamientos pequeños a partir del equilibrio, de modo que los ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$ son pequeños, y podemos escribir que sen $\theta \approx \tan \theta$, lo cual da

$$F_y \approx F \tan \theta_2 - F \tan \theta_1 = F\,\delta(\tan \theta), \qquad (22)$$

donde $\delta(\tan \theta) = \tan \theta_2 - \tan \theta_1$. Esta fuerza resultante debe ser igual a la masa del elemento, $\delta m = \mu\,\delta x$, multiplicada por la componente $y$ de la aceleración. Despreciando la fuerza de fricción y otras fuerzas disipativas, hallamos que la segunda ley de Newton da

$$F_y = \delta m\, a_y$$
$$F\,\delta(\tan \theta) = \mu\,\delta x\, a_y$$
$$\frac{\delta(\tan \theta)}{\delta x} = \frac{\mu}{F} a_y.$$

Para la componente $y$ de la aceleración $a_y$, usamos la aceleracion transversal de una partícula, $\partial^2 y/\partial t^2$. También, reemplazamos a tan $\theta$, que es la pendiente de la cuerda, por la derivada parcial equivalente $\partial y/\partial x$. Haciendo estas sustituciones, obtenemos

$$\frac{\delta(\partial y/\partial x)}{\delta x} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \qquad (23)$$

Consideremos ahora el límite de la ecuación 23 cuando el elemento de masa se vuelve muy pequeño. El lado izquierdo está en la forma normal para expresar la derivada respecto a $x$ como un límite:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta(\partial y/\partial x)}{\delta x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

y el resultado final es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \qquad (24)$$

Reemplazando a $\mu/F$ por $1/v^2$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{25}$$

La ecuación 25 es la forma general de la ecuación que describe a las ondas: la segunda derivada del desplazamiento de onda $y$ respecto a la coordenada $x$ en dirección de la propagación es igual a $1/v^2$ multiplicado por la segunda derivada respecto al tiempo. Esta forma general de ecuación se llama *ecuación de onda*. Surge no solamente en la mecánica sino también en otras situaciones. Por ejemplo, como veremos en el capítulo 41, si usamos las ecuaciones del electromagnetismo en lugar de las ecuaciones de la mecánica (las leyes de Newton), obtenemos una ecuación de exactamente la misma forma que la ecuación 25, excepto que el desplazamiento $y$ se sustituye por la intensidad de un campo magnético o eléctrico. La velocidad de propagación $v$ de las ondas electromagnéticas que viajan en un vacío se convierten en la velocidad de la luz $c$.

Veamos ahora cómo la solución de la ecuación 25 es nuestra fórmula general para una onda viajera, $y(x,t) = f(x \pm vt)$. Hagamos un simple cambio de variable y que $z$ represente a $x \pm vt$, de modo que $y = f(z)$. Entonces, usando repetidamente la regla de la cadena del cálculo,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dz^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = \pm v\frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d}{dz}\left(\pm v\frac{df}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = (\pm v)^2\frac{d^2 f}{dz^2} = v^2\frac{d^2 f}{dz^2}.$$

Así,

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

y se satisface la ecuación 25. Puede demostrarse que *únicamente* las combinaciones $x \pm vt$ en $f$ satisfacen a la ecuación de onda, de modo que todas las ondas viajeras deben tener la forma de la ecuación 2 o de la ecuación 5.

Para expresar estos resultados de otra manera, la ecuación 24, la cual se derivó de las leyes de Newton, representa a una onda viajera únicamente cuando $\mu/F = 1/v^2$. Esta discusión proporciona así una derivación independiente de la ecuación 18 para la velocidad de propagación de las ondas a lo largo de una cuerda tensada. ■

## 19-6 POTENCIA E INTENSIDAD EN EL MOVIMIENTO ONDULATORIO

Si, como lo sugiere la figura 1, estuviese usted sacudiendo (y por tanto efectuando un trabajo en) el extremo de una cuerda, un compañero que estuviese en el otro extremo podría extraer la energía resultante (la cual se transporta a lo largo de la cuerda en la forma de la energía potencial y la energía cinética de sus elementos) y usarla para efectuar un trabajo en otro sistema. Tal transporte de energía (y de ímpetu) es, de hecho, uno de los objetivos de producir ondas. En esta sección consideraremos la cantidad de energía que transporta la cuerda.

La figura 11 muestra una instantánea de la onda en los tiempos $t$ y $t + dt$. Un punto de la cuerda con coordenada $x$ tiene en un tiempo $t$ una velocidad transversal **u**, la cual tiene una componente $y$ únicamente. Esta velocidad, como hemos ya visto en la sección 19-4, *no* se relaciona con la velocidad de fase de la onda, sino que más bien tiene la magnitud dada por la ecuación 20 con $\phi = 0$,

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

para una onda sinusoidal de la forma dada por la ecuación 11.

En la figura 11 se muestra también la fuerza ejercida sobre un elemento de la cuerda por el elemento de su izquierda. La fuerza transmite energía en una cantidad dada por la ecuación 23 del capítulo 7, $P = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = uF_y$.

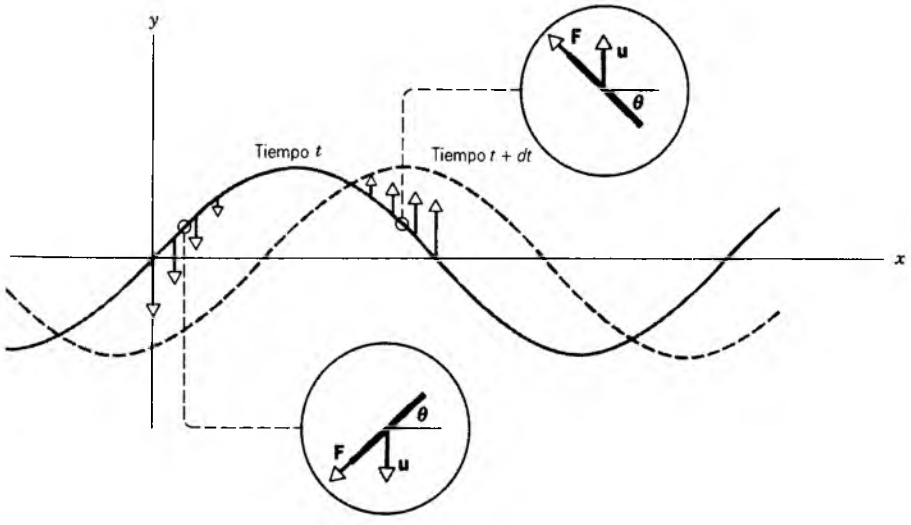



**Figura 11** Los vectores en la dirección $y$ muestran el valor de la velocidad instantánea **u** de diferentes puntos de la cuerda al viajar la onda seno. La línea punteada muestra la onda en un tiempo posterior, cuando las partículas se han movido en la dirección dada por sus vectores de velocidad. Las intercalaciones muestran la fuerza sobre dos elementos diferentes de la cuerda, ejercida por el elemento de su izquierda. Nótese que la potencia instantánea $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}$ es positiva, sin importar dónde estemos dentro de la fase de la onda.

Únicamente la componente $F_y$ de **F** a lo largo de **u** contribuye a la potencia; esta componente es $F$ sen $\theta$, la cual, para pequeños desplazamientos, puede ser aproximada como $F \tan \theta = F\partial y/\partial x$, donde $\partial y/\partial x$ es la pendiente de la cuerda en la coordenada $x$.

Nótese que la componente $y$ de **F** es paralela a **u**, sin importar si el elemento de la cuerda se está moviendo hacia arriba o hacia abajo. Así, $uF_y \geq 0$, y por lo tanto la potencia transmitida nunca es negativa durante el ciclo de oscilación. *Existe un flujo neto continuo de energía en dirección x positiva (la dirección de propagación de la onda).*

Sustituyendo a la componente $y$ de la fuerza, obtenemos

$$\begin{aligned} P = uF_y &= \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(F\frac{\partial y}{\partial x}\right) \\ &= F[-\omega y_m \cos(kx - \omega t)][-ky_m \cos(kx - \omega t)] \\ &= y_m^2 k\omega F \cos^2(kx - \omega t) \end{aligned}$$

o sea

$$P = y_m^2 \mu v \omega^2 \cos^2(kx - \omega t), \tag{26}$$

donde hemos usado $v = F/\mu$ y $v = \omega/k$.

Nótese que la potencia o cantidad de flujo de energía no es constante. Esto se debe a que la potencia de entrada oscila: el trabajo efectuado por la mano que está moviendo el extremo de la cuerda varía con el desplazamiento transversal de ese punto. Cuando se transporta energía a lo largo de la cuerda, la energía se almacena en cada elemento de la cuerda como una combiación de energía cinética y de energía potencial de deformación. Esto es similar al caso del oscilador armónico simple.

A menudo se considera que esta entrada de potencia a la cuerda es el promedio en un periodo del movimiento. La potencia promedio abastecida es de

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} P\,dt, \tag{27}$$

donde $T$ es el periodo. El valor promedio de $\text{sen}^2\,\theta$ o de $\cos^2\,\theta$ en un ciclo de $\frac{1}{2}$, y así obtenemos, usando la ecuación 26,

$$\bar{P} = \tfrac{1}{2} y_m^2 \mu v \omega^2, \tag{28}$$

resultado que no depende de $x$ ni de $t$. La dependencia de la tasa de transferencia de energía del *cuadrado* de la amplitud de onda y del *cuadrado* de la frecuencia de onda es así, en general, para todos los tipos de ondas.

A menudo es más útil especificar la *intensidad* de la onda en una onda tridimensional, como en el caso de una onda de luz o una onda de sonido que proviene de una fuente puntual. La intensidad $I$ se define como *la potencia promedio por unidad de área transmitida a través de un área A normal a la dirección en que viaja la onda*, es decir,

$$I = \frac{\bar{P}}{A}. \tag{29}$$

Al igual que con la potencia en la onda que viaja a lo largo de la cuerda, la intensidad de cualquier onda es siempre proporcional al cuadrado de la amplitud. (Sin embargo, en ondas circulares o esféricas, la amplitud no es constante al viajar el frente de la onda; véase el problema muestra 3.)

La energía puede disiparse mientras la onda se propaga a través del espacio. La energía mecánica de la onda puede convertirse en energía interna de la cuerda o en energía calorífica transmitida al entorno mediante la fricción interna u otros efectos viscosos. En este capítulo despreciamos tales transformaciones de la energía y suponemos que no se pierde energía mecánica.

**Problema muestra 3** Las ondas esféricas viajan a partir de una fuente de ondas cuya potencia de salida, supuesta constante, es $P$; véase la figura 12. ¿Cómo depende la intensidad de la onda de la distancia a partir de la fuente?

**Solución** Suponemos que el medio es isotrópico y que la fuente irradia uniformemente en todas direcciones, es decir, su emisión es simétricamente esférica.

La intensidad de una onda está dada por la ecuación 29. La potencia se distribuye uniformemente sobre cualquier superficie esférica de área $A = 4\pi r^2$, y entonces

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

La intensidad de la onda varía inversamente con el cuadrado de su distancia desde la fuente. Puesto que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la amplitud de la onda debe variar inversamente con la distancia desde la fuente. Así, por ejemplo, al duplicar la distancia desde una fuente, la amplitud de una onda esférica disminuye a la mitad, y la intensidad es de únicamente la cuarta parte.

## 19-7 EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

A menudo observamos que dos o más ondas viajan en forma simultánea por la misma región del espacio, independientemente entre sí. Por ejemplo, el sonido que llega a nuestros oídos proveniente de una orquesta sinfónica es muy complejo, pero podemos captar el sonido emitido por cada uno de los instrumentos por separado. En las antenas de nuestros aparatos de radio y de TV, los electrones se ponen en movimiento por todo un conjunto de señales que parten de centros de emisión diferentes, y sin embargo podemos sintonizar cualquier estación en particular, y la señal que recibimos de esa estación es,

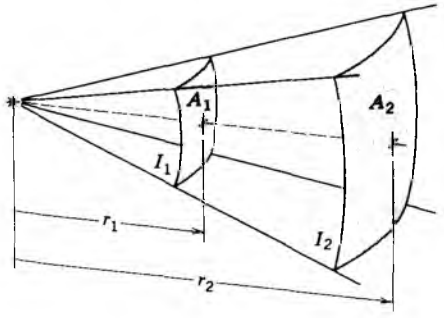



**Figura 12** Problema muestra 3.

en principio, la misma que la que recibiríamos si todas las demás estaciones cesaran de emitir.

Los ejemplos anteriores ilustran el *principio de superposición*, que postula que, cuando varias ondas se combinan en un punto, el desplazamiento de cualquier partícula en un tiempo dado es simplemente la suma vectorial de los desplazamientos que produciría cada onda individual que actúe por sí sola. Por ejemplo, supongamos que dos ondas viajen simultáneamente a lo largo de la misma cuerda tensada. Sean $y_1(x,t)$ y $y_2(x,t)$ los desplazamientos que la cuerda experimentaría si cada onda actuase por separado. El desplazamiento de la cuerda al actuar ambas ondas es, entonces,

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t), \tag{30}$$

siendo algebraica la suma en este caso.

Para las ondas mecánicas en medios elásticos, el principio de superposición es válido cuando la fuerza de restitución varía linealmente con el desplazamiento. Para las ondas electromagnéticas, el principio de superposición es válido porque los campos eléctricos y magnéticos se relacionan linealmente.

La figura 13 muestra una secuencia de tiempo de "instantáneas" de dos pulsaciones que viajan en direcciones opuestas en la misma cuerda tensada. Cuando las pulsaciones se superponen, el desplazamiento de la cuerda es la suma algebraica de los desplazamientos individuales de la cuerda provocados por cada una de las dos pulsaciones por separado, como lo exige la ecuación 30. Las pulsaciones se mueven simplemente entrecruzándose viajando cada una de ellas a lo largo como si la otra no existiera.

El principio de superposición puede parecer un resultado obvio, pero hay casos en los que éste no se cumple. Supongamos, por ejemplo, que una de las ondas tiene una amplitud tan grande que supera el límite elástico del medio. La fuerza de restitución ya no es directamente proporcional al desplazamiento de una partícula en el medio. Entonces, sin importar cuál sea la amplitud de la segunda onda (incluso si es muy pequeña), su efecto en un punto no es una función lineal de su amplitud. Además,

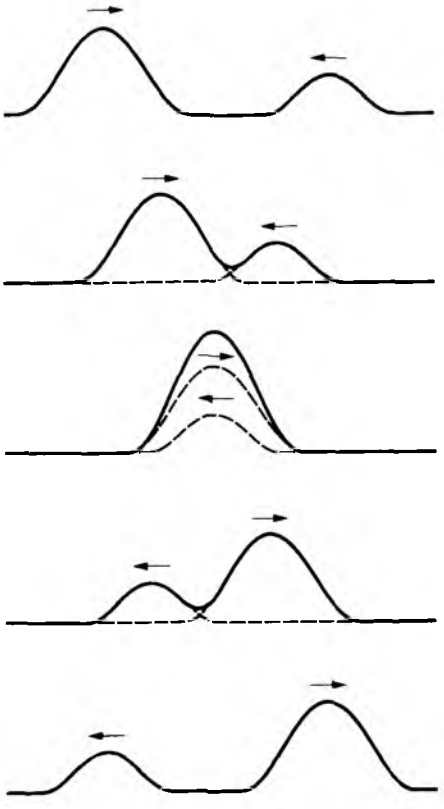


**Figura 13** Dos pulsaciones viajan en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda tensada. Se aplica el principio de superposición al entrecurzarse una y otra.

la segunda onda cambiará al pasar a través de la región no lineal, y su comportamiento posterior se alterará. Esta situación surge sólo muy raramente, y en la mayoría de los casos es válido el principio de superposición (como lo suponemos a lo largo de este texto).

## Ondas complejas

Cuando dos o más ondas diferentes, que puedan tener diferentes amplitudes y longitudes de onda, se hallan presentes de manera simultánea en un medio, podemos aplicar el principio de superposición en cada punto y obtener un patrón de onda $y(x,t)$ complejo que no se parezca en absoluto a las ondas que lo componen. Sin embargo, es una forma de onda viajera aceptable.

La figura 14*a* muestra un ejemplo del caso de dos ondas seno de igual amplitud cuya longitud de onda está en la razón de 3:1. Las ondas viajan en la misma dirección y con la misma velocidad de fase. Están en fase en $x = 0$. La curva más oscura muestra la forma de onda resultante que puede calcularse empleando la ecuación 30. Nótese que no es una onda seno. En la figura 14*b*, las dos ondas combinadas son idénticas a las de la figura 14*a*, excepto

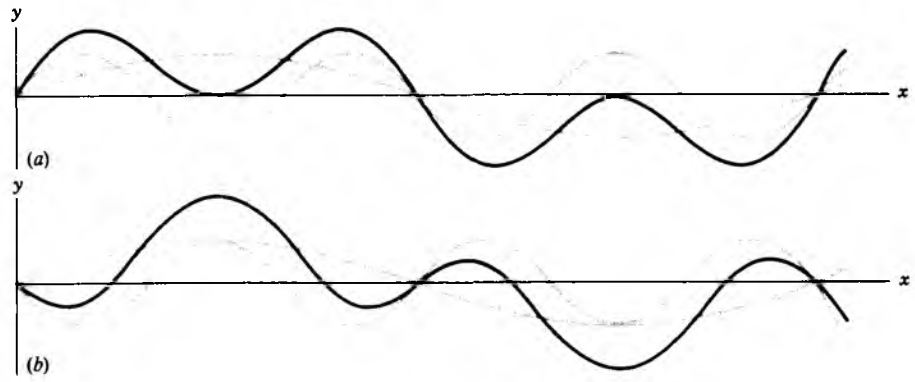



**Figura 14** La adición de dos ondas con una razón de longitud de onda de 3:1 (línea más clara) produce una onda cuya forma (línea más intensa) depende de la relación de fase de las dos ondas. Compárense (*a*) y (*b*), que muestran relaciones de fase diferentes de las ondas sumadas.

que están 180° fuera de fase en $x = 0$. La forma de onda resultante es bastante diferente de la de la figura 14*a*.

Al cambiar la designación del eje horizontal en la figura 14 de $x$ a $t$, tendríamos una representación de la superposición de dos ondas en función del tiempo en un punto en particular. Tal gráfica podría representar, por ejemplo, el movimiento en el tiempo de un punto en particular de una cuerda en respuesta a la combinación de dos ondas.

### Análisis de Fourier *(Opcional)*

Físicamente, la importancia del principio de superposición es que, cuando es válido, permite analizar un movimiento ondulatorio complicado como una combinación de ondas sencillas. De hecho, como el matemático francés J. Fourier (1768-1830) pudo demostrar que, para construir la forma más general de una onda periódica sólo necesitamos ondas armónicas simples. Fourier demostró que cualquier movimiento periódico de una partícula puede ser representado como una combinación de movimientos armónicos simples. Por ejemplo, si $y(x)$ representa la forma de onda (en un tiempo en particular) de una fuente de ondas que tengan una longitud de onda $\lambda$, podemos analizar a $y(x)$ como sigue:

$$y(x) = A_0 + A_1 \operatorname{sen} kx + A_2 \operatorname{sen} 2kx + A_3 \operatorname{sen} 3kx + \cdots + B_1 \cos kx + B_2 \cos 2kx + B_3 \cos 3kx + \cdots, \quad (31)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$. Esta expresión se conoce como serie de Fourier. Los coeficientes $A_i$ y $B_i$ tienen valores definidos para cualquier movimiento periódico $y(x)$ en particular. Por ejemplo, la llamada onda de diente de sierra de la figura 15 puede escribirse

$$y(x) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{sen} kx - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} 2kx - \frac{1}{3\pi} \operatorname{sen} 3kx - \cdots.$$

Si el movimiento no es periódico, como en el caso de una pulsación, la suma se sustituye por una integral: la integral de Fourier. De aquí que cualquier movimiento (pulsado o continuo) de una fuente de ondas pueda ser representado en términos de una superposición de movimientos armónicos simples, y que cualquier forma de onda así generada pueda ser analizada como una combinación de componentes que son, por separado, ondas armónicas simples. Esto ilustra una vez más la importancia del movimiento armónico y de las ondas armónicas.

La forma de onda mantendrá su forma únicamente al viajar en un medio no dispersivo. En un medio dispersivo, las formas de onda de las ondas sinusoidales componentes no cambian, pero cada una de ellas puede viajar con una velocidad diferente. En este caso, la forma de la onda combinada cambia al alterarse la relación de fase entre las componentes. La onda puede también cambiar de forma si cede energía mecánica al medio, tal como por la resistencia del aire, la viscosidad, o la fricción interna. Tales fuerzas disipativas dependen a menudo de la velocidad, y así las componentes de Fourier más fuertemente afectadas son aquellas con velocidades más elevadas de la partícula (es decir, aquellas con frecuencias altas, de acuerdo con la ecuación 20, donde se ve que $u$ depende de $\omega$). Aquí, una vez más, la forma de onda puede cambiar, al perder amplitud más rápidamente las componentes con frecuencias más altas. Un ejemplo de este fenómeno es el debilitamiento con el tiempo del sonido de las cuerdas del piano. El movimiento vibratorio de una cuerda de piano, inmediatamente después de haber sido percutida por el martillo, incluye una amplia gama de frecuencias, las cuales le dan su tono característico. Las componentes de más alta frecuencia de este movimiento complejo disipan su energía más rápidamente que las componentes de frecuencia más baja, por lo que el carácter de duración de un tono puede cambiar con el tiempo. ■

## 19-8 INTERFERENCIA DE ONDAS

Cuando dos o más ondas se combinan en un punto determinado, se dice que *interfieren*, y el fenómeno se conoce como *interferencia*. Como veremos, la forma de onda resultante depende fuertemente de las fases relativas de las ondas que interfieren. La figura 16 muestra un ejemplo de interferencia de ondas.

Consideremos en primer lugar dos ondas sinusoidales transversales de igual amplitud y longitud de onda, que viajan en dirección $x$ con la misma velocidad. Hagamos que la constante de fase de una onda sea $\phi$, mientras que la de la otra es $\phi = 0$. La figura 17 muestra la forma de onda combinada en un tiempo para los dos casos de $\phi$ cercano a 0° (las ondas están prácticamente en fase) y de $\phi$ cercano a 180° (las ondas están prácticamente fuera de fase). Simplemente sumando los desplazamientos individuales en cada $x$ puede verse que en el primer caso existe un refuerzo casi completo de las dos ondas y la resultante tiene casi el doble de la amplitud de sus componentes individuales, mientras que en el segundo caso existe una cancelación casi completa en cada punto y la

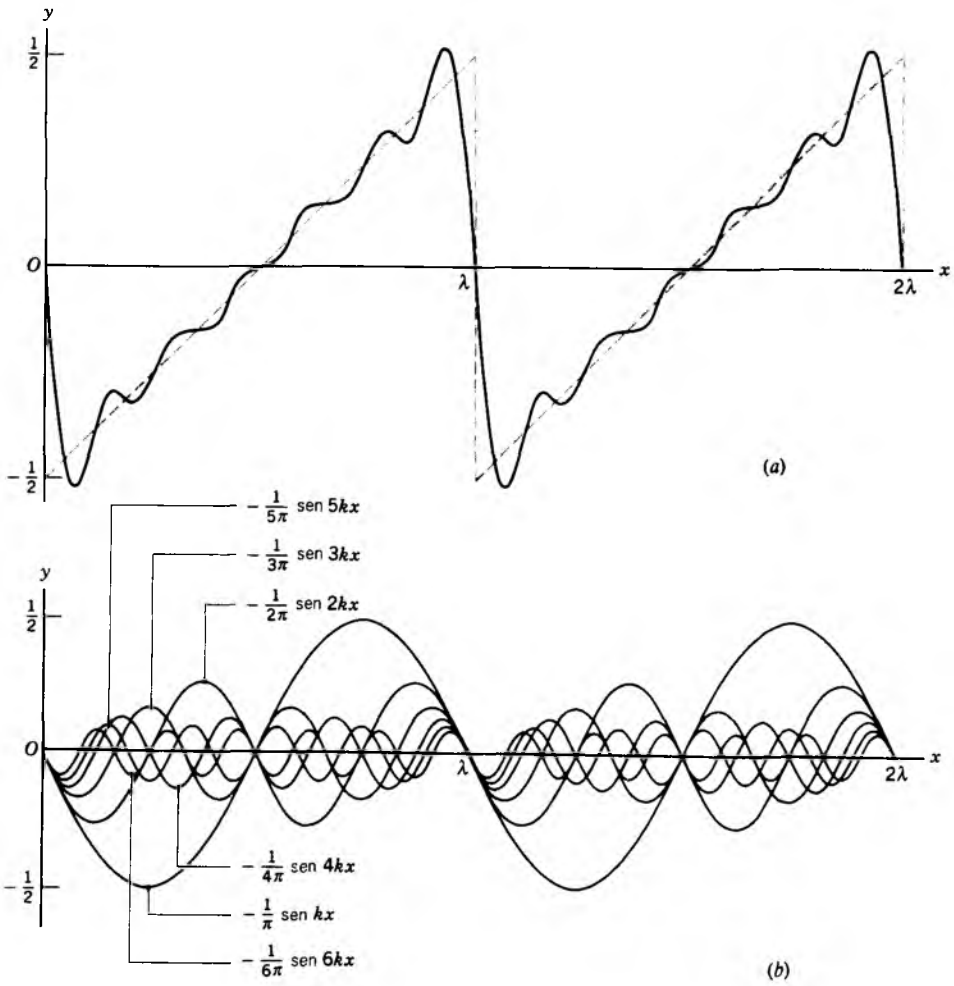



**Figura 15** (*a*) La línea punteada es una onda de diente de sierra muy común en electrónica. Puede representarse por medio de una serie de Fourier de ondas seno. (*b*) Se muestran las primeras seis ondas seno de la serie de Fourier que representan a la onda de diente de sierra, y su suma se muestra en la parte (*a*) por medio de una curva de línea continua. Al incluir más términos, la serie de Fourier resulta una mejor aproximación de la onda.

amplitud resultante está cerca de cero. Estos casos se conocen, respectivamente, como interferencia *constructiva* e interferencia *destructiva*.

Veamos cómo surge la interferencia de las ecuaciones de las ondas. Consideremos un caso general en el que las dos ondas tengan constantes de fase $\phi_1$ y $\phi_2$, respectivamente. Las ecuaciones de las dos ondas son

$$y_1(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t - \phi_1) \qquad (32)$$

y

$$y_2(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t - \phi_2). \qquad (33)$$

Hallemos ahora la onda resultante. Usando el principio de superposición, tomamos la suma de las ecuaciones 32 y 33, lo cual da

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_m[\text{sen } (kx - \omega t - \phi_1) \\ &\quad + \text{sen } (kx - \omega t - \phi_2)]. \end{aligned} \qquad (34)$$

Partiendo de la identidad trigonométrica para la suma de los senos de dos ángulos,

$$\text{sen } B + \text{sen } C = 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}(B + C) \cos \tfrac{1}{2}(B - C), \qquad (35)$$

obtenemos, después de cierto manejo,

$$y(x,t) = [2y_m \cos (\Delta\phi/2)] \text{ sen } (kx - \omega t - \phi'), \qquad (36)$$

donde $\phi' = (\phi_1 + \phi_2)/2$. La cantidad $= \Delta\phi = (\phi_2 - \phi_1)$ se llama *diferencia de fase* entre las dos ondas.

Esta onda resultante corresponde a una nueva onda que tiene la misma frecuencia pero una amplitud $2y_m|\cos(\Delta\phi/2)|$. Si $\Delta\phi$ es muy pequeño (comparado con 180°), la amplitud resultante es casi $2y_m$ (como se muestra en la Fig. 17*a*). Cuando $\Delta\phi$ es cero, las dos ondas tienen la misma fase en cualquier parte. La cresta de una cae sobre la cresta de la otra y de igual modo los valles, lo cual da una interferencia constructiva total. La amplitud resultante es precisamente del doble de la de cualquier onda aislada. Si, en cambio, $\Delta\phi$ está cerca de 180°, la amplitud resultante es de casi cero (como se muestra en la figura 17*b*). Cuando $\Delta\phi$ es exactamente 180°, la cresta de una onda cae exactamente sobre el valle de la otra. La amplitud resultante es cero, correpondiente a la interferencia destructiva total.

Obsérvese que la ecuación 36 tiene siempre la forma de una onda sinusoidal. Así, al sumar dos ondas seno de la misma longitud de onda y amplitud se obtiene siempre una onda seno de longitud de onda idéntica. Podemos



**Figura 16** Dos trenes de ondas, en este caso rizos circulares de dos perturbaciones diferentes, interfieren al superponerse en puntos particulares. El desplazamiento en cualquier punto es la superposición de los desplazamientos por separado debidos a cada una de las dos ondas.

también sumar componentes que tengan la misma longitud de onda pero amplitudes diferentes. En este caso, la resultante es nuevamente una onda seno con idéntica longitud de onda, pero la amplitud resultante no tiene la forma simple dada por la ecuación 36. Si las amplitudes individuales son $y_{1m}$ y $y_{2m}$, y, por lo tanto, las ondas están en fase ($\Delta\phi = 0$) la amplitud resultante es $y_{1m} + y_{2m}$ (Fig. 18), mientras que si están fuera de fase ($\phi = 180°$), la amplitud resultante es $|y_{1m} - y_{2m}|$. En este caso, no puede existir una interferencia destructiva completa, aunque exista una interferencia destructiva parcial.

La figura 19 muestra un ejemplo de la presencia de los efectos de interferencia. Los altoparlantes funcionan por una misma fuente. En puntos equidistantes de las bocinas (sobre la línea $AB$, la cual representa a todo el plano medio), existe interferencia constructiva completa si las bocinas se accionan en fase ($\Delta\phi = 0$). Existen también otros puntos $P$ a donde las ondas llegan en fase e interfieren constructivamente. Es decir, se puede desplazar una de las ondas de la figura 18 en una constante de fase de cualquier múltiplo entero de $2\pi$ (o en una distancia de cualquier número entero de longitudes de onda), y la forma de la onda combinada no cambia. Estos otros puntos de interferencia constructiva se localizan siempre donde la diferencia de la distancia desde las dos bocinas es un número entero de longitudes de onda:

$$|x_1 - x_2| = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots . \qquad (37)$$

En otros puntos $P$, las distancias diferentes $x_1$ y $x_2$ dan por resultado ondas que posiblemente lleguen a $P$ fuera de fase, aunque hayan incluso comenzado en fase al salir de las bocinas. El entorno que constituye al auditorio podría, por lo tanto, tener "puntos muertos" en los que

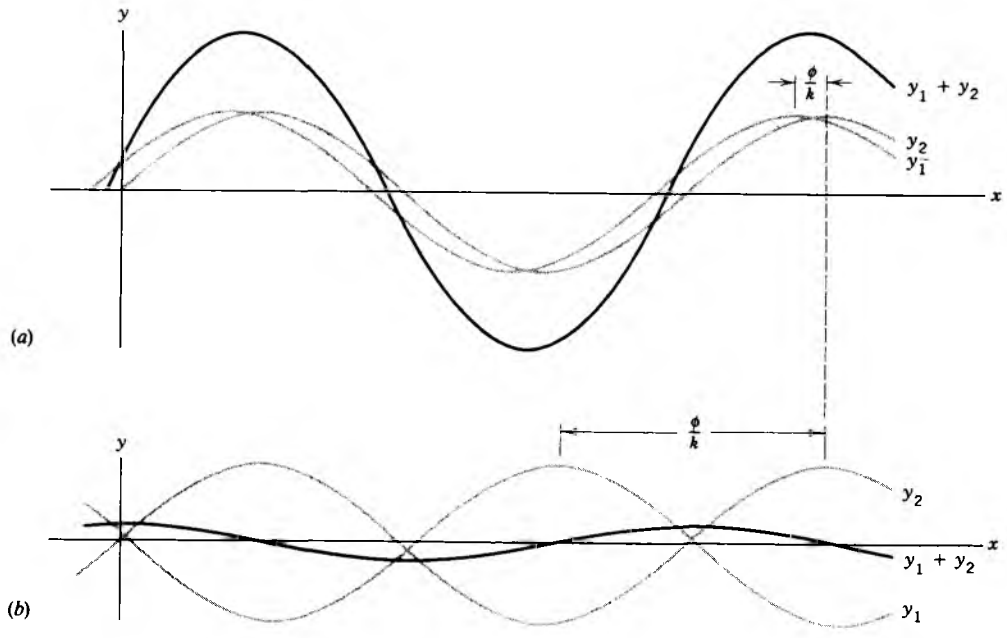



**Figura 17** (*a*) La superposición de dos ondas de igual longitud de onda y amplitud que estén prácticamente en fase da por resultado una onda de casi el doble de la amplitud de cualquiera de las componentes. (*b*) La superposición de dos ondas de igual longitud de onda y amplitud que estén casi a 180° fuera de fase da por resultado una onda cuya amplitud es prácticamente cero. Nótese que la longitud de onda de la resultante no cambia en ninguno de los casos.

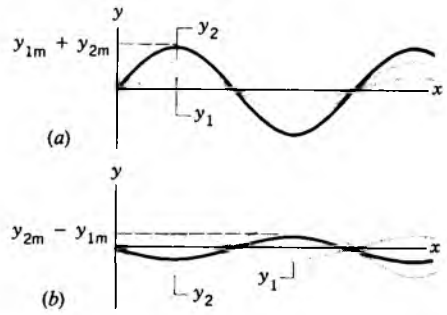



**Figura 18** Suma de dos ondas de la misma longitud de onda y fase pero de diferentes amplitudes (líneas de menor intensidad) da una resultante de la misma longitud de onda y fase. (*a*) Las amplitudes se suman si las ondas están en fase, y (*b*) se restan si las ondas están 180° fuera de fase.

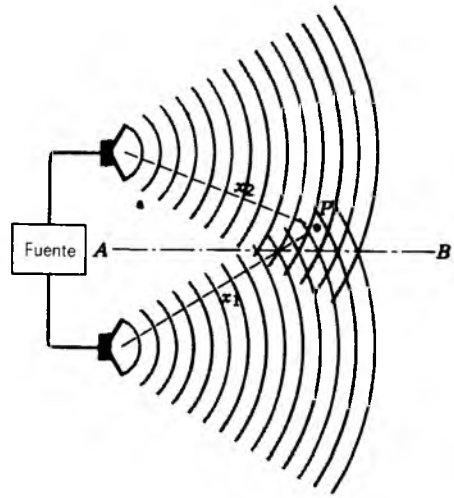



**Figura 19** Dos altoparlantes, accionados por una fuente común, envían señales al punto *P*, donde éstas se interfieren.

existe interferencia destructiva parcial o completa para una longitud de onda $\lambda$ en particular. La interferencia destructiva máxima se presenta en los puntos en que

$$|x_1 - x_2| = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2}, \ldots, \qquad (38)$$

correspondientes a una diferencia de fase de 180°, 540°, 900°, y así sucesivamente.

Por supuesto, si las bocinas emiten una mezcla de muchas longitudes de onda diferentes, ciertos puntos *P* podrían mostrar una interferencia destructiva para una longitud de onda y una interferencia constructiva para otra. El factor crítico en la determinación de las posiciones de los máximos y mínimos de la intensidad del sonido es la *diferencia de trayectoria* $|x_1 - x_2|$. En los puntos que no estén en el plano medio representado por la línea *AB*, las dos componentes llegan con amplitudes diferentes (porque las distancias desde las bocinas no son las mismas; véase el problema muestra 3). No existirá entonces una interferencia destructiva completa. (En ciertas geometrías es posible que el sonido irradiado por la *parte trasera* de una bocina interfiera con el sonido irradiado por la parte frontal. Estas dos ondas están a 180° fuera de fase, y su interferencia puede reducir la intensidad del sonido en lugares frente a la bocina. Se han diseñado cajas de bocinas que eliminan este efecto.)

**Problema muestra 4** Dos ondas viajan en la misma dirección a lo largo de una cuerda e interfieren entre sí. Las ondas tienen la misma longitud de onda y viajan con la misma velocidad. La amplitud de cada onda es de 9.7 mm, y existe una diferencia de fase de 110° entre ellas. (*a*) ¿Cuál es la amplitud de la onda combinada que resulta de la interferencia de las dos ondas? (*b*) ¿A qué valor se debería cambiar la diferencia de fase de modo que la onda combinada tenga una amplitud igual a la de una de las ondas originales?

**Solución** (*a*) La amplitud de la onda combinada se dio en la ecuación 36:

$$2y_m|\cos(\Delta\phi/2)| = 2(9.7\text{ mm})|\cos(110°/2)| = 11.1\text{ mm}.$$

(*b*) Si la cantidad $2y_m|\cos(\Delta\phi/2|$ ha de ser igual a $y_m$, entonces debemos tener que

$$2|\cos(\Delta\phi/2)| = 1,$$

o sea

$$\Delta\phi = 2\cos^{-1}(\tfrac{1}{2}) = 120° \quad \text{or} \quad -120°.$$

Cualquier onda puede ir delante de la otra por 120° (más o menos cualquier múltiplo entero de 360°) para producir la onda combinada deseada.

**Problema muestra 5** En la geometría de la figura 19, un oyente está sentado en un punto a una distancia de 1.2 m directamente enfrente de una bocina. Las dos bocinas, separadas por una distancia *D* de 2.3 m, emiten tonos puros de longitud de onda $\lambda$. Las ondas están en fase al salir de las bocinas. ¿Para qué longitudes de onda oirá el oyente un mínimo de intensidad del sonido?

**Solución** De acuerdo con los criterios de la ecuación 38, la intensidad mínima de sonido ocurre cuando las ondas de las dos bocinas se interfieren destructivamente. Si el oyente está sentado enfrente de la bocina 2, entonces $x_2$ = 1.2 m, y $x_1$ puede hallarse a partir de la fórmula pitagórica,

$$x_1 = \sqrt{x_2^2 + D^2} = \sqrt{(1.2\text{ m})^2 + (2.3\text{ m})^2} = 2.6\text{ m}.$$

Así, $x_1 - x_2$ = 2.6 m - 1.2 m = 1.4 m, y, de acuerdo con la ecuación 38, tenemos que

$$1.4\text{ m} = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \ldots,$$

que corresponde a

$$\lambda = 2.8\text{ m}, 0.93\text{ m}, 0.56\text{ m}, \ldots.$$

No ocurrirá una interferencia destructiva completa en esta posición, porque las dos ondas que llegan al punto de observación tienen amplitudes diferentes, siempre y cuando salgan de las bocinas con amplitudes iguales.

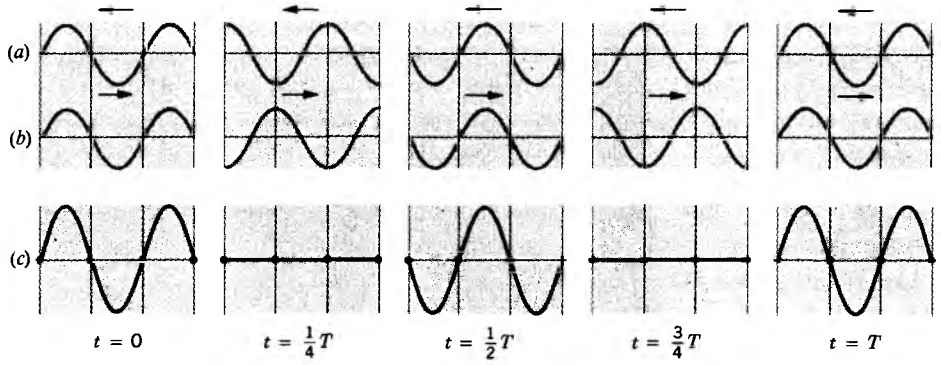



**Figura 20** (*a*, *b*) Dos ondas viajeras de la misma longitud de onda y amplitud, se mueven en direcciones opuestas. (*c*) La superposición de las dos ondas en instantes de tiempo diferentes. Los nodos del patrón de onda estacionaria se hallan indicados por puntos gruesos. Nótese que las ondas viajeras no tienen nodos.

## 19-9 ONDAS ESTACIONARIAS

En la sección anterior considerábamos el efecto de superponer dos ondas componentes de igual amplitud y frecuencia que se mueven en la misma dirección en una cuerda. ¿Cuál es el efecto cuando las ondas se mueven a lo largo de la cuerda en direcciones *opuestas*?

La figura 20 es una indicación gráfica del efecto de sumar las formas de onda componentes para obtener la resultante. En la figura se muestran dos ondas viajeras, una moviéndose hacia la izquierda y la otra hacia la derecha. Se muestran "instantáneas" de las dos ondas componentes y su resultante en intervalos de $\frac{1}{4}$ de periodo.

De esta superposición resulta una característica particular: existen ciertos puntos a lo largo de la cuerda, llamados *nodos*, en los cuales el desplazamiento es nulo *en todo momento*. (La figura 18 muestra también ciertos puntos en los que la resultante tenía un desplazamiento nulo, pero esa figura representaba una instantánea de las ondas viajeras *en un momento particular*. Si tomásemos otra instantánea un momento más tarde, hallaríamos que aquellos puntos ya no tienen desplazamiento nulo, porque la onda está viajando. En la figura 20*c*, los ceros permanecen como ceros en todo momento.) Entre los nodos se hallan los *antinodos*, donde el desplazamiento oscila con la amplitud más grande. Tal patrón de nodos y antinodos se denomina *onda estacionaria*.

Para analizar matemáticamente a la onda estacionaria, representemos a las dos ondas por

$$y_1(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t),$$
$$y_2(x,t) = y_m \text{ sen } (kx + \omega t).$$

De aquí que la resultante se pueda expresar como:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$
$$= y_m \text{ sen } (kx - \omega t) + y_m \text{ sen } (kx + \omega t) \quad (39)$$

o, haciendo uso de la relación trigonométrica de la ecuación 35,

$$y(x,t) = [2y_m \text{ sen } kx] \cos \omega t. \quad (40)$$

La ecuación 40 es la ecuación de una onda estacionaria. No puede representar a una onda viajera, porque $x$ y $t$ *no* aparecen en la combinación $x - vt$ o $x + vt$ exigida por una onda viajera.

Nótese que una partícula en cualquier posición $x$ determinada ejecuta un movimiento armónico simple en el transcurso del tiempo, y que todas las partículas vibran con la misma frecuencia angular $\omega$. En una onda viajera cada partícula de la cuerda vibra con la misma amplitud. Sin embargo, en una onda estacionaria, *la amplitud no es la misma para todas las partículas sino que varía con la posición x de la partícula*. De hecho, la amplitud $|2y_m \text{ sen } kx|$, tiene un valor *máximo* de $2y_m$ en las posiciones donde

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

o bien

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots. \quad (41)$$

Estos puntos son los antinodos y están separados por $\frac{1}{2}$ de longitud de onda. La amplitud tiene un valor *mínimo* de cero en las posiciones donde

$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

o bien

$$x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots. \quad (42)$$

Estos puntos son los nodos y están también separados por $\frac{1}{2}$ de longitud de onda. La separación entre un nodo y un antinodo adyacente es de $\frac{1}{4}$ de longitud de onda.

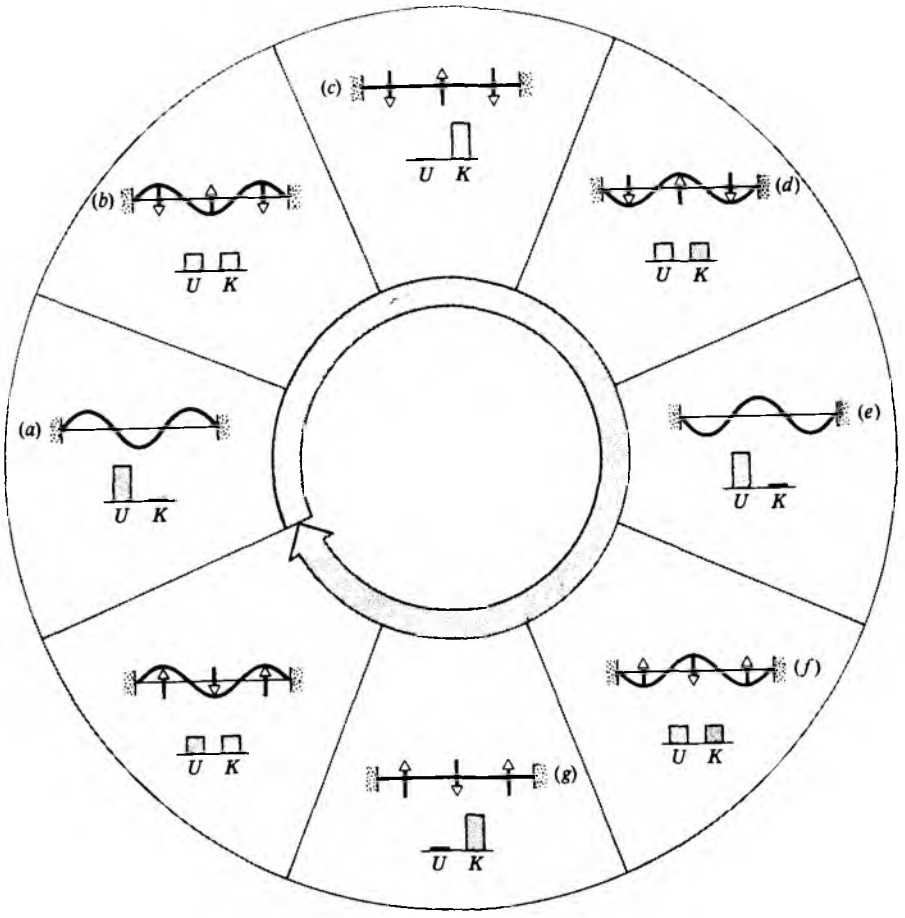



**Figura 21** Onda estacionaria en una cuerda tensa que muestra un ciclo de oscilación. En (*a*) la cuerda está momentáneamente en reposo con los antinodos en su desplazamiento máximo. La energía de la cuerda es energía potencial elástica totalmente. (*b*) Un octavo de ciclo más tarde, el desplazamiento se reduce y la energía es parcialmente potencial y parcialmente cinética. Los vectores muestran las velocidades instantáneas de las partículas de la cuerda en ciertas posiciones. (*c*) El deplazamiento es cero; no existe energía potencial, y la energía cinética es máxima. Las partículas de la cuerda tienen sus velocidades máximas. (*d* - *h*) El movimiento continúa a través del resto del ciclo, transformándose continuamente la energía en las formas cinética y potencial.

Está claro que no se transporta energía a lo largo de la cuerda hacia la derecha o hacia la izquierda, ya que la energía no puede fluir más allá de los nodos de la cuerda, los cuales están permanentemente en reposo. De aquí que la energía permanezca "estacionaria" en la cuerda, si bien alterna entre energía cinética vibratoria y energía potencial elástica. Cuando los antinodos están todos en sus desplazamientos máximos, la energía se almacena enteramente como energía potencial, en especial como una energía potencial elástica asociada al estiramiento de la cuerda. Cuando todas las partes de la cuerda pasan simultáneamente por la posición de equilibrio (como en la segunda y cuarta instantáneas de la Fig. 20), la energía se almacena enteramente como energía cinética. La figura 21 muestra una descripción más detallada de la transformación de la energía entre las formas potencial y cinética durante un ciclo de oscilación. Compárese la figura 21 con la figura 6 del capítulo 8 para el sistema oscilatorio bloque-resorte. ¿En qué se parecen estos sistemas?

Podemos considerar de igual manera al movimiento como una oscilación de la cuerda como un todo, experimentando cada partícula un movimiento armónico simple de frecuencia angular $\omega$ y con una amplitud que depende de su posición. Cada pequeña parte de la cuerda tiene inercia y elasticidad, y la cuerda en su conjunto puede verse como una colección de osciladores acoplados. De aquí que la cuerda vibratoria sea lo mismo en principio que el sistema bloque-resorte, excepto que el sistema bloque-resorte tiene únicamente una frecuencia natural, y la cuerda vibratoria tiene un gran número de frecuencias naturales (véase la sección 19-10).

Una manera fácil de conseguir una onda estacionaria consiste en superponer a una onda que viaje por una cuerda con su onda reflejada que viaje en la dirección opuesta. Consideremos ahora más detenidamente el proceso de reflexión de una onda. Supongamos una pulsación que viaje por una cuerda tensa que está fija en un extremo, como se muestra en la figura 22*a*. Cuando la pulsación llega a ese extremo, ejerce una fuerza hacia arriba sobre el apoyo. El apoyo es rígido, sin embargo, y no se mueve. Según la tercera ley de Newton, el apoyo ejerce una fuerza igual sobre la cuerda pero directamente opuesta. Esta fuerza de reacción genera una pulsación en el apoyo, el cual viaja de regreso a lo largo de la cuerda en dirección opuesta a la de la pulsación incidente. Decimos que la pulsación incidente ha sido *reflejada* en el punto extremo fijo de la cuerda. Nótese que la pulsación reflejada regresa

con su desplazamiento transversal invertido. Si un tren de ondas es incidente en el punto extremo fijo, se genera un tren de ondas reflejado en ese punto de la misma manera. El desplazamiento de cualquier punto a lo largo de la cuerda es la suma de los desplazamientos causados por las ondas incidente y reflejada. Puesto que el punto extremo está fijo, estas dos ondas deben interferir entre sí siempre destructivamente en ese punto, de modo que el desplazamiento será nulo allí. De aquí que la onda reflejada esté siempre 180° fuera de fase con la onda incidente en un extremo fijo. *Al reflejarse en un extremo fijo, una onda transversal experimenta un cambio de fase de 180°.*

En la figura 22*b* se representa la reflexión de una pulsación en un extremo libre de una cuerda tensa, es decir, en el extremo que tiene libertad de moverse transversalmente. El extremo de la cuerda está unido a un aro muy ligero que puede deslizarse libremente sin fricción a lo largo de una barra transversal. Cuando la pulsación llega al extremo libre, ejerce una fuerza sobre el elemento de la cuerda allí situado. Este elemento se acelera, y (como en el caso de un péndulo) su movimiento lo lleva más allá del punto de equilibrio; se "pasa de largo" y ejerce una fuerza de reacción sobre la cuerda. Esto genera una pulsación que viaja de regreso a lo largo de la cuerda en dirección opuesta a la de la pulsación incidente. Una vez más tenemos una reflexión, pero ahora en un extremo libre. El extremo libre sufrirá obviamente el desplazamiento máximo de las partículas de la cuerda; un tren de ondas incidente y otro reflejado deben interferir constructivamente en ese punto si han de tener un máximo allí. De aquí que la onda reflejada esté siempre en fase con la onda incidente en ese punto. *En un extremo libre, una onda transversal se refleja sin cambiar de fase.*

La figura 23 muestra exposiciones de tiempo de los patrones de onda estacionaria que pueden obtenerse al sacudir una cuerda tensa que esté fija en un extremo.

Hasta ahora hemos supuesto que la onda se refleja en el extremo sin pérdida de intensidad. En la práctica encontramos que existe siempre una reflexión parcial y una transmisión parcial en cualquier frontera entre dos medios; por ejemplo, si observamos un trozo de vidrio de ventana ordinario, podemos ver que parte de la luz se refleja de regreso hacia uno y parte se transmite a través del vidrio. Podemos demostrar este efecto con ondas transversales en cuerdas amarrando juntas dos cuerdas de densidades de masa diferentes. Cuando una onda que viaja a lo largo de las cuerdas llega al punto en que las cuerdas están unidas, parte de la energía de la onda se transmite a la otra cuerda y parte se refleja de regreso. La amplitud de la onda reflejada es menor que la amplitud de la onda incidente original, porque la onda transmitida a la segunda cuerda transporta parte de la energía incidente.

Si la segunda cuerda tiene una densidad de masa mayor que la primera, la onda reflejada de regreso hacia la primera cuerda sufre aún un cambio de fase de 180° al ser

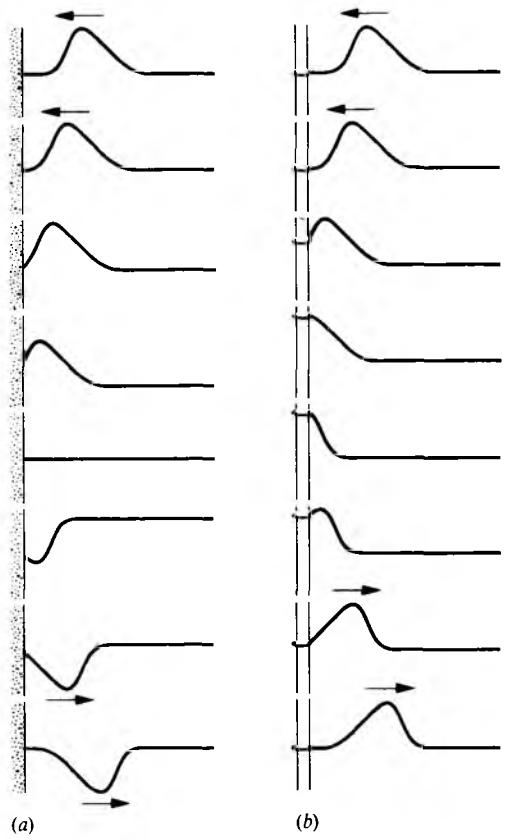



**Figura 22** (*a*) Una pulsación transversal incidente desde la derecha se refleja por una pared rígida. Nótese que la fase de la pulsación reflejada se invierte o se cambia en 180°. (*b*) Aquí el extremo de la cuerda puede moverse con libertad, estando unida la cuerda a un aro que puede deslizarse libremente a lo largo de la barra. La fase de la pulsación reflejada no cambia.

reflejada. Pero a causa de que su amplitud es menor que la de la onda incidente, el punto frontera no es un nodo y se mueve. Ocurre así una transferencia neta de energía a lo largo de la primera cuerda hacia la segunda. Si la segunda cuerda tiene una densidad de masa menor que la primera, ocurre una reflexión parcial sin cambio de fase, pero una vez más se transmite energía hacia la segunda cuerda. En la práctica, la mejor manera de comprobar un "extremo libre" en una cuerda consiste en amarrarla a otra cuerda larga y mucho más ligera. La energía transmitida es despreciable, y la segunda cuerda sirve para mantener la tensión en la primera.

Nótese que la onda transmitida viaja con una velocidad diferente de la de las ondas incidente y reflejada. La velocidad de la onda está determinada por la relación $v = \sqrt{F/\mu}$; la tensión es la misma en ambas cuerdas, pero sus densidades son diferentes. De aquí que la onda viaje más lentamente en la cuerda más densa. La frecuencia de la onda transmitida es la misma que la de las ondas incidente y reflejada. (Si no fuera esto así, existiría una

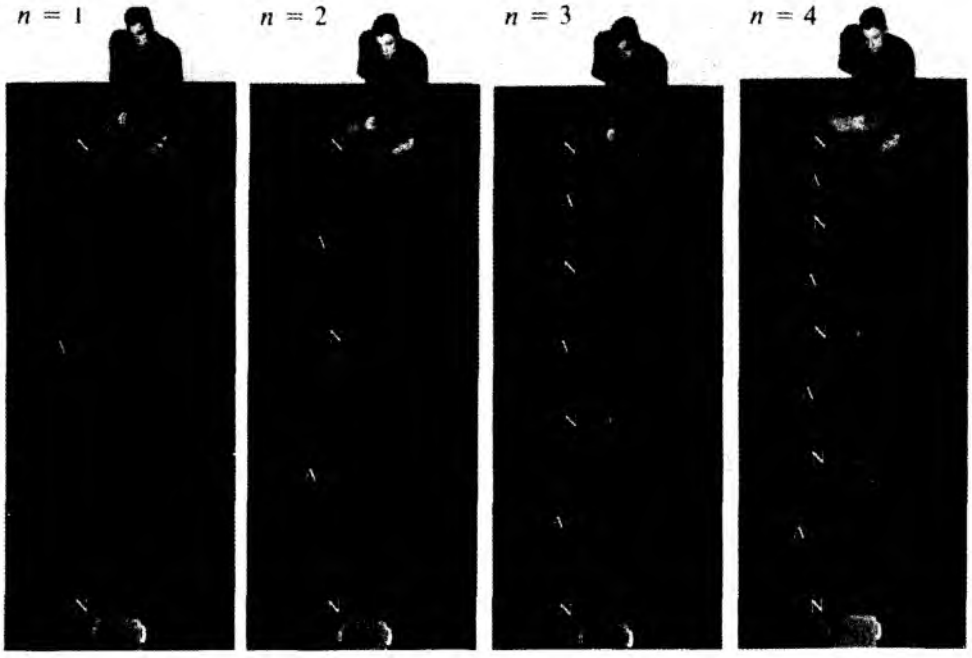



**Figura 23** Un estudiante sacude una cuerda tensa (en realidad un tubo de hule) a cuatro frecuencias resonantes, produciendo cuatro patrones diferentes de ondas estacionarias.

discontinuidad en el punto en que las cuerdas están unidas.) Las ondas, que tienen la misma frecuencia pero viajan con velocidades diferentes, tienen longitudes de onda diferentes. Partiendo de la relación $\lambda = v/\nu$, concluimos que la longitud de onda es más corta en la cuerda más densa, donde $v$ es más pequeña. Este fenómeno de cambio de longitud de onda al pasar la onda de un medio a otro lo encontraremos con frecuencia en nuestro estudio de las ondas de luz. También se presenta en las ondas de sonido: una cuerda, como la de una guitarra, vibra con cierta frecuencia y cierta longitud de onda; la onda transmitida al aire tiene la misma frecuencia que la de la cuerda, pero una longitud de onda diferente, debido a que la velocidad de las ondas de la cuerda difiere de su velocidad en el aire.

## 19-10 RESONANCIA

Veamos de nuevo los patrones de la onda estacionaria de la figura 23. Podemos ver que pueden presentarse cuatro ondas estacionarias diferentes. El espaciamiento entre los nodos difiere en los cuatro patrones, y puesto que la longitud de onda es el doble de la distancia entre nodos adyacentes, la longitud de onda difiere también. Por otra parte, la velocidad de fase es la misma en las cuatro situaciones, estando determinada únicamente por la tensión de la cuerda. La relación $v = \lambda\nu$ nos dice entonces que si $v$ es constante y $\lambda$ cambia, la frecuencia $\nu$ debe ser ciertamente diferente para las diferentes ondas estacionarias. En las fotografías, el estudiante debe estar por lo tanto sacudiendo la cuerda a ciertas frecuencias diferentes pero bien definidas.

Las fotos de la figura 23 parecen mostrar un sistema con nodos en ambos extremos. (Si el estudiante está sacudiendo la cuerda en un extremo, lo hace con una amplitud muy pequeña de modo que el extremo sea aproximadamente un nodo.) El espaciamiento entre nodos es siempre de la mitad de la longitud de onda, de modo que la condición para que en la cuerda se produzca una onda estacionaria es que la longitud $L$ de la cuerda sea igual a un número entero $n$ de medias longitudes de onda:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 1,2,3, \ldots)$$

o bien

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1,2,3, \ldots). \tag{43}$$

En términos de la frecuencia, podemos escribir la ecuación 43 como:

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} \qquad (n = 1,2,3, \ldots). \tag{44}$$

Es decir, el estudiante debe sacudir la cuerda a estas frecuencias particulares (correspondiendo a $n = 1$, 2, 3, y 4) para producir las ondas estacionarias.

Podemos considerar que las frecuencias de la ecuación 44 son las *frecuencias naturales* del sistema oscilatorio (la cuerda). Cuando la frecuencia de la fuerza impulsora (la mano del estudiante) concuerda con las frecuencias naturales permitidas, se produce una onda estacionaria y el sistema comienza a moverse con una gran amplitud. Ésta es la condición de *resonancia* que estudiamos anteriormente en la sección 15-9.

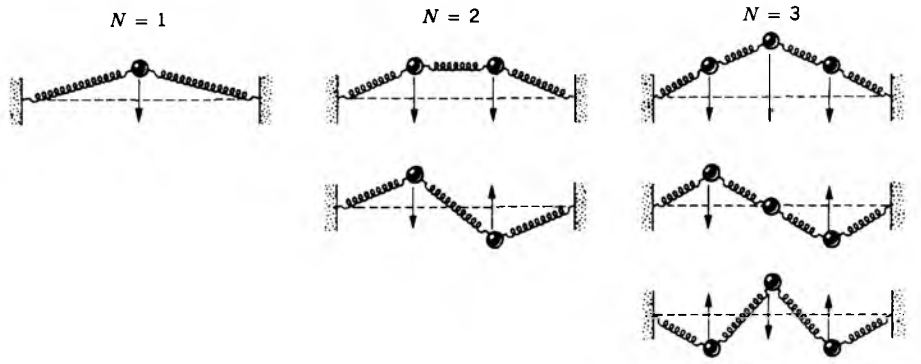



**Figura 24** Algunos patrones de oscilación de un oscilador que tiene elementos concentrados, estando conectados los cuerpos oscilatorios en este caso mediante resortes de masa despreciable. Cada patrón de movimiento diferente tiene una frecuencia natural diferente, siendo el número de frecuencias naturales igual al número de cuerpos oscilatorios.

Un bloque colgado de un resorte es también capaz de resonar, pero únicamente a una sola frecuencia. ¿Por qué entonces tiene la cuerda tensa un número infinito de frecuencias resonantes? En el sistema bloque-resorte la inercia (el bloque) está concentrada ("amontonada") en una parte del sistema mientras qué la elasticidad (el resorte) está concentrada en otra. Se dice que tal sistema resonante tiene elementos *concentrados*. Por otra parte, se dice que la cuerda tensa tiene elementos *distribuidos*, porque cada parte de la cuerda tiene propiedades tanto inerciales como elásticas. Son muchas las formas posibles en que la cuerda puede almacenar sus energías cinética y potencial, en contraste con sólo una única manera en el sistema bloque-resorte. Un sistema concentrado de $N$ objetos tiene $N$ frecuencias naturales, cada una de las cuales corresponde a un patrón de oscilación diferente (Fig. 24). El límite cuando $N$ tiende al infinito nos conduce al sistema completamente distribuido de la cuerda tensa, con su número infinito de frecuencias resonantes.

Si la cuerda vibratoria de la figura 23 se pusiera en movimiento y luego se dejara sola, las vibraciones desaparecerían en forma gradual. El movimiento de la cuerda está amortiguado por la disipación de energía a través de los soportes en los extremos y por la resistencia del aire al movimiento. Para mantener la vibración, el estudiante debe suministrar cierta energía al sistema aplicando una fuerza impulsora. Cuando la frecuencia impulsora es muy diferente a la de las frecuencias resonantes, la onda reflejada hace que la cuerda efectúe un trabajo sobre la mano del estudiante; de esta manera, la cuerda pierde energía, a lo que hay que añadir la pérdida por amortiguamiento. En la resonancia, el movimiento de la mano del estudiante está en fase con el de la cuerda, y la cuerda no pierde energía a causa del trabajo efectuado sobre la mano del estudiante. Toda la energía suministrada por el estudiante, menos la pérdida por amortiguamiento, se almacena en la oscilación, y el resultado es un movimiento de una gran amplitud. Finalmente, se llega a una situación estable en la que la energía suministrada por la fuerza impulsora equilibra exactamente las pérdidas debidas al amortiguamiento.

Este movimiento es análogo al del oscilador armónico amortiguado que hemos estudiado en la sección 15-9. La frecuencia resonante es casi, pero no exactamente, una frecuencia natural de la cuerda. Los nodos aparentes no son verdaderos nodos, porque la energía debe estar fluyendo por ellos a lo largo de la cuerda para compensar las pérdidas debidas al amortiguamiento. Si no existiera un amortiguamiento, la frecuencia resonante sería exactamente una frecuencia natural, y la amplitud aumentaría sin límite al continuar siendo suministrada energía a la cuerda. Finalmente, se excedería el límite elástico y la cuerda se rompería. (El límite elástico puede excederse aunque haya amortiguamiento presente, como se mostró en la figura 21 del capítulo 15.)

Si el estudiante sacude la cuerda con una frecuencia que difiera de una de las frecuencias naturales del sistema, la onda reflejada regresa a la mano del estudiante fuera de fase con el movimiento de la mano. En este caso, la cuerda efectúa un trabajo sobre la mano, en adición al que la mano efectúa sobre la cuerda. No se produce ningún patrón fijo de onda estacionaria. La amplitud del movimiento resultante es pequeña y no muy diferente a la del movimiento de la mano del estudiante. Esta situación es análoga al movimiento errático de un columpio que sea impulsado con una frecuencia diferente a la natural; el desplazamiento resultante del columpio es bastante pequeño.

En la resonancia, la cuerda absorbe tanta energía como puede de la mano del estudiante. Esto sucede así en todo sistema vibratorio. Al sintonizar un aparato de radio, la frecuencia natural de un circuito electrónico se cambia

hasta que concuerda con una frecuencia particular de las ondas de radio que estén siendo transmitidas por la estación. En ese momento el circuito resuena con la señal y absorbe tanta energía de la señal como puede. Otras condiciones de resonancia similares se presentan en el sonido, el electromagnetismo, la óptica, y las físicas atómica y nuclear.

En el capítulo siguiente consideraremos con mayor detalle la importancia de la resonancia para entender las propiedades de diferentes instrumentos musicales y la manera en que se producen sus sonidos característicos. Si bien en esta sección hemos utilizado una cuerda vibrante como ejemplo de un sistema vibratorio, los princípios estudiados aquí se aplican a todos los sistemas vibratorios que puedan mantener un movimiento ondulatorio.

**Problema muestra 6** En el arreglo de la figura 25, un vibrador pone en movimiento a la cuerda con una frecuencia de 120 Hz. La cuerda tiene una longitud de $L$ = 1.2 m, y su densidad de masa lineal es de 1.6 g/m. ¿A qué valor debe ajustarse la tensión (aumentando el peso colgante) para obtener el patrón de movimiento de cuatro rizos?

**Solución** Para hallar la tensión, podemos sustituir a la ecuación 18 por la ecuación 44 y obtener

$$F = \frac{4L^2\nu^2\mu}{n^2}.$$

Se encuentra que la tensión correspondiente a $n = 4$ (para cuatro rizos) es

$$F = \frac{4(1.2\text{ m})^2(120\text{ Hz})^2(0.0016\text{ kg/m})}{4^2} = 8.3\text{ N}.$$

Esto corresponde a un peso colgante de unas 2 lb.

**Problema muestra 7** Una cuerda de violín sintonizada en la nota *la* (440 Hz) tiene una longitud de 0.34 m. (*a*) ¿Cuáles son las tres longitudes de onda más largas de las resonancias de la cuerda? (*b*) ¿Cuáles son las longitudes de onda correspondientes que llegan al oído del oyente?

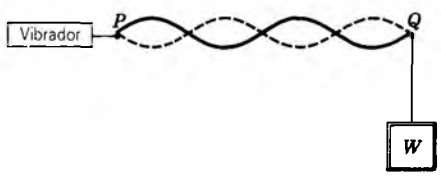



**Figura 25** Problema muestra 6. Una cuerda sometida a tensión está conectada a un vibrador. A una frecuencia fija del vibrador, los patrones de la onda estacionaria ocurrirán para ciertos valores discretos de la tensión en la cuerda.

**Solución** (*a*) Las longitudes de onda resonantes de una cuerda de longitud $L$ = 0.34 m pueden hallarse directamente de la ecuación 43:

$$\lambda_1 = 2L/1 = 2(0.34\text{ m}) = 0.68\text{ m},$$
$$\lambda_2 = 2L/2 = 0.34\text{ m},$$
$$\lambda_3 = 2L/3 = 0.23\text{ m}.$$

(*b*) Cuando una onda pasa de un medio (la cuerda) a otro (el aire) de velocidad de onda diferente, la frecuencia permanece igual, pero la longitud de onda cambia. La ecuación 19 da la relación entre las longitudes de onda. Para hallar la velocidad de onda de la cuerda, observamos que en el modo resonante más bajo $\nu$ = 440 Hz y $\lambda$ = 0.68 m, de modo que

$$v = \nu\lambda = (440\text{ Hz})(0.68\text{ m}) = 299\text{ m/s}.$$

En el aire, la velocidad de la onda es de 343 m/s, y partiendo de la ecuación 19 obtenemos

$$\lambda_{\text{aire}} = \lambda_{\text{cuerda}}\frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{cuerda}}} = \lambda_{\text{cuerda}}\frac{343\text{ m/s}}{299\text{ m/s}} = 1.15\lambda_{\text{cuerda}}.$$

Entonces hallamos que las longitudes de onda en el aire son:

$$\lambda_1 = 0.78\text{ m}, \qquad \lambda_2 = 0.39\text{ m}, \qquad \lambda_3 = 0.26\text{ m}.$$

## PREGUNTAS

1. ¿Cómo podría usted probar experimentalmente que la energía se halla asociada a una onda?
2. La energía puede transferirse por partículas y por ondas. ¿Cómo podemos distinguir experimentalmente entre estos métodos de transferencia de la energía?
3. ¿Puede generarse un movimiento ondulatorio en el que las partículas del medio vibren con un movimiento angular armónico simple? De ser así, explique cómo y describa la onda.
4. Al analizar el movimiento de una onda elástica a través de un medio material, a menudo despreciamos la estructura molecular de la materia. ¿Cuándo se justifica esto y cuándo no?
5. ¿Cómo varían la amplitud y la intensidad de las ondas de la superficie del agua con la distancia desde la fuente?
6. ¿Cómo podemos crear ondas planas? ¿Y ondas esféricas?
7. Al pasar un bote de motor crea una estela que causa ondas que bañan la orilla. Al paso del tiempo, el periodo de las ondas que llegan se hace cada vez más corto. ¿Por qué?
8. Las siguientes funciones en las que $A$ es una constante son de la forma $y = f(x \pm vt)$:

$$y = A(x - vt), \qquad y = A(x + vt)^2,$$
$$y = A\sqrt{x - vt}, \qquad y = A\ln(x + vt).$$

Explique por qué estas funciones no son útiles en el movimiento ondulatorio.

9. ¿Puede uno producir en una cuerda una forma de onda que tenga una discontinuidad en la pendiente en un punto, es decir, una esquina aguda? Explique.
10. La ley del cuadrado inverso no se aplica exactamente a la disminución de la intensidad de los sonidos con la distancia. ¿Por qué?
11. Cuando dos ondas interfieren entre sí, ¿altera una el progreso de la otra?
12. Cuando dos ondas interfieren entre sí, ¿existe pérdida de energía? Explique su respuesta.
13. ¿Por qué no observamos efectos de interferencia entre los haces de luz emitidos por dos lámparas de mano o entre las ondas de sonido emitidas por dos violines?
14. Como lo muestra la figura 20, la configuración de las ondas estacionarias en una cuerda tensa es una línea recta dos veces durante el ciclo, exactamente como sería si la cuerda no vibrara en absoluto. Explique desde el punto de vista de la conservación de la energía.
15. Dos ondas de la misma amplitud y frecuencia están viajando en la misma cuerda. En cierto momento la cuerda se asemeja a una línea recta. ¿Viajan las dos ondas necesariamente en la misma dirección? ¿Cuál es la relación de fase entre las dos ondas?
16. Si dos ondas difieren únicamente en amplitud y se propagan en direcciones opuestas a través de un medio, ¿producirán ondas estacionarias? ¿Se transporta energía? ¿Existen nodos?
17. La reflexión parcial de la energía ondulatoria a causa de discontinuidades en la trayectoria de transmisión es usualmente disipante y puede reducirse a un mínimo por medio de la inserción de aparatos de "igualación de la impedancia" entre las secciones de la trayectoria que limitan con la discontinuidad. Por ejemplo, un megáfono ayuda a igualar la columna de aire de boca y garganta con el aire afuera de la boca. Dé otros ejemplos y explique cualitativamente cómo tales aparatos minimizan las pérdidas por reflexión.
18. Considere que las ondas estacionarias de una cuerda son una superposición de ondas viajeras y explique, usando ideas de superposición, por qué no existen nodos reales en la cuerda resonante de la figura 25, ni siquiera en el extremo "fijo". (*Sugerencia:* Considere los efectos del amortiguamiento.)
19. Las ondas estacionarias de una cuerda se demuestran por medio de un arreglo como el de la figura 25. La cuerda es iluminada por una lámpara fluorescente y el vibrador está impulsado por la misma toma eléctrica que energiza a la lámpara. La cuerda exhibe una variación curiosa del color en dirección transversal. Explique.
20. En la discusión sobre las ondas transversales de una cuerda, hemos tratado únicamente con desplazamientos en un solo plano, el plano $xy$. Si todos los desplazamientos están en un plano, se dice que la onda es *planamente polarizada*. ¿Pueden existir desplazamientos en otro plano que aquél con el que tratamos? De ser así, ¿pueden combinarse las ondas polarizadas en dos planos diferentes? ¿Qué apariencia tendría tal combinación de ondas?
21. Una onda transmite energía. ¿Transfiere ímpetu? ¿Puede transferir ímpetu angular? (Véase "Energy and Momentum Transport in String Waves", por D. W. Juenker, *American Journal of Physics*, enero de 1976, pág. 94).
22. En el terremoto de la Ciudad de México ocurrido el 19 de septiembre de 1985, se alternaron zonas de mucho daño con zonas de poco daño. También, los edificios de entre 5 y 15 pisos de altura sufrieron el daño mayor. Explique estos efectos en términos de las ondas estacionarias y de la resonancia.

## PROBLEMAS

### *Sección 19-3 Ondas viajeras*

1. Una onda tiene una velocidad de onda de 243 m/s y una longitud de onda de 3.27 cm. Calcule (*a*) la frecuencia y (*b*) el periodo de la onda.
2. Al mecer un bote, un niño produce ondas de agua en la superficie de un lago previamente tranquilo. Se observa que el bote produce 12 oscilaciones en 30 s y también que la cresta de una onda determinada llega en 5 s a la orilla, que está alejada 15 m. Halle (*a*) la frecuencia, (*b*) la velocidad, y (*c*) la longitud de onda de las ondas.
3. Una onda sinusoidal viaja a lo largo de una cuerda. El tiempo para que un punto en particular se mueva desde el desplazamiento máximo hasta el desplazamiento cero es de 178 ms. La longitud de onda de la onda es de 1.38 m. Halle (*a*) el periodo, (*b*) la frecuencia, y (c) la velocidad de la onda.
4. Escriba una expresión que describa a una onda transversal que viaje a lo largo de una cuerda en la dirección $+x$ con una longitud de onda de 11.4 cm, una frecuencia de 385 Hz, y una amplitud de 2.13 cm.
5. Escriba la ecuación de una onda que viaje en dirección negativa a lo largo del eje $x$ y tenga una amplitud de 1.12 cm, una frecuencia de 548 Hz, y una velocidad de 326 m/s.
6. Una onda de 493 Hz de frecuencia tiene una velocidad de 353 m/s. (*a*) ¿A qué distancia entre sí están dos puntos que difieran en fase por 55.0°? (*b*) Halle la diferencia de fase entre dos desplazamientos en el mismo punto pero en tiempos que difieran en 1.12 ms.

### *Sección 19-4 Velocidad de onda*

7. Demuestre (*a*) que la velocidad transversal máxima de una partícula de una cuerda debida a una onda viajera está dada

por $u_{max} = \omega y_m$, y (*b*) que la aceleración transversal máxima es $a_{max} = \omega^2 y_m$.

**8.** La ecuación de una onda transversal que viaja a lo largo de una cuerda está dada por

$$y = (2.30 \times 10^{-3}) \text{ sen } (18.2x - 588t),$$

donde $x$ y $y$ están en metros y $t$ está en segundos. Halle (*a*) la amplitud, (*b*) la frecuencia, (*c*) la velocidad, (*d*) la longitud de onda de la onda, y (*e*) la velocidad transversal máxima de una partícula de la cuerda.

**9.** La ecuación de una onda transversal que viaja a lo largo de una cuerda muy larga está dada por $y = 6.0 \text{ sen } (0.020\pi x + 4.0\pi t)$, donde $x$ y $y$ están expresadas en centímetros y $t$ en segundos. Calcule (*a*) la amplitud, (*b*) la longitud de onda, (*c*) la frecuencia, (*d*) la velocidad, (*e*) la dirección de propagación de la onda, y (*f*) la velocidad transversal máxima de una partícula de la cuerda.

**10.** Calcule la velocidad de una onda transversal en una cuerda de 2.15 m de longitud y 62.5 g de masa bajo una tensión de 487 N.

**11.** La velocidad de una onda de una cuerda es 1de 72 m/s cuando la tensión es de 123 N. ¿En qué valor deberá ser aumentada la tensión con objeto de elevar la velocidad de la onda a 180 m/s?

**12.** Demuestre que, en términos del esfuerzo de tensión $S$ y de la densidad de masa $\rho$, la velocidad $v$ de las ondas transversales de un alambre está dada por $v = (S/\rho)^{1/2}$.

**13.** La ecuación de una onda transversal de una cuerda es $y = 1.8 \text{ sen } (23.8x + 317t)$, donde $x$ está en metros, $y$ está en milímetros, y $t$ en segundos. La cuerda está sometida a una tensión de 16.3 N. Halle la densidad de masa lineal de la cuerda.

**14.** Una onda sinusoidal continua viaja por una cuerda con una velocidad de 82.6 cm/s. Se halla que el desplazamiento de las partículas de la cuerda en $x = 9.60$ cm varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación $y = 5.12 \text{ sen } (1.16 - 4.08t)$, donde $y$ está en centímetros y $t$ en segundos. La densidad de masa lineal de la cuerda es de 3.86 g/cm. (*a*) Halle la frecuencia de la onda. (*b*) Halle la longitud de onda de la onda. (*c*) Escriba la ecuación general que da el desplazamiento transversal de las partículas de la cuerda en función de la posición y del tiempo. (*d*) Calcule la tensión en la cuerda.

**15.** Una onda transversal armónica simple se está propagando a lo largo de una cuerda hacia la izquierda (ó $-x$). La figura 26 muestra un trazo del desplazamiento en función de la posición en el tiempo $t = 0$. La tensión de la cuerda es de 3.6 N y su densidad lineal es de 25 g/m. Calcule (*a*) la amplitud, (*b*) la longitud de onda, (*c*) la velocidad de la onda, (*d*) el periodo, y (*e*) la velocidad máxima de una partícula de la cuerda. (*f*) Escriba una ecuación que describa a la onda viajera.

**16.** Pruebe que la pendiente de una cuerda en cualquier punto es numéricamente igual a la razón entre la velocidad de la partícula y la velocidad de la onda en ese punto.

**17.** Para una onda en una cuerda tensa, halle la razón entre la velocidad máxima de una partícula (la velocidad máxima con la cual una sola partícula del cordón se mueve transversalmente a la onda) y la velocidad de la onda. Si una onda que tiene cierta frecuencia y cierta amplitud actúa sobre un cordón, ¿dependería esta razón de velocidades del material de que esté hecha la cuerda, por ejemplo de alambre o de nylon?

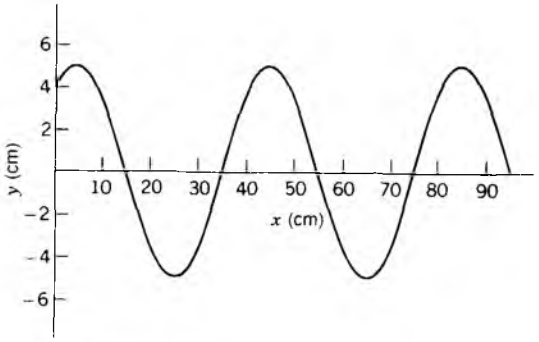



**Figura 26** Problema 15.

**18.** En la figura 27*a*, la cuerda #1 tiene una densidad de masa lineal de 3.31 g/m, y la cuerda #2 tiene una densidad de masa lineal de 4.87 g/m. Están bajo tensión debido al bloque colgante de masa $M = 511$ g. (*a*) Calcule la velocidad de la onda en cada cuerda. (*b*) El bloque se divide ahora en dos bloques (siendo $M_1 + M_2 = M$) y el aparato se modifica como se muestra en la figura 27*b*. Halle $M_1$ y $M_2$, de modo que las velocidades de onda de las dos cuerdas sean iguales.

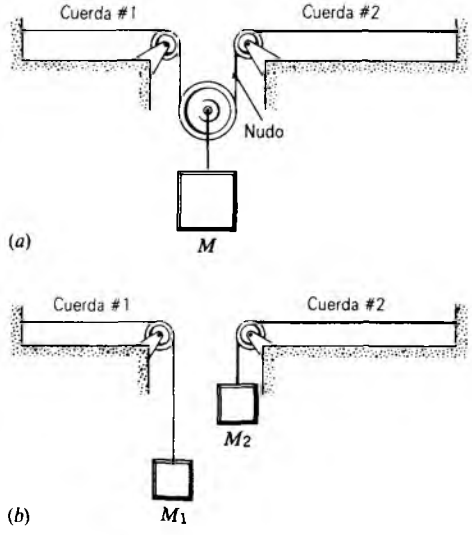



**Figura 27** Problema 18.

**19.** Un alambre de 10.3 m de longitud y una masa de 97.8 g se estira bajo una tensión de 248 N. Si se generan dos pulsaciones, separadas en tiempo por 29.6 ms, una en cada extremo del alambre, ¿en dónde se encuentran las pulsaciones?

**20.** Halle la velocidad de la onda transversal más rápida que puede ser enviada a lo largo de un alambre de acero.

Permitiendo un factor de seguridad razonable, el esfuerzo máximo de tensión al que podrían estar sujetos los alambres de acero es de 720 MPa. La densidad del acero es de 7.80 g/cm$^3$. Demuestre que la respuesta no depende del diámetro del alambre.

**21.** El tipo de banda de hule empleado en el interior de algunas bolas de béisbol y de algunas pelotas de golf obedece la ley de Hooke dentro de un amplio intervalo de elongaciones de la banda. Un segmento de este material tiene una longitud $L$ sin estirar y una masa $m$. Cuando se aplica una fuerza $F$, la banda se estira una longitud adicional $\Delta L$. (*a*) ¿Cuál es la velocidad (en términos de $m$, $\Delta L$, y la constante de fuerza $k$) de las ondas transversales en esta banda de hule? (*b*) Usando la respuesta de (*a*), demuestre que el tiempo requerido para que una pulsación transversal viaje la longitud de la banda de hule es proporcional a $1/\sqrt{\Delta L}$ si $\Delta L \ll L$ y es constante si $\Delta L \gg L$.

**22.** Un cable uniforme de masa $m$ y longitud $L$ cuelga de un techo. (*a*) Demuestre que la velocidad de una onda transversal en el cable es una función de $y$, la distancia desde el extremo inferior, y está dada por $v = \sqrt{gy}$. (*b*) Demuestre que el tiempo que le toma a una onda transversal viajar la longitud del cable está dada por $t = 2\sqrt{L/g}$. (*c*) ¿Afecta la masa real del cable a los resultados de (*a*) y de (*b*)?

**23.** Un alambre no uniforme de longitud $L$ y masa $M$ tiene una densidad de masa lineal variable dada por $\mu = kx$, donde $x$ es la distancia desde un extremo del alambre y $k$ es una constante. (*a*) Demuestre que $M = kL^2/2$. (*b*) Demuestre que el tiempo $t$ requerido para que una pulsación generada en un extremo del alambre viaje hasta el otro extremo está dado por $t = \sqrt{8ML/9F}$, donde $F$ es la tensión en el alambre.

**24.** Un aro de cuerda circular y uniforme gira en sentido horario en ausencia de la gravedad (véase la Fig. 28). La velocidad tangencial es $v_0$. Halle la velocidad de las ondas en esta cuerda. (*Nota:* La respuesta es independiente del radio del aro y de la densidad de masa lineal de la cuerda.)

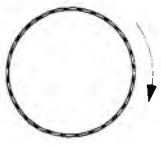


**Figura 28** Problema 24.

### *Sección 19-6 Potencia e intensidad en el movimiento ondulatorio*

**25.** Una cuerda de 2.72 m de longitud tiene una masa de 263 g. La tensión en la cuerda es de 36.1 N. ¿Cuál debe ser la frecuencia de las ondas viajeras de amplitud de 7.70 mm para que la potencia promedio transmitida sea de 85.5 W?

**26.** Una fuente lineal emite una onda cilíndrica expansiva. Suponiendo que el medio no absorbe energía, encuentre (*a*) cómo dependen la intensidad y (*b*) la amplitud de la onda de la distancia medida desde la fuente.

**27.** Una onda se propaga uniformemente en todas direcciones desde un punto fuente. (*a*) Justifique la expresión para el desplazamiento $y$ del medio a una distancia $r$ desde la fuente:

$$y = \frac{Y}{r} \operatorname{sen} k(r - vt).$$

Considere la velocidad, dirección de propagación, periodicidad e intensidad de la onda. (*b*) ¿Qué dimensiones tiene la constante $Y$?

**28.** Un observador mide una intensidad de 1.13 W/m$^2$ a una distancia desconocida medida desde una fuente de ondas esféricas cuya potencia de salida es también desconocida. El observador camina 5.30 m acercándose a la fuente y mide entonces una intensidad de 2.41 W/m$^2$ en esta nueva posición. Calcule la potencia de salida de la fuente.

**29.** (*a*) Muestre que la intensidad $I$ es el producto de la densidad de energía $u$ (energía por unidad de volumen) y la velocidad de propagación $v$ de una perturbación ondulatoria; o sea muestre que $I = uv$. (*b*) Calcule la densidad de energía en una onda de sonido a 4.82 km de una sirena de 47.5 kW, suponiendo que las ondas son esféricas, la propagación isotrópica sin haber una absorción atmosférica, y que la velocidad del sonido es de 343 m/s.

**30.** Una onda sinusoidal transversal se genera en un extremo de una cuerda larga, horizontal por una barra que se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de una distancia de 1.12 cm. El movimiento es continuo y se repite regularmente 120 veces por segundo. La cuerda tiene una densidad lineal de 117 g/m y se mantiene bajo una tensión de 91.4 N. Halle (*a*) el valor máximo de la velocidad transversal $u$ y (*b*) el valor máximo de la componente transversal de la tensión. (*c*) Demuestre que los dos valores máximos calculados arriba ocurren a los mismos valores de fase de la onda. ¿Cuál es el desplazamiento transversal $y$ de la cuerda en estas fases? (*d*) ¿Cuál es la potencia máxima transferida a lo largo de la cuerda? (*e*) ¿Cuál es el desplazamiento transversal $y$ para las condiciones bajo las cuales ocurre esta transferencia máxima de potencia? (*f*) ¿Cuál es la transferencia mínima de potencia a lo largo de la cuerda? (*g*) ¿Cuál es el desplazamiento transversal $y$ para las condiciones bajo las cuales ocurre esta transferencia mínima de potencia?

### *Sección 19-8 Interferencia de ondas*

**31.** ¿Qué diferencia de fase entre dos ondas transversales por lo demás idénticas, que se mueven en la misma dirección a lo largo de una cuerda tensa, resultará en la onda combinada que tenga una amplitud de 1.65 veces la de la amplitud común de las dos ondas componentes? Exprese la respuesta tanto en grados como en radianes.

**32.** Determine la amplitud de la onda resultante cuando se combinan dos ondas sinusoidales que tengan la misma frecuencia y viajen en la misma dirección, si sus amplitudes son de 3.20 cm y 4.19 cm y difieren en fase en $\pi/2$ rad.

**33.** Dos pulsaciones están viajando a lo largo de una cuerda en direcciones opuestas, como se muestra en la figura 29. (*a*) Si la velocidad de onda es de 2.0 m/s y las pulsaciones tienen una separación de 6.0 cm, trace los patrones des-

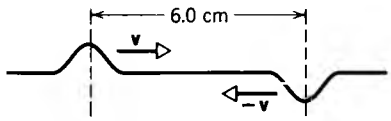



**Figura 29** Problema 33.

pués de 5.0, 10, 15, 20, y 25 ms. (*b*) ¿Qué le ha sucedido a la energía en $t$ = 15 ms?

**34.** Tres ondas sinusoidales viajan en dirección $x$ positiva a lo largo de la misma cuerda. Las tres ondas tienen la misma frecuencia. Sus amplitudes están en la razón $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ y sus ángulos de fase son 0, $\pi/2$, y $\pi$, respectivamente. Trace la forma de onda resultante y discuta su comportamiento al crecer $t$.

**35.** Cuatro ondas sinusoidales viajan en la dirección positiva de $x$ a lo largo de la misma cuerda. Sus frecuencias están en la razón 1:2:3:4 y sus amplitudes en la razón $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$, respectivamente. Cuando $t$ = 0, en $x$ = 0, la primera y la tercera onda están 180° fuera de fase con la segunda y la cuarta. Trace la forma de onda resultante cuando $t$ = 0 y discuta su comportamiento al crecer $t$.

**36.** Considere dos fuentes puntuales $S_1$ y $S_2$ en la figura 30, las cuales emiten ondas de la misma frecuencia y amplitud. Las ondas se inician con la misma fase, y esta relación de fase en las fuentes se mantiene a través del tiempo. Considere puntos $P$ en los cuales $r_1$ sea casi igual a $r_2$. (*a*) Demuestre que la superposición de estas dos ondas produce una onda cuya amplitud $y_m$ varía con la posición $P$ aproximadamente de acuerdo con

$$y_m = \frac{2Y}{r}\cos\frac{k}{2}(r_1 - r_2),$$

donde $r = (r_1 + r_2)/2$. (*b*) Demuestre luego que la cancelación total ocurre cuando $r_1 - r_2 = (n + \frac{1}{2})\lambda$, siendo $n$ cualquier entero, y que el refuerzo total ocurre cuando $r_1 - r_2 = n\lambda$. El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia en distancia desde dos puntos fijos es constante es una hipérbola, siendo los puntos fijos los focos. De aquí que cada valor de $n$ produzca una línea hiperbólica de interferencia constructiva y una línea hiperbólica de interferencia destructiva. En los puntos en que $r_1$ y $r_2$ no son aproximadamente iguales (como cerca de las fuentes), las amplitudes de las ondas de $S_1$ y $S_2$ difieren y las cancelaciones son solamente parciales. (Ésta es la base del sistema de navegación OMEGA.)

**37.** Una fuente $S$ y un detector $D$ de ondas de alta frecuencia están a una distancia $d$ en el suelo. Se detecta que la onda dirigida desde $S$ está en fase en $D$ con la onda que parte de $S$, que se refleja por una capa horizontal situada a una altitud $H$ (Fig. 31). Los rayos incidente y reflejado forman el mismo ángulo con la capa reflectora. Cuando la capa se eleva una distancia $h$, no se detecta ninguna señal en $D$. Desprecie la absorción de la atmósfera y halle la relación entre $d$, $h$, $H$, y la longitud de onda $\lambda$ de las ondas.

**38.** Refiérase al problema 37 y a la figura 31. Suponga que $d$ = 230 km y $H$ = 510 km. Las ondas son ondas de radio de 13.0 MHz ($v = 3.00 \times 10^8$ m/s). En el detector $D$ la intensidad de la señal combinada varía desde un máximo hasta cero y regresa de nuevo a un máximo seis veces en 1 minuto. ¿Con qué velocidad vertical se está moviendo la capa reflectora? (La capa se mueve lentamente, de modo que la distancia vertical desplazada en 1 min es pequeña en comparación con $H$ y $d$.)

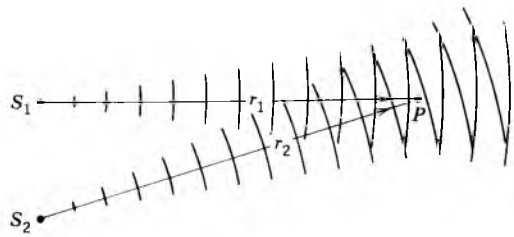



**Figura 30** Problema 36.

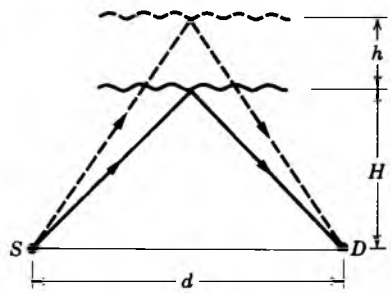



**Figura 31** Problemas 37 y 38

### *Sección 19-9 Ondas estacionarias*

**39.** Una cuerda fija en ambos extremos tiene una longitud de 8.36 m y una masa de 122 g. Está sujeta a una tensión de 96.7 N y se pone en vibración. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de las ondas en la cuerda? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria más larga posible? (*c*) Indique la frecuencia de esa onda.

**40.** Una cuerda de guitarra de nilón tiene una densidad de masa lineal de 7.16 g/m y está bajo una tensión de 152 N. Los soportes fijos están separados por 89.4 cm. La cuerda vibra según el patrón de onda estacionaria que se muestra en la figura 32. Calcule (*a*) la velocidad, (*b*) la longitud de onda, y (*c*) la frecuencia de las ondas componentes cuya superposición da lugar a esta vibración.

**41.** La ecuación de una onda transversal que viaja en una cuerda está dada por

$$y = 0.15 \text{ sen } (0.79x - 13t),$$

donde $x$ y $y$ están expresadas en metros y $t$ en segundos. (*a*) ¿Cuál es el desplazamiento en $x$ = 2.3 m, $t$ = 0.16 s? (*b*) Escriba la ecuación de una onda que, cuando se sume a la dada, produciría ondas estacionarias en la cuerda. (*c*) ¿Cuál es el desplazamiento de la onda estacionaria resultante en $x$ = 2.3 m, $t$ = 0.16 s?

**42.** Una cuerda vibra según la ecuación

$$y = 0.520 \text{ sen } (1.14x)\cos(137t),$$

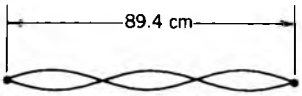



**Figura 32** Problema 40.

donde $x$ y $y$ están en centímetros y $t$ en segundos. (*a*) ¿Cuáles son la amplitud y la velocidad de las ondas componentes cuya superposición pueda dar lugar a esta vibración? (*b*) Halle la distancia entre nodos. (*c*) ¿Cuál es la velocidad de una partícula de la cuerda en posición $x$ = 1.47 cm en el tiempo $t$ = 1.36 s?

**43.** Las vibraciones que parten de un diapasón de 622 Hz producen ondas estacionarias en una cuerda sujeta en ambos extremos. La velocidad de la onda para la cuerda es de 388 m/s. La onda estacionaria tiene cuatro rizos y una amplitud de 1.90 mm. (*a*) ¿Cuál es la longitud de la cuerda? (*b*) Escriba una ecuación para el desplazamiento de la cuerda en función de la posición y del tiempo.

**44.** Considérese una onda estacionaria que sea la suma de dos ondas que viajan en direcciones opuestas pero por lo demás son idénticas. Demuestre que la energía cinética máxima en cada rizo de la onda estacionaria es $2\pi^2\mu y_m^2 v v$.

**45.** Una onda viajera incidente, de amplitud $A_i$, se refleja sólo parcialmente desde un extremo, siendo $A_r$ la amplitud de la onda reflejada. La superposición resultante de dos ondas de amplitudes diferentes que viajan en direcciones opuestas produce un patrón de ondas tipo onda estacionaria cuya envolvente se muestra en la figura 33. La *razón de onda estacionaria* (SWR, de *standing wave ratio*) se define como $(A_i + A_r)/(A_i - A_r) = A_{máx}/A_{mín}$, y el porcentaje de reflexión se define como la razón entre la potencia promedio en la onda reflejada y la potencia promedio en la onda incidente, multiplicada por 100. (*a*) Demuestre que la SWR = $\infty$ para el 100% de reflexión y que la SWR = 1 cuando no hay reflexión. (*b*) Demuestre que una medición de la SWR justo antes del extremo revela la reflexión porcentual que ocurre en el extremo de acuerdo con la fórmula

$$\%\text{ de reflejo} = [(\text{SWR} - 1)^2/(\text{SWR} + 1)^2](100).$$

**46.** Calcule (*a*) la SWR (razón de onda estacionaria) y (*b*) la reflexión porcentual en el extremo para la envolvente del patrón de onda estacionaria mostrado en la figura 33.

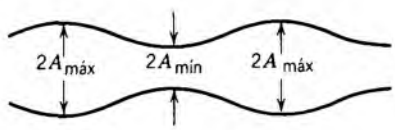



**Figura 33** Problemas 45 y 46.

**47.** Dos cuerdas de densidad de masa lineal $\mu_1$ y $\mu_2$ están anudadas entre sí en $x$ = 0 y estiradas a una tensión $F$. Una onda $y = A$ sen $k_1(x - v_1t)$ en la cuerda de densidad $\mu_1$ llega a la unión de las dos cuerdas, en donde parte se transmite por la cuerda de densidad $\mu_2$ parte se refleja. Llamemos a estas ondas $B$ sen $k_2(x - v_2t)$ y $C$ sen $k_1(x + v_1t)$, respectivamente. (*a*) Suponiendo que $k_2v_2 = k_1v_1 = \omega$ y que el desplazamiento del nudo que surge de las ondas incidente y reflejada sea el mismo que el que surge de la onda transmitida, demuestre que $A = B + C$. (*b*) Si se supone que ambas cuerdas tienen cerca del nudo la misma pendiente (¿por qué?), es decir, $dy/dx$ en la cuerda 1 = $dy/dx$ en la cuerda 2, demuestre que

$$C = A\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} = A\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}.$$

¿En qué condiciones es $C$ negativa?

### *Sección 19-10 Resonancia*

**48.** Una cuerda de violín de 15 cm, fija en ambos extremos, está vibrando en su modo $n$ = 1. La velocidad de las ondas en este alambre es de 250 m/s, y la velocidad del sonido en el aire es de 348 m/s. ¿Cuáles son (*a*) la frecuencia y (*b*) la longitud de onda de la onda sonora emitida?

**49.** ¿Cuáles son las tres frecuencias más bajas de las ondas estacionarias en un alambre de 9.88 m de longitud que tiene una masa de 0.107 kg, y que está estirado bajo una tensión de 236 N?

**50.** Un alambre de 1.48 m de longitud tiene una masa de 8.62 g y se halla bajo una tensión de 122 N. El alambre está sujeto rígidamente en ambos extremos y se pone en vibración. Calcule (*a*) la velocidad de las ondas en el alambre, (*b*) las longitudes de onda de las ondas que producen ondas estacionarias de uno y dos rizos en el alambre y (*c*) las frecuencias de las ondas en (*b*).

**51.** Un extremo de una cuerda de 120 cm se mantiene fijo. El otro extremo está unido a un anillo sin peso que puede deslizarse a lo largo de una barra sin fricción como se muestra en la figura 34. ¿Cuáles son las tres longitudes de onda más grandes posibles de ondas estacionarias en la cuerda? Trace las ondas estacionarias correspondientes.

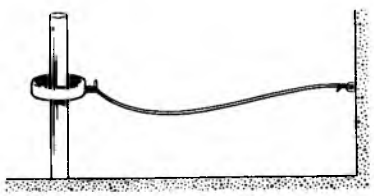


**Figura 34** Problema 51.

**52.** Una cuerda de 75.6 cm está estirada entre soportes fijos. Se observa que tiene frecuencias de resonancia de 420 y 315 Hz, y ninguna otra entre estas dos. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia más baja de esta cuerda? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de onda en esta cuerda?

**53.** En un experimento sobre ondas estacionarias, una cuerda de 92.4 cm de longitud se une al vástago de un diapasón eléctrico que vibra en dirección perpendicular a la longitud de la cuerda con una frecuencia de 60.0 Hz. La masa de la cuerda es 44.2 g. ¿A qué tensión debe someterse la

cuerda (en el otro extremo tiene conectadas a ella pesas) para que vibre con cuatro rizos?

**54.** Un alambre de aluminio de longitud $L = 60.0$ cm y área de la sección transversal $1.00 \times 10^{-2}$ cm$^2$ de área en su sección transversal está conectado a un alambre de acero de la misma área de su sección transversal. El alambre compuesto, cargado con un bloque de 10.0 kg de masa $m$, está dispuesto como se muestra en la figura 35 de modo que la distancia $L_2$ desde la junta a la polea de soporte es de 86.6 cm. Se inducen ondas trasversales en el alambre usando una fuente externa de frecuencia variable. (*a*) Halle la frecuencia de excitación de ondas estacionarias más baja observada de modo que la unión del alambre sea un nodo. (*b*) ¿Cuál es el número total de nodos observado a esta frecuencia, excluyendo los dos de los extremos del alambre? La densidad del aluminio es de 2.60 g/cm$^3$ y la del acero es de 7.80 g/cm$^3$.

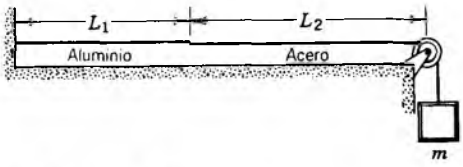



**Figura 35** Problema 54.

**55.** Una cuerda de piano de 1.4 m de longitud está hecha de acero con una densidad de 7.8 g/cm$^3$ y un módulo de Young de 220 MPa. La tensión en la cuerda produce una deformación de 1.0%. Calcule la frecuencia de resonancia más baja de la cuerda.

*Proyectos de computación*

**56.** (*a*) Inicialmente una cuerda tensa tiene una forma dada por $f_1(x) = 0.02e^{-(x-5)^2/9}$, en donde $f$ y $x$ están en metros. Supongamos una pulsación que se mueva con una velocidad $v = 25$ m/s en dirección $x$ positiva, de modo que el desplazamiento de la cuerda en la coordenada $x$ y en el tiempo $t$ esté dada por $y_1(x,t) = f(x - vt) = 0.02e^{-(x-vt-5)^2/9}$. Úsese un programa de computación o una hoja de cálculo para trazar $y_1(x,t)$ en función de $x$ desde $x = 0$ hasta $x = 50$ m para $t = 0$, 0.5, 1.0, y 1.5 s. Con preferencia trace las gráficas en la pantalla de un monitor y diseñe el programa de modo que pueda cambiarse fácilmente el valor de $t$ y se pueda volver a trazar. Observe la posición del máximo de la pulsación en cada gráfica y verifique que las gráficas dibujan una pulsación que viaja en dirección $x$ positiva, con una velocidad de 25 m/s, y se mueve sin cambiar de forma. (*b*) Una segunda pulsación tiene la forma $f_2(x) = 0.02e^{-(x-45)^2/9}$ en $t = 0$ y se mueve en la dirección $x$ negativa con una velocidad de 25 m/s. Use su programa para trazar $y_2(x,t) = f_2(x + vt)$ desde $x = 0$ hasta $x = 50$ m para $t = 0$, 0.5, 0.8, 1.0, y 1.5 s. Verifique que las gráficas dibujan una pulsación que se mueve en la dirección $x$ negativa. (*c*) Suponga que ambas pulsaciones están en la cuerda al mismo tiempo. Use su programa para trazar $y_1(x,t) + y_2(x,t)$ desde $x = 0$ hasta $x = 50$ m para $t = 0$, 0.5, 1.0, y 1.5 s. Verifique que las gráficas dibujan las pulsaciones moviéndose una hacia la otra y que cuando se reúnen el desplazamiento de la cuerda es grande en la región donde se superponen. Las pulsaciones se mueven luego alejándose entre sí sin cambiar de forma. (*d*) Suponga que la segunda onda tiene la forma $f_2(x, t) = -0.02e^{-(x-45)^2/9}$ en $t = 0$ y que viaja en dirección $x$ negativa con una velocidad de 25 m/s. Use su programa para trazar $y_1(x, t) + y_2(x, t)$ desde $x = 0$ hasta $x = 50$ m para $t = 0$, 0.5, 0.8, 1.0, y 1.5 s. Cuando se reúnen las dos pulsaciones, la acción de una tiende a anular la acción de la otra. Para un valor del tiempo, el desplazamiento de la cuerda es cero en cualquier parte. Las pulsaciones continúan luego su camino sin cambiar de forma.

**57.** Pueden generarse ondas en una cuerda tensa moviendo uno de sus extremos. Supongamos que la cuerda sea extremadamente larga y hagamos que $g(t)$ sea el desplazamiento del extremo que se mueve, el cual se presume que está en $x = 0$. Si la cuerda se tira a lo largo del eje $x$ positivo, en el tiempo $t$ el desplazamiento en el punto en $x$ es el mismo que el desplazamiento en el extremo pero en un tiempo $t - x/v$ anterior, donde $v$ es la velocidad de la onda. Entonces, el desplazamiento en $x$ está dado por $y(x, t) = g(t - x/v)$. (*a*) Supongamos que, comenzando en $t = 0$ y continuando durante 0.20 s, la cuerda en $x = 0$ se jala hacia arriba en la dirección $y$ positiva con una velocidad constante de 0.15 m/s. Luego es mantenida en su desplazamiento final. Entonces $g(t) = 0$ para $t < 0$, $g(t) = 0.15t$ para $0 < t < 0.20$ s, y $g(t) = 0.15 \times 0.20 = 0.030$ m para $t > 0.20$ s. Considere que la velocidad de la onda es de 5.0 m/s y use un programa de computadora para hacer gráficas separadas de $y(x,t)$ desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m para $t = 0$, 0.1, 0.2, 1.0, 2.0, y 3.0 s. Para esto, haga que la computadora calcule $u = x - vt$ para cada valor de $x$ seleccionado, luego haga a $y = 0$ si $u < 0$, a $y = 0.15u$ si $0 < u < 0.20$, y a $y = 0.03$ si $u > 0.20$. (*b*) Considere que la velocidad de la onda sea de 15 m/s y trace $y(x,t)$ desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m para $t = 0$, 0.1, 0.2, 0.5, 0.75, 1.0, y 1.25 s. (*c*) ¿Qué determina la pendiente de la cuerda al moverse la pulsación a lo largo de ella? Si el extremo de la cuerda se eleva más rapidamente, ¿aumenta la pendiente de la cuerda o disminuye? Si la velocidad de la onda aumenta, ¿aumenta la pendiente o disminuye?

**58.** Comenzando en el tiempo $t = 0$ y continuando durante 0.40 s, el extremo de una cuerda tensa se mueve ligeramente hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple. Su desplazamiento está dado por $g(t) = 0.020 \text{ sen } (31.4t)$, donde $g$ está en metros y $t$ en segundos. Use una computadora para hacer gráficas separadas del desplazamiento $y(x, t)$ de la cuerda desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m para cada uno de los tiempos $t = 0$, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, y 2.5 s. Véase el proyecto anterior para algunas sugerencias.

**59.** Una cuerda tensa tiene inicialmente una forma distorsionada dada por $f(x) = 0.02e^{-(x-5)^2/9}$, donde $f$ y $x$ están en metros. La pulsación viaja 5.0 m/s en la dirección $x$ positiva a lo largo de la cuerda hasta que llega al extremo fijo en $x = 20$ m, en donde se refleja. El desplazamiento de la cuerda está dado por $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$, en donde $y_1$ es la pulsación incidente y $y_2$ es la pulsación

reflejada. Por supuesto, la pulsación incidente está dada por $y_1(x, t) = f(x - vt) = 0.02e^{-(x - vt - 5)^2/9}$. Demuestre que la pulsación reflejada está dada por $y_2(x, t) = -f(2L - x - vt) = -0.02e^{-(2L - x - vt - 5)^2/9}$, donde $L$ es la coordenada del punto fijo. Ésta es la única función de $x + vt$ tal que $y_1(L,t) + y_2(L,t) = 0$. Use un programa de computadora o una hoja de cálculo para hacer graficas separadas del desplazamiento de la cuerda desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m para $t = 0$, 1.0, 2.0, 2.5, 2.75, 3.0, 3.25, 3.5, 4.0, y 5.0 s. La función a trazar es $y(x, t) = 0.020e^{-(x - vt - 5)^2/9} - 0.020e^{-(2L - x - vt - 5)^2/9}$.

**60.** Una cuerda tensa que transporta una onda tiene energía: energía cinética porque se mueve y energía potencial porque está distorsionada. Si $\mu$ es la densidad de masa lineal, entonces la energía cinética en una longitud infinitesimal $dx$ está dada por $\frac{1}{2}\mu(\partial y/\partial t)^2\,dx$. Si $F$ es la tensión en la cuerda, entonces la energía potencial en una longitud infinitesimal está dada por $\frac{1}{2}F(\partial y/\partial x)^2\,dx$. Puesto que $y(x, t) = f(x \pm vt)$ y $v = \sqrt{F/\mu}$, estas dos cantidades son exactamente iguales para cuerdas de la misma longitud. Entonces la energía mecánica total en la cuerda desde $x$ hasta $x + \Delta x$ está dada por

$$E = \mu \int_x^{x+\Delta x} (\partial y/\partial t)^2\,dx.$$

Puede usarse el programa de integración numerica descrito en los proyectos de computación del capítulo 8 para evaluar integrales de esta forma.

(*a*) La tensión en una cuerda que tiene una densidad de masa lineal de 0.080 kg/m es de 2.0 N. En el tiempo $t = 0$ la cuerda está distorsionada de modo que tiene la forma dada por $f(x) = 0.02e^{-(x - 5)^2/9}$, donde $f$ y $x$ están en metros. Suponga que la pulsación se mueve en la dirección $x$ positiva. Demuestre que

$$E = (0.04/9)^2\mu v^2 \int_x^{x+\Delta x} (x - vt - 5)^2 e^{-(x-vt-5)^2/4.5}\,dx.$$

(*b*) Use una integración numérica para calcular la energía total en el segmento de cuerda desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m en $t = 1$ s. Este segmento incluye a todas las pulsaciones excepto en las colas muy pequeñas. El uso de 200 intervalos produciría una precisión de cuatro cifras significativas. (*c*) Use una integración numérica para calcular la energía total en el segmento de cuerda desde $x = 30$ m hasta $x = 50$ m en $t = 7$ s. El resultado sería el mismo que en la parte (*b*) y le indicaría que la energía se ha movido desde la región de alrededor de $x = 10$ m hasta la región de alrededor de $x = 40$ m. Esto tiene sentido, porque la velocidad de la onda es de 5.0 m/s y la onda viajó 30 m en los 6 s transcurridos. (*d*) La cantidad a la que la energía pasa el punto en $x$ está dada por $P = -F(\partial y/\partial x)(\partial y/\partial t)$, así que en el intervalo de tiempo desde $t$ hasta $t + \Delta t$ la energía que pasa por $x$ está dada por

$$E = \int_t^{t+\Delta t} P\,dt = -F \int_t^{t+\Delta t} (\partial y/\partial x)(\partial y/\partial t)\,dt.$$

Para la pulsación descrita arriba demuestre que

$$E = (0.04/9)^2 Fv \int_t^{t+\Delta t} (x - vt - 5)^2 e^{-(x-vt-5)^2/4.5}\,dt.$$

Use una integración numérica para calcular la energía que pasó por el punto en $x = 25$ m desde $t = 1$ hasta $t = 7$ s. El resultado es de nuevo el mismo que antes, indicando que toda la energía alrededor de $x = 10$ m en $t = 1$ s pasó por $x = 25$ m en su camino hacia la región alrededor de $x = 40$ m.

# CAPÍTULO 20

# ONDAS SONORAS

*En el capítulo 19 hemos estudiado las ondas mecánicas transversales, como las de las vibraciones de una cuerda en tensión. En una onda mecánica* longitudinal, *las partículas de material que transmiten la onda vibran en dirección de la propagación de la onda. La onda mecánica longitudinal más conocida es la onda sonora. El ser humano puede detectar estas ondas en la gama de frecuencias que va de unos 20 Hz a unos 20,000 Hz, gama que recibe el nombre de intervalo* audible. *Las ondas mecánicas longitudinales de frecuencia más alta se llaman* ultrasónicas *y se emplean para localizar objetos bajo el agua y para visualizar los órganos internos del cuerpo humano, en medicina; las ondas de frecuencia más baja se llaman* infrasónicas, *y un ejemplo de éstas son las ondas de presión sísmica producidas durante un terremoto.*

*Las ondas sonoras viajan a través de sólidos, líquidos, y gases: estudiaremos principalmente la propagación del sonido en el aire. Un sistema vibratorio (por ejemplo, la cuerda de una guitarra, nuestras cuerdas vocales, la membrana de un tambor) pone en movimiento al aire en su vecindad inmediata. Esa perturbación se propaga por el aire hasta llegar a nuestros tímpanos, donde un receptor y un amplificador asombrosamente delicados convierten esta perturbación mecánica en una señal eléctrica que va hasta el cerebro.*

*En este capítulo estudiaremos las propiedades de las ondas sonoras, su propagación, y su producción mediante sistemas vibratorios.*

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

## 20-1 LA VELOCIDAD DEL SONIDO

Si bien las ondas sonoras viajan normalmente en tres dimensiones, simplificaremos un poco nuestro análisis al considerar un sistema unidimensional. La figura 1 muestra un tubo equipado en un extremo con un émbolo móvil, el cual representa, por ejemplo, el cono móvil de un altoparlante. Suponemos que el tubo está lleno de un medio compresible, como el aire, y que es muy largo, de modo que no precisamos considerar las reflexiones desde el extremo lejano. Cuando el émbolo se mueve hacia atrás y hacia adelante, alternativamente comprime y enrarece el medio. Estas compresiones y enrarecimientos pueden considerarse (respectivamente) incrementos y decrementos de la densidad local con relación a su valor promedio en el medio, o quizá como incrementos y decrementos en la presión local con relación a su valor promedio. Estas dos descripciones nos transmiten la misma información pero tienen formas matemáticas diferentes, como veremos en la sección 20-2.

Como resultado de las fuerzas mecánicas internas del medio, las compresiones y enrarecimientos viajan a lo

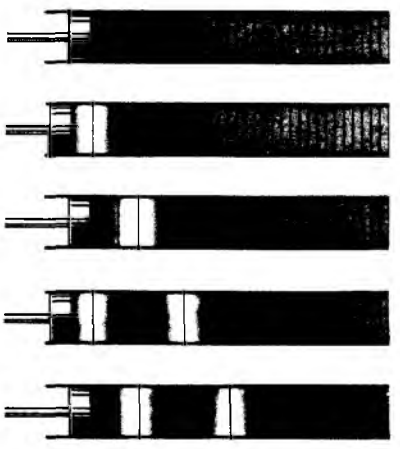


**Figura 1** Ondas sonoras generadas dentro de un tubo por medio de un émbolo móvil que podría representar el cono móvil de un altoparlante. Las líneas verticales dividen al medio compresible dentro del tubo en capas de igual masa.

largo del tubo. Como en todas las ondas mecánicas, la velocidad de propagación depende de la razón entre una propiedad elástica del medio (la tensión, en el caso de las ondas transversales de una cuerda) y una propiedad inercial del medio (la densidad de masa lineal, en el caso de la cuerda). En ondas longitudinales, la propiedad elástica describe cómo responde el medio a los cambios de presión con un cambio de volumen; esto es el módulo volumétrico* presentado en la ecuación 5 del capítulo 17:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}, \qquad (1)$$

donde $\Delta p$ es el cambio de presión, y $\Delta V$ es el cambio del volumen $V$. El signo menos implica que un aumento de presión ($\Delta p > 0$) causa una disminución de volumen ($\Delta V < 0$).

La propiedad inercial del medio debe estar dada por su densidad $\rho$. Podemos llevar a cabo un análisis dimensional para determinar cómo depende la velocidad de $B$ y $\rho$ usando el mismo procedimiento empleado en la sección 19-4, y el resultado es

$$v = C\sqrt{\frac{B}{\rho}}, \qquad (2)$$

donde una vez más la constante sin dimensiones $C$ no puede determinarse a partir de este método de análisis. Para completar la derivación nos remitimos, como hicimos en la sección 19-4, a un análisis mecánico basado en las leyes de Newton.

## Análisis mecánico

La esencia de esta derivación sigue muy de cerca la de la sección 19-4. Consideremos, para simplificar, una sola pulsación de compresión, como la que pudiera producirse por una sola carrera del émbolo de la figura 1.

Supongamos que la pulsación de compresión viaja a través del tubo de izquierda a derecha con velocidad $v$.

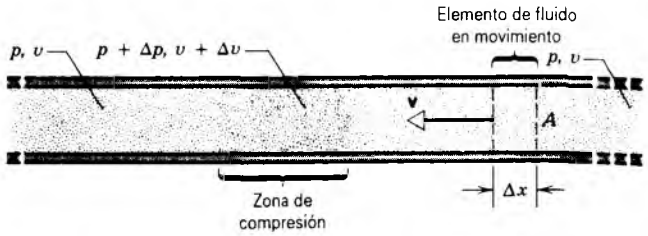



**Figura 2** Una pulsación (compresión) se envía a través de un tubo largo. Se elige que el marco de referencia de esta figura sea el de la pulsación, de modo que el fluido corre de derecha a izquierda. Una rebanada de fluido de ancho $\Delta x$ se mueve hacia la zona de compresión con velocidad $v$.

Para simplificar suponemos que la pulsación tiene caras anterior y posterior bien definidas y que tiene una presión y una densidad uniformes en su interior. Cuando analizábamos el movimiento de una pulsación transversal en una cuerda tensa en la sección 19-4, hallamos conveniente elegir un marco de referencia en el que la pulsación permaneciese estacionaria. Como lo indicamos en la figura 2, aquí lo hacemos así también. En esa figura, la pulsación (llamada "zona de compresión") permanece estacionaria en nuestro marco de referencia mientras que el fluido se mueve a través de ella de derecha a izquierda con velocidad $v$.

Sigamos el movimiento del elemento de fluido móvil contenido entre las líneas verticales en la figura 2. Este elemento se mueve hacia la izquierda con velocidad $v$ hasta que choca con la zona de compresión. El borde izquierdo del elemento de fluido entra a la zona de compresión en el tiempo $t$, y el borde derecho entra en el tiempo $t + \Delta t$. El intervalo de tiempo $\Delta t$ depende del ancho $\Delta x$ del elemento de acuerdo con $\Delta t = \Delta x/v$.

Durante el intervalo $\Delta t$, en que el elemento entra a esta zona, existe una presión $p + \Delta p$ en la cara anterior del elemento de fluido y una presión $p$ en la cara posterior. Como resultado de la diferencia de presión $\Delta p$ a través del elemento de fluido, se comprime y se decelera. Dentro de la zona, el elemento se mueve con una velocidad más baja $v + \Delta v$, siendo la cantidad $\Delta v$ negativa. El elemento emerge finalmente de la cara izquierda de la zona, donde se expande hasta su volumen original y se acelera de nuevo a su velocidad original $v$ como resultado del diferencial de presión $\Delta p$.

Apliquemos las leyes de Newton al elemento de fluido durante el intervalo de tiempo $\Delta t$ durante el cual entra en la zona. La fuerza resultante que actúa durante este intervalo es

$$F = pA - (p + \Delta p)A = -\Delta p\, A, \qquad (3)$$

donde $A$ es el área de la sección transversal del tubo. Aquí hemos considerado que la dirección positiva es la de la velocidad, es decir, hacia la izquierda en la figura 2. El

* Un cambio de presión dado puede dar lugar a cambios diferentes en el volumen de un medio compresible, dependiendo de las circunstancias por las cuales cambie de presión. Por ejemplo, puesto que una compresión tiende a aumentar la temperatura del medio, podríamos dejar que escapase calor con el fin de que la temperatura permanezca constante. En tal caso, siendo un ejemplo los procesos fluidos estáticos estudiados en el capítulo 17, observaríamos un módulo volumétrico *isotérmico* (temperatura constante). Sin embargo, la capacidad de un gas para conducir calor (su *conductividad térmica*: véase la sección 25-7) es demasiado pequeña para que pueda fluir el calor entre las compresiones, más calientes, y los enrarecimientos, más fríos, a frecuencias audibles. En este caso, necesitamos el módulo volumétrico *adiabático* (sin transferencia de calor). En gases típicos, el módulo volumétrico adiabático es de alrededor de 1.4 veces el módulo volumétrico isotérmico. Los procesos isotérmicos y adiabáticos se estudian con mayor detalle en el capítulo 25.

**TABLA 1** LA VELOCIDAD DEL SONIDO†

| *Medio* | *Velocidad (m/s)* |
|---|---|
| Gases | |
| Aire (0° C) | 331 |
| Aire (20° C) | 343 |
| Helio | 965 |
| Hidrógeno | 1284 |
| Líquidos | |
| Agua (0° C) | 1402 |
| Agua (20° C) | 1482 |
| Agua de mar‡ | 1522 |
| Sólidos | |
| Aluminio | 6420 |
| Acero | 5941 |
| Granito | 6000 |

† A 0° C y 1 atm de presión, a menos que se indique lo contrario.
‡ A 20° C y 3.5% de salinidad.

volumen original $V$ del elemento es $A\,\Delta x = A\,v\,\Delta t$, y su masa es $\rho v A\,\Delta t$, donde $\rho$ es la densidad sin perturbación del fluido afuera de la zona de compresión. La aceleración $a$ es $\Delta v/\Delta t$, y puesto que $\Delta v$ es negativa, $a$ es negativa. La segunda ley de Newton da entonces

$$F = ma$$
$$-\Delta p\,A = (\rho v A\,\Delta t)\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

la cual podemos escribir como:

$$\rho v^2 = \frac{-\Delta p}{\Delta v/v}. \tag{4}$$

Durante el intervalo $\Delta t$, el borde anterior del elemento de fluido se mueve con velocidad $v + \Delta v$, y por tanto se mueve una distancia $(v + \Delta v)\Delta t$. En ese mismo tiempo, el borde posterior se mueve una distancia $v\,\Delta t$. El ancho del elemento de fluido cambia entonces en ese intervalo en una cantidad negativa $\Delta v\,\Delta t$, y el volumen cambia en correspondencia en la cantidad $\Delta V = A\,\Delta v\,\Delta t$. De aquí que

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A\,\Delta v\,\Delta t}{Av\,\Delta t} = \frac{\Delta v}{v}$$

y obtenemos, usando la ecuación 1,

$$\rho v^2 = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V} = B. \tag{5}$$

Entonces

$$v = \sqrt{B/\rho}, \tag{6}$$

lo cual demuestra que la constante $C$ de la ecuación 2 tiene el valor 1.

Si el medio en el que viaja la pulsación es una barra delgada y sólida en vez de un fluido, el módulo volumétrico $B$ de la ecuación 6 debe ser reemplazado por el módulo de Young (véase la sección 14-5). Si el sólido es extenso, debemos tener en cuenta el hecho de que un sólido ofrece una resistencia elástica a las fuerzas tangenciales o cortantes, y la velocidad de las ondas longitudinales depende del módulo cortante al igual que del módulo volumétrico. (Tanto las ondas longitudinales como las transversales pueden propagarse en un sólido extenso. Aquí consideraremos únicamente las ondas longitudinales.) La tabla 1 ofrece algunos valores representativos de la velocidad del sonido en diversos medios.

## 20-2 ONDAS VIAJERAS LONGITUDINALES

Consideremos un tren continuo de compresiones y enrarecimientos que viajan a lo largo de un tubo lleno de fluido, como en la figura 3. Si nos colocamos en alguna posición fija a lo largo del tubo, existen dos formas de observar esta onda viajera. (1) Podemos enfocar nuestra atención al *desplazamiento* oscilatorio hacia atrás y hacia adelante de un elemento de fluido en nuestra posición al pasar la onda a través de ella. (2) Por otra parte, podemos centrarnos en las variaciones periódicas de *presión* que ocurren en nuestro punto de observación. En esta sección exploraremos la conexión entre estas descripciones de una onda sonora como una onda de desplazamiento y una onda de presión.

Al avanzar la onda a lo largo del tubo, cada pequeño elemento de volumen del fluido oscila respecto a su posición de equilibrio. El desplazamiento es hacia la derecha o hacia la izquierda a lo largo de la dirección de propagación de la onda, la cual hemos considerado en dirección $x$ positiva. Representamos al desplazamiento del elemento de volumen a partir de su posición de equilibrio en $x$ (nuestro lugar de observación) por $s(x, t)$. Esta función es análoga al desplazamiento transversal $y(x, t)$ estudiado en el capítulo 19, con una excepción importante: el desplazamiento $s$ es *a lo largo de la dirección de propagación* en una onda longitudinal, mientras que en una onda transversal el desplazamiento $y$ es en *ángulo recto con la dirección de la propagación*. En el caso de una onda sinusoidal, podemos escribir, por lo tanto, la ecuación del desplazamiento longitudinal como:

$$s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t), \tag{7}$$

donde hemos supuesto que la onda viaja en dirección positiva $x$. También hemos hecho una elección particular de la constante de fase para la onda de desplazamiento, lo cual nos permite expresarla en términos de función coseno. La amplitud $s_m$ es bastante pequeña en las ondas sonoras: véase el problema muestra 1.

Por lo general, es más recomendable tratar con variaciones de presión en una onda sonora que con los desplazamientos reales de las partículas. Escribamos por lo tanto

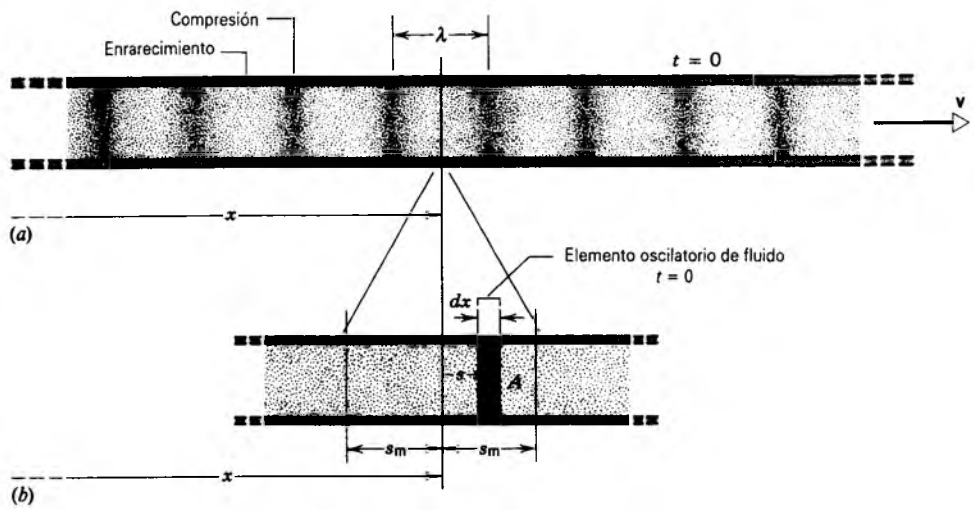



**Figura 3** (*a*) Instantánea, tomada en $t = 0$, de una onda sonora sinusoidal que se mueve con velocidad $v$ a través de un tubo largo lleno de fluido. (*b*) Vista ampliada de una región cercana a la posición $x$. Un elemento de fluido oscila respecto a su posición de equilibrio al pasar la onda a través de él. En el momento que se ilustra, el plano central del elemento se halla desplazado una distancia $s$ de su posición de equilibrio.

la ecuación de la onda en términos de la variación de presión en lugar de hacerlo en términos del desplazamiento.

De la ecuación 1, podemos escribir

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}.$$

Igual que hicimos que $s$ representara el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio, hagamos ahora que $\Delta p$ represente el *cambio* desde la presión $p_0$ no perturbada. Buscamos una expresión del cambio de presión $\Delta p$ en función de la posición $x$ y del tiempo $t$, es decir, $\Delta p\ (x, t)$. La presión real en cualquier punto será entonces $p_0 + \Delta p(x, t)$, que podría ser mayor o menor que $p_0$ dependiendo de si $\Delta p$ es positiva o negativa en ese punto y en ese momento.

Una capa de fluido a presión $p_0$ con un espesor $\Delta x$ y un área $A$ en su sección transversal tiene un volumen $V = A\,\Delta x$. Cuando la presión cambia, el volumen cambia en $A\,\Delta s$, donde $\Delta s$ es la cantidad en que cambia el espesor de la capa durante la compresión o el enrarecimiento. De aquí que

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V} = -B\frac{A\,\Delta s}{A\,\Delta x}.$$

Cuando hacemos que $\Delta x \to 0$ de modo que la capa de fluido se contraiga hasta un espesor infinitesimal, obtenemos

$$\Delta p = -B\frac{\partial s}{\partial x}. \tag{8}$$

Hemos empleado una notación de derivada parcial porque $s$ es una función tanto de $x$ como de $t$. Si el desplazamiento de la partícula es sinusoidal, entonces, según la ecuación 7, obtenemos

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -ks_m \operatorname{sen}(kx - \omega t),$$

y de la ecuación 8

$$\Delta p(x, t) = Bks_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{9}$$

De aquí que la variación de la presión en cada posición $x$ sea también sinusoidal.

A causa de que $v = \sqrt{B/\rho}$, podemos escribir la ecuación 9 más convenientemente como:

$$\Delta p(x, t) = [k\rho v^2 s_m] \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{10}$$

Recordemos que $\Delta p$ representa el cambio a partir de la presión $p_0$ no perturbada. El término entre corchetes representa el cambio *máximo* de la presión y se denomina *amplitud de la presión*. Si denotamos a ésta por $\Delta p_m$, entonces

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_m \operatorname{sen}(kx - \omega t), \tag{11}$$

donde

$$\Delta p_m = k\rho v^2 s_m. \tag{12}$$

De aquí que una onda sonora pueda considerarse bien como una onda de desplazamiento o bien como una onda de presión. Si la primera se escribe como una función coseno, la otra será una función seno. La onda de desplazamiento está entonces a 90° fuera de fase con la onda de presión. Es decir, cuando el desplazamiento a partir del equilibrio en un punto sea un máximo o un mínimo, la presión en exceso ahí será de cero; cuando el desplaza-

miento en un punto sea cero, el exceso o deficiencia de presión será ahí un máximo. La ecuación 12 da la relación entre la amplitud de la presión (variación máxima de la presión a partir del equilibrio) y la amplitud del desplazamiento (variación máxima de la posición a partir del equilibrio). Conviene que usted compruebe la consistencia de las dimensiones de cada lado de la ecuación 12.

Si bien hemos descrito a una onda sonora en términos ya sea de una onda de presión o de una onda de desplazamiento, las dos descripciones no son equivalentes, por lo general. Podemos escoger fácilmente entre cualquiera de las dos descripciones sólo cuando una sola onda longitudinal se propaga en una sola dirección. Cuando consideramos la reflexión de una onda sonora en el extremo de un tubo, o cuando superponemos dos ondas sonoras que interfieren en un punto, el uso de la descripción de la onda de desplazamiento puede conducir a errores serios.* Por ejemplo, consideremos dos ondas sonoras que parten de fuentes diferentes (quizá, dos altoparlantes) y que viajan en direcciones diferentes e interfiere en un punto, de modo que una onda da un cambio de presión $\Delta p$ y la otra $-\Delta p$. Mediante la descripción basada en la presión, esperamos una interferencia completamente destructiva en ese punto, porque las presiones se suman como escalares. Sin embargo, la suma de los desplazamientos (que tienen lugar en las direcciones de viaje de las dos ondas) no da cero, porque son vectores en direcciones diferentes. *Suele ser preferible describir a una onda sonora como una onda de presión* para evitar tales dificultades. Además, como veremos en la sección siguiente, es el cambio de la presión, y no el cambio del desplazamiento, lo que se detecta por el oído y por el micrófono.

Por último, observemos que en esta sección hemos tratado al fluido como un medio continuo. Sin embargo, en un gas los espacios entre las moléculas son grandes (en comparación con el tamaño de las moléculas), y las moléculas se mueven con un movimiento térmico al azar. Las oscilaciones producidas por una onda sonora se superponen a estos movimientos térmicos al azar. El impulso dado a una molécula se transmite a otra molécula luego de que la primera se mueve en el espacio vacío entre ellas y choca con la segunda. Existe entonces una conexión íntima entre la velocidad molecular promedio en un fluido y la velocidad del sonido en ese fluido. En particular, al aumentar la temperatura, la velocidad molecular promedio y la velocidad del sonido en un gas crecen exactamente de la misma manera.

**Problema muestra 1** La variación máxima de presión $\Delta p_m$ que puede tolerar el oído humano en sonidos fuertes es de alrededor de 28 Pa a 1000 Hz. El sonido más débil que puede captar el oído a 1000 Hz tiene una amplitud de presión de alrededor de $2.8 \times 10^{-5}$ Pa. Halle las amplitudes de desplazamiento correspondientes.

**Solución** Partiendo de la tabla 1, $v = 343$ m/s en el aire a la temperatura ambiente, de modo que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi v}{v} = \frac{2\pi \times 10^3 \text{ Hz}}{343 \text{ m/s}} = 18.3 \text{ rad/m}.$$

La densidad del aire en estas condiciones es de 1.21 kg/m$^3$. De aquí que, para $\Delta p_m = 28$ Pa, obtengamos, usando la ecuación 12,

$$s_m = \frac{\Delta p_m}{k\rho v^2} = \frac{28 \text{ Pa}}{(18.3 \text{ rad/m})(1.21 \text{ kg/m}^3)(343 \text{ m/s})^2}$$
$$= 1.1 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Las amplitudes del desplazamiento para los sonidos más fuertes son de alrededor de $10^{-5}$ m, realmente un valor muy pequeño. Para los sonidos más débiles, obtenemos de manera similar

$$s_m = \frac{2.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}}{(18.3 \text{ rad/m})(1.21 \text{ kg/m}^3)(343 \text{ m/s})^2} = 1.1 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Esto es de alrededor de un décimo del radio de un átomo típico y sugiere cuán sensible debe ser el oído para detectar vibraciones de una amplitud tan pequeña.

## 20-3 POTENCIA E INTENSIDAD DE LAS ONDAS SONORAS

Seguiremos los métodos del capítulo 19 para calcular la potencia liberada por una onda sonora, siendo ahora la principal diferencia que la velocidad **u** de la partícula es a lo largo de la dirección de la onda. Al viajar la onda de presión, cada elemento de fluido ejerce una fuerza sobre el elemento que está adelante de él; la magnitud de la fuerza neta es $F = A\,\Delta p$, donde $A$ es el área de la sección transversal del elemento de fluido. Usando la ecuación 11 para $\Delta p$, hallamos que la fuerza es

$$F = A\,\Delta p_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{13}$$

La velocidad de la delgada rebanada de fluido, como se indica en la figura 3, es

$$u = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m[-\operatorname{sen}(kx - \omega t)]. \tag{14}$$

La potencia abastecida al elemento de fluido es

$$P = uF = A\omega\,\Delta p_m\, s_m \operatorname{sen}^2(kx - \omega t). \tag{15}$$

Usando la ecuación 12, podemos escribir esto como:

$$P = \frac{A(\Delta p_m)^2}{\rho v} \operatorname{sen}^2(kx - \omega t). \tag{16}$$

Como lo hicimos en el capítulo 19 para el caso de una onda transversal que viaja a lo largo de la cuerda, prome-

* Para un estudio cuidadoso de este punto, véase "Pressure and Displacement in Sound Waves", por C. T. Tindle, *American Journal of Physics*, septiembre de 1984, pág. 749.

diamos la potencia dentro de un ciclo; puesto que el valor promedio de $\text{sen}^2\,\theta$ es $\frac{1}{2}$, la potencia promedio es

$$\bar{P} = \frac{A(\Delta p_m)^2}{2\rho v} . \tag{17}$$

Como en el caso de la onda transversal, la potencia depende del *cuadrado* de la amplitud, en este caso la amplitud de presión. Obsérvese también que la frecuencia no aparece explícitamente en la ecuación 17 (aunque aparecería si, en cambio, expresáramos la potencia promedio en términos de la amplitud del desplazamiento). De aquí que, midiendo las amplitudes de presión, podamos comparar directamente las intensidades de los sonidos que tienen frecuencias *diferentes*. Por esta razón, los instrumentos que miden los cambios de presión son preferibles a los que miden los desplazamientos; además, como lo aprendimos en el problema muestra 1, los desplazamientos de los sonidos audibles más débiles son muy pequeños y sería difícil medirlos directamente.

Cuando comparamos sonidos diferentes, es más útil usar la *intensidad* (la potencia promedio por unidad de área) de la onda. Partiendo de la ecuación 17, podemos obtener de inmediato la intensidad $I$:

$$I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{(\Delta p_m)^2}{2\rho v} . \tag{18}$$

Puesto que el oído es tan sensible (es capaz de responder a intensidades dentro de un intervalo de 12 órdenes de magnitud), introducimos una escala logarítmica de intensidades llamada *nivel de sonido SL* (de *sound level*)

$$SL = 10 \log \frac{I}{I_0} . \tag{19}$$

El $SL$ se define respecto a una intensidad de referencia $I_0$, la cual se escoge igual a $10^{-12}$ W/m$^2$ (valor típico del umbral de la audición humana). Los niveles de sonido definidos de esta manera se miden en unidades de *decibel* (dB). Un sonido de intensidad $I_0$ tiene un nivel de sonido de 0 dB, mientras que el sonido en la parte superior del espectro de audición humana, llamada umbral del dolor, tiene una intensidad de 1 W/m$^2$ y un $SL$ de 120 dB. Cada aumento de la intensidad $I$ multiplicada por un factor de 10 corresponde a añadir 10 dB al $SL$.

Podemos usar también el dB como una medida *relativa* para comparar diferentes sonidos entre sí, en lugar de usar la intensidad de referencia. Supongamos que deseamos comparar dos sonidos de intensidades $I_1$ e $I_2$:

$$SL_1 - SL_2 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} - 10 \log \frac{I_2}{I_0}$$

$$= 10 \log \frac{I_1}{I_2} . \tag{20}$$

Por ejemplo, dos sonidos, cuya razón de intensidades sea 2, difieren en $SL$ en 10 log 2 = 3 dB.

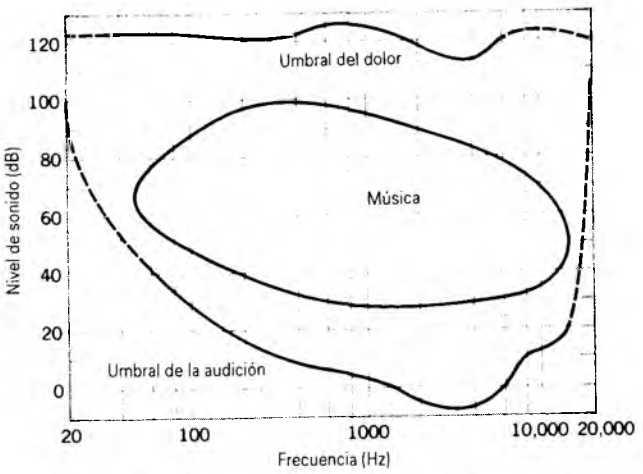



**Figura 4** Banda promedio de los niveles de sonido de la audición humana. Observe la dependencia de los niveles de umbral de la frecuencia. Un sonido que apenas podamos oír a 100 Hz debe tener 1000 veces la potencia acústica (un nivel de sonido de 30 dB mayor) que uno que apenas podamos oír a 1000 Hz, porque nuestro oído es mucho menos sensible a 100 Hz.

La sensibilidad del oído humano varía con la frecuencia. El umbral de $10^{-12}$ W/m$^2$ se aplica únicamente en las frecuencias intermedias de alrededor de 1000 Hz. A frecuencias más elevadas, digamos 10,000 Hz, el umbral se eleva a alrededor de 10 dB ($10^{-11}$ W/m$^2$), mientras que a una frecuencia más baja de 100 Hz el umbral está en unos 30 dB ($10^{-9}$ W/m$^2$). Se necesitan 1000 veces la intensidad del sonido a 100 Hz para producir la misma respuesta fisiológica que una intensidad de sonido dada a 1000 Hz. La figura 4 muestra la variación con la frecuencia de los umbrales de la audición y del dolor, y la tabla 2 muestra algunos niveles de sonido representativos y sus intensidades correspondientes.

**Problema muestra 2** Se emiten ondas de sonido esféricas uniformemente en todas direcciones a partir de una fuente puntual, siendo de 25 W la potencia irradiada $P$. ¿Cuáles son la intensidad y el nivel de sonido de la onda de sonido a una distancia $r$ = 2.5 m desde la fuente?

**Solución** Toda la potencia irradiada $P$ debe pasar a través de una esfera de radio $r$ centrada en la fuente. Entonces

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} .$$

Vemos que la intensidad del sonido disminuye con el inverso del cuadrado de la distancia desde la fuente. Numéricamente, tenemos que

$$I = \frac{25 \text{ W}}{(4\pi)(2.5 \text{ m})^2} = 0.32 \text{ W/m}^2$$

**TABLA 2** ALGUNAS INTENSIDADES Y NIVELES DE SONIDO

| *Sonido* | *Intensidad* ($W/m^2$) | *Intensidad relativa* ($I/I_0$) | *Nivel de sonido* (dB) |
|---|---|---|---|
| Umbral de la audición | $1 \times 10^{-12}$ | $10^0$ | 0 |
| El murmullo de las hojas | $1 \times 10^{-11}$ | $10^1$ | 10 |
| Un murmullo (a 1 m) | $1 \times 10^{-10}$ | $10^2$ | 20 |
| Calle de la ciudad, sin tránsito | $1 \times 10^{-9}$ | $10^3$ | 30 |
| Oficina, aula | $1 \times 10^{-7}$ | $10^5$ | 50 |
| Conversación normal (a 1 m) | $1 \times 10^{-6}$ | $10^6$ | 60 |
| Martillo perforador (a 1 m) | $1 \times 10^{-3}$ | $10^9$ | 90 |
| Grupo de rock | $1 \times 10^{-1}$ | $10^{11}$ | 110 |
| Umbral del dolor | 1 | $10^{12}$ | 120 |
| Motor de propulsión a chorro (a 50 m) | 10 | $10^{13}$ | 130 |
| El cohete Saturno (a 50 m) | $1 \times 10^8$ | $10^{20}$ | 200 |

y

$$SL = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

$$= 10 \log \frac{0.32 \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 115 \text{ dB}.$$

Una comparación de este resultado con la tabla 2 sugiere el planteamiento de dudas acerca de la cordura de comprar amplificadores de 100 W para uso en el hogar.

## 20-4 ONDAS LONGITUDINALES ESTACIONARIAS

Consideraremos ahora lo que sucede cuando una onda sonora como la mostrada en la figura 1 llega al extremo del tubo. En analogía con la onda transversal de la cuerda (véase la figura 22 del capítulo 19), ocurre una reflexión, y la onda reflejada viaja de regreso por el tubo en dirección opuesta. El comportamiento de la onda en el extremo reflejante depende de si el extremo del tubo está abierto o cerrado.

Consideremos primero un tubo cerrado por un extremo. Al viajar la onda por el tubo y llegar al extremo, puede comprimir a las capas de aire en el extremo cerrado contra la barrera fija. En ese extremo, la presión puede por lo tanto variar con su amplitud máxima, y *el extremo cerrado es un antinodo de presión*. En un extremo cerrado una onda de presión se refleja de manera similar en que se refleja una onda de desplazamiento transversal en el extremo libre de una cuerda (Fig. 22*b* del capítulo 19). Si, por ejemplo, una compresión incide sobre el extremo cerrado, se refleja de regreso a lo largo del tubo como una compresión. En analogía con nuestra discusión de las ondas transversales en las cuerdas, decimos que *una onda de presión longitudinal se refleja desde un extremo cerrado sin cambiar de fase*. El mismo efecto ocurre en el caso de una onda longitudinal que viaje en una cuerda, como puede ser en un juguete *Slinky*, y se refleje a partir del extremo *fijo*: una compresión se refleja como una compresión.

Consideremos ahora lo que sucede si el extremo del tubo está abierto. La presión en el extremo abierto del tubo es la misma que la presión del ambiente $p_0$ en el salón que lo rodea. No podemos cambiar la presión en ese extremo del tubo a menos que cambiemos la presión en todo el salón. La presión en el extremo abierto permanece por lo tanto en el valor $p_0$, y *el extremo abierto es un nodo de presión*. La comparación con la figura 22 del capítulo 19 muestra que este caso es análogo a la onda de desplazamiento transversal que se refleja en el extremo fijo de la cuerda. El intento de la onda incidente sobre el extremo abierto de comprimir el aire en ese extremo causa un enrarecimiento, el cual viaja de regreso por el tubo en dirección opuesta. Así, *una onda de presión longitudinal se refleja en el extremo abierto con un cambio de fase de 180°*. Una vez más puede observarse el mismo efecto en un resorte enrollado: una compresión se refleja como un enrarecimiento.

Supongamos ahora que tenemos un tren de ondas sinusoidales que viaja por el tubo. Las ondas se reflejan en el extremo, el cual se comportará ya sea como un nodo de presión (si el extremo está abierto) o bien como un antinodo de presión (si el extremo está cerrado). Supongamos que la fuente del tren de ondas sea un altoparlante en el extremo opuesto. El movimiento de la bocina envía una onda de compresión por el tubo, y la superposición de las ondas original y reflejada produce un patrón de ondas estacionarias, precisamente como en el caso de las ondas transversales en la cuerda. Dentro del tubo habrá un patrón de nodos y antinodos de presión (que no son puntos, como en el caso de las ondas transversales en una cuerda, sino planos).

Si se elige que la frecuencia (o la longitud de onda) de la fuente de ondas tenga un valor particular que dependa de la longitud del tubo, entonces se establece un patrón de ondas estacionarias a lo largo de todo el tubo, en analogía

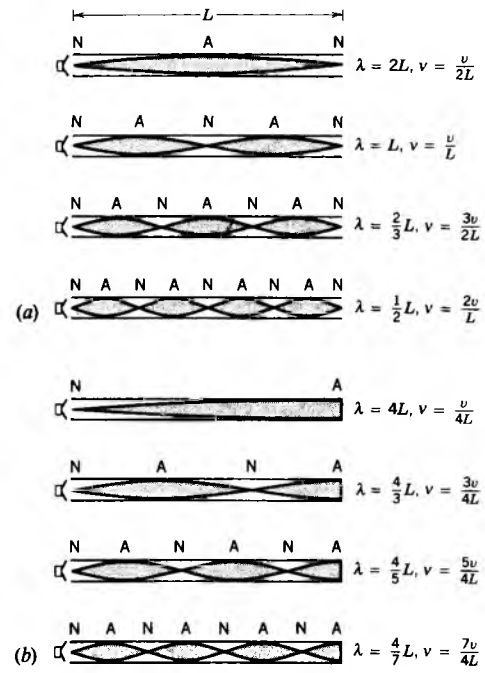



**Figura 5** (*a*) Ondas de presión de los primeros cuatro modos resonantes de un tubo impulsado por una bocina y abierto en el otro extremo. Existe un nodo N de presión en cada extremo, y los antinodos A se ubican entre los nodos. Las curvas sugieren la variación sinusoidal de presión dentro del tubo. (*b*) Ondas de presión de los primeros cuatro modos resonantes de un tubo que está cerrado en un extremo. El extremo cerrado es un antinodo de presión. Obsérvense las diferencias en los patrones vibratorios y en las longitudes de onda entre los tubos abierto y cerrado.

con el caso de los patrones de una onda estacionaria mostrados en la figura 23 del capítulo 19. Si existe un nodo de presión en el extremo de la bocina, entonces se regresa poca energía a la bocina a partir del patrón de onda estacionaria dentro del tubo, y tenemos una condición de resonancia. La frecuencia impulsora debe ser igual a una de las frecuencias naturales del sistema, las cuales están determinadas por la longitud del tubo.

La figura 5*a* muestra un tubo impulsado por una bocina en un extremo y abierto en el otro extremo. Como vimos previamente, el extremo de la bocina es un nodo de presión en resonancia y el extremo abierto es igualmente un nodo de presión. En la figura 5*a* se muestran las variaciones de la amplitud de presión resultantes de las ondas estacionarias.* Estos patrones se parecen mucho a los de la figura 23 del capítulo 19. En el primer modo de oscilación, la longitud $L$ del tubo es igual a $\lambda/2$, donde $\lambda$ es la longitud de onda de la onda producida por la bocina en esta condición de resonancia en particular. La longitud de onda es por lo tanto $2L$, y la frecuencia correspondiente es $v = v/\lambda = v/2L$. Las otras resonancias que se muestran en la figura 5*a* tienen longitudes de onda más pequeñas en forma sucesiva, lo cual puede escribirse en general como:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{21}$$

Las frecuencias de resonancia correspondientes, determinadas al usar la expresión $v = v/\lambda$ con las longitudes de onda de arriba, son

$$v_n = n\frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ (tubo abierto).} \tag{22}$$

Aquí $v$ representa la velocidad de la onda en el medio que llena el tubo, usualmente aire.

La figura 5*b* muestra el caso en que el tubo está cerrado en un extremo y abierto en el otro. En este caso, el extremo cerrado debe ser un antinodo de presión. En el primer modo resonante, la longitud $L$ del tubo es $\frac{1}{4}\lambda$, y así la fuente debe estar produciendo una onda cuya longitud de onda es $4L$. En el modo siguiente, la longitud de onda cambia de modo que ahora $L$ es $\frac{3}{4}\lambda$, y entonces $\lambda = \frac{4}{3}L$. Al continuar la serie, vemos que en este caso la expresión general para las longitudes de onda de los modos resonantes es

$$\lambda_n = \frac{4L}{n}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots . \tag{23}$$

Nótese que sólo aparecen los valores impares del entero $n$ en este caso. Las frecuencias resonantes correspondientes son

$$v_n = n\frac{v}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots \text{ (tubo cerrado).} \tag{24}$$

Como lo estudiaremos en la sección siguiente, las frecuencias resonantes dadas por las ecuaciones 22 ó 24 determinan las notas musicales tocadas por los instrumentos de aliento.

La ubicación real del nodo de presión en un extremo abierto no está *exactamente* en el extremo del tubo. La onda se extiende ligeramente en el medio más allá del tubo, así que la verdadera longitud del tubo es un poco mayor y las frecuencias resonantes son un poco menores. En tubos angostos de forma cilíndrica, la corrección de la longitud es aproximadamente igual a $0.6R$, donde $R$ es el radio del tubo. En un tubo abierto en ambos extremos, la corrección de la longitud debe aplicarse en cada extremo. En un tubo de 0.6 m de longitud y 1 cm de radio (valores típicos para los instrumentos de aliento más pequeños, como el clarinete o la flauta), la frecuencia más baja sin la corrección del extremo sería de 286 Hz si

* Con un tubo de llama Rubens puede obtenerse una bella demostración de las ubicaciones de los nodos y antinodos de presión. Véase "Rubens Flame-tube Demonstration", por George W. Ficken y Francis C. Stephenson, *The Physics Teacher*, mayo de 1979, pág. 306.

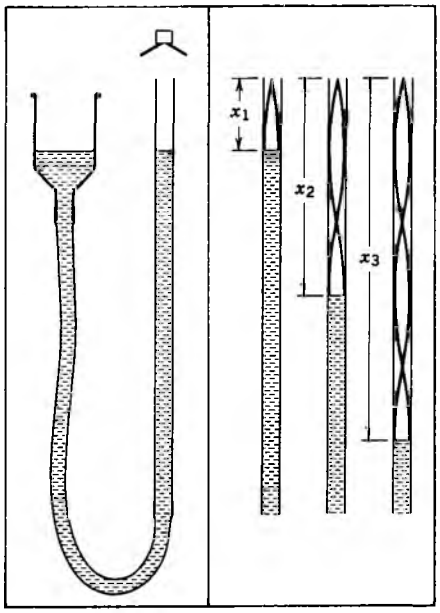



**Figura 6** Problema muestra 3. Aparato para medir la velocidad del sonido en el aire. El nivel del agua puede ajustarse elevando o bajando el recipiente de la izquierda, el cual está conectado al tubo por medio de una manguera. A la derecha se muestran las formas de la onda de presión de los primeros tres modos resonantes para una longitud de onda determinada.

el tubo fuese abierto y de 143 Hz si el tubo fuese cerrado. Con la corrección del extremo, los valores correspondientes serían de 280 Hz y 142 Hz. Las correcciones son pequeñas, y sin embargo muy importantes.

**Problema muestra 3** La figura 6 muestra un aparato que puede emplearse para medir la velocidad del sonido en el aire usando la condición de resonancia. Encima de un tubo cilíndrico parcialmente lleno de agua se sostiene una pequeña bocina. Al ajustar el nivel de agua, la longitud de la columna de aire puede cambiarse hasta que el tubo esté en resonancia, en cuyo punto puede oírse un incremento en la intensidad del sonido. En un experimento, la bocina se impulsa a una frecuencia fija de 1080 Hz, y se observan tres resonancias cuando el nivel de agua está a las distancias $x_1$ = 6.5 cm, $x_2$ = 22.2 cm, y $x_3$ = 37.7 cm por debajo de la parte superior del tubo. Halle el valor de la velocidad del sonido a partir de estos datos.

**Solución** La columna de aire actúa como un tubo de longitud variable cerrado en un extremo. El patrón de ondas estacionarias muestra un nodo de presión cerca de la bocina y un antinodo de presión en la superficie del agua. Puesto que no conocemos la corrección del extremo, no podemos usar directamente los datos dados para hallar la velocidad del sonido a partir de la ecuación 24. Sin embargo, observamos por las condiciones de resonancia mostradas en la figura 5*b* que la distancia entre nodos de presión adyacentes es de $\frac{1}{2}\lambda$; lo mismo sucede para la distancia entre antinodos adyacentes. A partir de los datos dados, concluimos por lo tanto, partiendo de las primeras dos resonancias, que

$$\tfrac{1}{2}\lambda = x_2 - x_1 = 22.2 \text{ cm} - 6.5 \text{ cm} = 15.7 \text{ cm},$$

y similarmente, partiendo de la segunda y tercera resonancias,

$$\tfrac{1}{2}\lambda = x_3 - x_2 = 37.7 \text{ cm} - 22.2 \text{ cm} = 15.5 \text{ cm}.$$

El promedio de estos dos valores, que tomamos como nuestro mejor valor de esta medición, es de 15.6 cm, correspondiente a una longitud de onda de 2(15.6 cm) = 31.2 cm = 0.312 m. Por lo tanto, deducimos que la velocidad del sonido es de

$$v = \lambda\nu = (0.312 \text{ m})(1080 \text{ Hz}) = 337 \text{ m/s}.$$

Aparte de la corrección del extremo, ¿qué factores físicos de este experimento (incluyendo las propiedades del aire) podrían influir en el valor medido?

## 20-5 SISTEMAS VIBRATORIOS Y FUENTES DE SONIDO*

Un sistema vibratorio transmite una onda a través del aire hasta los oídos del oyente. Éste es el principio básico de la producción de sonido por medio de la voz o de un instrumento musical. Ya hemos estudiado la propagación de la onda sonora; aquí estudiaremos ahora el sistema vibratorio que la produce para entender la naturaleza del sonido.

Como vimos en la sección 19-10 en el caso de la cuerda vibratoria y en la sección anterior en el caso de una columna de aire, un sistema distribuido tiene un número grande (quizás infinito) de frecuencias vibratorias naturales o de resonancia. Éstas son las frecuencias a las cuales *puede* vibrar. La frecuencia que *se halla* en la vibración depende de cómo se pone el sistema en vibración.

Supongamos que el sistema es capaz de vibrar en un número de frecuencias $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$,... . Escribimos éstas en orden ascendente, de modo que $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$. La frecuencia más baja $\nu_1$, se llama la *frecuencia fundamental*, y el modo de oscilación correspondiente se llama modo fundamental. Las frecuencias más elevadas se llaman *sobretonos*, siendo $\nu_2$ el primer sobretono superior, $\nu_3$ el segundo sobretono, y así sucesivamente.

En ciertos sistemas, los sobretonos son todos los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental:

$$\nu_n = n\nu_1, \tag{25}$$

donde $n$ es un entero. En tal caso, los sobretonos se llaman simplemente *armónicos*. El primer miembro de una secuencia armónica es el fundamental, el segundo armónico es el primer sobretono, y así sucesivamente.

* Para una lista de referencias sobre la física de los instrumentos musicales y temas relacionados, véase "Resource Letter MA-2: Musical Acoustics", por Thomas D. Rossing, *American Journal of Physics*, julio de 1987, pág. 589.

¿Por qué producen algunos sistemas sonidos agradables mientras que otros producen sonidos desagradables o discordantes? Cuando se oyen varias frecuencias simultáneamente, resulta una sensación agradable si las frecuencias están en razón de números pequeños y enteros tales como 3:2 ó 5:4. Si un sistema produce sobretonos que sean armónicos, sus vibraciones incluirán frecuencias que tienen estas razones, y producirán un sonido agradable. Si los sobretonos no son armónicos, es probable que el sonido resulte discordante. Muchos de los esfuerzos en el diseño de instrumentos musicales están dedicados a la producción de secuencias armónicas de sobretonos. Algunos instrumentos, como en el caso de los basados en cuerdas vibratoria, producen sobretonos que son automáticamente armónicos cuando las vibraciones tienen una amplitud pequeña. En otros casos, la forma del instrumento debe diseñarse cuidadosamente para hacerlo armónico; una campana es un ejemplo de tal instrumento. Los armónicos que produce un instrumento le dan su riqueza y diversidad de tono, y son determinantes de la belleza del sonido del instrumento. Si los instrumentos produjesen únicamente sonidos fundamentales, todos sonarían exactamente igual.

Podemos clasificar a los instrumentos musicales en tres categorías: los basados en cuerdas vibratorias, los basados en columnas de aire vibratorias, y los sistemas más complejos que incluyen platillos, barras, y membranas vibratorias.

## Cuerdas vibratorias

Estos instrumentos incluyen las cuerdas frotadas (por ejemplo, los violines), las cuerdas punteadas (la guitarra, el clavicordio), y las cuerdas percutidas (el piano).

Si una cuerda fija en ambos extremos es frotada, punteada, o percutida, a lo largo de la cuerda viajan vibraciones transversales; estas perturbaciones se reflejan en los extremos fijos, y se forma un patrón de onda estacionaria. Los modos naturales de vibración de la cuerda son excitados, y estas vibraciones dan origen a ondas longitudinales en el aire del entorno, el cual los transmite a nuestros oídos en forma de sonido musical.

Hemos visto (sección 19-10) que una cuerda de longitud $L$, fija en ambos extremos, puede resonar a frecuencias dadas por

$$v_n = n\frac{v}{2L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{26}$$

Aquí $v$ es la velocidad en la cuerda de las ondas que viajan transversalmente de cuya superposición puede pensarse que da origen a las vibraciones; la velocidad $v$ ($= \sqrt{F/\mu}$) es la misma para todas las frecuencias. (Obsérvese que $v$ *no* es la velocidad del sonido en el aire; aunque la ecuación 26 se vea exactamente igual a la ecuación 22, $v$ representa

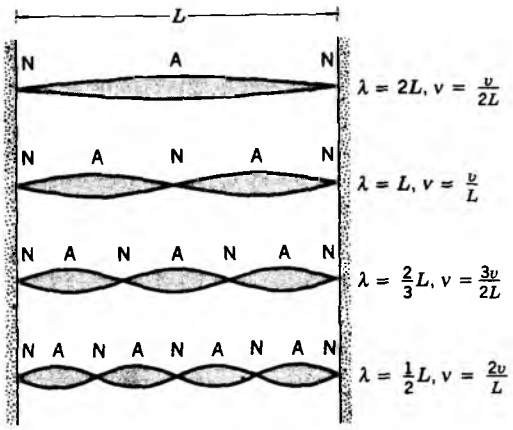



**Figura 7** Los primeros cuatro modos resonantes de una cuerda vibratoria fija en ambos extremos. Los nodos y los antinodos de desplazamiento se denotan por N y A, respectivamente.

cantidades diferentes en las dos ecuaciones.) A cualquiera de estas frecuencias la cuerda contiene un número entero $n$ de rizos entre sus extremos; tiene nodos en cada extremo y $n - 1$ nodos adicionales igualmente espaciados a lo largo de su longitud (Fig. 7).

Si la cuerda es inicialmente deformada de modo que su forma sea la misma que *cualquiera* de la de los armónicos posibles, vibrará únicamente a la frecuencia de ese armónico en particular. Sin embargo, las condiciones iniciales suelen surgir de percutir o de frotar la cuerda y en tales casos, no solamente el fundamental sino muchos sobretonos están presentes en la vibración resultante. Tenemos una superposición de varios modos naturales de oscilación. El desplazamiento real es la suma de los varios armónicos con amplitudes diversas. Los impulsos que se envían a través del aire hasta el oído y el cerebro dan lugar a un efecto neto, el cual es característico del instrumento de cuerda en particular. La calidad del sonido de determinada nota (frecuencia fundamental) tocada por un instrumento se define por el número de sobretonos presentes y sus respectivas intensidades. La figura 8 muestra los espectros del sonido y las formas de onda correspondientes al violín y al piano.

## Columnas de aire vibratorias

Un tubo de órgano es un ejemplo sencillo de sonido que se origina en una columna de aire vibratoria. Si ambos extremos de un tubo están abiertos y se dirige una corriente de aire contra un borde en un extremo, se forman ondas longitudinales en el tubo. La columna de aire resuena entonces a sus frecuencias de vibración naturales, dadas por la ecuación 22. Como en el caso de la cuerda frotada, el sonido fundamental y los sobretonos (que son armóni-

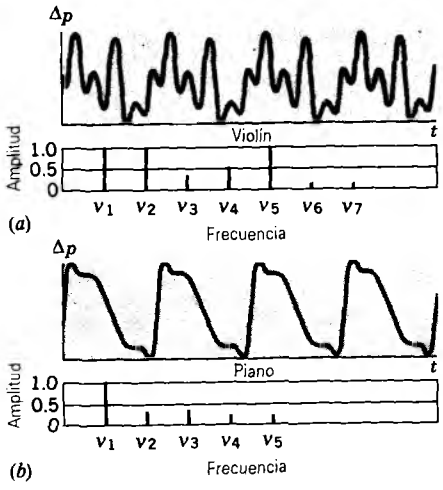



**Figura 8** Formas de onda y espectros de sonido de dos instrumentos de cuerda, (*a*) violín, y (*b*) piano; cada uno de ellos toca una nota de frecuencia fundamental $\nu_1$ = 440 Hz (la nota La de la escala musical). El espectro del sonido abajo de cada forma de onda muestra los armónicos que están presentes en el tono complejo y sus correspondientes amplitudes.

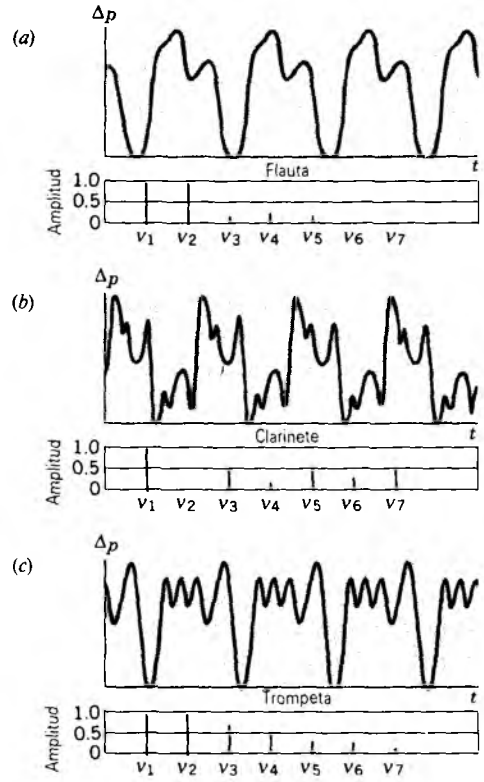



**Figura 9** Formas de onda de algunos instrumentos de aliento: (*a*) flauta, (*b*) clarinete, y (*c*) trompeta, y sus espectros de sonido, como en la figura 8. Obsérvese que el espectro del clarinete contiene principalmente armónicos impares, mientras que la flauta y la trompeta tienen armónicos tanto impares como pares.

cos) se producen al mismo tiempo. Si un extremo del tubo se cierra, la frecuencia fundamental se reduce en un medio, con relación a su valor para un tubo abierto de la misma longitud, y únicamente estarán presentes los armónicos impares, los cuales cambian la calidad del sonido. Es decir, un tubo abierto produce el mismo tono fundamental que un tubo cerrado de la mitad de longitud, pero a causa de que la mezcla de los armónicos es diferente en los dos tubos, la calidad de los tonos difiere.

Los instrumentos de lengüeta, como el clarinete, producen tonos de modo distinto. El aire se sopla a través de una abertura angosta, uno de cuyos lados está cubierto por una lengüeta que tiene propiedades elásticas. Según la ecuación de Bernoulli el aire, al pasar a alta velocidad a través de una abertura angosta, forma una región local de baja presión dentro de la embocadura. La presión exterior supera a la presión interior, lo cual fuerza a la lengüeta hacia adentro de modo que cubre la abertura. Tan pronto como se cubre la abertura, se interrumpe el flujo de aire, se elimina la región de baja presión dinámica, y la lengüeta se abre súbitamente permitiendo que el flujo de aire comience de nuevo. Este abrir y cerrar repetido del conducto de aire causa variaciones de presión máximas en la embocadura del instrumento, el cual se comporta por lo tanto como un antinodo de presión. En un clarinete, el otro extremo del instrumento está abierto, y por lo tanto las resonancias del instrumento son aquellas dadas por la ecuación 24 para un tubo cerrado en un extremo y abierto en el otro. Ciertos instrumentos de aliento, como la flauta, usan un método similar al tubo de órgano para producir el tono, de modo que la embocadura se comporta como un extremo abierto; sus frecuencias resonantes están dadas por la ecuación 22. Otros más, como el oboe y el saxofón, que usan una lengüeta para producir su tono, tienen un barreno cónico (es decir, ahusado) en lugar de cilíndrico, lo cual produce en ellos sobretonos que son aproximadamente armónicos, tanto impares como pares. Los instrumentos de metal (por ejemplo, la trompeta o el trombón) se llaman también instrumentos de *lengüeta labial*, porque los labios del ejecutante actúan como lengüeta, pero de nuevo el barreno está ligeramente ahusado, y como resultado los sobretonos contienen todos los armónicos. La figura 9 muestra las formas de onda de algunos instrumentos de viento.

## Otros sistemas vibratorios

Las barras vibratorias, los platillos, y las membranas estiradas producen también ondas sonoras. Consideremos una membrana flexible estirada, como la de un tambor. Si se golpea, a partir del punto golpeado viaja una pulsación

bidimensional que se refleja una y otra vez en la frontera de la membrana. Si se obliga a algún punto de la membrana a vibrar periódicamente, a lo largo de ella viajan trenes continuos de ondas. Como en el caso unidimensional de la cuerda, aquí también pueden establecerse ondas estacionarias en la membrana bidimensional. Cada una de estas ondas estacionarias tiene una cierta frecuencia natural (o característica) de la membrana. Una vez más la frecuencia más baja se llama fundamental, y las otras son sobretonos. Generalmente se presentan muchos sobretonos junto con la frecuencia fundamental cuando la membrana está vibrando. Estas vibraciones pueden excitar ondas sonoras de la misma frecuencia.

Los nodos de una membrana vibratoria son líneas más bien que puntos (como en la cuerda vibratoria) o planos (como en un tubo). Puesto que la frontera de la membrana está fija, debe ser una línea nodal. En la figura 10 se muestra una membrana circular fija en sus bordes, junto con los modos de vibración posibles y sus líneas nodales. La frecuencia natural de cada modo se da en términos de la fundamental $\nu_1$. Las frecuencias de los sobretonos no son armónicos; esto es, no son múltiplos enteros de $\nu_1$. Las barras vibratorias tienen también un juego de frecuencias naturales que no son armónicos. Por esta razón, las barras y los platillos tienen un uso limitado como instrumentos musicales. En instrumentos como el xilófono y la marimba, se ponen en vibración pequeñas barras de madera o de metal que se golpean. La forma de las barras es cuidadosamente modificada, haciéndolas más delgadas en el centro, de modo que los sobretonos resulten aproximadamente armónicos.

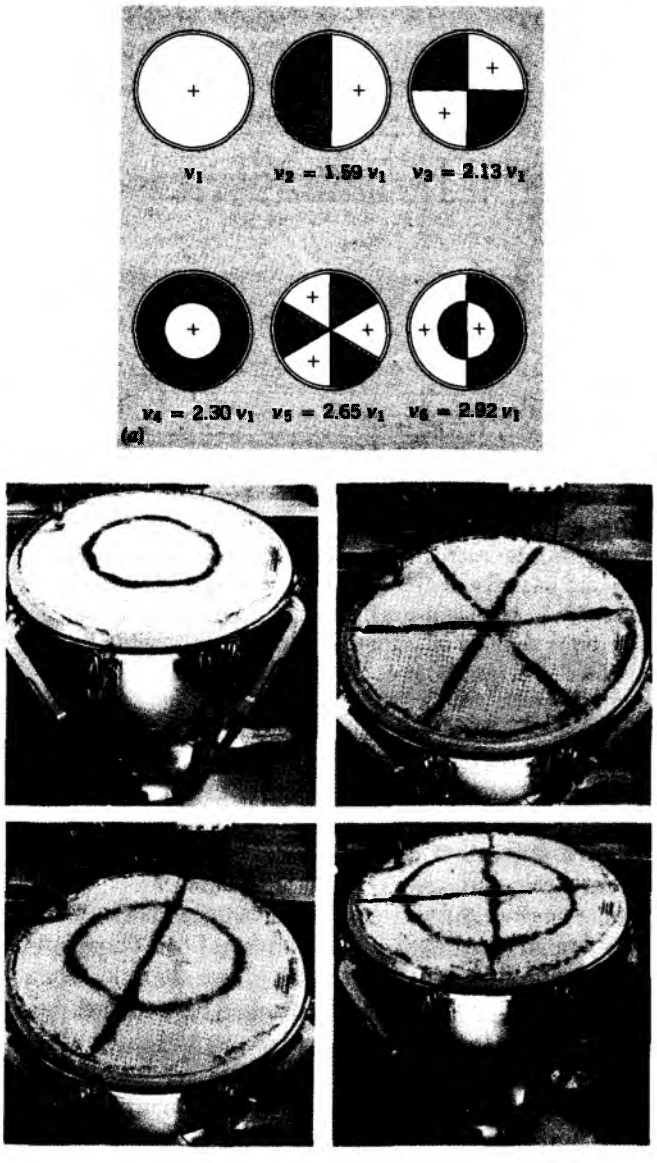



**Figura 10** (*a*) Los seis modos resonantes más bajos de un parche circular sujeto en los bordes. Las líneas representan nodos; el borde es también una línea nodal. Los signos + o - indican que una región particular se está moviendo hacia afuera de la página o hacia adentro de la página. En este caso, los sobretonos no son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental y, por lo tanto, no son armónicos. (*b*) Patrones de vibración de un timbal en los modos numerados 4, 5, y 6, y un modo adicional no ilustrado en (*a*). Se hacen visibles esparciendo un polvo oscuro sobre el parche y poniendo a éste en vibración a la frecuencia apropiada usando un vibrador mecánico. Al vibrar el parche, el polvo es sacudido y finalmente reposa sobre las líneas nodales, donde no existe movimiento.

## 20-6 PULSACIONES

Hemos considerado previamente el efecto de ondas que se superponen para producir regiones de intensidad máxima y mínima (cero), tal como en el caso de una onda estacionaria en un tubo. Esto ilustra un tipo de interferencia que podemos llamar *interferencia en el espacio*.

El mismo principio de superposición nos conduce a otro tipo de interferencia, al cual podemos llamar *interferencia en el tiempo*. En este caso examinamos la superposición de dos ondas en un punto dado en función del tiempo. Esta superposición, que en general puede dar por resultado formas de onda bastante complejas, adquiere una forma sencilla, particularmente cuando las dos ondas tienen casi la misma frecuencia. Con el sonido una condición así se da cuando, por ejemplo, se afinan entre sí dos instrumentos o dos cuerdas de guitarra.

Consideremos un punto en el espacio a través del cual estén pasando ondas. La figura 11*a* muestra la presión producida en ese punto por las dos ondas separadamente, en función del tiempo. Para simplificar hemos supuesto que las dos ondas tienen igual amplitud, aunque esto no es necesario. La presión resultante en ese punto en función

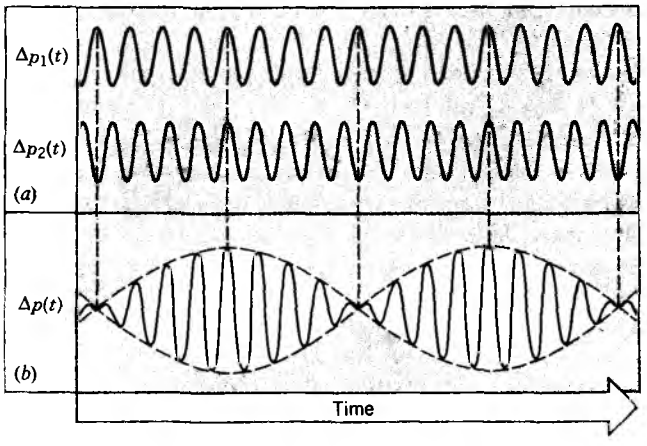



**Figura 11** (*a*) Dos formas de onda sinusoidales de frecuencias casi iguales. (*b*) Superposición de las dos formas de onda. Nótese que las dos ondas de la parte (*a*) van de estar en fase, dando una resultante de gran amplitud, a estar fuera de fase, dando una resultante de amplitud cero. Las curvas puntuadas muestran la variación sinusoidal de la envolvente modulante con frecuencia angular $\omega_{amp}$.

del tiempo es la suma de las presiones individuales y su gráfica se ilustra en la figura 11*b*. Vemos que la amplitud de la onda resultante no es constante sino que varía con el tiempo. En el caso del sonido la amplitud variable da lugar a variaciones en la sonoridad, llamadas *pulsaciones*.

Representemos la variación de la presión con el tiempo (para $x$ constante) producida por una onda como:

$$\Delta p_1(t) = \Delta p_m \operatorname{sen} \omega_1 t,$$

donde hemos elegido a la constante de fase para tener la posibilidad de escribir a la onda en esta forma sencilla. La variación de la presión en el mismo punto producida por la otra onda de igual amplitud se representa como

$$\Delta p_2(t) = \Delta p_m \operatorname{sen} \omega_2 t.$$

Según el principio de superposición, la presión resultante es

$$\begin{aligned}\Delta p(t) &= \Delta p_1(t) + \Delta p_2(t) \\ &= \Delta p_m(\operatorname{sen} \omega_1 t + \operatorname{sen} \omega_2 t). \end{aligned} \quad (27)$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A-B}{2} \operatorname{sen} \frac{A+B}{2},$$

La ecuación 27 puede describirse como

$$\Delta p(t) = \left[ 2\Delta p_m \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right] \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t. \quad (28)$$

Hasta ahora, todo lo que hemos hecho se aplica a dos ondas cualesquiera, sin importar cuáles sean sus frecuencias. Cuando las frecuencias son casi las mismas, la ecuación 28 puede simplificarse escribiendo el segundo factor en términos de la frecuencia angular promedio $\bar{\omega}$ de las dos ondas,

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (29)$$

El primer factor, contenido entre los corchetes de la ecuación 28, da una amplitud variable con el tiempo a la variación sinusoidal del segundo factor. Este factor de la amplitud varía con una frecuencia angular

$$\omega_{amp} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}. \quad (30)$$

En términos de $\bar{\omega}$ y de $\omega_{amp}$, podemos escribir la ecuación 28 como:

$$\Delta p(t) = [2\Delta p_m \cos \omega_{amp} t] \operatorname{sen} \bar{\omega} t. \quad (31)$$

Si $\omega_1$ y $\omega_2$ son casi iguales, la frecuencia de la amplitud $\omega_{amp}$ es pequeña, y la amplitud fluctúa lentamente. La figura 11 muestra la superposición de las dos ondas de acuerdo con la ecuación 28. Obsérvese que, en el caso de frecuencias casi iguales, la variación rápida de la onda resultante ocurre con una frecuencia que es aproximadamente la de cualquiera de las dos ondas sumadas. La amplitud total de la resultante varía lentamente con la frecuencia de la amplitud $\omega_{amp}$, la cual define una "envolvente" dentro de la cual ocurre la variación más rápida. Este fenómeno es una forma de *modulación de la amplitud*, que tiene una contraparte (bandas laterales) en los receptores de radio de AM.

En el caso mostrado en la figura 11*b*, el oído percibiría un tono con una frecuencia $\nu(= \bar{\omega} = /2\pi)$, que es aproximadamente igual que las frecuencias $\nu_1$ $(= \omega_1/2\pi)$ o $\nu_2(= \omega_2/2\pi)$ de las dos ondas componentes. El tono crece alternativamente fuerte y débil al variar con el tiempo la amplitud de la resultante, dando máximos y mínimos como se muestra en la figura 11*b*.

Siempre que $\cos \omega_{amp} t$ sea igual a +1 o a -1 ocurre una pulsación, es decir, un máximo de intensidad, puesto que la intensidad depende del *cuadrado* de la amplitud. Cada uno de estos valores ocurre una vez en cada ciclo de la envolvente (véase la fig. 11), de modo que el número de pulsaciones por segundo es el doble del número de ciclos por segundo de la envolvente. La frecuencia angular de la pulsación $\omega_{puls}$ es entonces

$$\omega_{puls.} = 2\omega_{amp} = |\omega_1 - \omega_2|. \quad (32)$$

Usando $\omega = 2\pi\nu$, podemos reescribir esta expresión como:

$$\nu_{puls.} = |\nu_1 - \nu_2|. \quad (33)$$

De aquí que *el número de pulsaciones por segundo sea igual a la diferencia de las frecuencias de las ondas componentes*. Las pulsaciones entre dos tonos pueden ser

detectadas por el oído hasta una frecuencia de unos 15 Hz. A frecuencias más elevadas no pueden distinguirse las pulsaciones individuales en el sonido producido. Los músicos tratan de escuchar a menudo las pulsaciones al afinar ciertos instrumentos. La afinación es cambiada hasta que la frecuencia de la pulsación disminuye y las pulsaciones desaparecen.

**Problema muestra 4** Una cuerda de violín que va a ser afinada con la nota La de la escala musical (440 Hz) está ligeramente fuera de tono. Se escuchan 3 pulsaciones por segundo cuando la cuerda de violín se toca en su modo fundamental junto con un diapasón en La. (*a*) ¿Cuáles son los valores posibles de la frecuencia fundamental de la cuerda? (*b*) Supóngase que la cuerda fuese tocada en su primer sobretono simultáneamente con un diapasón de una octava arriba de La (880 Hz). ¿Cuántas pulsaciones por segundo se oirían? (*c*) Cuando se aumenta ligeramente la tensión de la cuerda, el número de pulsaciones por segundo en el modo fundamental aumenta. ¿Cuál era la frecuencia original de la fundamental?

**Solución** (*a*) Partiendo de la ecuación 33, sabemos que la frecuencia $\nu_1$ de la cuerda difiere en la frecuencia de pulsación (3 Hz) de la frecuencia $\nu_2$ del diapasón (440 Hz), pero no podemos decir que la cuerda tenga una frecuencia más alta o más baja a partir únicamente del número de pulsaciones por segundo. Así, las frecuencias posibles son

$$\nu_1 = 440 \text{ Hz} \pm 3 \text{ Hz} = 443 \text{ Hz} \quad \text{or} \quad 437 \text{ Hz}.$$

(*b*) En el primer sobretono, la frecuencia de la cuerda es el doble de su frecuencia fundamental, y por lo tanto, puede ser 886 Hz o bien 874 Hz. Cuando se toca enfrente de un diapasón de 880 Hz, la diferencia de la frecuencia en cualquier caso es de 6 Hz, y por lo tanto se escucharían 6 pulsaciones por segundo.

(*c*) El hecho de aumentar la tensión de la cuerda eleva la velocidad de las ondas transversales y, por lo tanto, eleva la frecuencia fundamental (véase la ecuación 26). Puesto que se nos dice que esto eleva la frecuencia de pulsación, concluimos que la frecuencia del modo fundamental era anteriormente mayor de 440 Hz, puesto que el aumento de la frecuencia hizo que la diferencia con respecto a 440 Hz fuese aún más grande. Entonces, la cuerda estaba afinada originalmente a 443 Hz, y la tensión debe ser reducida para llevarla a su afinación correcta.

## 20-7 EL EFECTO DOPPLER

Cuando un oyente está móvil hacia una fuente estacionaria de sonido, el tono (frecuencia) del sonido escuchado es más alto que cuando el oyente está en reposo. Si el oyente está móvil alejándose de la fuente estacionaria, se oirá un tono más bajo. Obtenemos resultados similares cuando la fuente está móvil acercándose o alejándose de un oyente estacionario. El tono del silbato de una locomotora o de la sirena de un carro de bomberos es más alto cuando la fuente se aproxima al oyente que cuando ha pasado y se aleja.

En un trabajo escrito en 1842, Christian Johann Doppler (1803-1853, austriaco) llamó la atención sobre el hecho de que el color de un cuerpo luminoso debe ser cambiado por el movimiento relativo del cuerpo y el observador. Este *efecto Doppler*, como se llama, se aplica a las ondas en general. El propio Doppler menciona la aplicación de su principio a las ondas sonoras. En 1845 Buys Ballot llevó a cabo una prueba experimental en Holanda, "usando una locomotora que transportaba a varios trompeteros en un carro abierto".

### Observador móvil, fuente en reposo

Consideraremos ahora el efecto Doppler en las ondas sonoras, tratando únicamente el caso especial en el que la fuente y el observador se mueven a lo largo de la línea que los une. Adoptemos un marco de referencia en reposo en el medio a través del cual viaja el sonido. La figura 12 muestra una fuente de sonido $S$ en reposo en este marco y a un observador $O$ que se mueve hacia la fuente con una velocidad $v_0$. Los círculos representan frentes de onda, separados por la distancia de una longitud de onda, que viaja a través del medio. Un observador en reposo en el medio recibiría $vt/\lambda$ ondas en el tiempo $t$, donde $v$ es la velocidad del sonido en el medio y $\lambda$ es la longitud de onda. Sin embargo, a causa del movimiento hacia la fuente, el observador recibe $v_O t/\lambda$ ondas adicionales en este mismo tiempo $t$. La frecuencia $\nu'$ que se oye realmente es el número de ondas recibidas por unidad de tiempo, o sea

$$\nu' = \frac{vt/\lambda + v_O t/\lambda}{t} = \frac{v + v_O}{\lambda} = \frac{v + v_O}{v/\nu}.$$

Esto es,

$$\nu' = \nu \frac{v + v_O}{v} = \nu\left(1 + \frac{v_O}{v}\right). \tag{34}$$

La frecuencia $\nu'$ captada por el oído del observador es la frecuencia $\nu$ oída en reposo más el incremento $\nu(v_O/v)$ que surge del movimiento del observador. Cuando el observador está móvil *alejándose* de la fuente estacionaria, existe una *disminución* de la frecuencia $\nu(v_O/v)$ correspondiente a las ondas que no llegan al observador en cada unidad de tiempo a causa del alejamiento. Entonces

$$\nu' = \nu \frac{v - v_O}{v} = \nu\left(1 - \frac{v_O}{v}\right). \tag{35}$$

De aquí que la relación general que prevalece cuando la *fuente está en reposo* respecto al medio pero el *observador se mueve* a través de él sea

$$\nu' = \nu \frac{v \pm v_O}{v}, \tag{36}$$

donde el signo más se tiene para el movimiento hacia la fuente y el signo menos se tiene para el movimiento que

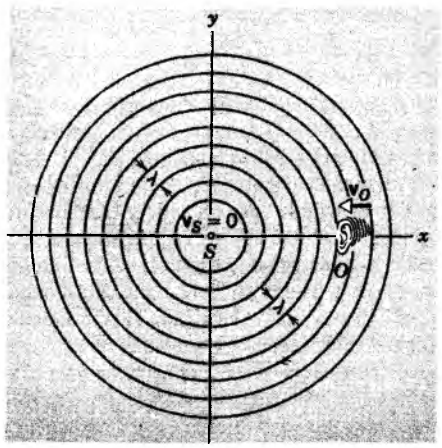



**Figura 12** Una fuente estacionaria de sonido *S* emite frentes de onda esféricos, mostrados con la separación de una longitud de onda. Un observador *O*, representado por la oreja, se mueve con velocidad $v_O$ hacia la fuente. El observador en movimiento encuentra más ondas por segundo que un observador en reposo y por lo tanto mide una frecuencia más elevada. El observador mediría una frecuencia *más baja* para el movimiento que se aleja de la fuente.

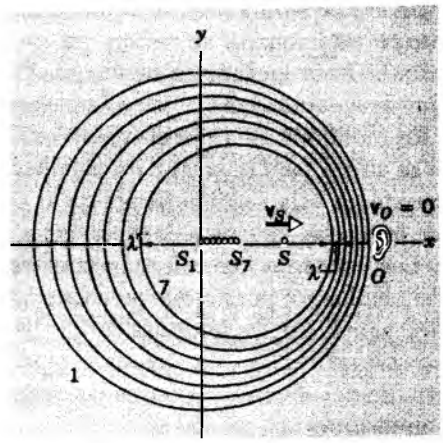



**Figura 13** Aquí el observador *O* está en reposo, y la fuente se mueve hacia él con una velocidad $v_S$. El frente de onda 1 fue emitido cuando la fuente estaba en $S_1$, el frente de onda 7 cuando la fuente estaba en $S_7$, y así sucesivamente. En el instante de esta ilustración, la fuente está en *S*. El observador mide una longitud de onda más corta a causa del "apiñamiento" de los frentes de onda a lo largo del movimiento. Un observador situado en el eje *x* negativo, a partir del cual se estaría alejando la fuente, mediría una longitud de onda más larga.

se aleja de la fuente. Nótese que el cambio de frecuencia ocurre porque el observador intercepta más o menos ondas en cada segundo como resultado del movimiento a través del medio.

## Fuente móvil, observador en reposo

Cuando la fuente está móvil *hacia* un observador estacionario, el efecto es un acortamiento de la longitud de onda (véase la Fig. 13), ya que la fuente está viajando tras las ondas que se aproximan, y, por lo tanto, las crestas se juntan más entre sí. Si la frecuencia de la fuente es $\nu$ y su velocidad es $v_S$, entonces durante cada vibración viaja una distancia $v_S/\nu$, y cada longitud de onda se acorta en esta cantidad. De aquí que la longitud de onda del sonido que llega al observador no sea $\lambda = v/\nu$ sino $\lambda' = v/\nu - v_S/\nu$. La frecuencia del sonido que el observador oye aumenta y está dada por

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_S)/\nu} = \nu \frac{v}{v - v_S}. \tag{37}$$

Si la fuente se mueve *alejándose* del observador, la longitud de onda emitida es $v_S/\nu$ mayor que $\lambda$, de modo que el observador oye una frecuencia disminuida, es decir,

$$\nu' = \frac{v}{(v + v_S)/\nu} = \nu \frac{v}{v + v_S}. \tag{38}$$

De aquí que la relación general que prevalece cuando el *observador está en reposo* respecto al medio pero la *fuente se mueve* a través de él sea

$$\nu' = \nu \frac{v}{v \pm v_S}, \tag{39}$$

donde el signo menos rige para el movimiento hacia el observador y el signo más para el movimiento alejándose del observador. Nótese que el cambio aquí es el acortamiento o el aumento de la longitud de onda transmitida en el medio debido al movimiento de la fuente en el medio.

Si *tanto la fuente como el observador se mueven* en el medio transmisor, puede demostrarse que el observador oye una frecuencia dada por

$$\nu' = \nu \frac{v \pm v_O}{v \mp v_S}, \tag{40}$$

donde los signos superiores (+ en el numerador, - en el denominador) corresponden a la fuente y al observador cuando se acercan, y los signos inferiores cuando se aleja uno del otro. La ecuación 40 incorpora a las cuatro posibilidades distintas, como lo muestra el problema muestra 5. Obsérvese que la ecuación 40 se reduce a la ecuación 36 cuando $v_S = 0$ y a la ecuación 39 cuando $v_0 = 0$, como debe ser.

Si una fuente de sonido se mueve alejándose de un observador y hacia una pared, el observador oye dos notas de frecuencia diferente. La nota oída directamente a partir de la fuente en retroceso baja de tono debido al movimiento. La otra nota se debe a las ondas reflejadas en la pared, y ésta se eleva de tono (porque la fuente se mueve *hacia* la pared, y la pared "oye" la frecuencia más alta). La superposición de estos dos trenes de ondas produce pul-

saciones. Un efecto similar ocurre si una onda que parte de una fuente estacionaria se refleja en un objeto en movimiento. La frecuencia de pulsación puede emplearse para deducir la velocidad del objeto. Éste es el principio básico de los monitores de velocidad por medio de radar, y también se utiliza para rastrear a los satélites.

Lo expuesto en esta sección se aplica al corrimiento Doppler de las ondas sonoras y de otras ondas mecánicas similares. Las ondas de luz muestran también el efecto Doppler; sin embargo, puesto que no existe un medio de propagación para la luz, las fórmulas desarrolladas en esta sección no son aplicables. Véanse los capítulos 21 y 42 para un estudio del efecto Doppler en las ondas de luz.

**Problema muestra 5** La sirena de un auto de la policía emite un tono puro a una frecuencia de 1125 Hz. Halle la frecuencia que usted percibiría en su automóvil bajo las siguientes circunstancias: (*a*) su auto está en reposo, el de la policía se mueve hacia usted a 29 m/s (65 mi/h); (*b*) el auto de la policía está en reposo, su auto se mueve hacia él a 29 m/s; (*c*) su auto y el de la policía se mueven uno hacia el otro a 14.5 m/s; (*d*) su auto se mueve a 9 m/s, y el de la policía le sigue a usted a 38 m/s.

**Solución** Las cuatro partes de este problema pueden resolverse usando la ecuación 40. (*a*) Aquí $v_o = 0$ (su auto está en reposo) y $v_s = 29$ m/s. Escogemos el signo de arriba (menos) en el denominador de la ecuación 40, porque el auto de la policía se está moviendo hacia usted. Entonces obtenemos, usando $v = 343$ m/s como la velocidad del sonido en aire tranquilo,

$$\nu' = \nu \frac{v}{v - v_S} = (1125 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 29 \text{ m/s}} = 1229 \text{ Hz}.$$

(*b*) En este caso $v_s = 0$ (el auto de la policía está en reposo) y $v_0 = 29$ m/s. Escogemos el signo de arriba (más) en el numerador de la ecuación 40, porque usted se mueve hacia el auto de la policía, y hallamos

$$\nu' = \nu \frac{v + v_O}{v} = (1125 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s} + 29 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}} = 1220 \text{ Hz}.$$

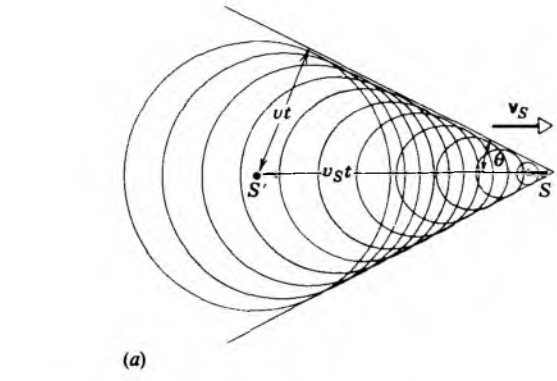
(*c*) En este caso $v_s = 14.5$ m/s y $v_o = 14.5$ m/s. Escogemos los signos de arriba tanto en el numerador como en el denominador de la ecuación 40, porque su auto y el de la policía se mueven uno hacia el otro. Entonces obtenemos

$$\nu' = \nu \frac{v + v_O}{v - v_S} = (1125 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s} + 14.5 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 14.5 \text{ m/s}} = 1224 \text{ Hz}.$$

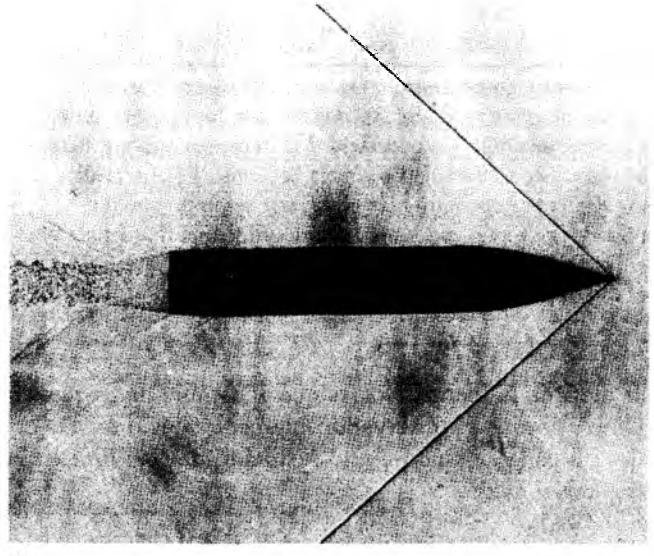
(*d*) Aquí $v_o = 9$ m/s y $v_s = 38$ m/s. Su auto se mueve alejándose del auto de la policía, así que elegimos el signo de abajo (menos) en el numerador, pero el auto de la policía se está moviendo *hacia* usted, de modo que elegimos el signo de arriba (menos) en el denominador. El resultado es

$$\nu' = \nu \frac{v - v_O}{v - v_S} = (1125 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s} - 9 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 38 \text{ m/s}} = 1232 \text{ Hz}$$

Obsérvese que en los cuatro casos de este problema, la velocidad relativa entre usted y el auto de la policía es la misma, es decir, 29 m/s, pero las frecuencias percibidas son diferentes en los cuatro casos. La desviación Doppler del sonido se determina no sólo por la velocidad relativa entre la fuente y el observador, sino también por sus velocidades relativas al medio que transporta al sonido.




(*a*)



(*b*)

**Figura 14** (*a*) Frentes de onda de una fuente que se mueve a velocidad supersónica. Los frentes de onda son esféricos y su envolvente es un cono. Compare esta figura con la figura 13. (*b*) Fotografía de un proyectil disparado por un arma en un Mach 2. Obsérvese el cono Mach.

## Efectos a grandes velocidades *(Opcional)*

Cuando $v_o$ o $v_s$ resultan comparables a $v$ en magnitud, las fórmulas dadas antes para el efecto Doppler deben modificarse. Se requiere una modificación, porque la relación lineal entre la fuerza de restauración y el desplazamiento que hasta ahora hemos supuesto ya no es válida en el medio. La velocidad de propagación de la onda ya no es la velocidad de fase normal, y la onda cambia de forma en el tiempo. Las componentes del movimiento en ángulos rectos a la línea que une a la fuente con el observador contribuyen también al efecto Doppler a estas grandes velocidades. Cuando $v_o$ o $v_s$ excede a $v$, la fórmula Doppler ya no tiene validez; por ejemplo, si $v_s > v$, la fuente se adelanta a la onda en una dirección; si $v_o > v$ y el observador se aleja de la fuente, la onda nunca llega al observador.

Hay muchos ejemplos en los que la fuente se mueve en el medio a una velocidad mayor que la velocidad de fase de la onda en ese medio. En tales casos, el frente de onda toma la forma de un cono en cuyo vértice se halla el cuerpo en movimiento. Otros ejemplos son la onda arqueada de un bote rápido sobre el agua y la "onda de choque" de un aeroplano o proyectil que se mueve por el aire a una velocidad mayor que la del sonido en ese medio (velocidades supersónicas). Otro ejemplo es la radiación Cerenkov, que consiste en ondas de luz emitidas por partículas cargadas que se mueven en un medio con una velocidad mayor que la velocidad de fase de la luz en ese medio. El resplandor azul del agua que a menudo rodea el núcleo de un reactor nuclear es un tipo de radiación Cerenkov.

En la figura 14*a* mostramos las posiciones actuales de las ondas esféricas que se originan en diversas posiciones de una fuente durante su movimiento. El radio de cada esfera en este tiempo es el producto de la velocidad de la onda $v$ y el tiempo $t$ que ha transcurrido desde que la fuente estaba en su centro. La envolvente de estas ondas es un cono cuya superficie forma un ángulo $\theta$ con la dirección del movimiento de la fuente. A partir de la figura obtenemos el resultado

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v}{v_S}. \tag{41}$$

En las ondas que se forman en la superficie del agua el cono se reduce a un par de líneas que se intersecan. En aerodinámica la razón $v_s/v$ se llama el *número Mach*. Un aeroplano que viaje a una velocidad supersónica genera un *cono Mach* similar al mostrado en la figura 14. Cuando el borde de ese cono intercepta al terreno que está abajo, oímos un "estampido sónico", el cual (contrario a la creencia común) *no* tiene nada que ver con el aeroplano que "rompe la barrera del sonido". El estampido sónico es simplemente el efecto total de la concentración sobre una superficie de la energía sónica irradiada por el aeroplano, la cual se irradiaría normalmente en todas direcciones a velocidades subsónicas. Como lo muestra la fotografía de la figura 14*b*, podría ser posible oír dos estampidos sónicos provenientes del mismo aeroplano, uno que partiese del borde anterior y otro que partiese del borde posterior. (Obsérvese también que el cono Mach nunca intercepta al proyectil en sí mismo; así, los pasajeros del aeroplano no oyen el estampido sónico.) ■

## PREGUNTAS

1. ¿Por qué no viaja el sonido en el vacío?
2. Liste algunas fuentes de ondas infrasónicas y de ondas ultrasónicas.
3. Las ondas ultrasónicas pueden emplearse para revelar estructuras internas del cuerpo humano. Por ejemplo, pueden distinguir entre los tejidos líquidos y los tejidos blandos del organismo humano mucho mejor que los rayos X. ¿Cómo? ¿Por qué se emplean aún los rayos X?
4. ¿Qué evidencia experimental existe para suponer que la velocidad del sonido en el aire es la misma para todas las longitudes de onda?
5. Ofrezca una explicación cualitativa de por qué la velocidad del sonido en el plomo es menor que en el cobre.
6. Las ondas transversales de una cuerda pueden ser polarizadas planas. ¿Pueden ser polarizadas las ondas de sonido?
7. Las campanas suelen tener un sonido menos agradable que el de un piano o el de un violín. ¿Por qué?
8. En una escuela hacen sonar una campana durante un tiempo corto. Después de un rato su sonido es inaudible. Trace las ondas de sonido y la energía que transfieren a partir del tiempo de emisión hasta que se vuelven inaudibles.
9. Cuando una orquesta "entra en calor", el tono de los instrumentos de aliento se eleva y el de los instrumentos de cuerda decae. Explique por qué.
10. Explique cómo se afina un instrumento de cuerdas.
11. ¿Es la resonancia una característica deseable en todos los instrumentos musicales? Dé ejemplos.
12. Cuando se golpea una de las ramas del diapasón, la otra rama vibra también, incluso cuando se afianza firmemente el mango de la horquilla en un tornillo de banco. ¿Por qué sucede esto? Es decir, ¿cómo "sabe" esa segunda rama de la horquilla que alguien ha golpeado a la otra?
13. ¿Cómo puede viajar una onda de sonido por un tubo de órgano y reflejarse en su extremo abierto? Parecería que allí no existe nada que la refleje.
14. ¿Cómo podemos localizar experimentalmente las posiciones de los nodos y de los antinodos en una cuerda, en una columna de aire, y sobre una superficie vibratoria?
15. Explique cómo se produce una nota al soplar a través de la parte superior de un tubo de pruebas. ¿Cuál sería el efecto de soplar más fuerte? ¿Cuál sería el efecto si se elevara a la temperatura del aire que está dentro del tubo de pruebas?
16. ¿Qué podría usted hacer para reducir el nivel de ruido en un taller de máquinas herramienta?
17. Las trompetas para niebla emiten sonidos de tono muy bajo. ¿Con qué objeto?
18. ¿Son siempre audibles como sonido las ondas longitudinales en el aire, cualquiera que sea la frecuencia o la intensidad? ¿Qué frecuencias producirían en una persona la mayor sensibilidad, la mayor tolerancia, y la gama más amplia?
19. ¿Cuál es el objetivo común de las válvulas de un cornetín y de la barra deslizante de un trombón? Un clarín no tiene válvulas. ¿Entonces cómo podemos hacer sonar notas diferentes en él? ¿A qué notas se limita la persona que toca un clarín? ¿Por qué?
20. Explique por qué el arco hace vibrar a una cuerda de violín.
21. ¿Cuál es el significado de cero decibeles? ¿Podría establecerse la intensidad de referencia del sonido audible con el

fin de permitir niveles de sonido negativos en decibeles? De ser así, ¿cómo?

22. Explique los factores que determinan la gama de frecuencias y el timbre de nuestra voz.
23. Explique el origen del sonido en un silbido ordinario.
24. ¿Qué propiedades físicas de una onda sonora corresponden a las sensaciones humanas de tono, sonoridad, y timbre?
25. ¿Cuál es la diferencia entre una nota de violín y la misma nota emitida por la voz humana que nos permite distinguir entre una y otra?
26. ¿Suena nuestra voz al cantar realmente mejor en la regadera? De ser así, ¿cuáles son las razones físicas?
27. Explique el sonido audible producido al rozar el borde de una copa de vino con el dedo húmedo.
28. ¿Oscilaría una cuerda de violín punteada durante un tiempo más largo o más corto si el violín careciera de caja de resonancia? Explique.
29. ¿Es una cuerda de violín frotada por el arco un ejemplo de oscilaciones amortiguadas forzadas? ¿Cómo sonaría la cuerda si no fuese amortiguada?
30. Un tubo puede actuar como filtro acústico, discriminando el paso a través de él de sonidos de frecuencias diferentes de las frecuencias naturales del tubo. El silenciador de un automóvil es un ejemplo. (*a*) Explique cómo trabaja esta clase de filtro. (*b*) ¿Cómo podemos determinar la frecuencia de corte, por debajo de la cual no se transmite el sonido?
31. Exponga los factores que mejoran la acústica en las salas de concierto.
32. ¿Cuál es el efecto de usar un megáfono o de ahuecar las manos delante de la boca para proyectar la voz a distancia?
33. Un relámpago disipa una cantidad enorme de energía y en esencia es instantáneo. ¿Cómo esa energía se transforma en las ondas sonoras del trueno? (Véase "Thunder", por Arthur A. Few, *Scientific American*, julio de 1975, pág. 80.)
34. Las ondas sonoras pueden emplearse para medir la velocidad a la que fluye la sangre por arterias y venas.Explique cómo.
35. Suponga que Jorge silba y que Gloria lo oye. Ella oiría una frecuencia aumentada si estuviese corriendo hacia Jorge o si Jorge estuviese corriendo hacia ella. ¿Son los aumentos de frecuencia iguales en cada caso? Suponga las mismas velocidades al correr.
36. Suponga que, en el efecto Doppler del sonido, la fuente y el receptor están en reposo en algún marco de referencia pero el medio de transmisión (el aire) se está moviendo respecto a este marco. ¿Existirá un cambio en la longitud de onda, o en la frecuencia, recibida?
37. Usted está parado en el centro de una carretera y hacia usted viene un autobús a una velocidad constante, haciendo sonar su claxon. ¿Se eleva, decae, o es constante el tono del claxon a causa del efecto Doppler?
38. ¿Cómo podría emplearse el efecto Doppler en un instrumento para detectar el latido de un corazón fetal? (Tales mediciones se practican rutinariamente; véase "Ultrasound in Medical Diagnosis", por Gilbert D. Devey y Peter N. T. Wells, *Scientific American*, mayo de 1978, pág. 98.)
39. Los murciélagos pueden conocer las características de los objetos (como su tamaño, forma, distancia, dirección, y movimiento) percibiendo la manera en que se reflejan hacia ellos los objetos mediante los sonidos de alta frecuencia que emiten. Exponga cualitativamente cómo afectan cada una de estas características a las ondas de sonido reflejadas. (Véase "Information Content of Bat Sonar Echoes", por J. A. Simmons, D. J. Howell, y N. Suga, *American Scientific*, marzo-abril de 1975, pág. 204).
40. Supongamos que podemos detectar a un objeto por las ondas que rebotan de él (como en el caso del sonar o del radar, por ejemplo) siempre que el objeto sea más grande que la longitud de onda de las ondas. Consideremos luego que los murciélagos y las marsopas pueden emitir ondas sonoras de 100 kHz de frecuencia; sin embargo, los murciélagos pueden detectar objetos tan minúsculos como un insecto y, en cambio, las marsopas únicamente peces pequeños. ¿Por qué la diferencia?
41. ¿Existe un efecto Doppler para el sonido cuando el observador o la fuente se mueven en ángulo recto con la línea que los une? ¿Cómo podemos entonces determinar el efecto Doppler cuando el movimiento tenga una componente en ángulo recto con esa línea?
42. Dos buques con sirenas de vapor del mismo tono las hacen sonar en el puerto. ¿Cabe esperar que ello produzca un patrón de interferencia con regiones de intensidad alta y baja? Si no, ¿por qué no?
43. Un satélite emite ondas de radio de frecuencia constante. Estas ondas se recogen en tierra y se las hace pulsar contra alguna frecuencia estándar. La frecuencia de pulsación se envía luego por un altavoz y uno "oye" las señales del satélite. Describa cómo cambia el sonido a medida que el satélite se aproxima, pasa por encima, y retrocede respecto al detector en tierra.
44. ¿Cómo y en qué difieren los efectos Doppler de la luz y del sonido? ¿En qué aspecto son iguales?

## PROBLEMAS

Según sea necesario en los problemas, tome la velocidad del sonido en el aire = 343 m/s y la densidad del aire = 1.21 kg/m$^3$ a menos que se den otros valores.

### *Sección 20-1 La velocidad del sonido*

1. Para diagnosticar y examinar tumores en tejidos blandos se emplea un ultrasonido de 4.50 MHz de frecuencia. (*a*)

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACIÓN Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



¿Cuál es la longitud de onda en el aire de esa onda de sonido? (*b*) Si la velocidad del sonido en el tejido humano es de 1500 m/s, ¿cuál es la longitud de onda de esta onda en el tejido?

2. Si la longitud de onda del sonido es grande en un factor de alrededor de 10 con relación al recorrido libre medio de las moléculas, entonces las ondas de sonido pueden propagarse a través de un gas. En aire a la temperatura ambiente, el recorrido libre medio es de alrededor de 0.1 $\mu$m. Calcule la frecuencia por encima de la cual no podrían propagarse las ondas de sonido.
3. La figura 15 muestra una imagen notablemente detallada del transistor de un circuito microelectrónico, formada por un microscopio acústico. Las ondas de sonido tienen una frecuencia de 4.2 GHz. La velocidad de tales ondas en el helio líquido en el que se encuentra sumergido el espécimen es de 240 m/s. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de estas ondas acústicas de frecuencia ultraelevada? (*b*) Los conductores a modo de listón en la figura tienen un ancho de unos 2 $\mu$m, aproximadamente. ¿A cuántas longitudes de onda corresponde esta cantidad?

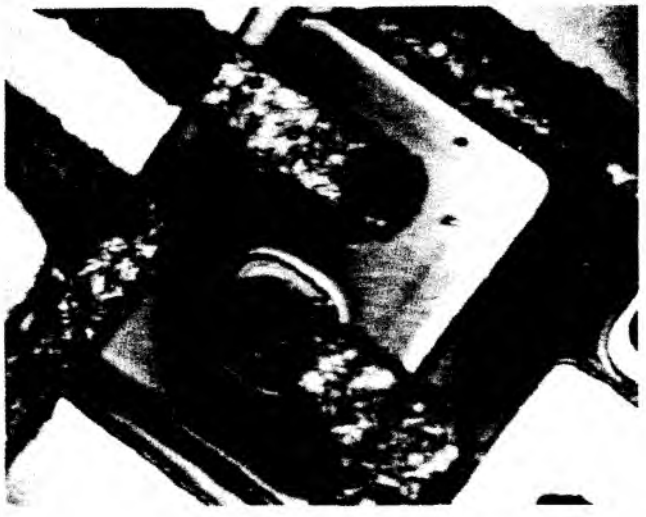


**Figura 15** Problema 3.

4. (*a*) Una regla para hallar la distancia a la que se forma un relámpago consiste en contar los segundos a partir del tiempo en que vemos el relámpago hasta que oímos el trueno y luego dividir esa cantidad entre 5. Si el resultado debe dar la distancia en millas. Explique esta regla y determine el porcentaje de error en ella a 0° C y 1 atm de presión. (*b*) Elabore una regla similar para calcular la distancia en kilómetros.
5. Una columna de soldados que marcha a 120 pasos por minuto se mantiene al paso con la música de una banda que encabeza la columna. Se observa que los hombres que van atrás de la columna dan el paso con el pie izquierdo cuando los de la banda lo dan con el pie derecho. ¿Cuál es la longitud de la columna, aproximadamente?
6. Está usted presente en un gran recinto de concierto al aire libre sentado a 300 m del micrófono del escenario. El concierto está siendo radiado en vivo, en estéreo, alrededor del mundo vía satélite. Considere a un oyente a 5000 km de distancia. ¿Quién oye la música primero y con qué diferencia de tiempo?
7. La velocidad del sonido en cierto metal es $V$. El extremo de un tubo largo de ese metal, de longitud $L$, se percute con un golpe fuerte. Un oyente en el otro extremo oye dos sonidos, uno que parte de la onda que ha viajado por el tubo y otro que parte de la onda que ha viajado por el aire. (*a*) Si $v$ es la velocidad del sonido en el aire, ¿qué intervalo de tiempo $t$ transcurre entre la llegada de los dos sonidos? (*b*) Un martillo golpea una barra larga de aluminio en un extremo. Un oyente, cuya oreja está cerca del otro extremo de la barra, oye el sonido del golpe dos veces, con un intervalo de 120 ms intermedio. ¿Cuál es la longitud de la barra?
8. Los terremotos generan ondas de sonido en la Tierra. A diferencia de un gas, existen en un sólido ondas de sonido tanto transversales (S) como longitudinales (P). Típicamente, la velocidad de las ondas S es de alrededor de 4.5 km/s y la de las ondas P es de 8.2 km/s. Un sismógrafo registra las ondas P y S de un terremoto. Las primeras ondas P llegan 3 min antes que las primeras ondas S; véase la figura 16. ¿A qué distancia ocurre el terremoto?

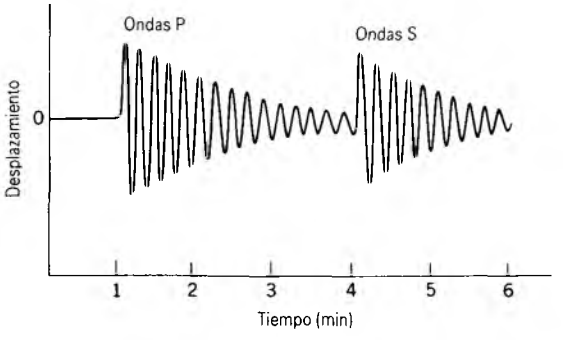



**Figura 16** Problema 8.

9. Una piedra se deja caer en un pozo. El sonido del chapoteo se oye 3.00 s más tarde. ¿Cuál es la profundidad del pozo?

### *Sección 20-2 Ondas viajeras longitudinales*

10. Una onda longitudinal sinusoidal continua se envía a lo largo de un resorte enrollado desde una fuente vibratoria unida a él. La frecuencia de la fuente es de 25 Hz, y la distancia entre enrarecimientos sucesivos en el resorte es de 24 cm. (*a*) Halle la velocidad de la onda. (*b*) Si el desplazamiento longitudinal máximo de una partícula del resorte es de 0.30 cm y la onda se mueve en dirección $-x$, escriba la ecuación de la onda. Considere que la fuente está en $x = 0$ y el desplazamiento es $s = 0$ en la fuente cuando $t = 0$.
11. La presión de una onda sonora viajera está dada por la ecuación

$$\Delta p = (1.48 \text{ Pa}) \operatorname{sen} (1.07\pi x - 334\pi t),$$

donde $x$ está en metros y $t$ en segundos. Halle (*a*) la amplitud de la presión, (*b*) la frecuencia, (*c*) la longitud de onda, y (*d*) la velocidad de la onda.

### *Sección 20-3 Potencia e intensidad de las ondas sonoras*

**12.** Demuestre que la intensidad $I$ de la onda de sonido puede expresarse en términos de la frecuencia $v$ y de la amplitud del desplazamiento $s_m$ en la forma

$$I = 2\pi^2 \rho v^2 s_m^2.$$

**13.** Una fuente emite ondas esféricas isotrópicamente (es decir, con igual intensidad en todas las direcciones). La intensidad de la onda a 42.5 m de la fuente es de 197 $\mu$W/m$^2$. Halle la salida de potencia de la fuente.

**14.** Una nota de 313 Hz de frecuencia tiene una intensidad de 1.13 $\mu$W/m$^2$. ¿Cuál es la amplitud de las vibraciones del aire causadas por este sonido?

**15.** Una onda de sonido de 1.60 $\mu$W/cm$^2$ de intensidad atraviesa una superficie de 4.70 cm$^2$ de área. ¿Cuánta energía pasa por la superficie en 1 h?

**16.** Halle la razón entre las intensidades de dos sonidos cuyos niveles de sonido difieren en 1.00 dB.

**17.** Cierto nivel de sonido se aumenta en 30 dB adicionales. Demuestre que (*a*) su intensidad aumenta en un factor de 1000 y (*b*) su amplitud de presión aumenta en un factor de 32.

**18.** Un vendedor asegura que un sistema de estéreo tiene 110 W de potencia de audio. Al probar el sistema con varias bocinas dispuestas de modo que simulen una fuente puntual, la compradora advierte que puede acercarse hasta 1.3 m, estando el sistema a pleno volumen, antes de que el sonido lastime sus oídos. ¿Puede ella denunciar a la firma ante la Procuraduría del Consumidor?

**19.** Cierta bocina produce un sonido con una frecuencia de 2.09 kHz y una intensidad de 962 $\mu$W/m$^2$ a una distancia de 6.11 m. Suponga que no existen reflexiones y que la bocina emite igualmente en todas las direcciones. (*a*) Halle la intensidad a 28.5 m. (*b*) Halle la amplitud del desplazamiento a 6.11 m. (*c*) Calcule la amplitud de presión a 6.11 m.

**20.** (*a*) Si dos ondas de sonido, una en el aire y la otra en el agua, son iguales en intensidad, ¿cuál es la razón entre la amplitud de presión de la onda en el agua a la de la onda en el aire? (*b*) Si, en vez de esto, las amplitudes de presión son iguales, ¿cuál es la razón entre las intensidades de las ondas? Suponga que el agua está a 20° C.

**21.** Halle la densidad de energía de una onda de sonido a 4.82 km de una sirena de emergencia nuclear de 5.20 kW (véase la Fig. 17), suponiendo que las ondas son esféricas y que la propagación es isotrópica sin que exista absorción atmosférica.

**22.** Una fuente lineal (por ejemplo, un tren de carga largo en una vía recta) emite una onda expansiva cilíndrica. Suponiendo que el aire no absorbe energía, halle cómo dependen (*a*) la intensidad y (*b*) la amplitud de la onda de la distancia a la fuente. Desprecie las reflexiones y considere puntos cerca del centro del tren.

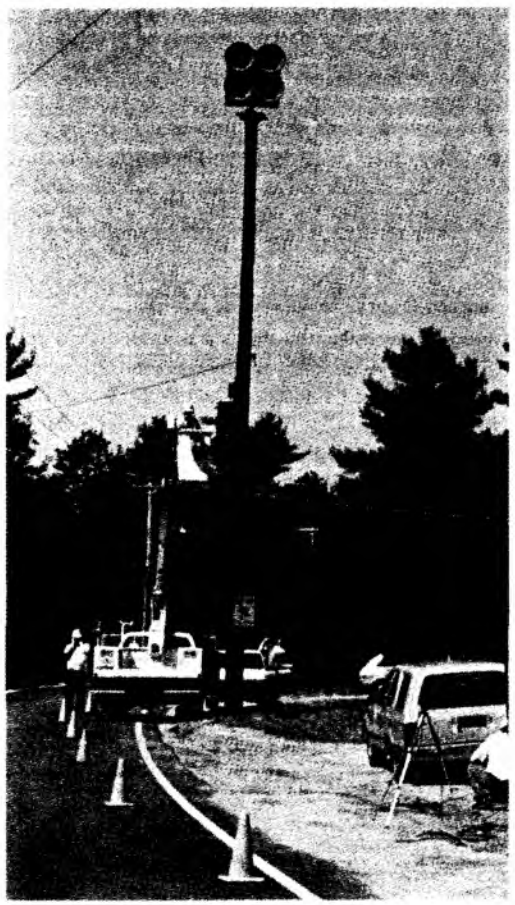


**Figura 17** Problema 21.

**23.** En la figura 18 mostramos un interferómetro acústico, usado para demostrar la interferencia de las ondas de sonido. $S$ es una fuente de sonido (por ejemplo, una bocina), y $D$ es un detector de sonido, como lo es el oído o un micrófono. La trayectoria $SBD$ puede variarse en longitud, pero la trayectoria $SAD$ es fija. El interferómetro contiene aire, y se halla que la intensidad del sonido tiene un valor mínimo de 10 $\mu$W/cm$^2$ en una posición de $B$ y sube continuamente hasta un valor máximo de 90 $\mu$W/cm$^2$ en una segunda posición a 1.65 cm de la primera. Halle (*a*) la frecuencia del sonido emitido por la fuente y (*b*) las amplitudes relativas de las ondas que llegan al detector para cada una de las dos posiciones de $B$. (*c*) ¿Por qué estas ondas tienen amplitudes diferentes, considerando que se originan en la misma fuente?

**24.** Está usted de pie a una distancia $D$ de una fuente isotrópica de ondas sonoras. Camina 51.4 m hacia la fuente y observa que la intensidad de estas ondas se ha duplicado. Calcule la distancia $D$.

**25.** Calcule el nivel de sonido máximo posible en decibeles de las ondas sonoras en el aire. (*Sugerencia*: Tome la amplitud de presión igual a 1 atm.)

**26.** Suponga que el nivel de sonido promedio de la conversación humana es de 65 dB. ¿Cuántas personas se necesitan

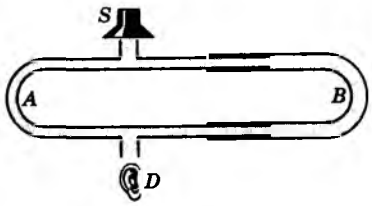



**Figura 18** Problema 23.

para producir un nivel de sonido de 80 dB en un salón donde todos hablan al mismo tiempo a 65 dB?

**27.** Supongamos que el rumor de una hoja genera 8.4 dB de sonido. Halle el nivel de sonido de un árbol que tenga $2.71 \times 10^5$ hojas.

**28.** En una prueba, un aeroplano de propulsión a chorro subsónico vuela a una altitud de 115 m. El nivel de sonido en tierra al pasar el aeroplano sobre el punto de observación es de 150 dB. ¿A qué altitud debe volar el aeroplano para que el ruido en tierra no supere los 120 dB, el umbral de dolor? Desprecie el tiempo finito necesario para que el sonido llegue al suelo.

**29.** Cierta bocina (suponiendo que sea una fuente puntual) emite 31.6 W de potencia acústica. A 194 m se halla un pequeño micrófono de 75.2 $mm^2$ de área efectiva en su sección transversal. Calcule (*a*) la intensidad del sonido en el micrófono, (*b*) la potencia que incide en el micrófono, y (*c*) la cantidad de energía que choca contra el micrófono en 25.0 min.

**30.** Una onda sonora de 42.0 cm de longitud de onda entra en el tubo que se muestra en la figura 19. ¿Cuál debe ser el radio *r* más pequeño para que se escuche un mínimo en el detector?

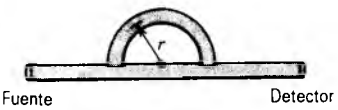



**Figura 19** Problema 30.

**31.** Dos bocinas de un sistema de estéreo están separadas por una distancia de 2.12 m. Suponga que la amplitud del sonido que parte de cada bocina es la misma en la posición de un oyente que está a 3.75 m directamente enfrente de una de las bocinas; véase la figura 20. (*a*) ¿Para qué frecuencias en la gama audible (20 a 20,000 Hz) existirá una señal mínima? (*b*) ¿Para qué frecuencias es máximo el sonido?

**32.** Una fuente esférica de sonido está situada en $P_1$ cerca de una pared reflejante *AB*, y en el punto $P_2$ está colocado un micrófono, como se muestra en la figura 21. La frecuencia de la fuente de sonido es variable. Halle las dos frecuencias más bajas para las cuales la intensidad del sonido observada en $P_2$ será un máximo. No existe cambio de fase con la reflexión; el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

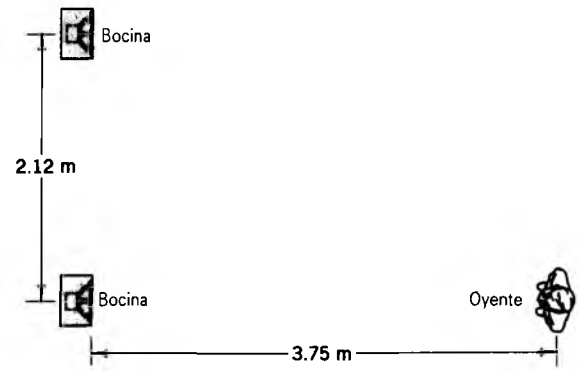



**Figura 20** Problema 31.

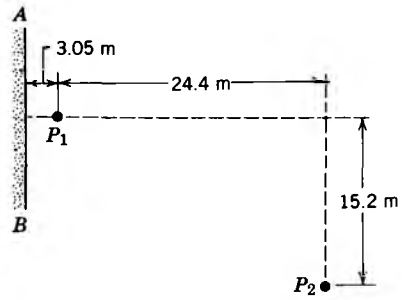



**Figura 21** Problema 32.

**33.** Dos fuentes de sonido están separadas por una distancia de 5.00 m. Ambas emiten sonido a la misma amplitud y frecuencia, 300 Hz, pero están 180° fuera de fase. ¿En qué puntos a lo largo de la línea que los une será la intensidad del sonido la más grande?

**34.** El *tiempo de reverberación* de un auditorio o de una sala de conciertos es el necesario para que la intensidad del sonido (en $W/m^2$) disminuya en un factor de $10^6$. El tiempo de reverberación depende de la frecuencia del sonido. Suponga que en una sala de conciertos en particular el tiempo de reverberación de una nota de cierta frecuencia es de 2.6 s. Si la nota se emite a un nivel de sonido de 87 dB, ¿cuánto tiempo le tomará al nivel de sonido caer a 0 dB (el umbral de audición del oído humano)?

**35.** Un gran reflector parabólico que tiene una abertura circular de 0.50 m de radio se usa para enfocar el sonido. Si la energía se emite desde el foco hasta el oído de un detective que escucha a través de un tubo de 1.0 cm de diámetro con una eficiencia del 12%, ¿a qué distancia puede captarse, de modo que se entienda, una conversación en tono de susurro? (Suponga que el nivel de un susurro es de 20 dB a 1.0 m de la fuente, considerada como puntual, y que el umbral de audición del oído humano es de 0 dB.)

### *Sección 20-4 Ondas longitudinales estacionarias*

**36.** Las cuerdas de un violonchelo tienen una longitud *L*. (*a*) ¿En qué longitud $\Delta L$ deben ser acortadas digitando para cambiar el tono en una razón de frecuencia *r*? (*b*) Halle $\Delta L$, cuando $L = 80.0$ cm y $r = \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$.

**37.** Una onda de sonido en un medio fluido se refleja en una barrera de modo que se forma una onda estacionaria. La distancia entre nodos es de 3.84 cm y la velocidad de propagación es de 1520 m/s. Halle la frecuencia.

**38.** Un pozo con costados verticales y agua en el fondo resuena a 7.20 Hz y a ninguna otra frecuencia más baja. El aire en el pozo tiene una densidad de 1.21 kg/m³ y un módulo volumétrico de $1.41 \times 10^5$ Pa. ¿Qué tan profundo es el pozo?

**39.** En la figura 22, *S* es una pequeña bocina movida por un oscilador de audio y un amplificador, ajustable en las frecuencias de 1000 a 2000 Hz únicamente. *D* es un trozo de tubo cilíndrico de metal laminado de 45.7 cm de longitud y está abierto en ambos extremos. (*a*) ¿A qué frecuencias ocurrirá una resonancia cuando la frecuencia emitida por la bocina varíe entre 1000 y 2000 Hz? (*b*) Dibuje los nodos del desplazamiento para cada resonancia. Desprecie los efectos del extremo.

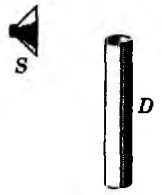



**Figura 22** Problema 39.

**40.** El ancho de las terrazas de un anfiteatro en Los Angeles, California, figura 23, es de 36 in (= 0.914 m). El aplauso producido por una sola persona desde el centro del escenario se reflejará al escenario como un tono, ¿de qué frecuencia?

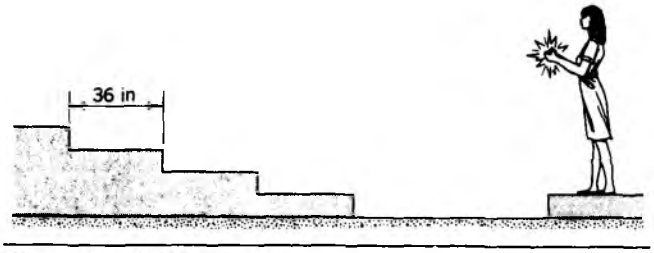



**Figura 23** Problema 40.

**41.** Un túnel que pasa recto a través de una montaña amplifica en gran manera tonos a 135 y a 138 Hz. Halle la longitud más corta que puede tener el túnel.

**42.** El periodo de una estrella variable pulsante puede calcularse considerando que la estrella esté efectuando pulsaciones longitudinales radiales en el modo fundamental de una onda estacionaria; es decir, el radio varía periódicamente con el tiempo, con un antinodo de desplazamiento en la superficie. (*a*) ¿Cabe suponer que el centro de la estrella sea un nodo o un antinodo (de desplazamiento)? (*b*) Por analogía con el tubo de órgano abierto, demuestre que el periodo *T* de la pulsación está dado por

$$T = \frac{4R}{v_S},$$

donde *R* es el radio de equilibrio de la estrella y $v_s$ es la velocidad media del sonido. (*c*) Las estrellas enanas blancas están compuestas de un material con un módulo volumétrico de $1.33 \times 10^{22}$ Pa y una densidad de $1.0 \times 10^{10}$ kg/m³. Tienen radios iguales a 0.009 del radio solar. ¿Cuál es el periodo de pulsación aproximado de una estrella enana blanca? (Véase "Pulsating Stars", por John R. Percy, *Scientific American*, junio de 1975, pág. 66.)

**43.** En la figura 24, una barra está sujeta en su centro; un disco *D* colocado en su extremo se proyecta dentro de un tubo de vidrio que tiene granulillos de corcho esparcidos en su interior. El tubo está provisto de un émbolo *P* en el otro extremo. La barra se pone en vibración longitudinal y el émbolo se mueve hasta que los granulillos de corcho forman un patrón de nodos y antinodos (los granulillos forman bordes bien definidos en los antinodos de presión). Si conocemos la frecuencia $\nu$ de las vibraciones longitudinales de la barra, una medición de la distancia promedio *d* entre antinodos sucesivos determina la velocidad del sonido $v$ en el gas contenido en el tubo. Demuestre que

$$v = 2\nu d.$$

Éste es el método de Kundt para determinar la velocidad del sonido en diversos gases.

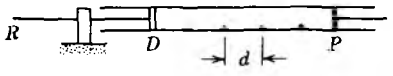



**Figura 24** Problema 43.

### *Sección 20-5 Sistemas vibratorios y fuentes de sonido*

**44.** (*a*) Halle la velocidad de las ondas de una cuerda de violín de 820 mg y 22.0 cm de longitud si la frecuencia de la fundamental es de 920 Hz. (*b*) Calcule la tensión en la cuerda.

**45.** Si una cuerda de violín está afinada en cierta nota, ¿en qué factor deberá aumentarse la tensión en la cuerda si ha de emitir una nota del doble de la frecuencia original (es decir, una nota a una octava más alta?

**46.** Cierta cuerda de violín tiene 30 cm de longitud entre sus extremos fijos y una masa de 2.0 g. La cuerda emite un La (440 Hz) cuando se pulsa sin digitar. ¿Dónde deberá ponerse el dedo para que suene un Do (528 Hz)?

**47.** Un tubo abierto de órgano tiene una frecuencia fundamental de 291 Hz. El primer sobretono ($n = 3$) de un tubo cerrado de órgano tiene la misma frecuencia que el segundo armónico del tubo abierto. ¿Qué longitud tiene cada tubo?

**48.** Un tubo de 1.18 m de longitud está cerrado en un extremo. Cerca del extremo abierto se coloca un alambre tenso. El alambre tiene 33.2 cm de longitud y 9.57 g de masa. Está fijo en ambos extremos y vibra en su modo fundamental. Pone en vibración a la columna de aire del tubo a su frecuencia fundamental por resonanacia. Halle (*a*) la fre-

cuencia de oscilación de la columna de aire y (*b*) la tensión en el alambre.

**49.** Una cuerda de violín de 30.0 cm con una densidad de masa lineal de 0.652 g/m está situada cerca de un bocina alimentada por un oscilador de audio de frecuencia variable. Se halla que la cuerda se pone en oscilación únicamente a las frecuencias de 880 Hz y 1320 Hz cuando la frecuencia del oscilador se varía continuamente dentro de la gama de 500 a 1500 Hz. ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

### *Sección 10-6 Pulsaciones*

**50.** Un diapasón de frecuencia desconocida produce tres pulsaciones por segundo contra un diapasón estándar de 384 Hz de frecuencia. La frecuencia de la pulsación disminuye cuando se pone en una punta del primer diapasón un pequeño trozo de cera. ¿Cuál es la frecuencia de este diapasón?

**51.** Una cuerda La de un violín está un poco más tensa de la cuenta. Se oyen cuatro pulsaciones por segundo cuando se hace sonar junto con un diapasón que está vibrando precisamente al tono La de concierto (440 Hz). ¿Cuál es el periodo de vibración de la cuerda de violín?

**52.** Se le dan a usted cuatro diapasones. El diapasón con la frecuencia más baja vibra a 500 Hz. Usando dos diapasones al mismo tiempo, se escuchan las siguientes frecuencias de pulsación: 1, 2, 3, 5, 7, y 8 Hz. ¿Cuáles son las frecuencias posibles de los otros tres diapasones?

**53.** Se le dan a usted cinco diapasones, cada uno de ellos con una frecuencia diferente. Ensayando con cada par de diapasones, (*a*) ¿cuál es el número máximo de frecuencias de pulsación *diferentes* que podrían obtenerse? (*b*) ¿Cuál es el número mínimo de frecuencias de pulsación *diferentes* que podrían obtenerse?

### *Sección 20-7 El efecto Doppler*

**54.** Una fuente *S* genera ondas circulares en la superficie de un lago, mostrándose en la figura 25 el patrón de las crestas de las ondas. La velocidad de las ondas es de 5.5 m/s y la separación entre crestas es de 2.3 m. Usted está en un pequeño bote enfilado directamente hacia *S* a una velocidad constante de 3.3 m/s respecto a la orilla. ¿Qué frecuencia observa usted en las ondas?

**55.** ¿A qué frecuencia se oye el chillido de 15.8 kHz de las turbinas de los motores de un aeroplano que vuela a una velocidad de 193 m/s por el piloto de un segundo aeroplano que trata de adelantar al primero con una velocidad de 246 m/s?

**56.** Una ambulancia que emite un chillido de 1602 Hz se empareja y rebasa a un ciclista que pedalea una bicicleta a 2.63 m/s. Después de haberlo rebasado, el ciclista oye una frecuencia de 1590 Hz. ¿A qué velocidad se mueve la ambulancia?

**57.** Un silbato de 538 Hz de frecuencia se mueve en un círculo de 71.2 cm de radio con una velocidad angular de 14.7 rad/s. ¿Cuáles son (*a*) la frecuencia más baja, y (*b*) la frecuencia más alta captada por un oyente que está a gran distancia en reposo respecto al centro del círculo?

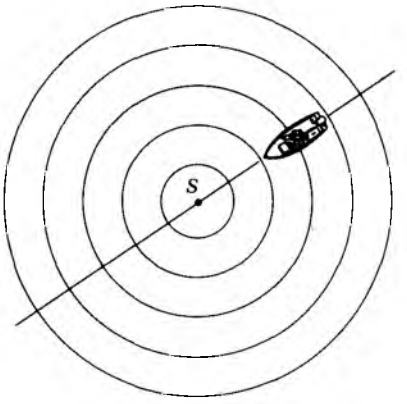



**Figura 25** Problema 54.

**58.** En 1845, Buys Ballot probó por primera vez el efecto Doppler en el sonido. Colocó a un trompetista en un carro de plataforma jalado por una locomotora y a otro trompetista cerca de las vías. Si cada uno de los trompetistas tocaba una nota de 440 Hz, y si existían 4.0 pulsaciones por segundo cuando se aproximaban entre sí, ¿cuál era la velocidad de la plataforma?

**59.** Una bala se dispara con una velocidad de 2200 ft/s. Halle el ángulo formado por el cono de choque con la línea de movimiento de la bala.

**60.** Calcule la velocidad del proyectil ilustrado en la fotografía de la figura 14. Suponga que la velocidad del sonido en el medio en que está viajando el proyectil es de 380 m/s.

**61.** La velocidad de la luz en el agua es de $2.25 \times 10^8$ m/s (alrededor de las tres cuartas partes de la velocidad en el vacío). Un haz de electrones a alta velocidad que parte de un betatrón emite radiación Cerenkov en el agua, formando el frente de onda un cono de un ángulo de 58.0°. Halle la velocidad de los electrones en el agua.

**62.** Dos diapasones idénticos oscilan a 442 Hz. Una persona está situada en alguna parte de la línea que los une. Calcule la frecuencia de la pulsación medida por este individuo si (*a*) está parado y quieto y los diapasones se mueven ambos hacia la derecha a 31.3 m/s, y (*b*) los diapasones están estacionarios y el oyente se mueve hacia la derecha a 31.3 m/s.

**63.** Un aeroplano vuela a 396 m/s a una altitud constante. El choque sónico llega a un observador en tierra 12.0 s después de que el aeroplano ha pasado sobre su cabeza. Halle la altitud del aeroplano. Suponga que la velocidad del sonido es de 330 m/s.

**64.** Un avión de propulsión a chorro pasa sobre un punto situado en tierra a una altura de 5140 m y a una velocidad de 1.52 Mach (1.52 veces la velocidad del sonido). (*a*) Halle el ángulo formado por la onda de choque con la línea de movimiento del avión. (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a tierra la onda de choque después de que el avión ha pasado sobre el punto? Use 331 m/s como velocidad del sonido.

**65.** La figura 26 muestra a un transmisor y a un receptor de ondas contenidos en un solo instrumento. Se emplean para medir la velocidad *V* de un objeto-blanco (idealizado

como una placa plana) que se mueve directamente hacia la unidad, analizando las ondas reflejadas por él. (*a*) Aplique las ecuaciones de Doppler dos veces, primero con el blanco como observador y luego con el blanco como fuente, y demuestre que la frecuencia $v_r$ de las ondas reflejadas en el receptor se relaciona con la frecuencia $v_s$ de su fuente según

$$v_r = v_s\left(\frac{v+V}{v-V}\right),$$

donde $v$ es la velocidad de las ondas. (*b*) En un gran número de situaciones prácticas, $V \ll v$. En este caso, demuestre que la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{v_r - v_s}{v_s} \approx \frac{2V}{v}.$$

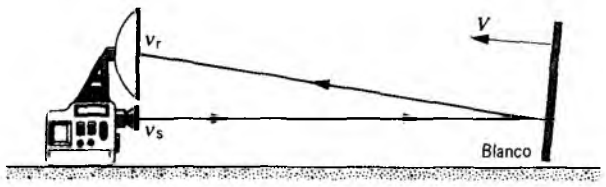



**Figura 26** Problema 65.

**66.** Un aparato de sonar envía ondas de sonido de 148 kHz desde un auto de la policía a un camión que se aproxima con una velocidad de 44.7 m/s. Calcule la frecuencia de las ondas reflejadas detectada en el auto de la policía.

**67.** Una alarma acústica contra ladrones consta de una fuente que emite ondas de 28.3 kHz de frecuencia. ¿Cuál será la frecuencia de pulsación de las ondas reflejadas en un intruso que camine a razón de 0.95 m/s alejándose directamente de la alarma?

**68.** Una sirena que emite un sonido de 1000 Hz de frecuencia se mueve alejándose de usted hacia un peñasco con una velocidad de 10.0 m/s. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia del sonido que usted oye directamente procedente de la sirena? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia del sonido que usted oye reflejándose en el peñasco? (*c*) Halle la frecuencia de la pulsación. ¿Podría usted oír las pulsaciones? Considere que la velocidad del sonido en el aire es de 330 m/s.

**69.** Una persona que viaja en un auto sopla una trompeta que suena a 438 Hz. El auto avanza hacia una pared a 19.3 m/s. Calcule (*a*) la frecuencia del sonido como se recibiría en la pared y (*b*) la frecuencia del sonido reflejado que regresa a la fuente.

**70.** Dos submarinos se encuentran en ruta de colisión frontal durante unas maniobras en el Atlántico Norte. El primer submarino se mueve a 20.2 km/h y el segundo a 94.6 km/h. El primero envía una señal de sonar (onda sonora en el agua) de 1030 Hz. Las ondas de sonar viajan a 5470 km/h. (*a*) El segundo submarino capta la señal. ¿Qué frecuencia oye el detector de sonar de este segundo submarino? (*b*) El primer submarino capta la señal reflejada. ¿Qué frecuencia oye el detector de sonar de este primer submarino? Véase la figura 27. El océano está en calma; suponga que no hay corrientes.

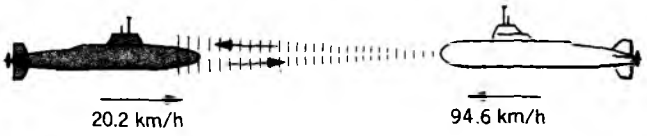



**Figura 27** Problema 70.

**71.** Un auto de la policía hace sonar su sirena cuando se mueve a 27 m/s y se aproxima a un peatón estacionario. El policía que va en el auto oye la sirena a 12.6 kHz pero el peatón la oye a 13.7 kHz. Halle la temperatura del aire. (Suponga que la velocidad del sonido aumenta linealmente con la temperatura entre 0° C y 20° C; véase la tabla 1.)

**72.** En una conferencia sobre las desviaciones Doppler de las ondas ultrasónicas (de alta frecuencia) usadas en el diagnóstico médico, los autores decían: "La frecuencia de la onda ultrasónica incidente se desvía en unos 1.3 Hz/MHz aproximadamente por cada milímetro por segundo que se mueva una estructura en el cuerpo". ¿Qué velocidad de las ondas ultrasónicas en el tejido humano puede usted deducir de tal afirmación?

**73.** Un murciélago revolotea en una cueva, navegando muy eficazmente al utilizar emisiones ultrasónicas (emisiones cortas de sonido de alta frecuencia que duran un milisegundo o menos y se repiten varias veces por segundo). Suponga que la frecuencia de la emisión de los sonidos de un murciélago es de 39.2 kHz. Durante una zambullida rápida en línea recta hacia una pared de superficie plana, el murciélago se mueve a 8.58 m/s. Calcule la frecuencia del sonido del eco que escucha el murciélago reflejado por la pared.

**74.** Un submarino que se mueve hacia el norte con una velocidad de 75.2 km/h respecto al fondo del océano emite una señal de sonar (ondas sonoras en el agua empleadas de modo similar al radar; véase la tabla 1) de 989 Hz de frecuencia. Si en ese punto el océano tiene una corriente que se mueve hacia el norte a 30.5 km/h con relación a tierra, ¿qué frecuencia capta un buque que es arrastrado por la corriente al norte del submarino? (*Sugerencia*: Todas las velocidades que aparecen en las ecuaciones Doppler deben considerarse respecto al medio.)

**75.** Una sirena 2000 Hz y un oficial de la defensa civil están ambos en reposo con respecto a la Tierra. ¿Qué frecuencia oye el oficial si el viento sopla a 12 m/s (*a*) de la fuente hacia el observador y (*b*) del observador hacia la fuente?

**76.** Dos trenes que corren en vías paralelas viajan uno hacia el otro a 34.2 m/s con relación al suelo. Un tren hace sonar el silbato a 525 Hz. (*a*) ¿Qué frecuencia se oirá en el otro tren en aire tranquilo? (*b*) ¿Qué frecuencia se oirá en el otro tren si el viento sopla a 15.3 m/s paralelo a las vías y hacia el silbato? (*c*) ¿Qué frecuencia se oirá si se invierte la dirección del viento?

# CAPÍTULO 21

# LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD*

*La teoría especial de la relatividad tiene la reputación inmerecida de ser un tema difícil. Matemáticamente, no es complicada; la mayor parte de sus detalles pueden comprenderse usando técnicas bien conocidas por los lectores de este texto. El aspecto quizá más desafiante de la relatividad especial consiste en su insistencia en que sustituyamos varias de nuestras ideas preconcebidas sobre el espacio y el tiempo, adquiridas a través de años de experiencia basadas en el "sentido común", por otras ideas totalmente nuevas.*

*Las ideas que en esencia constituyen la teoría de la relatividad especial fueron presentadas en público en un ensayo escrito por Albert Einstein y publicado en 1905.† En este capítulo presentamos los postulados básicos de la teoría de Einstein y sus consecuencias; introducimos también las técnicas matemáticas que permiten que las mediciones hechas en un marco de referencia se transformen a otro marco, y estudiamos algunas de las consecuencias en el campo de la cinemática y de la dinámica.*

*En este libro hemos presentado con anterioridad algunos aspectos de la relatividad especial y los hemos contrastado con los resultados correspondientes de la física clásica. Antes de iniciar este capítulo el lector debe revisar los siguientes apartados de nuestro libro: Sección 4-6, movimiento relativo; Sección 7-7, Energía cinética a altas velocidades; Sección 8.7, Masa y energía; y Sección 9-4, Ímpetu lineal de una partícula.*

## 21-1 LAS DIFICULTADES CON LA FÍSICA CLÁSICA

La cinemática desarrollada por Galileo y la mecánica desarrollada por Newton, que forman la base de lo que llamamos la *física clásica*, lograron grandes éxitos. Particularmente notables son la comprensión del movimiento de los planetas y el uso de la teoría cinética para explicar ciertas propiedades observadas en los gases. Sin embargo, cierto número de fenómenos experimentales no pueden ser explicados mediante estas teorías clásicas que siguen siendo, por otra parte completamente válidas en otros casos. Consideremos unas cuantas de estas dificultades que se nos presentan con la física clásica.

### Dificultades con nuestras ideas del tiempo

El pión ($\pi^+$ o $\pi^-$) es una partícula que puede ser creada en un acelerador de partículas de alta energía. Es una partícula muy inestable; se observa que los piones creados en reposo se desintegran (para formar otras partículas) con una media de sólo 26.0 ns ($26.0 \times 10^{-9}$ s). En un experimento en particular, se crearon piones en movimiento con una velocidad $v = 0.913c$ (en donde $c$ es la velocidad de la luz). En este caso se observó que los piones viajaban en el laboratorio una distancia promedio de $D = 17.4$ m antes de desintegrarse, de lo cual concluimos que se desintegran

* Algunos profesores quizá desearán retrasar el estudio de la relatividad hasta después de haber estudiado las ondas electromagnéticas en el capítulo 41. En el capítulo 42 se estudian los efectos relativistas en el movimiento de ondas.

† En ese año Einstein publicó también sus trabajos sobre el movimiento browniano y sobre el efecto fotoeléctrico. Por este último trabajo (y no precisamente por su teoría de la relatividad) se le otorgó el premio Nobel de Física en 1921. Einstein propuso también una teoría *general* de la relatividad en 1917. La teoría general trata del efecto de la gravedad en el espacio y el tiempo, algunas de cuyas consecuencias se estudiaron en la sección 16-10. En este capítulo consideraremos únicamente la teoría *especial*, en la que la gravedad no desempeña papel alguno.

en un tiempo dado por $D/v$ = 63.7 ns, mucho mayor que la vida media medida para los piones en reposo (26.0 ns). Este efecto, llamado *dilatación del tiempo*, sugiere que algo con respecto al movimiento relativo entre el pión y el laboratorio ha estirado el intervalo de tiempo medido en un factor de 2.5, aproximadamente. Tal efecto no puede ser explicado por la física newtoniana, en la que el tiempo es una coordenada universal que tiene valores idénticos para todos los observadores.

## Dificultades con nuestras ideas de la longitud

Supongamos que un observador en el laboratorio, antes mencionado, coloca un marcador en la ubicación de la formación del pión y otro en la ubicación de su desintegración. La distancia entre los marcadores se mide en 17.4 m. Consideremos ahora la situación para un observador diferente que esté viajando junto con el pión a una velocidad $u = 0.913c$. Este observador, a quien le parece que el pión está en reposo, mide su vida media en 26.0 ns, característico de los piones en reposo. Para este observador, la distancia entre los marcadores que indican la formación y la desintegración del pión es $(0.913c)(26.0 \times 10^{-9}\ \text{s}) = 7.1$ m. Entonces, dos observadores que estén en movimiento relativo miden valores diferentes del mismo intervalo. Esto es igualmente inconsistente con la física newtoniana, en la cual las coordenadas espaciales son absolutas y ofrecen lecturas idénticas a todos los observadores.

## Dificultades con nuestras ideas de la velocidad

La figura 1 muestra un juego entre *A* y *B*, visto por un observador *O*. Los dos jugadores y el observador están en reposo en este marco de referencia. *A* lanza una pelota con una velocidad superluminosa (más rápida que la luz) hacia *B*, el cual la atrapa. La señal luminosa que porta la visión de *A* lanzando la pelota viaja hasta el observador *O*, como lo hace también la señal luminosa que porta la visión de *B* atrapando la pelota. Ambas señales luminosas viajan a la velocidad *c*, que es menor que la velocidad de la pelota lanzada por *A*. En la posición del observador *O*, como se muestra en la figura 1, la señal luminosa que parte de *B* llega antes que la señal luminosa que parte de *A*. Por lo tanto, de acuerdo con *O*, ¡*B* atrapa la pelota antes de que *A* la lance! La física newtoniana nos permite acelerar proyectiles a velocidades ilimitadas y por lo tanto permite tales violaciones aparentes de la observación de causas y efectos.

## Dificultades con nuestras ideas de la luz

La teoría del electromagnetismo de Maxwell (que analizaremos posteriormente en este texto) fue uno de los grandes logros de la física del siglo XIX. Una de las deducciones de esta teoría fue que la luz podía ser descrita como una

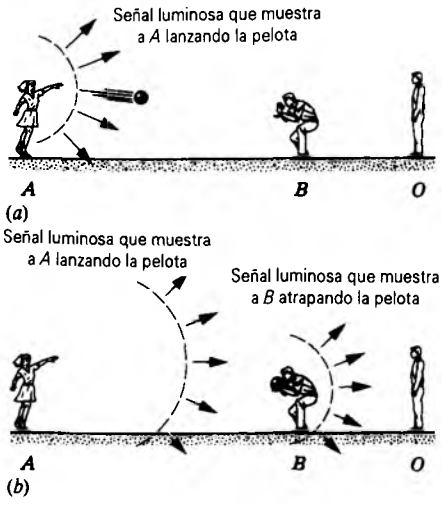



**Figura 1** (*a*) *A* lanza una pelota a *B*. La pelota se mueve más rápido que la luz y por lo tanto está adelante de la señal luminosa que muestra a *A* lanzando la pelota. (*b*) La señal luminosa que muestra a *B* atrapando la pelota llegará al observador *O* antes que la señal luminosa que muestra a *A* lanzando la pelota. Tales inconsistencias lógicas son un argumento contra la posibilidad de acelerar las partículas a velocidades más rápidas que la luz.

onda electromagnética. Al igual que una onda mecánica (analizada en el capítulo 19) puede ser analizada en términos de partículas que oscilan en un medio, una onda electromagnética puede ser analizada en términos de campos eléctricos y magnéticos en oscilación. Fue por esto que los físicos experimentales de finales del siglo pasado trataron de detectar el medio en que esos campos oscilan al propagarse la luz, así como medir la velocidad con que la Tierra se mueve en este medio que llamaron *éter*.

Desde 1881, A. A. Michelson (primer estadounidense a quien se otorgó el premio Nobel en física) y E. W. Morley efectuaron una serie de delicados experimentos ópticos (descritos en la Sec. 45-7) para medir la velocidad a la que la Tierra se mueve a través del propuesto éter. Para su sorpresa, hallaron que, dentro de su pequeño error experimental, ¡el resultado era cero! Los experimentos más recientes con rayos láser han mejorado la precisión de este resultado en muchos órdenes de magnitud, y el valor permanece consistente con el valor cero.*

Dado el movimiento complejo de la Tierra (que gira alrededor de su eje y alrededor del Sol mientras el propio Sol gira alrededor del centro de la galaxia), parece

* Para mayores detalles con respecto al experimento de Michelson y Morley, uno de los experimentos culminantes en la historia de la física, véase *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory*, por Robert Resnick y David Halliday (Wiley, 1985).

inconcebible que el éter pudiera permanecer firmemente unido a la Tierra en movimiento. Se llevaron a cabo grandes esfuerzos teóricos hacia fines del siglo XIX para tratar de explicar cómo podía ocurrir esto. La brillante contribución de Einstein a la comprensión del espacio y del tiempo consistió en que demostró que los conceptos del éter y del medio de propagación de la luz eran inútiles e innecesarios.

### Paradoja de Einstein

Einstein propuso su teoría especial de la relatividad en 1905, no como un intento de explicar el resultado del experimento de Michelson y Morley sino basado en un experimento que él había diseñado en su mente. Siendo un estudiante de 16 años, Einstein había aprendido la teoría del electromagnetismo de Maxwell y había pensado en una paradoja: si uno estuviese en movimiento a la velocidad de la luz paralelamente a un rayo de luz que viajase en el espacio vacío, observaría patrones "estáticos" del campo magnético y eléctrico. (De modo similar, mostramos en la figura 9 del capítulo 19 una pertubación "estática" en una cuerda, la cual sería vista por un observador que se moviese junto con la cuerda a la misma velocidad que las ondas en la cuerda.) Sin embargo, Einstein sabía que tales patrones estáticos del campo magnético y eléctrico en el espacio vacío violaban la teoría de Maxwell.

Einstein tenía dos caminos para resolver esta paradoja: o bien la teoría de Maxwell estaba equivocada, o bien la cinemática clásica que permite que un observador viaje junto con un rayo de luz estaba equivocada. Con la intuición que fue quizá su mayor atributo, Einstein depositó su fe en la teoría de Maxwell y buscó una alternativa a la cinemática de Galileo y de Newton. Más adelante en este capítulo demostraremos cómo esta nueva cinemática, que forma la base de la relatividad especial, evita que cualquier observador atrape a un rayo de luz. También demostraremos cómo se resuelven los otros problemas acerca del tiempo, la longitud, y la velocidad expuestos previamente.

Por supuesto, la prueba crítica de cualquier teoría consiste en lo bien que concuerda con los experimentos. La teoría de la relatividad especial de Einstein ha sido sometida a pruebas exhaustivas durante los últimos 85 años y las ha pasado todas. En donde la física clásica y la teoría de la relatividad predicen resultados diferentes, se ha encontrado siempre que el experimento concuerda con la teoría de la relatividad.

## 21-2 LOS POSTULADOS DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Una teoría científica comienza usualmente con aseveraciones generales llamadas *postulados*, que intentan proporcionar una base para la teoría. A partir de estos postulados podemos obtener un conjunto de leyes matemáticas en forma de ecuaciones que relacionan a las variables físicas. Por último, probamos las predicciones de las ecuaciones en el laboratorio. La teoría es válida hasta que el experimento la contradiga, después de lo cual los postulados pueden ser modificados o reemplazados, y el ciclo se repite.

Durante casi dos siglos, la mecánica de Galileo y de Newton resistió todas las pruebas experimentales. En este caso los postulados se refieren a la naturaleza absoluta del espacio y del tiempo. Basado en su experimento pensado sobre atrapar un rayo de luz, Einstein creyó en la necesidad de reemplazar las leyes del movimiento relativo de Galileo. En su trabajo de 1905, titulado "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento", Einstein ofreció dos postulados que forman la base de su teoría especial de la relatividad. Podemos presentar sus postulados como sigue:

**El principio de relatividad**: *Las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.*

**El principio de la constancia de la velocidad de la luz**: *La velocidad de la luz en el espacio libre tiene el mismo valor c en todos los marcos de referencia inerciales.*

El primer postulado declara que las leyes de la física son absolutas, universales e iguales para todos los observadores inerciales. Las leyes que rigen para un observador inercial no pueden ser violadas por *ningún* observador inercial.

El segundo postulado es mucho más difícil de aceptar, porque viola nuestro "sentido común", el cual está firmemente arraigado en la cinemática de Galileo que hemos aprendido de las experiencias cotidianas. Consideremos tres observadores $A$, $B$, y $C$, cada uno de ellos en reposo en un marco de referencia inercial diferente. El observador $A$ emite un destello de luz, y observa la luz viajando con velocidad $c$. El marco del observador $B$ se mueve alejándose de $A$ con una velocidad de $c/4$; la cinemática de Galileo predice que $B$ mide el valor $c - c/4 = 3c/4$ para la velocidad de la luz emitida por $A$. El observador $C$ está en un marco que se mueve *hacia* $A$ con una velocidad $c/4$; según Galileo, el observador $C$ mide una velocidad de $c + c/4 = 5c/4$ para la velocidad de la luz emitida por $A$. En cambio, el segundo postulado de Einstein asevera que ¡*los tres observadores miden la misma velocidad c en la pulsación luminosa*!

Por supuesto, ésta no es la manera de comportarse de los objetos ordinarios. Un proyectil disparado desde un automóvil en movimiento tiene una velocidad con respecto al suelo determinada por la suma vectorial de la velo-

cidad del proyectil respecto al automóvil y la velocidad del automóvil respecto al suelo. Sin embargo, las velocidades de las ondas y partículas que se mueven a velocidades cercanas a $c$ no se comportan de esta manera. En la sección 21-6 discutiremos la ley relativista de la suma de velocidades y demostraremos que se reduce a la ley de "sentido común" de Galileo para bajas velocidades.

Einstein enunció estos postulados en un momento en que las pruebas experimentales eran difíciles e incluso imposibles. Durante las décadas siguientes, el desarrollo de los aceleradores de partículas de alta energía hicieron posible el estudio de los movimientos de las partículas a velocidades cercanas a $c$. Por ejemplo, en 1964 se llevó a cabo un experimento en el CERN, el laboratorio europeo de física de partículas de alta energía cercano a Ginebra, Suiza. El acelerador de protones del CERN se usó para producir un haz de partículas llamadas piones neutros ($\pi^0$), que se desintegran rápidamente (con vida media de alrededor de $10^{-16}$ s) en dos rayos gamma:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

Los rayos gamma son radiaciones electromagnéticas que viajan a la velocidad de la luz. Los experimentadores midieron directamente la velocidad de los rayos gamma emitidos por los piones en desintegración, que se movían a una velocidad de $0.99975c$. Según Galileo, los rayos gamma emitidos en la dirección del movimiento de los piones deberían tener una velocidad de $c + 0.99975c = 1.99975c$ en el marco de referencia del laboratorio. Según Einstein, deberían tener una velocidad de $c$. La velocidad medida fue de $2.9977 \times 10^8$ m/s, igual a $c$ dentro de 1 parte en $10^4$, proporcionando así una verificación directa del segundo postulado.

Los dos postulados juntos tiene otra consecuencia: ellos implican que *es imposible acelerar una partícula a una velocidad mayor que c sin importar cuánta energía cinética le impartamos*. Ésta es también una predicción que puede probarse en el laboratorio y que muestra otra diferencia entre los postulados de la relatividad y los de la física clásica. La física clásica no fija un límite superior a la velocidad que puede alcanzar un objeto; la relatividad impone este límite a la velocidad, a la que según el primer postulado, debe ser la misma en todas las marcos de referencias.

En otro experimento realizado en 1964, fueron acelerados electrones por medio de una gran diferencia de voltaje (alrededor de 15 millones de volts), y se determinó directamente la velocidad de los electrones. La figura 2 muestra las velocidades medidas en función de la energía cinética adquirida por los electrones. Sin importar en cuánto se aumenta el voltaje de aceleración, la velocidad nunca llega a $c$ ni la supera. Una vez más, los experimentos a altas velocidades son inconsistentes con las predicciones basadas en la cinemática de Galileo y de Newton pero, en su lugar, confirman los postulados de la relatividad especial.

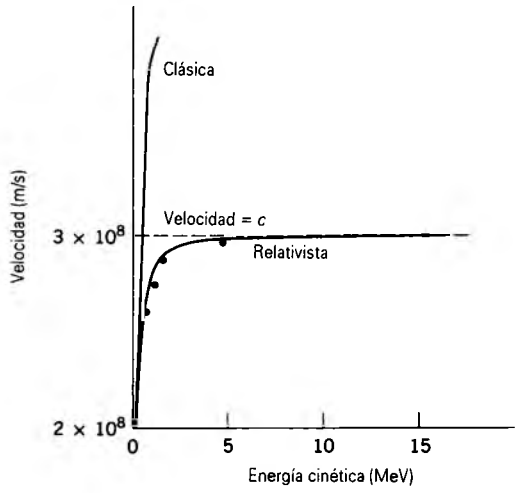



**Figura 2** Los puntos representan las mediciones de la velocidad de los electrones acelerados por una gran diferencia de voltaje a una energía cinética conocida. Las mediciones demuestran que, no importa cuán grande sea la energía cinética, la velocidad de los electrones no supera a $c$. (Véase "Speed and Kinetic Energy of Relativistic Electrons", por William Bertozzi, *American Journal of Physics*, mayo de 1964, pág. 551).

## 21-3 CONSECUENCIAS DE LOS POSTULADOS DE EINSTEIN

En la sección 21-1 tratamos las dificultades en la interpretación de ciertas mediciones del tiempo, longitud, y velocidad basadas en la física clásica. Veamos ahora cómo pueden resolver aquellas dificultades los postulados de Einstein.

### La relatividad del tiempo

Consideremos a dos observadores: $S$ está en reposo sobre el suelo, y $S'$ está en un tren que se mueve en una vía larga y recta con velocidad constante $u$ respecto a $S$. Los observadores llevan aparatos idénticos para medir el tiempo, ilustrados en la figura 3, consistentes en un bulbo de destellos de luz $F$ unido a un detector $D$ y separados de un espejo $M$ por una distancia $L_0$. El bulbo emite un destello de luz que viaja hasta el espejo. Cuando la luz reflejada regresa a $D$, el reloj hace tic y se dispara otro destello. El intervalo de tiempo $\Delta t_0$ entre los tics del reloj es precisamente la distancia $2L_0$ recorrida por la luz dividida entre la velocidad de la luz $c$:

$$\Delta t_0 = 2L_0/c. \qquad (1)$$

El intervalo $\Delta t_0$ es observado ya sea por $S$ o por $S'$ cuando el reloj está en reposo con respecto a ese observador.

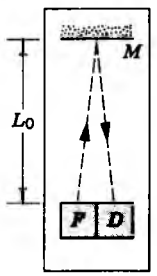



**Figura 3** El reloj hace tics a intervalos $\Delta t_0$ determinados por el tiempo necesario para que un destello de luz recorra la distancia $2L_0$ desde el bulbo de destellos $F$ hasta el espejo $M$ y regrese al detector $D$. (Se supone que la distancia lateral entre $F$ y $D$ es despreciable en comparación con $L_0$.)

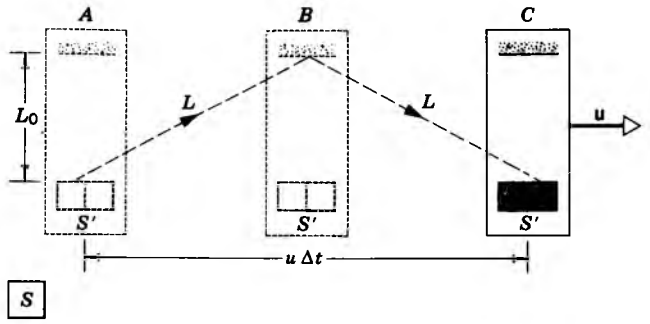



**Figura 4** En el marco de referencia de $S$, el reloj transportado por $S'$ en el tren se mueve con velocidad $u$. La línea de puntos, de longitud $2L$, muestra la trayectoria del haz de luz de acuerdo con $S$.

Consideremos ahora la situación cuando un observador mira a un reloj transportado por el otro. La figura 4 muestra una representación de la secuencia de sucesos que observa $S$* en el reloj transportado por $S'$ en el tren en movimiento. De acuerdo con $S$, el destello es emitido en $A$, reflejado en $B$, y detectado en $C$. En este intervalo $\Delta t$, de acuerdo con $S$ el reloj avanza una distancia horizontal de $u\,\Delta t$ a partir de la posición en que fue emitido el destello.

De acuerdo con $S$, el haz de luz viaja una distancia $2L$, en donde $L = \sqrt{L_0^2 + (u\,\Delta t/2)^2}$, como se muestra en la figura 4. El intervalo de tiempo medido por $S$ para que la luz viaje esta distancia a una velocidad $c$ (¡la misma velocidad medida por $S'$!) es

$$\Delta t = \frac{2L}{c} = \frac{2\sqrt{L_0^2 + (u\,\Delta t/2)^2}}{c}. \qquad (2)$$

Sustituyendo a $L_0$ de la ecuación 1 y resolviendo la ecuación 2 para $\Delta t$ nos da

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \qquad (3)$$

El factor en el denominador de la ecuacón 3 es siempre menor que o igual a 1, y entonces $\Delta t \geq \Delta t_0$. Esto es, el observador con relación al cual el reloj está en movimiento (el observador $S$) mide un intervalo mayor entre tics. Este efecto se llama *dilatación del tiempo*. El intervalo de tiempo $\Delta t_0$ medido por un observador ($S'$ en este caso) con relación a quien su reloj está en reposo se llama *tiempo propio*. El intervalo de tiempo propio entre sucesos es el intervalo más pequeño entre ellos que pueda medir cualquier observador; todos los observadores en movimiento relativo respecto al reloj miden intervalos *más largos*.

La ecuación 3 nos permite entender la dificultad en los experimentos de desintegración del pión discutidos en la sección 21-1. Un pión en reposo se desintegra en un intervalo de tiempo de 26.0 ns; este intervalo es un intervalo de tiempo propio y se le designa como $\Delta t_0$. (El pión es, en efecto, un reloj, y el intervalo desde la formación hasta la desintegración del pión puede considerarse como un tic del reloj.) Un observador en el laboratorio, con relación al cual el pión está en movimiento con una velocidad de $u = 0.913c$, esperaría medir un intervalo de tiempo de

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{26.0\text{ ns}}{\sqrt{1 - (0.913)^2}} = 63.7\text{ ns},$$

en conformidad con el valor medido.

La ecuación 3, que se deduce de los postulados de Einstein, da la relación entre intervalos de tiempo de acuerdo con la relatividad especial para observadores en movimiento relativo. Obsérvese que el factor en el denominador difiere apreciablemente de 1 únicamente para velocidades que se acerquen a la velocidad de la luz. Aun a una velocidad de $0.1c$, la ecuación 3 da $\Delta t = 1.005\Delta t_0$. A velocidades ordinarias podemos tomar $\Delta t = \Delta t_0$ con una gran precisión. Éste es el resultado clásico (el cual se obtiene directamente de la ecuación 3 cuando $u \ll c$) que concuerda con nuestra experiencia basada en el "sentido común".

La ecuación 3 es válida para cualquier dirección del movimiento relativo de $S$ y $S'$. También es válida para cualquier tipo de reloj, no sólo para el tipo particular que se usó en su derivación. Ha sido verificada experimentalmente no sólo con la desintegración de partículas elementales moviéndose a altas velocidades (tales como el pión) sino también con precisos relojes atómicos en movimiento relativo entre sí a velocidades ordinarias (transportados en aviones comerciales). Aun los relojes biológicos que se manifiestan con el envejecimiento humano son afectados por la dilatación del tiempo. Un aspecto interesante

* Suponemos que $S$ tiene un conjunto de relojes sincronizados, los cuales $S$ puede usar para llevar a cabo medidas de tiempo en los puntos $A$, $B$, y $C$. El establecimiento de un conjunto de relojes sincronizados se discute en la sección 21-5.

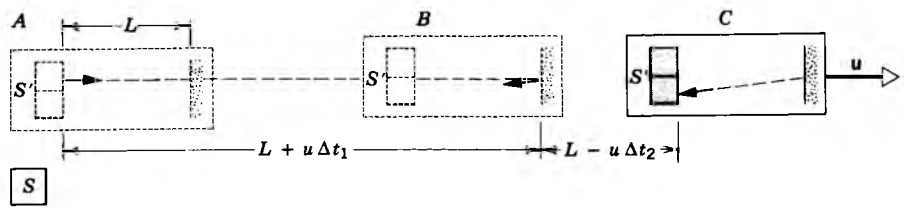



**Figura 5** El reloj transportado por $S'$ en el tren emite su destello luminoso en la dirección del movimiento del tren. La figura en $C$ ha sido desplazada hacia la derecha por claridad.

de este efecto, la *paradoja de los gemelos*, se analizará después de este capítulo.

## La relatividad de la longitud

Consideraremos ahora el efecto de los postulados de Einstein en la medición de los intervalos de longitud. Supongamos que $S'$ gira 90° el reloj en el tren de manera que la luz viaja ahora en la dirección del movimiento del tren. La figura 5 muestra la secuencia de eventos observados por $S$ en el reloj móvil. Según $S$, la longitud del reloj es $L$; como veremos, esta longitud es diferente a la longitud $L_0$ medida por $S'$, para quien el reloj está en reposo.

En la posición $A$ de la figura 5 se emite un destello de luz que llega al espejo (posición $B$) en un tiempo $\Delta t_1$ más tarde. La distancia total recorrida por la luz en este intervalo es $c\,\Delta t_1$, que puede también escribirse como la longitud $L$ del reloj más la distancia adicional $u\,\Delta t_1$ que el espejo avanza en este intervalo debido al movimiento del tren. Es decir,

$$c\,\Delta t_1 = L + u\,\Delta t_1. \tag{4}$$

Durante el viaje de retorno desde el espejo hasta el detector (posición $C$ en la Fig. 5), lo cual toma un intervalo $\Delta t_2$ de acuerdo con $S$, la luz viaja una distancia $c\,\Delta t_2$, la cual debe ser igual a la longitud $L$ menos la distancia $u\,\Delta t_2$ que el tren avanza en este intervalo, o

$$c\,\Delta t_2 = L - u\,\Delta t_2. \tag{5}$$

Después de resolver las ecuaciones 4 y 5 para $\Delta t_1$ y $\Delta t_2$, sumamos para obtener el intervalo total de tiempo $\Delta t$, lo cual da

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c-u} + \frac{L}{c+u} = \frac{2L}{c}\,\frac{1}{1-u^2/c^2}. \tag{6}$$

Partiendo de la ecuación 3,

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2L_0}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{7}$$

Haciendo a las ecuaciones 6 y 7 iguales entre sí y resolviendo, obtenemos

$$L = L_0\sqrt{1-u^2/c^2}. \tag{8}$$

La ecuación 8 resume el efecto conocido como *contracción de la longitud*. La longitud $L_0$ medida por un observador (tal como $S'$) que esté en reposo con respecto al objeto que se está midiendo se llama *longitud en reposo* (conocida también como *longitud propia*, en analogía con el tiempo propio). Todos los observadores en movimiento con relación a $S'$ miden una longitud más corta, pero únicamente para las dimensiones a lo largo de la dirección del movimiento; las mediciones de la longitud transversal a la dirección del movimiento no se afectan. En la situación mostrada en la figura 4, la longitud $L_0$ no es afectada por el movimiento relativo.

La ecuación 8 puede ayudarnos a resolver las dificultades con el concepto clásico de longitud estudiado en la sección 21-1. Los dos marcadores colocados en el laboratorio en las posiciones de la formación y la desintegración del pión están separados por una distancia de 17.4 m. Puesto que los marcadores están en reposo en el laboratorio, la distancia entre ellos es la longitud en reposo. Para un observador que viaje con el pión, todo el laboratorio está en movimiento a razón de $u = 0.913c$, y se mide que la distancia entre los marcadores, de acuerdo a la ecuación 8, tiene una longitud contraída

$$L = (17.4\text{ m})\sqrt{1-(0.913)^2} = 7.1\text{ m},$$

lo cual es consistente con lo expuesto en la sección 21-1.

En circunstancias ordinarias, $u \ll c$ y los efectos de la contracción de la longitud son demasiado pequeños para ser observados. Por ejemplo, se mediría que un cohete de 100 m de longitud lanzado desde la Tierra con la velocidad de escape ($u$ = 11.2 km/s) se contrae, de acuerdo con un observador en la Tierra, en una cantidad aproximadamente equivalente ¡a 2 diámetros atómicos únicamente!

La contracción de la longitud sugiere que la medida de los objetos en movimiento tiene una longitud más corta que la que tienen en reposo. No está implicada ninguna contracción real, sino meramente una diferencia en los resultados medidos, justo como dos observadores en movimiento relativo miden una frecuencia diferente para la misma fuente de sonido (el efecto Doppler).

## La suma relativista de las velocidades

Modifiquemos ahora nuestro aparato de medir el tiempo como se muestra en la figura 6. El bulbo de destellos $F$ se mueve hacia el extremo del espejo y se le reemplaza con

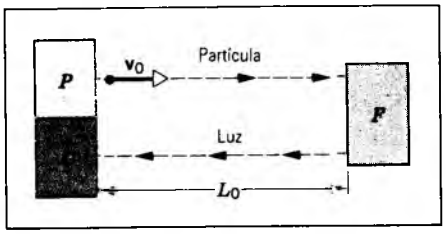



**Figura 6** En este aparato de medir el tiempo, $P$ emite una partícula con velocidad $v_0$. Cuando la partícula llega a $F$, provoca la emisión de un destello de luz que viaja hasta el detector $D$.

un aparato $P$ que emite partículas con una velocidad $v_0$, tal como las mediría un observador en reposo con respecto al aparato. El bulbo lanza un destello al ser golpeado por una partícula, y un haz de luz efectúa el viaje de regreso hasta el detector $D$. Entonces el intervalo de tiempo $\Delta t_0$, medido por un observador (tal como $S'$) que esté en reposo con respecto al aparato, consta de dos partes: una debida al viaje de la partícula en la distancia $L_0$ con velocidad $v_0$ y otra debido al haz de luz que viaja la misma distancia a la velocidad $c$:

$$\Delta t_0 = L_0/v_0 + L_0/c. \tag{9}$$

La secuencia de sucesos observados por $S$ cuando el aparato de tiempo es transportado por $S'$ en el tren es idéntica a la de la figura 5. La partícula emitida, la cual viaja a la velocidad $v$ de acuerdo con $S$, llega a $F$ después de un intervalo $\Delta t_1$, durante el cual viaja una distancia $v\,\Delta t_1$, la que es igual a la longitud (contraída) $L$ más la distancia adicional $u\,\Delta t_1$ que se movió el tren durante ese intervalo:

$$v\,\Delta t_1 = L + u\,\Delta t_1. \tag{10}$$

En el intervalo $\Delta t_2$, el haz de luz viaja una distancia $c\,\Delta t_2$ igual a la longitud $L$ menos la distancia $u\,\Delta t_2$ avanzada por el tren en ese intervalo:

$$c\,\Delta t_2 = L - u\,\Delta t_2. \tag{11}$$

Resolviendo las ecuaciones 10 y 11 para $\Delta t_1$ y $\Delta t_2$, podemos entonces hallar el intervalo total de tiempo $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ entre tics de acuerdo con $S$, y sustituimos ese resultado junto con la ecuación 9 en la ecuación 3, lo cual nos da (después de usar la ecuación 8 para relacionar a $L_0$ con $L$)

$$v = \frac{v_0 + u}{1 + v_0 u/c^2}. \tag{12}$$

La ecuación 12 nos da una forma de la ley de la suma de las velocidades consistente con los postulados de Einstein; aquí tratamos únicamente la suma de velocidades en la dirección del movimiento relativo (la dirección de **u**). Más adelante en este capítulo derivaremos resultados más generales.

De acuerdo con Galileo y Newton, un proyectil disparado hacia adelante con velocidad $v_0$ en un tren que se esté moviendo con velocidad $u$ tendría una velocidad $v_0 + u$ con relación a un observador en el suelo. Esto permite claramente que se obtengan velocidades mayores que $c$. La diferencia entre el resultado clásico y el resultado relativista es el denominador de la ecuación 12, el cual puede ciertamente reemplazarse por 1 en circunstancias ordinarias cuando las velocidades son mucho menores que $c$. Este importante factor, como lo veremos en el problema muestra 2, impide que la velocidad relativa supere alguna vez a $c$.

Si el proyectil es un haz de luz ($v_0 = c$ de acuerdo con $S'$), entonces la ecuación 12 da inmediatamente $v = c$ para todos los observadores, sin importar cuál sea su velocidad con relación a $S'$ (es decir, independiente de $u$). Así, la ecuación 12 es consistente con el segundo postulado de Einstein.

**Problema muestra 1** Los muones son partículas elementales con una vida media (propia) de 2.2 $\mu$s. Se producen con muy altas velocidades en la atmósfera superior cuando los rayos cósmicos (partículas de alta energía procedentes del espacio) chocan con las moléculas de aire. Considere que la altura $L_0$ de la atmósfera (su longitud en reposo) es de 100 km en el marco de referencia de la Tierra, y obtenga la velocidad mínima que haría posible que los muones sobreviviesen el viaje hasta la superficie de la Tierra. Resuelva este problema de dos maneras: (*a*) en el marco de referencia de la Tierra y (*b*) en el marco de referencia del muón.

**Solución** (*a*) En el marco de referencia de la Tierra (Fig. 7*a*), la desintegración del muón en movimiento se hace más lenta debido al efecto de dilatación del tiempo. Si el muón se mueve con una velocidad que sea muy cercana a $c$, el tiempo necesario para que viaje desde la parte superior de la atmósfera hasta la Tierra es

$$\Delta t = \frac{L_0}{c} = \frac{100\text{ km}}{3.00 \times 10^8\text{ m/s}} = 333\ \mu\text{s}.$$

El muón debe sobrevivir cuando menos 333 $\mu$s en el marco de referencia de la Tierra. Hallemos ahora la velocidad que dilata la vida media a partir de su valor propio $\Delta t_0$ (= 2.2 $\mu$s) hasta este valor, de acuerdo con la fórmula de dilatación del tiempo (Ec. 3):

$$333\ \mu\text{s} = \frac{2.2\ \mu\text{s}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Al resolver, hallamos que

$$u = 0.999978c.$$

(*b*) En el marco de referencia del muón, la atmósfera está desplazándose con una velocidad elevada. En este marco de referencia toda la atmósfera debe desplazarse en un tiempo igual a la vida media (propia) del muón, y entonces la altura de la atmósfera no puede ser mayor de

$$L = c\,\Delta t_0 = (3.00 \times 10^8\text{ m/s})(2.2 \times 10^{-6}\text{ s}) = 660\text{ m}.$$

Por supuesto, ésta es la longitud contraída medida en el marco de referencia del muón (véase la Fig. 7*b*). La relación entre la

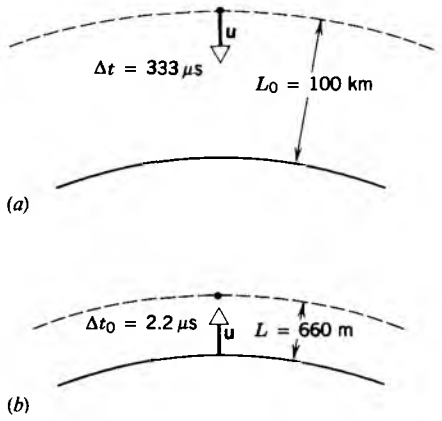



**Figura 7** Problema muestra 1. (*a*) En el marco de referencia de la Tierra, un muón tarda 333 $\mu$s en recorrer una distancia de 100 km a través de la atmósfera. (*b*) En el marco de referencia del muón, la atmósfera tiene una altura de 660 m únicamente, y en el viaje tarda 2.2 $\mu$s.

longitud en reposo $L_0$ (= 100 km), medida en el marco de referencia de la Tierra, y la longitud contraída, medida en el marco de referencia del muón, está dada por la ecuación 8, y entonces

$$660 \text{ m} = (100 \text{ km})\sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

Despejando la velocidad $u$, obtenemos el mismo resultado dado en la parte (*a*).

Obsérvese que una *dilatación del tiempo* en un marco de referencia puede ser observada como una *contracción de la longitud* en el otro. Esta interrelación entre el tiempo y el espacio es un aspecto fundamental de la relatividad especial.

**Problema muestra 2** Un vehículo espacial se aleja de la Tierra con una velocidad de 0.80$c$ cuando dispara un proyectil paralelo a la dirección de movimiento del vehículo. El proyectil se mueve con una velocidad de 0.60$c$ con relación al vehículo (Fig. 8). ¿Cuál sería la velocidad del proyectil medida por un observador en la Tierra? Compárese con las predicciones de la cinemática de Galileo.

**Solución** Este problema es muy similar al del observador y el tren. Aquí $S'$ está en el vehículo y $S$ está en la Tierra, y $S'$ se mueve con una velocidad de $u$ = 0.80$c$ con relación a $S$. El proyectil se mueve con una velocidad $v_0$ = 0.60$c$ con relación a $S'$, y buscamos su velocidad $v$ con relación a $S$. Usando la ecuación 12, obtenemos

$$v = \frac{v_0 + u}{1 + v_0 u/c^2} = \frac{0.60c + 0.80c}{1 + (0.60c)(0.80c)/c^2}$$
$$= \frac{1.40c}{1.48} = 0.95c.$$

De acuerdo con la cinemática clásica (el numerador de la ecuación 12), un observador en la Tierra vería al proyectil moviéndose a 0.60$c$ + 0.80$c$ = 1.40$c$, superando por lo tanto la velocidad relativa máxima de $c$ permitida por la relatividad. Puede verse cómo la ecuación 12 impone este límite en la velocidad. Aun cuando $v_0$ fuese 0.9999 $\cdots$ $c$ y $u$ fuese 0.9999

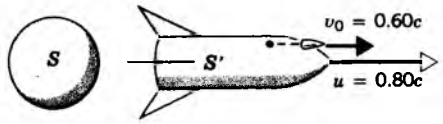



**Figura 8** Problema muestra 2. Un vehículo espacial se aleja de la Tierra con una velocidad de 0.80$c$. Un observador $S'$ situado en el vehículo espacial dispara un proyectil y mide su velocidad en 0.60$c$ con relación al vehículo.

0.9999 $\cdots$ $c$, la velocidad relativa $v$ medida por $S$ permanecería siendo menor que $c$.

## 21-4 LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Los postulados de Einstein proporcionan un primer paso en la resolución de las dificultades que presentamos en la sección 21-1, pero se necesita una base matemática más formal para dar a esta teoría todo su poder para calcular los resultados esperados de una variedad de procesos físicos más amplia. Por ejemplo, podríamos desear calcular cuáles son las diferencias de los resultados de las mediciones de la energía o de la intensidad de un campo magnético para los observadores en movimiento relativo.

Requerimos de un grupo de relaciones llamadas *ecuaciones de transformación* que relacionen las observaciones de un suceso hechas por dos observadores diferentes. Las ecuaciones de transformación tienen tres ingredientes: (1) un observador $S$ en reposo en un marco inercial, (2) otro observador $S'$ en reposo en un marco inercial diferente que esté en movimiento con velocidad constante respecto a $S$, y (3) un suceso que sea observado *tanto* por $S$ *como* por $S'$. Según cada uno de los observadores, el suceso ocurre en un grupo en particular de coordenadas en el espacio tridimensional *y también* en un tiempo en particular. Conociendo la velocidad relativa de $S$ y de $S'$, deseamos calcular las coordenadas $x', y', z', t'$ de un evento tal como lo observa $S'$ a partir de las coordenadas $x$, $y$, $z$, $t$ del *mismo suceso* de acuerdo con $S$. Simplificaremos este problema un tanto, sin perder generalidad, eligiendo siempre a los ejes $x$ y $x'$ a lo largo de la dirección de **u** (véase la Fig. 9).

Este problema puede ser resuelto usando la cinemática clásica de Galileo, y las ecuaciones de *transformación Galileanas* resultantes son

$$\begin{aligned} x' &= x - ut, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \qquad (13)$$

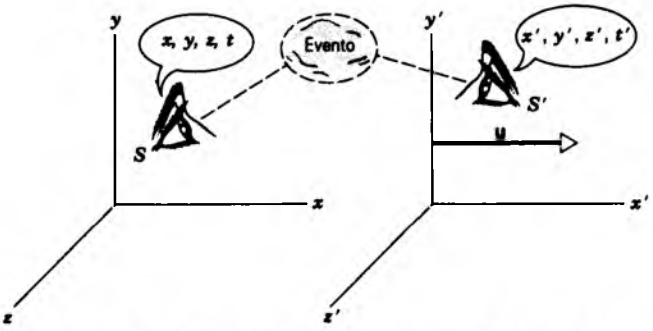



**Figura 9** Dos observadores, cuyos marcos de referencia están representados por $S$ y $S'$, observan el mismo suceso. $S'$ se mueve con relación a $S$ con una velocidad **u** a lo largo de la dirección común $xx'$. $S$ mide las coordenadas $x, y, z, t$ del suceso, mientras que $S'$ mide las coordenadas $x', y', z', t'$ del mismo suceso.

La primera de estas ecuaciones es consistente con nuestra experiencia de "sentido común". Por ejemplo, supongamos que $S$ está en reposo sobre el suelo y que mide la posición $x$ de un poste de una cerca. $S'$, quien está en un automóvil que se mueve con una velocidad $u$ relativa a $S$, halla realmente al poste en la posición $x' = x - ut$ (Fig. 10). La cuarta ecuación, $t' = t$, simplemente se dio por supuesta en la física clásica (como lo ejemplifica la coordenada universal del tiempo de Newton).

Las relaciones relativistas que buscamos se conocen como *ecuaciones de transformación de Lorentz*. Se las nombra así en honor del físico holandés H. A. Lorentz, quien las propuso (antes que Einstein) por una razón bastante diferente y quien no estaba plenamente consciente de sus implicaciones respecto a la naturaleza del espacio y del tiempo. Las ecuaciones pueden derivarse directamente de los postulados de Einstein, si invocamos ciertas suposiciones razonables con respecto a la simetría y la homogeneidad del espacio y del tiempo. Como ejemplo de esta última propiedad, consideremos a un observador $S$ que mide la longitud de una barra sostenida por el observador $S'$ en un marco inercial diferente. El resultado de la medición llevada a cabo por $S$ no depende de dónde está ubicado $S'$ en el marco de referencia o de la hora del día en que $S$ haga la medición.

Las ecuaciones de transformación de Lorentz, derivadas de estas hipótesis son*

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x - ut), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(t - ux/c^2). \end{aligned} \tag{14}$$

Obsérvese que un objeto situado inicialmente en el origen de acuerdo con $S$ (es decir, $x = 0$ en $t = 0$) está también situado inicialmente en el origen de acuerdo con $S'$ (es decir, $x' = 0$ y $t' = 0$).

En estas ecuaciones hemos empleado el *factor $\gamma$ de Lorentz*, definido como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{15}$$

En las ecuaciones de relatividad es también conveniente introducir el *parámetro $\beta$ de la velocidad*, definido como la razón entre la velocidad relativa $u$ de los dos sistemas de coordenadas y la velocidad de la luz:

$$\beta = u/c. \tag{16}$$

En la tabla 1 se dan algunos valores de muestra de $\beta$ y de $\gamma$, y en la figura 11 se muestra la relación entre $\beta$ y $\gamma$. El intervalo de $\gamma$ está entre 1 (a baja velocidad, en donde $u \ll c$ o $\beta \ll 1$) y el $\infty$ (a alta velocidad, donde $u \to c$ o $\beta \to 1$).

Obsérvese que las ecuaciones de transformación de Lorentz se reducen a las de la transformación galileana (Ecs. 13) cuando $u \ll c$. Una manera conveniente de demostrar esto es hacer que $c \to \infty$, de modo que $u/c \to 0$. En este caso, como usted debería demostrarlo, las ecuaciones 14 relativistas se reducen directamente a las ecuaciones 13 clásicas. Todos los resultados clásicos derivados en los capítulos anteriores concuerdan con

* Para una derivación de estas ecuaciones, véase *Introduction to Special Relativity*, por Robert Resnick (Wiley, 1968), sección 2.2.

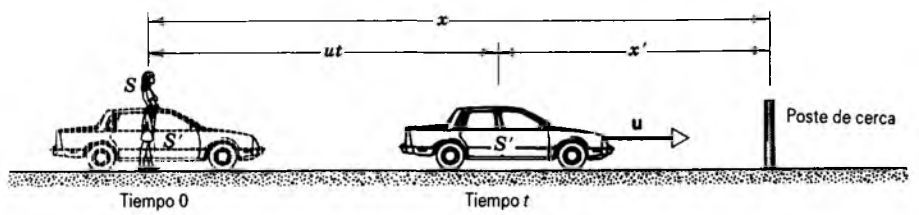



**Figura 10** De acuerdo con $S$, el poste está en la coordenada $x$. De acuerdo con $S'$, quien está en una coordenada $ut$ con relación a $S$ en el tiempo $t$, el poste está en la coordenada $x' = x - ut$. Obsérvese que los orígenes de $S$ y de $S'$ coinciden en $t = 0$.

**TABLA 1** VALORES MUESTRA DEL PARÁMETRO DE VELOCIDAD Y DEL FACTOR DE LORENTZ

| $\beta$ | $\gamma$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.000 | 0.90 | 2.29 |
| 0.10 | 1.005 | 0.99 | 7.09 |
| 0.30 | 1.048 | 0.999 | 22.4 |
| 0.60 | 1.25 | 0.9999 | 70.7 |

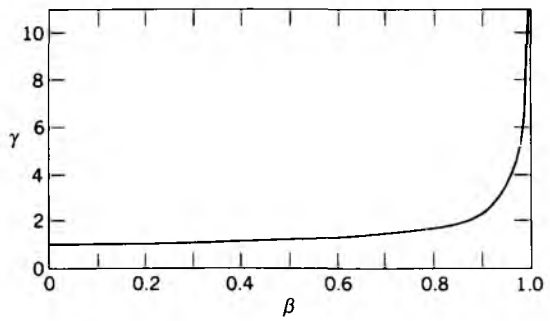



**Figura 11** El factor $\gamma$ de Lorentz en función del parámetro $\beta$ de la velocidad.

los experimentos cuando $u \ll c$. Debemos tener en cuenta los efectos relativistas únicamente a velocidades altas.

Las ecuaciones 14 nos permiten hallar las coordenadas de espacio y tiempo en $S'$ si las conocemos en $S$. Sin embargo, supongamos que deseamos conocer las coordenadas en $S$, dadas las coordenadas en $S'$. Desde el punto de vista de $S'$ en la figura 9, $S$ parece moverse en la dirección *negativa* de $x$ (o de $x'$). Podemos obtener la *transformación inversa de Lorentz* simplemente cambiando las coordenadas primadas con las no primadas en las ecuaciones 14 y sustituyendo a $u$ por $-u$. Esto da

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + ut'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \gamma(t' + ux'/c^2). \end{aligned} \tag{17}$$

Podemos emplear un método diferente para invertir la transformación de Lorentz (véase el problema 18) resolviendo las ecuaciones 14 algebraicamente para $x$ y $t$ (tratando a la primera y última ecuaciones como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas). Al hacerlo, obtenemos exactamente la transformación inversa dada por las ecuaciones 17, las cuales fueron obtenidas directamente a partir de un argumento de simetría.

La tabla 2 resume las ecuaciones de la transformación de Lorentz cuando la velocidad relativa entre los sistemas de coordenadas está en la dirección común $xx'$. Se muestran las ecuaciones en cuatro formas: la transformación de Lorentz (Ecs. 14), la transformación inversa de Lorentz (Ecs. 17), y las dos transformaciones del *intervalo* correspondientes, las cuales se utilizan cuando deseamos transformar no una coordenada sino un intervalo de espacio o de tiempo, tal como $\Delta x' = x_2' - x_1'$ (la distancia entre dos sucesos, tal como la mediría $S'$) o $\Delta t' = t_2' - t_1'$ (el tiempo entre dos sucesos, tal como lo mediría $S'$).

**Problema muestra 3** En un marco inercial $S$, una luz roja y una luz azul están separadas por una distancia $\Delta x = 2.45$ km, con la luz roja en el valor más grande de $x$. La luz azul produce un destello, y 5.35 $\mu$s más tarde lo produce la luz roja. El marco $S'$ se mueve en la dirección creciente de $x$ con una velocidad de $u = 0.855c$. ¿Cuál es la distancia entre los dos destellos y el tiempo entre ellos tal como los mediría $S'$?

**Solución** El parámetro de Lorentz es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.855)^2}} = 1.928.$$

Se nos dan los intervalos en $S$ como $\Delta x = 2450$ m y $\Delta t = 5.35 \times 10^{-6}$ s. Según la tabla 2, tenemos las transformaciones del intervalo

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - u\,\Delta t) \\ &= 1.928[2450 \text{ m} - (0.855)(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(5.35 \times 10^{-6} \text{ s})] \\ &= 2078 \text{ m} = 2.08 \text{ km} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma(\Delta t - u\,\Delta x/c^2) \\ &= 1.928[5.35 \times 10^{-6} \text{ s} - (0.855)(2450 \text{ m})/(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})] \\ &= -3.147 \times 10^{-6} \text{ s} = -3.15\ \mu\text{s}. \end{aligned}$$

En $S'$, el destello rojo está ubicado también en la coordenada más distante, pero la distancia es 2.08 km en lugar de 2.45 km.

**TABLA 2** LAS ECUACIONES DE TRANSFORMACION DE LORENTZ†

| *Transformación de Lorentz* | *Transformación inversa* | *Transformación del intervalo* | *Transformación inversa del intervalo* |
|---|---|---|---|
| $x' = \gamma(x - ut)$ | $x = \gamma(x' + ut')$ | $\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\,\Delta t)$ | $\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\,\Delta t')$ |
| $y' = y$ | $y = y'$ | $\Delta y' = \Delta y$ | $\Delta y = \Delta y'$ |
| $z' = z$ | $z = z'$ | $\Delta z' = \Delta z$ | $\Delta z = \Delta z'$ |
| $t' = \gamma(t - ux/c^2)$ | $t = \gamma(t' + ux'/c^2)$ | $\Delta t' = \gamma(\Delta t - u\,\Delta x/c^2)$ | $\Delta t = \gamma(\Delta t' + u\,\Delta x'/c^2)$ |

† Aplicar estas ecuaciones únicamente en el caso de movimiento relativo en la dirección $xx'$. El factor de Lorentz es $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



Además, en $S'$ el destello rojo llega *antes* que el destello azul (al contrario de lo que se observa en $S$); el tiempo entre destellos es de 3.15 $\mu$s de acuerdo con $S'$.

## 21-5 MEDICIÓN DE LAS COORDENADAS ESPACIO-TIEMPO EN UN SUCESO

Hasta ahora poco hemos dicho respecto a cómo hacen $S$ y $S'$ para medir las coordenadas $x$, $y$, $z$, $t$ y $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ de un suceso, como en el caso de los destellos de luz del problema muestra 3. El procedimiento que describimos ahora forma una base conceptual sobre la cual pueden basarse los procedimientos de laboratorio reales.

Supongamos que $S$ tiene un equipo grande de asistentes disponible para ayudarnos a establecer un sistema de coordenadas. A cada asistente se le da un reloj y una barra de medición de una cierta longitud. Por ejemplo, tres asistentes tienen barras de medición de 1 m de longitud. Se les instruye para que coloquen sus barras, cada una a lo largo de uno de los tres ejes de coordenadas, y esperen en la posición determinada por el extremo de la barra hasta que vean un destello de luz en el origen, en cuyo momento tienen que hacer marchar a sus relojes en la lectura preestablecida de $3.33 \times 10^{-9}$ s (3.33 ns, el tiempo necesario para que la luz viaje la distancia de 1 m desde el origen hasta el punto donde se halla el asistente). Otros tres asistentes, a quienes se les ha asignado a cada uno en forma similar uno de los ejes de coordenadas, reciben barras de 2 m de longitud y se les instruye para hacer marchar sus relojes, cuando vean el destello de luz, al tiempo preestablecido de 6.67 ns (el tiempo para que la luz viaje 2 m). Cada asistente es enviado a un puesto con una barra de cierta longitud $L$ y un reloj preeestablecido en $t = L/c$.

Cuando todos los asistentes estén en sus puestos, $S$ dispara un destello de luz en el origen y simultáneamente pone en marcha el reloj que está en el origen, y previamente puesto en cero. Cuando la señal luminosa llega a los otros relojes, cada uno a su vez se pone en marcha en la lectura preestablecida. Así, el reloj del eje $x$ en $x = 1$ m se pone en marcha a la lectura preestablecida de 3.33 ns cuando el reloj del origen señala 3.33 ns; el reloj del eje $x$ en $x = 2$ m se pone en marcha a la lectura preestablecida de 6.67 ns cuando el reloj que está en el origen y el reloj que está en $x = 1$ marcan ambos 6.67 ns; y así sucesivamente para todos los relojes del sistema de coordenadas. Todos los relojes de todo el sistema están entonces perfectamente sincronizados. En la figura 12 se representa al sistema de barras y relojes resultante.

Supongamos que $S$ desea graficar el progreso de una partícula que se mueve a través del sistema de coordenadas. Todo lo que deben hacer $S$ y los asistentes es observar a la partícula mientras viaja y trazar cuando pase, cada punto de la coordenada y la lectura que da el reloj que está en esa coordenada.

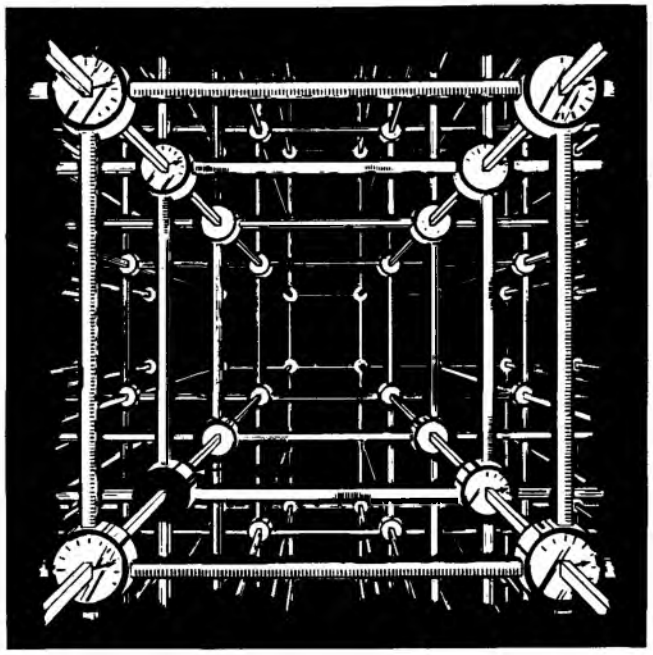


**Figura 12** Armazón de barras de medición y de relojes que podría ser usada por un observador situado en un marco de referencia en particular para determinar las coordenadas espacio-tiempo de un suceso.

Por supuesto, esta calibración sirve únicamente para el observador $S$. El observador $S'$ y todos los demás observadores inerciales deben llevar a cabo un procedimiento similar para definir un sistema de coordenadas y sincronizar sus relojes. Con tal esquema, las barras de medición y los relojes de cada observador (los cuales están, por supuesto, en reposo en el marco de ese observador) son exclusivos de ese marco inercial e independientes de las barras y los relojes de los observadores que estén en otros marcos inerciales.

Este procedimiento sugiere que el espacio y el tiempo no son coordenadas independientes, sino que la descripción de un suceso debe incluir a sus coordenadas tanto de espacio como de tiempo. (Es decir, no podemos usar un reloj que esté en una posición para registrar el paso de una partícula a través de otra posición.) Por esta razón, la relatividad especial se formula usualmente en términos de las *coordenadas espacio-tiempo* $x$, $y$, $z$, $t$ combinadas. El espacio y el tiempo se tratan como coordenadas equivalentes en la relatividad especial.

## 21-6 LA TRANSFORMACIÓN DE LAS VELOCIDADES

En esta sección usamos las ecuaciones de la transformación de Lorentz para relacionar la velocidad **v** de una par-

tícula medida por un observador en el marco $S$ con la velocidad $\mathbf{v}'$ de la misma partícula medida por un observador en el marco $S'$, quien a su vez se mueve con velocidad $\mathbf{u}$ con relación a $S$. En esta discusión, es importante tener en mente los significados de estas tres velocidades.

Supongamos que el observador $S$ encuentra que la partícula se mueve desde las coordenadas $x_1, y_1, z_1, t_1$ hasta $x_2, y_2, z_2, t_2$. Por otra parte, el observador $S'$ registra las observaciones de las coordenadas inicial y final de la misma partícula como $x_1', y_1', z_1', t_1'$ y $x_2', y_2', z_2', t_2'$.

Calculemos a $v_x'$ $(= \Delta x'/\Delta t')$, la componente $x'$ de la velocidad medida por $S'$. Partiendo de la tabla 2, obtenemos las ecuaciones de transformación para los intervalos $\Delta x'$ y $\Delta t'$. Al dividir estas dos ecuaciones, obtenemos

$$v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - u\,\Delta t)}{\gamma(\Delta t - u\,\Delta x/c^2)} = \frac{\Delta x/\Delta t - u}{1 - u(\Delta x/\Delta t)/c^2},$$

o, reemplazando a $\Delta x/\Delta t$ por $v_x$,

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}. \tag{18}$$

De modo similar, obtenemos las ecuaciones de transformación para las componentes $y$ y $z$ de las velocidades:

$$v_y' = \frac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)} \quad \text{y} \quad v_z' = \frac{v_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}. \tag{19}$$

Obsérvese que $v_y' \neq v_y$, aun cuando $\Delta y = \Delta y'$, porque $\Delta t \neq \Delta t'$. Para $v_z'$ se tienen condiciones similares. Éste es otro ejemplo de la diferencia entre el modo en que las transformaciones de Galileo y de Lorentz tratan las coordenadas del tiempo. Conviene asegurarse de haber tomado nota de que los denominadores de las tres ecuaciones incluyen todas al factor $v_x$.

Las ecuaciones 18 y 19 dan la *transformación Lorentz de la velocidad*. Son análogas a las ecuaciones de la transformación de Lorentz de coordenadas: relacionan las observaciones en un marco de coordenadas con las observaciones en otro. La tabla 3 resume estas ecuaciones, junto con la transformación inversa correspondiente de la velocidad. Obsérvese que la ecuación de la transformación inversa para $v_x$ es idéntica a la ecuación 12, la cual derivamos de una manera bastante diferente. En la ecuación 12, la velocidad $v_0$ es la misma que la velocidad $v_x'$ medida por $S'$.

Examinemos las ecuaciones 18 y 19 en el límite no relativista. ¿Se reducen a la transformación galileana clásica cuando $u \ll c$ (o, equivalentemente, cuando $c \to \infty$)? En este caso las ecuaciones 18 y 19 se reducen a

$$v_x' = v_x - u, \quad v_y' = v_y, \quad \text{y} \quad v_z' = v_z, \tag{20}$$

que son realmente los resultados galileanos, dados por la ecuación 43 del capítulo 4 o diferenciando la ecuación 13, la transformación galileana de las coordenadas.

Demostraremos ahora directamente que la transformación de Lorentz de la velocidad da el resultado exigido por el segundo postulado de Einstein (la constancia de la velocidad de la luz): una velocidad $c$ medida por un observador debe ser medida también como $c$ por cualquier otro observador. Supongamos que el suceso común que es observado por $S$ y $S'$ es el paso de un haz de luz a lo largo de la dirección $x$. El observador $S$ mide $v_x = c$ y $v_y = v_z = 0$. ¿Qué velocidad mide el observador $S'$? Usando las ecuaciones 18 y 19, hallamos que las componentes de la velocidad medidas por $S'$ son

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = \frac{c - u}{1 - uc/c^2} = \frac{c - u}{(c - u)/c} = c,$$

$$v_y' = v_z' = 0.$$

Obsérvese que este resultado se obtiene *independientemente de la velocidad relativa u entre S y S'*. Una velocidad $c$ medida en un marco de referencia inercial conduce a una velocidad $c$ medida en *todos* los marcos. Entonces la velocidad de la luz es realmente la misma para todos los observadores. La misma conclusión prevalece para cualquier dirección en que viaje el haz de luz; véase el problema 19.

**TABLA 3** LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ DE LA VELOCIDAD

| *Transformación de la velocidad* | *Transformación inversa de la velocidad* |
|---|---|
| $v_x' = \dfrac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}$ | $v_x = \dfrac{v_x' + u}{1 + uv_x'/c^2}$ |
| $v_y' = \dfrac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}$ | $v_y = \dfrac{v_y'}{\gamma(1 + uv_x'/c^2)}$ |
| $v_z' = \dfrac{v_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}$ | $v_z = \dfrac{v_z'}{\gamma(1 + uv_x'/c^2)}$ |

**Problema muestra 4** Una partícula es acelerada desde el reposo en el laboratorio hasta que su velocidad es de $0.60c$. Visto desde un marco que se mueva con la partícula con una velocidad de $0.60c$ con relación al laboratorio, la partícula recibe luego un incremento adicional de velocidad de $0.60c$. Halle la velocidad final de la partícula al medirla en el marco del laboratorio.

**Solución** Una vez más, el problema se convierte en una aplicación directa de la transformación de Lorentz de la velocidad, una vez que hayamos especificado claramente los marcos de referencia $S$ y $S'$ y el sistema que está siendo observado. Claramente, la partícula es el sistema que está siendo observado, y si buscamos su velocidad medida en el marco del laboratorio es natural asociarlo al laboratorio con el marco $S$. El marco $S'$ es entonces el marco de referencia inercial ocupado por la partícula después de la primera aceleración y antes de la segunda (véase la Fig. 13). Con relación a este marco, la velocidad de la partícula después de la segunda aceleración es

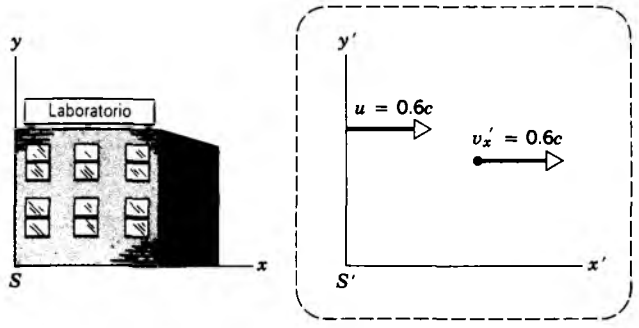



**Figura 13** Problema muestra 4. $S'$, marco de referencia de la partícula después de la primera aceleración, se mueve con velocidad $u = 0.60c$ con relación al laboratorio (marco $S$). Con relación a $S'$, la partícula se mueve con una velocidad $v_x' = 0.60c$ después de su segunda aceleración.

$v_x' = 0.60c$. La velocidad del marco $S'$ con respecto al marco $S$ es $u = 0.60c$. Conocemos a $v_x'$ y a $u$, y buscamos a $v_x$, la cual está dada por la transformación inversa de la velocidad a partir de la tabla 3:

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + uv_x'/c^2} = \frac{0.60c + 0.60c}{1 + (0.60c)(0.60c)/c^2} = \frac{1.20c}{1.36} = 0.88c.$$

La velocidad es menor que $c$, en contradicción con la predicción de la transformación galileana, la cual da $v_x = 1.20c$.

Supongamos que ahora hacemos que el marco $S'$ sea el de la partícula después de la segunda aceleración, de modo que $u = 0.88c$ con relación al marco original $S$ (el laboratorio). Consideremos ahora una *tercera* aceleración, de modo que, con relación al nuevo marco $S'$, la partícula se mueve nuevamente con velocidad $v_x' = 0.60c$. Repitiendo el procedimiento anterior, podemos demostrar que un observador en el marco del laboratorio ($S$) medirá una velocidad de $v_x = 0.97c$ en este caso.

*Sin importar cuántas veces aceleremos a la partícula en* un marco de referencia que se mueva con la partícula, su velocidad medida en el marco original del laboratorio (o en cualquier otro marco) nunca superará a $c$.

## 21-7 CONSECUENCIAS DE LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Ya hemos demostrado que al aplicar los postulados de Einstein a situaciones físicas se desprenden algunas consecuencias inesperadas. Emplearemos ahora la base más matemática de la transformación de Lorentz para demostrar que pueden obtenerse estas mismas consecuencias y otras.

### La relatividad del tiempo

En la sección 21-3 demostramos que el efecto de la dilatación del tiempo se deduce directamente al aplicar los postulados de Einstein a las mediciones de los intervalos de tiempo por dos observadores en movimiento relativo uno con respecto al otro. La figura 14 muestra una visión diferente del efecto de dilatación del tiempo. El reloj $C'$ está en reposo en el marco de $S'$, el cual se mueve con una velocidad $u$ relativa a $S$. $S'$ mide el intervalo de tiempo $\Delta t' = t_2' - t_1'$ en el que la manecilla del reloj pasa entre dos marcas, pasando la primera marca en el tiempo $t_1'$ y la segunda en el tiempo $t_2'$.

El paso de la manecilla del reloj $C'$ por las dos marcas puede ser visto como dos sucesos los cuales ocurren en la misma posición $x_0'$ de acuerdo con $S'$ (porque el reloj $C'$ está en reposo en ese marco). Sin embargo, $S$ (cuyo marco de referencia contiene un grupo estacionario de relojes sincronizados de la manera descrita en la sección 21-5) observa que la manecilla del reloj $C'$ pasa la primera marca en la posición $x_1$ (donde el reloj estacionario local señala el tiempo $t_1$) y la segunda marca en la posición $x_2$ (en donde un reloj estacionario *diferente* lee el tiempo $t_2$). Podemos hallar la relación entre los intervalos de tiempo $\Delta t$ y $\Delta t'$ directamente a partir de la transformación inversa de Lorentz. Según la tabla 2, tenemos

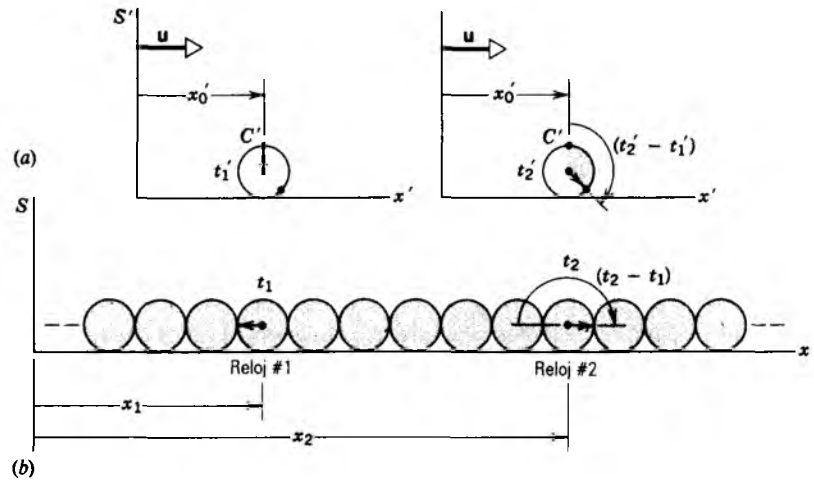



**Figura 14** El reloj $C'$ está fijo en la posición $x_0'$ en el marco de referencia $S'$. El observador $S$, con relación al cual el reloj $C'$ está en movimiento con velocidad **u**, compara la lectura de $C'$ con dos relojes estacionarios diferentes del arreglo de relojes sincronizados (numerados 1 y 2) establecido en el marco de $S$. Como se muestra, el intervalo $t_2 - t_1$ medido por $S$ es mayor que el intervalo $t_2' - t_1'$. Por lo tanto, el observador $S$ declara que, en comparación con los relojes situados en $S$, el reloj que se mueve avanza más lentamente.

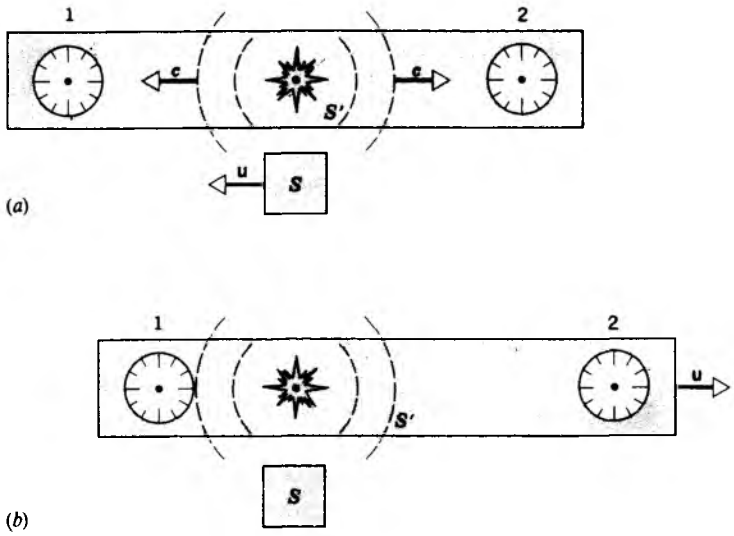



**Figura 15** (*a*) En el marco de referencia de $S'$, un destello de luz emitido desde un punto a media distancia entre dos relojes llega a los relojes en el mismo instante. (*b*) En el marco de referencia de $S$, el destello de luz llega al reloj 1 antes que al reloj 2.

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + u\,\Delta x'/c^2). \qquad (21)$$

Esta expresión general da el intervalo de tiempo $\Delta t$ medido por $S$ correspondiente al intervalo de tiempo $\Delta t'$ medido por $S'$ para sucesos que están separados por una distancia $\Delta x'$. De acuerdo con $S'$, con relación al cual el reloj $C'$ está en reposo, los dos sucesos (la manecilla al pasar las dos marcas) tienen lugar en la misma posición $x_0'$, de modo que $\Delta x' = 0$. Puesto que $S'$ está en reposo con relación al reloj $C'$, el intervalo de tiempo $\Delta t'$ medido por $S'$ es un intervalo de tiempo propio, el cual representamos como $\Delta t_0$. Sustituyendo $\Delta x' = 0$ y $\Delta t' = \Delta t_0$ en la ecuación 21, obtenemos

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

la cual es idéntica a la ecuación 3, la ecuación de la dilatación del tiempo.

El efecto de la dilatación del tiempo es completamente simétrico. Si un reloj $C$ en reposo en $S$ es observado por $S'$, entonces $S'$ concluye que el reloj $C$ avanza más lentamente. Cada observador cree que el otro reloj está avanzando más lentamente que los que están en reposo en el marco de referencia del observador. La dilatación del tiempo suele resumirse en la idea de que en "los relojes en movimiento que se atrasan". Es útil recordar esta frase, pero hay que hacerlo con precaución. La frase indica que un reloj que se mueve con relación a un marco que contiene un arreglo de relojes sincronizados se atrasa *cuando el tiempo es medido por aquellos relojes*. Es decir, podemos afirmar que "los relojes en movimiento se atrasan" únicamente en el sentido de comparar a un reloj en movimiento con dos relojes estacionarios sincronizados separados.

Consideremos otras tres consecuencias de la transformación de Lorentz que se relacionan con las mediciones de tiempo:

**1.** *La relatividad de la simultaneidad.* Supongamos que $S'$ tiene dos relojes en reposo, situados en $x_1'$ y $x_2'$, y separados por el intervalo $\Delta x' = x_2' - x_1'$. Un destello de luz emitido desde un punto a media distancia entre los relojes llega a los dos relojes simultáneamente, de acuerdo con $S'$ (véase la Fig. 15*a*). Es decir, una medición hecha por $S'$ del intervalo entre la llegada de las señales de luz a los dos relojes da $\Delta t' = 0$. Consideremos ahora la situación desde el punto de vista de $S$, con relación al cual el marco de $S'$ (incluyendo a los relojes) se mueve con velocidad $u$ (Fig. 15*b*). Claramente, la señal luminosa llega al reloj 1 antes de llegar al reloj 2, y entonces la llegada de las señales luminosas a las ubicaciones de los dos relojes *no* es simultánea para $S$. Por lo tanto, llegamos a la siguiente conclusión:

> *Si dos observadores están en movimiento relativo, en general no concuerdan en si los sucesos en ubicaciones diferentes son simultáneos. Si un observador halla que los dos sucesos son simultáneos, el otro no.*

Esta conclusión se desprende también directamente de la ecución 21: si $\Delta t' = 0$ y $\Delta x' \neq 0$, entonces $\Delta t \neq 0$. Obsérvese que esto ocurre únicamente cuando los dos sucesos tienen lugar en ubicaciones diferentes de acuerdo con $S'$. Si los dos sucesos tienen lugar en la misma ubicación y son simultáneos de acuerdo con $S'$, son igualmente simultáneos para $S$.

**2.** *El corrimiento Doppler.* En la sección 20-7 consideramos el efecto Doppler en las ondas sonoras, en donde el movimiento de una fuente o de un observador de las ondas con relación al medio que transporta a las ondas causa un cambio en la frecuencia medida por el observador.

En el caso de las ondas de luz, "el movimiento relativo al medio" no es un concepto válido. La relatividad especial da un corrimiento Doppler para la luz que depende

únicamente de la velocidad relativa entre la fuente y el observador; en contraste con el caso de las ondas sonoras, donde usamos fórmulas diferentes para tener en cuenta los movimientos de la fuente y del observador, en el caso de las ondas de luz es suficiente una fórmula que involucre únicamente al movimiento *relativo*. La fórmula Doppler relativista es, por lo tanto, más sencilla de aplicar que la clásica.

Otro aspecto del efecto Doppler en la relatividad especial no tiene una contraparte clásica. Se trata del *efecto Doppler transversal*, el cual, en contraste con los casos considerados en la sección 20-7, ocurre cuando la fuente o el observador se mueven perpendicularmente a la línea que los une. El efecto Doppler transversal es realmente otro resultado de la dilatación del tiempo, y las mediciones precisas del efecto Doppler transversal dan algunas de las pruebas experimentales más sensibles de la dilatación del tiempo. Consideraremos el efecto Doppler para la luz con más detalle en el capítulo 42.

3. *La paradoja de los gemelos*. La dilatación del tiempo se aplica no solamente a las partículas elementales sino a todos los intervalos de tiempo que ocurren de manera natural, incluyendo la cantidad de las pulsaciones y la duración de la vida humana. Este hecho ha sido usado para proponer un acertijo aparente que ha llegado a ser conocido como la *paradoja de los gemelos*.*

Supongamos a dos gemelos, Federico y Etelvina, que están en una plataforma situada en el espacio. Etelvina se embarca para un viaje en un vehículo espacial de alta velocidad hasta una estrella distante mientras que Federico permanece en la plataforma. Durante el viaje de Etelvina, Federico es capaz de registrar los latidos del corazón y el ritmo de respiración promedio de Etelvina, y halla que son más lentos debido al efecto de la dilatación del tiempo; entonces, todo el proceso de envejecimiento de Etelvina se ha hecho más lento. Por lo tanto, Federico espera que, al regresar Etelvina a la plataforma después de su viaje a la estrella, ella sea más joven que él.

La paradoja ocurre de manera similar cuando analizamos la situación desde el marco de referencia de Etelvina, viendo por lo tanto a Federico y a la plataforma como los que hacen el viaje. De acuerdo con este análisis, Federico es el gemelo viajero y debería ser el más joven al final del viaje. He aquí la paradoja: Cuando se encuentren al final del viaje, no puede ser cierto que Etelvina sea más joven que Federico como tampoco que Federico sea más joven que Etelvina.

La resolución de la paradoja llega cuando pensamos que Federico y Etelvina no están realmente en situaciones simétricas. Al reunirse nuevamente los dos gemelos, uno de ellos debe decelerar e invertir direcciones, dando por resultado una aceleración, fácilmente medible, de uno de ellos. Dicho de otra manera, Etelvina debe cambiar de un marco de referencia inercial (el que se aleja de Federico) a otro (el que se mueve hacia Federico). Por otra parte, Federico no experimenta una aceleración y permanece en el mismo marco de referencia inercial durante toda la duración del viaje. Realmente, es Etelvina la viajera y quien será más joven a su regreso.

Si bien no hemos sido capaces de llevar a cabo un experimento de esta clase con gemelos reales, el experimento ha podido efectuarse con relojes atómicos.* Dos relojes idénticos fueron calibrados cuidadosamente; uno de ellos fue colocado en un avión comercial en vuelo alrededor del mundo y comparado con su gemelo "en casa" a su retorno. La velocidad durante tal viaje fue, por supuesto, bastante menor que $c$, pero los relojes atómicos son capaces de una precisión suficiente como para que la pequeña asimetría resultante en el "envejecimiento" de los dos relojes, que llegó a unos $10^{-7}$ s, pueda determinarse precisa y fácilmente. Se encontró que el reloj que se colocó en el avión, que fue el sometido a una aceleración y por lo tanto el verdadero viajero, era realmente "más joven" (es decir, se atrasó) después del viaje.

La lectura que marca el reloj que viajó en el avión debe ser también corregida respecto al tiempo que pasa en potencial gravitatorio diferente, un efecto de la relatividad *general*. Así pues, las correcciones para la relatividad general y especial son de interés práctico e importante cuando relojes de esa precisión son transportados de un lugar a otro.

## La relatividad de la longitud

De las ecuaciones de transformación de Lorentz se deduce directamente la contracción de la longitud, la cual se estudió en la sección 21-3. Advirtamos primero que para medir la longitud de un objeto debemos llevar a cabo una determinación *simultánea* de las coordenadas de los extremos del objeto (véase la Fig. 16). *No tiene caso medir la coordenada de un extremo de un objeto en movimiento en un tiempo determinado y la coordenada del otro extremo en un tiempo diferente.*

Supongamos (véase la Fig. 17) que una barra de medición de la longitud en reposo $L_0$ sea transportada por $S'$. El observador $S$ desea medir su longitud. Según $S'$, en cuyo marco de referencia la barra está en reposo, los extremos de la barra están en las coordenadas $x_2'$ y $x_1'$, de

* Para mayores detalles sobre la paradoja de los gemelos, véase *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory*, 2a. edición, por Robert Resnick y David Halliday (Wiley, 1985), pág 281.

* Véase "Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains", por J. C. Hafele y Richard E. Keating, *Science*, julio 14, 1972, pág. 166.

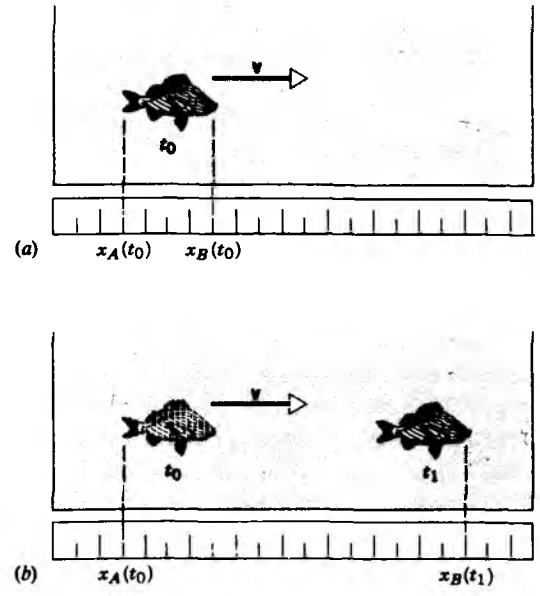



**Figura 16** (*a*) Para medir la longitud de un pez en movimiento, debemos determinar *simultáneamente* las posiciones de su cabeza y de su cola. (*b*) Si la determinación no es simultánea, la medición no da la longitud.

modo que $\Delta x' = x_2' - x_1' = L_0$, la longitud en reposo de la barra. El observador $S$, usando las coordenadas calibradas y sincronizadas establecidas de acuerdo con el procedimiento descrito en la sección 21-5, lleva a cabo una *determinación simultánea* de las coordenadas $x_2$ y $x_1$ de los extremos de la barra. El intervalo $\Delta x = x_2 - x_1$ da la longitud $L$ de la barra de acuerdo con $S$. Partiendo de la ecuación del intervalo en la tabla 2, tenemos

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\,\Delta t). \tag{22}$$

Haciendo que $\Delta t = 0$ (porque $S$ llevó a cabo una determinación *simultánea* de $x_2$ y $x_1$), resolvemos para $\Delta x$ (= $L$) y obtenemos

$$L = \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - u^2/c^2}\,,$$

que es idéntica a la ecuación 8.

Hemos deducido la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud, ambos a partir de los postulados (sección 21-3) y de la transformación de Lorentz (esta sección). Sin embargo, no se trata de derivaciones independientes porque la transformación de Lorentz en sí misma se obtiene a partir de los postulados. Al fin y al cabo, toda la relatividad especial se deriva directamente de los postulados de Einstein.

Al igual que la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud es un efecto que rige para todos los observadores en movimiento relativo. Preguntas tales como "*¿Realmente se contrae una barra de medición en movimiento?*" tienen significado únicamente en el sentido de

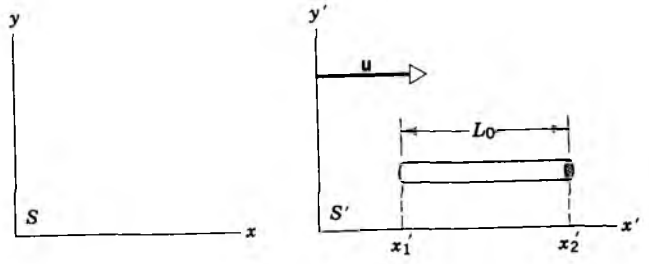



**Figura 17** Los extremos de una barra de medición se determinan en las coordenadas $x_1'$ y $x_2'$ de acuerdo con $S'$, con relación al cual la barra está en reposo. Para determinar la longitud de la barra, $S$ debe hacer una determinación *simultánea* de las coordenadas $x_1$ y $x_2$ de los puntos extremos.

que se refieran a mediciones efectuadas por observadores en movimiento relativo. La esencia de la relatividad es que los resultados de las mediciones de la longitud y del tiempo están sujetos al estado de movimiento del observador con relación al suceso que está siendo medido y se refieren únicamente a las mediciones efectuadas por un observador en particular en un marco de referencia en particular. Si diferentes observadores llevasen la barra al reposo en sus marcos inerciales individuales, cada uno mediría el mismo valor de la longitud de la barra. A este respecto, la relatividad especial es una teoría de la medición que dice simplemente que "el movimiento afecta a la medición".

**Problema muestra 5** Un observador $S$ está parado sobre una plataforma de longitud $D_0$ = 65 m en una estación espacial. Un cohete pasa con una velocidad relativa de 0.80$c$ moviéndose paralelamente al borde de la plataforma. El observador $S$ nota que las partes anterior y posterior del cohete se alinean simultáneamente con los extremos de la plataforma en un instante en particular (Fig. 18*a*). (*a*) De acuerdo con $S$, ¿cuál es el tiempo necesario para que el cohete pase por un punto en particular de la plataforma? (*b*) ¿Cuál es la longitud en reposo $L_0$ del cohete? (*c*) De acuerdo con un observador $S'$ situado en el cohete, ¿cuál es la longitud $D$ de la plataforma? (*d*) De acuerdo con $S'$, ¿cuánto tiempo transcurre para que el observador $S$ pase la longitud entera del cohete? (*e*) De acuerdo con $S$, los extremos del cohete se alinean simultáneamente con los extremos de la plataforma. ¿Son estos eventos simultáneos para $S'$?

**Solución** (*a*) De acuerdo con $S$, la longitud $L$ del cohete es igual a la longitud $D_0$ de la plataforma. $S$ mide que el tiempo para que el cohete pase por un punto en particular es

$$\Delta t_0 = \frac{L}{0.80c} = \frac{65\ m}{2.40 \times 10^8\ \text{m/s}} = 0.27\ \mu\text{s}.$$

Éste es un intervalo de tiempo propio, porque $S$ está midiendo el intervalo de tiempo entre dos sucesos que acontecen en el mismo punto en el marco de referencia de $S$ (la parte anterior del cohete pasa por un punto, y luego la parte posterior del cohete pasa por el mismo punto).

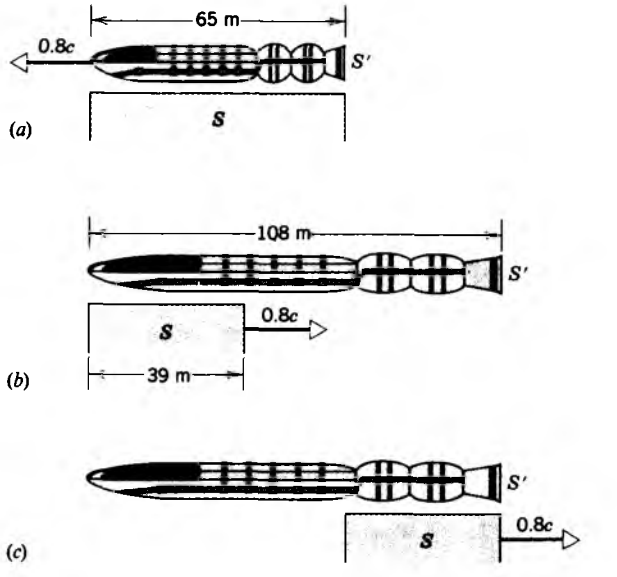



**Figura 18** Problema muestra 5. (*a*) Desde el marco de referencia de *S* en reposo en la plataforma, el cohete está alineado, al pasar, simultáneamente con las partes anterior y posterior de la plataforma. (*b*,*c*) Desde el marco de referencia del cohete, al pasar éste junto a la plataforma, ésta queda alineada primero con la parte anterior del cohete y después con la parte posterior. Nótense los efectos diferentes de la contracción de la longitud en los dos marcos de referencia.

(*b*) *S* mide la longitud contraída *L* del cohete. Podemos hallar su longitud en reposo $L_0$ usando la ecuación 8:

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{65 \text{ m}}{\sqrt{1 - (0.80)^2}} = 108 \text{ m}.$$

(*c*) De acuerdo con *S* la plataforma está en reposo, de modo que 65 m es la longitud de reposo $D_0$. Por lo tanto, de acuerdo con *S'*, la longitud contraída de la plataforma es

$$D = D_0\sqrt{1 - u^2/c^2} = (65 \text{ m})\sqrt{1 - (0.80)^2} = 39 \text{ m}.$$

(*d*) Para que *S* pase la longitud entera del cohete, *S'* concluye que *S* debe moverse una distancia igual a su longitud en reposo, o sea 108 m. El tiempo necesario para hacerlo es

$$\Delta t' = \frac{108 \text{ m}}{0.80c} = 0.45 \ \mu\text{s}.$$

Obsérvese que éste *no es* un intervalo de tiempo propio para *S'*, quien determina este intervalo de tiempo usando un reloj en el frente del cohete para medir el tiempo en el cual *S* pasa por el frente del cohete, y otro reloj en la parte trasera del cohete para medir el tiempo en el cual *S* pasa por la parte trasera del cohete. Por lo tanto, los dos sucesos ocurren en puntos diferentes de *S'* y entonces no pueden estar separados por un tiempo propio en *S'*. El intervalo de tiempo correspondiente medido por *S* para los mismos dos sucesos, el cual fue calculado en la parte (*a*), *es* un intervalo de tiempo propio para *S*, porque los dos sucesos *realmente* ocurren en el mismo punto de *S*. Los intervalos de tiempo medidos por *S* y *S'* estarían relacionados por la fórmula de la dilatación del tiempo:

$$\Delta t' = \gamma \, \Delta t = \frac{0.27 \ \mu\text{s}}{\sqrt{1 - (0.80)^2}} = 0.45 \ \mu\text{s},$$

de acuerdo con el valor calculado arriba de la longitud propia del cohete en *S'*.

(*e*) Según *S'*, el cohete tiene una longitud en reposo de $L_0$ = 108 m y la plataforma tiene una longitud contraída de *D* = 39 m. No existe entonces una manera de que *S'* pueda observar los dos extremos de ambos para alinearlos simultáneamente. En las figuras 18*b* y 18*c* se ilustra la secuencia de sucesos de acuerdo con *S'*. El intervalo de tiempo $\Delta t'$ en *S'* entre los dos eventos que son simultáneos en *S* puede calcularse a partir de la ecuación del intervalo para $\Delta t'$ en la tabla 2 siendo $\Delta t = 0$, lo cual da

$$\Delta t' = -\gamma u \, \Delta x/c^2 = \frac{-(0.80c)(-65 \text{ m})}{c^2\sqrt{1 - (0.80)^2}} = 0.29 \ \mu\text{s}.$$

Podemos verificar este resultado observando que, de acuerdo con *S'*, el intervalo de tiempo entre las situaciones mostradas en las figuras 18*b* y 18*c* debe ser el necesario para que la plataforma se mueva una distancia de 108 m - 39 m = 69 m, lo cual toma un tiempo

$$\Delta t' = \frac{69 \text{ m}}{0.80c} = 0.29 \ \mu\text{s},$$

de acuerdo con el valor calculado a partir de la transformación del intervalo. Este último resultado ilustra la relatividad de la simultaneidad: dos sucesos que sean simultáneos para *S* (el alineamiento de los dos extremos del cohete con los dos extremos de la plataforma) *no pueden* ser simultáneos para *S'*.

## 21-8 ÍMPETU RELATIVISTA

Hasta ahora hemos investigado el efecto de los dos postulados de Einstein sobre las variables cinemáticas de tiempo, desplazamiento y velocidad vistas desde dos marcos inerciales diferentes. En esta sección y en la próxima ampliaremos nuestros esfuerzos para incluir las variables dinámicas de —ímpetu y energía. Aquí discutiremos la visión relativista del ímpetu lineal.

Consideremos la colisión mostrada en la figura 19*a*, vista desde el marco de referencia *S*. Dos partículas, cada una de masa *m*, se mueven con velocidades *v* y -*v* iguales y opuestas a lo largo del eje *x*. Colisionan en el origen, y la distancia entre sus líneas de aproximación ha sido ajustada de modo que después de la colisión las partículas se muevan a lo largo del eje *y* con velocidades finales iguales y opuestas (figura 19*b*). Suponemos que la colisión es perfectamente elástica, de modo que no se pierda ninguna energía cinética. Las velocidades finales deben ser entonces *v* y -*v*.

Usando la fórmula clásica (**p** = *m***v**), las componentes del ímpetu del sistema de dos partículas en el marco *S* son

$$\text{Inicial:} \quad p_{xi} = mv + m(-v) = 0, \qquad p_{yi} = 0.$$

$$\text{Final:} \quad p_{xf} = 0, \qquad p_{yf} = mv + m(-v) = 0.$$

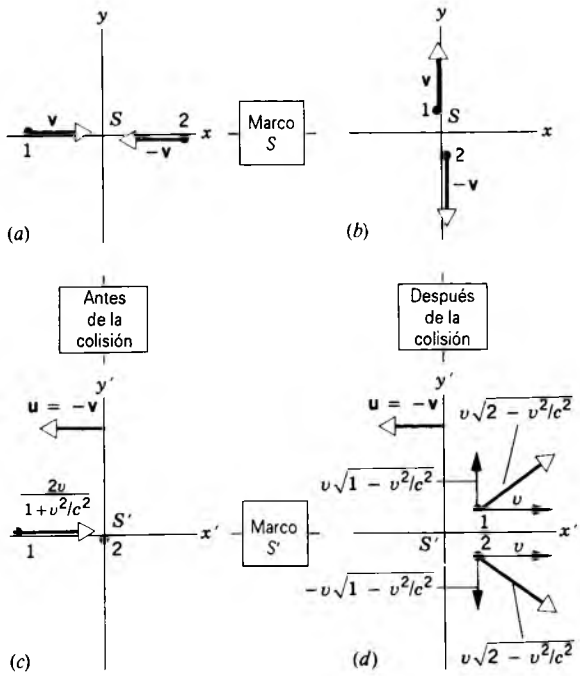



**Figura 19** Se muestra una colisión entre dos partículas de la misma masa (*a*) antes de la colisión en el marco de referencia de *S*; (*b*) después de la colisión en el marco de referencia de *S*; (*c*) antes de la colisión en el marco de referencia de *S*′, y (*d*) después de la colisión en el marco de referencia de *S*′.

Entonces $p_{xi} = p_{xf}$ y $p_{yi} = p_{yf}$; el ímpetu (vectorial) inicial es igual al ímpetu final, y el ímpetu se conserva en el marco *S*.

Veamos ahora a la misma colisión desde el marco *S*′, el cual se mueve en relación al marco *S* con velocidad $u = -v$ (Fig. 19*c*). Obsérvese que en el marco *S*′, la partícula 2 está en reposo antes de la colisión. Usaremos la trasformación de Lorentz de la velocidad, ecuaciones 18 y 19, para hallar las componentes $x'$ y $y'$ transformadas de las velocidades inicial y final, como serían observadas por *S*′. Estos valores, que usted debería calcular, se muestran en las figuras 19*c* y 19*d*.

Usaremos ahora aquellas velocidades para hallar las componentes del ímpetu del sistema en el marco *S*′:

$$p'_{xi} = m\left(\frac{2v}{1+v^2/c^2}\right) + m(0) = \frac{2mv}{1+v^2/c^2},$$

$$p'_{yi} = 0,$$

$$p'_{xf} = mv + mv = 2mv,$$

$$p'_{yf} = mv\sqrt{1-v^2/c^2} + m(-v\sqrt{1-v^2/c^2}) = 0.$$

Vemos que $p'_{xi}$ *no* es igual a $p'_{xf}$, y *S*′ concluirá que el ímpetu *no* se conserva.

Resulta claro del cálculo anterior que la ley de la conservación del ímpetu lineal, la cual hemos hallado útil en una variedad de aplicaciones, no satisface el primer postulado de Einstein (la ley debe ser la misma en todos los marcos inerciales) si calculamos al ímpetu como $p = mv$. Por lo tanto, *si hemos de retener a la conservación del ímpetu como una ley general consistente con el primer postulado de Einstein, debemos hallar una nueva definición del ímpetu.* Esta nueva definición del ímpetu debe tener dos propiedades: (1) Debe hacer que la ley de conservación del ímpetu satisfaga al principio de relatividad; es decir, si el ímpetu se conserva de acuerdo con un observador en un marco inercial, entonces se conserva de acuerdo con los observadores en *todos* los marcos inerciales. (2) A bajas velocidades, la nueva definición debe reducirse a $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, la cual sabemos que funciona perfectamente bien en el caso no relativista.

La fórmula relativista para el ímpetu de una partícula de masa *m* que se mueva con velocidad **v** es

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{23}$$

la cual ya hemos presentado en la ecuación 22 del capítulo 9. En términos de las componentes, podemos escribir a la ecuación 23 así:

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \text{y} \quad p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{24}$$

La velocidad *v* que aparece en el denominador de estas expresiones es *siempre* la velocidad de la partícula medida en un marco inercial en particular. *No es* la velocidad de un marco inercial. La velocidad en el numerador puede ser cualquiera de las componentes del vector velocidad.

Veamos ahora cómo esta nueva definición restablece la conservación del ímpetu en la colisión que hemos considerado. En el marco *S*, las velocidades antes y después son iguales y opuestas, y entonces la ecuación 23 da de nuevo cero para los ímpetus inicial y final. En el marco *S*′, podemos usar las magnitudes de las velocidades como aparecen en las figuras 19*c* y 19*d* para obtener, como usted debe comprobar,

$$\begin{aligned} p'_{xi} &= p'_{xf} = \frac{2mv}{1-v^2/c^2}, \\ p'_{yi} &= p'_{yf} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Así, los ímpetus inicial y final son iguales en el marco *S*′. El ímpetu se conserva tanto en el marco *S* como en el *S*′. De hecho la definición del ímpetu dada en la ecuación 23 da la conservación del ímpetu en *todos* los marcos inerciales, como lo exige el principio de relatividad.

Obsérvese también que, en la región de velocidades bajas, el denominador de la ecuación 23 es casi igual a 1; a velocidades bajas la ecuación 23 se reduce a la familiar fórmula clásica $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Entonces, la ecuación 23 satisface también este criterio necesario de las fórmulas relativistas.

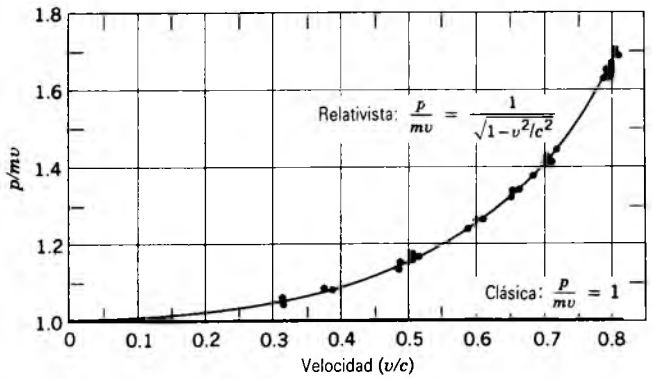



**Figura 20** Se traza la razón $p/mv$ para electrones con varias velocidades. De acuerdo con la física clásica, $p = mv$, y entonces las ecuaciones clásicas predicen que $p/mv = 1$. Los datos concuerdan claramente con el resultado relativista y no con el resultado clásico. A velocidades bajas, las predicciones clásica y relativista no pueden distinguirse.

Por supuesto, la prueba decisiva es la concordancia con el experimento. La figura 20 muestra una colección de datos, basados en determinaciones independientes del ímpetu y la velocidad de los electrones. Los datos se trazan según la relación $p/mv$, la cual debe tener el valor constante de 1 según la física clásica. Los resultados concuerdan con la ecuación relativista y no con la clásica. Obsérvese que las predicciones clásica y relativista concuerdan para velocidades bajas, y de hecho la diferencia entre las dos no es precisamente aparente hasta que la velocidad supera a $0.1c$, lo cual explica nuestra incapacidad para observar las correcciones relativistas en los experimentos con objetos ordinarios del laboratorio.

**Problema muestra 6** ¿Cuál es el ímpetu de un protón que se mueve con una velocidad de $v = 0.86c$?

**Solución** Usando la ecuación 23, obtenemos

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$= \frac{(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(0.86)(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{\sqrt{1 - (0.86)^2}}$$
$$= 8.44 \times 10^{-19}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

Las unidades de kg · m/s no son generalmente convenientes para resolver problemas de este tipo. En su lugar, manipulamos la ecuación 23 para obtener

$$pc = \frac{mcv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{mc^2(v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(938\ \text{MeV})(0.86)}{\sqrt{1 - (0.86)^2}}$$
$$= 1580\ \text{MeV}.$$

Aquí hemos usado la *energía en reposo* $mc^2$ del protón, un concepto que introdujimos en la sección 8-7. El ímpetu se obtiene a partir de este resultado al dividir entre el símbolo $c$ (no entre su valor numérico), lo cual da

$$p = 1580\ \text{MeV}/c.$$

Las unidades de MeV/$c$ para el ímpetu se usan a menudo en los cálculos relativistas porque, como lo demostraremos en la sección siguiente, la cantidad $pc$ aparece a menudo en estos cálculos. Usted debe ser capaz de convertir MeV/$c$ a kg · m/s y demostrar que los dos resultados obtenidos para $p$ son equivalentes.

## 21-9 ENERGÍA RELATIVISTA

La relación entre la masa y la energía desde el punto de vista relativista se trató previamente en la sección 8-7. Puede usted encontrar útil revisar esa discusión antes de que continúe leyendo esta sección.

En analogía con nuestra discusión del momento en la sección anterior, la relatividad especial da un acceso diferente a la energía cinética. Indiquemos primero la dificultad al reconsiderar la colisión mostrada en la figura 19. Si usamos la expresión clásica $\frac{1}{2}mv^2$, la colisión no conserva la energía cinética en el marco $S'$. (Escogimos las velocidades finales en el marco $S$ de modo que la energía cinética se conservara.) Usando las velocidades mostradas en las figuras 19*c* y 19*d*, podemos demostrar que (véase el problema 46), con $K = \frac{1}{2}mv^2$,

$$K_i' = \frac{2mv^2}{(1 + v^2/c^2)^2}, \qquad K_f' = mv^2(2 - v^2/c^2). \tag{26}$$

Entonces $K_i'$ no es igual a $K_f'$, y la colisión elástica aparentemente no conserva la energía cinética en $S'$. Esta situación viola el postulado de relatividad; el tipo de colisión (elástica contra inelástica) debería depender de las propiedades de los objetos que chocan y no del marco de referencia particular desde el cual contemplamos la colisión. Como en el caso del ímpetu, requerimos de una nueva definición de la energía cinética si hemos de preservar la ley de la conservación de la energía y el postulado de relatividad.

La expresión clásica para la energía cinética viola también el segundo postulado de la relatividad al permitir velocidades que superan la velocidad de la luz. No existe un límite (ni en la dinámica clásica ni en la relativista) para la energía que podemos impartir a una partícula. Sin embargo, si permitimos que la energía cinética crezca sin límite, la expresión clásica $K = \frac{1}{2}mv^2$ implica que la velocidad debe aumentar correspondientemente sin límite, violando, por lo tanto, el segundo postulado. Por lo tanto, debemos encontrar una manera de redefinir la energía cinética, con el fin de que la energía cinética de una partícula pueda aumentar sin límite mientras su velocidad permanezca menor que $c$.

La expresión relativista para la energía cinética de una partícula puede derivarse usando, esencialmente, el mismo procedimiento que empleamos para derivar la expre-

sión clásica, comenzando con el teorema trabajo-energía en su forma aplicable a partículas (véase el problema 54). El resultado de este cálculo es

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2. \tag{27}$$

La ecuación 27 se ve muy diferente del resultado clásico $\frac{1}{2}mv^2$, pero, como lo demostramos en la sección 7-7, la ecuación 27 se reduce a la expresión clásica en el límite de bajas velocidades ($v \ll c$). Podemos también ver a partir del primer término de la ecuación 27 que $K \to \infty$ cuando $v \to c$. Entonces podemos aumentar sin límite la energía cinética de una partícula y su velocidad no superará a $c$.

Podemos también expresar la ecuación 27 como:

$$K = E - E_0, \tag{28}$$

donde la *energía relativista total* $E$ se define como

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{29}$$

y la *energía en reposo* $E_0$ se define como

$$E_0 = mc^2. \tag{30}$$

La energía en reposo es en efecto la energía relativista total de una partícula medida en un marco de referencia en el que la partícula esté en reposo.

La energía relativista total está dada por la ecuación 28 como

$$E = K + E_0. \tag{31}$$

En interacciones de partículas a velocidades relativistas, podemos reemplazar nuestro principio de conservación de la energía previo por uno basado en la energía relativista total:

*En un sistema de partículas aislado, la energía relativista total permanece constante.*

Este principio es un caso especial del resultado expresado previamente en la forma de la ecuación 36 del capítulo 8 ($\Delta E_0 + \Delta K = W$), donde $W = 0$ (es decir, el sistema está aislado: su entorno no efectúa ningún trabajo externo).

Usando la forma relativista de la energía cinética dada por la ecuación 27, podemos demostrar que la energía cinética se conserva en el marco $S'$ de la colisión de la figura 19 (véase el problema 47). Puesto que las energías en reposo de las partículas inicial y final son iguales en esta colisión, la conservación de la energía relativista total es equivalente a la conservación de la energía cinética. En general, las colisiones de partículas a altas energías pueden dar por resultado la producción de nuevas partículas, y entonces la energía en reposo final puede no ser igual a la energía en reposo inicial (véase el problema muestra 9). Tales colisiones deben analizarse usando la conservación de la energía relativista total $E$; la energía cinética no se conserva cuando la energía en reposo cambia en una colisión.

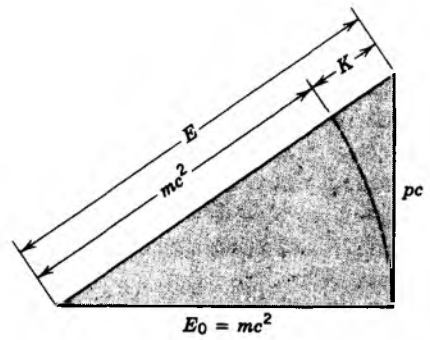



**Figura 21** Un recurso mnemotécnico útil para recordar las relaciones entre $E_0$, $p$, $K$, y $E$. Obsérvese que debe emplearse la cantidad $pc$ para poner todas las variables en unidades de energía.

A menudo, la $m$ de la ecuación 30 se llama *masa en reposo* $m_0$ y se distingue de la "masa relativista", que se define como $m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Elegimos no emplear la masa relativista, porque puede ser un concepto que nos lleve a confusión. Cuando nos refiramos a la masa, siempre querremos significar masa en reposo.

La manipulación de las ecuaciones 23 y 29 da una relación útil entre la energía total, el ímpetu, y la energía en reposo:

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}. \tag{32}$$

La figura 21 muestra un recurso mnemotécnico para recordar esta relación, la cual tiene la forma del teorema de Pitágoras para los lados de un triángulo rectángulo.

Las relaciones entre la energía cinética y la velocidad, y entre la energía cinética y el ímpetu pueden probarse en un régimen relativista por medio de partículas aceleradas a altas velocidades o usando partículas de alta velocidad (es decir, electrones) emitidos en ciertos procesos de desintegración radiactiva. La figura 2 muestra electrones a los que se les da una energía cinética conocida (usando una terminal eléctrica de alto voltaje) cuyas velocidades resultantes fueron medidas. Los datos experimentales concuerdan perfectamente con la expresión relativista y no concuerdan con la expresión clásica. Hoy día se obtienen resultados similares indirectamente en cualquier instalación que posea un acelerador grande. Las partículas son aceleradas a velocidades muy cercanas a $c$, y los parámetros de diseño de los aceleradores deben basarse en la dinámica relativista. Así pues, cada acelerador moderno es, en efecto, un laboratorio para probar la relatividad especial. No es necesario decir que el éxito de estos aceleradores es una confirmación contundente de la relatividad especial.

**Problema muestra 7** En el Stanford Linear Collider* se aceleran electrones a una energía cinética de 50 GeV. Halle la velocidad de un electrón como (*a*) una fracción de *c* y (*b*) una diferencia con *c*. La energía en reposo del electrón es de 0.511 MeV = $0.511 \times 10^{-3}$ GeV.

**Solución** (*a*) Primero, resolvemos la ecuación 27 para $v$, obteniendo

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + K/mc^2)^2}}, \tag{33}$$

y entonces

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + 50\ \text{GeV}/0.511 \times 10^{-3}\ \text{GeV})^2}}$$
$$= 0.999\ 999\ 999\ 948c.$$

Las calculadoras no son confiables después de 12 cifras significativas. He aquí una manera de evitar esta dificultad. Podemos escribir la ecuación 33 como $v = c(1 + x)^{1/2}$, en donde $x = -1/(1 + K/mc^2)^2$. Puesto que $K \gg mc^2$, tenemos que $x \ll 1$, y podemos emplear la expansión binómica para escribir $v \approx c(1 + \frac{1}{2}x)$, o sea

$$v \approx c\left[1 - \frac{1}{2(1 + K/mc^2)^2}\right], \tag{34}$$

lo cual da

$$v = c(1 - 5.2 \times 10^{-11}).$$

Esto conduce al valor de $v$ dado arriba.

(*b*) Partiendo del resultado anterior, tenemos

$$c - v = 5.2 \times 10^{-11}c = 0.016\ \text{m/s} = 1.6\ \text{cm/s}.$$

**Problema muestra 8** Cierto acelerador produce un haz de kaones neutros ($m_K c^2$ = 498 MeV) con una energía cinética de 325 MeV. Consideremos a un kaón que se desintegra en vuelo en dos piones ($m_\pi c^2$ = 140 MeV). Halle la energía cinética de cada pión en el caso especial en que los piones viajen paralela o antiparalelamente en dirección del haz de kaones.

***Solución*** La energía de las partículas que permanecen después de la desintegración puede obtenerse aplicando los principios de conservación de la energía y del ímpetu relativistas totales. La energía relativista inicial total es, según la ecuación 31,

$$E_K = K + m_K c^2 = 325\ \text{MeV} + 498\ \text{MeV} = 823\ \text{MeV}.$$

El ímpetu inicial puede hallarse a partir de la ecuación 32:

$$p_K c = \sqrt{E_K^2 - (m_K c^2)^2} = \sqrt{(823\ \text{MeV})^2 - (498\ \text{MeV})^2}$$
$$= 655\ \text{MeV}.$$

La energía total del sistema final que consiste en los dos piones es

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{(p_1 c)^2 + (m_\pi c^2)^2} + \sqrt{(p_2 c)^2 + (m_\pi c^2)^2}$$
$$= 823\ \text{MeV}, \tag{35}$$

la que, por conservación de la energía relativista total, hemos igualado con la energía inicial total de 823 MeV. Así, tenemos una ecuación con las dos incógnitas $p_1$ y $p_2$.

Para obtener una segunda ecuación con las dos incógnitas aplicamos la conservación del ímpetu. El ímpetu final del sistema de dos piones a lo largo de la dirección del haz es $p_1 + p_2$, y haciéndolo igual al ímpetu inicial $p_K$ da

$$p_1 c + p_2 c = p_K c = 655\ \text{MeV}. \tag{36}$$

Tenemos ahora dos ecuaciones (ecuaciones 35 y 36) con las dos incógnitas $p_1$ y $p_2$. Resolviendo la ecuación 36 para $p_2 c$ y sustituyendo este resultado en la ecuación 35, obtenemos (después de cierta manipulación algebraica) una ecuación cuadrática para $p_1 c$, la cual puede resolverse por medio de las técnicas algebraicas normales para dar

$$p_1 c = 668\ \text{MeV or} -13\ \text{MeV}.$$

Puesto que las designaciones 1 y 2 de los dos piones son arbitrarias, la solución da un pión que viaja paralelo al haz con un ímpetu $p_1$ = 668 MeV/$c$, mientras que el otro pión viaja en dirección opuesta con un ímpetu $p_2$ = −13 MeV/$c$. Las energías cinéticas correspondientes se hallan empleando las ecuaciones 28 y 32, lo cual da

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (m_\pi c^2)^2} - m_\pi c^2$$
$$K_1 = \sqrt{(668\ \text{MeV})^2 + (140\ \text{MeV})^2} - 140\ \text{MeV} = 543\ \text{MeV},$$
$$K_2 = \sqrt{(-13\ \text{MeV})^2 + (140\ \text{MeV})^2} - 140\ \text{MeV} = 0.6\ \text{MeV}.$$

Este problema puede ser resuelto también de una manera diferente llevando a cabo una transformación de Lorentz a un marco de referencia en el que los kaones están en reposo. Los dos piones son emitidos en este marco en direcciones opuestas (porque el ímpetu total debe ser cero), y por lo tanto comparten por igual la energía de la desintegración. Al transformar de regreso al marco del laboratorio tenemos entonces la solución para los ímpetus y las energías (véase el problema 57). En el siguiente problema muestra tenemos otra aplicación de esta técnica.

**Problema muestra 9** El descubrimiento del antiprotón $\bar{\text{p}}$ (una partícula con la misma energía en reposo que un protón, 938 MeV, pero con la carga eléctrica opuesta) tuvo lugar en 1956 en Berkeley mediante la reacción siguiente:

$$\text{p} + \text{p} \rightarrow \text{p} + \text{p} + \text{p} + \bar{\text{p}},$$

en la que protones acelerados incidían sobre un blanco de protones en reposo en el laboratorio. La energía cinética incidente mínima necesaria para producir la reacción se llama energía cinética *umbral*, bajo la cual las partículas finales se mueven juntas como si fuesen una sola unidad. Halle el umbral de la energía cinética para producir antiprotones en esta reacción.

**Solución** Este problema es conceptualmente el caso inverso del problema muestra anterior. Aquí las partículas se juntan para formar una compuesta. Demostramos un método alternativo de solución en el marco de referencia del centro de masa, en donde los dos protones chocan con ímpetus iguales y opuestos para formar una nueva partícula en reposo (Fig. 22).

La energía relativista final total en el marco $S'$ del centro de masa es la energía en reposo de los productos, los cuales se producen en reposo en este marco, de modo que

* Véase "The Stanford Linear Collider", por John R. Rees, *Scientific American*, octubre de 1989, pág. 58.

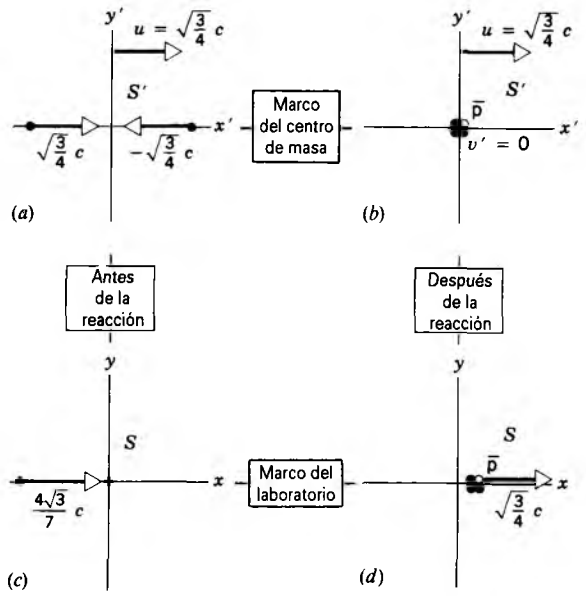



**Figura 22** Problema muestra 9. Producción de un antiprotón, visto desde (*a*,*b*) el marco del centro de masa y (*c*,*d*) el marco del laboratorio. Compárese con la figura 19.

$$E_f' = 4m_p c^2.$$

La energía inicial es precisamente la suma de las energías totales de los dos protones reactantes:

$$E_i' = E_1' + E_2'.$$

La conservación de la energía requiere que $E_i' = E_f'$, y puesto que las energías $E_1'$ y $E_2'$ son iguales en el marco $S'$, tenemos

$$E_1' = E_2' = 2m_p c^2.$$

La magnitud correspondiente de la velocidad de cualquier protón reactante en el marco $S'$ se halla al resolver la ecuación 29 para $v/c$, lo cual da

$$\frac{v_1'}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_p c^2}{E_1'}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Efectuamos ahora una transformación de Lorentz de nuevo en el laboratorio usando esta velocidad como la de la transformación, la cual lleva uno de los protones al reposo y da al otro una velocidad $v$ que puede ser obtenida a partir de la expresión de la transformación inversa de la velocidad para $v_x$ a partir de la tabla 3. Usando $v' = c\sqrt{3/4}$ y $u = c\sqrt{3/4}$, y suprimiendo el subíndice $x$, tenemos que

$$v = \frac{v' + u}{1 + uv'/c^2} = \frac{2c\sqrt{3/4}}{1 + (\sqrt{3/4})^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}c.$$

Ésta es la velocidad del protón incidente en el marco del laboratorio. Su energía total puede obtenerse de la ecuación 29:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - (4\sqrt{3}/7)^2}} = 7m_p c^2,$$

y el umbral de la energía cinética es

$$K = E - m_p c^2 = 6m_p c^2 = 6(938 \text{ MeV})$$
$$= 5628 \text{ MeV} = 5.628 \text{ GeV}.$$

El acelerador Bevatron de Berkeley fue diseñado pensando en este experimento, con el fin de que pudiera producir un haz de protones cuya energía superara los 5.6 GeV. El descubrimiento del antiprotón en esta reacción fue galardonado con el premio Nobel de 1959 a los científicos, Emilio Segrè y Owen Chamberlain.

## 21-10 LA LÓGICA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Hemos llegado a un punto en que podemos dirigir una mirada retrospectiva a nuestra presentación de la relatividad especial y pensar acerca de su lógica natural. En primer lugar, debemos advertir que la relatividad afecta a cada aspecto de la física; nos hemos concentrado en este capítulo en la mecánica, y más adelante en este texto consideraremos el efecto de la relatividad en el electromagnetismo. En efecto, debemos reexaminar cuidadosamente cada subcampo de la física desde la perspectiva de la relatividad especial, verificando que cada uno de ellos sea consistente con los dos postulados. Debemos observar también que la relatividad ha pasado todas las pruebas experimentales sin la menor discrepancia. Es una teoría de gran valor estético, que nos proporciona una visión más satisfactoria que la de la física clásica acerca de la validez de perspectivas y simetrías diferentes. Es también una teoría de gran valor práctico, que les suministra a los ingenieros una guía apropiada para construir grandes aceleradores de partículas, así como también a los implicados en el mantenimiento de las normas con los procedimientos adecuados para corregir las lecturas de los relojes atómicos cuando se les transporta de una localidad a otra.

El primer postulado de la relatividad es realmente una extensión de la primera ley de Newton, la ley de la inercia, la cual definió el concepto de los marcos inerciales y nos proporcionó la primera noción de que los observadores inerciales obtendrían conclusiones idénticas de la observación de un experimento en el cual no actúe ninguna fuerza neta. No vamos demasiado lejos si extendemos esa visión para afirmar que los observadores inerciales deberían también extraer conclusiones idénticas de la observación de un experimento en el que *hay* una fuerza neta. Por último, ¿por qué deberíamos seleccionar las leyes de la mecánica para esta equivalencia? Al extenderla a una equivalencia para observadores inerciales de *todas* las leyes de la física, llegamos al primer postulado.

El segundo postulado es también razonable. Parece increíble que seamos capaces de transmitir una señal a una velocidad infinita, teniéndose así una comunicación instantánea a todo el universo. Además, los experimentos sobre la relatividad del tiempo demuestran que tal comunicación instantánea entre puntos distantes no es consistente con la observación. Si existe una velocidad límite,

entonces con seguridad (según el primer postulado) debe ser la misma para todos los observadores, sin importar su estado de movimiento.

Para algunos, la primera exposición de la relatividad de la simultaneidad, el aparente encogimiento de las barras en movimiento, y la dilatación del tiempo puede ser inquietante. Sin embargo, un poco de reflexión nos persuadirá de que las alternativas clásicas son más inquietantes aún. Por ejemplo, una barra rígida clásica de longitud definida no es un concepto que resulta consistente con la relatividad; una señal (digamos, un movimiento rápido) en un extremo no puede transmitirse instantáneamente al otro extremo. Debemos renunciar a la idea de que todos los observadores sean capaces de usar la *misma* vara de medir. Reemplazamos esta idea con otra que dé a cada observador una vara de medir y que permita que cada observador use esa vara para hacer mediciones dentro de un marco de referencia en particular. Ningún instrumento de medición de un observador, o sus resultados, se prefiere sobre cualquier otro. Por último, la relatividad nos proporciona una simetría maravillosa entre estos observadores; no afirma la *realidad* del atraso de los relojes, sino que, a partir de sus dos perspectivas diferentes, dos observadores en movimiento relativo observan cada uno que el reloj del otro se atrasa. No hay necesidad ninguna de garantizar un status de preferencia para cualquiera de ellos, o para cualquier otro observador inercial.

De acuerdo con la física clásica, el espacio y el tiempo son absolutos. Esto implica que las leyes de la física deben ser diferentes para observadores diferentes. En cambio, la relatividad nos dice que las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores, y en consecuencia el espacio y el tiempo se convierten en conceptos relativos. Resulta claro que la relatividad es "más absoluta" que la física clásica. El mundo físico arbitrario y complejo de la física clásica, en el que cada observador debe usar un conjunto diferente de leyes físicas, se convierte en el mundo físico, más uniforme y sencillo de la relatividad.

La relatividad amplía nuestra visión del Universo al situarnos entre los muchos observadores inerciales de ese universo. Trae consigo conceptos que, de acuerdo con la física clásica, se trataban por separado: por ejemplo, el espacio y el tiempo se transformaron en espacio-tiempo, o la masa y la energía se transformaron en energía en reposo. Señala el camino hacia una sola teoría unificada que incluye todas las interacciones posibles entre las partículas: la electricidad y el magnetismo se convierten en el electromagnetismo; el electromagnetismo y las llamadas fuerzas débiles (las responsables de ciertos procesos de desintegración radioactiva) se convierten en la interacción electrodébil; las interacciones electrodébil y nuclear fuerte se convierten en una de las propuestas Teorías de la Gran Unificación (TGU) (o GUT,de Grand Unified Theories); y por último, las TGU y la gravedad se convierten en la hipotética Teoría del Todo. Con seguridad que Einstein, quien sólo conoció la primera de estas unificaciones, estaría realmente complacido con estos desarrollos.

## PREGUNTAS

1. La velocidad de la luz en el vacío es una verdadera constante de la naturaleza, independiente de la longitud de onda de la luz o de la elección de un marco de referencia (inercial). ¿Existe entonces alguna manera de que el segundo postulado de Einstein pueda verse como contenido dentro del ámbito de su primer postulado?
2. Discuta el problema que intentó resolver el joven Einstein; es decir, ¿cuál sería la apariencia de una onda electromagnética para una persona que corriese junto a ella con una velocidad $c$?
3. ¿Es válido en la relatividad el concepto de un fluido incompresible? ¿Y qué decir de los cuerpos perfectamente rígidos?
4. Un quasar (*objeto casi estelar*) se aleja de la Tierra a la mitad de la velocidad de la luz. ¿Cuál es la velocidad, con respecto a la Tierra, de la luz que detectamos viniendo de él?
5. Los quásares son los objetos más intrínsecamente luminosos del universo. Muchos de ellos fluctúan en brillo, a menudo en una escala de tiempo de un día más o menos. ¿Cómo puede emplearse la rapidez de estos cambios en el brillo para calcular un límite superior del tamaño de estos objetos? (*Sugerencia:* Los puntos separados no pueden cambiar de una manera coordinada a no ser que sea enviada información de uno al otro.)
6. La tasa de barrido de la cauda de un cometa puede superar a la velocidad de la luz. Explique este fenómeno y demuestre que no existe una contradicción con la relatividad.
7. Considere un frente de onda de luz esférico que se difunde desde una fuente puntual. Visto por un observador en la fuente, ¿cuál es la *diferencia de velocidad* de las partes del frente de onda que viajan en direcciones opuestas? ¿Cuál es la *velocidad relativa* de una de estas porciones del frente de onda con respecto a la otra?
8. Tomando prestadas dos frases de Herman Bondi, podemos captar la esencia de los dos postulados de Einstein titulándolos: (1) el principio de "la inaplicabilidad de la velocidad" y (2) el principio de "la unicidad de la luz". ¿En qué sentido es inaplicable la velocidad y única la luz en estas dos aseveraciones?

9. Un rayo de láser incide en ángulo recto sobre un espejo plano y se refleja en él. ¿Cuál es la velocidad del rayo reflejado si el espejo está (*a*) fijo en el laboratorio y (*b*) moviéndose directamente hacia el láser con velocidad $v$?
10. Dé un ejemplo de la física clásica en el que el movimiento de un reloj afecta su pulsación, esto es, la manera en que marcha. (La magnitud del efecto puede depender de la naturaleza detallada del reloj.)
11. Si bien en la relatividad (donde el movimiento es relativo y no absoluto) encontramos que "los relojes en movimiento se atrasan", este efecto no tiene nada que ver con que el movimiento altere la manera en que trabaja un reloj. ¿Con qué tiene que ver?
12. Hemos visto que si varios observadores registran dos sucesos, titulados *A* y *B*, uno de ellos puede decir que el suceso *A* ocurrió primero, pero el otro puede decir que fue el suceso *B* que sucedió primero. ¿Qué le diría usted a un amigo que le preguntase qué suceso *ocurrió realmente* primero?
13. Dos sucesos ocurren en el mismo lugar y al mismo tiempo para un observador. ¿Serían los sucesos simultáneos para todo observador? ¿Ocurrirían en el mismo lugar para todo observador?
14. Dos sucesos son simultáneos pero separados en el espacio en un marco de referencia inercial. ¿Serían simultáneos en cualquier otro marco? ¿Sería su separación espacial la misma en cualquier otro marco?
15. Hagamos que el suceso *A* sea la salida de un aeroplano desde San Francisco y que el evento *B* sea su llegada a Nueva York. ¿Es posible hallar dos observadores que discrepen respecto al orden en el tiempo de estos sucesos? Explique.
16. Dos observadores, uno en reposo en *S* y el otro en reposo en *S'*, llevan cada uno una vara de medir orientada paralelamente a su movimiento relativo. *Cada* observador halla después de medir que la vara de medir *del otro* observador es la más corta de las dos. ¿Le parece esto una paradoja? Explique (*Sugerencia*: Compare con la situación siguiente. Harry le dice adiós a Walter quien está en la parte trasera de una vagoneta que se aleja de Harry. Harry dice que Walter se vuelve más pequeño. Walter dice que Harry se vuelve más pequeño. ¿Están midiendo la misma cosa?
17. ¿Cómo interviene el concepto de simultaneidad en la medición de la longitud de un objeto?
18. En la relatividad las coordenadas de tiempo y espacio están entrelazadas y tratadas sobre una base más o menos equivalente. ¿Son el tiempo y el espacio fundamentalmente de la misma naturaleza, o existe alguna diferencia esencial entre ellos que sea preservada aun en la relatividad?
19. En la "paradoja de los gemelos", explique (en términos de latidos del corazón, actividades físicas y mentales, y así sucesivamente) por qué el gemelo que regresa más joven no ha vivido más tiempo que su tiempo propio, aun cuando el hermano que se quedó en casa pueda decir que sí lo hizo. ¿Explique por tanto la frase: "Envejeces de acuerdo con tu tiempo propio".
20. ¿Podemos sustituir simplemente a $\gamma m$ por $m$ en las ecuaciones clásicas para obtener las ecuaciones relativistas correctas? Dé ejemplos.
21. Si las partículas con masa cero tienen una velocidad $c$ en un marco de referencia, ¿pueden encontrarse en reposo en cualquier otro marco? ¿Pueden tales partículas tener cualquier velocidad diferente de $c$?
22. Un partícula con masa cero (un neutrino, posiblemente) puede transportar ímpetu. Pero, según la ecuación 23, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, el ímpetu es directamente proporcional a la masa y, por lo tanto, debería ser cero cuando la masa es cero. Explique.
23. ¿En cuántas expresiones relativistas puede usted pensar en los que el factor Lorentz $\gamma$ intervenga como un simple multiplicador?
24. ¿Es la masa de una partícula estable, compuesta (un núcleo de oro, por ejemplo) más grande que, igual a, o menor que la suma de las masas de sus componentes? Explique.
25. "La masa del electrón es de 0.511 MeV". ¿Qué significa exactamente esta afirmación?
26. "La relación $E_0 = mc^2$ es esencial en la operación de una planta de potencia basada en la fisión nuclear, pero tiene únicamente una importancia despreciable en una planta de combustible fósil". ¿Es ésta una afirmación verdadera? Explique por qué o por qué no.
27. Una planta hidroeléctrica genera electricidad porque el agua cae bajo la acción de la gravedad a través de una turbina, haciendo girar por tanto a la flecha de un generador. De acuerdo con el concepto de masa-energía, ¿debe ser identificada la generación de energía (la electricidad) con una disminución de masa en alguna parte? De ser así, ¿dónde?
28. Algunos dicen que la relatividad complica las cosas. Dé ejemplos de lo contrario, o sea, donde la relatividad las simplifique.

## PROBLEMAS

### *Sección 21-3 Consecuencias de los postulados de Einstein*

1. Independientemente de los efectos debidos a los movimientos rotatorio y orbital de la Tierra, un marco de laboratorio no es estrictamente un marco inercial porque una partícula situada en reposo allí no permanece, en generai, en reposo; caería debido a la gravedad. Sin em-

bargo, a menudo los sucesos acontecen tan rápidamente que podemos ignorar la caída libre y tratar al marco como inercial. Considérese, por ejemplo, un electrón de 1.0 MeV (para el cual $v = 0.941c$) lanzado horizontalmente hacia una cámara de pruebas del laboratorio y moviéndose una distancia de 20 cm. (*a*) ¿Cuánto tiempo tomaría?, y (*b*) ¿cuánto caería el electrón durante este intervalo? ¿Qué podemos concluir respecto a la idoneidad del laboratorio como un marco inercial en este caso?

2. Un electrón de 100 MeV, para el cual $v = 0.999987c$, se mueve a lo largo del eje de un tubo al vacío que tiene una longitud de 2.86 m medido por un observador $S$ en el laboratorio respecto al cual el tubo está en reposo. Un observador $S'$ que se mueva con el electrón, sin embargo, vería que este tubo pasa moviéndose con una velocidad $v$. ¿Qué longitud del tubo mediría este observador?
3. Una barra que está paralela al eje $x$ del marco de referencia $S$, se mueve a lo largo de este eje con una velocidad de $0.632c$. Su longitud en reposo es 1.68 m. ¿Cuál será su longitud medida en el marco $S$?
4. La vida media de los muones frenados por un bloque de plomo en el laboratorio es de 2.20 $\mu$s. La vida media de muones de alta velocidad en una ráfaga de rayos cósmicos observado desde la Tierra es de 16 $\mu$s. Halle la velocidad de estos muones en los rayos cósmicos.
5. Una partícula inestable de alta energía entra a un detector y deja un rastro de 1.05 mm de longitud antes de desintegrarse. Su velocidad con relación al detector era $0.992c$. ¿Cuál es su vida media propia? Es decir, ¿cuánto tiempo duraría antes de desintegrarse habiendo estado en reposo con respecto al detector?
6. Se mide que la longitud de un vehículo espacial es exactamente la mitad de su longitud en reposo. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del vehículo con relación al marco del observador? (*b*) ¿Por qué factor se atrasan los relojes del vehículo, comparados con los relojes en el marco del observador?
7. Una partícula se mueve a lo largo del eje $x'$ del marco $S'$ con una velocidad de $0.413c$. El marco $S'$ se mueve con una velocidad de $0.587c$ con respecto al marco $S$. ¿Cuál es la velocidad de la partícula medida en el marco $S$?
8. El marco $S'$ se mueve con relación al marco $S$ a $0.620c$ en la dirección de la $x$ creciente. En el marco $S'$ se mide que una partícula tiene una velocidad de $0.470c$ en la dirección de $x'$ creciente. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la partícula con respecto al marco $S$? (*b*) ¿Cuál sería la velocidad de la partícula con respecto a $S$ si se movió (a $0.470c$) en dirección de la $x'$ *decreciente* en el marco $S'$? En cada caso, comparar las respuestas con las predicciones de la ecuación clásica de la transformación de velocidades.
9. Un vehículo espacial de 130 m de longitud en reposo pasa por una estación cronometradora con una velocidad de $0.740c$. (*a*) ¿Cuál es la longitud del vehículo medida por la estación? (*b*) ¿Qué intervalo de tiempo registrará la estación entre el paso de los extremos frontal y trasero de la nave?
10. En los estratos altos de la atmósfera de la Tierra se crea un pión al chocar una partícula incidente de rayos cósmicos de alta energía con un núcleo atómico. El pión así formado desciende hacia la Tierra con una velocidad de $0.99c$. En un marco de referencia en el cual estén en reposo, los piones tienen una vida media 26 ns. Medido en un marco fijo respecto a la Tierra, ¿a qué distancia se moverá este pión típico a través de la atmósfera antes de desintegrarse?
11. Un satélite debe tener una velocidad de unos 7.91 km/s para rodear a la Tierra en una órbita baja. Supongamos que dos de tales satélites giran en torno a la Tierra en direcciones opuestas. (*a*) ¿Cuál es su velocidad relativa al encontrarse? Evalúe usando la ecuación clásica de Galileo para la transformación de velocidades. (*b*) ¿Qué error fraccionario se cometió a causa de no haber usado la ecuación relativista (correcta) de la transformación?

### *Sección 21-4 La transformación de Lorentz*

12. ¿Cuál debe ser el valor del parámetro $\beta$ de la velocidad si el factor $\gamma$ de Lorentz es de (*a*) ¿1.01? (*b*) ¿10.0? (*c*) ¿100? (*d*) ¿1000?
13. Halle el parámetro de la velocidad de una partícula a la que le toma dos años más que a la luz viajar una distancia de 6.0 años luz.
14. El observador $S$ asigna a un suceso las coordenadas $x =$ 100 km, $t = 200$ $\mu$s. Halle las coordenadas de este suceso en el marco $S'$, el cual se mueve en la dirección de la $x$ creciente con una velocidad de $0.950c$. Suponga que $x = x'$ en $t = t' = 0$.
15. El observador $S$ reporta que ocurrió un evento en el eje $x$ en $x = 3.20 \times 10^8$ m al tiempo $t = 2.50$ s. (*a*) El observador $S'$ se mueve en dirección de $x$ creciente con una velocidad de $0.380c$. ¿Qué coordenadas reportaría $S'$ para el suceso? (*b*) ¿Qué coordenadas reportaría $S''$ si $S''$ se estuviera moviendo en la dirección de $x$ *decreciente* con la misma velocidad?
16. El marco inercial $S'$ se mueve con una velocidad de $0.60c$ con respecto al marco $S$ en la dirección de $x$ creciente. En el marco $S$, el evento 1 ocurre en el origen en $t = 0$, y el evento 2 ocurre sobre el eje $x$ en $x = 3.0$ km y en $t = 4.0$ $\mu$s. ¿Qué tiempos de ocurrencia registra el observador $S'$ para estos mismos sucesos? Explique la inversión del orden en el tiempo.
17. Un experimentador dispara dos bulbos de destellos simultáneamente, un destello azul situado en el origen de su marco de referencia y un destello rojo en $x = 30.4$ km. Un segundo observador, que se mueve con una velocidad de $0.247c$ en la dirección de $x$ creciente, ve también los destellos. (*a*) ¿Qué intervalo de tiempo entre ellos encuentra el segundo observador? (*b*) ¿Cuál destello ocurre primero para este observador?
18. Derive las ecuaciones 17 para la transformación inversa de Lorentz invirtiendo algebraicamente las ecuaciones de la transformación de Lorentz, ecuaciones 14.

### *Sección 21-6 La transformación de las velocidades*

19. Supóngase que el observador $S$ dispare un haz de luz en la dirección $y$ ($v_x = 0$, $v_y = c$). El observador $S'$ se está moviendo con una velocidad $u$ en la dirección $x$. (*a*) Halle las componentes $v_x'$ y $v_y'$ de la velocidad del haz de luz de

acuerdo con $S'$, y (*b*) demuestre que $S'$ mide una velocidad de $c$ para el haz de luz.

**20.** Un protón de rayos cósmicos se acerca a la Tierra a lo largo de su eje con una velocidad de $0.787c$ hacia el Polo Norte y otro, con velocidad $0.612c$, hacia el Polo Sur. Véase la figura 23. Halle la velocidad de acercamiento relativa de una partícula respecto a la otra. (*Sugerencia*: Es de utilidad considerar a la Tierra y a una de las partículas como los dos marcos inerciales de referencia.)

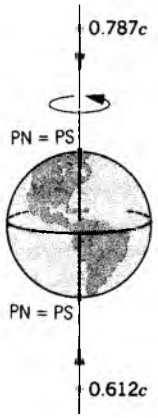



**Figura 23** Problema 20.

**21.** Se reporta que la galaxia A está retrocediendo con respecto a nosotros con una velocidad de $0.347c$. La galaxia B, situada precisamente en la dirección opuesta, está también retrocediendo con respecto a nosotros con la misma velocidad. ¿Qué velocidad de retroceso hallaría un observador en la galaxia A (*a*) para nuestra galaxia y (*b*) para la galaxia B?

**22.** Por las mediciones del corrimiento al rojo de la luz emitida se concluye que el quasar $Q_1$ se aleja de nosotros con una velocidad de $0.788c$. El quasar $Q_2$, que está en la misma dirección en el espacio pero más cerca de nosotros, se aleja de nosotros con una velocidad de $0.413c$. ¿Qué velocidad de $Q_2$ mediría un observador situado en $Q_1$?

**23.** A un vehículo espacial, en reposo en cierto marco de referencia $S$, se le da un incremento de velocidad de $0.500c$. Luego recibe un incremento adicional de $0.500c$ en este nuevo marco, y este proceso continúa hasta que su velocidad respecto a su marco original $S$ sea de $0.999c$. ¿Cuántos incrementos se requieren?

**24.** Un núcleo radiactivo se mueve con una velocidad constante de $0.240c$ a lo largo del eje $x$ de un marco de referencia $S$ fijo respecto al laboratorio. Se desintegra emitiendo un electrón cuya velocidad, medida en un marco de referencia $S'$ que se mueve con el núcleo, es de $0.780c$. Considérense primero los casos en que el electrón emitido viaje (*a*) a lo largo del eje $xx'$ común y (*b*) a lo largo del eje $y'$ y halle, para cada caso, su velocidad (magnitud y dirección) medida en el marco $S$. (*c*) Sin embargo, supóngase que el electrón emitido, visto ahora desde el marco $S$, viaje a lo largo del eje $y$ de ese marco con una velocidad de $0.780c$. ¿Cuál es su velocidad (magnitud y dirección) medida en el marco $S'$?

**25.** En la figura 24, $A$ y $B$ son trenes sobre vías perpendiculares, que parten de la estación $S$. Las velocidades se refieren al marco de la estación (marco $S$). (*a*) Halle $\mathbf{v}_{AB}$, la velocidad del tren $B$ con respecto al tren $A$. (*b*) Halle $\mathbf{v}_{BA}$, la velocidad del tren $A$ con respecto al tren $B$.Comente el hecho de que estas dos velocidades relativas no apuntan en direcciones opuestas.

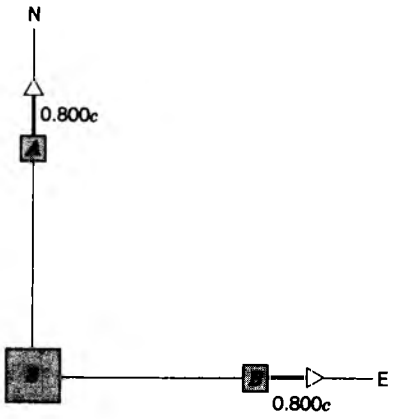



**Figura 24** Problema 25.

### *Sección 21-7 Consecuencias de la transformación de Lorentz*

**26.** Un electrón se mueve con una velocidad tal que podría rodear a la Tierra por el ecuador en 1 s. (*a*) ¿Cuál es su velocidad, en términos de la velocidad de la luz? (*b*) ¿Sin energía cinética $K$? (*c*) ¿Qué porcentaje de error cometemos al usar la fórmula clásica para calcular $K$?

**27.** El radio en reposo de la Tierra es de 6370 km y su velocidad orbital respecto al Sol es de 29.8 km/s. ¿En cuánto parecería acortarse el diámetro de la Tierra para un observador estacionarios de modo que pueda ver pasar a la Tierra con esta velocidad?

**28.** Un aeroplano cuya longitud en reposo es de 42.4 m se mueve respecto a la Tierra con una velocidad constante de 522 m/s. (*a*) ¿En qué fracción de su longitud en reposo le parecería haberse acortado a un observador situado en la Tierra? (*b*) ¿Cuánto tiempo tomaría según los relojes de la Tierra para que el reloj del aeroplano se atrase 1 $\mu$s? (Suponga que se aplica únicamente la relatividad especial).

**29.** Un vehículo espacial cuya longitud en reposo es de 358 m tiene una velocidad de $0.728c$ respecto a un cierto marco de referencia. Un micrometeorito, con una velocidad de $0.817c$ en este marco, encuentra al vehículo espacial en una trayectoria antiparalela. ¿Cuánto tiempo le toma a este micrometeorito pasar al vehículo espacial?

**30.** Un reloj se mueve a lo largo del eje $x$ con una velocidad de $0.622c$ e indica cero al pasar por el origen. (*a*) Calcule

el factor de Lorentz. (*b*) ¿Qué tiempo indica el reloj cuando pase por $x = 183$ m?

**31.** Un observador $S$ ve un destello de luz roja a 1210 m y un destello de luz azul a 730 m sobre la misma línea recta. $S$ mide que el intervalo de tiempo entre el disparo de los destellos es de 4.96 $\mu$s, ocurriendo primero el destello rojo. (*a*) Halle la velocidad relativa (magnitud y dirección) de un segundo observador $S'$ que registre que estos destellos ocurren en el mismo lugar. (*b*) Según el punto de vista de $S'$, ¿cuál destello ocurre primero y cuál es el intervalo de tiempo medido entre destellos?

**32.** Considere el problema anterior. Suponga ahora que el observador $S$ vea los dos destellos en las mismas posiciones que en ese problema pero ocurriendo más cerca entre sí en cuanto a tiempo. ¿A qué distancia en tiempo pueden estar entre sí y todavía tener la posibilidad de hallar un marco $S'$ en el que ocurran en el mismo lugar?

**33.** Un viajero del espacio despega de la Tierra y se mueve con una velocidad de $0.988c$ hacia la estrella Vega, que está a una distancia de 26.0 años luz. ¿Cuánto tiempo habrá pasado en los relojes de la Tierra (*a*) cuando el viajero llegue a Vega y (*b*) cuando los observadores en la Tierra reciban su aviso de haber llegado? (*c*) ¿Qué tanto más viejo calcularán los observadores en la Tierra que sea el viajero al llegar a Vega de lo que era cuando inició el viaje?

**34.** Usted desea hacer un viaje redondo desde la Tierra en un vehículo espacial, viajando con una velocidad constante en línea recta durante 6 meses y regresando luego con la misma velocidad constante. Además, usted desea, a su retorno, hallar a la Tierra como si estuviese a 1000 años en el futuro. (*a*) ¿Qué tan rápidamente tendría que viajar? (*b*) ¿Importa o no que el viaje haya sido en línea recta? Si, por ejemplo, usted viajase en un círculo durante 1 año, ¿hallaría aún al retornar que habían transcurrido 1000 años en los relojes de la Tierra?

**35.** Los observadores $S$ y $S'$ están en el origen de sus marcos respectivos, los cuales se mueven uno con relación al otro con una velocidad de $0.600c$. Cada uno tiene un reloj ordinario, el cual, como es lo usual, ponen a cero cuando coincidan los dos orígenes. El observador $S$ mantiene visualmente al reloj $S'$ a la vista. (*a*) ¿Qué tiempo registrará el reloj $S'$ cuando el reloj $S$ registre 5.00 us? (*b*) ¿Qué tiempo *leerá realmente* el observador $S$ en el reloj $S'$ cuando el reloj $S$ indique 5.00 $\mu$s?

**36.** (*a*) Puede una persona, en principio, viajar desde la Tierra hasta el centro galáctico (que está a alrededor de 23,000 años luz de distancia) en un ciclo de vida normal? Explique, usando los argumentos ya sea de dilatación del tiempo o de contracción de la longitud. (*b*) ¿Qué velocidad constante necesitaría esa persona para efectuar el viaje en 30 años (tiempo propio)?

### *Sección 21-8 Ímpetu relativista*

**37.** Demuestre que 1 kg · m/s = $1.875 \times 10^{21}$ MeV/$c$

**38.** Una partícula tiene un ímpetu igual a $mc$. Calcule su velocidad.

**39.** Calcule el parámetro de velocidad de una partícula con un ímpetu de 12.5 MeV/$c$ si la partícula es (*a*) un electrón y (*b*) un protón.

### *Sección 21-9 Energía relativista*

**40.** Halle el parámetro $\beta$ de la velocidad y el factor $\gamma$ de Lorentz para un electrón cuya energía cinética es (*a*) 1.0 keV, (*b*) 1.0 MeV, y (*c*) 1.0 GeV.

**41.** Halle el parámetro $\beta$ de la velocidad y el factor de Lorentz para una partícula cuya energía cinética es 10 MeV si la partícula es (*a*) un electrón, (*b*) un protón, y (*c*) una partícula alfa.

**42.** Una partícula tiene una velocidad de $0.990c$ en el marco de referencia de un laboratorio. ¿Cuáles son su energía cinética, su energía total, y su ímpetu si la partícula es (*a*) un protón o (*b*) un electrón?

**43.** Se cree que los quásares son los núcleos de galaxias activas en las etapas iniciales de su formación. Un quasar típico irradia energía a razón de $1.20 \times 10^{41}$ W. ¿En qué razón se está reduciendo la masa de este quasar para suministrar esta energía? Exprese su respuesta en unidades de masa solar por año, en donde una unidad de masa solar (ums) es la masa de nuestro Sol.

**44.** Calcule la velocidad de una partícula (*a*) cuya energía cinética sea igual al doble de su energía en reposo y (*b*) cuya energía total sea igual al doble de su energía en reposo.

**45.** Halle el ímpetu de una partícula de masa $m$ para que su energía total sea tres veces su energía en reposo.

**46.** Use las velocidades dadas en la figura 19 en el marco $S'$ y demuestre que, de acuerdo con $S'$, las energías cinéticas antes y después de la colisión, calculadas clásicamente, están dadas por las ecuaciones 26.

**47.** Reconsidere la colisión mostrada en la figura 19. Usando la ecuación 27 de la energía cinética relativista, calcule las energías cinéticas inicial y final en el marco $S'$ y a partir de allí demuestre que la energía cinética se conserva en este marco así como en el marco $S$.

**48.** Considere lo siguiente, moviéndose todo en el espacio libre: un fotón de 2.0 eV, un electrón de 0.40 MeV, y un protón de 10 MeV. (*a*) ¿Cuál se está moviendo más rápidamente? (*b*) ¿Cuál más lentamente? (*c*) ¿Cuál tiene el ímpetu más grande? (*d*) ¿Cuál el momento más pequeño? (*Nota:* Un fotón es una partícula de luz de masa cero.)

**49.** (*a*) Si la energía cinética $K$ y el ímpetu $p$ de una partícula pueden medirse, sería posible hallar su masa $m$ y por lo tanto identificar a la partícula. Demuestre que

$$m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2}.$$

(*b*) ¿A qué se reduce esta expresión cuando $v/c \to 0$, en donde $v$ es la velocidad de la partícula? (*c*) Halle la masa de una partícula cuya energía cinética es de 55.0 MeV y cuyo ímpetu es de 121 MeV/$c$; expresar su respuesta en términos de la masa $m_e$ del electrón.

**50.** En una colisión de alta energía de una partícula primaria de rayos cósmicos cerca de la parte superior de la atmósfera de la Tierra, a 120 km sobre el nivel del mar, se crea

un pión con una energía total de 135 GeV, que viaja verticalmente hacia abajo. En su marco propio este pión se desintegra 35.0 ns después de su creación. ¿A qué altitud sobre el nivel del mar ocurre la desintegración? La energía en reposo de un pión es de 139.6 MeV.

**51.** ¿Cuánto trabajo es necesario efectuar para aumentar la velocidad de un electrón desde (*a*) $0.18c$ hasta $0.19c$ y (*b*) $0.98c$ hasta $0.99c$? Nótese que el aumento de velocidad ($= 0.01c$) es el mismo en cada caso.

**52.** Dos partículas idénticas, de 1.30 mg de masa cada una, que se mueven con velocidades de $0.580c$, iguales pero opuestas, en el marco de referencia del laboratorio, chocan y se quedan pegadas. Halle la masa de la partícula resultante.

**53.** Una partícula de masa $m$ que viaja con una velocidad relativista choca en una colisión completamente inelástica con una partícula idéntica que inicialmente está en reposo. Halle (*a*) la velocidad de la partícula única resultante y (*b*) su masa. Exprese sus respuestas en términos del factor de Lorentz $\gamma$ de la partícula incidente.

**54.** (*a*) Suponga que tenemos a una partícula acelerada desde el reposo por la acción de una fuerza $F$. Suponiendo que la segunda ley de Newton para una partícula, $F = dp/dt$, sea válida en la relatividad, demuestre que la energía cinética final $K$ puede escribirse, usando el teorema trabajo-energía, como $K = \int v\, dp$. (*b*) Usando la ecuación 23 del ímpetu relativista, demuestre que llevando a cabo la integración en (*a*) obtenemos la ecuación 27 de la energía cinética relativista.

**55.** (*a*) En la física moderna experimental de alta energía, se hace que partículas energéticas circulen en direcciones opuestas en anillos llamados de almacenamiento y se permite que choquen de frente. En esta situación cada partícula tiene la misma energía cinética $K$ en el laboratorio. Las colisiones pueden considerarse totalmente inelásticas, en que la energía en reposo de las dos partículas que chocan, más toda la energía cinética disponible, puede ser usada para generar nuevas partículas y dotarlas de energía cinética. Demuestre que la energía disponible en esta situación puede escribirse en la forma

$$E_{\text{nueva}} = 2mc^2\left(1 + \frac{K}{mc^2}\right)$$

donde $m$ es la masa de las partículas que chocan. (*b*) ¿De cuánta energía se puede disponer cuando se emplean de esta manera protones de 100 GeV? (*c*) ¿Qué energía se requerirá de los protones para disponer de 100 GeV? (*Nota*: Compare sus respuestas con las del problema 56, que describe otra situación de bombardeo, aunque menos eficaz en cuanto a la energía.)

**56.** (*a*) Un protón, de masa $m$, acelerado en un sincrotrón de protones a una energía cinética $K$ choca con un segundo protón (el blanco) en reposo en el laboratorio. La colisión es enteramente inelástica y en ella está disponible la energía de reposo de los dos protones, más toda la energía cinética consistente con la ley de la conservación del ímpetu, para generar nuevas partículas y dotarlas de energía cinética. Demuestre que la energía disponible para este propósito está dada por

$$E_{\text{nueva}} = 2mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{K}{2mc^2}\right)}.$$

(*b*) ¿De cuánta energía se dispone cuando se usan de este modo protones de 100 GeV? (*c*) ¿Qué energía se requerirá de los protones para disponer de 100 GeV? (*Nota*: Compárese con el problema 55).

**57.** (*a*) Considere la desintegración del kaón descrito en el problema muestra 8, pero use un marco de referencia (el marco del centro de masa) en el que los kaones estén inicialmente en reposo. Demuestre que los dos piones emitidos en la desintegración viajan en direcciones opuestas con velocidades iguales de $0.827c$. (*b*) ¿Cuál es la velocidad de los kaones originales observados en el marco del laboratorio? (*c*) Suponga que los dos piones son emitidos en el marco del centro de masa con velocidades de $v'_x = +0.827c$ y $v'_x = -0.827c$. Calculando las velocidades correspondientes en el marco del laboratorio, demuestre que las energías cinéticas en el marco del laboratorio son idénticas a las halladas en la solución del problema muestra 8.

**58.** Una partícula alfa con una energía cinética de 7.70 MeV choca con un núcleo de $^{14}$N en reposo. Se producen un núcleo de $^{17}$O y un protón, el protón emitido a 90° con la dirección de la partícula alfa incidente y transportando una energía cinética de 4.44 MeV. Las energías en reposo de las diversas partículas son: partícula alfa, 3730.4 MeV; $^{14}$N, 13,051 MeV; protón, 939.29 MeV; $^{17}$O, 15,843 MeV. (*a*) Halle la energía cinética del núcleo de $^{17}$O. (*b*) ¿Con qué ángulo respecto a la dirección de la partícula alfa incidente se mueve el núcleo de $^{17}$O?

# CAPÍTULO 22

# TEMPERATURA

*Hasta aquí hemos tratado, en su momento, la mecánica de las partículas aisladas, los sistemas de partículas, los cuerpos rígidos, y los fluidos. En cada caso, hemos utilizado de una forma u otra las leyes de Newton para analizar la dinámica del sistema y estudiar a la vez los movimientos de la partícula por separado o los movimientos de los elementos del sistema.*

*A partir de este capítulo, ampliamos ahora nuestra perspectiva para tratar con sistemas que resultan demasiado complejos como para tratarlos en términos del movimiento de la partícula por separado. Estos sistemas aparecen por lo general desordenados debido al gran número de partículas implicadas y a las muy diferentes maneras en que pueden compartir la energía del sistema. Para analizar estos sistemas hacemos uso de los principios de la* termodinámica. *En nuestro estudio de la termodinámica definiremos un nuevo conjunto de variables físicas para describir el estado de un sistema, y deduciremos un nuevo conjunto de leyes que rigen el comportamiento de los sistemas. También demostraremos cómo pueden entenderse estas nuevas leyes sobre la base de nuestras leyes previas de la mecánica.*

*Un concepto central de la termodinámica es la* temperatura. *En este capítulo damos la definición de la temperatura y exponemos la forma de medirla.*

## 22-1 DESCRIPCIÓN MACROSCÓPICA Y DESCRIPCIÓN MICROSCÓPICA

Un litro de gas contiene unas $3 \times 10^{22}$ moléculas. Tomemos el caso más sencillo posible y tratemos a las moléculas del gas como partículas puntuales que chocan elásticamente entre sí y con las paredes del recipiente que las contiene. Si especificamos la posición y la velocidad iniciales de cada partícula, podemos entonces aplicar las leyes de Newton y deducir la posición y la velocidad de cada partícula en cualquier momento futuro. Dada esa información, podemos calcular ciertas propiedades mensurables del sistema, tales como la fuerza impulsiva neta ejercida sobre un elemento de área del recipiente. Llamamos a esto la descripción *microscópica* del sistema. Puesto que el número de partículas es tan grande, nos resulta ventajoso tratar al sistema usando valores promedio de las cantidades microscópicas. Este enfoque se llama *mecánica estadística* y se discute en el capítulo 24.

Un enfoque distinto se basa en la pregunta siguiente: ¿Podemos describir al sistema, incluyendo sus interacciones mutuas con su entorno, en términos de un número pequeño de propiedades del conjunto que sean mensurables por medio de operaciones relativamente sencillas llevadas a cabo en el laboratorio? En el caso de un gas confinado en un recipiente, podemos realmente obtener tal descripción en términos de las cantidades *macroscópicas*, como presión, volumen, temperatura, cantidad de materia, y energía interna, entre otras. En sistemas diferentes a un gas, podemos definir y medir diferentes variables macroscópicas. Por ejemplo, en un material ferromagnético como el hierro, las partículas no interactúan por fuerzas impulsoras en las colisiones sino por fuerzas magnéticas; en la descripción macroscópica de un material ferromagnético, la magnetización debe ser incluida entre las cantidades macroscópicas.

Usualmente las propiedades macroscópicas pueden medirse directamente en el laboratorio, por ejemplo, la presión de un gas confinado o la magnetización de un trozo de hierro. Podemos también medir fácilmente la variación de cualquiera de tales propiedades con la temperatura y derivar una *ecuación de estado* que describa la dependencia de las variables macroscópicas entre sí.

En cualquier sistema, las cantidades macroscópica y las microscópicas deben relacionarse porque son modos sim-

plemente diferentes de describir la misma situación. En particular, deberíamos ser capaces de expresarla una en términos de la otra. La presión de un gas, una cantidad macroscópica, se mide operativamente usando un manómetro. Microscópicamente, la presión se relaciona con la cantidad promedio por unidad de área en que las moléculas del gas liberan ímpetu al fluido del manómetro al chocar con su superficie. En la sección 23-3 cuantificamos esta definición microscópica de la presión. De igual forma (véase la sección 23-4), la temperatura de un gas (cantidad macroscópica también) se relaciona con la energía cinética promedio de traslación de las moléculas.

Si las cantidades macroscópicas pueden expresarse en términos de las cantidades microscópicas, entonces las leyes de la termodinámica pueden expresarse cuantitativamente en términos de la mecánica estadística. Esta posibilidad es uno de los logros en el desarrollo de la física. Este tema de la relación entre las variables macroscópicas y microscópicas surgirá con frecuencia según avancemos en el estudio de la termodinámica.

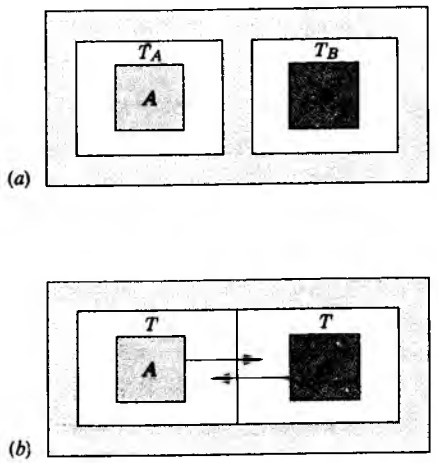



**Figura 1** (*a*) Los sistemas *A* y *B* están separados por una pared adiabática. Los sistemas tienen temperaturas diferentes $T_A$ y $T_B$. (*b*) Los sistemas *A* y *B* están separados por una pared diatérmica. Los sistemas, por haber llegado al equilibrio térmico, tienen la misma temperatura *T*.

## 22-2 TEMPERATURA Y EQUILIBRIO TÉRMICO

Consideremos los dos sistemas *A* y *B* ilustrados en la figura 1*a*. Están "aislados" uno del otro y del entorno. Por "aislados" queremos decir que ni la energía ni la materia pueden entrar o salir de cualquiera de los sistemas. Por ejemplo, los sistemas podrían estar rodeados por paredes hechas de placas gruesas de espuma de poliestireno (styrofoam), las que supuestamente son tanto rígidas como impermeables. En este caso se dice que las paredes son *adiabáticas*. (El término "adiabático" proviene del griego y quiere decir "que no puede ser atravesado". Así, "adiabático" puede entenderse como "aislante".) Los cambios en las propiedades de un sistema no tienen efecto sobre el otro sistema.

Podemos sustituir la pared adiabática que separa a *A* y a *B* por otra que permita el flujo de la energía (Fig. 1*b*) en una forma que conoceremos como calor. Un ejemplo podría ser una lámina de cobre delgada pero rígida. Esta pared se llama *diatérmica* (Este término, que también proviene del griego, significa que "el calor pasa a través de él", por lo que podemos tomarlo con la connotación de "conductor de calor".)

Cuando dos sistemas están en mutuo contacto a través de una pared diatérmica, el intercambio de energía causa que las propiedades macroscópicas de los dos sistemas cambien. Por ejemplo, si los sistemas son gases confinados, la presión debería ser una de las cantidades macroscópicas que cambian. Los cambios son relativamente rápidos al principio, pero se vuelven cada vez más lentos en el transcurso del tiempo, hasta que finalmente las propiedades macroscópicas se aproximan a valores constantes. Cuando ocurre esto, decimos que los dos sistemas están en *equilibrio térmico* entre sí.

Una manera de probar si los cuerpos están en equilibrio térmico es ponerlos en contacto a través de una pared diatérmica y observar si las propiedades macroscópicas de los sistemas cambian con el tiempo después de haber sido puestos en contacto. Si con el tiempo no se observan cambios en las propiedades macroscópicas, los sistemas estaban originalmente en equilibrio térmico. Sin embargo, pudiera ser inconveniente y hasta imposible mover a los dos sistemas con el fin de ponerlos en contacto entre sí. (Los sistemas podrían ser demasiado voluminosos para moverlos fácilmente, o podrían estar separados por una distancia muy grande.) Por lo tanto, generalizamos el concepto de equilibrio térmico de modo que los sistemas no necesariamente tienen que estar en contacto entre sí. Se dice que los cuerpos separados están en equilibrio térmico cuando están en estados tales que, si *estuviesen* conectados, estarían en equilibrio térmico.

La manera de probar si tales sistemas separados están en equilibrio térmico es usar un tercer sistema *C*. Al poner a *C* en contacto con *A* y luego con *B*, podríamos saber si *A* y *B* están en equilibrio térmico sin poner en contacto directo a *A* y a *B*. Esto se resume en un postulado llamado la *ley cero de la termodinámica* que se enuncia como sigue:

> *Si los sistemas A y B están cada uno en equilibrio térmico con un tercer sistema C, entonces A y B están en equilibrio térmico entre sí.*

Esta ley puede parecer simple, pero no es del todo obvia. Si *A*, *B*, y *C* fueran personas, podría ser cierto que

*A* y *C* conocieran a *B* y que no se conocieran entre sí. Si *A* y *C* son trozos de hierro no imantados y *B* es un imán, entonces *A* y *C* son ambos atraídos por *B* sin ser atraídos entre sí.

A la ley cero se le ha llamado idea lógica tardía. Salió a la luz la década de 1930, mucho tiempo después de que la primera y segunda leyes de la termodinámica hubieran sido propuestas y aceptadas. Como veremos más adelante, la ley cero define en efecto el concepto de temperatura, fundamental en las leyes primera y segunda de la termodinámica. La ley que establece la temperatura debería tener un número más bajo; de aquí que se le llame ley cero.

### La temperatura

Cuando dos sistemas están en equilibrio térmico, decimos que tienen la misma *temperatura*. A la inversa, la temperatura es aquella propiedad de un sistema que iguala a la de otro sistema cuando los dos sistemas están en equilibrio térmico. Por ejemplo, supongamos que los sistemas son dos gases que inicialmente tienen temperatura, presión, y volumen diferentes. Después de haber sido puestos en contacto y esperado un tiempo lo suficientemente largo para que lleguen al equilibrio térmico, sus presiones *no* serán en general iguales, como tampoco sus volúmenes; sin embargo, sus temperaturas siempre serán iguales en el equilibrio térmico. Sólo mediante este argumento basado en el equilibrio térmico puede introducirse en la termodinámica la noción de temperatura.

Aunque la temperatura, en su uso cotidiano, es algo que resulta familiar para todos nosotros, es necesario darle un significado preciso para que tenga valor como unidad de medida científica. Nuestra noción subjetiva de la temperatura no es totalmente confiable. Por ejemplo, suponga que está usted sentado en su casa en una silla hecha parcialmente de tela, madera y metal. Toque las diversas partes de la silla para decidir cuál es "la más fría", al decir, cuál tiene la temperatura más baja. Es probable que llegue usted a la conclusión de que las partes de metal son las más frías. Sin embargo, cabría suponer que todas las partes de la silla han estado en la sala el tiempo suficiente como para estar en equilibrio térmico con el aire y, por lo tanto, deberían tener la misma temperatura que el aire. Lo que usted examina, al tocar el metal, es no sólo la temperatura de la silla sino también la capacidad de ésta para conducir el calor proveniente de su mano (presumiblemente más caliente). En este caso, su mano realiza una medición subjetiva e incorrecta de la temperatura. Además, ese juicio subjetivo cambiará con el tiempo, si mantiene su mano sobre el metal, cuando la mano y el metal alcancen el equilibrio térmico entre sí.

Puede usted también examinar esa subjetividad que mencionamos mojando una mano en agua fría y la otra en agua caliente. Comprobará que, al tomar un objeto de temperatura intermedia, la primera mano siente una temperatura más alta que la segunda. Puede tratar de ser un poco más objetivo y comparar dos muestras diferentes del mismo material a temperaturas diferentes tocando cada muestra con la misma mano, la cual puede distinguir "lo más caliente" de "lo más frío". Este procedimiento debería revelar cuál de los dos objetos está a una temperatura más alta, pero difícilmente es lo bastante cuantitativo como para que nos pueda dar la diferencia. Por lo tanto, es necesario especificar cuidadosamente una manera objetiva de medir la temperatura, lo cual constituye nuestro objetivo en este capítulo.

En el uso práctico de la ley cero, deseamos identificar al sistema *C* como un termómetro. Si el termómetro entra por separado en equilibrio térmico con los sistemas *A* y *B* e indica la misma temperatura, entonces podemos concluir que *A* y *B* están en equilibrio térmico y, por lo tanto, que tienen realmente la misma temperatura.

Otro postulado de la ley cero, más riguroso y más fundamental, es el siguiente:

> *Existe una cantidad escalar, llamada temperatura, que es una propiedad de todos los sistemas termodinámicos en equilibrio. Dos sistemas están en equilibrio térmico si y sólo si sus temperaturas son iguales.*

La ley cero define entonces el concepto de temperatura y lo especifica como aquella propiedad macroscópica de un sistema que será igual a la de otro sistema cuando estén en equilibrio térmico. La ley cero nos permite construir y usar los termómetros para medir la temperatura de un sistema, ya que ahora sabemos que un termómetro en contacto térmico con un sistema alcanzará una temperatura común con el sistema.

## 22-3 MEDICIÓN DE LA TEMPERATURA

En el capítulo 1 describíamos un procedimiento de dos etapas para establecer un patrón de medición o estándar de una cantidad física: definíamos una unidad básica, y luego especificábamos un procedimiento para hacer comparaciones con tal unidad básica. Por ejemplo, en el caso del tiempo, definíamos a la unidad básica en términos de la frecuencia de la luz de cierta longitud de onda emitida por los átomos de cesio. Para que pase 1 segundo se necesitan 9,192,631.770 de esas vibraciones. Contando el número de vibraciones correspondiente podemos usar (al menos en principio) esta escala para medir la vida media humana o incluso la edad del universo.

La temperatura es una de las siete unidades básicas (véase la tabla 1 del capítulo 1), por lo que podemos tratar la temperatura como hemos tratado a otras unidades básicas en el sistema SI: estableciendo un estándar y relacio-

nando a las demás escalas con el estándar. Sin embargo, la temperatura tiene una naturaleza diferente de la de otras unidades básicas en el SI, y, por lo tanto, este esquema no actuará realmente en esa forma simple. Por ejemplo, si definimos a un periodo de vibración de la luz emitida por un átomo de cesio como un patrón de tiempo, entonces dos de tales vibraciones duran el doble de tiempo, y cualquier intervalo de tiempo arbitrario puede ser, en efecto, medido en términos del número de vibraciones. Pero, incluso si definimos un estándar de temperatura, como la del agua hirviendo en ciertas condiciones, no tenemos un procedimiento para determinar una temperatura el doble de grande. Después de todo, dos marmitas de agua hirviendo tienen la misma temperatura que una marmita. No existe forma aparente de usar sólo este patrón para poder relacionar la temperatura del agua hirviendo con la del aceite hirviendo, por ejemplo; ninguna cantidad de agua en ebullición estará jamás en equilibrio térmico con el aceite en ebullición.

Para establecer una escala de medición de la temperatura adoptamos el procedimiento siguiente, que difiere del procedimiento usual para las unidades básicas del SI: buscamos una sustancia que tenga una propiedad que varíe con la temperatura, y medimos esa propiedad. La sustancia que elegimos se llama *sustancia termométrica*, y la propiedad que depende de la temperatura se llama *propiedad termométrica*. Ejemplos de ello podrían ser el volumen de un líquido (como en el termómetro de mercurio con bulbo de vidrio común), la presión de un gas mantenido a volumen constante, la resistencia eléctrica de un alambre, la longitud de una tira de metal, o el color del filamento de una lámpara, todos los cuales varían con la temperatura. *La elección de una de estas sustancias lleva a una escala individual de temperatura definida sólo para esa sustancia y que no necesariamente concuerda con otras escalas de temperatura definidas de manera independiente*. Para eliminar esta discrepancia es necesario adoptar estándares para la elección de determinada sustancia termométrica, determinada propiedad termométrica, y determinada relación entre esa propiedad y una escala de temperatura universalmente aceptada. Cada escala de temperatura por separado puede entonces ser calibrada contra la escala universal. En las secciones 22-4 y 26-5 describimos la escala universal aceptada.

Supongamos que nuestro termómetro está basado en un sistema en el cual medimos el valor de la propiedad termométrica $X$. La temperatura $T$ es alguna función de $X$, $T(X)$. Elegimos la relación más sencilla posible entre $T$ y $X$, la función lineal dada por

$$T(X) = aX + b, \tag{1}$$

donde deben ser determinadas las constantes $a$ y $b$. Esta escala lineal significa que cada intervalo de temperatura $\Delta T$ corresponde al mismo cambio $\Delta X$ en el valor de la propiedad termométrica. Para determinar una temperatura en esta escala, elegimos dos puntos de calibración, definimos arbitrariamente las temperaturas $T_1$ y $T_2$ en esos puntos, y medimos los valores correpondientes $X_1$ y $X_2$ de la propiedad termométrica.

Los ejemplos más conocidos de este tipo de escala son las escalas Celsius y Fahrenheit usadas en los termómetros comunes, en los que la sustancia termométrica suele ser el mercurio y la propiedad termométrica puede ser su volumen, observado en la longitud de la columna de mercurio en un tubo delgado de vidrio. El comportamiento lineal significa en este caso que los intervalos entre las marcas de los grados en el tubo de vidrio de un termómetro son de tamaño uniforme.

## Las escalas Celsius y Fahrenheit*

En casi todos los países del mundo se emplea la escala Celsius (también llamada escala de grados centígrados) para todas las mediciones populares y comerciales y la mayoría de las científicas. La escala Celsius se basó originalmente en dos puntos de calibración: el punto normal de congelación del agua, que se definió como 0°C, y el punto normal de ebullición del agua, que se definió como 100°C. Estos dos puntos se emplearon para calibrar termómetros, y luego se dedujeron las demás temperaturas por interpolación y extrapolación. Para expresar la temperatura en la escala Celsius, la cifra dada debe ir siempre acompañada del símbolo de grados (°).

La escala Fahrenheit emplea un grado más pequeño que la escala Celsius, y su cero se establece a una temperatura diferente. Originalmente se basó también en dos puntos fijos, cuyo intervalo se dividió en 100 grados: el punto de congelación de una mezcla de hielo y sal, y la temperatura normal del cuerpo humano. En esta escala, los puntos normales de congelación y de ebullición del agua vienen a ser, respectivamente, 32°F y 212°F. La relación entre las escalas Celsius y Fahrenheit es

$$T_F = \tfrac{9}{5}T_C + 32. \tag{2}$$

También en la escala Fahrenheit, debe utilizarse el símbolo de grados para expresar la temperatura como, por ejemplo, 98.6°F (la temperatura normal del cuerpo humano).

La conversión entre las escalas Fahrenheit y Celsius se lleva a cabo fácilmente recordando unos cuantos puntos

* Anders Celsius (1701-1744) fue un astrónomo sueco que, además de desarrollar la escala de temperatura que lleva su nombre, hizo mediciones de la longitud del arco de un meridiano, lo cual sirvió para corroborar la teoría de Newton sobre el achatamiento de la Tierra en los polos. Daniel Fahrenheit (1686-1736), contemporáneo de Celsius, fue un físico alemán que inventó los termómetros con líquidos de alcohol y de mercurio y los empleó para estudiar los puntos de ebullición y de congelación de los líquidos.

respectivos, tales como el punto normal de congelación (0°C = 32°F) y el punto normal de ebullición (100°C = 212°F) del agua, y haciendo uso de la igualdad entre un *intervalo* de 5 grados en la escala Celsius y un *intervalo* de 9 grados en la escala Fahrenheit, lo cual expresamos así:

$$9F^\circ = 5C^\circ. \tag{3}$$

Obsérvese que estos *intervalos* se expresan como F° y C°, y *no* como °F y °C. Las lecturas de la escala de temperatura se dan en °F o en °C (grados Fahrenheit o grados Celsius); las *diferencias* de lectura se dan en F° o en C° (grados Fahrenheit o grados Celsius).

## La escala Kelvin*

En la escala Kelvin, uno de los puntos de calibración se define en una temperatura de cero, donde la propiedad termométrica tiene también un valor de cero; en efecto, la constante $b$ de la ecuación 1 se establece como cero, en cuyo caso

$$T(X) = aX. \tag{4}$$

Para determinar una temperatura en esta escala necesitamos únicamente un punto $P$ de calibración. En ese punto, se define que la temperatura es $T_P$ y la propiedad termométrica tiene el valor medido $X_P$. En este caso

$$a = \frac{T_P}{X_P} \tag{5}$$

y por lo tanto

$$T(X) = T_P \frac{X}{X_P}. \tag{6}$$

Siguiendo la norma general, escogemos para nuestra calibración la temperatura a la cual coexisten en equilibrio el hielo, el agua líquida, y el vapor de agua. Este punto, que está muy cercano al punto normal de congelación del agua, se llama *punto triple* del agua (Fig. 2). Por acuerdo internacional se ha establecido que la temperatura en el punto triple sea

$$T_{tr} = 273.16 \text{ K},$$

donde $K$ (= kelvin) es la unidad básica en el SI para la temperatura en la escala absoluta, idéntica a la escala de

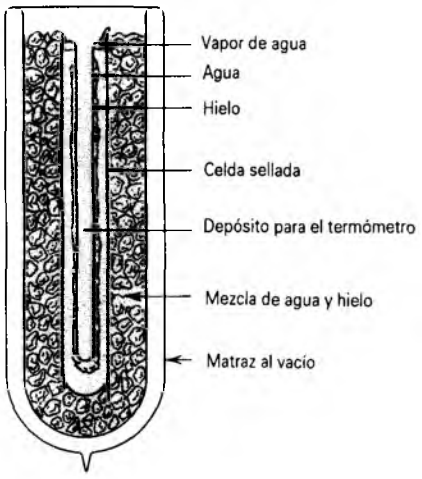



**Figura 2** La celda del punto triple del National Institute of Standards and Technology (anteriormente la National Bureau of Standards) de Estados Unidos. La celda interior en forma de U contiene agua pura y está sellada, después de haberse extraído de ella todo el aire. Está sumergida en un baño de agua y hielo. El sistema está en el punto triple cuando el hielo, el agua, y el vapor de agua están todos ellos presentes, y en equilibrio, dentro de la celda. El termómetro que va a ser calibrado se inserta en el pozo central.

temperatura del gas ideal que se estudia en la sección siguiente. Así pues, se define que el kelvin es 1/273.16 de la temperatura del punto triple del agua. Con esta elección del punto de calibración, la ecuación 6 resulta

$$T(X) = (273.16 \text{ K}) \frac{X}{X_{tr}}, \tag{7}$$

donde $X_{tr}$ es el valor de la propiedad termométrica en el punto triple.

Una temperatura determinada a partir de la ecuación 7 es válida únicamente para esa propiedad termométrica en particular; otras propiedades termométricas y sustancias termométricas pueden dar lecturas de temperatura diferentes (véase al problema muestra 1). Para eliminar esta confusión entre las lecturas de termómetros diferentes, elegimos como norma aceptada un tipo de termómetro en el que la temperatura pueda determinarse independientemente de la naturaleza de la sustancia termométrica. Esta elección se trata en la sección siguiente.

El tamaño del grado es el mismo en las escalas Celsius y Kelvin, pero el cero de la escala Celsius se desplaza a un valor más conveniente. Hoy día ya no empleamos dos puntos fijos para definir la escala Celsius; en cambio, la escala Kelvin se define, y la relación entre la temperatura Celsius $T_C$ y la temperatura Kelvin $T$ ahora se establece así:

$$T_C = T - 273.15. \tag{8}$$

Los puntos de congelación y de ebullición del agua se miden ahora en la escala Kelvin y se convierten luego a

* Lord Kelvin (William Thomson, 1824-1907) fue un físico e ingeniero escocés que contribuyó fundamentalmente a una amplia variedad de temas, incluyendo no sólo la termodinámica sino también la ley de conservación de la energía, la electricidad y el magnetismo, la acústica, y la hidrodinámica. Sus contribuciones científicas fueron conceptuadas como de enorme importancia en su época, por lo que, a su muerte, recibió sepultura en la Abadía de Westminster, en Londres.

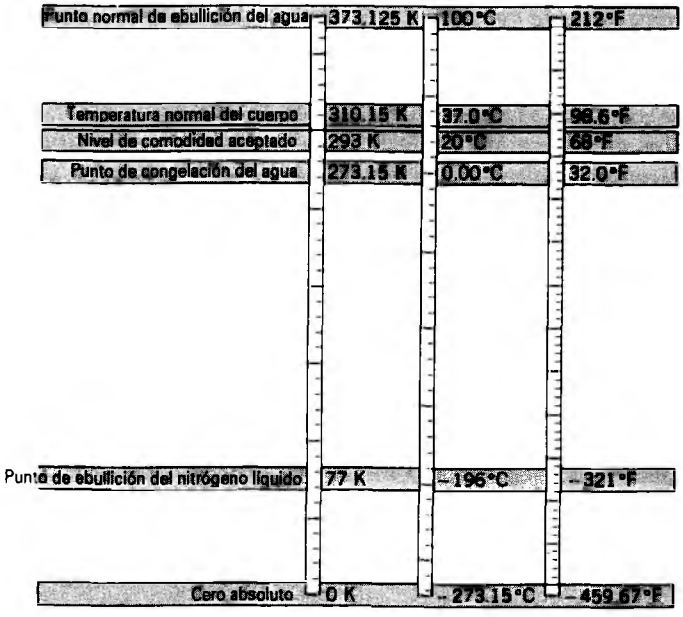



**Figura 3** Comparación de las escalas Kelvin, Celsius, y Fahrenheit.

Celsius usando la ecuación 8. Los valores experimentales son, respectivamente, 0.00°C y 99.975°C. La figura 3 compara las escalas Fahrenheit, Celsius, y Kelvin.

**Problema muestra 1** La resistencia de cierto alambre de platino aumenta en un factor de 1.392 entre el punto triple del agua y el punto de ebullición normal de ésta. Halle la temperatura por resistencia del platino del agua en ebullición.

**Solución** Usamos la ecuación 7, con la resistencia $R$ como la propiedad termométrica $X$. No se nos da el valor de $R_{tr}$, pero sabemos que en el punto de ebullición del agua, $R = 1.392R_{tr}$. Entonces

$$T(R) = T_{tr}\frac{R}{R_{tr}} = (273.16\text{ K})(1.392) = 380.2\text{ K}.$$

Este valor da la "temperatura por resistencia del platino" del agua en ebullición. Otros termómetros darán valores diferentes; por ejemplo, la temperatura del agua hirviendo según un termopar de cobre-constantano es de 440 K. Cada una de estas lecturas es una temperatura determinada en una escala "propia", válida únicamente para ese aparato. La temperatura aceptada del punto de ebullición normal del agua es de 373.125 K la cual se determina usando el termómetro de gas a volumen constante que se describe en la sección siguiente.

## 22-4 LA ESCALA DE TEMPERATURA DE UN GAS IDEAL

La temperatura de un sistema debe tener un valor bien definido, independiente del medio empleado para medirla. Según la ecuación 7, sustancias termométricas diferentes dan todas la misma temperatura en el punto triple, pero (como lo hemos visto en el problema muestra 1) sus lecturas en otros puntos pueden diferir. Podríamos imaginar efectuar una serie de mediciones en que simultáneamente empleásemos propiedades termométricas distintas para determinar la temperatura de un sistema. Los resultados de tal prueba demostrarían que todos los termómetros dan lecturas diferentes. Podríamos continuar eligiendo una propiedad termométrica en particular, tal como la resistencia de un alambre, y medir la temperatura del sistema usando diferentes clases de alambre, hechos con materiales diferentes: de nuevo hallaríamos una amplia variación en las mediciones.

Para obtener una escala de temperatura definida, debemos elegir determinada clase de termómetro como estándar. La elección se haría, no sobre la base de la conveniencia experimental, sino averiguando si la escala de termperatura definida por un termómetro en particular es útil para formular las leyes de la física. La variación de lecturas más pequeña se encuentra que es entre los *termómetros de gas a volumen constante* que utilizan gases diferentes, lo cual sugiere elegir un gas como sustancia termométrica estándar. Sucede que cuando se reduce la cantidad de gas y por lo tanto su presión, la *variación de las lecturas entre termómetros de gas que* usan diferentes clases de gas se reduce también. De aquí que parezca haber algo fundamental respecto al comportamiento de un termómetro a volumen constante que contenga un gas a baja presión. Consideremos por lo tanto las propiedades del termómetro de gas a volumen constante.

Si el volumen de un gas se mantiene constante, su presión depende de la temperatura y aumenta linealmente con la elevación de la temperatura. El termómetro de gas a volumen constante emplea la presión de un gas a volumen constante como la propiedad termométrica.

La figura 4 muestra un diagrama del termómetro. Consta de un bulbo de vidrio, porcelana, cuarzo, platino, o una aleación de platino e iridio (dependiendo de la gama de temperaturas dentro de la cual se use), conectado por medio de un tubo capilar a un manómetro de mercurio. El bulbo $B$ que contiene algún gas es puesto dentro del baño o entorno cuya temperatura $T$ va a ser medida; al elevar o bajar el recipiente de mercurio $R$, el mercurio en la rama izquierda del tubo en U puede hacerse coincidir con una marca de referencia fija, manteniendo así a volumen constante al gas confinado. La diferencia entre la presión $p$ del gas confinado en la rama izquierda del tubo y la presión $p_0$ de la atmósfera en la rama derecha del tubo está indicada por la altura $h$ de la columna de mercurio, y entonces

$$p = p_0 - \rho gh, \tag{9}$$

donde $\rho$ es la densidad del mercurio en el manómetro.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



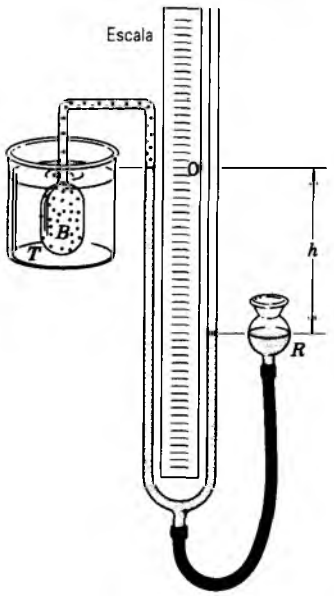



**Figura 4** Termómetro de gas a volumen constante. El bulbo $B$ está sumergido en un baño cuya temperatura $T$ va a ser medida. La diferencia entre la presión del gas en el bulbo y la presión atmosférica se determina por la altura $h$ de la columna de mercurio.

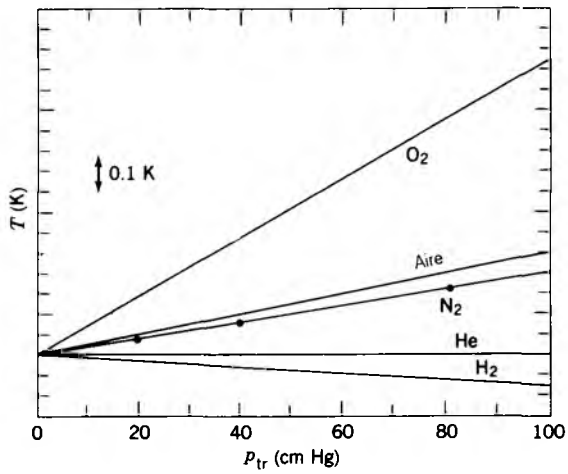



**Figura 5** Cuando se reduce la presión del gas nitrógeno en un termómetro de gas a volumen constante de 80 cm de Hg a 40 y luego a 20, la temperatura calculada para el sistema tiende a un límite que corresponde a una presión de 0. Otros gases tienden al mismo límite, el cual es la temperatura $T$ de gas ideal del sistema. La gama completa de la escala vertical es alrededor de 1 K para condiciones típicas.

En la práctica el aparato es muy elaborado, y debemos llevar a cabo muchas correcciones, por ejemplo, (1) para compensar el pequeño cambio de volumen debido a la ligera contracción o expansión del bulbo y (2) para compensar el hecho de que no se ha sumergido en el baño todo el gas confinado (como el que se halla en el capilar). Supongamos que se han efectuado todas las correcciones, y que $p$ es el valor corregido de la presión absoluta a la temperatura del baño. Entonces la temperatura se da provisionalmente por la fórmula

$$T(p) = (273.16\ \text{K})\,\frac{p}{p_{tr}} \quad (\text{a } V \text{ constante}). \tag{10}$$

Pongamos cierta cantidad de gas, por ejemplo nitrógeno, dentro del bulbo de modo que cuando el bulbo esté rodeado de agua en el punto triple la presión $p_{tr}$ sea igual a un valor definido, digamos 80 cm de Hg. Ahora sumergimos el bulbo en el sistema cuya temperatura $T$ deseamos medir y, con el volumen mantenido constante en su valor previo, medimos la presión $p$ del gas, según la ecuación 9, y calculamos la temperatura provisional $T$ del sistema usando la ecuación 10. El resultado de esta medición se indica con un punto en la figura 5. Regresemos ahora el termómetro a la celda de punto triple y retiremos algo de gas, de modo que $p_{tr}$ tenga un valor más pequeño, digamos 40 cm de Hg. Regresamos luego el termómetro al sistema desconocido, medimos el nuevo valor de $p$, y calculamos otra temperatura provisional $T$, indicada también en la figura 5. Continuamos con este mismo procedimiento, reduciendo la cantidad de gas en el bulbo y calculando la temperatura $T$ para cada nuevo valor más bajo de $p_{tr}$. Si graficamos los valores de $T$ contra $p_{tr}$, podemos extrapolar la curva resultante hasta la intersección con el eje donde $p_{tr} = 0$. En la figura 5 se muestran los puntos-dato para el $N_2$ y la extrapolación en línea recta resultante.

Repetimos este procedimiento con otros gases en el termómetro diferentes al nitrógeno, y obtenemos los resultados mostrados en la figura 5. Las líneas muestran que las lecturas de la temperatura de un termómetro de gas a volumen constante depende del gas empleado a valores ordinarios de la presión de referencia. Sin embargo, al disminuir la presión de referencia, las lecturas de temperatura de los termómetros de gas a volumen constante que empleen gases diferentes tienden al mismo valor $T$, el cual podemos considerar como la temperatura del sistema. *El valor extrapolado de la temperatura depende sólo de las propiedades generales de los gases y no de un gas en particular*. Por lo tanto, definimos la *escala de temperatura de gas ideal:*

$$T = (273.16\ \text{K}) \lim_{p_{tr} \to 0} \frac{p}{p_{tr}} \quad (\text{a V constante}). \tag{11}$$

Elegimos como termómetro estándar un termómetro de gas a volumen constante que use una escala de temperatura definida por la ecuación 11.

Si la temperatura ha de ser en verdad una cantidad física fundamental, una en la que las leyes de la termodinámica puedan expresarse, es absolutamente necesario que su definición sea independiente de las propiedades de materiales específicos. Por ejemplo, no serviría que una canti-

**TABLA 1** TEMPERATURAS DE ALGUNOS SISTEMAS

| *Sistema* | *Temperatura* (K) |
|---|---|
| Plasma en un reactor de pruebas de fusión | $10^8$ |
| Centro del Sol | $10^7$ |
| Superficie del Sol | $6 \times 10^3$ |
| Punto de fusión del tungsteno | $3.6 \times 10^3$ |
| Punto de congelación del agua | $2.7 \times 10^2$ |
| Punto de ebullición normal del $N_2$ | 77 |
| Punto de ebullición normal del $^4He$ | 4.2 |
| Temperatura media del universo | 2.7 |
| Refrigerador por dilución $^3He$ - $^4He$ | $5 \times 10^{-3}$ |
| Desimantación adiabática de la sal paramagnética | $10^{-3}$ |
| Enfriamiento por espín nuclear | $2 \times 10^{-8}$ |

dad básica como la temperatura dependiese de la dilatación del mercurio, de la resistividad eléctrica del platino, o de cualquier otra propiedad listada en algún manual. Elegimos al termómetro de gas como nuestro instrumento estándar precisamente porque en su operación no se hallan implicadas tales propiedades específicas de los materiales. Podemos usar cualquier gas y siempre obtendremos la misma respuesta.

Si bien nuestra escala de temperatura es independiente de las propiedades de cualquier gas determinado, sí depende, en cambio, de las propiedades de los gases en general (es decir, de las propiedades del así llamado gas ideal). La temperatura más baja que puede ser medida con un termómetro de gas es de alrededor de 1 K. Para obtener esta temperatura debemos emplear helio a baja presión, el cual permanece como gas a temperaturas más bajas que cualquier otro gas. No podemos dar un significado experimental a temperaturas por debajo de 1 K por medio de un termómetro de gas.

Nos gustaría definir una escala de temperatura de modo tal que sea independiente de las propiedades de cualquier sustancia en particular. En la sección 26-5 mostramos que la escala de temperatura termodinámica absoluta, llamada la escala Kelvin, es esa escala. Mostraremos también que la escala del gas ideal y la escala Kelvin son idénticas en la gama de temperaturas en que puede ser empleado un termómetro de gas. Por esta razón usamos unidades kelvin para la temperatura del gas ideal, como ya lo hicimos en la ecuación 11. La tabla 1 lista las temperaturas en kelvin de varios cuerpos y procesos.

En la sección 26-5 mostraremos también que la escala Kelvin tiene un *cero absoluto* de 0 K y que es imposible enfriar un sistema por debajo de 0 K. El cero absoluto de temperatura ha desafiado todos los intentos de alcanzarlo experimentalmente, pero se han conseguido temperaturas de cero absoluto dentro de un intervalo pequeño ($10^{-8}$ K).

Si bien existe una conexión directa, como lo veremos en el capítulo 23, entre el movimiento microscópico de las moléculas y la temperatura macroscópica, *no* cesa todo movimiento molecular en el cero absoluto de temperatura. La conexión entre la temperatura y la energía cinética molecular se basa en conceptos clásicos, mientras que la teoría cuántica nos dice que existe un límite más bajo diferente de cero para la energía cinética molecular, aun en el cero absoluto. Esta *energía del punto cero* no puede ser deducida a partir de los cálculos clásicos.

### La escala internacional de temperatura

La medición precisa de una temperatura con un termómetro de gas es una tarea difícil que requiere muchos meses de trabajo arduo en el laboratorio. En la práctica, el termómetro de gas se usa únicamente para establecer ciertos puntos fijos que puedan ser empleados más tarde para calibrar otros termómetros secundarios más convenientes.

En el uso práctico, como en la calibración de termómetros industriales o científicos, ha sido adoptada la Escala Internacional de Temperatura. Esta escala consta de un grupo de procedimientos que proporcionan en la práctica las mejores aproximaciones posibles a la escala Kelvin. La escala adoptada consta de un conjunto de puntos fijos, junto con los instrumentos que deben utilizarse para interpolar entre estos puntos fijos y extrapolarlos más allá del punto fijo más alto. Aproximadamente, cada 20 años el Comité Internacional de Pesas y Medidas ha adoptado una escala nueva; en la tabla 2 se muestran los puntos fijos de la más reciente (1990).

## 22-5 DILATACIÓN TÉRMICA

Sucede a menudo que podemos aflojar una tapa de metal apretada de un frasco sometiéndola a la acción de un chorro de agua caliente. Al elevarse la temperatura, la tapa de metal se dilata ligeramente con relación al frasco de vidrio. No siempre es deseable la dilatación térmica, como lo sugiere la figura 6. Todos hemos visto las juntas de dilatación situadas en las calzadas de los puentes. Las tuberías de las refinerías suelen tener un bucle de expansión, con el fin de que la tubería no se deforme al elevarse la temperatura. Los materiales usados para obturaciones dentales tienen propiedades de dilatación similares a las del esmalte de los dientes. En la fabricación de aeroplanos se diseñan a menudo remaches y otros afianzadores de modo que deban ser enfriados en hielo seco antes de su inserción, dejando luego que se dilaten para lograr el ajuste perfecto. Los termómetros y los termostatos pueden estar basados en las diferencias de dilatación entre los componentes de una laminilla bimetálica; véase la figura 7. En un termómetro de tipo bastante común, la lami-

**TABLA 2** PUNTOS FIJOS PRIMARIOS EN LA ESCALA INTERNACIONAL DE TEMPERATURAS DE 1990[†]

| *Substancia* | *Estado* | *Temperatura* (K) |
|---|---|---|
| Helio | Punto de ebullición | 3–5[§] |
| Hidrógeno | Punto triple | 13.8033 |
| Hidrógeno | Punto de ebullición[‡] | 17.025–17.045[c] |
| Hidrógeno | Punto de ebullición | 20.26–20.28[c] |
| Neón | Punto triple | 24.5561 |
| Oxígeno | Punto triple | 54.3584 |
| Argón | Punto triple | 83.8058 |
| Mercurio | Punto triple | 234.3156 |
| Agua | Punto triple | 273.16 |
| Galio | Punto de fusión | 302.9146 |
| Indio | Punto de congelación | 429.7485 |
| Estaño | Punto de congelación | 505.078 |
| Cinc | Punto de congelación | 692.677 |
| Aluminio | Punto de congelación | 933.473 |
| Plata | Punto de congelación | 1234.93 |
| Oro | Punto de congelación | 1337.33 |
| Cobre | Punto de congelación | 1357.77 |

[†] Véase "The International Temperature Scale of 1990 (ITS-90)," por H. Preston-Thomas, *Metrologia*, 27 (1990), pág. 3.

[‡] Este punto de ebullición es a una presión de $\frac{1}{3}$ de atmósfera. Todos los demás puntos de ebullición, de fusión, o de congelación, son a una presión de 1 atm.

[§] La temperatura del punto de ebullición varía un poco con la presión del gas encima del líquido. La escala de temperaturas da la relación entre $T$ y $p$ que puede emplearse para calcular $T$ para una $p$ dada.



**Figura 6** Deformación de las vías de ferrocarril debida a la dilatación térmica en un día muy caluroso. Las juntas de expansión entre los rieles de la vía pueden evitar esta deformación.

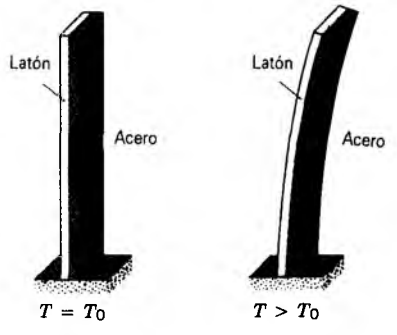



**Figura 7** Laminilla bimetálica, que consta de una laminilla de latón y una laminilla de acero soldadas entre sí, a temperatura $T_0$. A temperaturas más altas de $T_0$, la laminilla se dobla como se muestra; a temperaturas más bajas se dobla en sentido opuesto. Muchos termostatos funcionan según este principio, usando el movimiento del extremo de la laminilla para formar o romper un contacto eléctrico.

nilla bimetálica tiene forma helicoidal, de modo que se enrolla y desenrolla con los cambios de temperatura; véase la figura 8. Los conocidísimos termómetros de líquido dentro de vidrio se basan en el hecho de que líquidos tales como el mercurio o el alcohol se dilatan en un grado diferente (mayor) de lo que lo hacen sus recipientes de vidrio.

Podemos entender esta dilatación considerando un modelo sencillo de la estructura de un sólido cristalino. Los átomos se mantienen juntos entre sí en un arreglo regular por medio de fuerzas eléctricas, que son como las que serían ejercidas por un conjunto de resortes que uniesen a los átomos. Podemos entonces formarnos una imagen del cuerpo sólido como si fuera un colchón de resortes microscópicos (Fig. 9). Estos "resortes" son bastante rígidos y no son ideales en absoluto (véase el problema 3 del capítulo 15), existiendo alrededor de $10^{23}$ de ellos por centímetro cúbico. Los átomos de los sólidos están vibrando a cualquier temperatura. La amplitud de la vibración es de alrededor de $10^{-9}$ cm, más o menos un décimo de un diámetro atómico, y la frecuencia es de alrededor de $10^{13}$ Hz.

Cuando aumenta la temperatura, los átomos vibran con una amplitud mayor, y la distancia promedio entre los átomos aumenta. (Véase el estudio de la base microscópica de la dilatación térmica al final de esta sección.) Esto conduce a una dilatación de todo el cuerpo sólido. El cambio en *cualquier* dimensión lineal del sólido, tal como su longitud, su ancho, o su espesor, se llama *dilatación lineal*. Si la longitud de esta dimensión lineal es $L$, el cambio de temperatura $\Delta T$ causa un cambio de longitud $\Delta L$. Por medio de la experimentación hallamos que, si $\Delta T$ es lo suficientemente pequeña, este cambio de longitud $\Delta L$ es proporcional al cambio de temperatura $\Delta T$ y a la longitud original $L$. Por lo tanto, podemos escribir

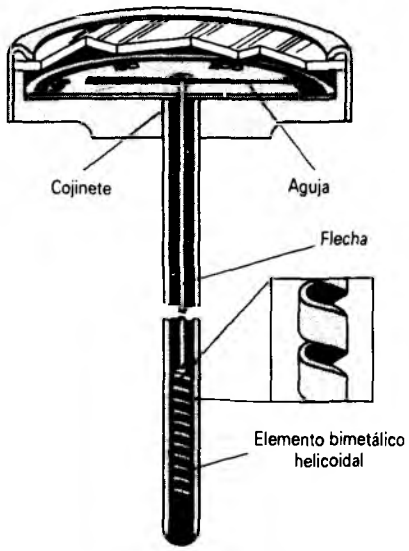



**Figura 8** *termómetro* basado en una laminilla bimetálica. La laminilla tiene forma helicoidal, que se enrolla y desenrolla al cambiar la temperatura.

$$\Delta L = \alpha L\, \Delta T, \tag{12}$$

donde $\alpha$, llamada el *coeficiente de dilatación lineal*, tiene valores diferentes para materiales diferentes. Reescribiendo esta fórmula obtenemos

$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta T}, \tag{13}$$

de modo que $\alpha$ tiene el significado de un cambio fraccionario en longitud por grado de cambio de temperatura.

En rigor, el valor de $\alpha$ depende de la temperatura real y de la temperatura de referencia elegida para determinar a $L$ (véase el problema 23). Sin embargo, su variación es usualmente despreciable comparada con la precisión con la que necesitan ser llevadas a cabo las mediciones. A menudo es suficiente elegir un valor promedio que pueda ser tratado como una constante dentro de cierta gama de temperaturas. En la tabla 3 se listan los valores experimentales del coeficiente de dilatación lineal promedio de varios sólidos comunes. Para todas las sustancias listadas, el cambio de tamaño consiste en una dilatación al elevarse la temperatura, ya que $\alpha$ es positivo. El orden de magnitud de la dilatación es de alrededor de 1 milímetro por metro de longitud por 100 grados Celsius. (Obsérvese el uso de C°, y no de °C, para expresar aquí los cambios de temperatura.)

**Problema muestra 2** Una escala métrica de acero va a ser marcada de modo que los intervalos de un milímetro sean precisos dentro de unos $5 \times 10^{-5}$ mm a cierta temperatura. ¿Cuál es la variación máxima de la temperatura permisible durante el marcado?

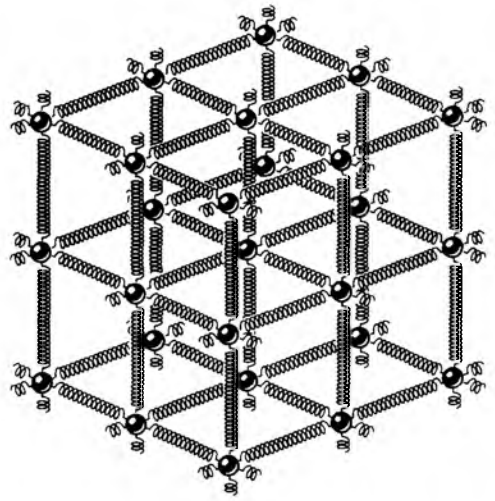


**Figura 9** Un sólido se comporta en muchos sentidos como si fuese una colección de átomos unidos por fuerzas elásticas (representadas aquí por resortes).

**Solución** Partiendo de la ecuación 12, tenemos

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha L} = \frac{5 \times 10^{-5}\ \text{mm}}{(11 \times 10^{-6}/\text{C°})(1.0\ \text{mm})} = 4.5\ \text{C°},$$

donde hemos usado el valor de $\alpha$ para el acero según la tabla 3. La temperatura durante el marcado debe mantenerse constante dentro de unos 5°C, y la escala debe ser usada dentro del mismo intervalo de la temperatura a la cual fue hecha.

Obsérvese que si se hubiera usado la aleación invar en lugar de acero, podríamos obtener la misma precisión dentro de un intervalo de temperatura de unos 75 C°; o, lo que es equivalente, si pudiéramos mantener la misma variación de la temperatura (5 C°), podríamos obtener una precisión de unos $3 \times 10^{-6}$ mm debido a los cambios de temperatura.

En muchos sólidos, llamados *isotrópicos*, el porcentaje del cambio en longitud para un cambio de temperatura dado es el mismo para todas las líneas del sólido.

**TABLA 3** ALGUNOS COEFICIENTES DE DILATACIÓN LINEAL PROMEDIO[†]

| *Sustancia* | $\alpha(10^{-6}$ por C°) |
|---|---|
| Hielo | 51 |
| Plomo | 29 |
| Aluminio | 23 |
| Latón | 19 |
| Cobre | 17 |
| Acero | 11 |
| Vidrio (ordinario) | 9 |
| Vidrio (Pyrex) | 3.2 |
| Aleación invar | 0.7 |
| Cuarzo (fundido) | 0.5 |

[†] Se consignan valores promedios típicos en el intervalo de temperatura de 0°C a 100°C, salvo para el hielo cuyo intervalo es de -10°C a 0°C.

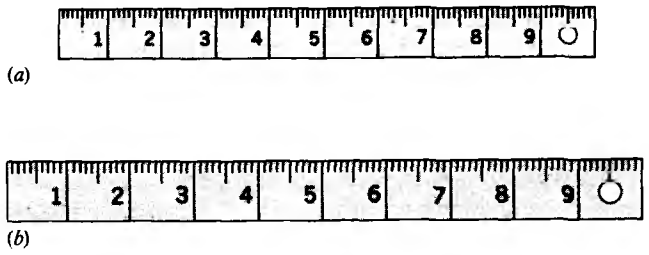



**Figura 10** Una regla de acero a dos temperaturas diferentes. La dilatación aumenta en proporción en todas las dimensiones: la regla, los números, el orificio, y el espesor crecen todos en el mismo factor. (*La dilatación mostrada está* muy exagerada; para obtener tal expansión se requeriría un aumento de temperatura de unos ¡20,000 C°!)

La expansión es bastante análoga a una amplificación fotográfica, excepto que un sólido es tridimensional. Entonces, si tenemos una lámina plana con un orificio troquelado en ella, $\Delta L/L$ ($= \alpha \Delta T$) para una $\Delta T$ dada es la misma para la longitud, el espesor, la diagonal de una cara, la diagonal del cuerpo, y el diámetro del orificio. Cada línea, ya sea recta o curva, se alarga en la razón $\alpha$ por grado de elevación de la temperatura. Si usted graba su nombre sobre la lámina, la línea que representa a su nombre tiene el mismo cambio fraccionario de longitud que cualquier otra línea. En la figura 10 se muestra la analogía con una amplificación fotográfica.

Teniendo en cuenta estas ideas, debería serle a usted posible demostrar (véanse los problemas 30 y 31) que, con un alto grado de precisión, el cambio fraccionario en el área $A$ por cambio de temperatura en grados de un sólido isotrópico es $2\alpha$, es decir,

$$\Delta A = 2\alpha A\, \Delta T, \tag{14}$$

y el cambio fraccionario en el volumen $V$ por cambio de temperatura en grados de un sólido isotrópico es $3\alpha$, es decir,

$$\Delta V = 3\alpha V\, \Delta T. \tag{15}$$

Puesto que la forma de un fluido no es precisa, únicamente el cambio de volumen con la temperatura es significativo. Los gases responden fuertemente a los cambios de temperatura o de presión, mientras que el cambio de volumen de los líquidos con los cambios de temperatura o de presión es mucho más pequeño. Si hacemos que $\beta$ represente al coeficiente de dilatación volumétrica de un líquido, de modo que

$$\beta = \frac{\Delta V/V}{\Delta T}, \tag{16}$$

hallamos que $\beta$ es relativamente independiente de la temperatura. Los líquidos se dilatan típicamente con un aumento de la temperatura, siendo su dilatación volumétrica

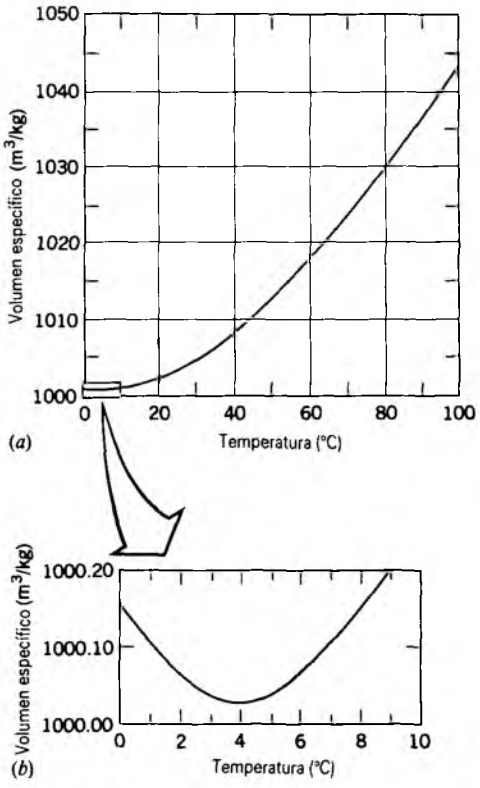



**Figura 11** (*a*) Volumen específico (volumen ocupado por una masa en particular) del agua en función de su temperatura. El volumen específico es el inverso de la densidad (masa por unidad de volumen). (*b*) Ampliación de la región cercana a 4°C, mostrando un mínimo en el volumen específico ( o una densidad máxima).

generalmente alrededor de 10 veces más grande que la de los sólidos.

Sin embargo, el líquido más común, el agua, no se comporta como muchos otros líquidos. En la figura 11 mostramos la curva de dilatación volumétrica del agua. Obsérvese que a más de 4°C el agua se dilata al aumentar la temperatura, aunque no linealmente. (Esto es, $\beta$ no es constante durante estos intervalos grandes de temperatura.) Empero, al bajar la temperatura de 4°C a 0°C, el agua se dilata en lugar de contraerse, lo cual es la razón de que los lagos se congelen primero en su superficie. Tal dilatación con el descenso de la temperatura no se observa en ningún otro líquido común; se observa en sustancias parecidas al hule y en ciertos sólidos cristalinos dentro de intervalos de temperatura limitados. La densidad del agua tiene un máximo en 3.98°C, donde su valor es de 999.973 kg/m$^3$. (En un principio se suponía que el kilogramo patrón y el metro patrón correspondían a una densidad máxima del agua de 1000 kg/m$^3$, o sea 1 g/cm$^3$. Sin embargo, mediciones más precisas demuestran que los patrones internacionales no corresponden exactamente a este valor.)

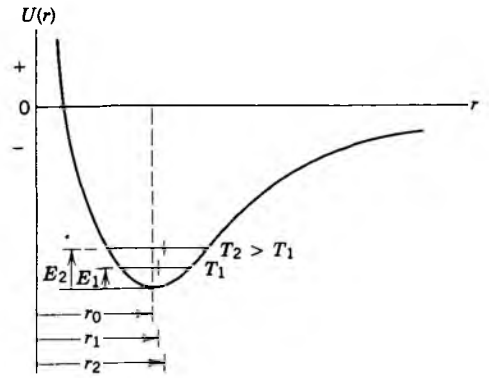



**Figura 12** Curva de la energía potencial de dos átomos adyacentes de un sólido en función de su distancia de separación internuclear. La separación en equilibrio es $r_0$. Puesto que la curva es asimétrica, la separación promedio, ($r_1$, $r_2$) aumenta al aumentar la temperatura ($T_1$, $T_2$) y la energía vibratoria ($E_1$, $E_2$).

### Base microscópica de la dilatación térmica *(Opcional)*

A nivel microscópico, la dilatación térmica de un sólido sugiere un aumento en la separación promedio entre los átomos del sólido. La curva de la energía potencial de dos átomos adyacentes en un sólido cristalino en función de su separación internuclear es una curva asimétrica como la de la figura 12. Cuando los átomos se acercan entre sí, disminuyendo su separación a partir del valor de equilibrio $r_0$, entran en juego fuerzas de repulsión fuertes, y la energía potencial se eleva rápidamente ($F = -dU/dr$); cuando los átomos se alejan entre sí, aumentando su separación a partir del valor de equilibrio, intervienen fuerzas de atracción un poco más débiles y la energía potencial se eleva más lentamente. Para una energía vibratoria dada la separación de los átomos cambia periódicamente de un valor mínimo a un valor máximo, siendo la separación promedio mayor que la separación de equilibrio a causa de la naturaleza asimétrica de la curva de la energía potencial. Para una energía vibratoria aún más alta la separación promedio es aun mayor. El efecto se acentúa porque, como lo sugiere la figura 12, la energía cinética es más pequeña para separaciones más grandes; entonces las partículas se mueven más lentamente e invierten más tiempo en separaciones más grandes, contribuyendo entonces con una parte mayor al tiempo promedio. Puesto que la energía vibratoria aumenta al elevarse la temperatura, la separación promedio entre los átomos aumenta con la temperatura, y todo el sólido se dilata.

Obsérvese que si la curva de la energía potencial fuese simétrica con respecto a la separación de equilibrio, entonces la separación promedio sería igual a la separación de equilibrio, sin importar cuán grande fuese la amplitud de la vibración. De aquí que la dilatación térmica sea una consecuencia directa de la desviación de la simetría de la curva característica de la energía potencial de los sólidos.

Algunos sólidos cristalinos, en ciertas regiones de temperatura, pueden contraerse al elevarse la temperatura. El análisis anterior es válido si suponemos que existen únicamente modos de vibración compresivos (longitudinales) o que predominan estos modos. Sin embargo, los sólidos pueden vibrar igualmente en modos similares al modo de corte (transversales), y estos modos de vibración permiten que el sólido se contraiga al elevarse la temperatura, disminuyendo la separación promedio de los planos de los átomos. En ciertos tipos de estructura cristalina y en ciertas regiones de temperatura, estos modos de vibración transversales pueden predominar sobre los longitudinales, produciendo un coeficiente neto de dilatación térmica negativo.

Debe hacerse hincapié en que los modelos microscópicos que se presentan aquí, constituyen una gran simplificación de un fenómeno complejo que puede ser tratado con mayor detalle mediante la mecánica estadística y la teoría cuántica. ■

## PREGUNTAS

1. ¿Es la temperatura un concepto microscópico o macroscópico?
2. ¿Podemos definir la temperatura como una cantidad derivada, en términos de longitud, masa, y tiempo? Piense en un péndulo, por ejemplo.
3. El cero absoluto es una temperatura mínima. ¿Existe una temperatura máxima?
4. ¿Puede un objeto estar más caliente que otro si ambos están a la misma temperatura? Explique.
5. ¿Existen cantidades físicas, distintas a la temperatura, que tiendan a igualarse cuando se juntan dos sistemas diferentes?
6. Un trozo de hielo y un termómetro más caliente están suspendidos en un recipiente al vacío y aislado, de modo que no entran en contacto. ¿Por qué disminuye la lectura del termómetro durante cierto tiempo?
7. ¿Qué cualidades hacen a una propiedad termométrica en particular apta para usarse en un termómetro práctico?
8. ¿Qué dificultades surgirían si se definiese la temperatura en términos de la densidad del agua?
9. Sea $p_3$ la presión en el bulbo de un termómetro de gas a volumen constante cuando el bulbo está a la temperatura del punto triple de 273.16 K y $p$ la presión cuando el bulbo está a la temperatura ambiente. Se tienen tres termómetros de gas a volumen constante: para $A$ el gas es oxígeno y $p_3$ = 20 cm Hg; para $B$ el gas es también oxígeno pero $p_3$ = 40 cm Hg; para $C$ el gas es hidrógeno y $p_3$ = 30 cm Hg. Los valores de $p$ medidos en los tres termómetros son $p_A$, $p_B$, y $p_C$. (*a*) Puede obtenerse un valor aproximado de la temperatura ambiente $T$ con cada uno de los termómetros usando

$$T_A = (273.16\text{ K})(p_A/20\text{ cm Hg}),$$

$$T_B = (273.16\text{ K})(p_B/40\text{ cm Hg}),$$

$$T_C = (273.16\text{ K})(p_C/30\text{ cm Hg}).$$

Marque si es cierta o falsa para cada una de las aseveraciones siguientes: (1) Con el método descrito, los tres termómetros darán el mismo valor de $T$. (2) Los dos termómetros de oxígeno concordarán entre sí pero no con el termómetro de hidrógeno. (3) Cada uno de los tres termó-

metros dará un valor de $T$ diferente. (*b*) En caso de que exista un desacuerdo entre los tres termómetros, explique cómo cambiaría usted el método de usarlos para hacer que los tres den el mismo valor de $T$.

**10.** El editor en jefe de una revista de negocios bien conocida, al discutir los posibles efectos de calentamiento asociados con el aumento en la concentración de bióxido de carbono en la atmósfera terrestre (efecto de invernadero), escribió: "Las regiones polares podrían llegan a ser tres veces más cálidas que ahora, ..." ¿Qué se supone usted que quería decir, y qué dijo literalmente? (Véase "Warmth and Temperature: A Comedy of Errors", por Albert A. Bartlett, *The Physics Teacher*, noviembre de 1984, pág. 517).

**11.** Aunque parece que el cero absoluto de temperatura es imposible de obtener experimentalmente, en el laboratorio se han logrado temperaturas tan bajas como 0.00000002 K. ¿Por qué se esfuerzan los físicos, como realmente lo hacen, para obtener temperaturas aún más bajas? ¿No es ésta lo suficientemente baja para todos los propósitos prácticos?

**12.** Usted pone dos ollas de agua sin tapar, una conteniendo agua caliente y la otra conteniendo agua fría, a la intemperie en un clima por debajo del punto de congelación. La olla con el agua caliente comenzará por lo general a congelarse primero. ¿Por qué? ¿Qué sucedería si usted tapase las ollas?

**13.** ¿Puede asignarse una temperatura a un vacío?

**14.** ¿Tiene implícito nuestro "sentido de la temperatura" un sentido de dirección; es decir, más caliente significa necesariamente una temperatura mayor, o es esto simplemente una convención arbitraria? Por cierto que, Celsius eligió originalmente al punto de vaporización como 0°C y al punto de congelación como 100°C.

**15.** En Estados Unidos muchas etiquetas de productos médicos informan al usuario que debe almacenarlos a menos de 86°F. ¿Por qué 86? (*Sugerencia*: Haga el cambio a Celsius) (Véase *The Science Almanac*, 1985-1986, pág. 430.)

**16.** ¿Cómo sugeriría usted medir la temperatura de (*a*) el Sol, (*b*) la atmósfera superior de la Tierra, (*c*) un insecto, (*d*) la Luna, (*e*) el fondo del océano, y (*f*) el helio líquido?

**17.** Considerando las escalas Celsius, Fahrenheit, y Kelvin, ¿corresponde alguna a la "escala de la naturaleza"? Explique.

**18.** ¿Es un gas mejor que otro pára construir un termómetro estándar de gas a volumen constante? ¿Qué propiedades son deseables en un gas para tales objetivos?

**19.** Dé algunas objeciones al uso de un termómetro de agua dentro de vidrio. ¿Es una mejora el mercurio en vidrio? De ser así, explique por qué.

**20.** Explique por qué la columna de mercurio desciende primero y luego se eleva al calentar con una llama el termómetro de este metal.

**21.** ¿Cuáles son las dimensiones de $\alpha$, el coeficiente de dilatación lineal? ¿Depende el valor de $\alpha$ de la unidad de longitud empleada? Cuando se emplean grados Fahrenheit en lugar de grados Celsius como la unidad de cambio de la temperatura, ¿cambia el valor numérico de $\alpha$? De ser así, ¿cómo? Si no es así, pruébelo.

**22.** Una bola de metal puede pasar a través de un anillo de metal. Sin embargo, al calentar la bola ésta se pega en el anillo. ¿Qué pasaría si calentásemos el anillo en lugar de la bola?

**23.** Como un elemento de control en el termostato común se emplea una laminilla bimetálica, que consta de dos laminillas de diferente metal remachadas entre sí. Explique cómo trabaja.

**24.** Dos laminillas, una de hierro y otra de cinc, se remachan entre sí lado con lado para formar una barra recta que se curva al ser calentada. ¿Por qué está el hierro en el interior de la curva?

**25.** Explique cómo puede mantenerse constante con la temperatura el periodo de un reloj de péndulo adosando tubos verticales de mercurio a la base del péndulo.

**26.** ¿Por qué se hace que una chimenea esté aislada, es decir, que no sea parte del soporte estructural de la casa?

**27.** El agua se dilata al congelarse. ¿Podemos definir un coeficiente de dilatación volumétrica para el proceso de congelación?

**28.** Explique por qué la dilatación aparente de un líquido en un bulbo de vidrio no da la dilatación verdadera del líquido.

**29.** ¿Depende el cambio de volumen de un objeto al aumentar su temperatura de si el objeto tiene cavidades en su interior, quedando en éste todas las demás características igual?

**30.** ¿Por qué es mucho más difícil hacer una determinación precisa del coeficiente de dilatación de un líquido que de un sólido?

**31.** El modelo común de un sólido supone que los átomos son puntos que ejecutan un movimiento armónico simple en torno a posiciones medias de la red. ¿Cuál sería el coeficiente de dilatación lineal de esta red?

**32.** Explique el hecho de que la temperatura del océano a grandes profundidades sea casi constante durante todo el año, a una temperatura de unos 4°C.

**33.** Explique por qué los lagos se congelan primero en la superficie.

**34.** ¿Qué causa que las tuberías de agua exploten en el invierno?

**35.** ¿Qué puede usted concluir respecto a cómo depende el punto de fusión del hielo de la presión partiendo del hecho de que el hielo flota en el agua?

## PROBLEMAS

### *Sección 22-3 Medición de la temperatura*

**1.** Un *termómetro de resistencia* es un termómetro en el que la resistencia eléctrica cambia con la temperatura. Estamos en libertad de definir temperaturas medidas por uno de estos termómetros en kelvin (K) que sean directamente

proporcionales a la resistencia $R$, medida en ohms ($\Omega$). Se halla que cierto termómetro de resistencia tiene una resistencia $R$ de 90.35 $\Omega$ cuando su bulbo se sumerge en agua a la temperatura del punto triple (273.16 K). ¿Qué temperatura indica el termómetro si el bulbo está situado en un entorno tal que su resistencia es de 96.28 $\Omega$?

2. Se forma un termopar a partir de dos metales diferentes unidos en dos puntos de modo tal que se produzca un pequeño voltaje cuando las dos uniones están a temperaturas diferentes. En un termopar de hierro-constantano, con una unión mantenida a 0°C, el voltaje de salida varía linealmente desde 0 hasta 28.0 mV al elevar la temperatura de la otra unión desde 0 hasta 510°C. Halle la temperatura de la unión variable cuando la salida del termopar sea de 10.2 mV.
3. La amplificación o *ganancia* de un amplificador de transistores puede depender de la temperatura. La ganancia para cierto amplificador a la temperatura ambiente (20.0°C) es de 30.0, mientras que a 55.0°C es de 35.2. ¿Cuál sería la ganancia a 28.0°C si la ganancia depende linealmente de la temperatura dentro de este limitado intervalo?
4. El cero absoluto es -273.15°C. Halle el cero absoluto en la escala Fahrenheit.
5. Si su médico le dice que su temperatura es de 310 kelvin sobre el cero absoluto, ¿se preocuparía? Explique su respuesta.
6. (*a*) La temperatura de la superficie del Sol es de unos 6000 K. Exprese ésta en la escala Fahrenheit. (*b*) Exprese la temperatura normal del cuerpo humano, 98.6°F, en la escala Celsius. (*c*) En la región continental de Estados Unidos, la temperatura más baja registrada oficialmente es de -70°F en Rogers Pass, Montana. Exprese ésta en la escala Celsius. (*d*) Exprese el punto de ebullición normal del oxígeno, -183°C, en la escala Fahrenheit. (*e*) ¿Qué temperatura Celsius cree usted que tiene una habitación si el calor en ella resulta insoportable?
7. ¿A qué temperatura darían los siguientes pares de escalas la misma lectura: (*a*) Fahrenheit y Celsius, (*b*) Fahrenheit y Kelvin, y (*c*) Celsius y Kelvin?
8. ¿A qué temperatura es la lectura en la escala Fahrenheit igual (*a*) al doble de la Celsius y (*b*) a la mitad de la Celsius?
9. A diario podemos comprobar que los objetos calientes y fríos se enfrían o se calientan respecto a la temperatura de su entorno. Si la diferencia de temperatura $\Delta T$ entre un objeto y su entorno ($\Delta T = T_{obj} - T_{ent}$) no es demasiado grande, la razón de enfriamiento o de calentamiento del objeto es proporcional, aproximadamente, a esta diferencia de temperatura; es decir,

$$\frac{d\,\Delta T}{dt} = -A(\Delta T),$$

donde $A$ es una constante. El signo menos se debe a que $\Delta T$ disminuye con el tiempo si $\Delta T$ es positiva, y aumenta si $\Delta T$ es negativa. Esto se conoce como la *ley de Newton para el enfriamiento*. (*a*) ¿De qué factores depende $A$? ¿Cuáles son sus dimensiones? (*b*) Si en algún instante $t = 0$ la diferencia de temperatura es $\Delta T_0$, demuestre que esa diferencia es

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}$$

en un tiempo $t$ más tarde.

10. Por la mañana temprano se descompone el calentador de una casa. La temperatura exterior es de -7.0°C. Como resultado, la temperatura en el interior desciende de 22 a 18°C en 45 min. ¿Cuánto tiempo más tomará para que la temperatura interior descienda otros 4.0°C ? Suponga que la temperatura exterior no cambia y que se aplica la ley de enfriamiento de Newton; vea el problema anterior.

### *Sección 22-4 La escala de temperatura de un gas ideal*

11. Si la temperatura del gas en el punto de vapor es de 373.15 K, ¿cuál será el valor limitante de la relación de las presiones de un gas en el punto de vaporización y del agua en el punto triple cuando el gas se mantiene a volumen constante?
12. Un termómetro de gas se construye de dos bulbos que contienen gas, cada uno de los cuales se pone en un baño de agua, como se muestra en la figura 13. La diferencia de presión entre los dos bulbos se mide por medio de un manómetro de mercurio ilustrado en la figura. Depósitos apropiados, no mostrados en el diagrama, mantienen constante el volumen de gas en ambos bulbos. No hay diferencia en la presión cuando ambos baños se encuentran en el punto triple del agua. La diferencia de presión es de 120 mm Hg cuando un baño está en el punto triple y el otro en el punto de ebullición del agua. Por último, la diferencia de presión es de 90.0 mm Hg cuando un baño se encuentra en el punto triple y el otro tiene una temperatura desconocida. Halle la temperatura desconocida.

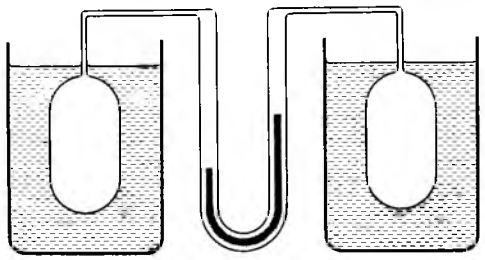


**Figura 13** Problema 12.

13. Se ensamblan dos termómetros de gas a volumen constante; uno utiliza nitrógeno como gas de trabajo y el otro utiliza helio. Ambos contienen el gas suficiente para que $p_{tr}$ = 100 cm Hg. ¿Cuál es la diferencia entre las presiones de los dos termómetros si ambos están sumergidos en un baño de agua al punto de ebullición? ¿Cuál de las dos presiones es más alta? Véase la figura 5.

### *Sección 22-5 Dilatación térmica*

14. El asta de aluminio de una bandera tiene 33 m de altura. ¿En cuánto aumenta su longitud cuando la temperatura aumenta en 15 C°?

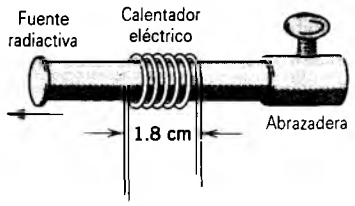



**Figura 14** Problema 22.

**15.** El espejo de vidrio Pyrex del telescopio del observatorio de Monte Palomar (el telescopio Hale) tiene un diámetro de 200 in. Las temperaturas más extremas registradas en el Monte Palomar son de -10°C y 50°C. Determine el cambio máximo del diámetro del espejo.

**16.** Un orificio circular practicado en una placa de aluminio tiene 2.725 cm de diámetro a 12°C. ¿Cuál es el diámetro cuando la temperatura de la placa se eleva a 140°C?

**17.** Se colocan unas vías de acero para el ferrocarril cuando la temperatura es de -5.0°C. Una sección estándar de riel tiene entonces 12.0 m de longitud. ¿Qué claro deberá dejarse entre secciones de riel de modo que no exista una compresión cuando la temperatura suba hasta los 42°C?

**18.** Una ventana de vidrio tiene 200 cm por 300 cm a 10°C. ¿En cuánto ha aumentado su área cuando su temperatura es de 40°C? Suponga que el vidrio puede dilatarse libremente.

**19.** Un cubo de latón tiene una longitud de 33.2 cm de lado a 20.0°C. Halle (*a*) el aumento en el área superficial y (*b*) el aumento en el volumen cuando se calienta a 75.0°C.

**20.** ¿Cuál es el volumen de una bola de plomo a -12°C si su volumen a 160°C es de 530 $cm^3$?

**21.** Demuestre que cuando la temperatura de un líquido en un barómetro cambia en $\Delta T$, y la presión es constante, la altura $h$ cambia en $\Delta h = \beta h\, \Delta T$, donde $\beta$ es el coeficiente de dilatación volumétrica del líquido. Desprecie la dilatación del tubo de vidrio.

**22.** En cierto experimento fue necesario estar en posibilidad de mover una fuente radiactiva pequeña a velocidades selectas extremadamente bajas. Esto se realizó asegurando la fuente a un extremo de una barra de aluminio y calentando la sección central de la barra de una manera controlada. Si la sección calentada efectiva de la barra de la figura 14 es de 1.8 cm, ¿a qué razón constante debe hacerse cambiar la temperatura de la barra si la fuente ha de moverse a una velocidad constante de 96 nm/s?

**23.** Demuestre que si $\alpha$ depende de la temperatura $T$, entonces

$$L \cong L_0\left[1 + \int_{T_0}^{T} \alpha(T)dT\right],$$

donde $L_0$ es la longitud a la temperatura de referencia $T_0$.

**24.** Poco después de que se formara la Tierra, el calor liberado por la desintegración de elementos radiactivos elevó la temperatura interna promedio de 300 a 3000 K, a cuyo valor permanece hoy día aproximadamente. Suponiendo un coeficiente de dilatación volumétrica promedio de $3.2 \times 10^{-5}\ K^{-1}$, ¿en cuánto ha aumentado el radio de la Tierra desde su formación?

**25.** Se mide una barra en 20.05 cm de longitud usando una regla de acero a la temperatura ambiente de 20°C. Tanto la barra como la regla se introducen en un horno a 270°C, en donde la barra mide ahora 20.11 cm usando la misma regla. Calcule el coeficiente de dilatación térmica del material del cual está hecha la barra.

**26.** Considérese un termómetro de mercurio en vidrio. Supóngase que la sección transversal $A$ del capilar es constante, y que $V$ es el volumen del bulbo de mercurio a 0.00°C. Suponga que el mercurio llena apenas el bulbo a 0.00°C. Demuestre que la longitud $L$ de la columna del mercurio en el capilar a una temperatura $T$, en °C, es

$$L = \frac{V}{A}(\beta - 3\alpha)T,$$

es decir, proporcional a la temperatura, siendo $\beta$ el coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio y $\alpha$ el coeficiente de dilatación lineal del vidrio.

**27.** (*a*) Demuestre que si las longitudes de dos barras de sólidos diferentes son inversamente proporcionales a sus respectivos coeficientes de dilatación lineal a la misma temperatura inicial, la diferencia de longitud entre ellas será constante a todas las temperaturas. (*b*) ¿Cuál sería la longitud de una barra de acero y de una barra de latón a 0°C, de modo que a todas las temperaturas su diferencia de longitud sea 0.30 m?

**28.** Como resultado de un aumento de temperatura de 32°C, una barra con una grieta en su centro se pandea hacia arriba, como se muestra en la figura 15. Si la distancia fija $L_0$ = 3.77 m y el coeficiente de dilatación lineal es de $25 \times 10^{-6}$/C°, halle $x$, la distancia a la cual se eleva el centro.

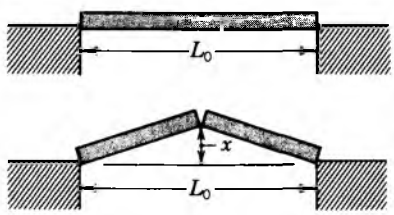



**Figura 15** Problema 28.

**29.** Una barra de acero tiene 3.000 cm de diámetro a 25°C. Un anillo de latón tiene un diámetro interior de 2.992 cm a 25°C. ¿A qué temperatura común se deslizará justamente el anillo en la barra?

**30.** El área $A$ de una placa rectangular es $ab$. Su coeficiente de dilatación lineal es $\alpha$. Después de un aumento de temperatura $\Delta T$, el lado $a$ es más largo en $\Delta a$ y el lado $b$ es más largo en $\Delta b$. Demuestre que si despreciamos la pequeña cantidad $\Delta a\, \Delta b/ab$ (véase la Fig. 16), entonces $\Delta A = 2\alpha A\, \Delta T$, lo que coincide con la ecuación 14.

**31.** Demuestre que, si despreciamos cantidades extremadamente pequeñas, el cambio de volumen de un sólido en dilatación a través de un aumento de temperatura $\Delta T$ está dado por $\Delta V = 3\alpha V\, \Delta T$, donde $\alpha$ es el coeficiente de dilatación lineal. Véase la ecuación 15.

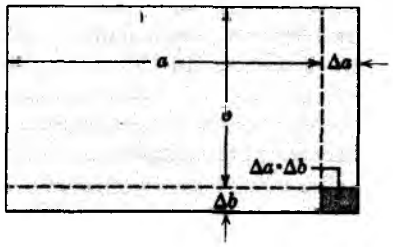



**Figura 16** Problema 30.

**32.** Cuando la temperatura de una moneda de cobre (que no es cobre puro) de un centavo se eleva en 100°C, su diámetro aumenta en 0.18%. Halle el porcentaje de aumento en (*a*) el área de una cara, (*b*) el espesor, (*c*) el volumen, y (*d*) la masa del centavo. (*e*) Calcule su coeficiente de dilatación lineal.

**33.** La densidad es la masa dividida por el volumen. Si el volumen $V$ depende de la temperatura, entonces también su densidad $\rho$. Demuestre que el cambio de densidad $\Delta\rho$ con el cambio de temperatura $\Delta T$ está dado por

$$\Delta\rho = -\beta\rho\,\Delta T,$$

donde $\beta$ es el coeficiente de dilatación volumétrica. Explique el signo menos.

**34.** Cuando la temperatura de un cilindro de metal se eleva de 60 a 100°C, su longitud aumenta en 0.092%. (*a*) Halle el cambio porcentual en la densidad. (*b*) Identifique el metal.

**35.** A 100°C un frasco de vidrio está completamente lleno de 891 g de mercurio. ¿Qué masa de mercurio se necesita para llenar el frasco a -35°C? (El coeficiente de dilatación lineal del vidrio es de $9.0 \times 10^{-6}$/C°; el coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio es de $1.8 \times 10^{-4}$/C°).

**36.** La figura 17 muestra la variación del coeficiente de dilatación volumétrica del agua entre 4°C y 20°C. La densidad del agua a 4°C es de 1000 kg/m³. Calcule la densidad del agua a 20°C.

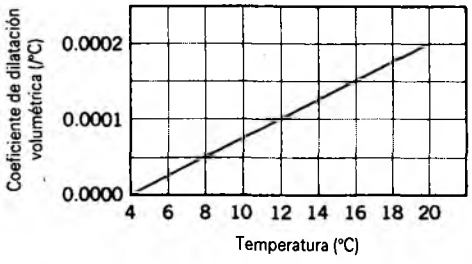



**Figura 17** Problema 36.

**37.** Una barra compuesta de longitud $L = L_1 + L_2$ está hecha de una barra de material 1 y longitud $L_1$ unida a una barra de material 2 y longitud $L_2$, como se muestra en la figura 18. (*a*) Demuestre que el coeficiente efectivo de dilatación lineal $\alpha$ de esta barra está dado por $\alpha = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)/L$. (*b*) Si se utilizara acero y latón, diseñe dicha barra compuesta cuya longitud sea de 52.4 cm y cuyo coeficiente efectivo de dilatación lineal sea de $13 \times 10^{-6}$/C°.

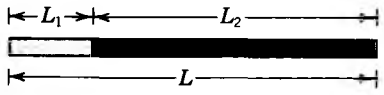



**Figura 18** Problema 37.

**38.** (*a*) Demuestre que el cambio en inercia rotatoria $I$ con la temperatura de un objeto sólido está dado por $\Delta I = 2\alpha I\,\Delta T$. (*b*) Una barra uniforme de latón, que gira libremente a 230 rev/s en torno a un eje perpendicular a ella en su centro, se calienta sin contacto mecánico hasta que su temperatura aumenta en 170°C. Calcule el cambio en la velocidad angular.

**39.** Un cilindro situado en chumaceras sin fricción se hace girar en torno a su eje y luego se calienta, sin contacto mecánico, hasta que su radio aumenta en 0.18%. ¿Cuál es el cambio porcentual en (*a*) el ímpetu angular, (*b*) la velocidad angular, y (*c*) la energía rotatoria del cilindro?

**40.** (*a*) Demuestre que el cambio con la temperatura en el periodo $P$ de un péndulo físico está dado por $\Delta P = \frac{1}{2}\alpha P\,\Delta T$. (*b*) Un péndulo de reloj hecho de invar tiene un periodo de 0.500 s y es exacto a 20°C. Si el reloj se emplea en un clima en que la temperatura promedie 30°C, ¿qué corrección aproximada al tiempo indicado por el reloj es necesaria al cabo de 30 días?

**41.** Un reloj de péndulo con un péndulo hecho de latón está diseñado para mantener un tiempo preciso a 20°C. ¿De cuánto será el error, en segundos por hora, si el reloj opera a 0°C?

**42.** Un vaso de aluminio de 110 cm³ de capacidad se llena de glicerina a 22°C. ¿Cuánta glicerina, se derramará del vaso si la temperatura del vaso y de la glicerina se eleva a 28°C? (El coeficiente de dilatación volumétrica de la glicerina es de $5.1 \times 10^{-4}$/C°).

**43.** Un tubo vertical de vidrio de 1.28 m de longitud está medio lleno de un líquido a 20.0°C. ¿Cuál será el cambio de altura del líquido cuando el tubo se caliente a 33.0°C? Suponga que $\alpha_{vid} = 1.1 \times 10^{-5}$/C° y $\beta_{liq} = 4.2 \times 10^{-5}$/C°.

**44.** Una barra de acero a 24°C se atornilla fuertemente en ambos extremos y luego se enfría. ¿A qué temperatura empezará a ceder? Véase la tabla 1, capítulo 14.

**45.** Tres barras rectas de igual longitud, de aluminio, invar y acero, todas a 20°C, forman un triángulo equilátero con pivotes en los vértices. ¿A qué temperatura tendrá 59.95° el ángulo opuesto a la barra de invar? Véase el apéndice H para las fórmulas trigonométricas necesarias.

**46.** Dos barras de materiales diferentes, pero de las mismas longitudes $L$ y las mismas áreas $A$ en sus secciones transversales están dispuestas extremo con extremo entre soportes rígidos y fijos como se muestra en la figura 19*a*. La temperatura es $T$ y no existe un esfuerzo inicial. Las barras se calientan, de modo que su temperatura aumenta en $\Delta T$. (*a*) Demuestre que la superficie de contacto de las barras se desplaza al calentarlas en una cantidad dada por

$$\Delta L = \left(\frac{\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2}\right) L\,\Delta T,$$

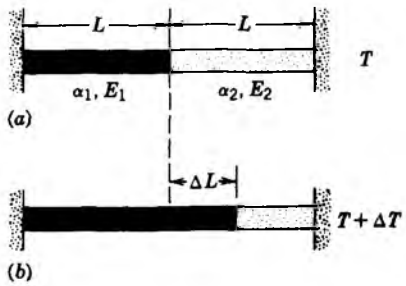



**Figura 19** Problema 46.

donde $\alpha_1$, $\alpha_2$ son los coeficientes de dilatación lineal y $E_1$, $E_2$ son los módulos de Young de los materiales. Desprecie los cambios en las áreas de la sección transversal; véase la figura 19*b*. (*b*) Halle el esfuerzo en la superficie de contacto después del calentamiento.

**47.** Un cubo de aluminio de 20 cm de lado flota en mercurio. ¿Qué tanto más se hundirá el bloque cuando la temperatura se eleve de 270 a 320 K? (El coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio es de $1.8 \times 10^{-4}/\text{C}°$).

**48.** Un tubo de vidrio casi lleno de mercurio está unido en serie a la base de un péndulo de hierro de 100 cm de longitud en forma de barra. ¿A qué altura estará el mercurio en el tubo de vidrio de modo que el centro de masa de este péndulo no se eleve ni baje con los cambios de temperatura? (El área de la sección transversal del tubo es igual a la de la barra de hierro. Desprecie la masa del vidrio. El hierro tiene una densidad de $7.87 \times 10^3$ kg/m$^3$ y un coeficiente de dilatación lineal igual a $12 \times 10^{-6}/\text{C}°$. El coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio es de $18 \times 10^{-5}/\text{C}°$).

**49.** La distancia entre las torres del claro principal del puente Golden Gate cerca de San Francisco es de 4200 ft (Fig. 20). La flecha del cable a la mitad entre las torres a 50°F es de 470 ft. Considere $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}/\text{F}°$ para el cable y calcule (*a*) el cambio de longitud del cable y (*b*) el cambio en la flecha para un cambio de temperatura desde 10 hasta 90°F. Suponga que no hay flexión ni separación de las torres y una forma parabólica para el cable.



**Figura 20** Problema 49.

# CAPÍTULO 23

# LA TEORÍA CINÉTICA Y EL GAS IDEAL

*Las leyes básicas de la termodinámica tratan de las relaciones entre las propiedades macroscópicas, tales como la presión, la temperatura, el volumen, y la energía interna de un gas ideal. Las leyes no dicen nada acerca del hecho de que la materia esté formada de partículas (átomos o moléculas). Debido al gran número de partículas implicadas, no es práctico aplicar las leyes de la mecánica para hallar el movimiento de cada partícula en un gas. En cambio, usamos técnicas de promedios para expresar las propiedades termodinámicas como promedios de las propiedades moleculares. Si el número de partículas es muy grande, tales promedios dan cantidades rigurosamente definidas.*

*En este capítulo consideramos un enfoque de promedios llamado* teoría cinética, *en el que seguimos el movimiento de las partículas representativas de un gas y luego promediamos este comportamiento para todas las partículas. La teoría cinética fue desarrollada entre los siglos XVII y XIX por Boyle, D. Bernoulli, Joule, Kronig, Clausius, y Maxwell, entre otros. Otro enfoque también de los promedios es la* mecánica estadística, *en la cual se aplican las leyes de la probabilidad a distribuciones estadísticas de las propiedades moleculares. Este enfoque se estudiará en el capítulo 24.*

## 23-1 PROPIEDADES MACROSCÓPICAS DE UN GAS Y LA LEY DEL GAS IDEAL

La figura 1 muestra un gas confinado en un cilindro equipado con un émbolo móvil. Deseamos llevar a cabo una serie de mediciones de las propiedades *macroscópicas* de un gas: el tipo y cantidad de gas y su presión, volumen, y temperatura absolutas (Kelvin). Suponemos que tenemos conectados al cilindro dispositivos apropiados para medir estas propiedades. Suponemos también que tenemos a nuestra disposición los medios para cambiar cualquiera de estas propiedades. Por ejemplo, suponemos que el gas está en contacto con un dispositivo idealizado llamado *depósito térmico*, el cual podemos considerar como un cuerpo mantenido a una temperatura $T$, de modo que la temperatura del depósito no cambia cuando nuestro cilindro de gas entra en equilibrio térmico con él. Suponemos que podemos cambiar fácilmente la temperatura del depósito, cambiando por lo tanto la temperatura del gas. Si deseamos cambiar la presión $p$, añadimos o quitamos peso sobre el émbolo. (Se supone que en el espacio sobre el émbolo se ha practicado un vacío, de modo que no existe la presión del aire que empuje *hacia abajo* sobre el émbolo). El volumen $V$ puede ser alterado simplemente cambiando la posición del émbolo, y la cantidad de gas puede cambiarse al permitir que entre gas a la cámara, cambiando por lo tanto el número de moléculas $N$. Después de cada cambio, esperamos el tiempo suficiente para que el gas alcance el equilibrio térmico y adquiera un nuevo conjunto de variables termodinámicas macroscópicas.

Llevemos a cabo los siguientes experimentos con el gas.

1. *$V$ depende de $N$.* Manteniendo constantes la temperatura y la presión (esto es, el gas está en contacto con el depósito térmico a determinada temperatura $T$, y el peso sobre el émbolo es constante), permitimos que entre o salga gas de la cámara, y medimos el volumen resultante $V$ observando la altura del émbolo. (Suponemos que conocemos la masa de cada molécula y la masa total de gas que está presente en el cilindro. Entonces podemos determinar $N$, el número total de moléculas.) La figura 2 muestra los resultados típicos de tales experimentos. Los puntos de los datos parecen seguir una línea recta, y

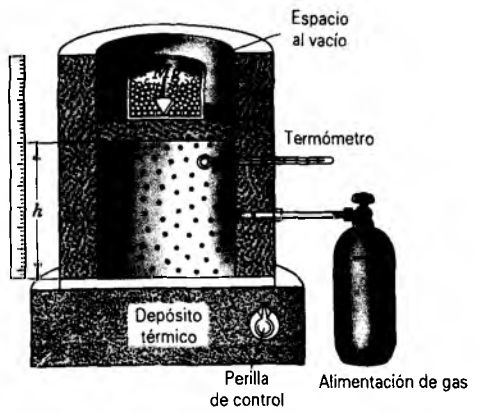



**Figura 1** El gas está confinado en un cilindro que tiene contacto con un depósito térmico a la temperatura (ajustable) $T$. El émbolo ejerce una fuerza total hacia abajo $Mg$ sobre el gas, la cual, en el equilibrio, está balanceada por la fuerza hacia arriba debida a la presión del gas. El volumen del gas puede ser determinado midiendo la altura $h$ del émbolo desde el fondo del cilindro, y la temperatura del gas se mide con un termómetro apropiado. Una alimentación de gas permite añadir gas adicional al cilindro; suponemos que está también provisto de un mecanismo para remover gas y para cambiar la alimentación con el fin de admitir diferentes clases de gas.

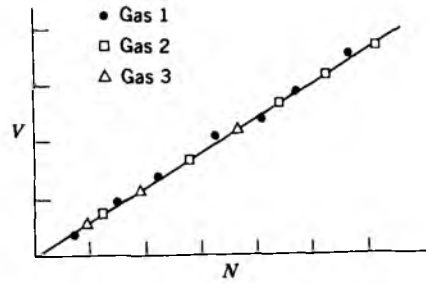



**Figura 2** El volumen $V$ ocupado por el gas en la figura 1 depende del número de moléculas $N$. A una temperatura y presión dadas, gases diferentes siguen la misma relación lineal.

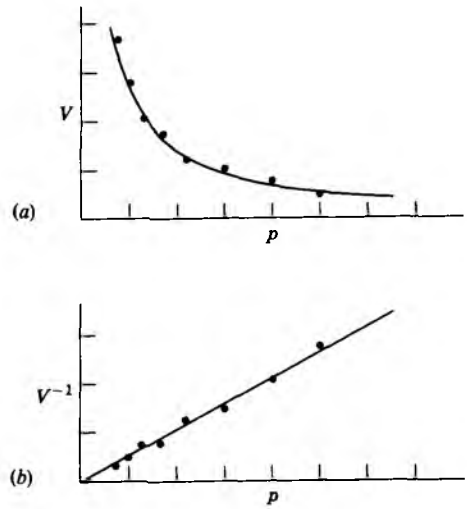



**Figura 3** (*a*) El volumen $V$ ocupado por el gas parece depender inversamente de la presión $p$, mantenidas constantes la temperatura y el número de partículas. (*b*) Al trazar $V^{-1}$ contra $p$ se ve que la relación es realmente una relación lineal inversa.

concluimos, con una aproximación suficientemente buena, que existe una proporción directa entre $V$ y $N$; es decir, el volumen aumenta linealmente con el número de partículas. Además, al reemplazar el gas en el cilindro con un número igual de moléculas de un gas diferente a la misma presión y temperatura, hallamos que el nuevo gas ocupa el mismo volumen. Así, deberíamos concluir que el volumen ocupado por un gas a determinadas presión y temperatura es independiente del tipo de gas o del tamaño o masa de sus moléculas; el volumen depende únicamente del *número* de moléculas. Matemáticamente, $V \propto N$, o sea

$$V = CN \quad (p,T \text{ constantes}). \tag{1}$$

Aquí $C$ es una constante, igual a la pendiente de la línea en la figura 2 y determinada por los valores de $p$ y de $T$. Si repetimos este experimento con diferentes valores constantes de $p$ y de $T$, hallaríamos siempre que la ecuación 1 se cumple, pero con un valor diferente de la constante $C$.

La ecuación 1 se conoce a veces como la ley de Avogadro. Es válida con una muy buena aproximación para todos los gases, especialmente a baja densidad, donde las moléculas están muy separadas entre sí y el volumen ocupado por las moléculas mismas es realmente una fracción despreciablemente pequeña del volumen del recipiente en que está confinado el gas. Podemos generalizar, a partir del comportamiento de estos *gases reales* a un *gas ideal* que sigue la ecuación 1 exactamente. En la sección siguiente consideraremos las propiedades microscópicas de un gas ideal.

**2.** *$V$ depende de $p$.* Manteniendo constantes el número de partículas $N$ y la temperatura $T$, cambiamos la presión (cambiando el peso sobre el émbolo) y medimos el volumen resultante. En la figura 3*a* se muestra el resultado, el cual sugiere una relación *inversa*: al aumentar la presión $p$, el volumen $V$ disminuye. Para comprobar esto, trazamos a $p$ contra $V^{-1}$, como en la figura 3*b*, lo cual confirma una relación lineal. Por lo tanto, concluimos que $p \propto V^{-1}$, o sea

$$p = \frac{C'}{V} \quad (N,T \text{ constantes}). \tag{2}$$

Aquí $C'$ representa a otra constante, la cual tendría un valor diferente si hubiéramos elegido valores diferentes

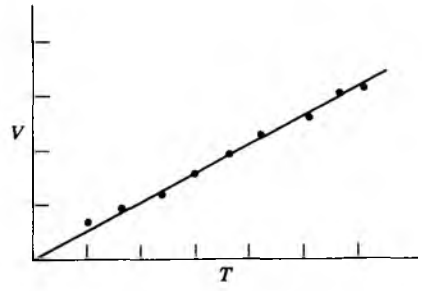



**Figura 4** El volumen $V$ ocupado por el gas varía linealmente con la temperatura $T$, cuando se mantienen constantes la presión y el número de moléculas.

de $N$ y de $T$. La ecuación 2 se llama *ley de Boyle* y, al igual que la ecuación 1, es una generalización ideal. Como veremos en la sección 23-8, los gases reales se desvían un poco de este comportamiento ideal.

3. *$V$ depende de $T$.* Manteniendo constantes a $p$ y a $N$, variamos la temperatura $T$ (cambiando la temperatura del depósito termico), y medimos el volumen resultante $V$. Hallamos (Fig. 4) una relación directa: el volumen aumenta al aumentar la temperatura; entonces $V \propto T$, o sea

$$V = C''T \qquad (p, N \text{ constantes}), \tag{3}$$

donde $C''$ es también otra constante. La ecuación 3 se llama *ley de Charles* o *ley de Gay-Lussac*. Al igual que las ecuaciones 1 y 2, es una idealización del comportamiento de los gases reales.

## Ecuación de estado

Las ecuaciones 1, 2 y 3 resumen resultados experimentales estrictamente válidos únicamente para nuestro gas ideal hipotético, pero aproximadamente válidas en un alto grado para la mayoría de los gases reales. Podemos combinar las tres ecuaciones en una sola que incluya a las tres relaciones observadas, como sigue:

$$\frac{pV}{NT} = k, \tag{4}$$

en donde $k$ es una constante. Reescribiendo la ecuación 4 podemos demostrar que es consistente con las ecuaciones 1 a 3:

$$V = \left(\frac{kT}{p}\right)N = CN \qquad (p, T \text{ constantes}), \tag{5a}$$

$$p = \frac{(kNT)}{V} = \frac{C'}{V} \qquad (N, T \text{ constantes}), \tag{5b}$$

$$V = \left(\frac{kN}{p}\right)T = C''T \qquad (p, N \text{ constantes}), \tag{5c}$$

La constante $k$ de la ecuación 4 se llama *constante de Boltzmann*. Es una constante universal con un valor determinado experimentalmente, el cual es

$$k = 1.38066 \times 10^{-23} \text{ J/K}.$$

Es más común escribir la ecuación 4 en una forma algo diferente. Expresemos la cantidad de gas no en términos del número de moléculas $N$ sino en términos del *número de moles* $n$. El mol fue definido en la sección 1-5. En términos de la constante de Avogadro $N_A$, el número de moles es

$$n = \frac{N}{N_A}, \tag{6}$$

y podemos reescribir la ecuación 4 como:

$$\frac{pV}{nT} = kN_A,$$

o bien

$$pV = nRT, \tag{7}$$

donde

$$R = N_A k = 8.3145 \text{ J/mol·K}. \tag{8}$$

La ecuación 7 se llama *ley de los gases ideales* o *ecuación de estado del gas ideal*. Una ecuación de estado de un sistema da una relación matemática fundamental entre las cantidades termodinámicas macroscópicas. Los experimentos revelan que, a densidades suficientemente bajas, todos los gases reales tienden al comportamiento del gas ideal descrita en la ecuación 7. Éste es el mismo límite que discutimos en conexión con la escala de temperatura del gas ideal en la sección 22-4. La constante $R$ tiene el mismo valor para todos los gases y se le llama *constante universal de los gases*.

---

**Problema muestra 1** Un cilindro aislado equipado con un émbolo (Fig. 1) contiene oxígeno a una temperatura de 20°C y una presión de 15 atm en un volumen de 22 litros. Al descender el émbolo, disminuye el volumen del gas a 16 litros, y simultáneamente la temperatura se eleva a 25°C. Suponiendo que el oxígeno se comporte como un gas ideal bajo estas condiciones, ¿cuál es la presión final del gas?

**Solución** Partimos de la ecuación 7, puesto que la cantidad de gas permanece sin cambio, y tenemos que

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f},$$

o bien

$$p_f = p_i\left(\frac{T_f}{T_i}\right)\left(\frac{V_i}{V_f}\right).$$

Puesto que esto está en la forma de una razón, no necesitamos convertir a $p$ y a $V$ en unidades del SI, pero *debemos*

*expresar a T en unidades de temperatura absoluta (Kelvin).* Entonces,

$$p_f = (15 \text{ atm})\left(\frac{273 + 25 \text{ K}}{273 + 20 \text{ K}}\right)\left(\frac{22 \text{ L}}{16 \text{ L}}\right) = 21 \text{ atm}.$$

## 23-2 EL GAS IDEAL: UN MODELO

Cuando los físicos desean entender un sistema complejo, a menudo inventan un *modelo*. Un modelo es una versión simplificada del sistema que permite hacer cálculos pero sin perder su realidad física. Un modelo puede empezar con un grupo de hipótesis que simplifican y permiten que el sistema sea analizado usando un conjunto de leyes existente, por ejemplo, las de la mecánica de Newton. El análisis puede conducir entonces a una ecuación o conjunto de ecuaciones que describen al sistema físico original. Puesto que el modelo es una simplificación de la naturaleza, el resultado final no es, por lo general, una descripción verdadera o completa de la naturaleza, pero si hemos sido lo suficientemente cautos en la formulación del modelo, el resultado final puede ser una aproximación muy buena del comportamiento del sistema. Lo que es más importante, el resultado final puede proporcionarnos un camino para estudiar al sistema en el laboratorio y obtener una visión aún más penetrante. Previamente en este texto, hemos usado un modelo (sin llamarlo así) para describir el movimiento de un objeto complejo como si fuera una partícula puntual sometida a ciertas circunstancias. A veces hemos modelado también la fuerza entre los átomos de una molécula, o entre los átomos de un sólido, en términos de la fuerza de un resorte, $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, la cual se basa en sí misma en un tipo de modelo que simplifica (en ciertas condiciones elásticas) los complicados procesos internos en un sólido sujeto a un esfuerzo.

Un gas confinado en un recipiente es un ejemplo de un sistema complejo difícil de analizar usando las leyes de Newton. Las moléculas pueden chocar inelásticamente, y la energía de la colisión puede ser absorbida por las moléculas como energía interna en una variedad de modos. Seguir la pista de estos procesos para todas las moléculas sería un proyecto de una complejidad imposible de vencer. Simplificamos este problema inventando un modelo que describa las propiedades microscópicas del gas real. Este modelo, al cual llamamos *modelo del gas ideal*, resulta ser enteramente consistente con el concepto de gas ideal que hemos desarrollado experimentalmente en la sección 23-1. En esa sección vimos que, especialmente a baja densidad, las propiedades macroscópicas de los gases reales siguen de manera aproximada un resultado general, la ley del gas ideal de la ecuación 7.

Desde el punto de vista microscópico nuestro modelo de gas ideal incluye las hipótesis siguientes. Basados en ellas, empleamos las leyes de Newton para analizar la mecánica del gas ideal; este procedimiento constituye la base de la *teoría cinética*. Más adelante relacionaremos esta descripción microscópica con la macroscópica.

**1.** *Un gas consta de ciertas pertículas, llamadas moléculas.* Dependiendo del gas, cada molécula puede consistir en un átomo o en un grupo de átomos. Si el gas es un elemento o un compuesto y está en estado estable, consideramos que todas sus moléculas son idénticas.

**2.** *Las moléculas tienen movimientos al azar y obedecen a las leyes del movimiento de Newton.* Las moléculas se mueven en todas direcciones y con una gama de velocidades. Al describir el movimiento suponemos que la mecánica de Newton es válida al nivel microscópico.

**3.** *El número total de moléculas es grande.* La velocidad (en magnitud y dirección) de cualquier molécula puede cambiar en forma repentina por medio de una colisión con la pared o con otra molécula. Cualquier molécula en particular sigue una trayectoria en zigzag debido a estas colisiones. Sin embargo, ya que existen tantas moléculas suponemos que el gran número de colisiones resultantes mantiene la distribución del conjunto de las velocidades moleculares y el carácter fortuito o aleatorio del movimiento.

**4.** *El volumen de las moléculas es una fracción despreciablemente pequeña del volumen ocupado por el gas.* Si bien existen muchas moléculas, éstas son extremadamente pequeñas. Sabemos que el volumen ocupado por un gas puede cambiarse a través de una gama amplia de valores con poca dificultad, y que cuando un gas se condensa el volumen ocupado por el líquido puede ser miles de veces más pequeño que el del gas. De aquí que nuestra hipótesis sea plausible. Más adelante investigaremos el tamaño real de las moléculas y veremos si necesitamos modificar esta hipótesis.

**5.** *Ninguna fuerza apreciable actúa sobre las moléculas excepto durante una colisión.* Es decir, suponemos que el alcance de las fuerzas moleculares es comparable al tamaño molecular y mucho más pequeña que la distancia típica entre moléculas. En la medida en que esto sea así, una molécula se mueve con velocidad constante entre colisiones. Por lo tanto, el movimiento de una molécula en particular es una trayectoria en zigzag que consiste, en su mayor parte, en segmentos con velocidad constante cambiada por fuerzas impulsivas.

**6.** *Las colisiones son elásticas y de una duración despreciable.* Las colisiones de una molécula con otra o con las paredes del recipiente conservan el ímpetu y (suponemos) la energía cinética. Las moléculas no son partículas puntuales verdaderas y poseen una estructura interna; así, cierta energía cinética puede convertirse en energía interna durante la colisión. Suponemos que la molécula no

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



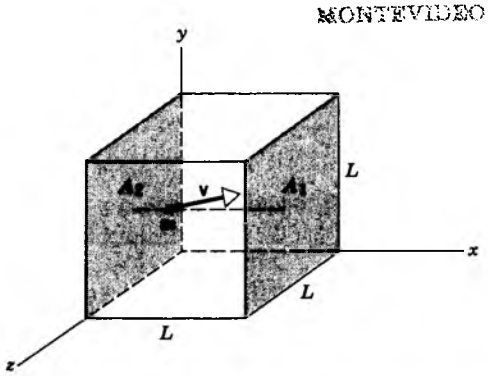



**Figura 5** Caja cúbica de lado $L$ que contiene un gas ideal. Se muestra una molécula del gas moviéndose con velocidad **v** hacia el lado $A_1$.

retiene esta energía interna, la cual está entonces nuevamente disponible como energía cinética después de un tiempo tan breve (el tiempo entre colisiones) que podemos despreciar este cambio por entero.

## 23-3 CÁLCULO CINÉTICO DE LA PRESIÓN

Calculemos ahora la presión de un gas ideal a partir de la teoría cinética. Por simplificación, consideremos un gas en un recipiente cúbico de lado $L$ cuyas paredes sean perfectamente elásticas. Llamemos a las caras normales al eje $x$ (Fig. 5) $A_1$ y $A_2$, cada una de área $L^2$. Consideremos a una molécula de masa $m$ con velocidad **v**, la cual resolvemos en sus componentes $v_x$, $v_y$, y $v_z$. Cuando esta partícula choca con $A_1$, rebota con su componente $x$ de la velocidad invertida; es decir, $v_x \rightarrow -v_x$. No existe un efecto sobre $v_y$ o sobre $v_z$, de modo que el cambio en el ímpetu de la partícula tiene únicamente una componente $x$, dada por

ímpetu final - ímpetu inicial =

$$-mv_x - (mv_x) = -2mv_x. \quad (9)$$

Ya que el ímpetu total se conserva en la colisión, el ímpetu impartido a $A_1$ es $+2mv_x$.

Supongamos que esta partícula llegue a $A_2$ sin golpear a ninguna otra partícula en su camino. El tiempo requerido para cruzar el cubo es $L/v_x$. (Si la molécula golpea una de las otras caras de la caja en su camino hacia $A_2$, la componente $x$ de su velocidad no cambia, como tampoco el tiempo de tránsito). En $A_2$ nuevamente tiene su componente $x$ de la velocidad invertida y regresa a $A_1$. Suponiendo que no existan colisiones con otras moléculas, el viaje redondo toma un tiempo $2L/v_x$, que es el tiempo entre las colisiones con $A_1$. La fuerza impulsiva promedio ejercida por esta molécula sobre $A_1$ es el ímpetu transferido dividido entre el intervalo de tiempo entre transferencias, o sea

$$F_x = \frac{2mv_x}{2L/v_x} = \frac{mv_x^2}{L}. \quad (10)$$

Para obtener la fuerza *total* sobre $A_1$, es decir, la razón a la cual se imparte ímpetu a $A_1$ por *todas* las moléculas del gas, debemos sumar la cantidad $mv_x^2/L$ para todas las partículas. Entonces, para hallar la presión dividimos esta fuerza entre el área de $A_1$, es decir $L^2$. La presión es, por lo tanto,

$$p = \frac{1}{L^2}\frac{mv_{x1}^2 + mv_{x2}^2 + \cdots}{L}$$

$$= \frac{m}{L^3}(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots), \quad (11)$$

donde $v_{x1}$ es la componente $x$ de la velocidad de la partícula 1, $v_{x2}$ es la de la partícula 2, y así sucesivamente. Si $N$ es el número total de partículas en el recipiente, entonces $Nm$ es la masa total y $Nm/L^3$ es la densidad $\rho$. Entonces, $m/L^3 = \rho/N$, y

$$p = \rho\left(\frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots}{N}\right). \quad (12)$$

La cantidad dentro del paréntesis en la ecuación 12 es el valor promedio de $v_x^2$ para todas las partículas en el recipiente, el cual representamos por $\overline{v_x^2}$. Entonces

$$p = \rho\overline{v_x^2}. \quad (13)$$

Para cualquier partícula, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ Puesto que tenemos muchas partículas y porque se están moviendo enteramente al azar, los valores promedio de $v_x^2$, $v_y^2$, y $v_z^2$ son iguales, y el valor de cada una es exactamente un tercio del valor promedio de $v^2$. No existe una preferencia entre las moléculas para moverse a lo largo de alguno de los tres ejes. Por esto $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$, de modo que la ecuación 13 resulta

$$p = \tfrac{1}{3}\rho\overline{v^2}. \quad (14)$$

Si bien hemos derivado este resultado despreciando las colisiones entre las partículas, el resultado es verdadero incluso si consideramos las colisiones. Debido al intercambio de velocidades en una colisión elástica entre partículas idénticas, siempre habrá una molécula que choque con $A_2$ con un ímpetu $mv_x$ correspondiente a la molécula que salió de $A_1$ con este mismo ímpetu. La ecuación 14 se cumple aun cuando la caja contenga una mezcla de moléculas de masas diferentes, porque el ímpetu se conserva en las colisiones, y la pared debe recibir el mismo impulso sin importar qué moléculas lo golpeen. También, el tiempo que dura la colisión es despreciable comparado con el tiempo invertido entre colisiones. De aquí que despreciar las colisiones es meramente un recurso conveniente para

el cálculo. De manera similar, podríamos haber escogido un recipiente de cualquier forma: el cubo meramente simplifica el cálculo. Si bien hemos calculado la presión ejercida únicamente sobre el lado $A_1$, se deduce de la ley de Pascal que la presión es la misma sobre todas las caras y en cualquier parte del interior. (Esto es así únicamente si la densidad del gas es uniforme. En una muestra grande de gas, los efectos gravitatorios pudieran ser significativos, y deberíamos tener en cuenta la variación de la densidad. Véase la sección 17-3 y el problema 6 de este capítulo.)

La raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ se llama *velocidad media cuadrática* de las moléculas (rms, de *root-mean-square*) y es una clase de velocidad molecular promedio. (Estudiaremos este promedio con más detalle en la sección 24-3.) Usando la ecuación 14, podemos calcular la velocidad media cuadrática partiendo de los valores medidos de la presión y de la densidad del gas. Entonces

$$v_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}. \qquad (15)$$

En la ecuación 14 relacionamos una cantidad macroscópica (la presión $p$) con un valor promedio de una cantidad microscópica (esto es, con $\overline{v^2}$ o con $v_{\text{rms}}^2$). Sin embargo, los promedios pueden ser considerados durante tiempos cortos o durante tiempos largos, en regiones pequeñas del espacio o en regiones grandes del espacio. El promedio calculado en una región pequeña durante un tiempo corto debería depender del tiempo o región elegidos, de modo que los valores obtenidos de esta manera deben de fluctuar. Esto podría suceder en un gas de densidad muy baja, por ejemplo. Sin embargo, podemos despreciar las fluctuaciones cuando el número de partículas en el sistema es suficientemente grande.

**Problema muestra 2** Calcule la velocidad media cuadrática de las moléculas de hidrógeno a 0.00°C y 1.00 atm de presión, suponiendo que el hidrógeno sea un gas ideal. En estas condiciones el hidrógeno tiene una densidad $\rho$ de $8.99 \times 10^{-2}$ kg/m$^3$.

**Solución** Puesto que $p = 1.00$ atm $= 1.01 \times 10^5$ Pa,

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3(1.01 \times 10^5 \text{ Pa})}{8.99 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3}} = 1840 \text{ m/s}.$$

Esto es del orden de una milla por segundo, o sea 3600 mi/h.

La tabla 1 da los resultados de cálculos similares para algunos gases a la temperatura ambiente. Estas velocidades moleculares son aproximadamente del mismo orden que la velocidad del sonido a la misma temperatura. Por ejemplo, en aire a 0°C, $v_{\text{rms}} = 485$ m/s y la velocidad del sonido es 331 m/s; en el hidrógeno $v_{\text{rms}} = 1838$ m/s y el sonido viaja a 1286 m/s. Estos resultados son de esperarse en términos de nuestro modelo de un gas; véase el problema 38. La energía de la onda sonora es transportada como energía cinética de una molécula a la siguiente con la cual choca. Por lo tanto, deberíamos de esperar que las ondas sonoras se propaguen con una velocidad que es aproximadamente la misma que la velocidad característica del movimiento molecular, que es, de hecho, lo que observamos. Las moléculas en sí mismas, a pesar de sus velocidades elevadas, no se mueven muy lejos durante un periodo de la vibración del sonido; están confinadas en un espacio más bien pequeño por los efectos del gran número de colisiones. Esto explica por qué existe una demora entre la apertura de una botella de amoniaco en un extremo de un salón y su olor en el otro extremo. Si bien las velocidades moleculares son elevadas, el gran número de colisiones limita el avance de las moléculas de amoniaco. Se difunden por el aire a velocidades que son muchos menores que las velocidades moleculares.

**TABLA 1** ALGUNAS VELOCIDADES MOLECULARES A LA TEMPERATURA AMBIENTE (300 K)

| *Gas* | *Masa molar M*† (g/mol) | $v_{\text{rms}}$ (m/s) | *Energía cinética de traslación por mol* (J/mol) |
|---|---|---|---|
| Hidrógeno | 2.0 | 1920 | 3720 |
| Helio | 4.0 | 1370 | 3750 |
| Vapor de agua | 18.0 | 645 | 3740 |
| Nitrógeno | 28.0 | 517 | 3740 |
| Oxígeno | 32.0 | 483 | 3730 |
| Bióxido de carbono | 44.0 | 412 | 3730 |
| Bióxido de azufre | 64.1 | 342 | 3750 |

† La masa molar, a veces conocida también como el peso molecular, se da aquí en g/mol por conveniencia; su unidad SI es kg/mol.

**Problema muestra 3** Suponiendo que la velocidad del sonido en un gas sea la misma que la velocidad media cuadrática de las moléculas, muestre cómo dependería de la temperatura la velocidad del sonido en un gas ideal.

**Solución** La densidad de un gas es

$$\rho = \frac{nM}{V},$$

donde $M$ es la masa molar (la masa de 1 mol) y $n$ es el número de moles. Al combinar esto con la ley del gas ideal $pV = nRT$ nos da

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}.$$

Obtenemos de la ecuación 15

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \qquad (16)$$

de modo que la velocidad del sonido $v_1$ a una temperatura $T_1$ se relaciona con la velocidad del sonido $v_2$ en el mismo gas a una temperatura $T_2$ por

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

Por ejemplo, si la velocidad del sonido a 273 K es de 331 m/s en el aire, su velocidad en el aire a 300 K es

$$(331 \text{ m/s})\sqrt{\frac{300 \text{ K}}{273 \text{ K}}} = 347 \text{ m/s}.$$

Obsérvese que aquí se emplea la temperatura absoluta (Kelvin). ¿Por qué?

Nuestra hipótesis inicial, de que la velocidad del sonido en un gas es la misma que la velocidad media cuadrática de las moléculas, es sólo crudamente correcta. En realidad, la velocidad del sonido es proporcional a $v_{rms}$. ¿Cambia esto las conclusiones de este problema muestra con respecto a la dependencia de la velocidad del sonido con la temperatura? Véase el problema muestra 6 para una derivación de la velocidad del sonido en un gas.

## 23-4 INTERPRETACIÓN CINÉTICA DE LA TEMPERATURA

Si multiplicamos cada lado de la ecuación 14 por el volumen $V$, obtenemos

$$pV = \tfrac{1}{3}\rho V\overline{v^2},$$

donde $\rho V$ es la masa total del gas, siendo $\rho$ la densidad. Podemos también escribir la masa del gas como $nM$, donde $n$ es el número de moles y $M$ es la masa molar. Al hacer esta sustitución tenemos que

$$pV = \tfrac{1}{3}nM\overline{v^2}. \qquad (17)$$

La energía cinética de traslación total del gas es

$$\tfrac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_N^2) = \tfrac{1}{2}m(N\overline{v^2}),$$

donde $N$ es el número total de moléculas. La masa total del gas puede escribirse como $mN = nM$. El lado derecho de la ecuación 17 es, por lo tanto, dos tercios de la energía cinética total de traslación. Podemos escribir la ecuación 17 como:

$$pV = \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}nM\overline{v^2}).$$

Combinando ésta con la ecuación de estado de un gas ideal ($pV = nRT$), obtenemos

$$\tfrac{1}{2}M\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}RT. \qquad (18)$$

Esto es, la *energía cinética de traslación promedio por mol de un gas ideal es proporcional a la temperatura.* Este resultado relaciona la teoría cinética con la ecuación de estado de un gas ideal. De manera equivalente, podemos considerar a la ecuación 18 como una conexión entre una propiedad macroscópica, la temperatura, y una propiedad microscópica, la energía cinética de una molécula. De cualquier modo, ganamos cierta visión sobre el significado de la temperatura en los gases.

La temperatura de un gas se relaciona con la energía cinética de traslación promedio medida con respecto al centro de masa del gas. La energía cinética asociada con el movimiento del centro de masa del gas no tiene relación con la temperatura del gas. En la sección 23-2 supusimos el movimiento al azar como parte de nuestra definición estadística de un gas ideal y en la sección 23-3 calculamos a $\overline{v^2}$ sobre esta base. Para una distribución de las velocidades moleculares que tengan direcciones al azar, el centro de masa estaría en reposo. Entonces, para calcular $\overline{v^2}$, debemos usar un marco de referencia en el que el centro de masa del gas esté en reposo. En todos los demás marcos las moléculas tienen cada una velocidades más grandes en una cantidad **u** (la velocidad del centro de masa en ese marco) que en el marco del centro de masa; de aquí que los movimientos ya no serán al azar, y obtendremos valores diferentes para $\overline{v^2}$. La temperatura de un gas en un recipiente no aumenta ¡cuando ponemos al recipiente en un auto en movimiento!

Dividamos ahora cada lado de la ecuación 18 por la constante de Avogadro $N_A$, que es el número de moléculas por mol de un gas. Entonces $M/N_A = m$, la masa de una sola molécula, y tenemos

$$\tfrac{1}{2}(M/N_A)\overline{v^2} = \tfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}(R/N_A)T. \qquad (19)$$

Ahora, $\frac{1}{2}m\overline{v^2}$ es la energía cinética de traslación promedio por molécula. La razón $R/N_A$ es, según la ecuación 8, la constante $k$ de Boltzmann, que juega el papel de la constante de gas por molécula. Tenemos entonces

$$\tfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}kT. \qquad (20)$$

La ecuación 20 es el análogo molecular de la ecuación 18, que trata de las cantidades molares. Aquí vemos que la energía cinética de traslación promedio de una molécula está determinada por la temperatura.

En la última columna de la tabla 1 listamos valores calculados de $\frac{1}{2}Mv_{rms}$. Como la ecuación 18 predice para un gas ideal, esta cantidad (la energía cinética de traslación por mol) tiene casi el mismo valor para los gases reales a una temperatura dada (300 K en este caso). Partiendo de la ecuación 20 concluimos que a una temperatura $T$ determinada la razón de las velocidades medias cuadráticas de las moléculas de dos gases diferentes es igual a la cuadrada de la razón inversa de sus masas. Es decir, a partir de

$$T = \frac{2}{3k}\frac{m_1\overline{v_1^2}}{2} = \frac{2}{3k}\frac{m_2\overline{v_2^2}}{2}$$

obtenemos

$$\sqrt{\frac{\overline{v_1^2}}{\overline{v_2^2}}} = \frac{v_{1,rms}}{v_{2,rms}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \qquad (21)$$

Podemos aplicar la ecuación 21 a la difusión de dos gases diferentes en un recipiente con paredes porosas

situado en un espacio al vacío. El gas más ligero, cuyas moléculas se mueven más rápidamente en promedio, escapará más rápidamente que el más pesado. La razón del número de moléculas de los dos gases que pasan a través de las paredes porosas en un intervalo de tiempo corto, la cual se llama el *factor de separación* $\alpha$, es igual a la razón de sus velocidades medias cuadráticas, y por lo tanto, de acuerdo con la ecuación 21, a la raíz cuadrada de la relación inversa de sus masas moleculares o, equivalentemente, de sus masas molares:

$$\alpha = \sqrt{m_2/m_1} = \sqrt{M_2/M_1}. \qquad (22)$$

El proceso de difusión a través de paredes porosas es un método empleado para separar los átomos de un elemento por masa en sus diferentes isótopos.

**Problema muestra 4** El uranio natural consiste primordialmente en dos isótopos, $^{235}$U (0.7% de abundancia) y $^{238}$U (99.3% de abundancia). Únicamente el $^{235}$U es fácilmente fisionable. En una muestra del gas $UF_6$ (hexafluoruro de uranio), se desea aumentar la abundancia del $^{235}$U de 0.7% a 3% forzando al gas $n$ veces a través de una barrera porosa. Halle $n$.

**Solución** La masa molar $M$ del $^{235}UF_6$ es de 0.349 kg/mol y la del $^{238}UF_6$ es de 0.352 kg/mol. Entonces, después de pasar a través de una barrera porosa, el gas se habrá enriquecido en $^{235}$U según el factor de separación $\alpha$, dado por la ecuación 22:

$$\alpha = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{\frac{0.352 \text{ kg/mol}}{0.349 \text{ kg/mol}}} = 1.0043.$$

Cada paso sucesivo a través de una pared porosa aumenta la fracción relativa del $^{235}$U según un factor de $\alpha$. Después de tales pasos $n$, la concentración relativa del $^{235}$U habrá aumentado según $\alpha^n$. Para aumentar la concentración del $^{235}$U desde 0.7%, característica del uranio natural, hasta 3%, un enriquecimiento usado comúnmente en los reactores de potencia, el número $n$ de barreras porosas que deben ser atravesadas se determina a partir de

$$\alpha^n \left(\frac{0.007}{0.993}\right) = \left(\frac{0.03}{0.97}\right).$$

Resolviendo, obtenemos $n = 350$. En la práctica, esto se lleva a cabo por medio de etapas sucesivas, en las que una porción del gas que pasa más fácilmente a través de una barrera (y por lo tanto es enriquecido ligeramente en $^{235}$U) avanza a la siguiente etapa, donde el resto (ahora ligeramente empobrecido de $^{235}$U) es regresado para alimentar la etapa más baja anterior. Para obtener $^{235}$U casi puro, tal como se requiere para las armas nucleares, se requeriría varios miles de etapas.

## 23-5 TRABAJO EFECTUADO SOBRE UN GAS IDEAL

Si elevamos la temperatura del gas en el cilindro de la figura 1, el gas se dilata y eleva el peso contra la gravedad; el gas efectúa un trabajo (positivo) sobre el peso. La fuerza hacia arriba ejercida por el gas debido a su presión $p$ está dada por $pA$, donde $A$ es el área del émbolo. Según la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida *por* el émbolo *sobre* el gas es igual y opuesta a la fuerza ejercida *por* el gas *sobre* el émbolo. Usando la ecuación 7 del capítulo 7, podemos por lo tanto escribir el trabajo $W$ efectuado sobre el gas como:

$$W = \int F\,dx = \int (-pA)dx. \qquad (23)$$

Aquí $dx$ representa el desplazamiento del émbolo, y el signo menos entra porque la fuerza ejercida por el émbolo sobre el gas está en una dirección opuesta al desplazamiento del émbolo. Si *reducimos* la temperatura del gas, éste se contrae en lugar de dilatarse; el trabajo efectuado sobre el gas en este caso es positivo. Suponemos que el proceso descrito por la ecuación 23 se lleva a cabo lentamente, de modo que pueda considerarse que el gas está en equilibrio en todas las etapas intermedias. De otro modo, la presión no estaría claramente definida durante el proceso, y la integral de la ecuación 23 no podría ser evaluada fácilmente.

Podemos escribir la ecuación 23 en una forma más general que viene a ser muy útil. Si el émbolo se mueve una distancia $dx$, entonces el volumen del gas cambia en una cantidad $dV = A\,dx$. Entonces el trabajo efectuado sobre el gas puede escribirse:

$$W = -\int p\,dV. \qquad (24)$$

La integración se lleva a cabo entre el volumen inicial $V_i$ y el volumen final $V_f$.

La ecuación 24 es el resultado más general del trabajo efectuado sobre un gas. No hace referencia al agente externo que efectúa el trabajo; simplemente establece que el trabajo efectuado sobre el gas puede ser calculado a partir de la presión y el volumen del gas. Obsérvese que el signo algebraico del trabajo está contenido implícitamente en la ecuación 24: si el gas se dilata, $dV$ es positivo y $W$ es negativo, siendo $p$ una cantidad escalar que asume valores positivos únicamente. A la inversa, si el gas se contrae, $dV$ es negativo y el trabajo efectuado sobre el gas es positivo.

La ecuación 24 es análoga al resultado general para el trabajo efectuado sobre un sistema por una fuerza variable $F$. Recordará usted de la figura 7 del capítulo 7 que si trazamos a $F$ contra $x$, el trabajo efectuado por $F$ es precisamente el área bajo la curva entre $x_i$ y $x_f$. La figura 6 muestra la situación similar para el trabajo efectuado sobre el gas. Una gráfica en la forma de la figura 6 se llama *diagrama pV*, estando $p$ trazada sobre el eje vertical (como $F$) y $V$ trazada sobre el eje horizontal (como $x$). *La magnitud del trabajo efectuado sobre el gas es igual al área bajo la curva de presión en un diagrama pV.* El signo

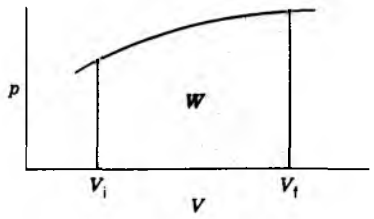



**Figura 6** La magnitud del trabajo $W$ efectuado sobre un gas por una presión que varía arbitrariamente es igual al área bajo la curva de presión en un diagrama $pV$ entre el volumen inicial $V_i$ y el volumen final $V_f$.

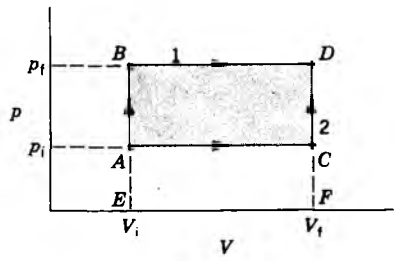



**Figura 7** Se lleva un gas de la presión y volumen en el punto $A$ a la presión y volumen en el punto $D$ a lo largo de dos trayectorias diferentes, $ABD$ y $ACD$. A lo largo de la trayectoria 1 ($ABD$) el trabajo es igual al área del rectángulo $BDFE$, mientras que a lo largo de la trayectoria 2 ($ACD$) el trabajo es igual al área del rectángulo $ACFE$.

de $W$ se determina de acuerdo a si $V_f > V_i$ (en cuyo caso $W$ es negativo, como en la Fig. 6), o si $V_f < V_i$ (en cuyo caso $W$ es positivo). Una vez más, el trabajo efectuado sobre el gas es negativo si el proceso aumenta el volumen del gas y positivo si el proceso reduce el volumen del gas.

La fuerza de la presión es claramente no conservativa, como lo ilustra la figura 7. Supongamos que deseamos llevar a nuestro gas ideal de las condiciones iniciales $V_i$ y $p_i$ (punto $A$) a las condiciones finales $V_f$ y $p_f$ (punto $D$). Existen muchas trayectorias diferentes que podemos seguir entre $A$ y $D$, de las cuales se muestran dos en la figura 7. A lo largo de la trayectoria 1 ($ABD$), primero aumentamos la presión desde $p_i$ hasta $p_f$ a volumen constante. (Lo llevaríamos a cabo girando la perilla de control del depósito térmico, aumentando la temperatura del gas, mientras que añadimos simultáneamente la cantidad precisa de peso adicional sobre el émbolo para evitar que se mueva.) Luego seguimos la trayectoria $BD$ aumentando la temperatura, pero sin añadir ningún peso adicional sobre el émbolo, de modo que la presión permanezca constante en el valor $p_f$ mientras que el volumen aumenta desde $V_i$ hasta $V_f$. El trabajo efectuado durante todo este procedimiento es el área del rectángulo $BDFE$ (el área bajo la línea $BD$).

Podemos hallar $W_1$, el trabajo efectuado sobre el gas a lo largo de la trayectoria 1, al considerar el trabajo efectuado a lo largo de los dos segmentos $AB$ y $BD$:

$$W_1 = W_{AB} + W_{BD}.$$

Debido a que el volumen es constante a lo largo de $AB$, se deduce de la ecuación 24 que $W_{AB} = 0$. A lo largo de $BD$, la presión es constante (en el valor $p_f$) y sale de la integral. El resultado es

$$W_1 = W_{AB} + W_{BD}$$
$$= 0 - \int p\,dV = -p_f \int_{V_i}^{V_f} dV = -p_f(V_f - V_i).$$

Para seguir la trayectoria 2 ($ACD$), primero aumentamos la temperatura mientras mantenemos a la presión constante en $p_i$ (es decir, sin añadir ningún peso adicional al émbolo), de modo que el volumen crece desde $V_i$ hasta $V_f$. Luego aumentamos la presión desde $p_i$ hasta $p_f$ al volumen constante $V_f$ aumentando la temperatura y añadiendo peso al émbolo para evitar que se mueva. El trabajo efectuado en este caso es el área bajo la línea $AC$, o sea el rectángulo $ACFE$. Podemos calcular esto como:

$$W_2 = W_{AC} + W_{CD}$$
$$= -\int p\,dV + 0 = -p_i \int_{V_i}^{V_f} dV = -p_i(V_f - V_i).$$

Claramente $W_1 \neq W_2$, y el trabajo depende de la trayectoria.

Podemos llevar a cabo diversas operaciones sobre el gas y evaluar el trabajo efectuado en cada caso.

## Trabajo efectuado a volumen constante

El trabajo es cero en cualquier proceso en que el volumen permanezca constante (como en los segmentos $AB$ y $CD$ de la figura 7);

$$W = 0 \quad (V \text{ constante}). \tag{25}$$

Deducimos directamente de la ecuación 24 que $W = 0$ si $V$ es constante. Obsérvese que no es suficiente que el proceso comience y termine con el mismo volumen; el volumen debe ser constante durante todo el proceso para que el trabajo sea cero. Por ejemplo, consideremos el proceso $ACDB$ en la figura 7. El volumen comienza y termina en $V_i$, pero el trabajo ciertamente no es cero. El trabajo es cero únicamente en trayectorias verticales tales como la $AB$, que representa un proceso a volumen constante.

## Trabajo efectuado a presión constante

Aquí podemos aplicar fácilmente la ecuación 24, porque la constante $p$ sale de la integral:

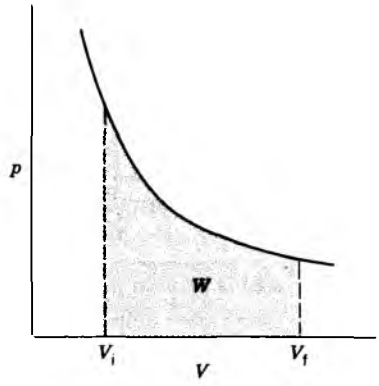



**Figura 8** Se representa un proceso efectuado a temperatura constante (proceso isotérmico) por medio de una hipérbola en un diagrama $pV$. El trabajo efectuado al cambiar el volumen es igual al área bajo la curva entre $V_i$ y $V_f$.

$$W = -p \int dV$$
$$= -p\,(V_f - V_i) \quad (p \text{ constante}). \qquad (26)$$

Los segmentos $AC$ y $BD$ de la figura 7 son ejemplos. Obsérvese que el trabajo efectuado sobre el gas es negativo para ambos segmentos, porque el volumen aumenta en ambos procesos.

## Trabajo efectuado a temperatura constante

Si el gas se dilata o se contrae a temperatura constante, la relación entre $p$ y $V$, dada por la ley del gas ideal, es

$$pV = \text{constante}.$$

En un diagrama $pV$, la gráfica de la ecuación $pV$ = constante es exactamente igual a la gráfica de la ecuación $xy$ = constante en un sistema de coordenadas $xy$: es una hipérbola, como se muestra en la figura 8.

Un proceso efectuado a temperatura constante se llama *proceso isotérmico*, y la curva hiperbólica correspondiente del diagrama $pV$ se llama *isoterma*. Para hallar el trabajo efectuado sobre un gas durante un proceso isotérmico, usamos la ecuación 24, pero debemos hallar una manera de llevar a cabo la integral cuando $p$ varía. Para hacerlo usamos la ecuación de estado del gas ideal para escribir $p = nRT/V$, y entonces

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} p\,dV = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\,dV = -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V},$$

donde la última etapa puede hacerse porque estamos considerando que $T$ es una constante. Efectuando la integración, hallamos

$$W = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (T \text{ constante}). \qquad (27)$$

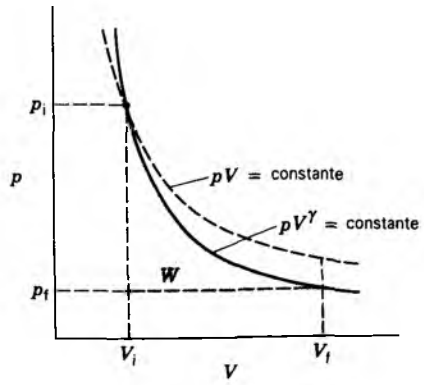



**Figura 9** Se representa un proceso adiabático en un diagrama $pV$ por medio de la curva tipo hipérbola $pV^\gamma$ = constante. El trabajo efectuado al cambiar de volumen es igual al área bajo la curva entre $V_i$ y $V_f$. Ya que $\gamma > 1$, la curva adiabática tiene una pendiente negativa más empinada que la curva isotérmica $pV$ = constante.

Obsérvese que éste es también negativo si $V_f > V_i$ ($\ln x$ es positivo para $x > 1$) y positivo si $V_f < V_i$.

## Trabajo efectuado en aislamiento térmico

Alejemos al cilindro de la figura 1 del depósito térmico y pongámoslo sobre una placa de material aislante. El gas estará entonces en completo aislamiento térmico con respecto a su entorno; si efectuamos un trabajo sobre él, su temperatura cambiará, en contraste con su comportamiento cuando estaba en contacto con el depósito térmico. Un proceso llevado a cabo en aislamiento térmico se llama *proceso adiabático*.

Si permitimos que el gas se dilate sin que haya otras restricciones, la trayectoria que seguirá está representada por la curva tipo hipérbola

$$pV^\gamma = \text{constante}, \qquad (28)$$

como se muestra en la figura 9. El parámetro $\gamma$, llamado la *razón de calores específicos*, debe determinarse empíricamente para un gas dado. Sus valores están típicamente en el intervalo de 1.1 a 1.8. (En la sección 25-4 estudiaremos los calores específicos de los gases, y en la sección 25-6 derivaremos la ecuación 28.) Debido a que $\gamma$ es más grande que 1, la curva $pV^\gamma$ = constante está más empinada que la curva $pV$ = constante, por lo que el trabajo efectuado en este proceso será de magnitud un poco más pequeña que el trabajo efectuado al dilatarse desde $V_i$ hasta $V_f$ a $T$ constante, como puede verse en la figura 9.

La constante de la ecuación 28 se determina a partir de la presión y el volumen en un punto determinado de la curva. Escojamos el punto inicial $p_i$, $V_i$ en la figura 9, y entonces

$$pV^\gamma = p_i V_i^\gamma$$

o bien

$$p = \frac{p_i V_i^\gamma}{V^\gamma}. \tag{29}$$

Ahora podemos hallar el trabajo adiabático:

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} p\,dV = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{p_i V_i^\gamma}{V^\gamma}\,dV = -p_i V_i^\gamma \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V^\gamma}$$
$$= -\frac{p_i V_i^\gamma}{\gamma - 1}(V_i^{1-\gamma} - V_f^{1-\gamma}).$$

Introduciendo, en primer lugar, un factor de $V_i^{\gamma-1}$ y segundo usando $p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma$, podemos escribir el trabajo adiabático como:

$$W = \frac{p_i V_i}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma - 1}(p_f V_f - p_i V_i) \quad \text{(adiabático)}. \tag{30}$$

Si el gas se expande, entonces $V_i/V_f < 1$, y puesto que un número menor de 1 elevado a cualquier potencia positiva permanece menor que 1, el trabajo es otra vez negativo.

---

**Problema muestra 5** Una muestra de gas que consta de 0.11 mol se comprime de un volumen de 4.0 m³ a 1.0 m³ mientras su presión aumenta de 10 a 40 Pa. Compare el trabajo efectuado a lo largo de las tres trayectorias diferentes que se muestran en la figura 10.

**Solución** La trayectoria 1 consta de dos procesos, uno a presión constante seguido por otro a volumen constante. El trabajo efectuado a presión constante se halla de la ecuación 26,

$$W = -p(V_f - V_i) = -(10\text{ Pa})(1.0\text{ m}^3 - 4.0\text{ m}^3) = 30\text{ J}.$$

El trabajo efectuado a volumen constante es cero (véase la Ec. 25), así que el trabajo total para la trayectoria 1 es

$$W_1 = 30\text{ J} + 0 = 30\text{ J}.$$

La trayectoria 2 representa un proceso isotérmico, a lo largo del cual $T$ = constante. Entonces $p_i V_i = p_f V_f = nRT$. El trabajo efectuado durante el proceso isotérmico puede ser hallado usando la ecuación 27, sustituyendo a $nRT$ por $p_i V_i$, lo cual da

$$W_2 = -p_i V_i \ln\frac{V_f}{V_i} = -(10\text{ Pa})(4.0\text{ m}^3)\ln\frac{1.0\text{ m}^3}{4.0\text{ m}^3} = 55\text{ J}.$$

La trayectoria 3 consta de un proceso a volumen constante, para el cual el trabajo es nuevamente cero, seguido por un proceso a presión constante, y así el trabajo total para la trayectoria 3 es

$$W_3 = 0 - p_f(V_f - V_i) = -(40\text{ Pa})(1.0\text{ m}^3 - 4.0\text{ m}^3) = 120\text{ J}.$$

Obsérvese que el trabajo es positivo en los tres procesos, y que las magnitudes aumentan de acuerdo con el área bajo cada trayectoria en el diagrama $pV$.

**Problema muestra 6** (*a*) Halle el módulo volumétrico $B$ para un proceso adiabático para un gas ideal. (*b*) Tome el módulo volumétrico adiabático para hallar la velocidad del sonido en el gas en función de la temperatura. Halle el valor para el aire a temperatura ambiente (20°C).

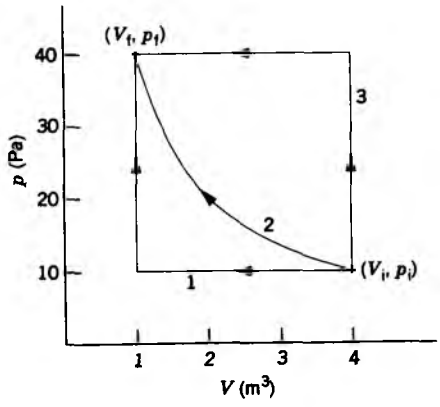



**Figura 10** Problema muestra 5. Se lleva a un gas desde el punto inicial i hasta el punto final f a lo largo de tres trayectorias diferentes. La trayectoria 2 es una isoterma.

**Solución** (*a*) En el límite diferencial, el módulo volumétrico (véase la Ec. 5 del capítulo 17) puede escribirse como:

$$B = -V\frac{dp}{dV}.$$

En un proceso adiabático, la ecuación 28 ($pV^\gamma$ = constante) da, considerando la derivada con respecto a $V$,

$$\frac{d(pV^\gamma)}{dV} = \left(\frac{dp}{dV}\right)V^\gamma + p(\gamma V^{\gamma-1}) = 0,$$

o bien

$$V\frac{dp}{dV} = -\gamma p.$$

Entonces

$$B = \gamma p$$

en un proceso adiabático para un gas ideal.

(*b*) En la sección 20-1, determinamos que la velocidad del sonido en un gas puede ser escrita

$$v = \sqrt{B/\rho},$$

donde $B$ es el módulo volumétrico y $\rho$ es la densidad del gas. Usando el resultado de la parte (*a*) y la ecuación de estado del gas ideal (Ec. 7), obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma(nRT/V)}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma nRT}{\rho V}}.$$

La cantidad $\rho V$ es la masa total del gas, la cual también puede escribirse $nM$, donde $n$ es el número de moles y $M$ es la masa molar. Haciendo esta sustitución, obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}.$$

Así, la velocidad del sonido en un gas depende de la raíz cuadrada de la temperatura, como lo inferimos en el problema muestra 3.

En el aire, la masa molar promedio es de alrededor de 0.0290 kg/mol, y el parámetro $\gamma$ es de alrededor de 1.4. Entonces para $T = 20°C = 293$ K,

$$v = \sqrt{\frac{(1.4)(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(293 \text{ K})}{0.0290 \text{ kg/mol}}} = 343 \text{ m/s}.$$

## 23-6 LA ENERGÍA INTERNA DE UN GAS IDEAL

Nuestro modelo del gas ideal se basa en que las moléculas son consideradas como partículas puntuales. La temperatura, como lo hemos visto, depende de la energía cinética *de traslación* de las moléculas. Para partículas puntuales, no existe otra forma de considerar la energía interna $E_{int}$. No existe una energía potencial molecular, como tampoco ninguna energía interna asociada con la rotación o con la vibración de la molécula. *En un gas ideal, la energía interna puede ser energía cinética de traslación únicamente.* Si tenemos $n$ moles de un gas ideal a la temperatura $T$, entonces

$$E_{int} = n(\tfrac{1}{2}M\overline{v^2}) = \tfrac{3}{2}nRT \qquad (31)$$

usando la ecuación 18. *La energía interna de un gas ideal depende únicamente de la temperatura.* No depende, por ejemplo, de la presión o del volumen del gas.

Una manera de cambiar la energía interna de un gas ideal es efectuar un trabajo sobre él (o permitir que el gas efectúe un trabajo sobre su entorno). Supongamos que el gas en el cilindro mostrado en la figura 1 está aislado del depósito térmico. Hagamos que el entorno efectúe un trabajo $W$ sobre el gas. La ley generalizada de la conservación de la energía (véase la Ec. 28 del capítulo 8) da entonces

$$\Delta E_{int} = W \qquad (32)$$

porque el gas puede almacenar energía sólo por la energía interna, y el trabajo es la única contribución al cambio en la energía interna del gas.

Supongamos que el entorno efectúe un trabajo sobre el gas, de modo que $W$ sea positivo en la ecuación 32. Se deduce entonces que $\Delta E_{int}$ debe ser positivo, y usando la ecuación 31 podemos escribir

$$\Delta E_{int} = \tfrac{3}{2}nR\,\Delta T, \qquad (33)$$

así que el cambio de temperatura es también positivo.

Si el émbolo se mueve hacia arriba, el entorno efectúa un trabajo negativo sobre el gas, y según la ecuación 32 el cambio en la energía interna es negativo. De acuerdo con la ecuación 33 el cambio en la temperatura es también negativo.

Modifiquemos ahora una de las hipótesis básicas de nuestro modelo del gas ideal. En lugar de considerar que una molécula esté representada como una partícula puntual, considerémosla como dos partículas puntuales separadas por una distancia dada. Este modelo ofrece una descripción mejor de los *gases diatómicos*, los que tienen dos átomos en cada molécula y que incluyen a gases comunes tales como $O_2$, $N_2$, o CO (monóxido de carbono). Tal molécula puede adquirir energía cinética girando con respecto a su centro de masa, y por lo tanto es necesario considerar en la energía interna las contribuciones de energía cinética rotatoria así como de energía cinética de traslación.

La energía cinética rotatoria de una molécula diatómica, ilustrada en la figura 11, puede ser escrita

$$K_{rot} = \tfrac{1}{2}I_{x'}\omega_{x'}^2 + \tfrac{1}{2}I_{y'}\omega_{y'}^2$$

donde $I$ es la inercia rotatoria de la molécula para rotaciones con respecto a un eje en particular. El sistema de coordenadas $x'y'z'$ está fijo en el centro de masa de la molécula. En las masas puntuales, no existe energía cinética asociada con la rotación con respecto al eje $z'$, porque $I_{z'} = 0$. La energía cinética total de la molécula es la suma de las partes rotatoria y de traslación:

$$K = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}mv_y^2 + \tfrac{1}{2}mv_z^2 + \tfrac{1}{2}I_{x'}\omega_{x'}^2 + \tfrac{1}{2}I_{y'}\omega_{y'}^2. \qquad (34)$$

Debido a que la energía cinética es el único tipo de energía que puede tener la molécula, la ecuación 34 representa también la contribución de una molécula a la energía interna del gas. Para hallar la energía interna total del gas, debemos hallar la suma de expresiones tales como la ecuación 34 para todas las $N$ moléculas. Una manera más sencilla es evaluar la energía promedio por molécula y multiplicarla por el número de moléculas, $N$.

Supongamos que efectuamos un trabajo $W$ sobre el gas, aumentando su energía interna. ¿Cuánto de este aumento aparecería como energía cinética de traslación y cuánto como energía cinética rotatoria? Esta determinación es muy importante para entender las propiedades macroscópicas del gas, porque *únicamente la energía cinética de traslación promedio de un gas contribuye a su temperatura.* Esto es, dos gases con la misma energía cinética de traslación promedio tienen la misma temperatura, aun cuando uno de ellos tenga una energía rotatoria más grande y, por lo tanto, una energía interna más grande.

Para determinar las contribuciones relativas de la energía cinética de rotación y de traslación (y posiblemente otras formas también) a la energía interna, es necesario considerar el valor promedio de cada término diferente en la expresión de la energía interna de un gas, tal como los cinco términos de la ecuación 34, la cual se basa en la hipótesis de una molécula diatómica rígida. Para otros gases, podríamos tener que incluir un tercer término rotatorio, y para moléculas no rígidas es necesario incluir términos en la energía correspondientes al movimiento vibratorio (véase la sección 15-10). A partir de la mecánica estadística clásica, la cual estudiaremos en el capítu-

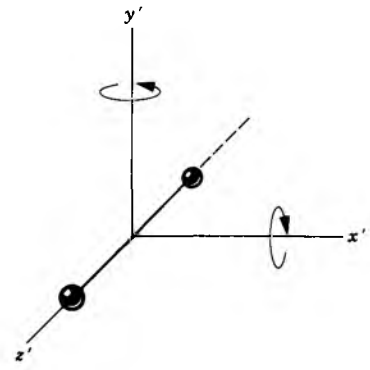



**Figura 11** Se muestra una molécula diatómica, que consta de dos átomos considerados como partículas puntuales, con su eje a lo largo del eje $z'$ de un sistema de coordenadas. En esta orientación, la inercia rotatoria para rotaciones con respecto al eje $z'$ es cero, y entonces no existe un término de la energía cinética correspondiente a tales rotaciones. Las inercias rotatorias para rotaciones con respecto a los ejes $x'$ y $y'$ no son cero, y entonces existen términos de energía cinética para tales rotaciones.

lo 24, podemos demostrar que, *cuando el número de partículas es grande y se aplica la mecánica newtoniana, cada uno de estos términos independientes tiene la misma energía promedio de* $\frac{1}{2}kT$. En otras palabras, la energía disponible depende únicamente de la temperatura y está distribuida en partes iguales en cada una de las maneras independientes en que una molécula puede almacenar energía. Este teorema, deducido por Maxwell, se llama *equipartición de la energía.*

Cada forma independiente que pueda tomar la energía de un sistema como, por ejemplo, los cinco términos de la ecuación 34, se llama un *grado de libertad.* Un gas monoatómico tiene únicamente *tres* grados de libertad por molécula, puesto que únicamente tiene energía cinética de traslación ($E_{\text{int}} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$). Un gas diatómico tiene *cinco* grados de libertad por molécula, si la molécula es rígida.

Usemos el teorema de la equipartición de la energía para escribir una expresión para la energía interna de un gas ideal monoatómico. La energía interna promedio por molécula es $\frac{3}{2}kT$ (3 grados de libertad por $\frac{1}{2}kT$ por grado de libertad), y la energía interna total de las $N$ moléculas es

$$E_{\text{int}} = N(\tfrac{3}{2}kT) = \tfrac{3}{2}nRT \quad \text{(gas monoatómico)}, \quad (35)$$

donde hemos usado las ecuaciones 6 y 8. La ecuación 35 es idéntica a la ecuación 31.

Para un gas diatómico, con 5 grados de libertad, el resultado es

$$E_{\text{int}} = N(\tfrac{5}{2}kT) = \tfrac{5}{2}nRT \quad \text{(gas diatómico)}. \quad (36)$$

Un gas poliatómico (más de dos átomos por molécula) tiene generalmente tres ejes de rotación posibles (a no ser que tres átomos estén en una línea recta, como en el $CO_2$). La energía cinética interna por molécula podría entonces tener un sexto término, $\frac{1}{2}I_z\omega_z^2$. Para 6 grados de libertad, la energía interna es

$$E_{\text{int}} = N(\tfrac{6}{2}kT) = 3nRT \quad \text{(gas poliatómico)}. \quad (37)$$

Hasta el momento hemos considerado únicamente las contribuciones de la energía cinética de rotación o de traslación a la energía interna de un gas. Pueden contribuir también otras clases de energía. Por ejemplo, una molécula diatómica que pueda vibrar libremente (imaginemos que los dos átomos estén conectados por un resorte) tiene dos contribuciones adicionales a la energía: la energía potencial del resorte y la energía cinética vibratoria de los átomos. Entonces, una molécula diatómica con libertad para trasladarse, girar, y vibrar tendría 7 (= 3 + 2 + 2) grados de libertad. Para moléculas poliatómicas, el número de términos vibratorios en la energía puede ser mayor que dos. Los modos vibratorios de la energía interna son usualmente aparentes únicamente a alta temperatura, donde las colisiones más violentas pueden hacer que la molécula vibre.

En la sección 25-4, demostramos que los resultados derivados en esta sección dan una descripción muy buena de la relación entre la energía interna y la temperatura de gases reales. Vemos también que, cuando la temperatura de un gas desciende, los movimientos vibratorio y rotatorio pueden ser "congelados", de modo que a temperaturas suficientemente bajas únicamente están presentes los 3 grados de libertad de traslación. La deficiencia más seria de este modelo de un gas ideal es su incapacidad para explicar los efectos cuánticos inherentes en la estructura atómica y molecular. Los experimentos con colisiones en los gases proporcionaron pronta evidencia de que la energía interna de un átomo está cuantizada. Podemos decir entonces que el germen de la teoría cuántica se encuentra en la teoría cinética de los gases.*

**Problema muestra 7** Consideremos una vez más la situación del problema muestra 5, donde el gas comienza en el punto inicial con un volumen $V_i = 4.0\ \text{m}^3$ y una presión $p_i = 10\ \text{Pa}$. Quitemos al cilindro del depósito térmico, y comprimamos al gas adiabáticamente hasta que su volumen sea $V_f = 1.0\ \text{m}^3$. Halle el cambio en la energía interna del gas, suponiendo que sea helio (un gas monoatómico con $\gamma = 1.66$).

**Solución** Para hallar el cambio en la energía interna, podemos usar la ecuación 33 si conocemos el cambio en la temperatura. Podemos hallar la temperatura inicial usando la ley del gas ideal (puesto que $p_i$ y $V_i$ son conocidas), y podemos hallar la temperatura final si conocemos la presión y el volumen en el punto

* Véase "On Teaching Quantum Phenomena", por Sir N. F. Mott, *Contemporary Physics*, agosto de 1964, pág. 401.

final. La presión final puede ser hallada usando la relación adiabática de la ecuación 29:

$$p_f = \frac{p_i V_i^\gamma}{V_f^\gamma} = \frac{(10\text{ Pa})(4.0\text{ m}^3)^{1.66}}{(1.0\text{ m}^3)^{1.66}} = 100\text{ Pa}.$$

En el diagrama $pV$ de la figura 10, el punto final del proceso adiabático se encuentra verticalmente muy por encima del punto final del proceso isotérmico (40 Pa). Esto es consistente con el hecho de que las curvas adiabáticas son más empinadas que las curvas isotérmicas, como se muestra en la figura 9.

Podemos ahora proceder a hallar las temperaturas inicial y final y luego el cambio en la energía interna:

$$T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = \frac{(10\text{ Pa})(4.0\text{ m}^3)}{(0.11\text{ mol})(8.31\text{ J/mol}\cdot\text{K})} = 44\text{ K}.$$

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{(100\text{ Pa})(1.0\text{ m}^3)}{(0.11\text{ mol})(8.31\text{ J/mol}\cdot\text{K})} = 109\text{ K}.$$

$$\Delta E_{int} = \tfrac{3}{2} nR\Delta T$$
$$= \tfrac{3}{2}(0.11\text{ mol})(8.31\text{ J/mol}\cdot\text{K})(109\text{ K} - 44\text{ K}) = 89\text{ J}.$$

El cambio en la energía interna es positivo, consistente con la ecuación 32 para este proceso adiabático, porque el trabajo efectuado al comprimir el gas es también positivo.

## 23-7 FUERZAS INTERMOLECULARES *(Opcional)*

Las fuerzas entre las moléculas son de origen electromagnético. Todas las moléculas contienen cargas eléctricas en movimiento. Estas moléculas son eléctricamente neutras en el sentido de que la carga negativa de los electrones es igual y opuesta a la carga positiva de los núcleos. Esto no significa, sin embargo, que las moléculas no interactúen eléctricamente. Por ejemplo, cuando dos moléculas se aproximan entre sí, las cargas de cada una se alteran y se desvían ligeramente de sus posiciones usuales de manera tal que la distancia promedio entre cargas opuestas en las dos moléculas es un poco más pequeña que aquélla entre cargas iguales. De aquí que resulte una fuerza intermolecular de atracción. Este reordenamiento interno tiene lugar únicamente cuando las moléculas están relativamente cercanas entre sí, de manera que estas fuerzas actúan sólo a distancias cortas; son fuerzas de corto alcance. Si las moléculas se acercan mucho entre sí, de modo que sus cargas exteriores comiencen a traslaparse, la fuerza intermolecular se convierte en repulsiva. Las moléculas se repelen entre sí porque no hay modo de que una molécula se reordene a sí misma internamente para impedir la repulsión de los electrones externos adyacentes. Es esta repulsión al contacto la responsable de las colisiones moleculares en los gases imitando a las colisiones de las bolas de billar. Si no fuese por esta repulsión, las moléculas se atravesarían unas a otras en lugar de rebotar en la colisión.

Supongamos que las moléculas son casi simétricamente esféricas. Entonces podemos describir las fuerzas intermoleculares gráficamente trazando la energía potencial mutua de dos moléculas, $U$, en función de la distancia $r$ entre sus centros. La fuerza $F$ que actúa sobre cada molécula se relaciona con la energía potencial $U$ por $F = -dU/dr$. En la figura 12*a* trazamos una $U(r)$ típica. Aquí podemos pensar que una molécula está fija en $O$. Entonces, la otra molécula es repelida de $O$ cuando la pendiente de $U$ es negativa y es atraída hacia $O$ cuando la pendiente es positiva. En $r_0$ ninguna fuerza actúa entre las moléculas; la pendiente es cero allí. En la figura 12*b* trazamos la fuerza mutua $F(r)$ correspondiente a esta función de la energía potencial. La línea $E$ de la figura 12*a* representa la energía mecánica de las moléculas al chocar. La intersección de $U(r)$ con esta línea es un "punto de retorno" del movimiento (véase la sección 8-4). La separación de los centros de las dos moléculas en el punto de retorno es la distancia de mayor acercamiento. La distancia de separación para la cual la energía potencial mutua es cero puede ser considerada como la distancia aproximada de mayor acercamiento en una colisión de baja energía y por lo tanto, también como el diámetro de la molécula. Para moléculas sencillas el diámetro es de alrededor de $2.5 \times 10^{-10}$ m. Para moléculas sencillas, la distancia $r_0$ a la cual el potencial es mínimo (el punto de equilibrio) es de alrededor de $3.5 \times 10^{-10}$ m y la fuerza y la energía potencial tienden a cero al aumentar $r$ hasta unos $10^{-9}$ m, o alrededor de 4 diámetros. La fuerza molecular tiene entonces un alcance muy corto. Por supuesto, moléculas diferentes tienen tamaños diferentes y diferentes ordenamientos internos de las cargas, de modo que las fuerzas intermoleculares varían de una molécula a otra. Sin embargo, siempre muestran el comportamiento cualitativo indicado en la figura 12.

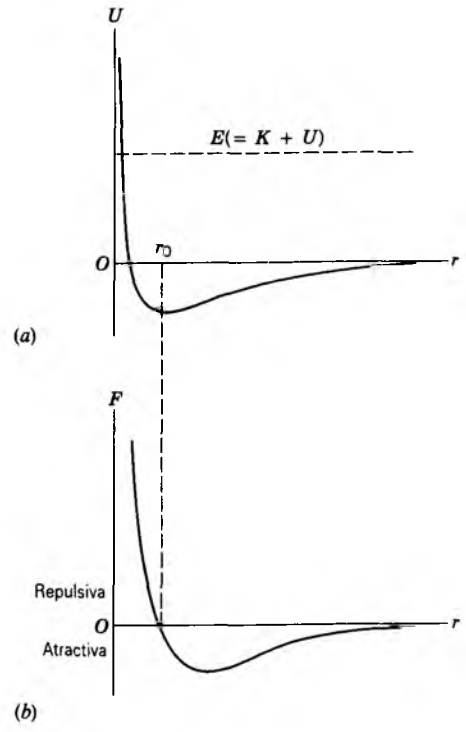



**Figura 12** (*a*) La energía potencial mutua $U$ de dos moléculas en función de su distancia de separación $r$. La energía mecánica $E$ está indicada por la línea horizontal. (*b*) La fuerza radial entre las moléculas, dada por $-dU/dr$, correspondiente a esta energía potencial. La energía potencial es mínima en la separación de equilibrio $r_0$. en cuyo punto la fuerza es cero.

En un sólido, las moléculas vibran respecto a la posición de equilibrio $r_0$. Su energía total $E$ es negativa, esto es, está abajo del eje horizontal en la figura 12*a*. Las moléculas no tienen la energía suficiente para escapar de su valle de potencial (esto es, de su fuerza de enlace). En un sólido los centros de vibración $O$ están más o menos fijos. En un líquido las moléculas tienen una energía vibratoria mayor con respecto a los centros que son

libres de moverse pero que permanecen aproximadamente a la misma distancia entre sí. Las moléculas tienen su energía cinética más grande en el estado gaseoso. En un gas, la distancia promedio entre las moléculas es considerablemente más grande que el alcance efectivo de las fuerzas intermoleculares, y las moléculas se mueven en línea recta entre colisiones. Maxwell explica la relación entre el modelo de la teoría cinética de un gas y las fuerzas intermoleculares como sigue: "En lugar de decir que las partículas son duras, esféricas, y elásticas, podemos, si nos place, decir que las partículas son centros de fuerza, cuya acción es insensible excepto a una cierta distancia pequeña, cuando súbitamente aparece como una fuerza repulsiva de enorme intensidad. Es evidente que cualquiera de las concepciones conduciría a los mismos resultados."

Es interesante comparar las fuerzas intermoleculares medidas con la fuerza gravitatoria de atracción entre moléculas. Si elegimos una distancia de separación de $4 \times 10^{-10}$ m, por ejemplo, la fuerza entre dos átomos de helio es de unos $6 \times 10^{-13}$ N. La fuerza gravitatoria para esa separación es de unos $7 \times 10^{-42}$ N, más pequeña que la fuerza intermolecular ¡por un factor de $10^{29}$! Éste es un resultado típico y demuestra que la gravitación es despreciable en el caso de las fuerzas intermoleculares.

Si bien las fuerzas intermoleculares parecen ser pequeñas según normas ordinarias, debemos recordar que la masa de una molécula es tan pequeña (alrededor de $10^{-26}$ kg) que estas fuerzas pueden impartir aceleraciones instantáneas del orden de $10^{15}$ m/s$^2$ ($10^{14}$ $g$). Estas aceleraciones pueden durar únicamente un tiempo muy pequeño, por supuesto, porque una molécula puede moverse muy rápidamente fuera del alcance de la influencia de la otra. ■

## 23-8 LA ECUACIÓN DE ESTADO DE VAN DER WAALS *(Opcional)*

La teoría cinética describe microscópicamente el comportamiento de un gas ideal, aunque ciertas hipótesis de nuestro modelo del gas ideal no son válidas cuando se trata de gases reales. Para corregir estas deficiencias se han sugerido muchas modificaciones a la ecuación de estado del gas ideal. En la sección anterior, demostramos que una manera realista de considerar a la fuerza intermolecular nos conduce a concluir que las moléculas tienen un diámetro pequeño pero ciertamente no cero (que puede contradecir la hipótesis 4 del modelo del gas ideal), y que el alcance de la fuerza puede ir más allá del "diámetro de colisión" (lo cual contradice la hipótesis 5). En esta sección desarrollamos una ecuación de estado modificada que tiene en cuenta estos factores.

Para considerar el efecto del tamaño finito de las moléculas, consideremos cada molécula como una esfera sólida de diámetro $d$. No se permite que dos moléculas se acerquen entre sí a una distancia entre sus centros menor que $d$ (Fig. 13). El "volumen libre" disponible para una molécula disminuye al volumen de un hemisferio de *radio d* centrado en la otra molécula. Sea $b$ la disminución en el volumen disponible debido a las moléculas en 1 mol de un gas. El volumen total disponible para todo el conjunto de moléculas en $n$ moles es entonces el volumen $V$ del recipiente menos una cantidad $nb$ que representa al volumen ocupado por las moléculas. Si tomamos el cálculo de la sección anterior, $d = 2.5 \times 10^{-10}$ m, y entonces calculamos a $b$ como

$$b = \tfrac{1}{2}N_A(\tfrac{4}{3}\pi d^3) = 2 \times 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{mol} = 2 \times 10^{-3}\ \text{L/mol}.$$

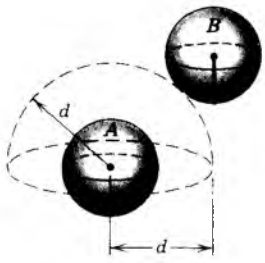



**Figura 13** Si se considera que las moléculas de un gas se comportan como esferas sólidas, entonces el centro de la molécula $B$ no puede moverse dentro del hemisferio de radio $d$ centrado en la molécula $A$. Aquí $d$ es el diámetro de la molécula. El volumen libre disponible para la molécula $B$ se reduce en el volumen de tal hemisferio centrado en cada molécula del gas.

(Interviene el factor de $\frac{1}{2}$ porque, cuando dos moléculas se aproximan entre sí, el volumen dentro del que interactúan no es una esfera completa sino el hemisferio que mira hacia la dirección de acercamiento.) En condiciones normales, 1 mol de un gas tiene un volumen de 22.4 L, y entonces la corrección $b$ es normalmente pequeña (0.01 - 0.1%), pero puede llegar a ser mucho más significativa si estudiamos un gas a alta densidad.

El volumen "libre" disponible para el gas es entonces $V - nb$, y podemos modificar la ecuación de estado de acuerdo con ello:

$$p(V - nb) = nRT. \tag{38}$$

Despejando a $p$, obtenemos

$$p = \frac{nRT}{V - nb}. \tag{39}$$

La ecuación 39 indica que la presión de un gas real aumenta en relación a la de un gas ideal en las mismas condiciones. En efecto, el volumen reducido disponible para las moléculas significa que efectúan más colisiones con las paredes y por lo tanto aumentan la presión.

Para tomar en cuenta el efecto del alcance de la fuerza entre moléculas, consideremos una región del gas dentro de una distancia $d$ desde una de las paredes del recipiente (Fig. 14). Elegimos $d$ de manera que corresponda al alcance de la fuerza entre moléculas, y centramos nuestra atención en determinada molécula $C$ que esté a punto de chocar con la pared. Cuando choca con la pared, puede emplearse el teorema impulso-ímpetu, $\Delta\mathbf{p} = \int \mathbf{F}\, dt$, para relacionar el cambio de ímpetu de la molécula con el impulso de la fuerza neta $\mathbf{F}$ que actúa sobre ella durante la colisión. En el modelo del gas ideal, las moléculas ejercen fuerzas una sobre otra únicamente durante las colisiones; entonces, la única fuerza que actúa sobre una molécula al chocar con la pared es ejercida por la pared. Esta fuerza, según la tercera ley de Newton, es igual a la fuerza ejercida sobre la pared por la molécula y entonces es responsable de la presión que el gas ejerce sobre las paredes del recipiente, como ya vimos en la sección 23-3.

Supongamos ahora que la molécula $C$ experimente también fuerzas a causa de la atracción de otras moléculas cercanas (aquellas que se encuentran dentro de un hemisferio de radio $d$, el alcance de la fuerza). Para una molécula cerca de la pared, la suma de todas las fuerzas intermoleculares da una resultante que actúa alejándose de la pared. (Las moléculas cerca de la super-

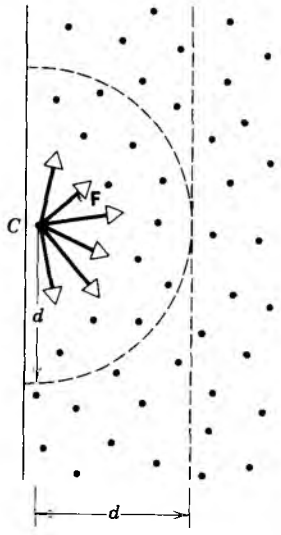



**Figura 14** Una molécula de gas *C* (considerada aquí como un punto) cerca de la pared del recipiente experimenta una fuerza neta que se aleja de la pared debido a la atracción de las moléculas circundantes dentro del alcance *d* de la fuerza entre las moléculas. La presión neta sobre las paredes del recipiente es reducida por todas estas moléculas dentro de una distancia *d* medida desde las paredes.

ficie de un líquido experimentan una fuerza similar hacia adentro, la cual es responsable de la tensión superficial; véase la sección 17-6.) Entonces, durante la colisión la componente de la fuerza que actúa alejándose de la pared tiene dos contribuciones: una proveniente de la pared y la otra de las moléculas circundantes. Para un cambio dado en el ímpetu debido a una colisión con la pared, la fuerza ejercida por la pared durante la colisión es por lo tanto más pequeña, la fuerza de reacción ejercida por la molécula es más pequeña, y la presión ejercida por el gas es, de igual manera, más pequeña.

Esta reducción de la presión debida a la colisión de la molécula *C* con la pared, es proporcional al número de moléculas en el hemisferio de radio *d* que rodea a la molécula *C* y por lo tanto al número de moléculas por unidad de volumen del gas, *N/V*. El efecto neto debido a *todas* las moléculas iguales a *C* en la capa superficial de espesor *d* es proporcional al número de moléculas en esa capa, el cual es también proporcional al número de moléculas por unidad de volumen del gas. La reducción total en presión resultante de la fuerza entre las moléculas es entonces proporcional a $(N/V)^2$.

Esto es, si triplicamos el número de moléculas pero mantenemos constante el volumen del recipiente, nuestro hemisferio imaginario tendrá tres veces tantas moléculas y de aquí que la molécula *C* sufrirá tres veces la fuerza que la aleja de la pared. En todo el gas habrá tres veces el número de moléculas, cada una de las cuales sufrirá el mismo efecto. El efecto total aumenta por lo tanto nueve veces.

El efecto neto de la fuerza intermolecular introduce una corrección a la presión, proporcional a $(N/V)^2$. En lugar de escribir esta corrección en términos del número de moléculas *N*, la escribimos en términos del número de moles *n*, de modo que la presión corregida resulta ser

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a\left(\frac{n}{V}\right)^2, \tag{40}$$

donde *a* es una constante de proporcionalidad. La ecuación de estado modificada puede expresarse como:

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT. \tag{41}$$

Esta expresión, deducida por vez primera por J. D. van der Waals (1837-1923) se llama *ecuación de estado de van der Waals*. Obsérvese que la ecuación 41 se reduce a la ecuación de estado del gas ideal (Ec. 7) cuando el gas ocupa un volumen grande (esto es, las moléculas están muy separadas entre sí y la densidad del gas es pequeña).

Los valores de las constantes *a* y *b* deben determinarse experimentalmente, lo cual hace empírica a la ecuación en este respecto. Al igual que la ecuación de estado del gas ideal, se basa también en un modelo con hipótesis de gran simplificación. No existe ninguna fórmula simple que pueda aplicarse a todos los gases bajo todas las condiciones, y únicamente a través de la experimentación podemos saber si una ecuación es superior a otra en su descripción de la realidad en determinado conjunto de condiciones.

La figura 15 compara las isotermas de un gas ideal con las calculadas para el $CO_2$ con la ecuación de estado de van der Waals. Obsérvese que la desviación del comportamiento ideal se presenta principalmente a presión alta y temperatura baja. Para el $CO_2$ a temperaturas por debajo de 304 K, las isotermas comienzan a curvarse hacia abajo, indicando que cuando disminuimos el volumen, la presión disminuye igualmente. Puesto que este comportamiento es contrario a lo que se esperaba para un *gas*, ello nos sugiere que parte del $CO_2$ se está condensando en un *líquido*, dejando menos de él en el estado gaseoso. El modelo de van der Waals sugiere entonces la existencia de mezclas de fases diferentes, lo cual no puede lograr el modelo del gas ideal. Si fuésemos a comprimir una muestra de $CO_2$, hallaríamos que la isoterma $T = 264$ K real no se inclinaría hacia abajo como lo predice la ecuación de van der Waals, sino que seguiría el segmento horizontal *AB* en la figura 15, conforme el gas se condensa en un líquido a presión constante. El modelo de van der Waals proporciona una mejora sobre el modelo del gas ideal, pero ningún modelo sencillo sirve para explicar el comportamiento del gas bajo todas las circunstancias posibles.

Hallamos también que los otros resultados para el gas ideal son sólo aproximadamente correctos al aplicarlos a los gases reales. Por ejemplo, la energía interna de un gas real depende del volumen así como también de la temperatura. Si existen fuerzas de atracción entre las moléculas, entonces la energía potencial interna aumenta al aumentar la distancia promedio entre las moléculas. Por lo tanto, esperamos que la energía interna de un gas aumente ligeramente con el volumen, y esta expectativa es consistente con los experimentos en la mayoría de los gases. Si el estado del gas es tal que las fuerzas repulsivas son más importantes que las fuerzas atractivas, entonces al aumentar la distancia entre las moléculas disminuye la energía potencial. Para ciertos gases (por ejemplo, el hidrógeno y el helio a temperaturas ordinarias) se observa que la energía interna disminuye cuando el volumen aumenta. En cualquier caso, la energía interna no es simplemente una función de la temperatura sino que depende también del volumen.

**Problema muestra 8** La isoterma graficada en la figura 15*b* para el $CO_2$ a la temperatura $T = 304$ K se llama isoterma *crítica*.

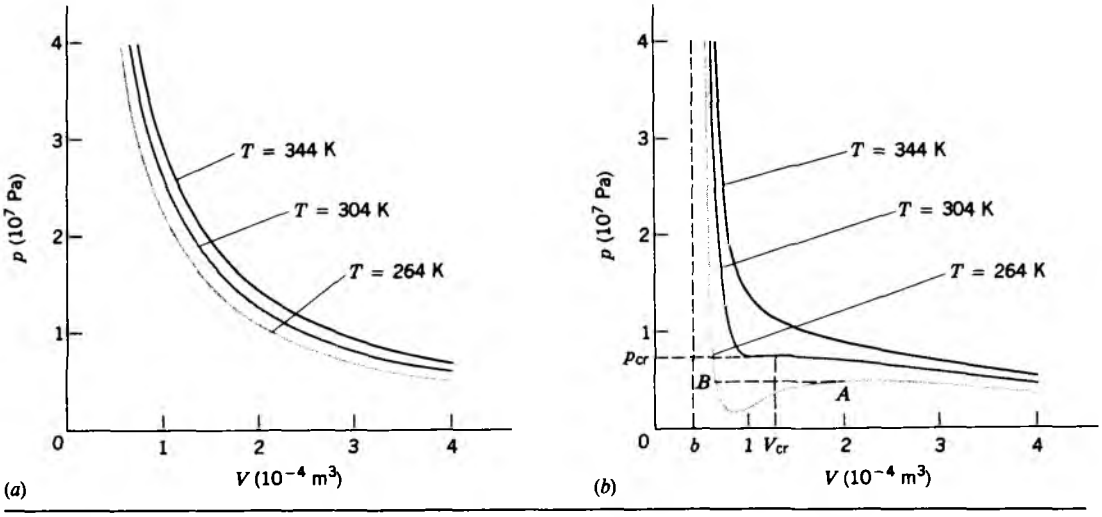



**Figura 15** (*a*) Isotermas para 1 mol de un gas ideal. (*b*) Isotermas para un mol de $CO_2$ determinadas por la ecuación de van der Waals. Obsérvese que a gran volumen, las isotermas ideal y de van der Waals se comportan similarmente. Cuando se elevan las temperaturas, las isotermas de van der Waals se comportan más como las del gas ideal. Obsérvese también que, si la presión es muy grande, el volumen tiende al valor de $b$, como lo requiere la ecuación 40, en lugar de al valor cero, como lo predice la ecuación de estado del gas ideal. La línea interrumpida $AB$ muestra una representación más realista de la isoterma $T = 264$ K. Cuando el gas se comprime a lo largo de esta isoterma, parte del gas se condensa en un líquido, y la presión permanece constante.

Se distingue por tener un mínimo y un punto de inflexión (el punto donde la curva cambia el sentido de su concavidad) que coinciden en el mismo punto. Usando esta información junto con el valor de la presión crítica $p_{cr}$, calcule los valores de las constantes $a$ y $b$ de van der Waals para el $CO_2$.

**Solución** El mínimo de una curva en un diagrama $pV$ se determina por el punto en que la pendiente $dp/dV$ es cero, y en cálculo aprendimos que en un punto de inflexión la segunda derivada es cero. Podemos hallar las derivadas cuando la ecuación de estado de van der Waals se escribe en la forma de la ecuación 40:

$$\frac{dp}{dV} = \frac{-nRT}{(V-nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3},$$

$$\frac{d^2p}{dV^2} = \frac{2nRT}{(V-nb)^3} - \frac{6an^2}{V^4}.$$

Al considerar ambas derivadas suponemos a $T$ constante, como es lo apropiado para una isoterma.

Haciendo a ambas derivadas iguales a cero y resolviendo estas ecuaciones simultáneamente para $a$ y $b$, hallamos

$$a = \frac{27R^2T_{cr}^2}{64p_{cr}},$$

$$b = \frac{RT_{cr}}{8p_{cr}}.$$

Puesto que $p_{cr} = 0.75 \times 10^7$ Pa por la figura 15*b*, podemos entonces calcular que

$$a = 0.364\ \text{J}\cdot\text{m}^3/\text{mol}^2 \quad \text{y} \quad b = 4.27 \times 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{mol}.$$

Si bien el modelo de van der Waals da una descripción mucho más realista que el modelo del gas ideal para el comportamiento de un gas real como el $CO_2$, ello sigue representando únicamente una aproximación del comportamiento real. En el caso del $CO_2$, por ejemplo, el cálculo anterior da $V_{cr} = 3nb = 1.28 \times 10^{-4}$ m$^3$ para el volumen de 1 mol en el punto crítico. Sin embargo, el valor medido es de $0.96 \times 10^{-4}$ m$^3$. De cualquier modo, es un primer paso exitoso para mejorar el modelo del gas ideal en los casos en que las moléculas están tan cercanas entre sí, que las hipótesis básicas del modelo del gas ideal no tienen validez e incluso nos sugiere que existe condensación debida a la fuerza entre las moléculas, cosa que el modelo del gas ideal no puede lograr en absoluto. ■

## PREGUNTAS

1. Al discutir el hecho de que es imposible aplicar las leyes de la mecánica individualmente a los átomos en un sistema macroscópico, Mayer y Mayer afirman: "La complejidad real del problema (es decir, el hecho de que el número de átomos sea grande) es el secreto de su solución". Explique esta frase.

2. En la teoría cinética supusimos que en un gas existe un número grande de moléculas. Los gases reales se comportan como un gas ideal a densidades bajas. ¿Son contradictorias estas afirmaciones? Si no lo son, ¿qué conclusión puede usted sacar de ellas?
3. Hemos supuesto que las paredes del recipiente son elásticas en las colisiones moleculares. En realidad, las paredes pueden ser inelásticas. ¿Por qué no importa esto, siempre y cuando las paredes estén a la misma temperatura que el gas?
4. En un día húmedo, algunos dicen que el aire está "pesado". ¿Cómo se compara la densidad del aire húmedo con la del aire seco a la misma temperatura y presión?
5. ¿En qué parte de la siguiente secuencia encaja la velocidad media cuadrática de moléculas en aire quieto y temperatura ambiente; 0; 2 m/s (velocidad al caminar); 30 m/s (auto rápido); 500 m/s (avión supersónico); $1.1 \times 10^4$ m/s (velocidad de escape de la Tierra); $3 \times 10^8$ m/s (velocidad de la luz)?
6. Dos salones de igual tamaño se comunican a través de una puerta abierta. Sin embargo, las temperaturas medias en los dos salones se mantienen en valores diferentes. ¿En cuál de los dos salones hay más aire?
7. Los movimientos moleculares se mantienen sin ninguna fuerza externa, y continúan indefinidamente sin ninguna señal de que disminuya su velocidad. ¿Cuál es la razón de que la fricción no lleve a estas diminutas partículas al reposo, como lo hace en otras partículas en movimiento?
8. ¿Qué justificación existe para despreciar los cambios de la energía potencial gravitatoria de las moléculas en un gas?
9. Hemos supuesto que la fuerza ejercida por las moléculas sobre la pared de un recipiente es estacionaria en el tiempo. ¿Cómo se justifica esto?
10. Se halla que el peso de una bolsa plana y vacía de plástico delgado no cambia cuando se llena de aire. ¿Por qué no?
11. Sabemos que una piedra caerá al suelo si la soltamos. No anteponemos ningún obstáculo a las moléculas del aire, y sin embargo no caen todas al suelo. ¿Por qué no?
12. Justifique el hecho de que la presión de un gas depende del *cuadrado* de la velocidad de sus partículas explicando la dependencia de la presión de la frecuencia de colisión y de la transferencia de ímpetu de las partículas.
13. ¿Cómo se relaciona la velocidad del sonido con las variables del gas en el modelo de la teoría cinética?
14. Considere una pelota de golf estacionaria y caliente puesta sobre el punto de partida (el *tee*) y una pelota de golf fría justo cuando sale del tee después de haber sido golpeada. La energía cinética total del movimiento de las moléculas con relación al tee puede ser la misma en los dos casos. Explique cómo. ¿Cuál es la diferencia entre los dos casos?
15. Se reporta que muy lejos de la superficie de la Tierra la temperatura cinética del gas es del orden de 1000 K. Sin embargo, una persona situada en ese entorno se congelaría hasta morir en lugar de evaporarse. Explique.
16. ¿Por qué no se "fuga" la atmósfera de la Tierra? En la parte superior de la atmósfera los átomos se enfilarán ocasionalmente hacia afuera con una velocidad superior a la velocidad de escape. ¿No es esto sólo una cuestión de tiempo?
17. Titán, una de las muchas lunas de Saturno, tiene una atmósfera, pero nuestra Luna no la tiene. ¿Cuál es la explicación?
18. ¿Cómo, de ser así, esperaría usted que cambie la composición del aire con la altura?
19. Explique por qué la temperatura disminuye con la altura en la atmósfera inferior.
20. En colisiones inelásticas a gran escala se pierde energía mecánica a causa de la fricción interna, lo que conduce a una elevación de temperatura debido al aumento en la agitación molecular interna. ¿Existe una pérdida de energía mecánica que pasa a ser calor en una colisión inelástica entre moléculas?
21. Al considerar cantidades que deben ser conservadas en una colisión elástica, demuestre que en general las moléculas de un gas no pueden tener las mismas velocidades después de una colisión que las que tenían antes. ¿Es entonces posible que un gas conste de moléculas que tengan todas la misma velocidad?
22. A menudo decimos que vemos salir el vapor del pico de una tetera en la que el agua está hirviendo. Sin embargo, el vapor es, en sí mismo, un gas incoloro. ¿Qué es lo que vemos realmente?
23. ¿Por qué se eleva el humo de una vela encendida, en lugar de caer?
24. ¿Obedecería a la ley del gas ideal un gas cuyas moléculas fuesen verdaderos puntos geométricos?
25. ¿Por qué las moléculas no viajan en líneas perfectamente rectas entre colisiones y qué efecto, fácilmente observable en el laboratorio, tiene por resultado?
26. ¿Por qué debe ser relativamente corto el tiempo permitido para una separación por difusión?
27. Supongamos que queremos obtener $^{238}U$ en lugar de $^{235}U$ como producto final de un proceso de difusión. ¿Usaríamos el mismo proceso? Si no, explique cómo tendría que modificarse el proceso de separación.
28. Considerando la mutua difusión de los gases, ¿puede usted trazar una analogía con una multitud empujándose a codazos en medio de muchas "colisiones" en un gran plano inclinado con una pendiente de unos cuantos grados?
29. ¿Puede usted describir un aparato centrífugo para separación de gases? ¿Es una centrífuga mejor que una cámara de difusión para la separación de gases?
30. ¿Cambian la presión y el volumen del aire en una casa cuando la estufa aumenta la temperatura significativamente? De no ser así, ¿se viola la ley del gas ideal?
31. ¿Esperaría usted que las moléculas reales sean simétricamente esféricas? De no ser así, ¿cómo cambiaría la función de la energía potencial de la figura 12*a*?
32. Explique por qué la temperatura de un gas decrece en una expansión adiabática.
33. Si el aire caliente se eleva, ¿por qué es más frío en la cima de una montaña que cerca del nivel del mar?
34. Comente esta aseveración: "Existen dos maneras de llevar a cabo un proceso adiabático. Una es efectuarlo rápidamente y la otra es efectuarlo dentro de una caja aislada".

35. Un globo de hule sellado contiene un gas muy ligero. El globo se deja ir y se eleva a gran altura en la atmósfera. Describa y explique el comportamiento térmico y mecánico del globo.
36. Si bien los gases reales pueden ser licuados, un gas ideal no puede. Explique.
37. Demuestre que cuando el volumen por mol de un gas aumenta, la ecuación de van der Waals tiende a la ecuación de estado de un gas ideal.
38. Las cantidades *extensivas* tienen valores que dependen de cuál sea la frontera del sistema, mientras que las cantidades *intensivas* son independientes de la elección de la frontera. Es decir, las cantidades extensivas están necesariamente definidas para la totalidad de un sistema, mientras que las cantidades intensivas se aplican uniformemente a cualquier parte pequeña del sistema. De las cantidades siguientes, determine cuáles son extensivas y cuáles son intensivas: presión, volumen, temperatura, densidad, masa, energía interna.

## PROBLEMAS

### *Sección 23-1 Propiedades macroscópicas de un gas y la ley del gas ideal*

1. (*a*) Calcule el volumen ocupado por 1.00 mol de un gas ideal en condiciones estándar, es decir, a la presión de 1.00 atm (= $1.01 \times 10^5$ Pa) y temperatura de 0°C (= 273 K). (*b*) Demuestre que el número de moléculas por centímetro cúbico (el número Loschmidt) en las condiciones estándar es de $2.68 \times 10^{19}$.
2. El mejor vacío que puede obtenerse en el laboratorio corresponde a una presión de unas $10^{-18}$ atm, o sea $1.01 \times 10^{-13}$ Pa. ¿Cuántas moléculas hay por centímetro cúbico en ese vacío a 22°C?
3. Una cantidad de gas ideal a 12.0°C y una presión de 108 kPa ocupa un volumen de 2.47 $m^3$. (*a*) ¿Cuántos moles contiene el gas? (*b*) Si la presión se eleva ahora a 316 kPa y la temperatura se eleva a 31.0°C, ¿qué volumen ocupará ahora el gas? Suponga que no existan fugas.
4. Oxígeno gaseoso, con un volumen de 1130 $cm^3$ a 42.0°C y una presión de 101 kPa, se dilata hasta que su volumen es de 1530 $cm^3$ y su presión de 106 kPa. Halle (*a*) el número de moles de oxígeno en el sistema y (*b*) su temperatura final.
5. Un globo meteorológico se infla libremente con helio a una presión de 1.00 atm (= 76.0 cm Hg) y una temperatura de 22.0°C. El volumen del gas es de 3.47 $m^3$. A una elevación de 6.50 km, la presión atmosférica desciende a 36.0 cm Hg y el helio se ha dilatado, sin restricción por parte de la bolsa que lo confina. A esta elevación la temperatura del gas es de -48.0°C. ¿Cuál es ahora el volumen del gas?
6. La variación de la presión en la atmósfera de la Tierra, supuesta a una temperatura uniforme, está dada por $p = p_0 e^{-Mgy/RT}$, en donde $M$ es la masa molar del aire. (Véase la sección 17-3.) Demuestre que $n_v = n_{v0} e^{-Mgy/RT}$, donde $n_v$ es el número de moléculas por unidad de volumen.
7. Considere una masa dada de gas ideal. Compare las curvas que representan procesos a presión *constante*, *volumen* constante, e isotérmico (a temperatura constante) en (*a*) un diagrama $pV$, (*b*) un diagrama $pT$, y (*c*) un diagrama $VT$. (*d*) ¿Cómo dependen estas curvas de la masa del gas?
8. Calcule la masa de la atmósfera de la Tierra. Exprese su respuesta como una fracción de la masa de la Tierra. Recuerde que la presión atmosférica es igual a 101 kPa.
9. Una llanta de automóvil tiene un volumen de 988 $in^3$ y contiene aire a una presión manométrica de 24.2 $lb/in^2$ cuando la temperatura es de -2.60°C. Halle la presión manométrica del aire en la llanta cuando su temperatura se eleve a 25.6°C y su volumen aumente a 1020 $in^3$. (*Sugerencia*: No es necesario convertir de unidades inglesas a unidades SI. ¿Por qué? Úsese $p_{atm} = 14.7$ $lb/in^2$).
10. (*a*) Considere 1.00 mol de un gas ideal a 285 K y 1.00 atm de presión. Suponga que las moléculas en su mayor parte están igualmente espaciadas en los centros de cubos idénticos. Usando la constante de Avogadro y tomando el diámetro de una molécula como de $3.00 \times 10^{-8}$ cm, halle la longitud de una arista de ese cubo y calcule la razón entre esta longitud y el diámetro de una molécula. La longitud de la arista es una estimación de la distancia entre las moléculas del gas. (*b*) Considere ahora un mol de agua que tenga un volumen de 18 $cm^3$. Suponga de nuevo que las moléculas están espaciadas igualmente en los centros de cubos idénticos y repita el cálculo de (*a*).
11. Una burbuja de aire de 19.4 $cm^3$ de volumen está en el fondo de un lago a una profundidad de 41.5 m, donde la temperatura es de 3.80°C. La burbuja se eleva a la superficie, que está a una temperatura de 22.6°C. Considere que la temperatura de la burbuja es la misma que la del agua circundante y halle su volumen justo antes de que alcance la superficie.
12. Un tubo abierto en un extremo y cerrado en el otro de longitud $L = 25.0$ m contiene aire a la presión atmosférica. Se introduce verticalmente en un lago de agua dulce hasta que el agua se eleva a la mitad en el tubo, como se muestra en la figura 16. ¿Cuál es la profundidad $h$ del extremo inferior del tubo? Suponga que la temperatura es la misma en cualquier parte y que no cambia.
13. El recipiente A contiene un gas ideal a una presión de $5.0 \times 10^5$ Pa y a una temperatura de 300 K. Está conectado por un tubo delgado al recipiente B con cuatro veces el volumen de A; véase la figura 17. B contiene el mismo gas ideal a una presión de $1.0 \times 10^5$ Pa y a una temperatura

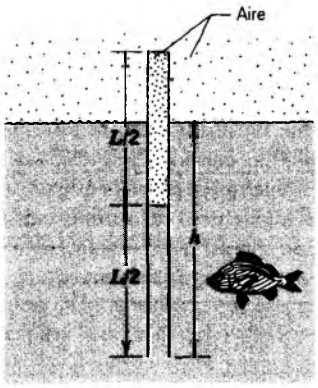



**Figura 16** Problema 12.

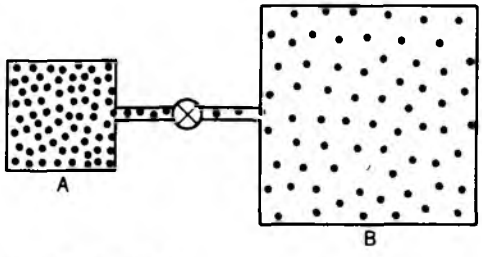



**Figura 17** Problema 13.

de 400 K. Se abre la válvula de conexión, y se llega al equilibrio a una presión común mientras que la temperatura de cada recipiente se mantiene constante en su valor inicial. ¿Cuál es la presión final en el sistema?

**14.** Dos vasijas de volúmenes 1.22 L y 3.18 L contienen gas criptón y están conectadas por un tubo delgado. Inicialmente, las vasijas están a la misma temperatura, 16.0°C, y a la misma presión, 1.44 atm. Luego, se caliente la vasija más grande a 108°C mientras que la más pequeña permanece a 16.0°C. Calcule la presión final. (*Sugerencia*: No existen fugas.)

**15.** Considere una muestra de gas argón a 35.0°C y 1.22 atm de presión. Suponga que el radio de un átomo (esférico) de argón sea de $0.710 \times 10^{-10}$ m. Calcule la fracción del volumen del recipiente ocupado realmente por átomos.

**16.** Un manómetro lleno de mercurio con dos brazos de longitud desigual de igual área en la sección transversal está sellado con la misma presión $p_0$ en los dos brazos, como en la figura 18. A temperatura constante, se admiten 10.0 $cm^3$ adicionales de mercurio por medio de una llave de paso situada en el fondo. El nivel en la izquierda aumenta 6.00 cm y en la derecha aumenta 4.00 cm. Halle la presión $p_0$.

### *Sección 23-3 Cálculo cinético de la presión*

**17.** La temperatura en el espacio interestelar es de 2.7 K. Halle la velocidad media cuadrática de moléculas de hidrógeno a esta temperatura. (Véase la tabla 1.)

**18.** Calcule la velocidad media cuadrática de moléculas de amoniaco ($NH_3$) a 56.0°C. Un átomo de nitrógeno tiene una masa de $2.33 \times 10^{-26}$ kg y un átomo de hidrógeno tiene una masa de $1.67 \times 10^{-27}$ kg.

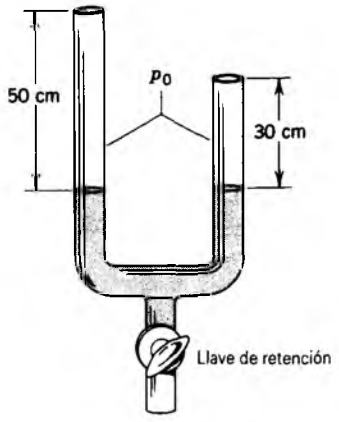



**Figura 18** Problema 16.

**19.** A 0°C y 1.000 atm de presión las densidades del aire, del oxígeno, y del nitrógeno son, 1.293 $kg/m^3$, 1.429 $kg/m^3$, y 1.250 $kg/m^3$ respectivamente,. Calcule la fracción por masa de nitrógeno en el aire a partir de estos datos, suponiendo que únicamente estos dos gases están presentes.

**20.** La masa de la molécula de $H_2$ es de $3.3 \times 10^{-24}$ g. Si $1.6 \times 10^{23}$ moléculas de hidrógeno por segundo golpean a 2.0 $cm^2$ de pared a un ángulo de 55° con la normal cuando se mueven con una velocidad de $1.0 \times 10^5$ cm/s, ¿qué presión ejercen sobre la pared?

**21.** A 44.0°C y $1.23 \times 10^{-2}$ atm la densidad de un gas es de $1.32 \times 10^{-5}$ $g/cm^3$. (*a*) Halle $v_{rms}$ para las moléculas del gas. (*b*) Halle la masa molar del gas e identifíquelo.

**22.** La *ley de Dalton* establece que cuando las mezclas de gases que no tienen una interacción química están juntos en un recipiente, la presión ejercida por cada constituyente a una temperatura dada es la misma que la que ejercería si uno solo de ellos llenase todo el depósito, y que la presión total es igual a la suma de las presiones parciales de cada gas. Derive esta ley a partir de la teoría cinética, usando la ecuación 14.

**23.** Un recipiente encierra dos gases ideales. Hay presentes dos moles del primer gas, con una masa molar de $M_1$. Las moléculas del segundo gas tienen una masa molar de $M_2 = 3M_1$, y está presente 0.5 mol de este gas. ¿Qué fracción de la presión total sobre la pared del recipiente es atribuible al segundo gas? (*Sugerencia*: Véase el problema 22).

### *Sección 23-4 Interpretación cinética de la temperatura*

**24.** El Sol es una enorme bola de gas ideal caliente. El resplandor que rodea al Sol en la fotografía de rayos-X mostrada en la figura 19 es la corona: la atmósfera del Sol. Su temperatura y presión son de $2.0 \times 10^6$ K y 0.030 Pa. Calcule la velocidad rms de los electrones libres en la corona.

**25.** (*a*) Calcule el valor promedio en electrovolt de la energía cinética de traslación de las partículas de un gas ideal a



**Figura 19** Problema 24.

0°C y a 100°C. (*b*) Halle la energía cinética de traslación por mol de un gas ideal a estas temperaturas, en joules.

**26.** ¿A qué temperatura es igual a 1.00 eV el promedio de la energía cinética de traslación de una molécula de un gas ideal?

**27.** En una caja cúbica de 25 cm de lado está confinado oxígeno gaseoso ($O_2$) a 15°C y 1.0 atm de presión. Calcule la razón de cambio entre la energía potencial gravitatoria de un mol de moléculas de oxígeno que descienden la altura de la caja, y la energía cinética total de traslación de las moléculas.

**28.** El oro tiene una masa molar (atómica) de 197 g/mol. Considere una muestra de 2.56 g de vapor de oro puro. (*a*) Calcule el número de moles de oro presentes. (*b*) ¿Cuántos átomos de oro están presentes?

**29.** Halle la energía cinética media de traslación de cada molécula de nitrógeno a 1600 K (*a*) en joules y (*b*) en electrovolt.

**30.** (*a*) Halle el número de moléculas en 1.00 $m^3$ de aire a 20.0°C y una presión de 1.00 atm. (*b*) ¿Cuál es la masa de este volumen de aire? Suponga que 75% de las moléculas son nitrógeno ($N_2$) y 25% son de oxígeno ($O_2$).

**31.** Considere que un gas a una temperatura $T$ que ocupa un volumen $V$ consta de una mezcla de átomos, es decir, $N_a$ átomos de masa $m_a$ cada uno de ellos con una velocidad rms $v_a$, y $N_b$ átomos de masa $m_b$ cada uno de ellos con una velocidad rms $v_b$. (*a*) Dé una expresión para la presión total ejercida por el gas. (*b*) Suponga ahora que $N_a = N_b$, y que los átomos diferentes se combinan a un volumen constante para formar moléculas de masa $m_a + m_b$. Una vez que la temperatura regresa a su valor inicial, ¿cuál sería la razón entre la presión después de la combinación y la presión *antes* de la combinación?

**32.** Un tanque de acero contiene 315 g de amoniaco gaseoso ($NH_3$) a una presión absoluta de $1.35 \times 10^6$ Pa y a una temperatura de 77.0°C. (*a*) ¿Cuál es el volumen del tanque? (*b*) El tanque se verifica más tarde cuando la temperatura ha caído a 22.0°C y la presión absoluta ha caído a $8.68 \times 10^5$ Pa. ¿Cuántos gramos de gas se fugaron del tanque?

**33.** (*a*) Calcule las temperaturas a las cuales la velocidad rms es igual a la velocidad de escape desde la superficie de la Tierra para hidrógeno molecular y para oxígeno molecular. (*b*) Haga lo mismo para la Luna, suponiendo que la aceleración gravitatoria en su superficie sea de 0.16*g*. (*c*) La temperatura de las capas superiores de la atmósfera de la Tierra es de unos 1000 K. ¿Cabría que hubiera mucho hidrógeno allí? ¿Y mucho oxígeno?

**34.** ¿A qué temperatura tienen los átomos del gas helio la misma velocidad rmc que las moléculas del gas hidrógeno a 26.0°C?

**35.** La envoltura y la canastilla de un globo de aire caliente tienen una masa total de 249 kg, y la envoltura tiene una capacidad de 2180 $m^3$. Cuando está totalmente inflado, ¿cuál sería la temperatura del aire confinado para darle al globo una capacidad de ascenso de 272 kg (además de su propia masa)? Supóngase que el aire circundante, a 18.0°C, tiene una densidad de 1.22 kg/$m^3$.

### *Sección 23-5 Trabajo efectuado sobre un gas ideal*

**36.** Una muestra de gas se dilata de 1.0 a 5.0 $m^3$ mientras que su presión desciende de 15 a 5.0 Pa. ¿Cuánto trabajo es efectuado sobre el gas si su presión cambia con el volumen según cada uno de los tres procesos mostrados en el diagrama $pV$ de la figura 20?

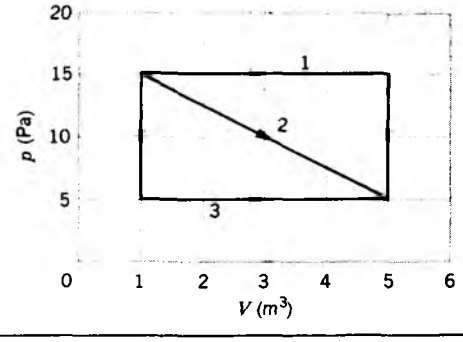



**Figura 20** Problema 36.

**37.** Suponga que una muestra de gas se dilata de 2.0 a 8.0 $m^3$ a lo largo de la trayectoria diagonal del diagama $pV$ que se muestra en la figura 21. Luego se comprime nuevamente a 2.0 $m^3$ a lo largo de cualquiera de las trayectorias 1 ó 2. Calcule el trabajo neto efectuado sobre el gas para el ciclo completo en cada caso.

**38.** La velocidad del sonido en gases diferentes a la misma temperatura depende de la masa molar del gas. Demuestre que $v_1/v_2 = \sqrt{M_2/M_1}$ ($T$ constante), en donde $v_1$ es la velocidad del sonido en el gas de masa molar $M_1$ y $v_2$ es la velocidad del sonido en el gas de masa molar $M_2$.

**39.** El aire a 0.00°C y 1.00 atm de presión tiene una densidad de $1.291 \times 10^{-3}$ g/$cm^3$, y la velocidad del sonido es de

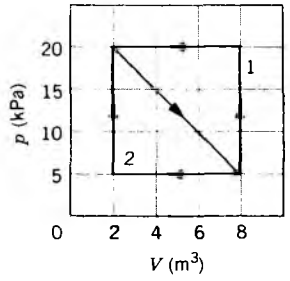



**Figura 21** Problema 37.

331 m/s a esa temperatura. Calcule (*a*) el valor de $\gamma$ para el aire y (*b*) la masa molar efectiva del aire.

**40.** Una cantidad de aire que ocupa 0.142 $m^3$ a 103 kPa de presión manométrica se dilata isotérmicamente a una presión manométrica cero y luego se enfría a presión constante hasta que alcanza su volumen inicial. Calcule el trabajo efectuado sobre el gas.

**41.** Calcule el trabajo efectuado por un agente externo al comprimir 1.12 mol de oxígeno de un volumen de 22.4 L y 1.32 atm de presión a 15.3 L a la misma temperatura.

**42.** Use el resultado del problema muestra 6 para demostrar que la velocidad del sonido en el aire aumenta alrededor de 0.59 m/s por cada grado Celsius de elevación de la temperatura cerca de 20°C.

**43.** Un gas ocupa un volumen de 4.33 L a una presión de 1.17 atm y una temperatura de 310 K. Se le comprime adiabáticamente a un volumen de 1.06 L. Determine (*a*) la presión final y (*b*) la temperatura final, suponiendo que el gas sea un gas ideal para el cual $\gamma = 1.40$. (*c*) ¿Cuánto trabajo fue efectuado sobre el gas?

**44.** (*a*) Un litro de gas con $\gamma = 1.32$ está a 273 K y 1.00 atm de presión. Se le comprime súbitamente (adiabáticamente) hasta la mitad de su volumen original. Halle su presión y temperatura finales. (*b*) El gas es ahora enfriado de nuevo a 273 K a presión constante. Halle el volumen final. (*c*) Halle el trabajo total efectuado sobre el gas.

**45.** El gas en una cámara Wilson a una temperatura de 292 K experimenta una expansión rápida. Suponiendo que el proceso sea adiabático, calcule la temperatura final si $\gamma = 1.40$ y la razón de dilatación del volumen es de 1.28.

**46.** Un compresor de aire aspira aire a 18.0°C y 1.00 atm de presión y libera aire comprimido a una presión de 2.30 atm. El compresor opera a 230 W de potencia útil. Suponga que el compresor opera adiabáticamente. (*a*) Halle la temperatura del aire comprimido. (*b*) ¿Cuánto aire comprimido, en litros, se libera en cada segundo?

**47.** Un tubo delgado, sellado en ambos extremos, tiene 1.00 m de largo. Cuando está horizontal, en el centro contiene 10.0 cm de mercurio y los dos extremos iguales contienen aire a la presión atmosférica normal. Si el tubo es volteado a una posición vertical, ¿en qué cantidad se desplazará el mercurio? Suponga que el proceso es (*a*) isotérmico y (*b*) adiabático. (Para el aire, $\gamma = 1.40$). ¿Cuál de las dos suposiciones es la más razonable?

### *Sección 23-6 La energía interna de un gas ideal*

**48.** Calcule la energía interna de un mol de un gas ideal a 25.0°C.

**49.** Calcule la energía cinética rotatoria total de todas las moléculas contenidas en un mol de aire a 25.0°C.

**50.** Una partícula de rayos cósmicos con una energía de 1.34 TeV es detenida en un tubo de detección que contiene 0.120 mol de gas neón. Una vez que esta energía esté distribuida entre todos los átomos, ¿en cuánto habrá aumentado la temperatura del neón?

**51.** Un gas ideal experimenta una compresión adiabática de $p = 122$ kPa, $V = 10.7$ $m^3$, $T = -23.0$°C a $p = 1450$ kPa, $V = 1.36$ $m^3$. (*a*) Calcule el valor de $\gamma$. (*b*) Halle la temperatura final. (*c*) ¿Cuántos moles de gas están presentes? (*d*) ¿Cuál es la energía cinética de traslación total por mol antes y después de la compresión? (*e*) Calcule la razón entre las velocidades rms antes y después de la compresión.

### *Sección 23-8 La ecuación de estado de van der Waals*

**52.** La *b* de van der Waals para el oxígeno es de 32 $cm^3$/mol. Calcule el diámetro de una molécula de $O_2$.

**53.** Usando los valores de *a* y *b* para el $CO_2$ hallados en el problema muestra 8, calcule la presión a 16.0°C de 2.55 mol de gas $CO_2$ que ocupa un volumen de 14.2 L. Suponga (*a*) que la ecuación de van der Waals sea correcta y luego (*b*) que el $CO_2$ se comporte como un gas ideal.

**54.** Calcule el trabajo efectuado sobre *n* moles de un gas van der Waals en una expansión isotérmica de un volumen $V_i$ a un volumen $V_f$.

**55.** Demuestre que $V_{cr} = 3nb$.

**56.** Las constantes *a* y *b* en la ecuación van der Waals son diferentes para cada sustancia. Sin embargo, demuestre que si consideramos a $V_{cr}$, $p_{cr}$, y $T_{cr}$ como las unidades de volumen, presión, y temperatura, la ecuación van der Waals resulta idéntica para todas las sustancias.

# CAPÍTULO 24

# MECÁNICA ESTADÍSTICA

*En la sección 23-4, en que tratábamos de la teoría cinética, hemos determinado el promedio de energía cinética de traslación de las moléculas de un gas. Sin embargo, el promedio no nos dice nada sobre cómo se distribuyen las velocidades de cada molécula en el promedio. En ciertos casos, el promedio puede proporcionar suficiente información respecto a las propiedades del gas, como la temperatura. En otros casos, será necesario tener más información acerca de la distribución de velocidades.*

*Si va usted a diseñar un avión comercial de pasajeros, debe conocer el peso promedio de los pasajeros y de su equipaje para calcular la fuerza ascencional, requerida para que el aeroplano vuele con seguridad. El número de pasajeros de mayor o menor peso es de poco interés. Por otra parte, si su trabajo consiste en ordenar trajes en una tienda de ropa, necesitará información sobre la* distribución *de las tallas; conocer la talla promedio de los clientes no le servirá de mucho.*

*En este capítulo estudiamos la distribución de las velocidades y de las energías moleculares, y su uso para calcular las propiedades macroscópicas de conjuntos de moléculas. Este enfoque de la termodinámica se llama* mecánica estadística. *Sus formulaciones clásicas fueron elaboradas por primera vez en el siglo XIX por Maxwell, Gibbs, y Boltzmann. En el siglo XX, muchas de estas técnicas fueron aplicadas por Einstein, Planck, Fermi y otros a sistemas gobernados por las leyes de la mecánica cuántica.*

## 24-1 DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS Y VALORES MEDIOS

Un ingeniero de caminos desearía sin duda tener cierta información sobre la distribución de las velocidades de los automóviles que circulan en determinado tramo de carretera. Colocando sensores separados por una distancia conocida, el ingeniero puede determinar el tiempo necesario para que un automóvil recorra esa distancia y determinar así su velocidad. Después de acumular y seleccionar tales datos durante varias semanas, el ingeniero analiza los datos para estudiar la necesidad de mejoras en la carretera. ¿Cómo puede exhibirse tal información de manera que permita este análisis?

Una simple lista de las velocidades proporciona demasiada información y no resulta conveniente. En cambio, el ingeniero clasifica las velocidades en grupos. ¿Cuántos automóviles tienen velocidades entre 0 y 5 mph? ¿Entre 5 y 10 mph? El resultado de tal clasificación vendría a ser similar al mostrado en la figura 1, la cual da la *distribución estadística* de las velocidades en una forma que conocemos como *histograma*. Cada área rectangular tiene un ancho igual al tamaño del intervalo elegido (los cuales no necesitan ser todos iguales) y una altura igual al número de observaciones o frecuencia relativa de valores en ese intervalo.

La distribución da al ingeniero toda la información esencial con respecto al tráfico en esta carretera, para la cual el límite de velocidad es de 45 mph. El número total de automóviles en el estudio es precisamente la suma de las alturas de todos los rectángulos (1205). La fracción que supera al límite de velocidad de 45 mph es el total de las alturas de los últimos cuatro intervalos (194) dividida entre el número total en el estudio (1205), lo cual da 0.16, o sea 16%. El promedio o velocidad media es de 32.4 mph, pero la velocidad más probable (el intervalo con el número más grande) está en el intervalo de 35 a 40 mph. El ingeniero puede ahora decidir si se necesitarían mejoras en la carretera para aumentar la velocidad media o si

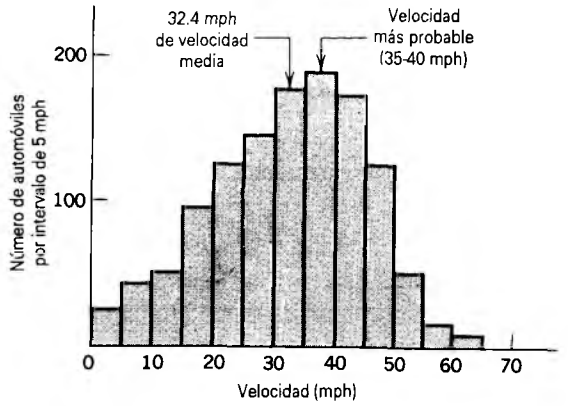



**Figura 1** Distribución estadística de las velocidades de los automóviles que viajan en un tramo dado de la carretera. Los datos se disponen en casillas de 5 mph de ancho. La altura de cada casilla muestra el número de automóviles con velocidad en esa zona de 5 mph. Los datos pueden caracterizarse por la velocidad media y la velocidad más probable.

se necesitaría una vigilancia más estricta para disminuir el número de transgresores.

La figura 1 es una distribución estadística basada puramente en datos empíricos. No existe una "teoría de las velocidades de los automóviles" que pueda utilizarse para derivar una fórmula matemática que prediga la forma de la distribución. Sin embargo, proporciona la información esencial con respecto al comportamiento estadístico de los automóviles en esta situación. No es de interés para el ingeniero si un automóvil en particular tiene una velocidad de, digamos, 32.46 mph o de 33.14 mph. Aun cuando la velocidad sea una variable continua, elegimos las velocidades posibles dentro de casillas discretas, y los números relativos en las casillas nos ayudan a entender una situación física.

El promedio o valor medio de la velocidad, $\bar{v}$, puede calcularse a partir de la distribución estadística de la figura 1. Supongamos que tenemos un total de $B$ casillas o intervalos en que han sido clasificados los datos; en la figura 1, $B = 13$. Los intervalos están marcados con el índice $i$, donde $i = 1, 2, \ldots, B$. Elegimos un valor $v_i$ típico o representativo de la velocidad en cada intervalo; este valor podría ser, por ejemplo, la velocidad en el centro de cada intervalo. Cada intervalo tiene un ancho $\delta v$ (el cual por simplificación suponemos que es el mismo para todos los intervalos, aunque, en general, no necesita serlo) y una altura $n(v_i)$, el número de observaciones para ese intervalo correspondientes a la velocidad representativa $v_i$. El número total de observaciones $N$ está dado entonces por el total de los números de observaciones en cada casilla, o sea

$$N = \sum_i n(v_i), \tag{1}$$

donde la suma se extiende a todas las casillas.

Para hallar $\bar{v}$, encontramos la suma de todas las observaciones (que es equivalente a la suma de los productos de la velocidad representativa en cada intervalo por el número de observaciones en ese intervalo), y luego dividimos esa suma por el número total de observaciones:

$$\bar{v} = \frac{\sum_i v_i n(v_i)}{\sum_i n(v_i)}. \tag{2}$$

La ecuación 2 se asemeja a la fórmula para calcular el centro de masa de un sistema de partículas (Ec. 11 del Cap. 9). Podemos considerar al centro de masa como una especie de posición "promedio" de las partículas en el sistema.

Podemos también definir la frecuencia relativa o probabilidad de cualquier valor $v_i$ como:

$$f(v_i) = \frac{n(v_i)}{\sum_i n(v_i)} = \frac{n(v_i)}{N}. \tag{3}$$

Por ejemplo, en la figura 1, $n(v_i)$, el número en el intervalo de 0 a 5 mph, es de 23; entonces, la probabilidad relativa de automóviles que tengan velocidades en ese intervalo es $f(v_i) = 23/1205 = 0.019$, o sea 1.9%. En términos de la probabilidad $f(v_i)$, podemos escribir el valor promedio de la ecuación 2 como:

$$\bar{v} = \sum_i v_i f(v_i). \tag{4}$$

**Problema muestra 1** La figura 1 se basa en la observación de un total de 1205 automóviles, cuya distribución de las velocidades es como sigue:

| $i$ | *Intervalo de velocidades* (mph) | $n(v_i)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0–5 | 23 |
| 2 | 5–10 | 41 |
| 3 | 10–15 | 54 |
| 4 | 15–20 | 95 |
| 5 | 20–25 | 123 |
| 6 | 25–30 | 142 |
| 7 | 30–35 | 177 |
| 8 | 35–40 | 186 |
| 9 | 40–45 | 170 |
| 10 | 45–50 | 122 |
| 11 | 50–55 | 50 |
| 12 | 55–60 | 15 |
| 13 | 60–65 | 7 |

Halle el valor medio de la velocidad para esta distribución, considerando a la velocidad en el centro de cada intervalo como representativa de todo el intervalo.

**Solución** Usando la ecuación 2 tenemos que

$$\bar{v} = \frac{(2.5 \text{ mph})(23) + (7.5 \text{ mph})(41) + \cdots + (62.5 \text{ mph})(7)}{23 + 41 + \cdots + 7}$$

$$= 32.4 \text{ mph}.$$

La figura 2 muestra otra clase de distribución estadística, los resultados de un grupo de 1000 observaciones del número de veces $n(h)$, en una mano de 13 cartas de una baraja de 52 cartas, que usted recibiría una mano de $h$ cartas de un palo específico (digamos, de corazones). Esta distribución se asemeja un tanto a la de la figura 1: tiene un valor medio $\bar{h}$ (que sería aproximadamente de 3.25, igual a una cuarta parte del número total de corazones, como es de esperarse puesto que seleccionamos una cuarta parte del número total de cartas en la baraja). Por encima de la media, la probabilidad disminuye rápidamente, llegando a ser excesivamente pequeña al volverse $h$ más grande. Este caso difiere del de la figura 1 en dos aspectos: (1) la variable $h$ es discreta (esto es, precisamente los números 1, 2, 3, ... , 13), en lugar de continua, y (2) podemos calcular a $n(h)$ a partir de principios básicos. Hacemos una suposición importante: es tan probable que ocurra cualquier selección particular de 13 cartas como cualquier otra selección. A partir de esta suposición puede demostrarse que la probabilidad relativa $f(h)$ de manos que dan $h$ corazones es de

$$f(h) = \frac{n(h)}{N} = \frac{(39!)^2(13!)^2}{52![(13-h)!]^2(26+h)!h!}, \qquad (5)$$

donde $k!$ (factorial de $k$) significa $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times k$, el producto de todos los enteros desde 1 hasta $k$. (Véase el problema 1 para una derivación de la ecuación 5 y el problema 35 para un ejercicio en la computadora que verifica a la ecuación 5.)

Para un conjunto determinado de $N$ intentos (tal como $N = 1000$ usado en la Fig. 2) podemos comparar la distribución observada con la predicha. Si repetimos el experimento con otros 1000 intentos, no esperaríamos observar *exactamente* la misma distribución (es decir, en lugar de 12 manos con cero corazones podríamos hallar 11 ó 13), pero tendría la misma forma. La ecuación 5 da las probabilidades cuando el número de observaciones es infinito; las distribuciones basadas en un número finito de observaciones difieren algo de las predicciones basadas en la ecuación 5, pero cuanto más grande sea el número de observaciones, más pequeña será la desviación.

Distribuciones estadísticas como las de las figuras 1 y 2 dan la frecuencia o probabilidad de observar valores de una variable dentro de un intervalo determinado. El cálculo de valores medios, o promedio, es un uso de estas distribuciones. En algunos casos, como en la figura 1, la distribución puede ser puramente empírica, sin ninguna teoría que la soporte. En otros casos, como en la figura 2, la distribución observada puede compararse con los cálculos basados en una teoría dada.

El conocimiento de la distribución estadística puede ayudar a formular una teoría en los casos en que no se conozca la teoría subyacente. Por ejemplo, datos precisos sobre la distribución de la longitud de onda de la radiación térmica (como la emitida por objetos incandescentes) condujeron al desarrollo de la teoría cuántica en los primeros años del siglo XX por Planck y Einstein. En el capítulo 49 de la versión ampliada del texto se considera la distribución de la radiación térmica.

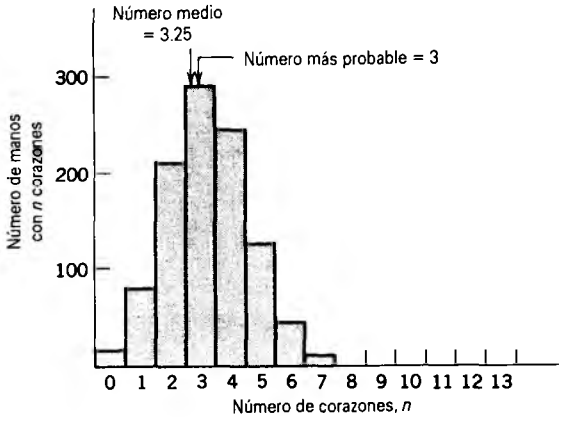



**Figura 2** La distribución estadística del número de corazones en una mano de 13 cartas de una baraja de 52 cartas. Esta muestra representa un grupo posible de resultados a partir de 1000 manos diferentes.

**Problema muestra 2** En una mano de 13 cartas, ¿cuál es la probabilidad de tener 10 corazones?

**Solución** Usando la ecuación 5 con $h = 10$, hallamos

$$f(h) = \frac{(39!)^2(13!)^2}{52!(3!)^2 36!10!} = 4.1 \times 10^{-6},$$

o alrededor de cuatro oportunidades en un millón.

Muchas calculadoras científicas tienen una tecla factorial, lo cual simplifica la evaluación de expresiones como ésta. Aun así, debe tenerse cierto cuidado; puede no ser posible evaluar todo el numerador, el cual supera a $10^{99}$, el número más grande que pueden almacenar muchas calculadoras. En tal caso, podemos evaluar la expresión alternando factores del numerador y del denominador, manteniendo la cantidad resultante dentro del alcance de la calculadora. Por ejemplo, podríamos comenzar con 39!, dividir entre 52!, multiplicar por 39!, dividir entre 36!, y así sucesivamente.

Si su calculadora no tiene una tecla de factorial, usted no necesita calcular cada producto factorial para evaluar esta expresión. Podemos simplificar la expresión escribiendo $39!/36! = 39 \times 38 \times 37$ y $39!/52! = 1/40 \times 41 \times 42 \times \ldots \times 52$, reduciendo el número de factores por multiplicar.

## 24-2 RECORRIDO LIBRE MEDIO

Supongamos que pudiéramos seguir el movimiento de una molécula en un gas mientras zigzaguea debido a las

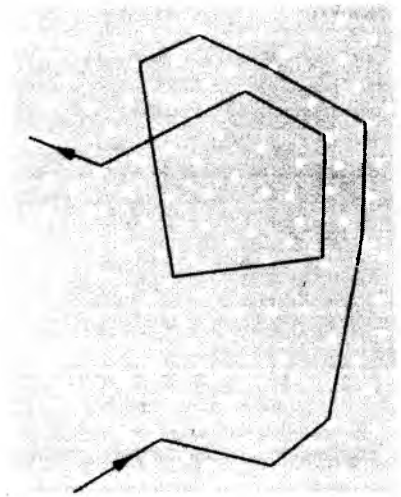


**Figura 3** Una molécula viaja a través de un gas, chocando con otras moléculas en su recorrido. Por supuesto, las otras moléculas están moviéndose y experimentando colisiones.

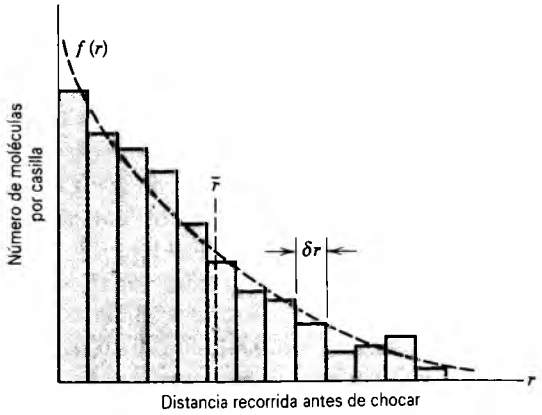



**Figura 4** Distribución estadística de la distancia recorrida por una molécula entre colisiones. El valor medio $r$ da el recorrido libre medio de las moléculas.

colisiones con las moléculas vecinas (Fig. 3). En particular, medimos la distancia que recorre entre colisiones, y repetimos el experimento muchas veces. Deseamos determinar la distancia promedio que viaja la molécula entre colisiones, y esperamos explicar ese valor sobre la base de una visión microscópica del gas. Entonces estaremos continuando nuestros esfuerzos para relacionar las propiedades macroscópica y microscópica del gas.

Supongamos primero que no tenemos una teoría subyacente de colisiones moleculares. Formamos una distribución basados únicamente en los resultados de nuestras muchas mediciones de la distancia recorrida por una molécula entre colisiones. Este enfoque es similar al experimento para estudiar la velocidad media de los automóviles descrito en la sección anterior. Después de llevar a cabo un número grande $N$ de mediciones de la distancia recorrida por la molécula, distribuimos las distancias en $B$ casillas de anchuras iguales $\delta r$. Elegimos un valor representativo de la distancia $r_i$ para cada casilla, y trazamos el número $n(r_i)$ de moléculas que recorren distancias dentro del ancho $\delta r$ de esa casilla. Es decir, tenemos $n(r_1)$ observaciones en que la distancia entre colisiones está entre 0 y $\delta r$, $n(r_2)$ en que la distancia está entre $\delta r$ y $2\delta r$, y así sucesivamente. La figura 4 muestra una gráfica de la distribución resultante. Como hicimos en el caso de la velocidad de los automóviles, definimos una distancia $\bar{r}$ promedio en analogía con la ecuación 4:

$$\bar{r} = \sum_i r_i f(r_i), \qquad (6)$$

donde $f(r_i) = n(r_i)/N$, la frecuencia relativa o probabilidad de observaciones de la casilla correspondiente a la distancia $r_i$. A la distancia $\bar{r}$ se le conoce como el *recorrido libre medio* y se representa por el símbolo $\lambda$. El recorrido libre medio representa una distancia promedio en la que se mueve una molécula (a velocidad constante) entre colisiones. Algunas moléculas pueden chocar después de recorrer distancias mucho más pequeñas, mientras que algunas otras pueden recorrer distancias mucho más grandes entre colisiones. Como veremos, el recorrido libre medio depende inversamente del tamaño de las moléculas (cuanto más grandes sean las moléculas, más probablemente colisionarán) y del número de moléculas por unidad de volumen (cuanto más grande sea el número de moléculas, con más probabilidad chocarán).

Veamos ahora si podemos entender la forma de la distribución estadística de distancias en la figura 4. Es decir, ¿podemos hallar una función continua $f(r)$ que dé la probabilidad de que una molécula recorra una distancia $r$ antes de tener una colisión? Para intentar responder a esta pregunta, llevemos a cabo un experimento diferente. Hagamos que un haz de moléculas de intensidad $I_0$ incida en una capa delgada de gas, y midamos la intensidad $I$ a la cual emergen las moléculas después de pasar a través de un espesor $r$ del gas (Fig. 5). Las moléculas del haz que

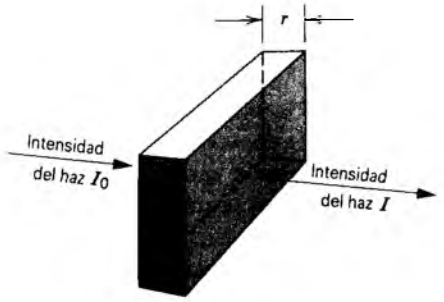



**Figura 5** Un haz de moléculas incide sobre una capa delgada de gas de espesor $r$. La intensidad $I$ del haz que pasa a través de la capa es una medida del número de moléculas del haz que no experimentan colisiones en la distancia $r$.

chocan se dispersan en direcciones diferentes, y entonces la intensidad $I$ del haz emergente está determinada por el número de moléculas que pasen a través de la distancia $r$ sin chocar. Suponemos que ninguna molécula del haz es dispersada más de una vez por una molécula blanco; esta hipótesis se justifica si la densidad de las moléculas blanco no es demasiado grande. Aumentemos ahora el espesor de la capa en una cantidad $dr$ y hallemos el cambio resultante $dI$ de la intensidad $I$. Esperamos que la disminución de intensidad sea proporcional a $I$ (cuantas más moléculas haya en el haz, más se dispersan) y al espesor adicional $dr$ de la capa de gas. Entonces

$$dI = -cI\,dr, \tag{7}$$

donde $c$ es una constante (positiva) de proporcionalidad por determinarse. Nótese que $dI$ es negativa (la intensidad del haz disminuye con la adición del espesor $dr$). Reescribiendo la ecuación 7 se obtiene una forma que puede ser integrada:

$$\frac{dI}{I} = -c\,dr, \tag{8}$$

e integrando entre los límites $I_0$, correspondientes a $r = 0$ (no hay capa de gas), e $I$, correspondiente a un espesor $r$, obtenemos

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = \int_0^r (-c\,dr)$$

$$\ln \frac{I}{I_0} = -cr$$

$$I(r) = I_0 e^{-cr}. \tag{9}$$

Es decir, la intensidad del haz disminuye exponencialmente con el espesor $r$ de la capa de gas.

Este cálculo sugiere una forma exponencial para $f(r)$, y elegimos

$$f(r) = Ae^{-cr}, \tag{10}$$

donde $A$ es otra constante por determinarse. Esta función es en efecto la curva de puntos de la figura 4, puesto que da la altura $n(r_i)$ de cualquier casilla cuando se la evalúa a una distancia $r = r_i$, de acuerdo con $n(r_i) = Nf(r_i)$. El número total de mediciones $N$ es el total de las alturas de todas las casillas, $N = \Sigma\, n(r_i)$. Podemos por lo tanto reescribir la ecuación 6, sustituyendo a $\bar{r}$ por $\lambda$, como

$$\lambda = \sum_i r_i f(r_i) = \frac{\sum_i r_i n(r_i)}{N} = \frac{\sum_i r_i n(r_i)}{\sum_i n(r_i)}$$

$$= \frac{\sum_i r_i f(r_i)\delta r}{\sum_i f(r_i)\delta r}, \tag{11}$$

en donde en la última etapa hemos multiplicado al numerador y al denominador por $\delta r$ de modo que podamos convertir fácilmente las sumas a integrales. Hagamos ahora a los anchos $\delta r$ muy pequeños, de modo que podamos escribir la ecuación 11 en términos de integrales:

$$\lambda = \frac{\int_0^\infty rf(r)\,dr}{\int_0^\infty f(r)\,dr}. \tag{12}$$

Sustituyendo $f(r) = Ae^{-cr}$, podemos llevar a cabo las integrales (véase el problema 2) y obtener

$$\lambda = \frac{1}{c}. \tag{13}$$

Entonces la distribución exponencial de la probabilidad se escribiría

$$f(r) = Ae^{-r/\lambda}. \tag{14}$$

La ecuación 14 muestra cómo entra el recorrido libre medio en el cálculo de la probabilidad de que las moléculas recorran una distancia $r$ antes de una colisión. Obsérvese que la constante $A$ se cancela a partir de la relación de la ecuación 12 y entonces no afecta el cálculo del recorrido libre medio. Podemos determinar a $A$ exigiendo que el total de todas las $n(r_i)$ sea igual a $N$ (véase el problema 3).

## Cálculo microscópico del recorrido libre medio

Regresemos ahora a nuestra agenda de termodinámica y veamos cómo podemos entender el recorrido libre medio (una cantidad macroscópica) a partir de las propiedades microscópicas de las moléculas.

Si las moléculas fuesen puntos, no chocarían en absoluto y el recorrido libre medio sería infinito. Sin embargo, las moléculas no son puntos y de aquí que ocurran las colisiones. Si las moléculas fuesen tan numerosas que llenasen completamente el espacio disponible, no dejando lugar para un movimiento de traslación, el recorrido libre medio sería cero. Entonces el recorrido libre medio se relaciona con el tamaño de las moléculas y con su número por unidad de volumen.

Consideremos que las moléculas de un gas son esferas de diámetro $d$. Tendrá lugar una colisión cuando los centros de dos moléculas se aproximen a una distancia $d$ entre sí. Puede hacerse una descripción equivalente de las colisiones de cualquier molécula si consideramos que esa molécula tiene un diámetro $2d$ y todas las demás son partículas puntuales (véase la Fig. 6).

Imaginemos una molécula típica de diámetro equivalente $2d$ que se mueve con velocidad $v$ a través de un gas de partículas puntuales equivalentes, y supongamos temporalmente que la molécula y las partículas puntuales no

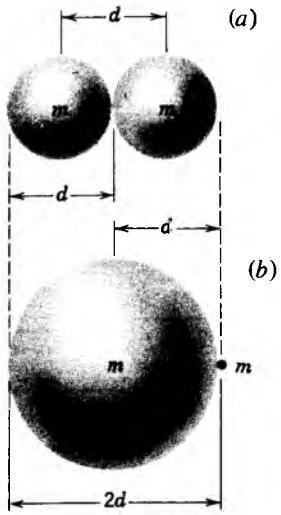



**Figura 6** (*a*) Sucede una colisión cuando los centros de dos moléculas llegan a una distancia $d$ entre sí, donde $d$ es el diámetro molecular. (*b*) Una representación equivalente, pero más conveniente, es pensar que la molécula en movimiento tiene un diámetro $2d$, siendo puntos todas las demás moléculas.

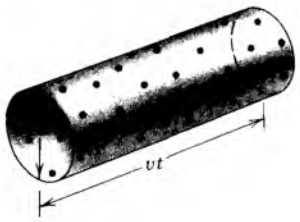



**Figura 7** Una molécula con un diámetro equivalente $2d$ (como en la Fig. 6*b*), viajando con velocidad $v$, barre un cilindro de área en su base de $\pi d^2$ y longitud $vt$ en un tiempo $t$. El número de colisiones sufridas por la molécula en este tiempo es igual al número de moléculas (consideradas como puntos) que están dentro del cilindro. En realidad, este cilindro se doblaría muchas veces al cambiar la dirección de la trayectoria de la molécula debido a las colisiones; la trayectoria ha sido enderezada por conveniencia.

ejercen fuerzas entre sí. En el tiempo $t$ nuestra molécula barre un cilindro de área de sección transversal $\pi d^2$ y longitud $vt$. Si $\rho_n (= N/V)$ es el número de moléculas por unidad de volumen, el cilindro contiene $(\pi d^2 vt)\rho_n$ partículas (véase la Fig. 7). Puesto que nuestra molécula y las partículas puntuales *sí* ejercen fuerzas entre sí, éste es también el número de colisiones experimentadas por la molécula en el tiempo $t$. El cilindro de la figura 7 es, de hecho, un cilindro doblado, que cambia de dirección con cada colisión.

El recorrido libre medio $\lambda$ es la distancia promedio entre colisiones sucesivas. De aquí que $\lambda$ sea la distancia total $vt$ cubierta en el tiempo $t$ dividida entre el número de colisiones que tienen lugar en este tiempo, o sea

$$\lambda = \frac{vt}{\pi d^2 \rho_n vt} = \frac{1}{\pi d^2 \rho_n} . \qquad (15)$$

Esta ecuación se basa en la imagen de una molécula que golpea blancos estacionarios. En realidad, la molécula golpea blancos móviles. Cuando las moléculas blanco se están moviendo, las dos $v$ de la ecuación 15 no son las mismas. La del numerador $(= \overline{v})$ es la velocidad molecular media medida con respecto al recipiente. La del denominador $(= \overline{v}_{rel})$ es la velocidad *relativa* media con respecto a otras moléculas; es esta velocidad relativa la que determina la cantidad de colisión.

Podemos ver cualitativamente que $\overline{v}_{rel} > \overline{v}$ como sigue. Dos moléculas de velocidad $v$ que se muevan una hacia la otra tienen una velocidad relativa de $2v$ $(> v)$; dos moléculas con velocidad $v$ que se muevan en ángulo recto en el transcurso de una colisión tienen una velocidad relativa de $\sqrt{2}\,v$ (también $> v$); dos moléculas que se muevan con velocidad $v$ en la misma dirección tienen una velocidad relativa de cero $(< v)$. Entonces las moléculas que llegan de *todo el hemisferio delantero* y de *parte del hemisferio trasero* tienen una $v_{rel} > \overline{v}$. Las moléculas que llegan desde el resto del hemisferio trasero tienen $\overline{v}_{rel} < \overline{v}$ pero, puesto que son menos, el promedio general da $\overline{v}_{rel} > \overline{v}$. Un cálculo cuantitativo que tenga en cuenta la distribución real de la velocidad de las moléculas da $v_{rel} = \sqrt{2}\,\overline{v}$. Como resultado, la ecuación 15 se convierte en

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho_n} . \qquad (16)$$

Al tomar en cuenta el movimiento de las moléculas blanco vemos que la frecuencia de la colisión ha aumentado y que el recorrido libre medio se ha reducido respecto a sus valores para moléculas blanco estacionarias.

El recorrido libre medio de las moléculas de aire al nivel del mar es de alrededor de 0.1 $\mu$m. A una altitud de 100 km, la densidad del aire ha caído hasta el punto de que el recorrido libre medio se eleva a unos 16 cm. A 300 km, el recorrido libre medio es de unos 20 km. Un problema con el que se encuentran quienes estudian la física y la química de la atmósfera superior en el laboratorio, es el hecho de que no se dispone de recipientes suficientemente grandes como para permitir que las muestras de gas contenido simulen las condiciones de la atmósfera superior. Los estudios de las concentraciones de freón, bióxido de carbono, y ozono en la atmósfera superior son de preocupación pública vital.

A una presión de $10^{-7}$ mm Hg (alrededor de $10^{-10}$ atm), un vacío de laboratorio razonablemente bueno, la densidad de las moléculas (que puede ser hallada a partir de la forma molecular de la ley del gas ideal, $pV = NkT$) es $\rho_n = N/V = p/kT = 3 \times 10^{15}$ m$^{-3}$ a la temperatura ambiente (300 K). La ecuación 16 da entonces alrededor de 1 km para el recorrido libre medio. Es decir, en una cámara de

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACIÓN Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



vacío ordinaria del laboratorio de dimensión típicamente de 1 m o menos, las moléculas difícilmente chocan alguna vez una con otra; es probable que ocurran únicamente las colisiones con las paredes.

Tales consideraciones pueden ser importantes en el diseño de los aceleradores de partículas, donde un haz de partículas debe recorrer muchas veces el acelerador y debe haber una probabilidad despreciablemente pequeña de que se efectúen colisiones con cualesquier moléculas de aire que pudieran estar presentes en el tubo al vacío del acelerador. Aun cuando un recorrido libre medio de 1 km parezca grande, según las normas de laboratorio ordinarias, una partícula que lleve a cabo cientos o miles de revoluciones a través de un acelerador circular puede viajar distancias mucho más largas. En el caso de los aceleradores de protones, el diámetro de un protón es del orden de $10^{-15}$ m, mucho más pequeño que el diámetro de una molécula ($10^{-10}$ m), y el aumento resultante en $\lambda$ es suficiente para reducir la probabilidad de las colisiones hasta un valor aceptablemente pequeño.

**Problema muestra 3** Los diámetros moleculares de diferentes clases de moléculas de gas pueden ser hallados experimentalmente midiendo las razones a que se difunden los diferentes gases uno en el otro. Para el nitrógeno, ha sido reportado $d = 3.15 \times 10^{-10}$ m. ¿Cuáles son el recorrido libre medio y la cantidad de colisión promedio para el nitrógeno a la temperatura ambiente ($T = 300$ K) y a la presión atmosférica?

**Solución** Hallemos primero $\rho_n$ ($= N/V$), el número de moléculas por unidad de volumen bajo estas condiciones. Partiendo de la ley del gas ideal ($pV = NkT$) obtenemos

$$\rho_n = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT} = \frac{(1 \text{ atm})(1.01 \times 10^5 \text{ Pa/atm})}{(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})}$$
$$= 2.44 \times 10^{25} \text{ moléculas/m}^3.$$

La ecuación 16 da entonces el recorrido libre medio

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\rho_n d^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi(2.44 \times 10^{25} \text{ m}^{-3})(3.15 \times 10^{-10} \text{ m})^2}$$
$$= 9.3 \times 10^{-8} \text{ m}.$$

Esto es de alrededor de 300 diámetros moleculares. En promedio, las moléculas de tal gas están separados a unos $\rho_n^{-1/3} = 3.45 \times 10^{-9}$ m, u 11 diámetros moleculares. Entonces una molécula pasará típicamente a otras 30 moléculas antes de experimentar una colisión.

Para hallar la razón promedio de colisión, primero hallamos la velocidad promedio, para lo cual usamos $v_{rms}$ dada por la ecuación 16 del capítulo 23:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})}{0.028 \text{ kg/mol}}} = 517 \text{ m/s}.$$

Hallamos la razón de colisión promedio dividiendo esta velocidad promedio entre el recorrido libre medio, o sea

$$\text{cantidad} = \frac{v}{\lambda} = \frac{517 \text{ m/s}}{9.3 \times 10^{-8} \text{ m}} = 5.6 \times 10^9 \text{ s}^{-1}.$$

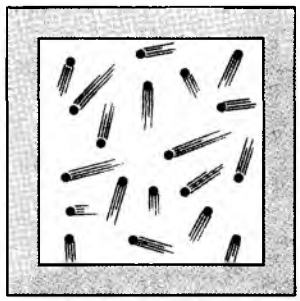


**Figura 8** Las moléculas de un gas confinado en una cámara tienen una distribución de velocidades.

En promedio, cada molécula de nitrógeno produce ¡más de 5000 millones de colisiones por segundo! El nitrógeno es el principal constituyente del aire, y por lo tanto puede considerarse que los resultados de este problema muestra son representativos del aire en condiciones normales de temperatura y de presión.

## 24-3 LA DISTRIBUCIÓN DE LAS VELOCIDADES MOLECULARES

La figura 8 muestra un pequeño número de moléculas de gas confinadas en una caja. Suponemos que el gas está en equilibrio térmico a la temperatura $T$. Las moléculas se mueven al azar y efectúan colisiones con las paredes y entre sí. Como vimos en la sección 23-4, la temperatura determina la energía cinética media por molécula, pero deseamos aprender acerca de toda la distribución de las velocidades moleculares, no sólo el valor medio. Es poco probable que todas las moléculas tengan la misma velocidad, porque las colisiones entre moléculas pronto desordenarían esta situación. Sin embargo, es igualmente poco probable que demasiadas moléculas tengan velocidades que sean muy diferentes del valor medio; las velocidades cercanas a cero o las velocidades mucho más grandes que $v_{rms}$ requerirían una secuencia de colisiones preferenciales que serían muy improbables en una condición de equilibrio.

Supongamos que tenemos una pequeña muestra que podríamos colocar en la caja para determinar el número de moléculas que la atraviesan con velocidades entre $v$ y $v + \delta v$. Luego distribuimos las velocidades medidas en casillas de anchura $\delta v$ y trazamos la distribución estadística resultante. La figura 9 muestra un conjunto de resultados que podrían obtenerse a partir de este experimento.

La distribución tiene una media claramente definida y cae a cero tanto a baja velocidad como a alta velocidad. Incluso si introdujésemos todas las moléculas en la caja con la misma velocidad, el efecto del azar en las colisiones produciría finalmente una distribución de la forma de la

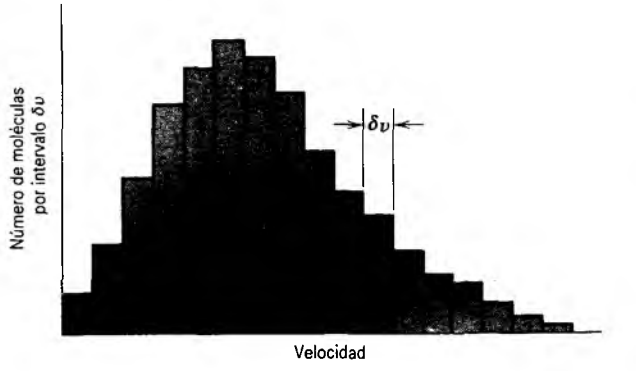



**Figura 9** Distribución de las velocidades moleculares. Como en la figura 1, las velocidades medidas han sido clasificadas en casillas de anchura $\delta v$. La altura de cada casilla da el número de moléculas con velocidades entre $v$ y $v + \delta v$.

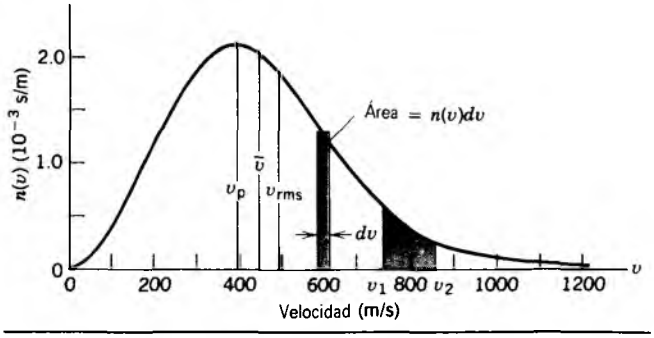



**Figura 10** Distribución de la velocidad de Maxwell para las moléculas de un gas. La curva trazada es característica de las moléculas de oxígeno a $T = 300$ K. El número de moléculas con velocidades en cualquier intervalo $dv$ es $n(v)dv$, indicado por la faja angosta sombreada. El número con velocidades dentro de cualquier límite $v_1$ y $v_2$ está dado por el área bajo la curva entre aquellos límites.

figura 9. Obsérvese la semejanza entre la figura 9 y la figura 1.

Maxwell fue el primero que resolvió el problema de la distribución de las velocidades en un gas que contiene un número grande de moléculas. La distribución de Maxwell de la velocidad, para una muestra de gas a la temperatura $T$ que contenga $N$ moléculas cada una de masa $m$, es

$$n(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}. \qquad (17)$$

En esta ecuación $n(v)$, que tiene las dimensiones de $v^{-1}$, es el número de moléculas por intervalo de velocidad unidad que tiene velocidades entre $v$ y $v + dv$; de manera equivalente, $n(v)dv$ es el número sin dimensiones de moléculas de la muestra de gas con velocidades entre $v$ y $v + dv$. Obsérvese que para un gas dado la distribución de la velocidad depende únicamente de la temperatura.

Hallamos $N$, el número total de moléculas en la muestra, al sumar (esto es, integrando) el número en cada intervalo de velocidad diferencial desde cero hasta el infinito, o sea

$$N = \int_0^\infty n(v)\, dv. \qquad (18)$$

La figura 10 muestra la distribución de Maxwell de velocidades para moléculas de oxígeno a la temperatura ambiente. Una comparación entre las figuras 9 y 10 muestra que la distribución de Maxwell de la velocidad tiene realmente la misma forma que la distribución medida.

Si bien $n(v)$ es una función matemática bien definida, la cantidad *físicamente* significativa es $n(v)dv$, el número de moléculas con velocidades entre $v$ y $v + dv$. No podemos hablar del "número de partículas con velocidad $v$", porque existe un número finito de moléculas pero un número infinito de velocidades posibles. La probabilidad de que una partícula tenga una velocidad precisamente expresada, tal como 279.343267...m/s, es exactamente cero. Sin embargo, podemos dividir la gama de las velocidades en intervalos, y la probabilidad de que una partícula tenga una velocidad dentro de un intervalo $dv$ dado (como 279 m/s a 280 m/s) tiene un valor definido distinto de cero. El número de moléculas con velocidades entre dos límites cualesquiera, como $v_1$ y $v_2$, es igual al área bajo la curva $n(v)$ entre esos límites. El área *total* bajo la curva es igual al número total de moléculas $N$, como lo muestra la ecuación 18.

La distribución $n(v)$ puede estar caracterizada por la velocidad más probable $v_p$ [la velocidad donde $n(v)$ tiene su máximo], la velocidad media $\bar{v}$, y la velocidad media cuadrática $v_{rms}$. La figura 10 ilustra la relación entre estas velocidades, y el problema muestra 6 indica cómo calcularla. La curva de distribución no es simétrica con respecto a la velocidad más probable porque la velocidad más baja debe ser cero mientras que no existe un límite clásico para la velocidad más alta que una molécula pueda tener. Por lo tanto, la velocidad media es más grande que la velocidad más probable. La velocidad media cuadrática, que involucra a la media de los cuadrados, es aún más grande.

Al aumentar la temperatura, aumenta la velocidad media cuadrática $v_{rms}$ (y también $\bar{v}$ y $v_p$), conforme a nuestra interpretación microscópica de la temperatura. A temperaturas más elevadas, el intervalo de velocidades típicas es más grande, y la distribución es más ancha. Puesto que el área bajo la curva de distribución (que es el número total de moléculas en la muestra) permanece la misma, la distribución debe también aplanarse cuando la temperatura se eleva. De aquí que el número de moléculas que tengan velocidades más grandes que cierta velocidad dada aumenta al aumentar la temperatura (véase la Fig. 11). Esto explica muchos fenómenos, tales como el aumento en la cantidad de reacciones químicas o de ciertas reacciones nucleares con el aumento de la temperatura.

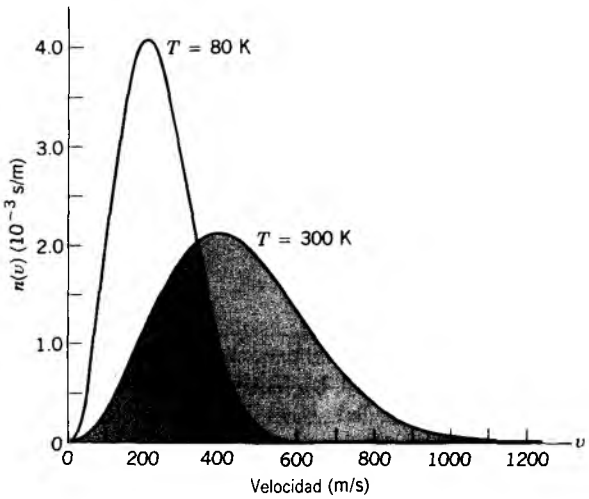



**Figura 11** Una comparación de la distribución de Maxwell de velocidades para moléculas de oxígeno a dos temperturas diferentes. En general, las moléculas tienen velocidades promedio más bajas a temperaturas más bajas, si bien ambas distribuciones cubren la gama entera de velocidades. Las áreas de las dos distribuciones son iguales, porque el número total de moléculas es el mismo en ambos casos.

La distribución de las velocidades de las moléculas en un líquido se parece también a las curvas de la figura 11. La velocidad necesaria para que una molécula escape de la superficie del líquido estaría lejos en la cola de la distribución de la figura 11; únicamente un número muy pequeño de moléculas tienen velocidades arriba de este umbral. Aun cuando la temperatura del líquido esté por debajo de su punto de ebullición normal, estas pocas moléculas pueden vencer la atracción de otras moléculas en la superficie y escapar por evaporación. El escape de estas moléculas energéticas reduce la energía cinética promedio de las moléculas restantes, dejando el líquido a una temperatura más baja. Esto explica por qué la evaporación es un proceso de enfriamiento. Si el líquido está aislado de su entorno, realmente se enfriará, y la cantidad de evaporación disminuirá. Si el líquido no está aislado, entonces la energía del entorno fluirá hacia el líquido, manteniendo constante la fracción de moléculas con velocidades arriba del umbral de evaporación, y finalmente todas las moléculas adquirirán la energía suficiente para escapar en forma de vapor.

Partiendo de la ecuación 17 vemos que la distribución de las velocidades moleculares depende de la masa de las moléculas así como de su temperatura. Cuanto más pequeña sea la masa, mayor será la proporción de moléculas de alta velocidad a cualquier temperatura dada. De aquí que el hidrógeno pueda escapar con más probabilidad de la atmósfera a grandes altitudes que el oxígeno o el nitrógeno. La Luna tiene una atmósfera tenue. Para que las moléculas en esta atmósfera tengan una probabilidad pequeña de escapar de la débil acción gravitatoria de la Luna, esperaríamos que fuesen moléculas o átomos de los elementos más pesados, tales como los gases inertes pesados criptón y xenón, los cuales fueron producidos principalmente por la desintegración radiactiva de las primeras épocas de la Luna. La presión atmosférica en la Luna es de alrededor de $10^{-13}$ la presión atmosférica de la Tierra.

---

**Problema muestra 4** Las velocidades de diez partículas en m/s son 0, 1.0, 2.0, 3.0, 3.0, 3.0, 4.0, 4.0, 5.0, y 6.0. Halle (*a*) la velocidad promedio, (*b*) la velocidad media cuadrática, y (*c*) la velocidad más probable de estas partículas.

**Solución** (*a*) La velocidad promedio es

$$\bar{v} = \frac{0 + 1.0 + 2.0 + 3.0 + 3.0 + 3.0 + 4.0 + 4.0 + 5.0 + 6.0}{10}$$

$$= 3.1 \text{ m/s}.$$

(*b*) La velocidad media cuadrática es

$$\overline{v^2} = \frac{1}{10}[0 + (1.0)^2 + (2.0)^2 + (3.0)^2 + (3.0)^2 + (3.0)^2 + (4.0)^2 + (4.0)^2 + (5.0)^2 + (6.0)^2]$$

$$= 12.5 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

y la velocidad media cuadrática es

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{12.5 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 3.5 \text{ m/s}.$$

(*c*) De las diez partículas, tres tienen velocidades de 3.0 m/s, dos tienen velocidades de 4.0 m/s, y cada una de las otras cinco tiene una velocidad diferente. De aquí que la velocidad $v_p$ más probable de una partícula sea

$$v_p = 3.0 \text{ m/s}.$$

**Problema muestra 5** Un recipiente con $N$ moléculas de oxígeno gaseoso se mantiene a 300 K. ¿Qué fracción de las moléculas tiene velocidades en la gama de 599 a 601 m/s? La masa molar $M$ del oxígeno es de 0.032 kg/mol.

**Solución** Este intervalo de velocidad $\delta v$ (= 2 m/s) es tan pequeño que podemos tratarlo como una diferencial $dv$. El número de moléculas en este intervalo es $n(v)dv$, y la fracción en ese intervalo es $f = n(v)dv/N$, donde $n(v)$ va a ser evaluada a $v$ = 600 m/s, el punto medio de la gama; véase la faja angosta sombreada en la figura 10. Usando la ecuación 17 con la sustitución $m/k = M/R$, hallamos la fracción

$$f = \frac{n(v)\,dv}{N} = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT}\,dv.$$

Sustituyendo los valores numéricos dados se obtiene

$$f = 2.6 \times 10^{-3} \text{ o } 0.26\%.$$

A la temperatura ambiente, 0.26% de las moléculas de oxígeno tienen velocidades que están en el intervalo angosto entre 599 y 601 m/s. Si la faja sombreada de la figura 10 estuviese trazada

a la escala de este problema, sería realmente una faja muy angosta.

**Problema muestra 6** ¿Cuál es la velocidad promedio $\bar{v}$, la velocidad media cuadrática $v_{rms}$, y la velocidad más probable $v_p$ de las moléculas de oxígeno a $T = 300$ K? La masa molar $M$ del oxígeno es de 0.032 kg/mol.

**Solución** Para hallar la velocidad promedio, sumamos todas las velocidades medidas, lo cual se hace más sencillamente sumando los productos de la velocidad $v$ en cada intervalo y el número en ese intervalo, $n(v)dv$. Esta suma se divide después entre el número total de mediciones $N$, lo cual da, en el límite de intervalos infinitesimales, en los que la suma resulta una integral,

$$\bar{v} = \frac{1}{N}\int_0^\infty vn(v)\,dv. \tag{19}$$

El siguiente paso es sustituir a $n(v)$ de la ecuación 17 y evaluar la integral. El resultado es

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$
$$= 1.60\sqrt{\frac{RT}{M}} \quad \text{(velocidad promedio)}. \tag{20}$$

Sustituyendo por los valores numéricos tenemos que

$$\bar{v} = 1.60\sqrt{\frac{(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}{0.032\ \text{kg/mol}}} = 445\ \text{m/s}.$$

Para hallar la velocidad media cuadrática $v_{rms}$ de las moléculas de oxígeno, procedemos como antes excepto que hallamos el valor promedio de $v^2$ al multiplicar $v^2$ (en lugar de simplemente $v$) por el factor numérico $n(v)dv$. Esto conduce, después de otra integración (véase el apéndice H), a

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^2 n(v)\,dv = \frac{3kT}{m}. \tag{21}$$

La velocidad rms es la raíz cuadrada de esta cantidad, o sea

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$
$$= 1.73\sqrt{\frac{RT}{M}} \quad \text{(velocidad rms)} \tag{22}$$

La ecuación 22 es idéntica a la ecuación 16 del capítulo 23. El cálculo numérico da

$$v_{rms} = 1.73\sqrt{\frac{(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}{0.032\ \text{kg/mol}}} = 483\ \text{m/s}.$$

La velocidad más probable es la velocidad para la cual $n(v)$ de la ecuación 17 tiene su valor máximo. Lo hallamos haciendo que $dn/dv = 0$ y resolviendo para $v$. Al hacerlo, nos da (como usted debe poder demostrar)

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$
$$= 1.41\sqrt{\frac{RT}{M}} \quad \text{(velocidad más probable)}. \tag{23}$$

Numéricamente, esto da

$$v_p = 1.41\sqrt{\frac{(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}{0.032\ \text{kg/mol}}} = 395\ \text{m/s}.$$

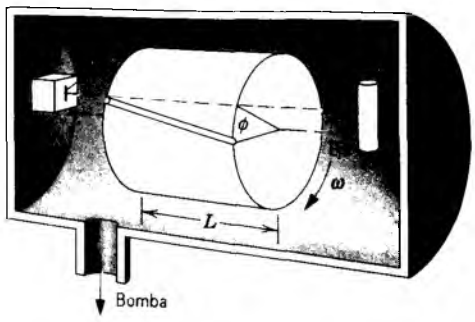



**Figura 12** Aparato empleado para verificar la distribución de Maxwell de la velocidad. Un haz de moléculas de talio deja el horno $O$ a través de la ranura $S$, viaja a través de la ranura helicoidal del cilindro giratorio $R$, y golpea al detector $D$. La velocidad angular $\omega$ del cilindro puede ser variada de modo que moléculas de velocidades diferentes pasen a través del cilindro.

## Confirmación experimental de la distribución de Maxwell

Maxwell derivó su ley de la distribución para las velocidades moleculares (Ec. 17) en 1859. En aquel entonces no era posible comprobar esta ley por medición directa y, en efecto, no fue hasta 1920 que Stern hizo el primer intento serio para llevarlo a cabo. Las técnicas mejoraron rápidamente en manos de varios experimentadores hasta que en 1955 Miller y Kusch, de la Universidad de Columbia, proporcionaron una verificación experimental de alta precisión de la ley (para moléculas gaseosas).

Su aparato se ilustra en la figura 12. Las paredes del horno $O$, que contienen cierta cantidad de metal de talio, fueron calentadas, en una serie de experimentos, a una temperatura uniforme de 870 ± 4 K. A esta temperatura el vapor de talio, a una presión de $3.2 \times 10^{-3}$ mm Hg, llena el horno. Algunas moléculas de vapor de talio escapan por la ranura $S$ hacia el espacio al alto vacío afuera del horno, cayendo sobre el cilindro giratorio $R$. Este cilindro, de longitud $L$, tiene un número de ranuras helicoidales cortadas dentro de él, una de las cuales se muestra en la figura 12. Para una velocidad angular $\omega$ del cilindro, sólo pueden pasar a lo largo de las ranuras y sin golpear las paredes moléculas de una velocidad $v$ muy definida. La velocidad $v$ puede ser hallada a partir de

$$\text{tiempo de vuelo a lo largo de la ranura} = \frac{L}{v} = \frac{\phi}{\omega}$$

o bien

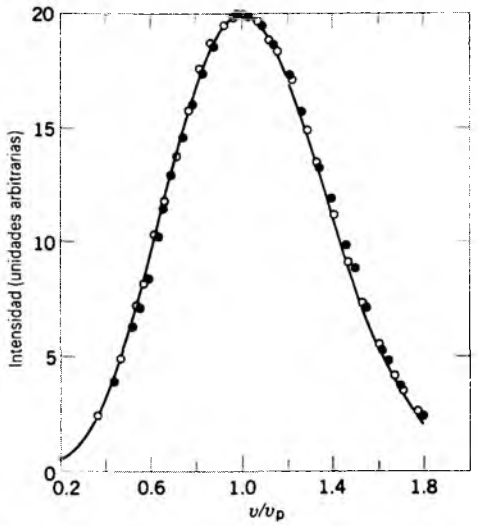



**Figura 13** Resultados del experimento para verificar la distribución de Maxwell de la velocidad. Los círculos muestran los datos tomados con la temperatura del horno a $T = 870$ K, y los puntos gruesos muestran los datos a $T = 944$ K. Al trazar las distribuciones contra $v/v_p$, las dos distribuciones deben ser idénticas. La curva de línea continua es la distribución de Maxwell. Los datos concuerdan notablemente bien con la curva.

$$v = \frac{L\omega}{\phi}$$

donde $\phi$ (véase la Fig. 12) es el desplazamiento angular entre la entrada y la salida de una ranura helicoidal. Entonces, el cilindro giratorio es un *selector de velocidad*, en el cual se selecciona la velocidad por medio de la velocidad angular (controlable) $\omega$. La intensidad del haz es registrada por el detector $D$ en función de la velocidad $v$ seleccionada. La figura 13 muestra la notable concordancia entre la teoría (la línea continua) y el experimento (los círculos y los puntos gruesos) para el vapor de talio.

La distribución de velocidades en el *haz* (distinguiéndola de la distribución de velocidades en el *horno*) no es proporcional a $v^2e^{-mv^2/2kT}$, como en la ecuación 17, sino a $v^3e^{-mv^2/2kT}$. Consideremos un grupo de moléculas en la estufa cuyas velocidades caigan en un cierto intervalo pequeño entre $v_1$ y $v_1 + \delta v$, donde $v_1$ es menor que la velocidad más probable $v_p$. Siempre podemos hallar otro intervalo de velocidad igual $\delta v$, que se extiende de $v_2$ a $v_2 + \delta v$, donde $v_2$, que será más grande que $v_p$, se elige de modo que los dos intervalos de velocidad contengan el mismo número de moléculas. Sin embargo, escaparán de la ranura $S$ más moléculas en el intervalo más alto que en el más bajo para formar el haz, porque las moléculas del intervalo más alto "bombardean" a la ranura con una frecuencia más grande, precisamente en un factor $v_2/v_1$. Así, quedando igual todo lo demás, las moléculas rápidas tienen la oportunidad de escapar del horno, justamente en proporción a sus velocidades, y las moléculas del haz tienen una distribución $v^3$ en lugar de una $v^2$. Este efecto se incluye en la curva teórica de la figura 13.

Si bien la distribución de Maxwell de la velocidad para los gases concuerda notablemente bien con el experimento en circunstancias ordinarias, no sirve, en cambio, a densidades elevadas, donde las hipótesis básicas de la teoría cinética clásica no son válidas. En estas circunstancias, debemos emplear distribuciones que se basen en los principios de la mecánica cuántica, los cuales estudiaremos en la sección 24-6. Las distribuciones cuánticas, correctas en cualquier circunstancia, se reducen a la distribución de Maxwell en la región clásica (a baja densidad). Entonces, es perfectamente aceptable para nosotros emplear la distribución de Maxwell para gases a densidad baja, mientras recordemos que la teoría, como tantas otras teorías, es de aplicación limitada.

## 24-4 LA DISTRIBUCIÓN DE LAS ENERGÍAS

Puede obtenerse una descripción alternativa del movimiento de las moléculas si expresamos la distribución de la *energía* en lugar de la velocidad. Es decir, si buscamos la distribución $n(E)$, de modo que $n(E)dE$ sea el número de moléculas con energías entre $E$ y $E + dE$.

Este problema fue resuelto por vez primera por Maxwell. Derivamos el resultado, llamado *distribución de Maxwell-Boltzmann de la energía*, en el caso especial en que la energía cinética de traslación sea la única forma de energía que puede tener la molécula.

Consideremos nuevamente la situación del problema muestra 5, en el que obtuvimos la fracción de moléculas de oxígeno con velocidades entre 599 y 601 m/s. Hallamos que 0.26% de las moléculas en el recipiente a la tempertura de 300 K tienen velocidades en este intervalo. Una moléculas de oxígeno con una velocidad de 599 m/s tiene una energía cinética de $9.54 \times 10^{-21}$ J, y otra con una velocidad de 601 m/s tiene una energía cinética de $9.60 \times 10^{-21}$ J. ¿Qué fracción de las moléculas de oxígeno tiene energías cinéticas en el intervalo de $9.54 \times 10^{-21}$ J a $9.60 \times 10^{-21}$ J?

Un poco de reflexión nos convencerá de que esta fracción debe ser también de 0.26%. No hay diferencia si contamos las moléculas por sus velocidades o por sus energías cinéticas; mientras situemos a los límites inferior y superior del intervalo con sus velocidades y energías cinéticas correspondientes, contaremos el mismo número de moléculas entre los límites. Es decir, el número con energías cinéticas entre $E$ y $E + dE$ es el mismo que el número con velocidades entre $v$ y $v + dv$. Matemáticamente, expresamos esta conclusión como:

$$n(E)\,dE = n(v)\,dv, \tag{24}$$

o bien

$$n(E) = n(v)\frac{dv}{dE}. \tag{25}$$

Puesto que la energía es únicamente cinética, debemos tener que $E = \frac{1}{2}mv^2$ o sea $v = \sqrt{2E/m}$, y entonces

$$\frac{dv}{dE} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,(\tfrac{1}{2}E^{-1/2}). \tag{26}$$

Sustituyendo las ecuaciones 17 y 26 en la ecuación 25, obtenemos

$$n(E) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(kT)^{3/2}}E^{1/2}\,e^{-E/kT}. \tag{27}$$

La ecuación 27 es la *distribución Maxwell-Boltzmann de la energía*. Al derivar este resultado hemos supuesto que las moléculas de gas tienen únicamente energía cinética de traslación. Por lo tanto, esta distribución se aplica únicamente a un gas monoatómico. En el caso de gases con moléculas más complejas aparecerán otros factores en la ecuación 27. El factor $e^{-E/kT}$, sin embargo, es una característica general de la distribución Maxwell-Boltzmann de la energía que está presente sin importar cuál sea la forma de la energía $E$. Este factor se toma a menudo como una estimación aproximada de la probabilidad relativa de que una partícula tenga una energía $E$ en un conjunto de partículas caracterizadas por una temperatura $T$.

Usando la ecuación 27, podemos calcular la fracción de las moléculas de gas que tengan energías entre $E$ y $E + dE$, la cual está dada por $n(E)dE/N$. Como antes, $N$ es el número total de moléculas, el cual se determina a partir de

$$N = \int_0^\infty n(E)\,dE. \tag{28}$$

Un aspecto interesante de la distribución Maxwell-Boltzmann de la energía es que es precisamente la misma para cualquier gas a una temperatura dada, independientemente de cuál sea la masa de las moléculas (al contrario de lo que sucede con la distribución de Maxwell de la velocidad, ecuación 17, donde la masa aparece explícitamente). Incluso un "gas" de electrones, hasta el punto en que puedan ser tratados como partículas clásicas, tiene la misma distribución de energía que un gas de átomos pesados. El efecto de aumentar la masa $m$ en cierto factor es reducir a $v^2$ en el mismo factor, de modo que el producto $mv^2$, y por lo tanto la energía cinética, permanece la misma.

## La energía interna de un gas ideal

Adquirimos un grado de confianza en este enfoque estadístico a la termodinámica demostrando que reproduce resultados idénticos con cálculos basados en la teoría cinética. Obtengamos por lo tanto el resultado estadístico para la energía interna de un gas ideal y comparémoslo con nuestro resultado previo.

Puesto que existen $n(E)dE$ moléculas con energía entre $E$ y $E + dE$, su contribución a la energía interna de este gas es de $En(E)dE$. El total de todas esas contribuciones da la energía interna del gas:

$$E_{\text{int}} = \int_0^\infty En(E)\,dE,$$

y al sustituir a $n(E)$ de la ecuación 27, obtenemos

$$E_{\text{int}} = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(kT)^{3/2}}\int_0^\infty E^{3/2}e^{-E/kT}\,dE.$$

En la mecánica estadística suelen presentarse integrales de formas similares a ésta. Pongámosla en la forma normal sustituyendo $u = E/kT$, lo cual da

$$E_{\text{int}} = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}kT\int_0^\infty u^{3/2}e^{-u}\,du.$$

La integral puede ser evaluada (sustituya a $u = x^2$ y use una integral definida del apéndice H) para que sea $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ y entonces

$$E_{\text{int}} = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}kT\,(\tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}) = \tfrac{3}{2}NkT,$$

en concordancia con la ecuación 31 del capítulo 23. Así, la distribución Maxwell-Boltzmann de la energía es enteramente consistente con nuestros resultados previos derivados de la teoría cinética.

---

**Problema muestra 7** Halle (*a*) la energía media y (*b*) la energía más probable de un gas en equilibrio térmico a la temperatura $T$.

**Solución** (*a*) La energía media $\overline{E}$ puede expresarse, en analogía con la ecuación 19 del problema muestra 6,

$$\overline{E} = \frac{1}{N}\int_0^\infty En(E)\,dE. \tag{29}$$

Sustituyendo a $n(E)$ de la ecuación 27 y efectuando la integración, hallamos

$$\overline{E} = \tfrac{3}{2}kT. \tag{30}$$

¿Es éste un resultado esperado?

(*b*) Para hallar la energía más probable, diferenciamos la ecuación 27, igualamos el resultado a cero, y resolvemos para la energía. El resultado, cuya derivación dejamos a usted, es

$$E_p = \tfrac{1}{2}kT. \tag{31}$$

Obsérvese que ésta *no es igual* a $\frac{1}{2}mv_p^2$, la cual da una energía de $kT$. ¿Puede usted explicar por qué la energía correspondiente a la velocidad más probable no es la energía más probable?

## 24-5 MOVIMIENTO BROWNIANO*

La aceptación de la teoría atómica y molecular durante el último cuarto del siglo XIX no fue compartida por todos los científicos. A pesar de las muchas concordancias cuantitativas entre la teoría cinética y el comportamiento de los gases, no se obtuvo una prueba de la existencia de átomos y moléculas por separado, ni se hizo ninguna observación que pudiera demostrar realmente los movimientos de las moléculas. Ernst Mach (1838-1916) no encontraba que tuviera sentido "pensar en el mundo como un mosaico, puesto que no podemos examinar por separado cada uno de los trozos de piedra". En los primeros días del desarrollo de la teoría cinética se había establecido que un átomo tendría un diámetro de unos $10^{-7}$ ó $10^{-8}$ cm, de modo que nadie esperaba ver realmente a un átomo o detectar el efecto de un átomo aislado.

El líder de la oposición a la teoría atómica fue Wilhelm Ostwald, generalmente considerado "el padre de la química física." Él era un acérrimo creyente del principio de la conservación de la energía y consideraba a ésta como una realidad última. Ostwald argumentaba que con el tratamiento termodinámico de un proceso conocemos todo lo esencial respecto al proceso y que hipótesis mecánicas más avanzadas sobre el mecanismo de las reacciones eran hipótesis no demostradas. Él abandonó las teorías atómica y molecular, y luchó por liberar a la ciencia "de conceptos hipotéticos que no conducen a conclusiones inmediatas verificables experimentalmente". Otros científicos destacados se resistían a aceptar la existencia de átomos como un hecho científico establecido.

Ludwig Boltzmann combatió esta actitud en un artículo en 1897, reforzando la indispensabilidad del atomismo en la ciencia natural. El progreso de la ciencia se guía a menudo por las analogías de los procesos de la naturaleza que ocurren en las mentes de los investigadores. La teoría cinética fue una de estas analogías mecánicas. Como sucede con casi todas las analogías, sugiere experimentos para probar la validez de nuestras imágenes mentales y conduce a investigaciones posteriores y a un conocimiento más claro.

Como sucede siempre en tales controversias de la ciencia, la decisión depende del experimento. La evidencia experimental primera y más directa de la realidad de los átomos fue la prueba de la teoría cinética atómica dada por los estudios cuantitativos del movimiento browniano. Estas observaciones convencieron tanto a Mach como a Ostwald de la validez de la teoría cinética y de la descripción atómica de la materia en que descansa. La teoría atómica ganó una aceptación cuestionable en los últimos años cuando una gran variedad de experimentos condujeron a los mismos valores de las constantes atómicas fundamentales.

El movimiento browniano se llamó así en honor del botánico inglés Robert Brown, quien descubrió en 1827 que un grano de polen suspendido en agua muestra un movimiento continuo al azar cuando es visto bajo un microscopio. Al principio estos movimientos fueron considerados una forma de vida, pero pronto se encontró que partículas inorgánicas pequeñas se comportaban similarmente. No hubo una explicación cuantitativa de este fenómeno hasta el desarrollo de la teoría cinética. Entonces, en 1905, Albert Einstein desarrolló una teoría del movimiento browniano. (La teoría de Einstein apareció como un artículo en el mismo volumen de los *Annalen der Physik* que contenía su famoso trabajo sobre la teoría de la relatividad y también su trabajo sobre la teoría del efecto fotoeléctrico.) En sus *Notas autobiográficas*, Einstein escribe: "Mi objetivo principal en esto fue hallar hechos que garantizasen hasta donde fuera posible la existencia de átomos de tamaño definido. A la mitad de ello descrubrí que, de acuerdo con la teoría atomística, tendría que haber un movimiento de las partículas microscópicas suspendidas abierto a la observación, sin saber que las observaciones concernientes al movimiento browniano ya hacía tiempo que resultaban familiares."

La hipótesis básica de Einstein fue que las partículas suspendidas en un líquido o en un gas compartían los movimientos térmicos del medio y que, en promedio, la energía cinética de traslación de cada partícula es $\frac{2}{3}kT$, de acuerdo con el principio de la equipartición de la energía. Desde este punto de vista los movimientos brownianos eran el resultado de los impactos de las moléculas del fluido, y las partículas suspendidas adquieren la misma energía cinética media que las moléculas del fluido. (Recuérdese que la distribución Maxwell-Boltzmann de la energía es independiente de la masa de las partículas y está determinada únicamente por la temperatura.)

Las partículas suspendidas son extremadamente grandes comparadas con las moléculas del fluido y están bombardeadas continuamente por ellas desde todos los lados. Si las partículas son suficientemente grandes y el número de moléculas es suficientemente grande, números iguales de moléculas golpean a las partículas por todos lados en cada instante. Para partículas más pequeñas y menos moléculas el número de moléculas que golpean a diferentes lados de la partícula en cualquier instante, siendo meramente un asunto del azar, puede no ser igual: es decir, ocurren fluctuaciones. De aquí que la partícula sufra en todo instante una fuerza no balanceada, que hace que se mueva de esta o aquella manera. Por lo tanto, las partículas actúan precisamente como moléculas muy grandes en el fluido, y sus movimientos deben ser cualitativamente los mismos que el movimiento de las moléculas del fluido. Si la constante de Avogadro fuese

* Véase "Brownian Motion", por Bernard H. Lavenda, *Scientific American*, febrero de 1985, pág. 70.

infinita, no existiría un desequilibrio estadístico (fluctuaciones) y tampoco un movimiento browniano. Si la constante de Avogadro fuese muy pequeña, el movimiento browniano sería muy grande. De aquí que deberíamos estar en posibilidad de deducir el valor de la constante de Avogadro a partir de las observaciones del movimiento browniano. Profundamente arragiados en esta imagen se halla la idea del movimiento molecular y de la pequeñez de las moléculas. Por lo tanto, el movimiento browniano ofrece una prueba experimental sorprendente de las hipótesis de la teoría cinética.

Las partículas suspendidas están bajo la influencia de la gravedad y se irían hasta el fondo del fluido si no fuese por el bombardeo molecular que se opone a esta tendencia. Puesto que las partículas suspendidas se comportan como las moléculas de gas, no nos sorprende saber que, como en las moléculas de la atmósfera, su densidad decae exponencialmente con respecto a la altura en el fluido; forman una "atmósfera en miniatura" (véase la sección 17-3; el problema 6 del capítulo 23; y el problema 32 de este capítulo). Jean Perrin, fisicoquímico francés, confirmó esta predicción en 1908 al determinar el número de partículas pequeñas de resina gomosa suspendidas a diferentes alturas en una gota de líquido (Fig. 14*a*). A partir de sus datos él dedujo un valor de la constante de Avogadro $N_A = 6 \times 10^{23}$ partículas/mol. Perrin hizo también mediciones de los desplazamientos de partículas brownianas en muchos intervalos de tiempo iguales y halló que tenían la distribución estadística requerida por la teoría cinética y el desplazamiento medio cuadrático predicho por Einstein (Fig. 14*b*). Perrin fue premiado con el Premio Nobel de Física en 1926 por este trabajo, que fue una confirmación extraordinariamente precisa de la existencia de los átomos. Hoy día tenemos una evidencia fotográfica más directa de la existencia de los átomos (Fig. 15).

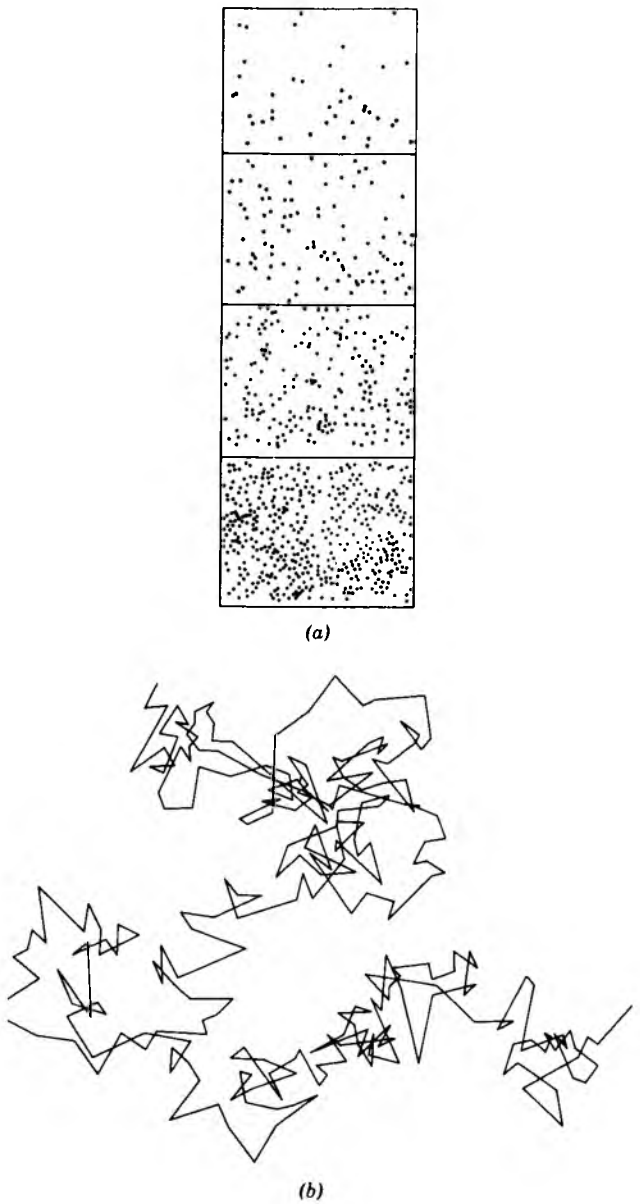



**Figura 14** (*a*) Representación de las partículas de resina gomosa observadas por Perrin en 1909. Las líneas horizontales representan capas a 0.01 cm de separación, y las partículas tienen un diámetro de $0.6 \times 10^{-3}$ cm. (*b*) El movimiento de una partícula diminuta, suspendida en agua y vista a través de un microscopio. Los segmentos de línea cortos conectan su posición a intervalos de 30 s. La trayectoria de la partícula es un ejemplo de un *fractal*, curva de la que cualquier sección pequeña se parece a toda la curva. Por ejemplo, si tomamos a cualquier segmento pequeño de 30 s y lo vemos en intervalos más pequeños, de 0.1 s quizá, la gráfica del movimiento en ese segmento de 30 s sería similar a la figura entera.

## 24-6 DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS CUÁNTICAS *(Opcional)*

Hasta el momento, nuestro estudio de la teoría cinética y de la mecánica estadística ha implicado la aplicación de los principios clásicos (las leyes de Newton) a las partículas clásicas. Sin embargo, cuando consideramos los efectos de la mecánica cuántica, las distribuciones estadísticas difieren en gran manera de sus contrapartes clásicas y conducen a efectos experimentales que no tienen análogos clásicos. Existen dos principios de la mecánica cuántica que afectan las distribuciones estadísticas de las partículas.

1. *En la mecánica cuántica, partículas idénticas deben ser consideradas como indistinguibles.* En el modelo del gas ideal que constituye la base de la teoría cinética supusimos que todos los átomos o las moléculas del gas eran idénticos. No obstante, pudimos seguir (véase, por ejemplo, nuestro uso de la teoría cinética para determinar la presión en la sección 23-3) el movimiento de una *partícula aislada* en su camino a través de la cámara. Es decir, supusimos que la molécula es algo *distinguible* de sus vecinas, aunque sea idéntica a ellas en su estructura y propiedades. En cambio, esto no es posible en la mecánica cuántica. Debemos considerar a las partículas como física y

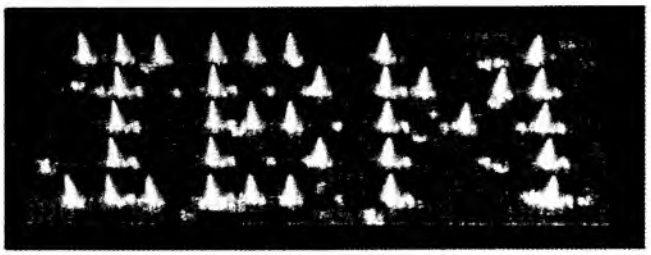


**Figura 15** Mediante un microscopio de barrido con efecto túnel, físicos de IBM dibujaron en 1990 el monograma de su compañía usando átomos individuales de xenón.

matemáticamente *indistinguibles*; en la teoría cuántica no podemos considerar el movimiento de una partícula determinada del sistema sin considerar simultáneamente a todas las demás partículas idénticas. Por ejemplo, después de una colisión entre dos partículas idénticas tales como las moléculas de un gas, desde el punto de vista clásico, nos es posible distinguir cuál fue la partícula incidente y cuál la partícula golpeada; desde el punto de vista cuántico, cualquier partícula que salga de la zona de colisión tiene un 50% de probabilidad de haber sido la partícula incidente y un 50% de probabilidad de haber sido la partícula golpeada.

**2.** *Dentro del dominio cuántico, las partículas de un sistema pueden dividirse en dos clases: aquellas para las que no existe límite en el número de las que pueden estar en determinado estado de movimiento, y aquellas para las que el límite es precisamente una por estado de movimiento.* Podemos considerar esta regla como una regla experimental, basada en las observaciones de las propiedades de las dos clases de partículas. Sin embargo, esta regla tiene también un significado teórico profundo subyacente, basado en un resultado que puede derivarse de la teoría cuántica del campo: las partículas de la primera clase, para las que el número en cualquier estado de movimiento es ilimitado, todas tienen un ímpetu angular intrínseco, o "espín" (véase la sección 13-6) que resulta ser un múltiplo entero de $h/2\pi$, donde $h$ es la constante de Planck. Tales partículas, de las que son ejemplos los fotones (cuantos de radiación electromagnética) y los átomos del isótopo más común del gas helio, se llaman *bosones*, y siguen una distribución estadística llamada *distribución de Bose-Einstein.*

Se encuentra que la segunda clase de partícula cuántica, que está restringida a una por estado de movimiento, tiene un ímpetu angular intrínseco medido en múltiplos semienteros de $h/2\pi$ ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, . . . ). Las partículas de esta categoría, que incluyen a los electrones, los neutrones, y los protones, se llaman *fermiones*, y siguen una distribución estadística llamada *distribución de Fermi-Dirac.*

La restricción de un fermión por estado de movimiento se conoce también como el *principio de exclusión de Pauli* y es reponsable de las propiedades observadas de los átomos. Los estados de movimiento permitido de los electrones en un átomo forman un conjunto de niveles discretos de energía (véase la sección 8-8). Si no fuese por el principio de exclusión de Pauli, todos los electrones en un átomo irían finalmente al estado de energía más bajo, y todos los átomos tendrían propiedades físicas y químicas más o menos similares. La diversidad de nuestro mundo y la propia existencia de la química y de la biología son consecuencias directas del principio de exclusión de Pauli.

**Problema muestra 8** Un sistema consta de dos partículas, marcadas 1 y 2. Las partículas pueden estar en cualquiera de tres estados de movimiento posibles, marcados *A*, *B*, y *C*. Halle el número de modos en que pueden estar distribuidas las partículas en este sistema si las partículas son (*a*) clásicas y distinguibles; (*b*) bosones indistinguibles, y (*c*) fermiones indistinguibles. (*d*) Suponiendo que todos los arreglos permitidos sean igualmente probables, ¿cuál es la probabilidad de hallar una partícula en el estado *B* y la otra en el estado *C*?

**Solución** (*a*) La tabla siguiente muestra cómo pueden distribuirse las partículas clásicas entre los tres estados:

| *Arreglo* | *Estado A* | *Estado B* | *Estado C* |
|---|---|---|---|
| 1 | 1, 2 | | |
| 2 | | 1, 2 | |
| 3 | | | 1, 2 |
| 4 | 1 | 2 | |
| 5 | 1 | | 2 |
| 6 | 2 | 1 | |
| 7 | 2 | | 1 |
| 8 | | 1 | 2 |
| 9 | | 2 | 1 |

Son posibles nueve arreglos diferentes.

(*b*) Si se considera que las partículas sean partículas cuánticas indistinguibles, entonces las marcas 1 y 2 no tienen ya ningún significado. Por lo tanto, no es posible listar las ordenaciones 4 y 6 como posibilidades por separado; debemos combinar éstas en un solo arreglo en el que una partícula está en el estado *A* y la otra está en el estado *B*. Del mismo modo, los arreglos 5 y 7 deben contarse como una posibilidad únicamente, lo mismo que los arreglos 8 y 9. En este caso, sólo son posibles seis arreglos diferentes.

(*c*) Si las partículas son fermiones, no más de una partícula puede estar en cualquier estado de movimiento. Por lo tanto 1, 2, y 3 no están permitidos, y como resultado únicamente son posibles tres arreglos (4 + 6, 5 + 7, y 8 + 9).

(*d*) Para las partículas clásicas existen dos arreglos (entre nueve) que tienen una partícula cada una en los estados *B* y *C*. Por lo tanto, la probabilidad es de 2/9. Para los bosones, existen seis arreglos, de los cuales sólo uno (la combinación 8 + 9) tiene una partícula en cada uno de los estados *B* y *C*. Entonces la probabilidad es de 1/6. Para los fermiones, sólo están permitidos tres arreglos, y por lo tanto la probabilidad es de 1/3.

El problema muestra anterior ilustra las diferencias en las distribuciones estadísticas de las partículas clásicas y las dos clases de partículas cuánticas; muestra también que el resultado de una medición (la probabilidad de una observación) puede ser afectado directamente por estas distinciones.

La función de la distribución de Maxwell-Boltzmann se derivó de los principios clásicos y, por lo tanto, es apropiada únicamente para describir las partículas clásicas. La parte característica de esa distribución es la función exponencial

$$f_{\text{MB}}(E) = e^{-E/kT}. \tag{32}$$

A partir de consideraciones estadísticas, puede demostrarse que la parte característica correspondiente de la distribución de Bose-Einstein es

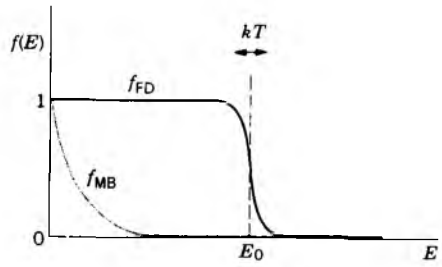



**Figura 16** La función característica Fermi-Dirac comparada con la función de Maxwell-Boltzmann. La función de Fermi-Dirac difiere en 1 a baja energía y en 0 a energía elevada únicamente en un estrecho intervalo de ancho $kT$ aproximadamente en las cercanías de la energía $E_0$.

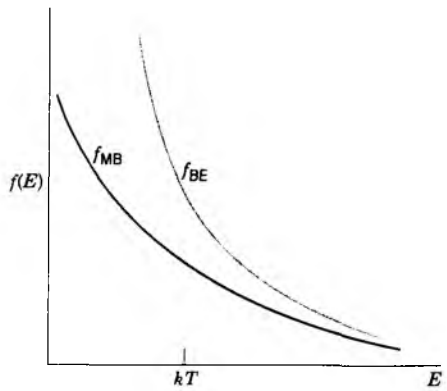



**Figura 17** La función característica Bose-Einstein comparada con la función de Maxwell-Boltzmann. Las dos concuerdan a energía elevada, donde los efectos cuánticos se vuelven despreciables, pero están sustancialmente en desacuerdo a baja energía, donde $f_{BE}$ se vuelve infinita al tender $E$ a $E_0$, la cual suponemos aquí que es cero.

$$f_{BE}(E) = \frac{1}{e^{(E-E_0)/kT} - 1}. \tag{33}$$

donde la energía $E_0$ es un parámetro que depende de la densidad de las partículas y de otros aspectos de su naturaleza. La distribución de Fermi-Dirac se caracteriza por la función

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{(E-E_0)/kT} + 1}. \tag{34}$$

Nótese que la diferencia aparentemente menor de un signo en los denominadores de las ecuaciones 33 y 34 constituye una diferencia drástica en el comportamiento de las partículas descrito por estas dos funciones. Las figuras 16 y 17 ilustran esta diferencia. La función $f_{BE}$ tiende al infinito cuando la energía tiende a $E_0$; entonces, no existe nada que impida que todas las partículas de un sistema de bosones vaya a un único nivel de energía. En esta condición, todas las partículas tienen, en efecto, el mismo estado de movimiento, y toda la sustancia se comporta cooperativamente. Un ejemplo de tal efecto ocurre en el caso del helio líquido ($^4$He), donde el movimiento cooperativo de todos los átomos es responsable de su facultad de fluir con una viscosidad absolutamente nula aun a través de la más angosta

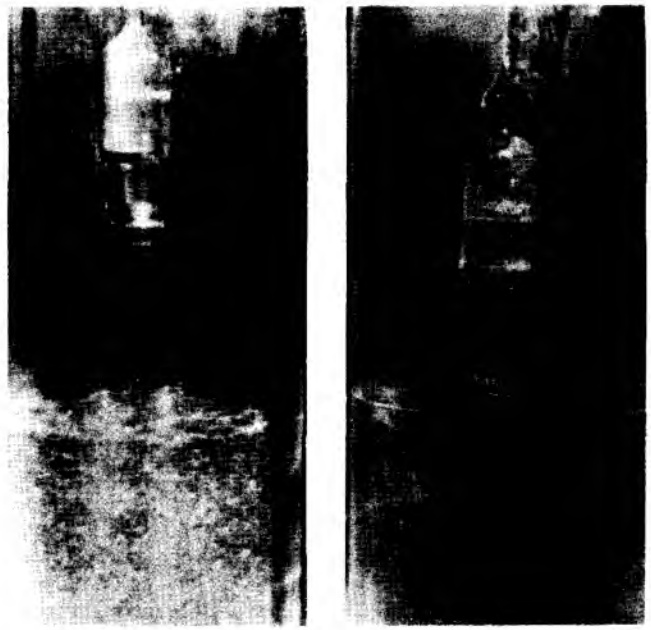


**Figura 18** (*a*) Por encima de 2.2 K el helio líquido hierve normalmente. (*b*) Abajo de 2.2 K, el líquido cesa de hervir súbitamente. La evaporación y el enfriamiento pueden continuar, pero ocurren sin ebullición. En esta condición el helio está en su estado de superfluido.

de las constricciones. Este efecto se llama *superfluidez* y ocurre cuando el helio es enfriado por debajo de una temperatura de 2.2 K. (A manera de contraste, el otro isótopo estable de helio, $^3$He, es un fermión y no muestra superfluidez hasta que es enfriado por debajo de 0.002 K, temperatura a la cual pueden juntarse dos átomos de $^3$He para formar un sistema molecular que se comporta como un bosón.) El superfluido se caracteriza también por una conductividad térmica infinita, de modo que la ebullición cesa por debajo de 2.2 K (Fig. 18), y por un efecto cooperativo llamado "flujo en película", en el cual el helio puede fluir por las paredes de su recipiente y gotear desde el fondo (Fig. 19). Otras aplicaciones en las que la distribución de Bose-Einstein produce resultados diferentes de los de la distribución clásica de Maxwell-Boltzmann incluyen el cálculo del espectro de radiación térmica emitido por los objetos (véase la sección 49-2 de la versión ampliada) y de las capacidades caloríficas de los sólidos (véase la sección 25-3); en el último caso son los modos vibratorios de los átomos del sólido los que se comportan cooperativamente y están sometidos a la distribución.

Obsérvese, al comparar las figuras 16 y 17, que la distribución de Fermi-Dirac tiene un comportamiento muy diferente a baja energía a la distribución de Bose-Einstein. En lugar de permitir que todas las partículas vayan al estado de energía más bajo, la distribución de Fermi-Dirac permite cuando más una partícula en cualquier estado de energía. Éste es exactamente el requisito impuesto por el principio de exclusión de Pauli. Ejemplos de los efectos que resultan de la aplicación de la distribución de Fermi-Dirac incluyen la conducción eléctrica en los sólidos (véase el capítulo 53 de la versión ampliada de este texto) y las propiedades de las estrellas de neutrones.

La superconductividad (la facultad de ciertos materiales de conducir electricidad sin resistencia; véase la sección 32-8) es

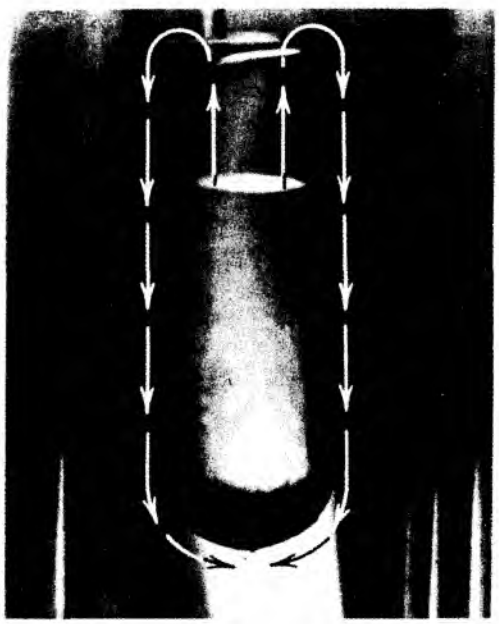


**Figura 19** Una ilustración del comportamiento cooperativo del helio en el estado de superfluido es el flujo en película, en el que el líquido dentro del recipiente se desliza espontáneamente por las paredes y puede verse que gotea en el fondo.

otro ejemplo del efecto de las diferentes distribuciones estadísticas cuánticas. Por lo común, la conducción de electrones en un sólido obedece a la distribución de Fermi-Dirac, la cual impide el comportamiento cooperativo al permitir no más de un electrón por estado de movimiento. En un superconductor, dos electrones se juntan para formar un par, y los electrones apareados se comportan como un bosón en lugar de un fermión. Están entonces sometidos a la estadística de Bose-Einstein, la cual permite el comportamiento cooperativo que da lugar a la superconductividad.

Cuando la densidad de las partículas es muy baja o la temperatura es muy elevada, el término exponencial de los denominadores de las ecuaciones 33 y 34 se vuelve mucho mayor de 1, y el 1 puede ser despreciado. En este caso, tanto $f_{BE}$ como $f_{FD}$ dependen de $E$ como $e^{-E/kT}$, que es la misma dependencia de la energía que tiene la $f_{MB}$. Entonces, las distribuciones cuánticas se reducen a la clásica en el límite de baja densidad o de alta temperatura. El límite de baja densidad se aplica en el caso de un gas; como descubrimos en el problema muestra 3, la distancia media entre las moléculas de un gas es típicamente de más de 10 diámetros moleculares, y una molécula puede recorrer varios cientos de diámetros antes de encontrar a otra molécula. Por lo tanto, la indistinguibilidad de las moléculas no afecta nuestra facultad de seguir el curso de las moléculas de gas, y la distribución clásica proporciona una representación muy precisa de las propiedades del gas. No obstante, en los líquidos y en los sólidos el espaciamento medio se aproxima más a 1 diámetro molecular, y la distribución clásica por lo común no es aplicable. ■

## PREGUNTAS

1. Considere el caso en que el recorrido libre medio es mayor que la dimensión más grande de un recipiente. ¿Es éste un vacío perfecto para una molécula en esta vasija?
2. Liste las maneras eficaces de aumentar el número de colisiones moleculares por unidad de tiempo en un gas.
3. Dé una explicación cualitativa de la conexión entre el recorrido libre medio de las moléculas de amoniaco en el aire y el tiempo que tarda en sentirse el olor del amoniaco cuando se abre una botella en el otro lado del salón.
4. Considere el principio de Arquímedes aplicado a un gas. ¿No es verdad que una vez que aceptamos el modelo de la teoría cinética de un gas necesitamos una nueva explicación de este principio? Por ejemplo, supongamos que el recorrido libre medio de una molécula de gas es comparable a la profundidad del cuerpo sumergido en el gas, o mayor.¿Cuál es entonces el origen de la fuerza de flotación? (Véase "Archimedes' Principle in Gases", por Alan J. Walton, *Contemporary Physics*, marzo de 1969, pág. 181.)
5. Un gas puede transmitir únicamente aquellas ondas sonoras cuya longitud de onda sea larga comparada con el recorrido libre medio. ¿Puede usted explicar esto? Describa una situación en la cual esta limitación sería importante.
6. Si las moléculas no son esféricas, ¿qué significado podemos dar a $d$ en la ecuación 16 para el recorrido libre medio? ¿En qué gases actuarían las moléculas en la forma más parecida a esferas rígidas?
7. ¿En qué sentido es el recorrido libre medio una propiedad macroscópica de un gas en lugar de una microscópica?
8. Supongamos que eliminamos la hipótesis de las colisiones elásticas en la teoría cinética y consideramos a las moléculas como centro de fuerza que actúa a distancia. ¿Tiene algún significado el concepto de recorrido libre medio en estas circunstancias?
9. Puesto que la fuerza real entre las moléculas depende de la distancia entre ellas, las fuerzas pueden causar dispersiones aun si las moléculas están lejos de "estar en contacto" entre sí. Además, la dispersión causada dependería de qué tan largo sea el tiempo en que actúan estas fuerzas y por lo tanto de la velocidad relativa de las moléculas. (*a*) ¿Esperaría usted que el recorrido libre medio medido dependa de la temperatura, aun cuando la densidad permanezca constante? (*b*) De ser así, ¿esperaría usted que $\lambda$ aumente o disminuya con la temperatura? (*c*) ¿Cómo interviene esta dependencia en la ecuación 16?

10. Cuando una lata de nueces de diferente tamaño se sacude, ¿por qué la nuez más grande acaba generalmente en la superficie, aun cuando es más densa que las otras?
11. En una cantidad fija de gas, ¿cómo se afectaría el recorrido libre medio si (*a*) la densidad del gas se duplica, (*b*) la velocidad molecular media se duplica, y (*c*) si tanto la densidad como la velocidad molecular media se duplican?
12. Justifique cualitativamente la aseveración de que, en una mezcla de moléculas de diferentes clases en completo equilibrio, cada clase de molécula tiene la misma distribución de Maxwell de la velocidad que la que tendría si no estuviesen presentes las otras clases.
13. Un gas consta de $N$ partículas. Explique por qué $v_{rms} \geq \bar{v}$ cualquiera que sea la distribución de velocidades.
14. ¿Qué observación es una buena evidencia de que no todas las moléculas de un cuerpo se mueven con la misma velocidad a una temperatura dada?
15. La fracción de moléculas dentro de un intervalo $\Delta v$ dado de la velocidad rmc disminuye al elevarse la temperatura de un gas. Explique.
16. (*a*) ¿Tienen la mitad de las moléculas de un gas en equilibrio térmico velocidades más grandes que $v_p$? ¿Que $\bar{v}$? ¿Que $v?_{rms}$? (*b*) ¿Qué velocidad —$v_p$, $\bar{v}$, o $v_{rms}$— corresponde a una molécula que tenga energía cinética promedio?
17. Considere la distribución de velocidades mostrada en la figura 20. (*a*) Liste $v_{rms}$, $\bar{v}$, y $v_p$ en orden de velocidad creciente. (*b*) ¿Cómo se compara esto con la distribución maxwelliana?
18. La figura 21 muestra la distribución de la componente $x$ de las velocidades de las moléculas en un recipiente a una temperatura fija. (*a*) La distribución es simétrica con respecto a $v_x = 0$; haga esto posible. (*b*) ¿Qué representa el área total bajo la curva? (*c*) ¿Cómo cambiaría la distribución al aumentar la temperatura? (*d*) ¿Cuál es el valor de $v_x$ más probable? (*e*) ¿Es la velocidad más probable igual a cero? Explique.
19. El sistema de ranura de la figura 12 selecciona únicamente aquellas moléculas que se muevan en la dirección $+x$. ¿Destruye esto la validez del experimento como una medida de la distribución de velocidades de las moléculas que se mueven en todas direcciones?
20. Liste ejemplos del movimiento browniano en los fenómenos físicos.
21. ¿Ocurriría el movimiento browniano en un espacio libre de gravedad?
22. Una pelota de golf está suspendida del techo por medio de un cordón largo. Explique en detalle por qué su movimiento browniano no es visible.
23. Hemos definido $\rho_n$ como el número de moléculas por unidad de volumen de un gas. Si definimos a $\rho_n$ para un volumen muy pequeño de un gas, digamos, uno igual a 10 veces el volumen de un átomo, entonces $\rho_n$ fluctúa con el tiempo dentro del intervalo entre cero y algún valor máximo. ¿Cómo podemos entonces justificar la afirmación de que $\rho_n$ tiene un valor definido en cada punto de un gas?

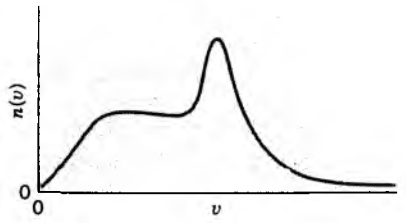



**Figura 20** Pregunta 17.

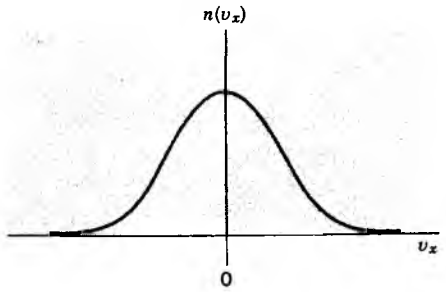



**Figura 21** Pregunta 18.

## PROBLEMAS

### *Sección 24-1 Distribuciones estadísticas y valores medios*

1. Suponga que tiene usted una colección de $N$ objetos. El número de maneras en que puede usted seleccionar a $n$ de éstos, si el orden no es importante, es $N!/n!\ (N - n)!$ Usando esta fórmula, derive la ecuación 5. (*Sugerencia:* Divida una baraja en 13 de corazones y 39 de las demás. ¿De cuántas maneras puede usted seleccionar $h$ corazones de entre los 13? ¿De cuántas maneras puede usted seleccionar 13 - $h$ cartas de entre las 39 cartas que no sean de corazones? ¿Cuántas maneras existen para seleccionar 13 cartas *cualesquiera* de la baraja?)

### *Sección 24-2 Recorrido libre medio*

2. Sustituya la ecuación 10 en la ecuación 12 y evalúe las integrales para obtener la ecuación 13.
3. El denominador de la ecuación 12 es igual al número total de partículas $N$. Use esto para demostrar que la constante $A$ de la ecuación 14 está dada por $A = N/\lambda$.

4. A 2500 km sobre la superficie de la Tierra la densidad es de 1.0 molécula/cm³ aproximadamente. (*a*) ¿Qué recorrido libre medio se predice según la ecuación 16 y (*b*) ¿cuál es su significado en estas condiciones? Suponga un diámetro molecular de $2.0 \times 10^{-8}$ cm.
5. A la temperatura y presión estándar (0°C y 1.00 atm) el recorrido libre medio en el gas helio es de 285 nm. Determine (*a*) el número de moléculas por metro cúbico y (*b*) el diámetro efectivo de los átomos de helio.
6. En cierto acelerador de partículas los protones viajan alrededor de una trayectoria circular de 23.5 m de diámetro dentro de una cámara con $1.10 \times 10^{-6}$ mm Hg de presión y 295 K de temperatura. (*a*) Calcule el número de moléculas de gas por metro cúbico a esta presión. (*b*) ¿Cuál es el recorrido libre medio de las moléculas del gas en estas condiciones si el diámetro molecular es de $2.20 \times 10^{-8}$ cm?
7. El recorrido libre medio $\lambda$ de las moléculas de un gas puede ser determinado a partir de mediciones (por ejemplo, a partir de la medición de la viscosidad del gas). A 20.0°C y 75.0 cm Hg de presión tales mediciones dan valores de $\lambda_{Ar}$(argón) = $9.90 \times 10^{-6}$ cm y $\lambda_{N_2}$ (nitrógeno) = $27.5 \times 10^{-6}$ cm. (*a*) Halle la razón entre los diámetros de la sección transversal efectiva del argón al nitrógeno. (*b*) ¿Cuál sería el valor del recorrido libre medio del argón a 20.0°C y 15.0 cm Hg? (*c*) ¿Cuál sería el valor del recorrido libre medio del argón a −40.0°C y 75.0 cm Hg?
8. Calcule el recorrido libre medio de 35 cápsulas esféricas en un frasco que es agitado vigorosamente. El volumen del frasco es de 1.0 L y el diámetro de una cápsula es de 1.0 cm.
9. ¿A qué frecuencia sería la longitud de onda del sonido del orden del recorrido libre medio en nitrógeno a 1.02 atm de presión y 18.0°C? Considere que el diámetro de la molécula de nitrógeno es de 315 pm. Véase el problema 42 del capítulo 23.
10. (*a*) Halle la probabilidad de que una molécula recorra una distancia cuando menos igual al recorrido libre medio antes de su próxima colisión. (*b*) ¿A qué distancia desde la última colisión es la probabilidad de haber sufrido la próxima colisión igual a $\frac{1}{2}$? Dé la respuesta en términos del recorrido libre medio.
11. En el problema muestra 3, ¿a qué temperatura es igual a $6.0 \times 10^{9}$ s$^{-1}$ la cantidad promedio de colisión? La presión permanece sin cambio.

### *Sección 24-3 La distribución de las velocidades moleculares*

12. Las velocidades de un grupo de diez moléculas son 2, 3, 4, . . ., 11 km/s. (*a*) Halle la velocidad media del grupo. (*b*) Calcule la velocidad raíz media cuadrática del grupo.
13. (*a*) Diez partículas se mueven con las velocidades siguientes: cuatro a 200 m/s, dos a 500 m/s, y cuatro a 600 m/s. Calcule las velocidades media y media cuadrática. ¿Es $v_{rms} > \bar{v}$? (*b*) Construya su propia distribución de la velocidad de las 10 partículas y demuestre que $v_{rms} \geq \bar{v}$ para su distribución. (*c*) ¿En qué condiciones (si existen tales) se hace $v_{rms} = \bar{v}$?
14. Se le da a usted el siguiente grupo de partículas ($n_i$ representa el número de partículas que tienen una velocidad $v_i$):

| $n_i$ | $v_i$ (km/s) |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 6 | 3 |
| 8 | 4 |
| 2 | 5 |

(*a*) Calcule la velocidad media $\bar{v}$. (*b*) Calcule la velocidad media cuadrática $v_{rms}$. (*c*) Entre las cinco velocidades mostradas, ¿cuál es la velocidad más probable $v_p$ para todo el grupo?

15. En el aparato de Miller y Kusch (véase la Fig. 12) la longitud $L$ del cilindro giratorio es de 20.4 cm y el ángulo $\phi$ es 0.0841 rad. ¿Qué velocidad rotatoria corresponde a una velocidad seleccionada $v$ de 212 m/s?
16. Se halla que la velocidad más probable de las moléculas en un gas a temperatura $T_2$ es la misma que la velocidad rms de las moléculas de este gas cuando su temperatura es $T_1$. Calcule $T_2/T_1$.
17. Dos recipientes están a la misma temperatura. El primero contiene gas a una presión $p_1$ cuyas moléculas tienen una masa $m_1$ con una velocidad media cuadrática $v_{rms1}$. El segundo contiene moléculas de masa $m_2$ a la presión $2p_1$ que tienen una velocidad media $\bar{v}_2 = 2v_{rms}$. Halle la razón $m_1/m_2$ de las masas de sus moléculas.
18. Un gas, no necesariamente en equilibrio térmico, consta de $N$ partículas. La distribución de la velocidad no es necesariamente maxwelliana. (*a*) Demuestre que $v_{rms} \geq \bar{v}$ cualquiera que sea la distribución de las velocidades. (*b*) ¿Cuándo se obtendría la igualdad?
19. Demuestre que, para átomos de masa $m$ que emerjan como un haz de una pequeña abertura en una estufa a temperatura $T$, la velocidad más probable es $v_p = \sqrt{3kT/m}$.
20. Un átomo de germanio (diámetro = 246 pm) escapa de un horno ($T$ = 4220 K) con la velocidad media cuadrática hacia una cámara que contiene átomos de argón frío (diámetro = 300 pm) a una densidad de $4.13 \times 10^{19}$ átomos/cm³. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del átomo de germanio? (*b*) Si el átomo de germanio y el átomo de argón chocan, ¿cuál es la distancia mínima entre sus centros, considerando que cada uno sea esférico? (*c*) Halle la frecuencia de colisión inicial experimentada por el átomo de germanio.
21. Para la distribución hipotética de la velocidad del gas de $N$ partículas mostrado en la figura 22 [$n(v) = Cv^2$, $0 < v < v_0$; $n(v) = 0$, $v > v_0$], halle (*a*) una expresión para $C$ en términos de $N$ y $v_0$, (*b*) la velocidad promedio de las partículas, y (*c*) la velocidad rmc de las partículas.
22. Un gas hipotético de $N$ partículas tiene la distribución de velocidad mostrada en la figura 23 [$n(v) = 0$ para $v > 2v_0$]. (*a*) Exprese $a$ en términos de $N$ y $v_0$. (*b*) ¿Cuántas partículas tienen velocidades entre $1.50v_0$ y $2.00v_0$? (*c*) Exprese la velocidad promedio de las partículas en términos de $v_0$. (*d*) Halle $v_{rms}$.
23. Para un gas en el que todas las moléculas viajen con la misma velocidad $\bar{v}$, demuestre que $\bar{v}_{rel} = \frac{4}{3}\bar{v}$ en lugar de $\sqrt{2}\,\bar{v}$ (que es el resultado obtenido al considerar la

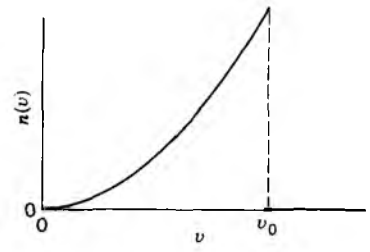



**Figura 22** Problema 21.

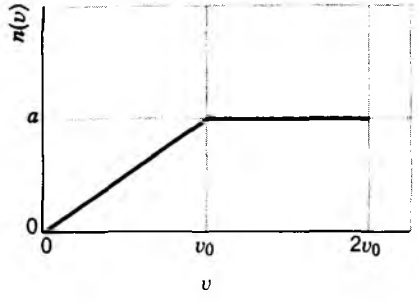



**Figura 23** Problema 22.

distribución real de las velocidades moleculares). Véase la ecuación 16.

### *Sección 24-4 La distribución de las energías*

**24.** Calcule la fracción de las partículas en un gas que se muevan con energía cinética de traslación entre $0.01kT$ y $0.03kT$. (*Sugerencia*: Para $E \ll kT$, el término $e^{-E/kT}$ de la ecuación 27 puede ser reemplazado por $1 - E/kT$. ¿Por qué?

**25.** (*a*) Halle $E_{rms}$ usando la distribución de la energía de la ecuación 27. (*b*) ¿Por qué es $E_{rms} \neq \frac{1}{2}m v_{rms}^2$, en donde $v_{rms}$ está dada por la ecuación 22?

**26.** Halle la fracción de las partículas en un gas que tengan energías cinéticas de traslación dentro de un intervalo de $0.02kT$ centrado en la energía más probable $E_p$. (*Sugerencia*: En esta región, $n(E)$ = constante. ¿Por qué?)

### *Sección 24-5 Movimiento browniano*

**27.** La velocidad media cuadrática de las moléculas de hidrógeno a 0°C es de 1840 m/s. Calcule la velocidad de las partículas coloidales de "masa molar" $3.2 \times 10^6$ g/mol.

**28.** En un líquido a 26°C se encuentran suspendidas partículas de masa $6.2 \times 10^{-14}$ g y se observa que tienen una velocidad media cuadrática de 1.4 cm/s. Calcule el número de Avogadro a partir del teorema de equipartición y de estos datos.

**29.** Calcule la velocidad media cuadrática de partículas de humo de masa $5.2 \times 10^{-14}$ g en el aire a 14°C y 1.07 atm de presión.

**30.** Una balanza de resorte muy sensible tiene una constante de fuerza de 0.44 N/m. Vibra al azar debido al bombardeo de las moléculas del aire sobre el objeto que soporta (fluctuaciones térmicas). (*a*) Halle el desplazamiento rms del objeto a partir de su posición de equilibrio a 31°C. (*Sugerencia*: Considere que la energía promedio del movimiento al azar sea $kT$. ¿Por qué?) (*b*) Determine la incertidumbre en una determinación del peso debido a este efecto.

**31.** En el espacio interestelar existen partículas sólidas muy pequeñas, llamadas granos. Son bombardeadas continuamente por átomos de hidrógeno del gas interestelar circundante. Como un resultado de estas colisiones, los granos ejecutan un movimiento browniano tanto en la traslación como en la rotación. Supóngase que los granos sean esferas uniformes de $4.0 \times 10^{-6}$ cm de diámetro y 1.0 g/cm³ de densidad, y que la temperatura del gas sea de 100 K. Halle (*a*) la velocidad media cuadrática de los granos entre colisiones y (*b*) la razón aproximada (rev/s) a la cual están girando los granos.

**32.** Partículas coloidales en solución son flotadas por el líquido en que están suspendidas. Sea $\rho'$ la densidad del líquido y $\rho$ la densidad de las partículas. Si $V$ es el volumen de una partícula, demuestre que el número de partículas por unidad de volumen en el líquido varía con la altura según

$$n = n_0 \exp\left[-\frac{N_A}{RT} V(\rho - \rho')gh\right],$$

donde $n_0$ es el número de partículas a la altura $h = 0$. Esta ecuación fue probada por Perrin en sus estudios del movimiento browniano.

### *Sección 24-6 Distribuciones estadísticas cuánticas*

**33.** ¿De cuántas maneras pueden distribuirse en dos estados tres (*a*) partículas clásicas distinguibles y (*b*) bosones indistinguibles?

**34.** (*a*) ¿A qué energía $E$ es $f_{FD}(E) = \frac{1}{2}$? (*b*) ¿Cuál es el valor de $f_{BE}(E)$ a la energía hallada en (*a*)?

### *Proyecto para la computadora*

**35.** Muchas computadoras tienen un generador de números al azar, el cual puede utilizarse para "dar" una mano de 13 naipes. Por ejemplo, asignando a cada naipe un valor numérico de 1 a 52 y generando luego un número al azar en ese intervalo, podemos "dar" un naipe al azar a partir de una baraja de 52 naipes. Usando esta técnica, dé una mano de 13 naipes y determine el número de corazones. Repita 1000 veces y trace un histograma similar al de la figura 2. Compare sus resultados con las predicciones de la ecuación 5.

# CAPÍTULO 25

# EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

*En el capítulo 22 hemos presentado la noción de sistemas en contacto térmico. Si sus temperaturas son diferentes inicialmente, los sistemas intercambiarán energía hasta que alcancen el equilibrio térmico. En este capítulo estudiamos este flujo de energía entre dos cuerpos, al cual llamamos* calor. *Describimos aquí también los efectos de transferir calor a un cuerpo, lo cual debe implicar un aumento de temperatura o un cambio de estado, como de sólido a líquido o de líquido a vapor. Por último, relacionamos los conceptos de calor, energía interna, y trabajo por medio de la* primera ley de la termodinámica, *un enunciado de la conservación de la energía. En esencia, este tema continúa y amplía el programa que comenzamos en los capítulos 7 y 8, donde presentamos por vez primera el concepto de energía.*

## 25-1 EL CALOR: ENERGÍA EN TRÁNSITO

Es una observación común que si situamos un objeto caliente (digamos, una taza de café) o un objeto frío (un vaso de agua helada) en un entorno a la temperatura ambiente ordinaria, el objeto tenderá hacia el equilibrio térmico con su entorno. Esto es, el café se enfría y el agua helada se calienta; la temperatura de cada uno se acerca a la temperatura del entorno.

Parece claro que tales aproximaciones al equilibrio térmico deben implicar cierta clase de intercambio de energía entre el sistema y su entorno.* Definimos al *calor* (símbolo $Q$) como la energía que se transfiere, como lo que va del café a la habitación o de la habitación al agua helada. De manera general, adoptamos la definición siguiente:

*El calor es energía que fluye entre un sistema y su entorno en virtud de una diferencia de temperatura entre ellos.*

La figura 1 resume este punto de vista. Si la temperatura $T_S$ de un sistema es menor que la temperatura $T_E$ del entorno, fluye calor en el sistema. Elegimos nuestra convención de signos de modo que $Q$ sea positivo en este caso; usted puede concebir esto como un proceso en el que la energía interna del sistema aumenta. A la inversa, cuando $T_S > T_E$, el calor fluye hacia afuera del sistema, y hacemos que $Q$ para el sistema sea negativo.

Ya que el calor es una forma de energía, sus unidades son las de la energía, es decir, el joule (J) en el sistema SI. Antes de que se reconociera que el calor es una forma de energía, se le asignaban otras unidades. En ciertos casos estas unidades están aún en uso hoy día, específicamente la *caloría* (cal) y la *unidad térmica británica* (Btu). Se relacionan con el joule de acuerdo con

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J} \quad \text{y} \quad 1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J}$$

La "caloría" en uso común como una medida de la nutrición (Cal) es en realidad una kilocaloría; esto es,

$$1 \text{ Cal} = 1000 \text{ cal} = 4186 \text{ J}$$

El Btu se encuentra todavía comúnmente como una medida de la facultad de un acondicionador de aire para transferir energía (como calor) de una sala al ambiente exterior. Por lo tanto, un acondicionador de aire típico en

* Este punto de vista no siempre fue defendido por los científicos. En el siglo XVIII se creía que un material fluido, llamado *calórico*, era intercambiado entre los cuerpos a temperaturas diferentes. En el siglo XIX, los experimentos llevados a cabo por Benjamin Thompson (más tarde conocido como el Conde Rumford de Baviera) demostraron concluyentemente que el trabajo mecánico podía producir calor, lo cual dio por resultado la identificación del calor como una forma de energía y condujo al desarrollo de la ley de la conservación de la energía.

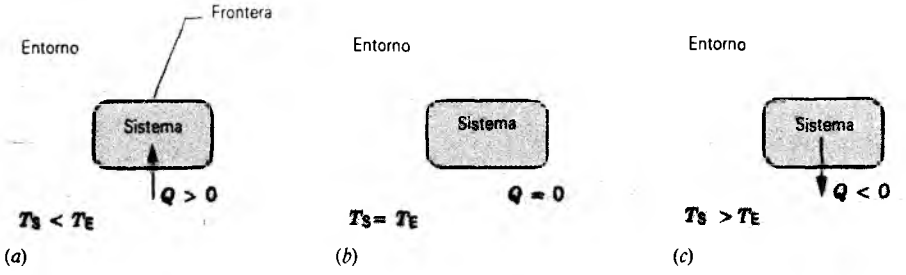



**Figura 1** (*a*) Si la temperatura $T_s$ de un sistema es menor que la temperatura $T_E$ de su entorno, el calor fluye hacia el sistema hasta que se establece el equilibrio térmico, como en (*b*). (*c*) Si la temperatura de un sistema es mayor que la de su entorno, el calor fluye hacia afuera del sistema.

una sala especificado a 10,000 Btu/h puede extraer alrededor de $10^7$ J de la sala cada hora y transferirlos al ambiente exterior.

## Conceptos erróneos con respecto al calor

El calor es similar al trabajo en tanto que representa un medio para la *transferencia* de la energía. Ni el calor ni el trabajo son una propiedad intrínseca de un sistema; esto es, no podemos decir que un sistema "contiene" cierta cantidad de calor o de trabajo. En cambio, decimos que puede transferir una cierta cantidad de energía en forma de calor o de trabajo en ciertas condiciones específicas.

Parte de la confusión con respecto al significado preciso del calor proviene del uso popular del término. A menudo se usa la palabra calor cuando lo que realmente se quiere decir es temperatura o quizás energía interna. Cuando oímos hablar del calor en relación al clima, o cuando ciertas instrucciones de cocina indican "caliéntese a 300 grados", se hace referencia a la *temperatura*. En cambio, oímos también alusiones al "calor generado" por las balatas de los frenos de un automóvil o por el frotamiento rápido de las palmas de las manos. En este caso, como veremos, es usualmente la *energía interna* a lo que se hace referencia. Una clave para el uso apropiado parte de la definición del calor: cuando frotamos nuestras manos, se lleva a cabo un trabajo entre ellas, aumentando por lo tanto su energía interna y elevándose su temperatura. Este exceso de energía puede entonces ser transferido al entorno como calor, porque las manos están a una temperatura más alta que el entorno.

## El equivalente mecánico del calor

En el pasado, cuando la caloría se definía independientemente como una unidad de calor, fue necesario determinar una relación empírica entre la caloría y el joule. Esto lo hizo por vez primera James Joule en 1850, en un experimento para determinar el *equivalente mecánico del calor*. En la figura 2 se muestra un diagrama del aparato de Joule. Básicamente, el trabajo mecánico $W$ efectuado por las pesas al caer (medido en joules) produce una elevación de temperatura mensurable en el agua. La caloría se definió originalmente como la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua de 14.5 a 15.5°C. A partir del aumento de temperatura medido en el agua, Joule fue capaz de deducir el número de calorías de calor $Q$ que producirían la misma elevación de temperatura al ser transferidos desde alguna fuente externa a una cantidad igual de agua a la misma temperatura inicial. El trabajo $W$ efectuado sobre el agua por las pesas al caer (en joules) producía por lo tanto una elevación de la temperatura equivalente a la absorción por el agua de cierto calor $Q$ (en calorías), y a partir de esta equivalencia fue posible determinar la relación entre la caloría y el joule. El resultado del experimento de Joule, y de otros que le siguieron, proporcionó durante casi 100 años una conversión entre el joule y la caloría. Hoy día, después de la adopción en 1948 del joule como la unidad de calor en el SI, expresa-

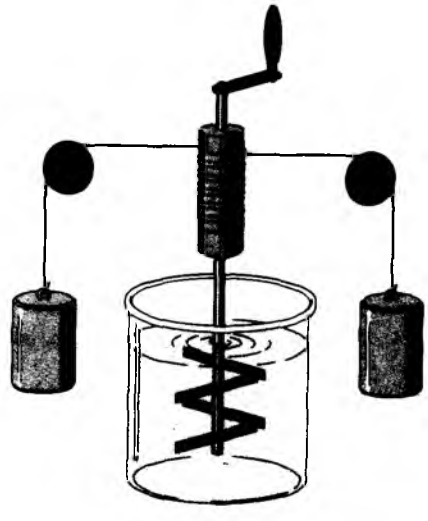


**Figura 2** Aparato de Joule para medir el equivalente mecánico del calor. Al caer las pesas hacen girar a las paletas que agitan el agua del recipiente, elevando así su temperatura.

mos todas las cantidades relacionadas con la energía, como el calor y el trabajo, en J, y así este factor de conversión ha perdido la importancia que tuvo en el tiempo de Joule. No obstante, la labor de Joule es todavía notable por la destreza e ingenuidad de sus experimentos, por su precisión (los resultados de Joule difieren en 1% únicamente de la relación definida por el SI entre joule y caloría), y por la directriz que proporcionó para demostrar que el calor, igual que el trabajo, podía verse apropiadamente como un medio para transferir energía.

## 25-2 CAPACIDAD CALORÍFICA Y CALOR ESPECÍFICO

Podemos cambiar el estado de un cuerpo intercambiando energía en la forma de calor, o forma de trabajo. Una propiedad de un cuerpo que puede cambiar en tal proceso es su temperatura $T$. El cambio de temperatura $\Delta T$ que corresponde a la transferencia de una cantidad de energía calorífica $Q$ en particular dependerá de las circunstancias bajo las cuales se transfiera el calor. Por ejemplo, en el caso de un gas confinado en un cilindro con un émbolo móvil, podemos añadir calor y mantener fijo al émbolo (por lo tanto manteniendo el volumen constante), o podemos añadir calor y permitir que el émbolo se mueva pero se conserve constante la fuerza sobre el émbolo (por lo tanto manteniendo al gas bajo presión constante). Incluso podemos cambiar la temperatura efectuando un trabajo sobre un sistema, como al frotar entre sí a dos objetos que entre uno y otro ejerzan fuerzas de fricción; en este caso, no es necesario que ocurra una transferencia de calor.

Es conveniente definir la *capacidad calorífica* $C'$ de un cuerpo como la razón entre la cantidad de calor $Q$ suministrada al cuerpo durante cualquier proceso y su cambio de temperatura $\Delta T$ correspondiente; esto es,

$$C' = \frac{Q}{\Delta T}. \tag{1}$$

La palabra "capacidad" puede crear confusión porque sugiere la aseveración, esencialmente sin significado, de "la cantidad de calor que puede contener un cuerpo", mientras que lo que se quiere decir es simplemente la energía por cada grado de cambio de temperatura que se transfiere como calor cuando la temperatura del cuerpo cambia.

La capacidad calorífica por unidad de masa de un cuerpo, llamada *capacidad calorífica específica*, o simplemente *calor específico*, como es lo usual, es característica del material de que está compuesto el cuerpo:

$$c = \frac{C'}{m} = \frac{Q}{m\,\Delta T}. \tag{2}$$

La capacidad calorífica es característica de un objeto en particular, pero el calor específico caracteriza a una sustancia. Entonces podemos hablar, en primer término, de la capacidad calorífica de una moneda de cobre pero, por otra parte, del calor específico del cobre.

Ni la capacidad calorífica de un cuerpo ni el calor específico de un material son constantes; ambos dependen de la temperatura (y posiblemente de otras variables, como la presión). Las ecuaciones anteriores dan únicamente valores promedio de estas cantidades en el intervalo de temperatura $\Delta T$. En el límite, cuando $\Delta T \to 0$, podemos hablar del calor específico a una temperatura $T$ en particular.

Podemos hallar el calor que debe ser proporcionado a un cuerpo de masa $m$, cuyo material tenga un calor específico $c$, para aumentar su temperatura desde la temperatura inicial $T_i$ hasta la temperatura final $T_f$ dividiendo el cambio de temperatura en $N$ pequeños intervalos $\Delta T_n$, suponiendo que $c_n$ sea constante en cada pequeño intervalo, y sumando las contribuciones a la transferencia de calor total de todos los intervalos $n = 1, 2, \ldots, N$. Esto da

$$Q = \sum_{n=1}^{N} mc_n\,\Delta T_n. \tag{3}$$

En el límite diferencial ésta resulta

$$Q = m\int_{T_i}^{T_f} c\,dT, \tag{4}$$

donde $c$ puede ser una función de la temperatura. A temperaturas ordinarias y dentro de intervalos de temperatura ordinarios, puede considerarse que los calores específicos son constantes. Por ejemplo, el calor específico del agua varía en menos de 1% en el intervalo entre 0°C y 100°C. Por lo tanto, podemos escribir la ecuación 4 de una manera más general

$$Q = mc(T_f - T_i). \tag{5}$$

La ecuación 2 no define al calor específico en una forma única. Debemos también especificar las condiciones bajo las cuales se añade el calor $Q$ al material. Una condición común es que la muestra permanezca a una presión atmosférica normal (constante) mientras añadimos el calor, pero existen muchas otras posibilidades, cada una de las cuales conduce, por lo general, a un valor de $c$ diferente. Para obtener un valor único de $c$ debemos indicar las condiciones, tales como calor específico a presión constante $c_p$, calor específico a volumen constante $c_v$, y así sucesivamente.

La tabla 1 muestra los valores de las capacidades caloríficas específicas de un número de sustancias comunes, medidas en condiciones de presión constante. Si bien, las unidades se expresan en términos de K, podemos también trabajar con temperaturas en °C, porque una *diferencia* de temperatura en C° es igual a la misma diferencia de temperatura en K.

**TABLA 1** CAPACIDADES CALORÍFICAS DE ALGUNAS SUSTANCIAS†

| *Sustancia* | *Capacidad calorífica específica* (J/kg · K) | *Capacidad calorífica molar* (J/mol · K) |
|---|---|---|
| Sólidos elementales | | |
| Plomo | 129 | 26.7 |
| Tungsteno | 135 | 24.8 |
| Plata | 236 | 25.5 |
| Cobre | 387 | 24.6 |
| Carbono | 502 | 6.02 |
| Aluminio | 900 | 24.3 |
| Otros sólidos | | |
| Latón | 380 | |
| Granito | 790 | |
| Vidrio | 840 | |
| Hielo (-10° C) | 2220 | |
| Líquidos | | |
| Mercurio | 139 | |
| Alcohol etílico | 2430 | |
| Agua de mar | 3900 | |
| Agua | 4190 | |

† Medidas a la temperatura ambiente y la presión atmosférica a menos que se indique otra cosa.

**Problema muestra 1** Una muestra de cobre cuya masa $m_c$ es de 75 g se calienta en una estufa de laboratorio a una temperatura $T$ de 312°C. El cobre se deja caer luego en un vaso de precipitados que contiene una masa $m_a$ (= 220 g) de agua. La capacidad calorífica efectiva $C_v'$ del vaso es de 190 J/K. La temperatura inicial $T_i$ del agua y del vaso es de 12.0°C. ¿Cuál es la temperatura final común $T_f$ del cobre, el vaso, y el agua?

**Solución** Consideremos como nuestro sistema al agua + el vaso + el cobre. Ningún calor entra o sale de este sistema, de modo que la suma algebraica de las transferencias caloríficas internas que ocurren debe ser cero. De aquí que

$$\text{calor que fluye hacia el agua: } Q_a = m_a c_a (T_f - T_i),$$

$$\text{calor que fluye hacia el vaso: } Q_v = C_v'(T_f - T_i),$$

$$\text{calor que fluye hacia el agua: } Q_c = m_c c_c (T_f - T).$$

La diferencia de temperatura es igual, en todos los casos, a la temperatura final menos la temperatura inicial. Vemos por inspección que $Q_a$ y $Q_v$ son positivos (indicando que el calor ha sido transferido hacia el agua y hacia el vaso) y que $Q_c$ es negativo (indicando que el calor ha sido transferido desde el cobre).

Puesto que toda la energía que sale de un objeto en este sistema aislado entra en otro objeto, la conservación de la energía (calor) requiere que

$$\sum Q = 0 \tag{6}$$

o bien

$$Q_a + Q_v + Q_c = 0.$$

Sustituyendo las expresiones de la transferencia de calor de antes, nos da

$$m_a c_a (T_f - T_i) + C_v'(T_f - T_i) + m_c c_c (T_f - T) = 0.$$

Resolviendo para $T_f$ y sustituyendo, tenemos que

$$T_f = \frac{m_a c_a T_i + C_v' T_i + m_c c_c T}{m_a c_a + C_v' + m_c c_c}$$

$$= \frac{(0.220\ \text{kg})(4190\ \text{J/kg·K})(12°\text{C}) + (190\ \text{J/K})(12°\text{C}) + (0.075\ \text{kg})(386\ \text{J/kg·K})(312°\text{C})}{(0.220\ \text{kg})(4190\ \text{J/kg·K}) + 190\ \text{J/K} + (0.075\ \text{kg})(386\ \text{J/kg·K})}$$

$$= 19.6°\text{C}.$$

Obsérvese que, a causa de que todas las temperaturas fueron parte de las *diferencias* de temperatura, podemos usar °C en esta expresión. Sin embargo, en la mayoría de las expresiones termodinámicas pueden ser usadas únicamente temperaturas Kelvin.

Partiendo de los datos anteriores puede usted encontrar que

$$Q_a = 7010\ \text{J}, \quad Q_b = 1440\ \text{J}, \quad \text{y} \quad Q_c = -8450\ \text{J}.$$

La suma algebraica de estas tres transferencias de calor es ciertamente cero, como lo requiere la ecuación 6.

## Calores de transformación

Cuando entra calor a un sólido o a un líquido, la temperatura de la muestra no se eleva necesariamente. En cambio, la muestra pueda cambiar de una *fase* o *estado* (esto es, sólido, líquido, o gaseoso) a otro. Así pues, el hielo se funde y el agua hierve, absorbiendo calor en cada caso sin un cambio de temperatura. En los procesos inversos (el agua se congela, el vapor se condensa), la muestra libera calor, de nuevo a una temperatura constante.

La cantidad de calor por unidad de masa transferido durante un cambio de fase se llama *calor de transformación*, o *calor latente* (símbolo $L$) del proceso. El calor total transferido en un cambio de fase es entonces

$$Q = Lm, \tag{7}$$

donde $m$ es la masa de la muestra que cambia de fase. El calor transferido durante la fusión o la congelación se llama *calor de fusión* (símbolo $L_f$), y el calor transferido durante la ebullición o la condensación se llama *calor de vaporización* (símbolo $L_v$). La tabla 2 muestra los calores de transformación de algunas sustancias.

El conocimiento de las capacidades caloríficas y de los calores de transformación es importante porque podemos

**TABLA 2** ALGUNOS CALORES DE TRANSFORMACIÓN

| *Sustancia*† | *Punto de fusión* (K) | *Calor de fusión* (kJ/kg) | *Punto de ebullición* (K) | *Calor de vaporización* (kJ/kg) |
|---|---|---|---|---|
| Hidrógeno | 14.0 | 58.6 | 20.3 | 452 |
| Oxígeno | 54.8 | 13.8 | 90.2 | 213 |
| Mercurio | 234 | 11.3 | 630 | 296 |
| Agua | 273 | 333 | 373 | 2256 |
| Plomo | 601 | 24.7 | 2013 | 858 |
| Plata | 1235 | 105 | 2485 | 2336 |
| Cobre | 1356 | 205 | 2840 | 4730 |

† Las sustancias están listadas en el orden de sus puntos de fusión crecientes.

medir una transferencia de calor determinando el cambio de temperatura de un material de capacidad calorífica conocida o la cantidad de una sustancia con calor de transformación conocido que se convierte de una fase a otra. Por ejemplo, en sistemas a baja temperatura que involucren helio líquido a 4 K, la razón a la que hierve el gas helio a partir del líquido da una medida de la razón de entrada de calor al sistema.

## 25-3 CAPACIDADES CALORÍFICAS DE LOS SÓLIDOS

A partir de la tabla 1 concluimos que los calores específicos de los sólidos varían grandemente de un material a otro. Sin embargo, surge una historia bastante diferente al comparar muestras de materiales que contengan el mismo número de átomos en lugar de muestras que tengan la misma masa. Podemos llevar a cabo esto hallando la *capacidad calorífica molar* de la sustancia, definida en analogía con la ecuación 2 como

$$C = \frac{C'}{n} = \frac{Q}{n\,\Delta T}\ , \tag{8}$$

en donde $n$ es el número de moles de la sustancia que tienen capacidad calorífica $C'$. Así como la capacidad calorífica específica (símbolo $c$, unidad J/kg · K) representa la capacidad calorífica por unidad de masa de una sustancia, la capacidad calorífica molar (símbolo $C$, unidad J/mol · K) representa la capacidad calorífica por mol.

En 1819 Dulong y Petit encontraron que las capacidades caloríficas molares de sólidos elementales, con pocas excepciones (véase el carbono en la tabla 1), tienen valores cercanos a 25 J/mol · K. La capacidad calorífica molar, listada en la última columna de la tabla 1, se halla al multiplicar el calor específico por la masa molar (la masa de 1 mol, el cual contiene $6.02 \times 10^{23}$ átomos) del elemento. Vemos que la cantidad de calor requerido *por átomo* para elevar la temperatura de un sólido en una cantidad dada parece ser aproximadamente la misma para casi todos los materiales mostrados en la tabla. Ésta es una evidencia notable de la teoría atómica de la materia.

Las capacidades caloríficas molares varían realmente con la temperatura, aproximándose a cero cuando $T \to 0$ K y al valor de Dulong-Petit cuando $T$ aumenta. La figura 3 muestra la variación para el plomo, el aluminio, y el carbono. Podemos ver que el valor aparentemente anómalo de la tabla 1 para el carbono ocurre porque el carbono no ha alcanzado aún su valor límite a la temperatura ambiente. Puesto que para determinar el calor necesario para aumentar la temperatura de un cuerpo en una cantidad dada parece ser importante el número de átomos más bien que la clase de átomo, ello nos conduce a esperar que las capacidades caloríficas molares de diferentes sustancias varíen con la temperatura de manera muy similar. La figura 4 muestra que, realmente, puede hacerse que las capacidades caloríficas molares de varias sustancias caigan en la misma curva por medio de un ajuste empírico, sencillo, de la escala de temperaturas. En la figura 4, la escala horizontal es la razón sin dimensiones $T/T_D$, donde $T$ es la temperatura Kelvin y $T_D$ es una temperatura característica, llamada *temperatura de Debye*, que tiene un valor constante determinado para cada material. En el plomo, $T_D$ tiene el valor empírico de 88 K y en el carbono, $T_D$ = 1860 K. Obsérvese que la capacidad calorífica molar llega a un 80% de su valor límite cuando $T = 0.5\ T_D$ y alrededor del 90% cuando $T = T_D$. Entonces puede considerarse que $T_D$ es una temperatura característica de la tendencia al límite. Por lo tanto, no es sorprendente que, a la temperatura ambiente, el plomo ($T/T_D = 3.4$) haya alcanzado su valor límite, pero no el carbono ($T/T_D \approx 0.16$).

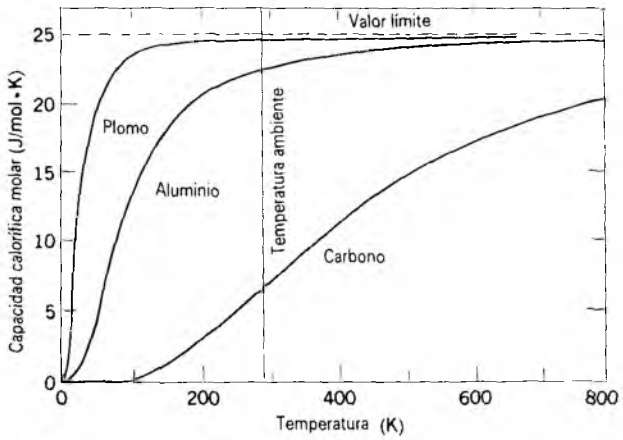



**Figura 3** Capacidad calorífica molar de tres elementos en función de la temperatura. A temperaturas elevadas, las capacidades caloríficas de todos los sólidos se aproximan al mismo valor límite. Para el plomo y el aluminio, ese valor se alcanza casi a la temperatura ambiente: no para el carbono.

Podemos entender las capacidades caloríficas molares de los sólidos usando los resultados de la mecánica estadística hallados en los capítulos 23 y 24. En el límite de alta temperatura, consideramos a los átomos de un sólido con libertad para vibrar en tres direcciones. En la sección 23-6 presentamos el concepto de número de *grados de libertad* de un sistema: en esencia, el número de formas diferentes en que un sistema puede tener energía. Un objeto que vibre en una dimensión tiene dos grados de libertad, el de la energía potencial y el de la energía cinética. Esto es, podemos dar a un oscilador cualquier cantidad de energía potencial que escojamos, y también podemos iniciar su movimiento con cualquier cantidad de energía cinética. El movimiento de cada átomo oscilante en un sólido puede verse como una combinación de las 3 vibraciones unidimensionales, cada una con dos grados

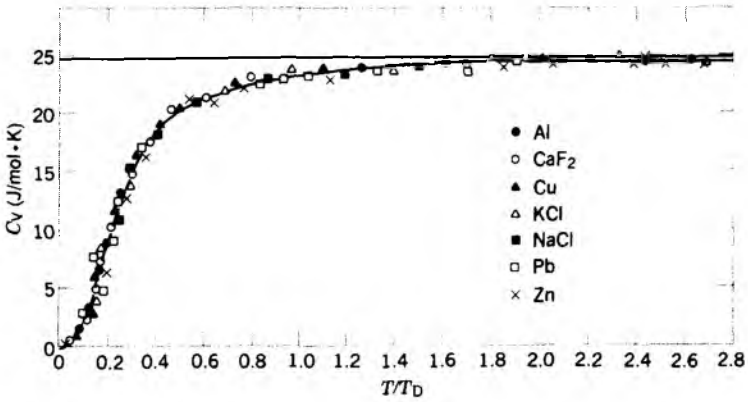



**Figura 4** Algunos valores de las capacidades caloríficas molares de varios sólidos. La línea horizontal sólida es el límite de Dulong-Petit, y la curva es el resultado de la teoría de Debye.

de libertad; entonces existen seis grados de libertad por átomo del sólido. De acuerdo con el teorema de equipartición, cada átomo tiene una energía promedio de $\frac{1}{2}kT$ por grado de libertad, de modo que la energía interna por mol es

$$E_{\text{int}} = 6N_A(\tfrac{1}{2}kT) = 3RT. \qquad (9)$$

Si elevamos la temperatura de una muestra de material en $\Delta T$ transfiriéndole calor, no efectuándose ningún trabajo en el proceso, el aumento de energía interna por mol será $\Delta E_{\text{int}} = 3\,R\,\Delta T$. Igualando este incremento en la energía interna por mol con el calor añadido por mol para lograr el incremento de temperatura, hallamos, usando la ecuación 8,

$$C_V = \frac{Q/n}{\Delta T} = \frac{\Delta E_{\text{int}}}{\Delta T} = 3R = 24.9\ \text{J/mol}\cdot\text{K}.$$

Éste es el valor Dulong-Petit "clásico" de la capacidad calorífica molar,* el cual, de acuerdo con la tabla 1 y la figura 4, concuerda excelentemente con los valores observados en la región de alta temperatura. Sin embargo, para $T < T_D$, la teoría clásica falla. En esta región, los efectos de la teoría cuántica resultan importantes, y debemos usar una teoría desarrollada primero por Einstein y más tarde por Debye (1912). De acuerdo con la teoría cuántica (véase la sección 24-6), debemos tener en cuenta la naturaleza cooperativa de las oscilaciones usando una de las distribuciones estadísticas cuánticas. La curva de línea continua de la figura 4 fue obtenida a partir del cálculo de Debye, y su excelente concordancia con los datos es un triunfo de la física cuántica.†

Los datos graficados en la figura 4 varían suavemente y caracterizan a materiales que no cambian su estado en ese intervalo de temperaturas. Esto es, no se funden o cambian de una forma cristalina a otra. A menudo podemos detectar tales cambios al medir el calor específico de una sustancia. La figura 5 muestra los calores específicos del tantalio y del latón. En el caso del tantalio, puede verse que ocurre un cambio súbito a una temperatura de unos 4.4 K. Por debajo de 4.4 K, el tantalio es un superconductor: no ofrece resistencia al flujo de la corriente eléctrica. Tal "anomalía" del calor específico no siempre indica la transición de un conductor normal a un superconductor, sino que indica un cambio de alguna clase en las propiedades del material. En el caso del latón, ocurre un cambio en la estructura cristalina a unos 460°C de una estructura muy ordenada, por debajo de esa temperatura, a una estructura más bien desordenada, por arriba de ella. El cambio de estructura a 460°C está indicado claramente por un cambio súbito en el calor específico del latón (Fig. 5*b*).

## 25-4 CAPACIDADES CALORÍFICAS DE UN GAS IDEAL

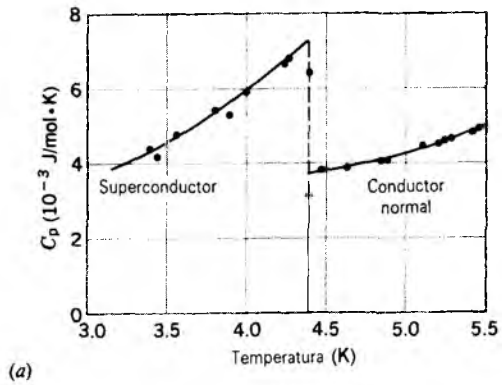
Al calcular las capacidades caloríficas de un gas ideal, usamos los resultados de la teoría cinética de un gas ideal discutidos en el capítulo 23. Puede encontrarse útil revisar las secciones 23-5 y 23-6.

* Los datos graficados en las figuras 3 y 4 son las capacidades caloríficas molares a volumen constante, $C_V$, mientras que los valores dados en la tabla 1 son $C_p$, las capacidades caloríficas molares a presión constante. $C_p$ es más fácil de medir, porque la dilatación térmica no necesita tomarse en cuenta, pero $C_V$ es más fácil de calcular. Las dos se relacionan por la fórmula

$$C_p = C_V + T\beta^2 B/\rho,$$

en donde $\beta$ es el coeficiente térmico de dilatación volumétrica, $B(= -V\,\Delta p/\Delta V)$ es el módulo volumétrico isotérmico, y $\rho$ es la densidad. A la temperatura ambiente, la diferencia entre $C_p$ y $C_V$ es alrededor del 5%.

† Pueden encontrarse detalles del cálculo de Einstein, que es un tanto más sencillo pero menos aplicable que el de Debye, en *Modern Physics*, por Kenneth S. Krane (Wiley, 1983), capítulo 12.



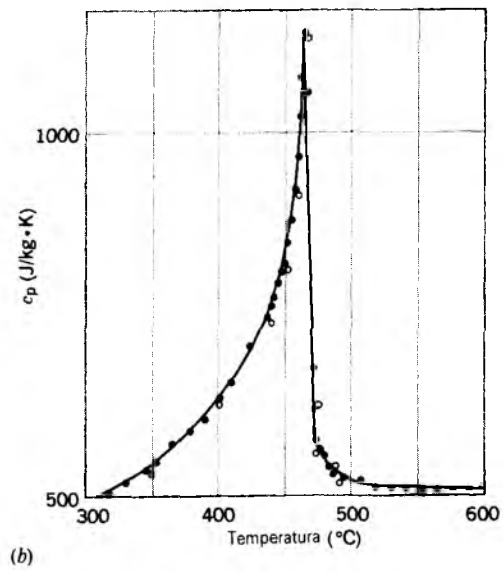




**Figura 5** (*a*) El calor específico del tantalio cerca de su temperatura de transición a superconductor. (*b*) El calor específico del latón.

## Capacidad calorífica a volumen constante

Introduzcamos cierta cantidad de energía como calor $Q$ en un gas que esté confinado dentro de un cilindro equipado con un émbolo. El gas puede entonces (1) almacenar la energía en forma de energía cinética al azar de sus moléculas (energía interna), o bien (2) usar la energía para efectuar un trabajo sobre el entorno (tal como elevando una pesa sobre el émbolo). Consideremos primero el caso en que el émbolo esté fijo, de modo que el volumen del gas permanezca constante, y no se efectúe ningún trabajo externo. En este caso toda la energía térmica se convierte en energía interna:

$$Q = \Delta E_{\text{int}}. \tag{10}$$

Sea $C_V$ represente la *capacidad calorífica molar a volumen constante*, de modo que la ecuación 8 da

$$C_V = \frac{Q}{n\,\Delta T} = \frac{\Delta E_{\text{int}}}{n\,\Delta T}. \tag{11}$$

Partiendo de la ecuación 35 del capítulo 23 para un gas ideal monoatómico, $\Delta E_{\text{int}} = \frac{3}{2}nR\,\Delta T$, y así

$$C_V = \tfrac{3}{2}R = 12.5\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gas monoatómico)}. \tag{12}$$

*Repitiendo esta derivación* mediante las ecuaciones 36 y 37 del capítulo 23 para los gases diatómicos y poliatómicos, hallamos

$$C_V = \tfrac{5}{2}R = 20.8\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gas diatómico)}, \tag{13}$$

$$C_V = 3R = 24.1\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gas poliatómico)}. \tag{14}$$

## Capacidad calorífica a presión constante

La figura 6 muestra dos isotermas del gas ideal que difieren en temperatura en $\Delta T$. La trayectoria *ab* es el proceso a volumen constante considerado previamente. La trayectoria *ac* es un proceso a presión constante que conecta a las mismas dos isotermas. En la sección 23-6 establecimos que *la energía interna de un gas ideal depende únicamente de la temperatura*. Para todas las trayectorias que conecten las dos isotermas de la figura 6, el cambio en energía interna tiene el mismo valor, porque todas las trayectorias corresponden al mismo cambio de temperatura. En particular, el cambio en la energía interna es el mismo para las trayectorias *ab* y *ac*:

$$\Delta E_{\text{int},ab} = \Delta E_{\text{int},ac}. \tag{15}$$

Existen dos contribuciones al cambio de la energía interna a lo largo de la trayectoria *ac* —el calor $Q$ transferido al gas y el trabajo $W$ efectuado sobre el gas:

$$\Delta E_{\text{int},ac} = Q + W. \tag{16}$$

Obsérvense las convenciones del signo que están implícitas en la ecuación 16. Se considera que el calor transferido *desde* el entorno es positivo y tiende a incrementar la energía interna. Si el volumen disminuye, el trabajo efectuado sobre el gas por el entorno es positivo, lo cual tiende a aumentar la energía interna. Si el volumen aumenta ($W < 0$), el gas efectúa un trabajo sobre el entorno, lo cual tiende a disminuir la energía interna del gas.

Usando la ecuación 8, el calor transferido en un proceso a presión constante puede escribirse así:

$$Q = nC_p\,\Delta T, \tag{17}$$

donde $C_p$ es la *capacidad calorífica molar a presión constante*. La ecuación 26 del capítulo 23 da el trabajo a lo largo de la trayectoria *ac* como $W = -p\,\Delta V$, lo cual puede expresarse para este proceso a presión constante usando la ley del gas ideal como:

$$W = -p\,\Delta V = -nR\,\Delta T. \tag{18}$$

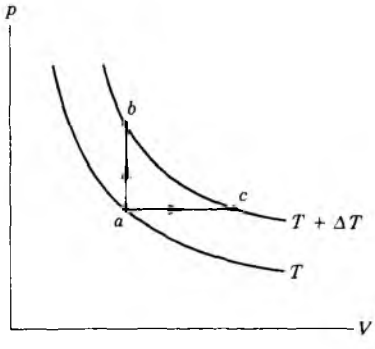



**Figura 6** Dos isotermas de gas ideal que difieren en temperatura en $\Delta T$ están conectadas por el proceso a volumen constante *ab* y el proceso a presión constante *ac*.

Usando la ecuación 11 para obtener el cambio en la energía interna a lo largo de la trayectoria *ab*, podemos sustituir en la ecuación 16 para hallar

$$nC_V\,\Delta T = nC_p\,\Delta T - nR\,\Delta T$$

o sea

$$C_p = C_V + R. \tag{19}$$

Partiendo de las ecuaciones 12 a 14 podemos entonces hallar las capacidades caloríficas molares a presión constante.

$$C_p = \tfrac{5}{2}R = 20.8\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gas monoatómico)}, \tag{20}$$

$$C_p = \tfrac{7}{2}R = 29.1\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gas biatómico)}, \tag{21}$$

$$C_p = 4R = 33.3\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gas poliatómico)}. \tag{22}$$

Otro parámetro de interés que puede medirse de manera directa, independientemente de los valores de $C_p$ y de $C_V$, es la *razón de las capacidades caloríficas molares* $\gamma$, definida como

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}. \tag{23}$$

Ya que la capacidad calorífica específica está relacionada con la capacidad calorífica molar por $c = C/M$, en donde $M$ es la masa molar de la sustancia, podemos también expresar a $\gamma$ como $c_p/c_V$. Por esta razón es llamada a menudo la *relación de calores específicos*, o *razón del calor específico*. Usamos $\gamma$ previamente en la expresión para la velocidad del sonido en un gas (problema muestra 6 del capítulo 23) y en la relación entre la presión y el volumen en un proceso adiabático (ecuación 28 del capítulo 23).

Usando las ecuaciones 20 a 22 para $C_p$ y las ecuaciones 12 a 14 para $C_V$, obtenemos

$$\gamma = \tfrac{5}{3} = 1.67 \quad \text{(gas monoatómico)}, \tag{24}$$

$$\gamma = \tfrac{7}{5} = 1.40 \quad \text{(gas biatómico)}, \tag{25}$$

$$\gamma = \tfrac{4}{3} = 1.33 \quad \text{(gas poliatómico)}. \tag{26}$$

**TABLA 3 CAPACIDADES CALORÍFICAS MOLARES DE LOS GASES**

| *Gas* | $C_p$ (J/mol · K) | $C_V$ (J/mol·K) | $C_p - C_V$ (J/mol · K) | $\gamma$ |
|---|---|---|---|---|
| Monoatómico | | | | |
| Ideal | 20.8 | 12.5 | 8.3 | 1.67 |
| He | 20.8 | 12.5 | 8.3 | 1.66 |
| Ar | 20.8 | 12.5 | 8.3 | 1.67 |
| Diatómico | | | | |
| Ideal | 29.1 | 20.8 | 8.3 | 1.40 |
| $H_2$ | 28.8 | 20.4 | 8.4 | 1.41 |
| $N_2$ | 29.1 | 20.8 | 8.3 | 1.40 |
| $O_2$ | 29.4 | 21.1 | 8.3 | 1.40 |
| Poliatómico | | | | |
| Ideal | 33.3 | 24.9 | 8.3 | 1.33 |
| $CO_2$ | 37.0 | 28.5 | 8.5 | 1.30 |
| $NH_3$ | 36.8 | 27.8 | 9.0 | 1.31 |

La tabla 3 muestra una comparación de los valores observados con las predicciones del modelo del gas ideal. La concordancia es excelente.

**Problema muestra 2** Una familia entra en una cabaña de vacaciones de invierno que no ha sido calentada en un tiempo tan largo que la temperatura del interior es la misma que la temperatura del exterior (0°C). La cabina consta de una sola sala de 6 m por 4 m en la planta y una altura de 3m. La sala contiene un calefactor eléctrico de 2 kW. Suponiendo que la sala sea perfectamente hermética y que todo el calor del calefactor eléctrico sea absorbido por el aire, no escapando nada a través de las paredes o absorbido por el mobiliario, ¿cuánto tiempo después de que el calefactor haya sido encendido alcanzará la temperatura del aire el nivel de comodidad de 21°C (= 70°F)?

**Solución** Suponemos que el aire en la sala (que en su mayoría es nitrógeno y oxígeno) se comporta como un gas diatómico ideal. El volumen de la sala es

$$V = (6\ \text{m})(4\ \text{m})(3\ \text{m}) = 72\ \text{m}^3 = 72{,}000\ \text{L}.$$

Puesto que 1 mol de un gas ideal ocupa 22.4 L a 0°C y 1 atm, el número de moles es

$$n = (72{,}000\ \text{L})/(22.4\ \text{L/mol}) = 3.2 \times 10^3\ \text{mol}.$$

Si la sala es hermética (véase la explicación más adelante), podemos considerar que la absorción de calor tiene lugar a volumen constante, para lo cual

$$Q = nC_V\,\Delta T = (3.2 \times 10^3\ \text{mol})(20.8\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(21\ \text{K})$$
$$= 1.4 \times 10^6\ \text{J}.$$

El calefactor entrega una potencia $P$ de 2 kW y puede proporcionar esta energía en un tiempo de

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{1.4 \times 10^6\ \text{J}}{2 \times 10^3\ \text{W}} = 700\ \text{s}$$

o unos 12 minutos.

Este problema contiene algunas suposiciones poco físicas con respecto a la absorción del calor en esta sala. Tratemos de

estimar la capacidad calorífica de algunas piezas del mobiliario para ver si fue razonable despreciar su efecto sobre la absorción del calor (y, por lo tanto, sobre el tiempo para que la sala alcance el nivel de comodidad). La pérdida de calor a través de las paredes de la sala, la cual estudiaremos en la sección 25-7, tendrá también un efecto considerable sobre este problema.

¿Es razonable la suposición de que la sala sea hermética? Si el aire de la sala estuviese originalmente a una presión de 1 atm cuando la temperatura era de 0 °C, ¿cuál sería la presión del interior a 21°C? ¿Cuál sería la fuerza resultante hacia afuera sobre el techo y las paredes? Pudiera ser una suposición más razonable que la sala no sea realmente hermética, sino que escaparía alguna cantidad de aire al elevarse la temperatura, manteniéndose por tanto constante la presión. Véase el problema 30 para un cálculo basado en esta suposición.

### Efecto de la teoría cuántica *(Opcional)*

Los valores mostrados en la tabla 3 son característicos de la temperatura ambiente, y por lo tanto cabe preguntar si la capacidad calorífica molar de un gas muestra algún efecto de temperatura. La figura 7 muestra la capacidad calorífica molar del hidrógeno en función de la temperatura. A bajas temperaturas, $C_v = \frac{3}{2}R$, característico de un gas con grados de libertad de traslación únicamente. Entre unos 200 a 600 K, el hidrógeno tiene $C_v = \frac{5}{2}R$ como lo esperamos para un gas diatómico con dos grados de libertad rotatorios; arriba de unos 2000 K, $C_v$ parece acercarse al valor $\frac{7}{2}R$ que sería característico de dos grados de libertad adicionales asociados con el movimiento vibratorio.

La clave para entender estas características radica en la teoría cuántica. Veamos primero la energía rotatoria. De acuerdo con la ecuación 23 del capítulo 13, el cambio más pequeño posible del ímpetu angular de un sistema rotatorio es $\Delta L = h/2\pi$, donde $h$ es la constante de Planck. La energía cinética rotatoria $E_R$ se relaciona con el ímpetu angular $L$ por medio de $E_R = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}L^2/I$, donde $I$ es la inercia rotatoria de una molécula de $H_2$ con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular a la línea que une a los dos átomos de H , dada por

$$I = m\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mR^2,$$

donde $m$ es la masa de un átomo de hidrógeno y $R$ (= 0.074 nm) es la separación en equilibrio de los dos átomos. Introduciendo los valores numéricos y calculando la energía cinética rotatoria correspondiente al cambio más pequeño permitido en el ímpetu angular ($h/2\pi$), estimamos

$$E_R = 3.8 \times 10^{-3}\ \text{eV}.$$

De acuerdo con el teorema de equipartición, se le adjudica a esta rotación una energía de $\frac{1}{2}kT$, pero este valor de $E_R$ es la *mínima* energía de rotación. Si $T$ es tan pequeña que $\frac{1}{2}kT < E_R$, no existe (en promedio) suficiente energía térmica disponible para proporcionar la energía cinética rotatoria mínima, y no pueden ocurrir rotaciones. Hallemos este umbral de temperatura:

$$\tfrac{1}{2}kT = E_R$$

$$T = \frac{2E_R}{k} = \frac{2(3.8 \times 10^{-3}\ \text{eV})}{8.6 \times 10^{-5}\ \text{eV/K}} = 88\ \text{K}.$$

El valor es enteramente consistente con los datos mostrados en la figura 7: los efectos de rotación no aparecen hasta temperaturas por arriba de unos 88 K.

Ocurre una situación similar para la energía vibratoria. La frecuencia vibratoria puede ser hallada de la "constante del resorte" efectiva, la cual puede calcularse a su vez al tratar a la energía potencial de la molécula diatómica como aproximadamente parabólica cerca de su mínimo (véase la Fig. 10 del capítulo 8). Para el $H_2$, sucede que la frecuencia es $\nu = 1.3 \times 10^{14}$ Hz, y la energía vibratoria cuantificada $E_v$ (véase la Ec. 38 del capítulo 8) es

$$E_v = h\nu = 0.54\ \text{eV}.$$

El teorema de equipartición permite una energía total de $kT$ para los dos grados de libertad vibratorios, pero la molécula no vibrará a no ser que tenga cuando menos 0.54 eV de energía térmica disponibles. Entonces, el umbral vibratorio está determinado por

$$kT = E_v$$

$$T = \frac{E_v}{k} = \frac{0.54\ \text{eV}}{8.6 \times 10^{-5}\ \text{eV/K}} = 6300\ \text{K}.$$

Esta burda aproximación es consistente con los datos de la figura 7.

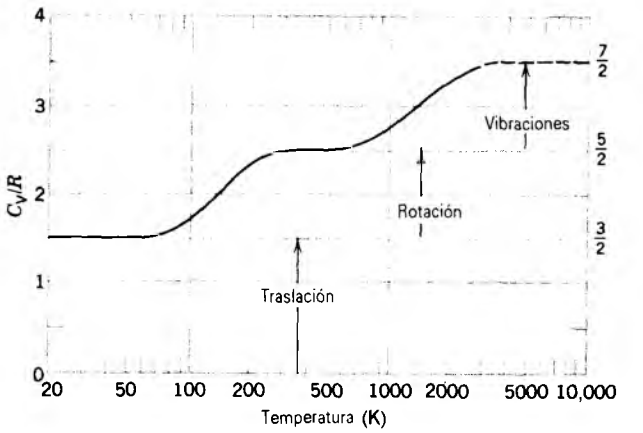



**Figura 7** La razón $C_v/R$ para el hidrógeno en función de la temperatura. Debido a que los movimientos rotatorio y vibratorio ocurren a energías cuantizadas, únicamente el movimiento de traslación ocurre a bajas temperaturas. Al aumentar la temperatura, puede excitarse el movimiento rotatorio durante las colisiones. A temperaturas aún más elevadas, puede ocurrir el movimiento vibratorio.

La descripción que hemos ofrecido de la estructura del hidrógeno nos proporciona una visión del comportamiento de las moléculas, pero deberíamos tener presente que contradice a los principios de la teoría cinética clásica que desarrollamos en el capítulo 23. La teoría cinética se basa en la aplicación de la mecánica newtoniana a un gas de partículas, y la equipartición de la energía (Secc. 23-6) se deduce directamente de la mecánica estadística clásica. Sin embargo, si la equipartición de la energía se cumple, entonces la capacidad calorífica molar del hidrógeno sería independiente de la temperatura. La física clásica no permite que un modo de movimiento, como el movimiento vibratorio o rotatorio de $H_2$, sea "congelado" por debajo de cierto umbral de temperatura, como tampoco permite que se añada energía a únicamente un modo de movimiento a la vez. La física clásica está entonces en obvio desacuerdo con los resultados experimentales mostrados en la figura 7.

Nuestro estudio de la teoría cinética ha indicado la insuficiencia de la mecánica clásica y sugerido la necesidad de una nueva teoría, la mecánica cuántica. Así como la mecánica newtoniana debe ser reemplazada por la teoría de la relatividad para descri-

bir el movimiento a alta velocidad (cerca de la velocidad de la luz), la mecánica newtoniana debe sustituirse por la mecánica cuántica para describir el comportamiento de los sistemas físicos de pequeñas dimensiones (subatómicos). Por fortuna, la mecánica cuántica se reduce directamente a la mecánica newtoniana en el límite de los objetos de tamaño ordinario, y por lo tanto podemos continuar aplicando la termodinámica clásica con confianza a sistemas en que no sea evidente la estructura subatómica.

**Problema muestra 3** La estructura interna del hidrógeno muestra una serie de estados discretos excitados, estando el primero de tales estados a una energía de $E = 10.2$ eV por arriba del estado más bajo (el estado base). ¿A qué temperatura será igual la energía cinética promedio de traslación a la energía del estado excitado?

**Solución** Requerimos que

$$\tfrac{3}{2}kT = E,$$

o sea

$$T = \frac{2E}{3k} = \frac{2(10.2\text{ eV})}{3(8.6 \times 10^{-5}\text{ eV/K})} = 7.9 \times 10^4\text{ K}.$$

Basados en este cálculo, vemos por qué la hipótesis básica de la teoría cinética, de que las moléculas pueden ser consideradas como si no tuviesen estructura interna, es verdadera a temperaturas ordinarias. Únicamente cambiará la estructura interna de la molécula a temperaturas lo suficientemente elevadas como para proporcionar a las moléculas una energía cinética promedio de traslación comparable a la diferencia de energía entre el estado base y el estado excitado más bajo, cuando las colisiones resultan inelásticas. Inversamente, puede decirse que la falla de la teoría cinética clásica en los gases a temperaturas elevadas proporciona una evidencia de la estructura interna cuantizada de los átomos.

## 25-5 LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

La figura 8 muestra un sistema que consta de dos gases separados por una pared diatérmica en un recipiente que por lo demás está aislado del entorno. El sistema no tiene partes móviles, de modo que no se efectúa ningún trabajo. Supongamos que los gases estén originalmente a las temperaturas $T_1$ y $T_2$ y que, después de un tiempo suficiente en contacto térmico, el sistema alcanza el equilibrio a alguna temperatura intermedia $T$. Partiendo de las técnicas ya discutidas en este capítulo, sabemos cómo obtener esta temperatura basados en una hipótesis: la energía perdida como calor por el gas más caliente ($Q_1$, una cantidad negativa) es igual en magnitud a la energía ganada como calor por el gas más frío ($Q_2$, una cantidad positiva). En efecto, esto no es más que un postulado de la conservación de la energía: $|Q_1| = |Q_2|$. Otra manera de dejar esto asentado es: $Q_1 + Q_2 = 0$; es decir, puesto que no se

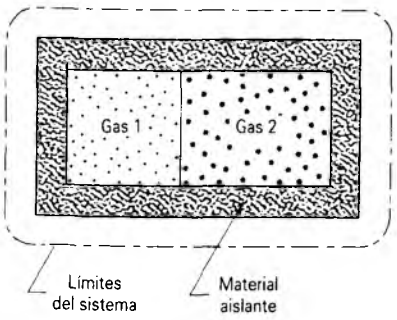



**Figura 8** Dos gases separados por una pared diatérmica (que conduce calor) en un recipiente aislado.

transfiere ningún calor entre este sistema combinado y su entorno, la energía total de los dos gases permanece constante.

En lugar de considerar a la combinación como nuestro sistema, elijamos al gas 2, que absorbe el calor $Q_2$. Después de que esta energía sea absorbida, no existe otro cambio en el sistema aparte de un aumento de su temperatura de $T_2$ a $T$. Para un gas ideal podemos calcular el cambio correspondiente en la energía interna $\Delta E_{\text{int},2}$. La única fuente para este cambio en la energía interna es el calor absorbido, y por lo tanto $\Delta E_{\text{int},2} = Q_2$, siendo positivas ambas cantidades. Esto es un enunciado de la conservación de la energía aplicado al gas 2. También podemos escribir un enunciado similar de la conservación de la energía aplicado al gas 1: $\Delta E_{\text{int},1} = Q_1$, donde ambas cantidades son negativas. Suponiendo que hayamos tenido el cuidado suficiente para hacer que los signos sean correctos, podemos escribir una ecuación general que describa cómo puede aplicarse la conservación de la energía a cualquier gas, en ausencia de un trabajo externo:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q. \tag{27}$$

Consideremos ahora la situación familiar ilustrada en la figura 9. Hagamos que el sistema (*incluyendo* ahora el peso) esté aislado del entorno, de modo que no entre ni salga calor. Supongamos que la carga sobre el émbolo se aumenta gradualmente, de modo que el émbolo cargado descienda a través de cierta distancia. La gravedad (una fuerza externa ejercida por el entorno) realiza cierta cantidad de trabajo (positivo) $W$ sobre el sistema. (Véase la ecuación 30 del capítulo 23 para una expresión del trabajo efectuado en este proceso adiabático). La temperatura aumenta en este proceso, y por lo tanto el sistema experimenta un cambio positivo en su energía interna. Puesto que no está implicada ninguna transferencia de calor, la energía interna del gas aumenta a causa del trabajo efectuado sobre él, o sea

$$\Delta E_{\text{int}} = W, \tag{28}$$

siendo ambas cantidades positivas en esta ecuación. La ecuación 28 es otra expresión de la conservación de la energía aplicada al sistema.

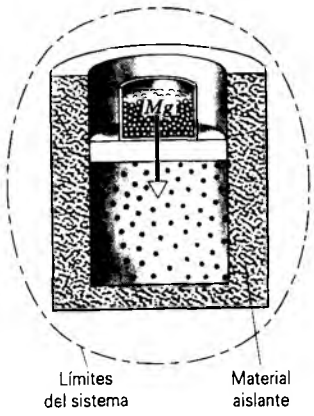



**Figura 9** Un gas en un contenedor aislado experimenta un trabajo externo sobre él debido a la gravedad.

Estos dos ejemplos, cambiando en uno de ellos la energía interna debido a la transferencia de calor y el otro debido a causa del trabajo externo, están representados esquemáticamente en la figura 10. Consideramos un sistema termodinámico general, y hemos tenido cuidado en trazar unos límites definidos entre el sistema y su entorno. El sistema arranca en un estado inicial de equilibrio i en la figura 10*a*, en donde las variables termodinámicas tienen ciertos valores. Luego sujetamos al sistema a una interacción con su entorno, como en la figura 10*b*, de modo que debe efectuarse un trabajo $W$ y debe ser intercambiado un calor $Q$. Por último, como en la figura 10*c*, el sistema está en un estado de equilibrio final f.

Consideremos ahora al sistema del estado i al estado f a lo largo de una variedad de trayectorias diferentes (veamos, por ejemplo, la figura 11 y el problema 38). Sabemos de nuestras reflexiones previas que tanto $W$ como $Q$ dependen de la trayectoria. Guiados por nuestra discusión de la energía interna, evaluemos la cantidad $Q + W$ para cada trayectoria. *Hallamos que, en cada caso, la cantidad $Q + W$ tiene el mismo valor. Si bien $Q$ y $W$ dependen individualmente de la trayectoria seguida, la cantidad $Q + W$ es independiente de la trayectoria*, dependiendo únicamente de los estados de equilibrio inicial i y final f del gas.

Recordaremos de nuestra exposición de las fuerzas conservativas en el capítulo 8 que, cuando el trabajo efectuado sobre un objeto dependa únicamente de los estados inicial y final y sea independiente de la trayectoria, podemos definir una función (la energía potencial en el capítulo 8) que depende únicamente de los valores de las coordenadas inicial y final, de modo que el trabajo efectuado al desplazar al objeto es igual a la diferencia entre los valores final e inicial de esta función. En termodinámica tenemos una situación similar en la que la cantidad $Q + W$ depende *únicamente* de las coordenadas inicial y final y *no depende en absoluto* de la trayectoria seguida entre i y f. Extraemos una conclusión similar: *debe haber una función de las coordenadas termodinámicas, cuyo valor final menos el valor inicial sea igual al valor de $Q + W$ en el proceso.*

Esta función es la *energía interna* del sistema. Ya hemos representado a la energía interna $E_{\text{int}}$ de un gas ideal como la suma de la energía de traslación y posiblemente de las energías rotatoria o vibratoria de sus moléculas. Aquí nos estamos refiriendo a una función de la energía interna más general aplicable a *cualquier* sistema termodinámico. En el caso de un gas real, debiéramos incluir (además de las energías cinéticas de traslación y rotatoria) a la energía potencial entre los átomos en una molécula, así como a la energía potencial entre moléculas diferentes. Incluso podemos incluir las excitaciones internas de los electrones de los átomos. Si nuestro sistema termodinámico es un sólido, la energía interna debería incluir la energía de amarre o descarga de los átomos de la malla cristalina.

El cambio en energía interna entre los estados de equilibrio i y f es

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int, f}} - E_{\text{int, i}}. \tag{29}$$

El valor de $E_{\text{int, i}}$ depende únicamente de las coordenadas del estado i (quizás de su temperatura, volumen, y presión en el caso de un gas, si bien únicamente de la temperatura para un gas *ideal*). De manera similar, $E_{\text{int, f}}$ depende únicamente de las coordenadas del punto f. Tal función es llamada una *función de estado*: depende sólo del estado del sistema y no depende en absoluto de cómo llegó el sistema a ese estado.

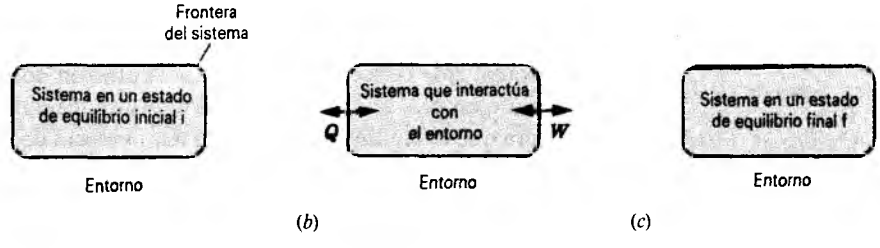



**Figura 10** (*a*) Sistema en un estado inicial de equilibrio con su entorno. (*b*) Un proceso termodinámico durante el cual el sistema puede intercambiar calor $Q$ o trabajo $W$ con su entorno. (*c*) Sistema en equilibrio final logrado como resultado del proceso.

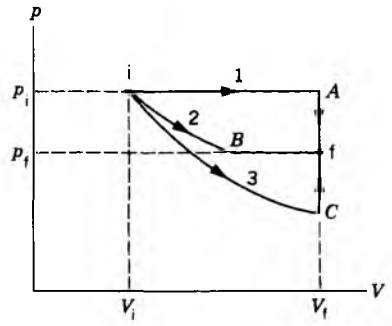



**Figura 11** Un sistema en un estado de equilibrio inicial i es llevado a un estado de equilibrio final f a lo largo de tres trayectorias diferentes: (1) un proceso a presión constante hasta *A*, seguido de un proceso a volumen constante hasta f; (2) un proceso isotérmico hasta *B*, seguido por un proceso a presión constante hasta f; (3) un proceso adiabático hasta *C*, seguido por un proceso a volumen constante hasta f. El calor *Q* transferido y el trabajo *W* efectuado son diferentes para cada trayectoria, pero la suma $Q + W$ tiene el mismo valor para todas las trayectorias entre i y f.

Esto nos lleva a la *primera ley de la termodinámica*, la cual puede enunciarse como sigue:

> *En cualquier proceso termodinámico entre los estados de equilibrio* i *y* f, *la cantidad* $Q + W$ *tiene el mismo valor para cualquier trayectoria entre* i *y* f. *Esta cantidad es igual al cambio en el valor de una función de estado llamada energía interna.*

Matemáticamente, la primera ley es*

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W. \tag{30}$$

En la primera ley existen implícitas tres características: (1) la existencia de la energía interna $E_{\text{int}}$ (en forma parecida a como la ley cero incluye la existencia de la temperatura); (2) la relación matemática entre $E_{\text{int}}$, $Q$, y $W$; y (3) las convenciones del signo necesarias para aplicar la primera ley ($Q > 0$ cuando *entra* calor al sistema, lo cual tiende a aumentar $E_{\text{int}}$; $W > 0$ cuando se efectúa un trabajo *sobre* un sistema, lo cual tiende también a aumentar $E_{\text{int}}$).

La ecuación 30 expresa la primera ley en una forma que se relaciona directamente con nuestro resultado general previo para la conservación de la energía en un sistema de partículas, ecuación 28 del capítulo 8: $\Delta U + \Delta K + E_{\text{int}} = W$ En ese capítulo no consideramos cambios de energía por medio de transferencia de calor, de modo que en un sentido la primera ley es un postulado *más* general de la conservación de la energía, Por otra parte, es al mismo tiempo menos general, en cuanto que la termodinámica no trata usualmente con el movimiento del centro de masa, y así $\Delta K = 0$, como tampoco trata con casos en los que la fuerza externa proporcione una energía potencial, de modo que $\Delta U = 0$. Basados en nuestra experiencia con la termodinámica, estaríamos tentados a escribir una ecuación más general de la conservación de la energía, como $\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = Q + W$, y es apropiado ver a la primera ley como una expresión de la conservación de la energía válida bajo estas circunstancias especiales.

Si el sistema experimenta sólo un cambio infinitesimal en su estado, únicamente es absorbida una cantidad infinitesimal de calor $dQ$, y únicamente se efectúa una cantidad infinitesimal de trabajo $dW$. En tal caso, la primera ley se escribe en la forma diferencial:

$$dE_{\text{int}} = dQ + dW. \tag{31}$$

Debido que $Q$ y $W$ no son funciones del estado de un sistema, no pueden ser tratadas como diferenciales exactas en el sentido matemático; esto es, no existe una función de las coordenadas $Q$ o $W$ cuya diferencial sea $dQ$ o $dW$. Su significado en la ecuación 31 es el de una cantidad muy pequeña. Sin embargo, $dE_{\text{int}}$ es una diferencial exacta, porque $E_{\text{int}}$ es una función de las coordenadas del sistema.

La primera ley de la termodinámica es un resultado general que se cree se aplica a todo proceso de la naturaleza que proceda entre estados de equilibrio. No es necesario que cada etapa del proceso sea un estado de equilibrio, únicamente los estados inicial y final. Por ejemplo, podemos aplicar la primera ley a la explosión de un petardo dentro de un tambor de acero aislado. Podemos efectuar el balance de energía antes de la explosión y después de que el sistema haya regresado al equilibrio, y para este cálculo no necesitamos preocuparnos de que la condición intermedia sea turbulenta y de que la presión y la temperatura no estén bien definidas.

A causa de su generalidad, la primera ley es un tanto incompleta como una descripción de la naturaleza. Nos dice que la energía debe conservarse en cada proceso, pero no nos dice si puede ocurrir realmente cualquier proceso en particular que conserve energía. La explosión del petardo, por ejemplo, libera energía química almacenada en la pólvora que eventualmente eleva la temperatura del gas en el tambor. Podemos imaginar al gas caliente entregando su energía térmica de regreso a los productos de la combustión, convertirlos otra vez en pólvora y rearmando el petardo, pero esto nunca se observa. La conservación de la energía se cumple en ambos casos, pero la naturaleza parece seguir una dirección preferida. Para proporcionar

* La forma en que se escriba la primera ley depende de la convención de signos elegida para el trabajo $W$, al cual definimos como $-\int p\,dV$ (trabajo efectuado *sobre* un sistema). Alternativamente, el trabajo puede ser definido como $\int p\,dV$ (trabajo efectuado *por* el sistema), en cuyo caso la primera ley se escribiría $\Delta E_{\text{int}} = Q - W$. Hemos elegido escribir la primera ley en esta forma de modo que el trabajo termodinámico tendrá la misma convención de signos que empleamos en el capítulo 7 para el trabajo mecánico; esto es, el trabajo efectuado *sobre* el sistema es positivo.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY



esta distinción, necesitamos la segunda ley de la termodinámica, que será discutida en el capítulo 26.

## 25-6 APLICACIONES DE LA PRIMERA LEY

### Proceso adiabático

En un proceso adiabático, el sistema está bien aislado de modo que no entra ni sale ningún calor, en cuyo caso $Q = 0$. La primera ley resulta ser, en este caso,

$$\Delta E_{\text{int}} = W \quad \text{(proceso adiabático)}. \tag{32}$$

Derivemos la relación entre $p$ y $V$ para un proceso adiabático llevado a cabo en un gas ideal, que empleamos en la sección 23-5. Suponemos que el proceso se va a llevar a cabo lentamente, de modo que la presión esté siempre bien definida. Para un gas ideal, podemos escribir la ecuación 11 como:

$$dE_{\text{int}} = nC_{\text{v}}\, dT.$$

Entonces,

$$p\, dV = -dW = -dE_{\text{int}} = -nC_{\text{v}}\, dT. \tag{33}$$

La ecuación de estado del gas puede ser escrita en forma diferencial como:

$$d(pV) = d(nRT)$$

$$p\, dV + V\, dp = nR\, dT. \tag{34}$$

Pero $p\, dV$ es precisamente $-dW$, que es igual a $-dE_{\text{int}}$ (puesto que la Ec. 32 puede expresarse en forma diferencial como $dE_{\text{int}} = dW$). Resolviendo la ecuación 34 para obtener $V\, dp$ y sustituyendo la ecuación 33, tenemos

$$V\, dp = nC_{\text{v}}\, dT + nR\, dT = nC_{\text{p}}\, dT, \tag{35}$$

donde el último resultado se obtuvo usando la ecuación 19, $C_{\text{p}} = C_{\text{v}} + R$. Podemos ahora considerar la razón entre las ecuaciones 35 y 33, lo cual da

$$\frac{V\, dp}{p\, dV} = \frac{nC_{\text{p}}\, dT}{-nC_{\text{v}}\, dT} = -\frac{C_{\text{p}}}{C_{\text{v}}} = -\gamma,$$

usando la ecuación 23 para la razón de las capacidades caloríficas molares $\gamma$. Reescribiendo, hallamos

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V},$$

la cual podemos integrar entre el estado inicial i y el estado final f

$$\int_{p_{\text{i}}}^{p_{\text{f}}} \frac{dp}{p} = -\gamma \int_{V_{\text{i}}}^{V_{\text{f}}} \frac{dV}{V}$$

$$\ln \frac{p_{\text{f}}}{p_{\text{i}}} = -\gamma \ln \frac{V_{\text{f}}}{V_{\text{i}}}$$

lo cual puede expresarse

$$p_{\text{i}} V_{\text{i}}^{\gamma} = p_{\text{f}} V_{\text{f}}^{\gamma}. \tag{36}$$

Puesto que i y f son puntos arbitrarios, podemos escribir esta ecuación como:

$$pV^{\gamma} = \text{constante}. \tag{37}$$

Las ecuaciones 36 y 37 dan la relación entre la presión y el volumen de un gas ideal que experimente un proceso adiabático. Dados los valores de la presión y del volumen en el punto inicial, el proceso adiabático procederá a través de puntos finales cuya presión y volumen puedan ser calculados a partir de la ecuación 36. De manera equivalente, la ecuación 37 define una familia de curvas en un diagrama $pV$. Todo proceso adiabático puede estar representado por un segmento de una de estas curvas (Fig. 12).

Podemos reescribir estos resultados en términos de temperatura, usando la ecuación de estado del gas ideal:

$$(pV)V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}. \tag{38}$$

La constante en la ecuación 38 no es la misma que la de la ecuación 37. De manera equivalente, podemos escribir la ecuación 38 como:

$$T_{\text{i}} V_{\text{i}}^{\gamma-1} = T_{\text{f}} V_{\text{f}}^{\gamma-1}$$

$$T_{\text{f}} = T_{\text{i}} \left(\frac{V_{\text{i}}}{V_{\text{f}}}\right)^{\gamma-1} \tag{39}$$

A partir de nuestra definición básica del trabajo termodinámico, $W = -\int p\, dV$, podemos demostrar (véase la Secc. 23-5) que, para un proceso adiabático,

$$W = \frac{1}{\gamma - 1}(p_{\text{f}} V_{\text{f}} - p_{\text{i}} V_{\text{i}}). \tag{40}$$

Supongamos que comprimimos un gas en un proceso adiabático (como se ilustró en la Fig. 9). Entonces $V_{\text{i}} > V_{\text{f}}$, y la ecuación 39 requiere entonces que $T_{\text{f}} > T_{\text{i}}$. La temperatura de un gas se eleva al ser comprimido, como observamos frecuentemente del calentamiendo de una bomba de bicicleta. Inversamente, la temperatura disminuye cuando un gas se expande, lo cual se usa a menudo como un medio para alcanzar temperaturas bajas en el laboratorio (véase la Fig. 12).

Las ondas sonoras en el aire pueden representarse en términos de procesos adiabáticos. A las frecuencias de audio, el aire es un mal conductor del calor. Existe un aumento de temperatura en las zonas de compresión de una onda sonora, pero debido a la mala conducción no existe un flujo de calor apreciable a los enrarecimientos vecinos más fríos; el proceso es entonces adiabático. Las compresiones y expansiones del vapor en una máquina de vapor, o de los gases calientes en los cilindros de una

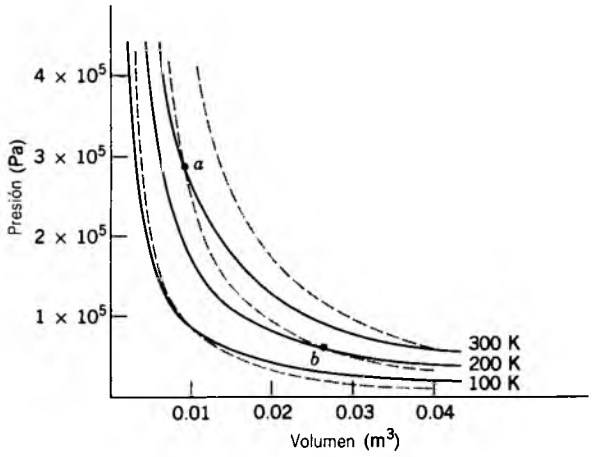



**Figura 12** Procesos isotérmicos (líneas continuas) y procesos adiabáticos (líneas de puntos) llevados a cabo en 1 mol de un gas ideal diatómico. Obsérvese que un *aumento* adiabático del volumen (por ejemplo, el segmento *ab*) está siempre acompañado de una *disminución* en la temperatura.

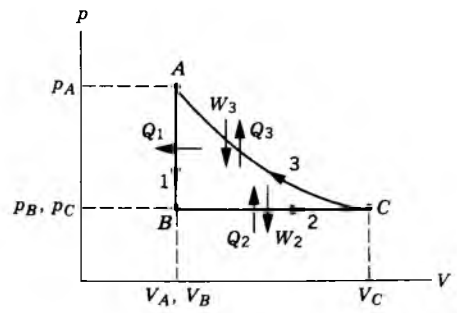



**Figura 13** Un gas experimenta un proceso cíclico que comienza en el punto *A* y consiste en (1) un proceso *AB* a volumen constante, (2) un proceso *BC* a presión constante, y (3) un proceso *CA* isotérmico.

máquina de combustión interna, son también esencialmente adiabáticas, porque el tiempo para que el calor fluya es insuficiente.

## Procesos isotérmicos

En un proceso isotérmico, la temperatura permanece constante. Si el sistema es un gas ideal, entonces la energía interna debe, por lo tanto, permanecer constante también. Con $\Delta E_{int} = 0$, la primera ley da

$$Q + W = 0 \text{ (proceso isotérmico; gas ideal).} \quad (41)$$

Si se efectúa sobre el gas una cantidad de trabajo (positivo) $W$, una cantidad equivalente de calor $Q = -W$ se libera por el gas hacia el entorno. Nada del trabajo efectuado sobre el gas permanece con el gas como energía interna almacenada.

La figura 12 compara los procesos isotérmico y adiabático para 1 mol de un gas monoatómico ideal.

## Procesos a volumen constante

Si el volumen de un gas permanece constante, no puede efectuarse un trabajo. Entonces $W = 0$, y la primera ley da

$$\Delta E_{int} = Q \text{ (proceso a volumen constante).} \quad (42)$$

En este caso, todo el calor que entra al gas ($Q > 0$) es almacenado como energía interna ($\Delta E_{int} > 0$).

## Procesos cíclicos

En un proceso cíclico, llevamos a cabo una secuencia de operaciones que finalmente llevan al sistema a su estado inicial, como, por ejemplo, el proceso de tres etapas ilustrado en la figura 13. Debido a que el proceso comienza y termina en el punto *A*, el cambio en la energía interna durante el ciclo es cero. Entonces, de acuerdo con la primera ley,

$$Q + W = 0 \quad \text{(proceso cíclico),} \quad (43)$$

en donde $Q$ y $W$ representan los totales para el ciclo. En la figura 13, el trabajo total es positivo, porque existe más área positiva bajo la curva que representa a la etapa 3 que área negativa bajo la línea que representa a la etapa 2. Entonces, $W > 0$ y se deduce de la ecuación 43 que $Q < 0$. De hecho, para cualquier ciclo que se efectúe en la dirección antihoraria, debemos tener $W > 0$ (y por ello $Q < 0$), mientras que los ciclos que se efectúen en la dirección horaria tienen $W < 0$ y $Q > 0$.

## Expansión libre

La figura 14 representa el proceso conocido como *expansión libre*. El gas está inicialmente sólo en un lado del recipiente, y cuando se abre la llave de paso, el gas se expande hacia la mitad previamente evacuada. No hay pesas que puedan ser elevadas en este proceso, así que no se efectúa ningún trabajo. El recipiente está aislado, de modo que el proceso es adiabático. De aquí que, con $W = 0$ y $Q = 0$, la primera ley da

$$\Delta E_{int} = 0 \quad \text{(expansión libre)} \quad (44)$$

Entonces, la energía interna de un gas ideal que experimente una expansión libre permanece constante, y debido a que la energía interna de un gas ideal depende únicamente de la temperatura, su temperatura debe, similarmente, permanecer constante.

La expansión libre es un buen ejemplo de un proceso *que no está en equilibrio*. Si un gas tiene una presión y un volumen (y por lo tanto una temperatura) bien definidos, podemos representar el estado del gas como un punto en

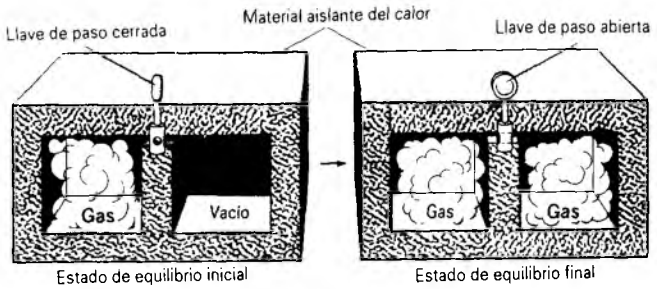



**Figura 14** Expansión libre. Al abrir la llave de paso se permite que el gas fluya de un lado del recipiente aislado al otro. No se efectúa ningún trabajo, y no se transfiere ningún calor al entorno.

un diagrama $pV$. La asignación de una temperatura al gas significa que debe estar en equilibrio térmico; cada punto en un diagrama $pV$ representa, por lo tanto, un sistema en equilibrio. En el caso de una expansión libre, el estado inicial (todo el gas en un lado) es un estado de equilibrio, así como también el estado final; pero en tiempos intermedios, cuando el gas pasa de un lado al otro, la temperatura y la presión no tienen valores únicos, y no podemos trazar este proceso en un diagrama $pV$. Únicamente los puntos inicial y final aparecen en la gráfica. No obstante, podemos todavía emplear la primera ley para analizar este proceso, porque el cambio en la energía interna depende únicamente de los puntos inicial y final.

La tabla 4 resume los procesos que hemos considerado y sus transferencias de energía.

**Problema muestra 4** Convirtamos 1.00 kg de agua líquida a vapor por medio de una ebullición a la presión atmosférica estándar; véase la figura 15. El volumen cambia de un valor inicial de $1.00 \times 10^{-3}$ m$^3$ como líquido a 1.671 m$^3$ como vapor. Para este proceso, halle (*a*) el trabajo efectuado sobre el sistema, (*b*) el calor añadido al sistema, y (*c*) el cambio en la energía interna del sistema.

**Solución** (*a*) El trabajo efectuado sobre el gas durante este proceso a presión constante está dado por la ecuación 26 del capítulo 23:

$$\begin{aligned} W &= -p(V_f - V_i) \\ &= -(1.01 \times 10^5 \text{ Pa})(1.671 \text{ m}^3 - 1 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \\ &= -1.69 \times 10^5 \text{ J} = -169 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

El trabajo efectuado sobre el sistema es negativo; de manera equivalente, el trabajo positivo es efectuado *por* el sistema sobre su entorno al levantar al émbolo cargado de la figura 15.

(*b*) Partiendo de la ecuación 7 tenemos

$$Q = Lm = (2260 \text{ kJ/kg})(1.00 \text{ kg}) = 2260 \text{ kJ}.$$

Esta cantidad es positiva, como es lo apropiado para un proceso en el que se añade calor al sistema.

(*c*) Hallamos el cambio en la energía interna a partir de la primera ley:

$$\Delta E_{int} = Q + W = 2260 \text{ kJ} + (-169 \text{ kJ}) = 2090 \text{ kJ}.$$

Esta cantidad es positiva, indicando que la energía interna del sistema ha aumentado durante el proceso de ebullición. Esta energía representa el trabajo interno efectuado para vencer la fuerte atracción que las moléculas de $H_2O$ ejercen entre sí en el estado líquido.

Vemos que, cuando el agua hierve, alrededor del 7.5% (169 kJ/2260 kJ = 0.075) del calor añadido se convierte en trabajo externo al empujar a la atmósfera. El resto se convierte en energía interna que se añade al sistema.

**Problema muestra 5** El ciclo mostrado en la figura 13 consiste en tres procesos, que comienzan en el punto $A$: una reducción de presión a volumen constante del punto $A$ al punto $B$; un aumento de volumen a presión constante del punto $B$ al punto $C$; una compresión isotérmica (disminución de volumen) desde el punto $C$ regresando al punto $A$. Hagamos que el ciclo sea llevado a cabo sobre 0.75 mol de un gas diatómico ideal, con $p_A = 3.2 \times 10^3$ Pa, $V_A = 0.21$ m$^3$, y $p_B = 1.2 \times 10^3$ Pa. Hallar $Q$, $W$, y $\Delta E_{int}$ para cada uno de los tres procesos y para el ciclo.

**Solución** El primer paso es hallar los valores de $p$, $V$, y $T$ en cada punto. En el punto $A$, se nos dan $p_A$ y $V_A$, y podemos resolver para $T_A$ a partir de la ley del gas ideal:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{(3.2 \times 10^3 \text{ Pa})(0.21 \text{ m}^3)}{(0.75 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol·K})} = 108 \text{ K}.$$

En el punto $B$, se nos dan $p_B$ y $V_B$ (= $V_A$), y podemos hallar a $T$ similarmente:

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{(1.2 \times 10^3 \text{ Pa})(0.21 \text{ m}^3)}{(0.75 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol·K})} = 40 \text{ K}.$$

En el punto $C$, sabemos que $p_C$ (= $p_B$) y que $T_C$ (= $T_A$, porque el proceso $CA$ es isotérmico). Entonces podemos hallar $V_C$:

**TABLA 4** APLICACIONES DE LA PRIMERA LEY

| *Proceso* | *Restricción* | *Primera ley* | *Otros resultados* |
|---|---|---|---|
| Todos | Ninguna | $\Delta E_{int} = Q + W$ | $\underline{\Delta E_{int} = nC_v \Delta T}$, $W = -\int p\, dV$ |
| Adiabático | $Q = 0$ | $\Delta E_{int} = W$ | $\underline{W = (p_f V_f - p_i V_i)/(\gamma - 1)}$ |
| A volumen constante | $W = 0$ | $\Delta E_{int} = Q$ | $\underline{Q = nC_v \Delta T}$ |
| A presión constante | $\Delta p = 0$ | $\Delta E_{int} = Q + W$ | $W = -p\Delta V$, $Q = nC_p \Delta T$ |
| Isotérmico | $\underline{\Delta E_{int} = 0}$ | $\underline{Q = -W}$ | $\underline{W = -nRT \ln(V_f/V_i)}$ |
| Cíclico | $\underline{\Delta E_{int} = 0}$ | $\underline{Q = -W}$ | |
| Expansión libre | $Q = W = 0$ | $\Delta E_{int} = 0$ | $\underline{\Delta T = 0}$ |

† Las expresiones subrayadas se aplican únicamente a los gases ideales; todas las demás se aplican en general.

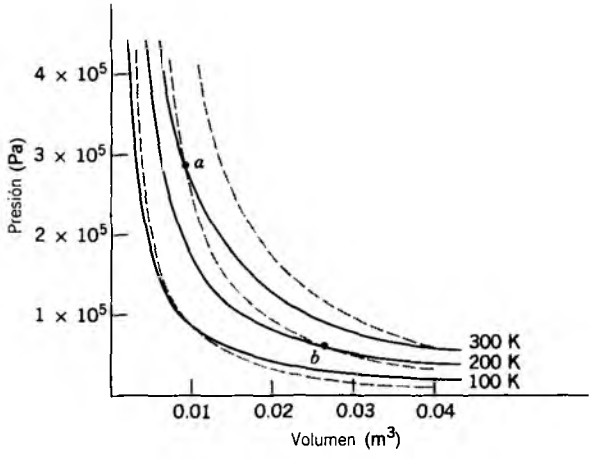



**Figura 12** Procesos isotérmicos (líneas continuas) y procesos adiabáticos (líneas de puntos) llevados a cabo en 1 mol de un gas ideal diatómico. Obsérvese que un *aumento* adiabático del volumen (por ejemplo, el segmento *ab*) está siempre acompañado de una *disminución* en la temperatura.

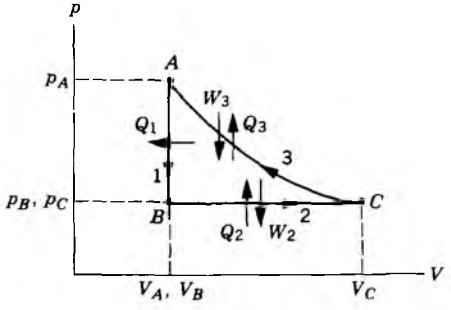



**Figura 13** Un gas experimenta un proceso cíclico que comienza en el punto *A* y consiste en (1) un proceso *AB* a volumen constante, (2) un proceso *BC* a presión constante, y (3) un proceso *CA* isotérmico.

máquina de combustión interna, son también esencialmente adiabáticas, porque el tiempo para que el calor fluya es insuficiente.

## Procesos isotérmicos

En un proceso isotérmico, la temperatura permanece constante. Si el sistema es un gas ideal, entonces la energía interna debe, por lo tanto, permanecer constante también. Con $\Delta E_{int} = 0$, la primera ley da

$$Q + W = 0 \text{ (proceso isotérmico; gas ideal).} \quad (41)$$

Si se efectúa sobre el gas una cantidad de trabajo (positivo) $W$, una cantidad equivalente de calor $Q = -W$ se libera por el gas hacia el entorno. Nada del trabajo efectuado sobre el gas permanece con el gas como energía interna almacenada.

La figura 12 compara los procesos isotérmico y adiabático para 1 mol de un gas monoatómico ideal.

## Procesos a volumen constante

Si el volumen de un gas permanece constante, no puede efectuarse un trabajo. Entonces $W = 0$, y la primera ley da

$$\Delta E_{int} = Q \text{ (proceso a volumen constante).} \quad (42)$$

En este caso, todo el calor que entra al gas ($Q > 0$) es almacenado como energía interna ($\Delta E_{int} > 0$).

## Procesos cíclicos

En un proceso cíclico, llevamos a cabo una secuencia de operaciones que finalmente llevan al sistema a su estado inicial, como, por ejemplo, el proceso de tres etapas ilustrado en la figura 13. Debido a que el proceso comienza y termina en el punto *A*, el cambio en la energía interna durante el ciclo es cero. Entonces, de acuerdo con la primera ley,

$$Q + W = 0 \quad \text{(proceso cíclico),} \quad (43)$$

en donde $Q$ y $W$ representan los totales para el ciclo. En la figura 13, el trabajo total es positivo, porque existe más área positiva bajo la curva que representa a la etapa 3 que área negativa bajo la línea que representa a la etapa 2. Entonces, $W > 0$ y se deduce de la ecuación 43 que $Q < 0$. De hecho, para cualquier ciclo que se efectúe en la dirección antihoraria, debemos tener $W > 0$ (y por ello $Q < 0$), mientras que los ciclos que se efectúen en la dirección horaria tienen $W < 0$ y $Q > 0$.

## Expansión libre

La figura 14 representa el proceso conocido como *expansión libre*. El gas está inicialmente sólo en un lado del recipiente, y cuando se abre la llave de paso, el gas se expande hacia la mitad previamente evacuada. No hay pesas que puedan ser elevadas en este proceso, así que no se efectúa ningún trabajo. El recipiente está aislado, de modo que el proceso es adiabático. De aquí que, con $W = 0$ y $Q = 0$, la primera ley da

$$\Delta E_{int} = 0 \quad \text{(expansión libre)} \quad (44)$$

Entonces, la energía interna de un gas ideal que experimente una expansión libre permanece constante, y debido a que la energía interna de un gas ideal depende únicamente de la temperatura, su temperatura debe, similarmente, permanecer constante.

La expansión libre es un buen ejemplo de un proceso *que no está en equilibrio*. Si un gas tiene una presión y un volumen (y por lo tanto una temperatura) bien definidos, podemos representar el estado del gas como un punto en

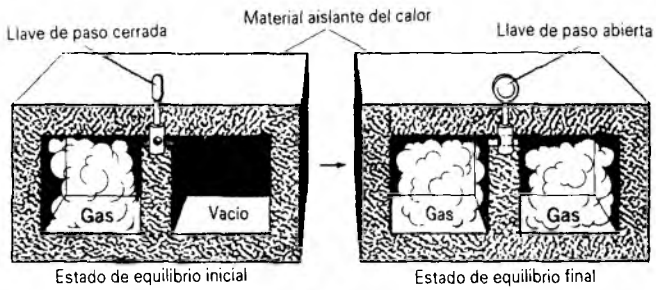



**Figura 14** Expansión libre. Al abrir la llave de paso se permite que el gas fluya de un lado del recipiente aislado al otro. No se efectúa ningún trabajo, y no se transfiere ningún calor al entorno.

un diagrama $pV$. La asignación de una temperatura al gas significa que debe estar en equilibrio térmico; cada punto en un diagrama $pV$ representa, por lo tanto, un sistema en equilibrio. En el caso de una expansión libre, el estado inicial (todo el gas en un lado) es un estado de equilibrio, así como también el estado final; pero en tiempos intermedios, cuando el gas pasa de un lado al otro, la temperatura y la presión no tienen valores únicos, y no podemos trazar este proceso en un diagrama $pV$. Únicamente los puntos inicial y final aparecen en la gráfica. No obstante, podemos todavía emplear la primera ley para analizar este proceso, porque el cambio en la energía interna depende únicamente de los puntos inicial y final.

La tabla 4 resume los procesos que hemos considerado y sus transferencias de energía.

**Problema muestra 4** Convirtamos 1.00 kg de agua líquida a vapor por medio de una ebullición a la presión atmosférica estándar; véase la figura 15. El volumen cambia de un valor inicial de $1.00 \times 10^{-3}$ m$^3$ como líquido a 1.671 m$^3$ como vapor. Para este proceso, halle (*a*) el trabajo efectuado sobre el sistema, (*b*) el calor añadido al sistema, y (*c*) el cambio en la energía interna del sistema.

**Solución** (*a*) El trabajo efectuado sobre el gas durante este proceso a presión constante está dado por la ecuación 26 del capítulo 23:

$$\begin{aligned} W &= -p(V_f - V_i) \\ &= -(1.01 \times 10^5 \text{ Pa})(1.671 \text{ m}^3 - 1 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \\ &= -1.69 \times 10^5 \text{ J} = -169 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

El trabajo efectuado sobre el sistema es negativo; de manera equivalente, el trabajo positivo es efectuado *por* el sistema sobre su entorno al levantar al émbolo cargado de la figura 15.

(*b*) Partiendo de la ecuación 7 tenemos

$$Q = Lm = (2260 \text{ kJ/kg})(1.00 \text{ kg}) = 2260 \text{ kJ}.$$

Esta cantidad es positiva, como es lo apropiado para un proceso en el que se añade calor al sistema.

(*c*) Hallamos el cambio en la energía interna a partir de la primera ley:

$$\Delta E_{int} = Q + W = 2260 \text{ kJ} + (-169 \text{ kJ}) = 2090 \text{ kJ}.$$

Esta cantidad es positiva, indicando que la energía interna del sistema ha aumentado durante el proceso de ebullición. Esta energía representa el trabajo interno efectuado para vencer la fuerte atracción que las moléculas de $H_2O$ ejercen entre sí en el estado líquido.

Vemos que, cuando el agua hierve, alrededor del 7.5% (169 kJ/2260 kJ = 0.075) del calor añadido se convierte en trabajo externo al empujar a la atmósfera. El resto se convierte en energía interna que se añade al sistema.

**Problema muestra 5** El ciclo mostrado en la figura 13 consiste en tres procesos, que comienzan en el punto $A$: una reducción de presión a volumen constante del punto $A$ al punto $B$; un aumento de volumen a presión constante del punto $B$ al punto $C$; una compresión isotérmica (disminución de volumen) desde el punto $C$ regresando al punto $A$. Hagamos que el ciclo sea llevado a cabo sobre 0.75 mol de un gas diatómico ideal, con $p_A = 3.2 \times 10^5$ Pa, $V_A = 0.21$ m$^3$, y $p_B = 1.2 \times 10^5$ Pa. Hallar $Q$, $W$, y $\Delta E_{int}$ para cada uno de los tres procesos y para el ciclo.

**Solución** El primer paso es hallar los valores de $p$, $V$, y $T$ en cada punto. En el punto $A$, se nos dan $p_A$ y $V_A$, y podemos resolver para $T_A$ a partir de la ley del gas ideal:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{(3.2 \times 10^5 \text{ Pa})(0.21 \text{ m}^3)}{(0.75 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})} = 108 \text{ K}.$$

En el punto $B$, se nos dan $p_B$ y $V_B$ (= $V_A$), y podemos hallar a $T$ similarmente:

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{(1.2 \times 10^5 \text{ Pa})(0.21 \text{ m}^3)}{(0.75 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})} = 40 \text{ K}.$$

En el punto $C$, sabemos que $p_C$ (= $p_B$) y que $T_C$ (= $T_A$, porque el proceso $CA$ es isotérmico). Entonces podemos hallar $V_C$:

**TABLA 4** APLICACIONES DE LA PRIMERA LEY

| *Proceso* | *Restricción* | *Primera ley* | *Otros resultados* |
|---|---|---|---|
| Todos | Ninguna | $\Delta E_{int} = Q + W$ | $\underline{\Delta E_{int} = nC_V \Delta T}$, $W = -\int p\, dV$ |
| Adiabático | $Q = 0$ | $\Delta E_{int} = W$ | $\underline{W = (p_f V_f - p_i V_i)/(\gamma - 1)}$ |
| A volumen constante | $W = 0$ | $\Delta E_{int} = Q$ | $\underline{Q = nC_V \Delta T}$ |
| A presión constante | $\Delta p = 0$ | $\Delta E_{int} = Q + W$ | $W = -p\Delta V$, $Q = nC_p \Delta T$ |
| Isotérmico | $\underline{\Delta E_{int} = 0}$ | $\underline{Q = -W}$ | $\underline{W = -nRT \ln(V_f/V_i)}$ |
| Cíclico | $\underline{\Delta E_{int} = 0}$ | $\underline{Q = -W}$ | |
| Expansión libre | $Q = W = 0$ | $\Delta E_{int} = 0$ | $\underline{\Delta T = 0}$ |

† Las expresiones subrayadas se aplican únicamente a los gases ideales; todas las demás se aplican en general.

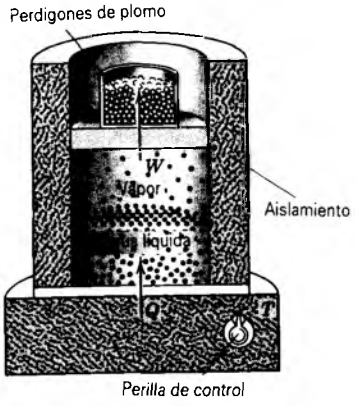



**Figura 15** Problema muestra 4. El agua está hirviendo a presión constante. El calor fluye desde el depósito hasta que el agua ha sido cambiada completamente a vapor. Se efectúa un trabajo cuando el gas en expansión levanta al émbolo.

$$V_C = \frac{nRT_C}{p_C} = \frac{(0.75\text{ mol})(8.31\text{ J/mol}\cdot\text{K})(108\text{ K})}{1.2\times10^3\text{ Pa}} = 0.56\text{ m}^3.$$

Con esta información, podemos ahora calcular la transferencia de calor, el trabajo efectuado, y el cambio en energía interna para cada proceso. Para el proceso 1 (*AB*), tenemos

$$Q_1 = nC_V(T_B - T_A)$$
$$= (0.75\text{ mol})(20.8\text{ J/mol}\cdot\text{K})(40\text{ K} - 108\text{ K}) = -1060\text{ J},$$
$$W_1 = 0 \quad \text{(proceso a volumen constante)},$$
$$\Delta E_{\text{int},1} = Q_1 + W_1 = -1060\text{ J} + 0 = -1060\text{ J}.$$

El sistema transfiere energía al entorno como calor durante el proceso 1, y su temperatura cae, correspondiendo a un cambio negativo en la energía interna.

Para el proceso a presión constante 2 (*BC*), obtenemos

$$Q_2 = nC_p(T_C - T_B)$$
$$= (0.75\text{ mol})(29.1\text{ J/mol}\cdot\text{K})(108\text{ K} - 40\text{ K}) = 1480\text{ J},$$
$$W_2 = -p(V_C - V_B)$$
$$= -(1.2\times10^3\text{ Pa})(0.56\text{ m}^3 - 0.21\text{ m}^3) = -420\text{ J},$$
$$\Delta E_{\text{int},2} = Q_2 + W_2 = 1480\text{ J} + (-420\text{ J}) = 1060\text{ J}.$$

Se transfiere energía al gas como calor durante el proceso 2 y, al dilatarse, el gas efectúa trabajo sobre su entorno (el entorno efectúa un trabajo negativo sobre el gas).

A lo largo de la isoterma (*CA*), el trabajo está dado por la ecuación 27 del capítulo 23:

$$W_3 = -nRT_C \ln\frac{V_A}{V_C}$$
$$= -(0.75\text{ mol})(8.31\text{ J/mol}\cdot\text{K})(108\text{ K})\ln\frac{0.21\text{ m}^3}{0.56\text{ m}^3}$$
$$= 660\text{ J},$$
$$\Delta E_{\text{int},3} = 0 \quad \text{(proceso isotérmico)},$$
$$Q_3 = \Delta E_{\text{int},3} - W_3 = 0 - 660\text{ J} = -660\text{ J}.$$

Para el ciclo, tenemos

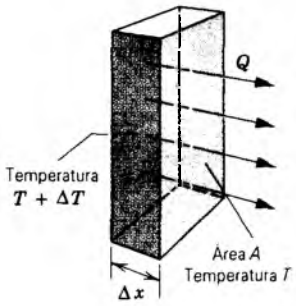



**Figura 16** El calor $Q$ fluye a través de una losa rectangular de material de espesor $\Delta x$ y área $A$.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -1060\text{ J} + 1480\text{ J} + (-660\text{ J})$$
$$= -240\text{ J},$$
$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + (-420\text{ J}) + 660\text{ J} = 240\text{ J},$$
$$\Delta E_{\text{int}} = \Delta E_{\text{int},1} + \Delta E_{\text{int},2} + \Delta E_{\text{int},3} = -1060\text{ J} + 1060\text{ J} + 0 = 0.$$

Nótese que, como era de esperarse para el ciclo, $\Delta E_{\text{int}} = 0$ y $Q = -W$. El trabajo total para el ciclo es positivo, como lo esperamos para un ciclo que se efectúa en la dirección antihoraria.

## 25-7 LA TRANSFERENCIA DE CALOR

Hemos discutido la transferencia de calor entre un sistema y su entorno, pero no hemos descrito aún cómo tiene lugar la transferencia. Existen tres mecanismos: conducción, convección, y radiación. Explicaremos cada uno de ellos por orden.

### Conducción

Si dejamos un atizador metálico en la lumbre durante cualquier periodo de tiempo, su mango se calienta. Se transfiere energía de la lumbre al mango por *conducción* a lo largo de la longitud del mango de metal. En virtud de la alta temperatura en ese extremo, los átomos del extremo caliente están vibrando con una amplitud grande. Estas amplitudes vibratorias grandes pasan a lo largo del mango, de átomo a átomo, debido a las interacciones entre átomos adyacentes. De esta manera recorre una región de temperatura elevada a lo largo del mango hacia nuestra mano.

Consideremos una losa delgada de material homogéneo de espesor $\Delta x$ y área $A$ en su sección transversal (Fig. 16). La temperatura es $T + \Delta T$ en una cara y $T$ en la otra. Por experimentación, describimos varias características sobre la razón $H = Q/\Delta t$ a la cual será transferida una pequeña cantidad de calor $Q$ a través de la losa en un tiempo $\Delta t$. La razón de flujo calorífico a través de la losa es (1) directamente proporcional a $A$: cuanto mayor sea el área dispo-

**TABLA 5** ALGUNAS CONDUCTIVIDADES TERMICAS Y VALORES DE *R*.†

| *Material* | *Conductividad* (W/m · K) | *Valor de R* (ft² · F° · h/Btu) |
|---|---|---|
| Metales | | |
| Acero inoxidable | 14 | 0.010 |
| Plomo | 35 | 0.0041 |
| Aluminio | 235 | 0.00061 |
| Cobre | 401 | 0.00036 |
| Plata | 428 | 0.00034 |
| Gases | | |
| Aire (seco) | 0.026 | 5.5 |
| Helio | 0.15 | 0.96 |
| Hidrógeno | 0.18 | 0.80 |
| Materiales de construcción | | |
| Espuma de poliuretano | 0.024 | 5.9 |
| Lana mineral | 0.043 | 3.3 |
| Fibra de vidrio | 0.048 | 3.0 |
| Pino blanco | 0.11 | 1.3 |
| Vidrio de ventanería | 1.0 | 0.14 |

† Los valores son a la temperatura ambiente. Nótese que los valores de $k$ están dados en unidades SI y los de $R$ en las unidades británicas acostumbradas. Los valores de $R$ son para una losa de 1 in de espesor.

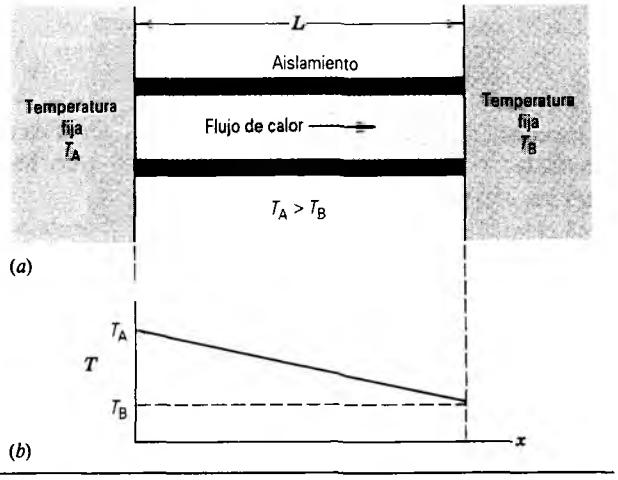



**Figura 17** (*a*) Conducción de calor a través de una barra conductora aislada. (*b*) Variación de la temperatura a lo largo de la barra.

nible, más calor fluirá por unidad de tiempo; (2) inversamente proporcional a $\Delta x$: cuanto más gruesa sea la losa, menos calor fluirá por unidad de tiempo; y (3) directamente proporcional a $\Delta T$: cuanto más grande sea la diferencia de temperatura, más calor fluirá por unidad de tiempo. [Estos resultados experimentales proporcionan claves para minimizar la pérdida de calor en su casa durante el invierno: haga que el área de la superficie sea más pequeña (una casa de dos plantas es más eficiente que una casa de una planta con la misma área total); use paredes gruesas llenas de material aislante; y, quizá lo más importante, cámbiese a un clima más templado.]

Matemáticamente, podemos resumir estos resultados experimentales como:

$$H = \frac{Q}{\Delta t} \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

Introduciendo una constante de proporcionalidad $k$, llamada *conductividad térmica* (no debe confundirse con la constante de Boltzmann), podemos escribir

$$H = \frac{Q}{\Delta t} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x}. \tag{45}$$

Una sustancia con un valor grande de $k$ es buena conductora del calor; una con un valor pequeño de $k$ es mala conductora, o buena aislante. En el caso de los sólidos, las propiedades de los materiales pueden hacerlos buenos conductores *eléctricos* (por ejemplo, la capacidad de los electrones de moverse con relativa facilidad en todo el volumen del material) así como también buenos conductores *térmicos*. La tabla 5 muestra algunos valores representativos de $k$. Dentro de la gama de temperaturas que encontramos normalmente, podemos considerar a $k$ como una constante, pero en gamas de temperatura más amplias se muestra una ligera variación con $T$. Nótese que los sólidos, aun aquellos que consideramos comúnmente como aislantes, tienen conductividades más elevadas que los gases.

Consideremos dos límites de aplicabilidad de la ecuación 45. Veamos primero el caso de una barra larga de longitud $L$ y sección transversal uniforme $A$, donde un extremo se mantiene a la temperatura elevada $T_A$ y el otro extremo a la temperatura baja $T_B$ (Fig. 17). Esto es, los extremos de las barras están sumergidos en depósitos térmicos, de modo que uno puede abastecer una cantidad ilimitada de calor y seguir manteniendo la temperatura $T_A$, mientras que el otro puede absorber una cantidad ilimitada de calor y aún mantener la temperatura $T_B$. (Un depósito puede ser de un material de masa mayor que la barra, y por lo tanto tener una capacidad calorífica tan grande que el calor que fluye hacia, o desde la barra es despreciable, o bien que el depósito pueda ser conectado a una máquina de calor como un horno o un refrigerador que pueda abastecer o absorber calor continuamente a costa de trabajo externo. Una mezcla de agua y hielo a 0°C o una mezcla de vapor y agua a 100°C pueden ser consideradas también como un depósito térmico.)

Llamamos a esto una situación de *estado estacionario*: las temperaturas y la cantidad de calor transferido son constantes en el tiempo. En esta situación, todo incremento de calor $Q$ que entre a la barra por el extremo caliente sale de ella por el extremo frío. Puesto de otra manera, mediríamos la misma razón de transferencia de calor a través de cualquier sección transversal a lo largo de la longitud de la barra.

Para este caso, podemos escribir la ecuación 45 así:

$$H = kA \frac{T_A - T_B}{L} \tag{46}$$

Aquí $L$ es el espesor del material en la dirección de la tranferencia del calor. La razón de flujo de calor $H$ es una constante, y la temperatura disminuye de modo lineal entre los extremos de la barra (Fig. 17*b*).

Al elegir los materiales de construcción, a menudo los hallamos caracterizados por la *resistencia térmica* o valor de $R$, definido por

$$R = \frac{L}{k}. \tag{47}$$

Entonces, cuanto más baja sea la conductividad, mayor será el valor de $R$: los buenos aislantes tienen valores de $R$ altos. Numéricamente, el valor de $R$ se obtiene de acuerdo con la ecuación 47 expresada en las unidades británicas, $ft^2 \cdot F° \cdot h/Btu$. El valor de $R$ se determina para un cierto espesor del material. Por ejemplo, un espesor de 1 in de fibra de vidrio tiene un $R = 3$ en el sistema británico, mientras que un espesor de 1 in de madera tiene una $R = 1$ en el sistema británico, y por lo tanto, conduce calor a 3 veces la razón de la fibra de vidrio. Una pulgada de aire tiene un $R = 5$ en el sistema británico, pero el aire es un mal aislante térmico porque puede transferir más calor por convección, y la conductividad térmica no es entonces una buena medida del valor aislante del aire. La tabla 5 muestra los valores de $R$ para algunos materiales.

Consideraremos ahora el caso en que la losa tenga un espesor infinitesimal $dx$ y una diferencia de temperatura $dT$ a través de su espesor. En este límite, obtenemos

$$H = -kA \frac{dT}{dx}. \tag{48}$$

A menudo se conoce a la derivada $dT/dx$ como el *gradiente de temperatura*, siendo la palabra "gradiente" un término matemático general para la derivada de una variable escalar con respecto a una coordenada específica. Como una variable, $x$ indica la dirección del flujo de calor y, por lo tanto, introducimos un signo menos en la ecuación 48 como un recordatorio de que el calor fluye en la dirección de *$dT/dx$ decreciente*.

La ecuación 48 tiene una aplicabilidad particular en los casos en que la sección transversal del material no sea uniforme. Usaremos esta forma diferencial en la solución del problema muestra 7.

## Convección

Si se mira a la llama de una vela o de un cerillo, estamos viendo que la energía calorífica es transportada hacia arriba por *convección*. La transferencia de calor por convección ocurre cuando un fluido, tal como el aire o el agua, está en contacto con un objeto cuya temperatura es más alta que la de su entorno. La temperatura del fluido que está en contacto con el objeto caliente aumenta, y (en la mayoría de los casos) el fluido se dilata. Por ser menos denso que el fluido más frío circundante, se eleva a causa de las fuerzas de flotación; véase la figura 18. El fluido más frío circundante cae para tomar el lugar del fluido que se eleva, más caliente, y se establece una circulación por convección.

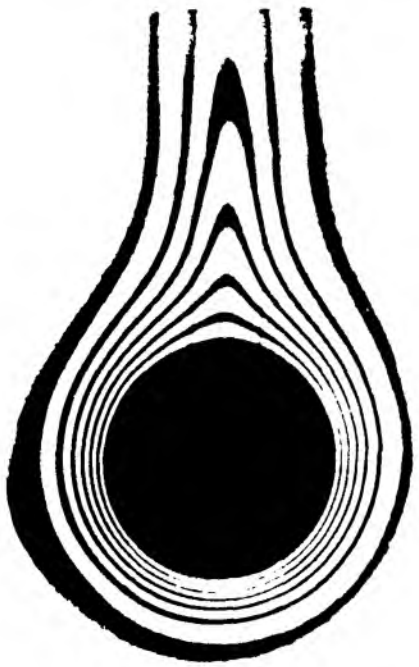


**Figura 18** El aire se eleva por convección alrededor de un cilindro calentado. Las áreas oscuras representan regiones de temperatura uniforme.

La convección atmosférica juega un papel fundamental en la determinación de los patrones climáticos globales y en nuestras variaciones diarias del tiempo. Los pilotos de los planeadores y los cóndores buscan por igual las corrientes por termoconvección que los mantienen en vuelo al elevarse desde la Tierra, más caliente. En los océanos tienen lugar enormes transferencias de energía por el mismo proceso. La región exterior del Sol, llamada *fotósfera*, contiene una vasta ordenación de celdas de convección que transportan energía a la superficie solar y dan a la superficie una apariencia granulada.

Hemos estado describiendo la convección *libre* o *natural*. La convección puede también ser forzada, como cuando el soplador de un horno provoca que la circulación del aire caliente las habitaciones de una casa.

## Radiación

La energía es transportada desde el Sol hasta nosotros por medio de ondas electromagnéticas que viajan libremente

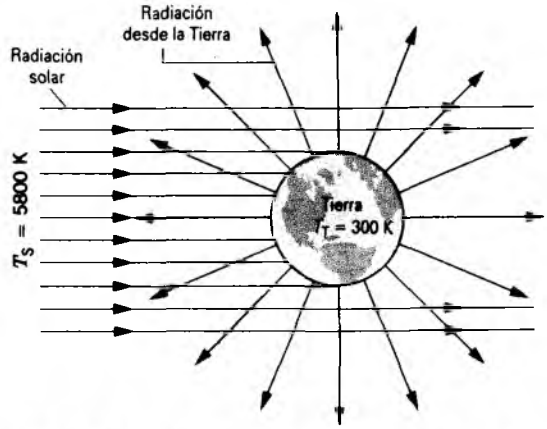



**Figura 19** La radiación solar es interceptada por la Tierra y en su mayor parte absorbida. La temperatura $T_T$ de la Tierra se ajusta por sí misma a un valor en el que la pérdida de calor de la Tierra por radiación es precisamente igual al calor solar que absorbe.

a través del casi vacío del espacio intermedio. Si nos paramos cerca de una fogata, nos calentamos mediante el mismo proceso. Todos los objetos emiten esa radiación electromagnética a causa de su temperatura y también absorben parte de la radiación que cae sobre ellos a partir de otros objetos. Cuanto más alta sea la temperatura de un objeto, más irradiará. En el capítulo 49 de la versión ampliada de este texto veremos que la energía irradiada por un objeto es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura. Por ejemplo, la temperatura promedio de nuestra Tierra es de cerca de 300 K, a causa de que a esa temperatura la Tierra irradia energía al espacio a la misma razón que la que recibe del Sol; véase la figura 19.

**Problema muestra 6** Consideremos una losa compuesta, que consta de dos materiales con espesores diferentes, $L_1$ y $L_2$, y diferentes conductividades térmicas, $k_1$ y $k_2$. Si las temperaturas de las superficies exteriores son $T_2$ y $T_1$, halle la cantidad del calor transferido a través de la losa compuesta (Fig. 20) en un estado estacionario.

**Solución** Sea $T_x$ la temperatura en la superficie de contacto entre los dos materiales. Entonces la razón de calor transferido a través de la losa 2 es

$$H_2 = \frac{k_2 A(T_2 - T_x)}{L_2}$$

y la razón a través de la losa 1 es

$$H_1 = \frac{k_1 A(T_x - T_1)}{L_1}.$$

En el estado estacionario $H_2 = H_1$ de modo que

$$\frac{k_2 A(T_2 - T_x)}{L_2} = \frac{k_1 A(T_x - T_1)}{L_1}.$$

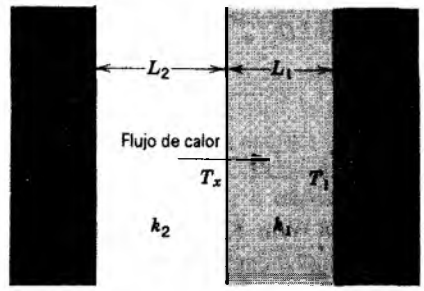



**Figura 20** Problema muestra 6. Conducción de calor a través de dos capas de material con conductividades térmicas diferentes.

Hagamos que $H$ sea la razón de transferencia de calor (la misma para todas las secciones). Entonces, resolviendo para $T_x$ y sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones para $H_1$ o para $H_2$, obtenemos

$$H = \frac{A(T_2 - T_1)}{(L_1/k_1) + (L_2/k_2)} = \frac{A(T_2 - T_1)}{R_1 + R_2}.$$

La extensión a cualquier número de secciones en serie es

$$H = \frac{A(T_2 - T_1)}{\Sigma(L_i/k_i)} = \frac{A(T_2 - T_1)}{\Sigma R_i}. \qquad (49)$$

**Problema muestra 7** Una tubería metálica cilíndrica delgada transporta vapor a una temperatura de $T_S$ = 100°C. El tubo tiene un diámetro de 5.4 cm y está forrado con un espesor de 5.2 cm de fibra de vidrio aislante. A través de un salón pasa una tubería de longitud $D$ = 6.2 m en que la temperatura es $T_R$ = 11°C. (*a*) ¿Cuánto calor se pierde a través del aislante? (*b*) ¿Cuánto aislante adicional debe ser añadido para reducir a la mitad la pérdida de calor?

**Solución** (*a*) La figura 21 ilustra la geometría apropiada para el cálculo. En el estado estacionario, a través de cada capa cilíndrica delgada, como la que se indica por medio de líneas discontinuas en la figura 21, pasará la misma cantidad constante de flujo de calor $H$. Podemos considerar a esta capa como una placa de material que tiene un espesor $dr$ y un área de $2\pi rD$. Aplicando la ecuación 48 a esta geometría, tenemos

$$H = -kA\frac{dT}{dr} = -k(2\pi rD)\frac{dT}{dr}$$

o sea

$$H\frac{dr}{r} = -2\pi kD\,dT.$$

Suponemos que la tubería metálica delgada está a la temperatura del vapor, de modo que no interviene en el cálculo. Integramos a partir del radio interior $r_1$ del aislante a la temperatura $T_S$ al radio exterior $r_2$ a la temperatura $T_R$:

$$\int_{r_1}^{r_2} H\frac{dr}{r} = -2\pi kD\int_{T_S}^{T_R} dT.$$

Sacando la constante $H$ de la integral de la izquierda y llevando a cabo las integraciones, obtenemos

$$H \ln \frac{r_2}{r_1} = -2\pi kD(T_R - T_S) = 2\pi kD(T_S - T_R).$$

Resolviendo para $H$ e insertando los valores numéricos, hallamos

$$H = \frac{2\pi kD(T_S - T_R)}{\ln(r_2/r_1)}$$
$$= \frac{2\pi(0.048 \text{ W/m} \cdot \text{K})(6.2 \text{ m})(89 \text{ K})}{\ln(7.9 \text{ cm}/2.7 \text{ cm})} = 155 \text{ W}.$$

(*b*) Para reducir la pérdida de calor a la mitad, debemos aumentar $r_2$ al valor $r_2'$, de modo que el denominador de la expresión de arriba para $H$ resulte el doble de grande; esto es,

$$\frac{\ln(r_2'/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} = 2.$$

Resolviendo para $r_2'$, hallamos

$$r_2' = \frac{r_2^2}{r_1} = \frac{(7.9 \text{ cm})^2}{2.7 \text{ cm}} = 23 \text{ cm}.$$

Entonces, ¡necesitamos casi cuatro veces el espesor del aislante para reducir la transferencia de calor a la mitad!. Este efecto es debido al aumento de área, y por lo tanto al aumento de masa, contenidos en cada capa delgada cuando aumentamos el radio en la geometría cilíndrica. Existe más material disponible para conducir calor a los radios exteriores, y por lo tanto debemos suministrar una cantidad creciente de aislante al crecer $r$. Esto difiere de la geometría lineal, en la cual el calor transferido disminuye linealmente al aumentar el espesor del aislante. En la geometría esférica (que pudiera ser apropiada para calcular el calor perdido a partir del núcleo de la Tierra hacia su superficie), el cálculo es también diferente; véase el problema 61.

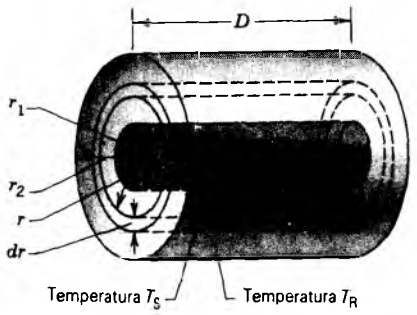



**Figura 21** Problema muestra 7. La superficie interior (radio $r_1$) del aislante de un tubo cilíndrico está a la temperatura $T_S$ y la superficie exterior (radio $r_2$) está a $T_R$. A través de cada capa cilíndrica de aislante, tal como la intermedia de espesor $dr$ y radio $r$ que se muestra con líneas de puntos, fluye el mismo calor $Q$.

## PREGUNTAS

1. La temperatura y el calor se confunden a menudo, como cuando decimos "hoy hará frío". A modo de ejemplo, distinga estos dos conceptos tan cuidadosamente como pueda.
2. Dé un ejemplo de un proceso en que no se transfiera ningún calor a o desde el sistema pero la temperatura del sistema cambie.
3. ¿Es el equivalente mecánico del calor un concepto físico o simplemente un factor de conversión para convertir energía de unidades de calor a unidades mecánicas y viceversa?
4. ¿Puede considerarse el calor como una forma de energía almacenada (o potencial)? ¿Contradice tal interpretación al concepto de calor como energía en el proceso de transferencia debida a una diferencia de temperatura?
5. ¿Puede añadirse calor a una sustancia sin causar que la temperatura de la sustancia se eleve? De ser así, ¿contradice esto el concepto de calor como energía en el proceso de transferencia debido a una diferencia de temperatura?
6. ¿Por qué debe suministrarse energía calorífica para fundir hielo si, después de todo, la temperatura no cambia?
7. Explique el hecho de que la presencia de un cuerpo grande de agua cercano, como el mar o el océano, tiende a moderar los extremos de temperatura del clima en la tierra adyacente.
8. Cuando se calienta el hielo se funde, formando un líquido, y luego hierve. Sin embargo, cuando se calienta bióxido de carbono sólido se convierte directamente al estado de vapor (decimos que *se sublima*) sin pasar por el estado líquido. ¿Cómo podría producirse bióxido de carbono líquido?
9. En tiempo de hielo se colocan unas ollas con agua caliente y fría. Explique (*a*) si las ollas tienen tapa, el agua fría se congelará primero pero (*b*) si las ollas no tienen tapa, es posible que el agua caliente se congele primero.
10. El aumento de presión siempre favorece la condensación y por lo general favorece la solidificación. Explique estas tendencias del cambio de estado en términos microscópicos.
11. ¿Por qué aumenta con la presión la temperatura de ebullición de un líquido?
12. Un bloque de madera y un bloque de metal están a la misma temperatura. Cuando los bloques se sienten fríos, el metal se siente más frío que la madera; cuando los bloques se sienten calientes, el metal se siente más caliente que la madera. Esplique. ¿A qué temperatura se sentirán los bloques igualmente fríos o calientes?
13. ¿Cómo puede usted usar mejor una cucharilla para enfriar una taza de café? Agitándola, lo cual implica efectuar un trabajo, parecería calentar al café en vez de enfriarlo.
14. ¿Por qué, durante el frío las plantas quedan protegidas bajo una capa de nieve? En las temporadas de heladas, los productores de cítricos en Florida rocían a menudo sus frutos con agua, a sabiendas de que se congelará. ¿Por qué ayuda esto?

**15.** Explique por qué las bajas temperaturas y el fuerte viento causan daños en la piel expuesta a la intemperie.

**16.** Es más probable que un vaso grueso se raje antes que uno delgado cuando se pone agua caliente en él. ¿Por qué?

**17.** Usted introduce su mano en el horno caliente para retirar una cacerola y se quema los dedos con ella. Sin embargo, el aire en el horno está a la misma temperatura que la cacerola y usted no se quema los dedos con él. ¿Por qué no?

**18.** Los obreros de la industria metalúrgica saben que pueden sumergir su mano breves momentos en el metal fundido caliente sin sufrir quemadura. Explique.

**19.** ¿Por qué debe usarse un aislante más grueso en un ático que o buhardilla que en las paredes de una casa?

**20.** ¿Está siempre a 0°C el hielo? ¿Puede estar más frío? ¿Puede estar más caliente? ¿Qué sucede si hay una mezcla de agua y hielo?

**21.** (*a*) ¿Puede calentarse el hielo a una temperatura por encima de los 0°C sin que se funda? Explique. (*b*) ¿Puede enfriarse el agua a una temperatura abajo de 0°C sin que se congele? Explique. (Véase "The Undercooling of Liquids", por David Turnbull, *Scientific American*, enero de 1965, pág. 38).

**22.** Explique por qué los dedos se pegan a una charola metálica de hielos que acaba de sacarse del refrigerador.

**23.** El agua de una marmita hace un ruido burbujeante notable cuando se la calienta hasta la ebullición. Sin embargo, una vez que comienza a hervir, cesa el ruido. ¿Cuál es la explicación? (*Sugerencia*: Piense en el destino de una burbuja de vapor que se eleva desde el fondo de la marmita antes de que el agua se caliente uniformemente.)

**24.** Es difícil "hervir" un huevo en agua en la cima de una montaña muy alta porque el agua hierve allí a una temperatura relativamente baja. ¿Cuál es una manera sencilla y práctica de vencer esta dificultad?

**25.** ¿Se cocerá un huevo (en 3 minutos normalmente) más rápidamente si el agua está hirviendo con fuerza que si está hirviendo despacio a fuego lento?

**26.** El agua es un enfriandor mucho mejor que la mayoría de los líquidos. ¿Por qué? ¿Habría ejemplos en que pudiera preferirse otro líquido?

**27.** Explique por qué cabría esperar que el calor latente de vaporización de una sustancia fuese considerablemente mayor que su calor latente de fusión.

**28.** Explique por qué el calor específico a presión constante es mayor que el calor específico a volumen constante.

**29.** ¿Por qué se desprecia a menudo la diferencia entre $C_p$ y $C_v$ en los sólidos?

**30.** Los gases reales siempre se enfrían al efectuar una expansión libre, mientras que un gas ideal no. Explique.

**31.** Exponga las similitudes y especialmente las diferencias entre calor, trabajo, y energía interna.

**32.** Explique el proceso de congelación del agua desde el punto de vista de la primera ley de la termodinámica. Recuerde que el hielo ocupa un volumen más grande que una masa igual de agua.

**33.** Una botella termo contiene café. El termo es sacudido vigorosamente. Considere al café como el sistema. (*a*) ¿Se eleva su temperatura? (*b*) ¿Se la ha añadido calor? (*c*) ¿Se ha efectuado un trabajo sobre él? (*d*) ¿Ha cambiado su energía interna?

**34.** ¿Se conserva la temperatura de un sistema aislado (que no tiene interacción con el entorno)? Explique.

**35.** ¿Es el calor lo mismo que la energía interna? Si no, dé un ejemplo en el que la energía interna de un sistema cambie sin haber un flujo de calor a través de la frontera del sistema.

**36.** ¿Puede usted decir si la energía interna de un cuerpo fue adquirida por transferencia de calor o por efectos del trabajo?

**37.** Si se dan la presión y el volumen de un sistema, ¿queda siempre determinada la temperatura?

**38.** Teniendo en cuenta que la energía interna de un cuerpo consta de la energía cinética y la energía potencial de sus partículas, ¿cómo distinguiría usted entre la energía interna de un cuerpo y su temperatura?

**39.** Los gases dentro de dos recipientes idénticos están a 1 atm de presión y a la temperatura ambiente. Uno contiene gas helio (monoatómico, masa molar = 4 g/mol) y el otro contiene un número igual de moles de gas argón (monoatómico, masa molar = 40 g/mol). Si 1 J de calor añadido al gas helio aumenta su temperatura en una cantidad determinada, ¿qué cantidad de calor debe añadirse al gas argón para aumentar su temperatura en la misma cantidad?

**40.** Explique cómo podríamos mantener un gas a temperatura constante durante un proceso termodinámico.

**41.** ¿Por qué es más común excitar una radiación a partir de átomos gaseosos por medio del uso de una descarga eléctrica que por medio de métodos térmicos?

**42.** Hemos visto que la "conservación de la energía" es una ley universal de la naturaleza. Al mismo tiempo, los líderes en las nacionaes nos instan a cada uno de nosotros a "conservar la energía" (por ejemplo, conduciendo más despacio). Explique los dos significados bastante diferentes de esa recomendación.

**43.** En un día invernal la temperatura de la superficie interior de una pared es mucho más baja que la temperatura de la habitación y la de la superficie exterior es mucho más alta que la temperatura ambiente exterior. Explique.

**44.** Los mecanismos fisiológicos que mantienen la temperatura interna de una persona actúan dentro de un intervalo limitado de temperatura externa. Explique cómo puede extenderse este intervalo en ambos extremos con el uso de la ropa. (Véase "Heat, Cold, and Clothing", por James B. Kelley, *Scientific American*, febrero de 1956, pág. 109.)

**45.** ¿Qué requisitos, a su juicio, debería llenar un material para uso como utensilio de cocina para una buena conductividad térmica, determinada capacidad calorífica, y coeficiente de dilatación?

**46.** Tanto la conducción del calor como la propagación de las ondas implican la transferencia de energía. ¿Existe alguna diferencia en principio entre estos dos fenómenos?

**47.** ¿Puede transferirse por radiación la energía calorífica a través de la materia? De ser así, dé un ejemplo. Si no es así, explique por qué.

48. ¿Por qué los utensilios de cocina de acero inoxidable suelen tener una capa de cobre o de aluminio en el fondo?
49. Considere que el calor puede ser transferido por convección y radiación, así como por conducción, y explique por qué una botella de termo tiene pared doble, y ésta está al vacío y es plateada.
50. Un lago se congela primero en su superficie. ¿Participa la convección en este fenómeno? ¿Qué sucede con la conducción y la radiación?

## PROBLEMAS

*Sección 25-2 Capacidad calorífica y calor específico*

1. En cierta casa con energía solar, se almacena energía del sol en barriles llenos con agua. En un lapso de cinco días nublados de invierno, se necesitaron 5.22 GJ para mantener el interior de la casa a 22.0°C. Suponiendo que el agua de los barriles estuviera a 50.0°C, ¿qué volumen de agua se necesitó?
2. Los icebergs del norte del Atlántico presentan peligros a la navegación (véase la Fig. 22), provocando que la longitud de las rutas de navegación aumente en casi un 30% durante la estación de icebergs. Entre los intentos para destruirlos se cuentan la utilización de explosivos, el bombardeo, el torpedeo, la desintegración, el uso de arietes, y la pintura con negro de humo. Suponga que se intenta la fusión directa del iceberg colocando fuentes de calor en el hielo. ¿Cuánto calor se requeriría para fundir el 10% de un iceberg de 210,000 toneladas métricas? (Una tonelada métrica = 1000 kg.)

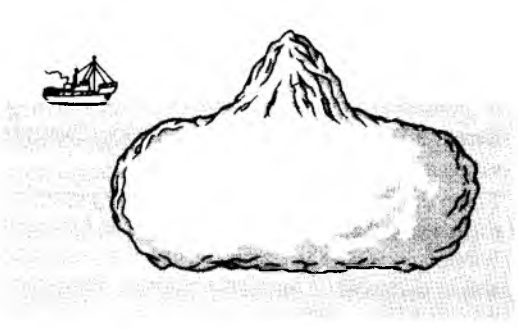


**Figura 22** Problema 2.

3. ¿Cuánta agua permanece sin congelar después de haber extraído 50.4 kJ de calor de 258 g de agua líquida inicialmente a 0°C?
4. Un objeto de 6.50 kg de masa cae desde una altura de 50.0 m y, por medio de una transmisión mecánica, hace girar a una rueda de paletas que agita 520 g de agua. El agua está inicialmente a 15°C. ¿Cuál es la máxima elevación posible de la temperatura?
5. (*a*) Calcule el aumento posible de la temperatura del agua que pasa por las Cataratas del Niágara, de 49.4 m de altura. (*b*) ¿Qué factores tenderían a impedir esta posible elevación?
6. Un pequeño calentador eléctrico por inmersión se utiliza para hervir 136 g de agua para una taza de café instantáneo. El calentador es de 220 watts. Calcule el tiempo necesario para llevar esta agua de 23.5°C al punto de ebullición, despreciando cualquier pérdida de calor.
7. Un tazón de 146 g de cobre contiene 223 g de agua; tanto el tazón como el agua están a 21.0°C. Se deja caer en el agua un cilindro de cobre muy caliente de 314 g. Esto hace que el agua hierva, convirtiéndose 4.70 g en vapor, y la temperatura final de todo el sistema es de 100°C. (*a*) ¿Cuánto calor se transfirió al agua? (*b*) ¿Cuánto al tazón? (*c*) ¿Cuál era la temperatura original del cilindro?
8. Un atleta necesita perder peso y decide hacerlo levantando pesas. (*a*) ¿Cuántas veces debe levantar una pesa de 80.0 kg a una altura de 1.30 m para quemar 1 lb de grasa, suponiendo que se requieren 3500 Cal para hacerlo? (*b*) Si la pesa se levanta una vez cada 4 s, ¿cuánto tiempo le tomará?
9. Calcule la cantidad mínima de calor necesario para fundir completamente 130 g de plata inicialmente a 16.0°C. Suponga que el calor específico no cambia con la temperatura. Véanse las tablas 1 y 2.
10. Un termómetro de 0.055 kg de masa y 46.1 J/K de capacidad calorífica indica 15.0°C. Luego se le sumerge completamente en 0.300 kg de agua y llega a la misma temperatura final del agua. Si el termómetro indica 44.4°C, ¿cuál era la temperatura del agua antes de la inmersión del termómetro, despreciando otras pérdidas de calor?
11. Un jefe de cocina quien, una mañana se encuentra que la estufa no funciona, decide hervir agua para café sacudiéndola en un termo. Suponga que el "chef" usa 560 $cm^3$ de agua de la llave a 59°F, y que el agua cae 35 cm en cada sacudida, ejecutando el "chef" 30 sacudidas por minuto. Despreciando cualquier pérdida de energía. ¿Durante cuánto tiempo estará sacudiendo el frasco antes de que hierva el agua?
12. En un calentador solar de agua, los colectores del tejado, dentro de cuyos tubos circula el agua, captan energía del sol. La radiación solar entra al colector a través de una cubierta transparente y calienta el agua en los tubos; esta agua es bombeada a un tanque de depósito. Suponiendo que la eficiencia de todo el sistema sea de 20% (es decir, se pierde el 80% de la energía solar incidente en el sistema), ¿qué área del colector es necesaria para sacar agua de un tanque de 200 L y elevar su temperatura de 20 a 40°C

en 1.0 h? La intensidad de la luz solar incidente es de 700 W/m².

**13.** Una marmita eléctrica de aluminio tiene una masa de 0.560 kg y contiene un elemento calefactor de 2.40 kW. Se llena con 0.640 l de agua a 12.0°C. ¿Cuánto tiempo se necesitará (*a*) para que comience la ebullición y (*b*) para que la marmita se quede seca? (Suponga que la temperatura de la marmita no sobrepasa los 100°C en ningún momento.)

**14** Para medir el calor específico de un líquido se emplea un *calorímetro de flujo.* Se añade calor en una cantidad conocida a una corriente del líquido que pasa por el calorímetro con un volumen conocido. Entonces, una medición de la diferencia de temperatura resultante entre los puntos de entrada y salida de la corriente de líquido nos permite calcular el calor específico del líquido. Un líquido de 0.85 g/cm³ de densidad fluye a través de un calorímetro a razón de 8.2 cm³/s. Se añade calor por medio de un calentador eléctrico en espiral de 250 W, y se establece una diferencia de temperatura de 15 C° en condiciones de estado estacionario entre los puntos de entrada y salida del flujo. Halle el calor específico del líquido.

**15.** El agua estancada a cielo abierto a 32°C se evapora a causa del escape de algunas de las moléculas de su superficie. El calor de vaporización es aproximadamente igual a $\epsilon n$, en donde $\epsilon$ es la energía media de las moléculas que escapan y $n$ es el número de moléculas por kilogramo. (*a*) Halle $\epsilon$. (*b*) ¿Cuál es la razón entre $\epsilon$ y la energía cinética promedio de las moléculas de $H_2O$, suponiendo que la energía cinética se relaciona con la temperatura de la misma manera que lo hace en los gases?

**16.** ¿Qué masa de vapor a 100°C debe mezclarse con 150 g de hielo a 0°C, en un recipiente térmicamente aislado, para producir agua líquida a 50°C?

**17.** Una persona prepara una cantidad de té helado mezclando 520 g del té caliente (esencialmente agua) con una masa igual de hielo a 0°C. ¿Cuáles son la temperatura final y la masa de hielo restante si el té caliente está inicialmente a una temperatura de (*a*) 90.0°C y (*b*) 70.0°C?

**18.** (*a*) Dos cubos de hielo de 50 g cada uno se dejan caer en 200 g de agua en un vaso. Si el agua estaba inicialmente a una temperatura de 25°C, y el hielo venía directamente de un congelador a −15°C, ¿cuál es la temperatura final de la bebida? (*b*) Si sólo se hubiera usado un cubo de hielo en (*a*), ¿cuál sería la temperatura final de la bebida? Desprecie la capacidad calorífica del vaso.

**19.** Un anillo de cobre de 21.6 g tiene un diámetro de 2.54000 cm a la temperatura de 0°C. Una esfera de aluminio tiene un diámetro de 2.54533 cm a la temperatura de 100°C. La esfera se sitúa sobre el anillo (Fig. 23), y se deja que ambos lleguen al equilibrio térmico, sin que se disipe calor alguno al entorno. La esfera pasa justamente a través del anillo a la temperatura de equilibrio. Halle la masa de la esfera.

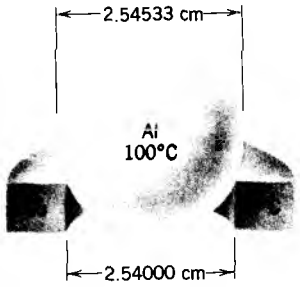



**Figura 23** Problema 19.

### *Sección 25-3 Capacidades caloríficas de los sólidos*

**20.** Cierta sustancia tiene una masa molar de 51.4 g/mol. Cuando se añaden 320 J de calor a una muestra de 37.1 g de este material, su temperatura se eleva de 26.1 a 42.0°C. (*a*) Halle el calor específico de la sustancia. (*b*) ¿Cuántos moles de la sustancia están presentes? (*c*) Calcule la capacidad calorífica molar de la sustancia.

**21.** Cerca del cero absoluto la capacidad calorífica molar del aluminio varía con la temperatura absoluta $T$ y está dada por $C = (3.16 \times 10^{-5})T^3$, en J/mol · K. Cuánto calor se necesita para elevar la temperatura de 1.2 g de aluminio de 6.6 a 15 K?

**22.** Se encuentra que la capacidad calorífica molar de la plata, medida a la presión atmosférica, varía con la temperatura entre 50 y 100 K según la ecuación empírica

$$C = 0.318T - 0.00109T^2 - 0.628,$$

donde $C$ está en J/mol · K y $T$ está en K. Calcule la cantidad de calor necesario para elevar 316 g de plata desde de 50.0 a 90.0 K. La masa molar de plata es 107.87 g/mol.

**23.** Partiendo de la figura 3, calcule la cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de 0.45 mol de carbono de 200 a 500 K. (*Sugerencia*: Aproxime la curva real en esta región con un segmento de línea recta.)

### *Sección 25-4 Capacidades caloríficas de un gas ideal*

**24.** La masa de un átomo de helio es de $6.66 \times 10^{-27}$ kg. Calcule el calor específico a volumen constante del gas helio (en J/kg · K) a partir de la capacidad calorífica molar a volumen constante.

**25.** En un experimento, se calientan 1.35 mol de oxígeno ($O_2$) a presión constante comenzando en 11.0°C. ¿Cuánto calor debe añadirse al gas para duplicar su volumen?

**26.** Se calientan doce gramos de nitrógeno ($N_2$) en un tanque de acero de 25.0 a 125°C. (*c*) ¿Cuántos moles de nitrógeno están presentes? (*b*) ¿Cuánto calor se transfiere al nitrógeno?

**27.** Una muestra de 4.34 mol de un gas diatómico ideal experimenta un aumento de temperatura de 62.4 K bajo condiciones de presión constante. (*a*) ¿Cuánto calor se añadió al gas? (*b*) ¿En cuánto aumentó la energía interna del gas? Véase la ecuación 36 del capítulo 23. (*c*) ¿En cuanto aumentó la energía cinética interna de traslación del gas?

**28.** Un recipiente contiene una mezcla de tres gases no reactivos: $n_1$ moles del primer gas con calor específico molar a volumen constante $C_1$, y así sucesivamente. Halle el calor específico molar a volumen constante de la mezcla,

en términos de los calores específicos molares y de las cantidades de los tres gases por separado.

**29.** La masa atómica molar del yodo es de 127 g. Una onda estacionaria en un tubo lleno de yodo gaseoso a 400 K tiene nodos separados por una distancia de 6.77 cm cuando la frecuencia es de 1000 Hz. Determine mediante estos datos si el yodo gaseoso es un gas monoatómico o diatómico.

**30.** Una sala de volumen $V$ está llena con un gas ideal diatómico (aire) a temperatura $T_1$ y presión $p_0$. El aire se calienta a una temperatura más alta $T_2$, permaneciendo la presión constante en $p_0$, ya que las paredes de la sala no son herméticas. Demuestre que el contenido de energía interna del aire que permanece en la sala es el mismo a $T_1$ y $T_2$ y que la energía suministrada por el horno para calentar el aire se ha ido toda para calentar el aire *exterior* a la sala. Si no añadimos energía al aire, ¿por qué preocuparse por encender el horno? (Desprecie la energía del horno empleada para elevar la temperatura de las paredes, y considere únicamente la energía empleada para elevar la temperatura del aire.)

### *Sección 25-6 Aplicaciones de la primera ley*

**31.** Una muestra de $n$ moles de un gas ideal experimenta una expansión isotérmica. Halle el flujo de calor hacia el gas en términos de los volúmenes inicial y final y de la temperatura.

**32.** Un gas encerrado en una cámara pasa por el ciclo mostrado en la figura 24. Determine el calor neto añadido al gas durante el proceso $CA$ si $Q_{AB} = 20$ J, $Q_{BC} = 0$, y $W_{BCA} = -15$ J.

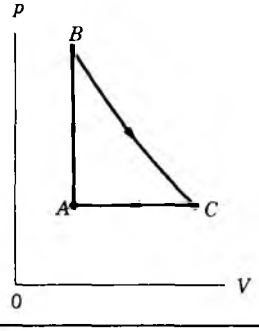



**Figura 24** Problema 32.

**33.** Considere que se efectúa un trabajo de 214 J sobre un sistema y que se extraen 293 J de calor del sistema. En el sentido de la primera ley de la termodinámica, ¿cuáles son los valores (incluyendo los signos algebraicos) de (*a*) $W$, (*b*) $Q$, y (*c*) $\Delta E_{int}$?

**34.** La figura 25*a* muestra un cilindro que contiene gas, el cual está confinado por medio de un émbolo móvil. El cilindro está sumergido en una mezcla de hielo y agua. El émbolo se empuja *rápidamente* hacia abajo de la posición 1 a la posición 2. El émbolo se mantiene en la posición 2 hasta que el gas está de nuevo a 0°C y luego se le eleva *lentamente* de regreso a la posición 1. La figura 25*b* es un diagrama $pV$ del proceso. Si durante el ciclo se funden 122 g de hielo, ¿cuánto trabajo se efectuó *sobre* el gas?

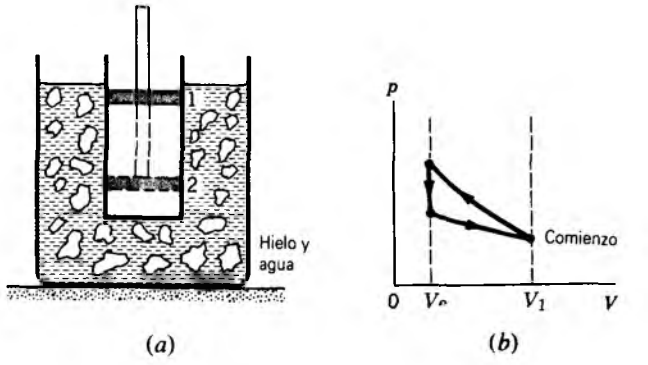



**Figura 25** Problema 34.

**35.** (*a*) Un gas ideal monoatómico inicialmente a 19.0°C es comprimido súbitamente a un décimo de su volumen original. ¿Cuál es su temperatura después de la compresión? (*b*) Haga el mismo cálculo para un gas diatómico.

**36.** Una cantidad de gas ideal ocupa un volumen inicial $V_0$ a una presión $p_0$ y una temperatura $T_0$. Se dilata hasta el volumen $V_1$ (*a*) a presión constante, (*b*) a temperatura constante, (*c*) adiabáticamente. Grafique cada caso en un diagrama $pV$. ¿En qué caso es $Q$ máximo? ¿Mínimo? ¿En qué caso es $W$ máximo? ¿Mínimo? ¿En qué caso es $\Delta E_{int}$ máximo? ¿Mínimo?

**37.** Una cantidad de gas monoatómico ideal consta de $n$ moles inicialmente a la temperatura $T_1$. La presión y el volumen se duplican luego lentamente de manera que se traza una línea recta en un diagrama $pV$. En términos de $n$, $R$, y $T_1$, halle (*a*) $W$, (*b*) $\Delta E_{int}$, y (*c*) $Q$. (*d*) Si fuésemos a definir un calor específico equivalente para este proceso, ¿cuál sería su valor?

**38.** En la figura 11, suponga los siguiente valores: $p_i = 2.20 \times 10^5$ Pa, $V_i = 0.0120$ m$^3$, $p_f = 1.60 \times 10^5$ Pa, $V_f = 0.0270$ m$^3$. Halle el valor de $Q$, $W$, y $Q + W$ para cada una de las tres trayectorias mostradas. (*Sugerencia*: Halle $p$, $V$, $T$ en los puntos $A$, $B$, $C$. Suponga un gas monoatómico ideal.)

**39.** Cuando un sistema se lleva del estado $i$ al estado $f$ a lo largo de la trayectoria *iaf* en la figura 26, se encuentra que $Q = 50$ J y $W = -20$ J. A lo largo de la trayectoria *ibf*, $Q = 36$ J. (*a*) ¿Qué valor tiene $W$ a lo largo de la trayectoria *ibf*? (*b*) Si $W = +13$ J para la trayectoria curva de regreso *fi*, ¿qué valor tiene $Q$ en esta trayectoria? (*c*) Considere que $E_{int,i} = 10$ J. ¿Cuánto vale $E_{int,f}$? (*d*) Si $E_{int,b} = 22$ J, halle $Q$ para el proceso *ib* y para el proceso *bf*.

**40.** Un gas dentro de una cámara experimenta los procesos mostrados en el diagrama $pV$ de la figura 27. Calcule el calor neto añadido al sistema durante un ciclo completo.

**41.** Sea 20.9 J el calor añadido a determinado gas ideal. Como resultado, su volumen cambia de 63.0 a 113 cm$^3$ mientras que la presión permanece constante a 1.00 atm. (*a*) ¿En cuánto cambió la energía interna del gas? (*b*) Si la cantidad

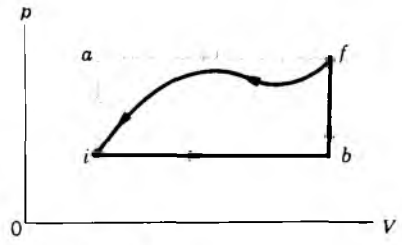



**Figura 26** Problema 39.

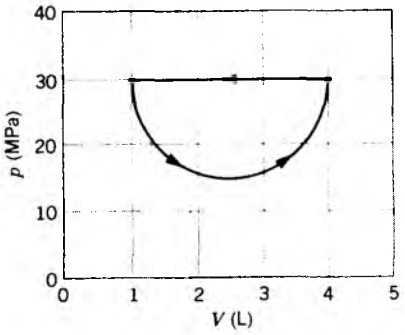



**Figura 27** Problema 40.

de gas presente es de $2.00 \times 10^{-3}$ mol, halle la capacidad calorífica molar a presión constante. (*c*) Halle la capacidad calorífica molar a volumen constante.

**42.** La temperatura de 3.15 mol de un gas poliatómico ideal se eleva 52.0 K mediante cada uno de los tres procesos dinámicos diferentes: a volumen constante, a presión constante, y según una compresión adiabática. Complete una tabla que muestre, para cada procedimiento, el calor añadido, el trabajo efectuado sobre el gas, el cambio de energía interna del gas, y el cambio de la energía cinética total de traslación de las moléculas del gas.

**43.** Una máquina lleva 1.00 mol de un gas monoatómico ideal alrededor del ciclo mostrado en la figura 28. El proceso *AB* tiene lugar a volumen constante, el proceso *BC* es adiabático, y el proceso *CA* tiene lugar a presión constante. (*a*) Calcule el calor *Q*, el cambio en la energía interna $\Delta E_{int}$, y el trabajo *W* para cada uno de los tres procesos y para el ciclo en total. (*b*) Si la presión inicial en el punto *A* es de 1.00 atm, halle la presión y el volumen en los puntos *B* y *C*. Use 1 atm = $1.013 \times 10^5$ Pa y $R = 8.314$ J/mol · K.

**44.** Un cilindro tiene un émbolo de metal de 2.0 kg bien ajustado con área en su sección transversal de 2.0 $cm^2$ (figura 29). El cilindro contiene agua y vapor a temperatura constante. Se observa que el émbolo desciende lentamente a razón de 0.30 cm/s ya que fluye calor hacia afuera del cilindro a través de sus paredes. Cuando esto sucede, parte del vapor se condensa en la cámara. La densidad del vapor dentro de la cámara es de $6.0 \times 10^{-4}$ $g/cm^3$ y la presión atmosférica es de 1.0 atm. (*a*) Calcule la cantidad de condensación del vapor. (*b*) ¿A qué cantidad está saliendo el calor de la cámara? (*c*) ¿Cuál es la cantidad de cambio de la energía interna del vapor y del agua dentro de la cámara?

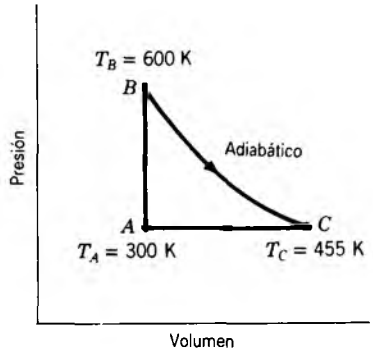



**Figura 28** Problema 43.

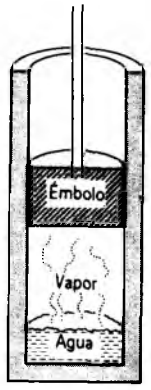



**Figura 29** Problema 44.

**45.** En el motor de una motocicleta, después de que ocurre la combustión en la parte superior del cilindro, el émbolo es forzado hacia abajo mientras la mezcla de los productos gaseosos experimenta una expansión adiabática. Halle la potencia promedio implicada en esta expansión cuando el motor está girando a 4000 rpm, suponiendo que la presión indicada inmediatamente después de la combustión es de 15.0 atm, el volumen inicial es de 50.0 $cm^3$, y el volumen de la mezcla al final de la carrera, de 250 $cm^3$. Supoga que los gases son diatómicos y que el tiempo implicado en la expansión es la mitad del tiempo total del ciclo.

### *Sección 25-7 La transferencia de calor*

**46.** Calcule la cantidad de calor que se perderia en un día de invierno muy frío a través de una pared de ladrillos de 6.2 m × 3.8 m y 32 cm de espesor. La temperatura del interior es de 26°C y la temperatura del exterior es de -18° C; suponga que la conductividad térmica del ladrillo es de 0.74 W/m · K.

**47.** La cantidad promedio a que fluye el calor a través de la superficie de la Tierra en América del Norte es de 54 $mW/m^2$, y la conductividad térmica promedio de las rocas cercanas a la superficie es de 2.5 W/m · K. Suponiendo una temperatura en la superficie de 10°C, ¿cuál sería la temperatura a una profundidad de 33 km (cerca de la base de la corteza)? Desprecie el calor generado por los elementos radiactivos; puede ignorarse también la curvatura de la Tierra.

**48.** (*a*) Calcule la cantidad a la cual fluye el calor del cuerpo a través de la ropa de un esquiador, dados los datos siguientes: el área de la superficie del cuerpo es de 1.8 $m^2$ y la ropa tiene un espesor de 1.2 cm; la temperatura de la piel es de 33°C, mientras que la superficie exterior de la ropa está a 1.0°C; la conductividad térmica de la ropa es de 0.040 W/m · K. (*b*) ¿Cuál sería el cambio en la respuesta si, después de una caída, las ropas del esquiador quedasen empapadas de agua? Suponga que la conductividad térmica del agua es de 0.60 W/m · K.

**49.** Considere la placa mostrada en la figura 16. Suponga que $\Delta x$ = 24.9 cm, $A$ = 1.80 $m^2$, y que el material es cobre. Si $T$ = -12.0°C, $\Delta T$ = 136°C, y que se alcanza el estado permanente, halle (*a*) el gradiente de temperatura, (*b*) la cantidad del calor transferido, y (*c*) la temperatura en un punto de la placa a 11.0 cm del extremo de mayor temperatura.

**50.** Una barra cilíndrica de plata de 1.17 m de longitud y 4.76 $cm^2$ de área en su sección transversal se aísla para impedir la pérdida de calor a través de su superficie. Los extremos se mantienen a una diferencia de temperatura de 100 C° colocando un extremo en una mezcla de agua y hielo y el otro en agua hirviendo y vapor. (*a*) Halle la cantidad a la que se transfiere el calor a lo largo de la barra. (*b*) Calcule la cantidad a la que se funde el hielo en el extremo frío.

**51.** Para cubrir una abertura de área 2$A$ se dispone de cuatro piezas cuadradas de dos materiales aislantes diferentes, todas con el mismo espesor y área $A$. Esto puede hacerse en cualquiera de las dos maneras mostradas en la figura 30. ¿Cuál de los arreglos, (*a*) o (*b*), daría el menor flujo de calor, siendo $k_2 \neq k_1$?

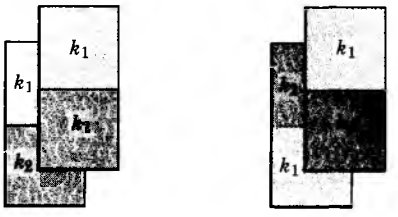



**Figura 30** Problema 51.

**52.** Demuestre que la temperatura $T_x$ en la superficie de contacto de una placa compuesta (véase el problema muestra 6) está dada por

$$T_x = \frac{R_1 T_1 + R_2 T_2}{R_1 + R_2}.$$

**53.** Un alambre largo de tungsteno de un calefactor está tiene una especificación de 3.08 kW/m y un diámetro de 0.520 mm. Está empotrado a lo largo del eje de un cilindro de cerámica de 12.4 cm de diámetro. Cuando se opera a la potencia especificada, el alambre está a 1480°C y el exterior del cilindro está a 22.0°C. Calcule la conductividad térmica de la cerámica.

**54.** Dos barras rectangulares de metal idénticas están soldadas a tope como se muestra en la figura 31*a*, y a través de las barras fluyen 10 J de calor en 2.0 min. ¿Cuánto tiempo transcurriría para que fluyesen 30 J a través de las barras si están soldadas como se muestra en la figura 31*b*?

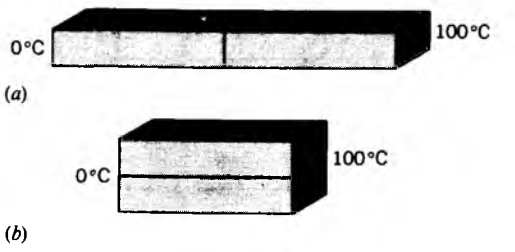



**Figura 31** Problema 54.

**55.** Calcule la cantidad de pérdida de calor a través del vidrio de una ventana de 1.4 $m^2$ de área y 3.0 mm de espesor si la temperatura del exterior es de -20°F y la temperatura del interior es de +72°F. (*b*) Se instala una ventana contra tormentas que tiene el mismo espesor de vidrio pero con un claro de aire de 7.5 cm entre las dos ventanas. ¿Cuál será la cantidad de pérdida de calor correspondiente suponiendo que la conducción sea el único mecanismo importante de pérdida de calor?

**56.** Calcule la cantidad de flujo de calor a través de dos puertas contra tormentas de 1.96 m de altura y 0.770 m de ancho. (*a*) Una puerta está hecha de láminas de aluminio de 1.50 mm de espesor y una hoja de vidrio de 3.10 mm que cubre el 75.0% de su superficie (se considera que el marco estructural tiene un área despreciable). (*b*) La segunda puerta está hecha enteramente de abeto con 2.55 cm de espesor. Considere que la caída de temperatura a través de las puertas es de 33.0 C° (= 59.4 F°). Véase la tabla 5.

**57.** En la figura 32 se muestra una representación idealizada de la temperatura del aire en función de la distancia desde una ventana de un solo vidrio en un día de invierno en calma. Las dimensiones de la ventana son 60 cm × 60 cm × 0.50 cm. (*a*) ¿En qué cantidad fluye el calor hacia fuera de la ventana? (*Sugerencia*: La caída de temperatura a través del vidrio es muy pequeña.) (*b*) Calcule la diferencia de temperatura entre las superficies interior y exterior del vidrio.

**58.** Un tanque de agua ha estado a la intemperie en un clima frío hasta que se formó en su superficie una capa de hielo de 5.0 cm de espesor (Fig. 33). El aire sobre el hielo está a -10°C. Calcule la razón de formación de hielo (en cm por hora) en el fondo de la capa de hielo. Considere que la conductividad térmica y la densidad del hielo son 1.7 W/m · K y 0.92 $g/cm^3$. Suponga que no fluye calor a través de las paredes del tanque.

**59.** Se ha formado hielo en un estanque poco profundo y se ha alcanzado un estado estacionario estando el aire de encima del hielo a -5.20°C y el fondo del estanque a 3.98°C. Si la profundidad total del hielo + agua es de 1.42 m, ¿qué espesor tiene el hielo? (Suponga que las conductividades térmicas del hielo y el agua son de 1.67 y 0.502 W/m · K, respectivamente.)

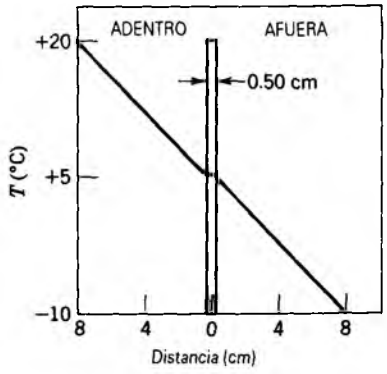



**Figura 32** Problema 57.

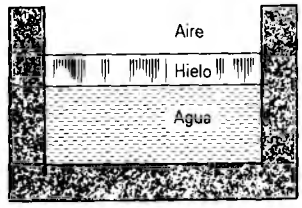



**Figura 33** Problema 58.

**60.** La estructura de una pared consta de un marco de 20 ft × 12 ft hecho de 16 puntales verticales de 2 × 4, cada uno de 12 ft de altura y colocados a 16 in centro a centro. El exterior de la pared está recubierto con hojas de madera chapeada de $\frac{1}{4}$ in de espesor ($R$ = 0.30) y hojas de abeto de $\frac{3}{4}$ in ($R$ = 0.98). El interior está recubierto de yeso de $\frac{1}{4}$ in ($R$ = 0.47), y el espacio entre los puntales está lleno de espuma de poliuretano ($R$ = 5.9 para una capa de 1 in.) Un puntal de "dos por cuatro" tiene realmente un tamaño de 1.75 in × 3.75 in. Suponga que están hechos de madera para la cual $R$ = 1.3 para un tablero de 1 in. (*a*) ¿A qué razón fluye el calor a través de esta pared para un diferencia de temperatura de 30 F°? (*b*) ¿Cuál es el valor de $R$ para la pared así estructurada? (*c*) ¿Qué fracción del área de la pared contiene puntales, en comparación con el área de espuma? (*d*) ¿Qué fracción del flujo de calor pasa a través de los puntales, en comparación con el que pasa por la espuma?

**61.** Suponiendo que $k$ sea constante, demuestre que la cantidad radial de flujo de calor en una sustancia entre dos esferas concéntricas está dada por

$$H = \frac{(T_1 - T_2)4\pi k r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

en donde la esfera interior tiene un radio $r_1$ y una temperatura $T_1$, y la esfera exterior tiene un radio $r_2$ y una temperatura $T_2$.

**62.** (*a*) Utilice los datos del problema 47 para calcular la cantidad a la que fluye el calor hacia afuera a través de la superficie de la Tierra. (*a*) Suponga que este flujo de calor se debe a la presencia de un núcleo caliente en la Tierra y que este núcleo tenga un radio de 3470 km. Suponga también que el materiar que está entre el núcleo y la superficie de la Tierra no contiene fuentes de calor y tiene una conductividad térmica promedio de 4.2 W/m · K. Use el resultado del problema 61 para calcular la temperatura del núcleo. (Suponga que la superficie de la Tierra está a 0°C.) La respuesta que se obtiene es demasiado grande por un factor de aproximadamente 10. ¿Por qué?

**63.** A bajas temperaturas (por debajo de unos 50 K), la conductividad térmica de un metal es proporcional a la temperatura absoluta: es decir, $k = aT$, donde $a$ es una constante con un valor numérico que depende del metal en particular. Demuestre que la razón de flujo de calor a través de una barra de longitud $L$ y área $A$ en su sección transversal y cuyos extremos están a las temperaturas $T_1$ y $T_2$ está dada por

$$H = \frac{aA}{2L}(T_1^2 - T_2^2).$$

(Desprecie la pérdida de calor de la superficie.)

# CAPÍTULO 26

# ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

*Podemos imaginar muchos procesos que conservan la energía (y por lo tanto satisfacen la primera ley), pero que no llegan a suceder jamás. Por ejemplo, que una taza de café caliente ceda algo de energía interna a energía rotatoria y espontáneamente comience a girar; que un bloque y la superficie de una mesa conviertan parte de su energía interna para hacer que el bloque se mueva; que un vaso de agua fría se transforme en un cubo de hielo en un vaso de agua más caliente. Sin embargo, en cada uno de estos casos suele observarse, por lo general, el proceso inverso. Como estudiaremos en este capítulo, la* segunda ley de la termodinámica *trata de si ocurren o no tales procesos en la naturaleza. A menudo se dice que la segunda ley sigue la dirección de la "flecha del tiempo", significando con esto que los sistemas evolucionan naturalmente con el tiempo en una dirección pero no en la otra.*

*En este capítulo empleamos la segunda ley para analizar las máquinas que convierten el calor en trabajo útil, y demostramos que existe un límite superior para la eficiencia a la que puede funcionar una máquina. La segunda ley conduce a un nuevo concepto, la* entropía, *al igual que la ley cero conducía a la temperatura y la primera ley a la energía interna. Concluimos nuestro estudio de la termodinámica demostrando cómo la relación entre la entropía (una cantidad macroscópica) y su cantidad microscópica correspondiente (la probabilidad estadística de diferentes arreglos de un sistema) refuerzan la conexión entre la termodinámica y la mecánica estadística, el objetivo que nos propusimos en la sección 22-1.*

## 26-1 PROCESOS REVERSIBLES Y PROCESOS IRREVERSIBLES

Consideremos un sistema típico en equilibrio termodinámico, digamos $n$ moles de un gas (real), confinados en un arreglo cilindro-émbolo de volumen $V$, teniendo el gas una presión $p$ y una temperatura $T$. En un estado de equilibrio, estas variables termodinámicas permanecen constantes con el tiempo. Supongamos que el cilindro, cuyas paredes son aislantes pero cuya base conduce calor, se coloca en un depósito grande a la misma temperatura $T$, como vemos en la figura 1. Llevemos ahora al sistema a otro estado de equilibrio en el que la temperatura $T$ sea la misma pero el volumen $V$ se reduzca a la mitad. De entre las muchas maneras en que esto se puede hacer, estudiaremos dos casos extremos.

**1.** Presionamos el émbolo muy rápidamente; entonces esperamos que se restablezca el equilibrio con el depósito. Durante este proceso el gas es turbulento, y su presión y temperatura no están bien definidos. No podemos trazar el proceso como una línea continua en un diagrama $pV$ porque no sabríamos qué valor de la presión (o de la temperatura) asociaríamos con un volumen dado. El sistema pasa de un estado de equilibrio $i$ a otro $f$ a través de una serie de estados de no equilibrio (Fig. 1*a*).

**2.** Presionamos el émbolo (suponiendo que no existe fricción) muy lentamente, quizá añadiendo en forma gradual arena a la parte superior del émbolo, de modo que la presión, el volumen, y la temperatura del gas sean, en todo momento, cantidades bien definidas. Primero, dejamos caer unos cuantos granos de arena sobre el émbolo. Esto reducirá el volumen del sistema un poco y la temperatura tenderá a elevarse; el sistema se saldrá del equilibrio, pero sólo ligeramente. Se transferirá al depósito una pequeña cantidad de calor, y en un tiempo corto el sistema alcanzará un nuevo estado de equilibrio, siendo su temperatura de nuevo la del depósito. Luego dejamos caer unos cuantos granos más de arena sobre el émbolo, reduciendo el volumen aún más. De nuevo, esperamos que se establezca

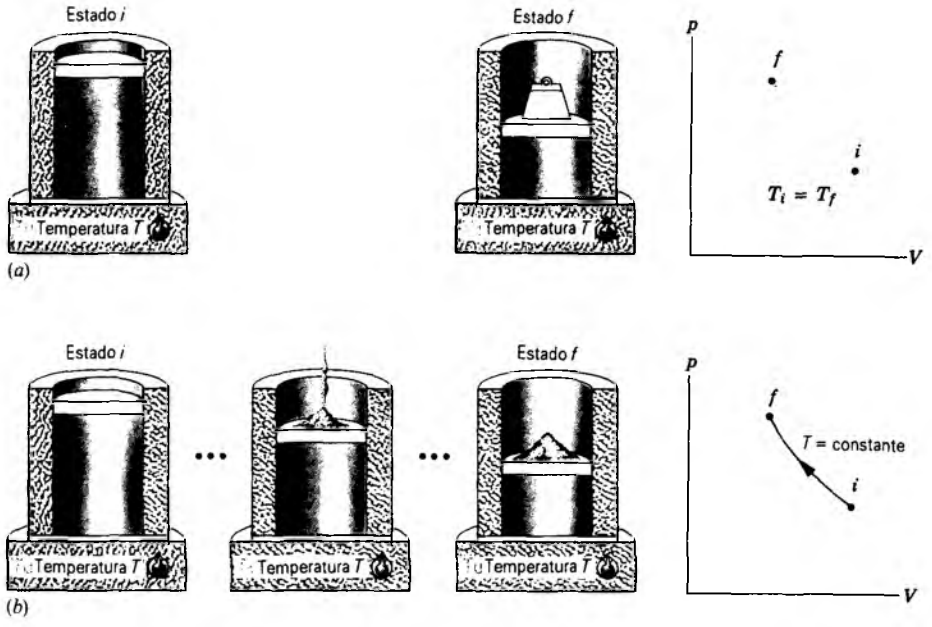



**Figura 1** Se hace que un gas real pase de un estado inicial *i* (caracterizado por la presión $p_i$, el volumen $V_i$, y la temperatura $T_i$) a un estado final *f* (caracterizado por $p_f$, $V_f$, y $T_f$). El proceso puede llevarse a cabo (*a*) irreversiblemente, dejando caer de forma súbita un peso sobre el émbolo, o (*b*) reversiblemente, añadiendo arena al émbolo, unos cuantos granos a la vez.

un nuevo estado de equilibrio, y así sucesivamente. Después de muchas repeticiones de este procedimiento reducimos, finalmente el volumen a la mitad. Durante todo este proceso el sistema está siempre en un estado que difiere sólo ligeramente de un estado de equilibrio. Si imaginamos llevar a cabo este procedimiento con aumentos sucesivos de presión aún más pequeños, los estados intermedios se saldrán del equilibrio todavía menos que antes. Aumentando indefinidamente el número de cambios y disminuyendo en consecuencia el tamaño de cada cambio, llegamos a un proceso ideal en el que el sistema pasa a través de una sucesión continua de estados de equilibrio, los cuales podemos trazar como una línea continua en un diagrama $pV$ (Fig. 1*b*). Durante este proceso se transfiere cierta cantidad de calor $Q$ del sistema al depósito.

Los procesos del tipo 1 se llaman *irreversibles*, y los del tipo 2 se llaman *reversibles. Un proceso reversible es aquel en que, por medio de un cambio diferencial en el entorno, puede hacerse que regrese sobre su trayectoria.* Es decir, si añadimos unos cuantos granos de arena al émbolo cuando el sistema está en un estado particular $A$, el volumen disminuye en $dV$ y una pequeña cantidad de calor es transferida *al* depósito. Si seguidamente *quitamos* aquellos pocos granos de arena (un cambio diferencial en el entorno), el volumen *aumenta* en $dV$ y una cantidad igual de calor se transfiere *del* depósito, regresando por ello tanto el sistema como el entorno al estado original $A$.

En la práctica, todos los procesos son irreversibles, pero podemos aproximarnos arbitrariamente a la reversibilidad por medio de refinamientos experimentales apropiados. El proceso estrictamente reversible es una abstracción sencilla y útil que guarda una relación similar con los procesos reales como la abstracción del gas ideal lo hace con los gases reales.

No todos los procesos llevados a cabo lentamente son reversibles. Por ejemplo, si el émbolo de nuestro ejemplo ejerciera una fuerza de fricción sobre las paredes del cilindro, no regresaría a su estado previo por el hecho de quitar unos cuantos granos de arena. Si añadimos arena al émbolo lentamente, el sistema seguiría evolucionando a través de una serie de estados de equilibrio, pero no lo haría en forma reversible. Se usa la palabra *casi-estático* para describir procesos que se llevan a cabo con la lentitud suficiente como para que el sistema pase a través de una secuencia continua de estados de equilibrio; un proceso casi-estático puede ser o puede no ser reversible.

El proceso descrito en 2 es no sólo reversible sino también *isotérmico*, porque hemos supuesto que la temperatura del gas difiere en todo momento en sólo una cantidad diferencial $dT$ de la temperatura (constante) del depósito en que descansa el cilindro.

Podríamos también reducir el volumen *adiabáticamente* sacando al cilindro del depósito térmico y poniéndolo sobre una plataforma no conductora. En un proceso adiabático no se permite que el calor entre o salga del sistema.

Un proceso adiabático puede ser reversible o irreversible; la definición no excluye a ninguna de las dos posibilidades. En un proceso adiabático reversible movemos al émbolo con lentitud extrema, quizás usando la técnica de la carga con arena; en un proceso adiabático irreversible empujamos al émbolo hacia abajo rápidamente.

La temperatura del gas se elevará durante una compresión adiabática porque, según la primera ley con $Q = 0$, el trabajo $W$ efectuado sobre el sistema por el entorno al empujar hacia abajo al émbolo debe aparecer como un aumento $\Delta E_{int}$ en la energía interna del sistema. El trabajo $W$ tiene valores diferentes para cantidades diferentes del descenso del émbolo, siendo $-\int p\,dV$ (es decir, el área bajo una curva de un diagrama $pV$) únicamente para procesos reversibles, para los cuales $p$ tiene un valor bien definido. Entonces, $\Delta E_{int}$ y el cambio de temperatura correspondiente $\Delta T$ no son los mismos para procesos adiabáticos reversibles e irreversibles.

Por otra parte, para una transformación de un punto inicial dado $i$ a un punto final dado $f$, el cambio en la energía interna depende únicamente de las coordenadas termodinámicas ($p$, $V$, y $T$, quizá) de $i$ y $f$. *Si bien $W$ y $Q$ dependen de la trayectoria, $\Delta E_{int}$ no depende de ella. En particular, si nos es posible calcular $\Delta E_{int}$ para una trayectoria reversible determinada, tiene el mismo valor para las demás trayectorias, incluyendo las irreversibles.* La entropía, como veremos, es también una variable de estado como $E_{int}$ cuyo cambio en cualquier proceso irreversible puede hallarse a partir de un proceso reversible escogido apropiadamente que conecte a los mismos estados inicial y final.

## 26-2 MÁQUINAS TÉRMICAS Y LA SEGUNDA LEY

Una *máquina térmica* es un dispositivo para convertir calor en trabajo útil. Esto es, la energía fluye hacia un sistema en forma de calor, y parte de esta energía sale del sistema en forma de trabajo efectuado sobre el entorno. El proceso inverso, que convierte trabajo en calor, ocurre también: las fuerzas de fricción pueden convertir el trabajo en energía interna, como en el calentamiento de dos superficies que se frotan entre sí, y esta energía puede ser entonces transferida a otros objetos del entorno en forma de calor. En otro ejemplo, el trabajo mecánico efectuado por un generador eléctrico conduce corriente a los hogares, donde un calefactor eléctrico convierte el trabajo en energía interna, la cual fluye entonces en forma de calor.

El cilindro de gas ideal colocado sobre el depósito térmico a una temperatura $T$ puede servir como un ejemplo representativo de una máquina térmica. Si quitamos una pequeña cantidad de peso del émbolo, el gas se dilata (isotérmicamente). Entra calor al gas a partir del depósito,

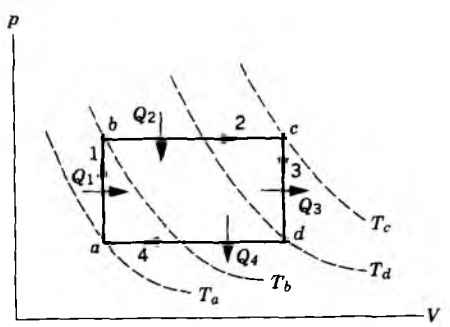



**Figura 2** Un proceso cíclico, que consta de cuatro etapas, dos (*ab* y *cd*) a volumen constante y dos (*bc* y *da*) a presión constante. Las líneas de puntos muestran las isotermas correspondientes a las temperatura $T_a$, $T_b$, $T_c$, y $T_d$.

y se efectúa trabajo por el gas. Puesto que la temperatura es constante, la energía interna es constante también, y entonces tenemos un aparato para convertir calor en trabajo.

Esta máquina térmica no sería muy útil a la larga, porque no podría operar indefinidamente: nos quedaríamos sin peso que quitar del émbolo o bien el émbolo llegaría hasta arriba del cilindro. Una máquina más útil sería la que operase en un ciclo, regresando a su punto inicial después de haber efectuado cada trabajo unitario $W$, y repitiendo sus etapas continuamente. La figura 2 muestra un ejemplo de un proceso cíclico que podría constituir la base para una máquina térmica. El ciclo consta de varias etapas, pudiendo todas ellas efectuarse en pequeños incrementos y por lo tanto reversiblemente. Suponemos que el cilindro de gas está situado sobre un depósito térmico, cuya temperatura puede ajustarse fácilmente.

Al analizar las etapas del ciclo, es conveniente tener en cuenta las convenciones de signo que hemos estado usando para el calor y el trabajo:

*Se considera que el calor que entra al sistema es positivo, y que el calor que sale del sistema es negativo.*

*El trabajo efectuado sobre un sistema, correspondiente a una disminución de volumen se considera positivo; el trabajo efectuado por un sistema es el negativo del trabajo efectuado sobre un sistema.*

*El trabajo efectuado en un proceso cíclico es negativo si el ciclo se efectúa en sentido horario en un diagrama pV, y positivo si el ciclo se efectúa en sentido antihorario.*

Para recordar estas convenciones de signo, podemos relacionar el efecto del calor transferido o del trabajo efectuado con el cambio en la energía interna del sistema.

Las cuatro etapas de nuestro ciclo son las siguientes:

**Etapa 1 (*ab*).** Aumentamos la temperatura del depósito, y simultáneamente añadimos algún peso adicional al émbolo, de modo que la presión aumente pero el volumen permanezca constante.

**Etapa 2 (*bc*).** Aumentamos la temperatura del depósito y dejamos que el gas se dilate a presión constante. El émbolo efectúa un trabajo negativo sobre el gas.

**Etapa 3 (*cd*).** Disminuimos la temperatura del depósito y simultáneamente retiramos algo de peso del émbolo, de modo que el volumen permanezca constante.

**Etapa 4 (*da*).** Continuamos disminuyendo la temperatura del depósito, pero mantenemos constante la carga sobre el émbolo, con el fin de que la presión permanezca constante mientras el volumen disminuya a su valor original.

Obsérvese de las isotermas mostradas en la figura 2 que la temperatura aumenta en las etapas 1 y 2 y disminuye en las etapas 3 y 4. Entonces, durante las etapas 1 y 2 entra calor al sistema ($Q_1 > 0$ y $Q_2 > 0$), y durante las etapas 3 y 4 sale calor del sistema ($Q_3 < 0$ y $Q_4 < 0$). Además, obsrvamos que $W < 0$ para todo el ciclo, porque el ciclo se efectúa en dirección horaria. En la etapa 1, hemos añadimos peso cuando el émbolo estaba en la posición más baja, y en la etapa 3 hemos retirado peso cuando el émbolo estaba en la posición más alta. El efecto total del ciclo sobre el entorno es, entonces, elevar cierto peso $mg$ a la distancia $h$ a la que asciende el émbolo en la etapa 2; la magnitud del trabajo efectuado por el gas sobre el entorno es igual a $mgh$.

Examinemos ahora las transferencias de energía durante el ciclo. El calor total $Q_{in}$ que entra al sistema es $Q_1 + Q_2$, y el calor total $Q_{out}$ que sale del sistema es $Q_3 + Q_4$. El calor neto transferido $Q$ para el ciclo es $Q_{in} + Q_{out}$; para recordar que $Q_{in}$ es positiva y $Q_{out}$ negativa, escribimos, usando magnitudes absolutas,

$$|Q| = |Q_{in}| - |Q_{out}|. \tag{1}$$

El cambio en la energía interna para el ciclo debe ser cero, porque el ciclo comienza y termina en el mismo punto. La primera ley da entonces $W = -Q$ o sea, usando de nuevo magnitudes absolutas,

$$|W| = |Q| = |Q_{in}| - |Q_{out}|. \tag{2}$$

Para este ciclo, $|Q_{in}| > |Q_{out}|$, de modo que los miembros derechos de las ecuaciones 1 y 2 son positivos, como es necesario cuando escribimos aquellas ecuaciones en términos de magnitudes.

Definimos la *eficiencia* $e$ de cualquier ciclo como la cantidad neta de trabajo efectuado *sobre el entorno* durante el ciclo, dividido por la *entrada de calor* $Q_{in}$:

$$e = \frac{|W|}{|Q_{in}|}. \tag{3}$$

El trabajo efectuado sobre el entorno, que es como medimos la salida útil de una máquina, es el negativo del trabajo efectuado por el entorno sobre el gas. Escribimos la razón en la ecuación 3 de esta manera para que tanto el numerador como el denominador sean cantidades positivas.

Podemos también escribir la eficiencia como:

$$e = \frac{|Q_{in}| - |Q_{out}|}{|Q_{in}|} = 1 - \frac{|Q_{out}|}{|Q_{in}|}. \tag{4}$$

Podríamos hacer una máquina perfectamente eficiente ($e$ = 1.00 ó 100%) si pudiéramos diseñar un ciclo que reduzca a cero a $|Q_{out}|$, el calor descargado; de otro modo, la eficiencia es siempre menos de 100%. Una forma de la *segunda ley de la termodinámica* afirma que el hacer una máquina térmica perfectamente eficiente es imposible:

> *En un proceso cíclico, no es posible convertir calor enteramente en trabajo, sin que exista algún otro cambio.*

En nuestro ejemplo el "otro cambio que existe" es el calor de escape $|Q_{out}|$, y entonces la segunda ley dice que es imposible reducir $|Q_{out}|$ a cero. La ecuación 4 implica que la eficiencia de la máquina térmica no puede nunca llegar al 100%. Esta forma de la segunda ley, que suele llamarse forma de *Kelvin-Planck*, establece que *no existen máquinas térmicas perfectas*.

La figura 3 muestra una representación esquemática simplificada de una máquina perfecta, la cual convierte al calor $Q$ enteramente en trabajo, y una máquina real, que obtiene el calor $Q_H$ de un recipiente a alta temperatura $T_H$ y descarga calor $Q_L$ al recipiente a baja temperatura $T_L$. En esta máquina generalizada, el calor de entrada, que puede ser trasferido en varias etapas, se representa simplemente como $Q_H$, y el calor de escape se representa similarmente como $Q_L$. El ciclo implica una serie de operaciones llevadas a cabo sobre una *sustancia de operación*; en nuestro caso, la serie de operaciones mostradas en la figura 2 se llevaron a cabo en un gas ideal, pero en la práctica podemos diseñar una máquina térmica usando cualquiera de una gran variedad de sustancias de operación. Por ejemplo, en una planta de potencia, el agua es a menudo la sustancia de operación, absorbiendo calor $Q_H$ cuando se convierte en vapor y descargando calor $Q_L$ cuando el vapor se condensa nuevamente en agua. (No debe confundirse el combustible de un motor con la sustancia de operación; el combustible simplemente mantiene la temperatura $T_H$ del recipiente caliente.) El recipiente de baja temperatura, hacia el que escapa el calor $Q_L$, podría ser la atmósfera, un estanque de enfriamiento, o un río.

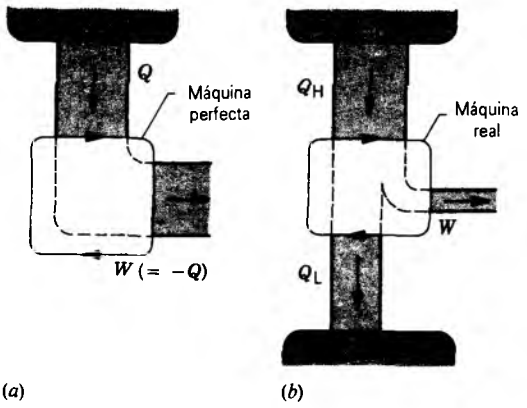



**Figura 3** Se representa una máquina por las flechas en el sentido horario que rodean al bloque central. (*a*) En una máquina perfecta, todo el calor extraído de un depósito a alta temperatura se convierte en trabajo. (*b*) En una máquina real, el calor $Q_H$ extraído del depósito de alta temperatura se convierte parcialmente en trabajo y parcialmente en calor $Q_L$ que escapa a un recipiente de baja temperatura.

**Problema muestra 1** Un motor de automóvil, cuya eficiencia térmica $e$ es de 22%, opera a 95 ciclos por segundo y efectúa trabajo a 120 hp. (*a*) ¿Cuánto trabajo por ciclo efectúa el entorno sobre el sistema? (*b*) ¿Cuánto calor entra y sale del motor en cada ciclo?

**Solución** (*a*) El trabajo por ciclo efectuado sobre el sistema, una cantidad negativa, es

$$W = -\frac{(120\text{ hp})[746\text{ (J/s)/hp}]}{95\text{ s}^{-1}} = -942\text{ J}.$$

O, lo que es lo mismo, el motor efectúa +942 J de trabajo por ciclo sobre el entorno.

(*b*) Para hallar el calor de entrada $Q_H$ absorbido del depósito a alta temperatura (la explosión de la mezcla de combustible), usamos la ecuación 3:

$$|Q_H| = \frac{|W|}{e} = \frac{942\text{ J}}{0.22} = 4.3 \times 10^3\text{ J}.$$

Partiendo de la ecuación 2, hallamos el calor de salida, que se descarga al recipiente a baja temperatura (el entorno):

$$|Q_L| = |Q_H| - |W| = 4.3 \times 10^3\text{ J} - 942\text{ J} = 3.4 \times 10^3\text{ J}.$$

El calor descargado del motor lleva un signo negativo de modo que

$$Q_L = -3.4 \times 10^3\text{ J}.$$

Vemos que este motor absorbe $4.3 \times 10^3$ J de calor por ciclo, por el que debemos pagar en la estación de gasolina, efectúa 942 J de trabajo, y transfiere $3.4 \times 10^3$ J de calor en el escape. El motor desecha 3.6 veces más energía de la que convierte para propósitos útiles. Algunas máquinas pueden poner este calor del escape a trabajar en forma útil. Por ejemplo, el calor del vapor escapado en una planta de potencia puede transferirse a edificios comerciales para mantenerlos calientes durante el tiempo frío.

## 26-3 REFRIGERADORES Y LA SEGUNDA LEY

Un refrigerador es básicamente una máquina térmica que funciona en sentido inverso. Al igual que una máquina térmica, se considera que un refrigerador funciona en un proceso cíclico, y el recorrido del ciclo de la figura 2 en sentido inverso representaría la operación de un tipo de refrigerador. Un refrigerador más general puede estar representado por el motor de la figura 3 operado en sentido inverso. El calor $Q_L$ se extrae del depósito de baja temperatura a la temperatura $T_L$, y el calor $Q_H$ se descarga del recipiente de alta temperatura a la temperatura $T_H$. La figura 4 muestra una representación esquemática de un refrigerador perfecto, en el que $|Q_L| = |Q_H|$, y un refrigerador real, en el que $|Q_L| < |Q_H|$ y debe suministrársele trabajo $W$.

Como en el caso de la máquina térmica, no existe un cambio de la energía interna en un ciclo completo, y por lo tanto $|W| = |Q|$, o sea

$$|W| = |Q_H| - |Q_L|. \tag{5}$$

En el refrigerador, el calor *entra* a partir del recipiente de baja temperatura, de modo que $Q_L > 0$, y *sale* al recipiente de alta temperatura, de modo que $Q_H < 0$, como lo sugiere la figura 4. También, $W > 0$, puesto que el entorno efectúa un trabajo sobre la sustancia de operación.

En analogía con la eficiencia de una máquina térmica, evaluamos un refrigerador en términos del *coeficiente de rendimiento* $K$, definido por

$$K = \frac{|Q_L|}{|W|} = \frac{|Q_L|}{|Q_H| - |Q_L|}. \tag{6}$$

En un refrigerador perfecto, $W = 0$ (entonces $|Q_H| = |Q_L|$), y el coeficiente de rendimiento es infinito.

Un enunciado alternativo de la segunda ley de la termodinámica trata del rendimiento de un refrigerador:

> *En un proceso cíclico, no es posible que fluya calor de un cuerpo a otro a mayor temperatura sin que exista algún otro cambio.*

En este enunciado, el "otro cambio existente" significa que durante el ciclo debe efectuarse un trabajo externo para hacer que el calor se mueva de este modo, puesto que de por sí preferiría fluir en el sentido contrario. Este enunciado de la segunda ley se llama a menudo la forma *Clausius*, y en efecto dice que *no existen refrigeradores perfectos*.

En un refrigerador doméstico ordinario, la sustancia de operación es un líquido (Freón) que circula dentro del sistema. El depósito a baja temperatura es la cámara fría en la que se almacenan los alimentos, y el depósito a alta temperatura es la habitación en que se mantiene la unidad.

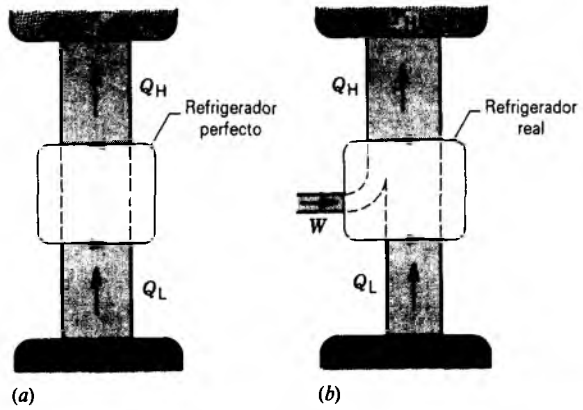



**Figura 4** Se representa un refrigerador por flechas apuntando en sentido antihorario alrededor del bloque central. (*a*) En un refrigerador perfecto no se requiere ningún trabajo. (*b*) En un refrigerador real, el calor es extraído de un depósito a baja temperatura mediante la ejecución de algún trabajo externo, y la energía equivalente del calor extraído y del trabajo se descarga como calor a un depósito a alta temperatura.

El trabajo externo es proporcionado por un motor que impulsa a la unidad. Los refrigeradores típicos tienen coeficientes de rendimiento alrededor de 5.

## Equivalencia de los enunciados de Clausius y de Kelvin-Planck

Los dos enunciados de la segunda ley que hemos presentado no son independientes y, de hecho, son enteramente equivalentes. Para demostrar esto, consideremos lo que pasaría si la forma Kelvin-Planck fuese incorrecta, y que pudiéramos construir una máquina perfecta, convirtiendo el calor $Q_H$ enteramente a trabajo $W$. Usemos este trabajo $W$ para impulsar un refrigerador real, como se muestra en la figura 5*a*. Este refrigerador toma el calor $|Q_L'|$ del depósito a baja temperatura y bombea el calor $|Q_H'| = |Q_L'| + |W|$ al depósito a alta temperatura.

Consideremos la combinación de la máquina perfecta y el refrigerador real como un solo aparato, como se indica en la figura 5*b*. El trabajo $W$ es una característica interna de este aparato y no entra en ningún intercambio de energía con el entorno. Este aparato toma el calor $|Q_L'|$ del depósito a baja temperatura y transfiere al depósito a alta temperatura una cantidad neta de calor igual a $|Q_H'| - |Q_H|$. Pero $|Q_H| = |W|$, y entonces

$$|Q_H'| - |Q_H| = |Q_H'| - |W| = |Q_L'|.$$

Entonces nuestro aparato combinado actúa como un refrigerador perfecto, tomando el calor $|Q_L'|$ del depósito a baja temperatura y bombeando el calor $|Q_H'|$ al depósito a alta temperatura, sin que se efectúe ningún trabajo externo.

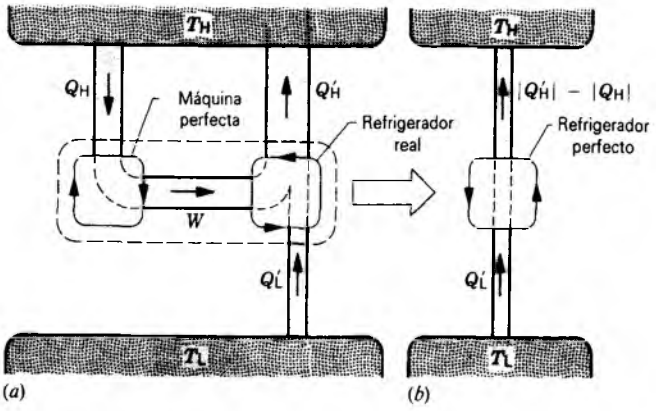



**Figura 5** (*a*) Un refrigerador real, impulsado por una máquina perfecta, es equivalente a (*b*) un refrigerador perfecto.

Este ejemplo demuestra que, si podemos construir una máquina perfecta, entonces podemos construir un refrigerador perfecto. Es decir, una violación del enunciado de Kelvin-Planck de la segunda ley implica una violación del enunciado de Clausius. De manera similar, un refrigerador perfecto nos permite convertir a una máquina térmica real en una máquina térmica perfecta. Entonces, una violación del enunciado de Clausius implica una violación del enunciado de Kelvin-Planck. Puesto que una violación de cualquiera de los enunciados implica una violación del otro, los dos enunciados son lógicamente equivalentes.

**Problema muestra 2** Un refrigerador doméstico, cuyo coeficiente de rendimiento $K$ es 4.7, extrae calor de la cámara de enfriamiento a 250 J por ciclo. (*a*) ¿Cuánto trabajo por ciclo se requiere para operar el refrigerador? (*b*) ¿Cuánto calor por ciclo se descarga a la habitación, la cual constituye el depósito de alta temperatura del refrigerador?

**Solución** (*a*) Partiendo de la ecuación 6, $K = |Q_L|/|W|$, tenemos

$$|W| = \frac{|Q_L|}{K} = \frac{250\ \text{J}}{4.7} = 53\ \text{J}.$$

$W$ representa el trabajo efectuado *sobre* el sistema, de modo que es una cantidad positiva.

(*b*) Para hallar el calor $Q_H$ descargado a la habitación (la cual sirve como depósito de alta temperatura), usamos la ecuación 5, que es la primera ley de termodinámica para un aparato cíclico y es válida tanto para refrigeradores como para máquinas. Entonces, tenemos

$$|Q_H| = |W| + |Q_L| = 53\ \text{J} + 250\ \text{J} = 303\ \text{J}.$$

Un refrigerador ¡es también un calefactor eficiente! Al pagar por 53 J de trabajo (efectuado por el motor), obtenemos 303 J de calor abastecido a la habitación por medio de los tubos de condensación colocados atrás de la unidad. (Véase el problema muestra 4, que trata de la operación de una *bomba de calor*, aparato similar al refrigerador que puede calentar el hogar.)

Si calentásemos la habitación con un calefactor eléctrico, obtendríamos cuando más 53 J de calor por cada 53 J de trabajo por el que pagamos. Pensemos en lo sensato (?) que puede ser tratar de enfriar la cocina en un día caluroso ¡dejando abierta la puerta del refrigerador! Por supuesto, un cálculo completo de la eficiencia relativa de varios sistemas de calefacción debe tener en cuenta la eficiencia termodinámica de la producción de potencia eléctrica en la planta generadora.

## 26-4 EL CICLO DE CARNOT

Hemos visto que la segunda ley de la termodinámica nos impide construir máquinas térmicas y refrigeradores perfectos. Entonces es lógico preguntar si podemos llegar tan cerca de la perfección como queramos, o si existe alguna otra limitación fundamental en el funcionamiento de las máquinas térmicas y de los refrigeradores. Sucede que *sí existe* un límite fundamental, y para su estudio explicaremos una máquina que funciona en un ciclo particular, llamado *ciclo de Carnot.**

En el ciclo de Carnot, la sustancia de operación es un gas ideal en nuestro cilindro usual. Usamos dos depósitos térmicos, uno a alta temperatura $T_H$ y otro a baja temperatura $T_L$. El ciclo consta de cuatro procesos reversibles, dos isotérmicos y dos adiabáticos. La secuencia, indicada esquemáticamente en la figura 6 y trazada en un diagrama $pV$ en la figura 7, es como sigue:

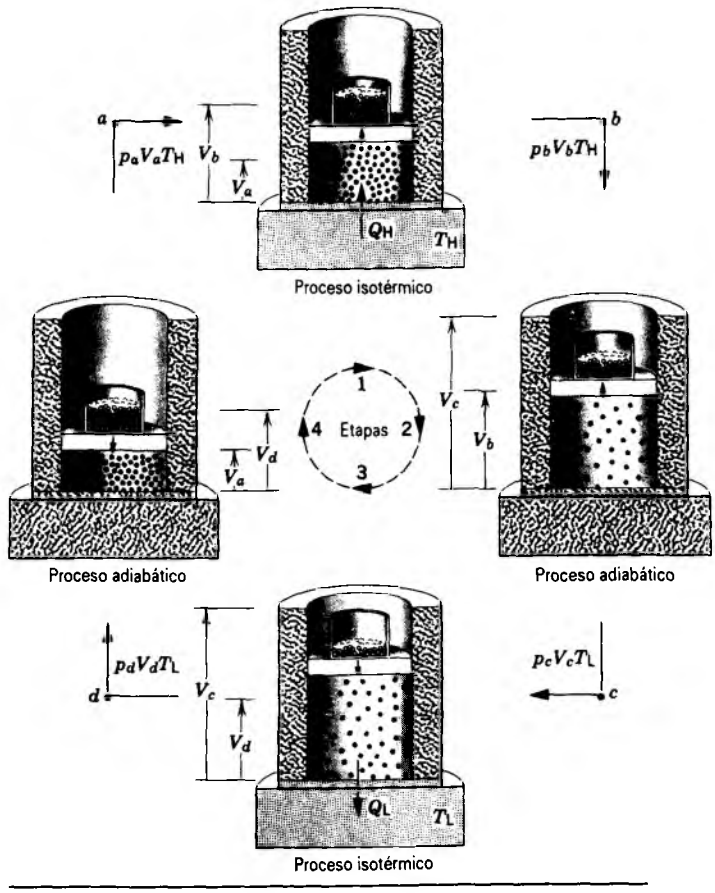



**Figura 6** Ciclo de Carnot. *Las cuatro etapas* (1, 2, 3, 4) y los cuatro puntos finales (*a, b, c, d*) corresponden a los de la figura 7. El arreglo cilindro-émbolo se muestra en puntos intermedios, durante la realización de cada proceso.

**Etapa 1 (*ab*).** Ponemos el cilindro sobre el depósito a alta temperatura, con el gas en un estado representado por el punto *a* en la figura 7. Gradualmente, quitamos algo de peso del émbolo, permitiendo que el gas se dilate lentamente hasta el punto *b*. Durante este proceso, el gas del depósito a alta temperatura absorbe calor $Q_1 = |Q_H|$. Ya que este proceso es isotérmico, la energía interna del gas no cambia ($\Delta E_{int} = 0$), y todo el calor (positivo) añadido aparece como trabajo (negativo) efectuado sobre el gas al elevarse el émbolo con el peso.

**Etapa 2 (*bc*).** Aislamos el cilindro del depósito y, quitando gradualmente más peso del émbolo, dejamos que el gas se dilate lentamente hasta el punto *c* de la figura 7. Esta expansión es adiabática porque no entra ni sale calor del sistema ($Q_2 = 0$). El émbolo efectúa un trabajo (negativo) $W_2$ sobre el gas. La temperatura del gas cae a $T_L$, porque la energía para efectuar el trabajo debe venir de la energía interna del gas.

**Etapa 3 (*cd*).** Ponemos el cilindro sobre el depósito a baja temperatura y, añadiendo gradualmente peso al émbolo, comprimimos el gas lentamente hasta el punto *d* en la figura 7. Durante este proceso, se trasfiere calor $Q_3 = -|Q_L|$ del gas al depósito. La compresión es isotérmica a la temperatura $T_L$, y se efectúa un trabajo (positivo) sobre el gas al descender el émbolo y su carga.

**Etapa 4 (*da*).** Aislamos al cilindro del depósito y, añadiendo aún más peso, comprimimos al gas lentamente de regreso a su punto inicial *a* de la figura 7, completando así el ciclo. La compresión es adiabática porque ningún calor entra o sale del sistema. El trabajo $W_H$ es efectuado sobre el gas, y su temperatura se eleva hasta $T_H$.

Las transferencias de energía durante el ciclo pueden resumirse como sigue:

| | $Q$ | $W$ | $\Delta E_{int}$ |
|---|---|---|---|
| Etapa 1 | $>0$ | $<0$ | 0 |
| Etapa 2 | 0 | $<0$ | $<0$ |
| Etapa 3 | $<0$ | $>0$ | 0 |
| Etapa 4 | 0 | $>0$ | $>0$ |
| Ciclo | $>0$ | $<0$ | 0 |

* Llamado así en honor del ingeniero y científico francés N. L. Sadi Carnot (1796-1832), quien propuso el concepto en 1824.

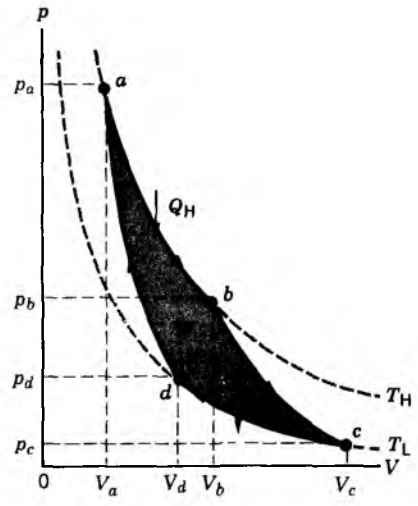



**Figura 7** Un diagrama $pV$ del ciclo de Carnot ilustrado en la figura 6. Se supone que la substancia útil es un gas ideal.

Calculemos ahora la eficiencia de una máquina térmica que opere en un ciclo de Carnot. A lo largo de la trayectoria isotérmica *ab* en la figura 7, la temperatura permanece constante. Puesto que el gas es ideal, su energía interna, que depende únicamente de la temperatura, permanece también constante. Con $\Delta E_{int} = 0$, la primera ley requiere que el calor $Q_H$ transferido del depósito de alta temperatura sea igual a la magnitud del trabajo $W$ efectuado sobre el gas al expandirse. Según la ecuación 27 del capítulo 23 tenemos entonces

$$|Q_H| = |W_1| = nRT_H \ln \frac{V_b}{V_a}.$$

Similarmente, para el proceso isotérmico *cd* en la figura 7, podemos escribir

$$|Q_L| = |W_3| = nRT_L \ln \frac{V_c}{V_d}.$$

Dividiendo estas dos ecuaciones tenemos que

$$\frac{|Q_H|}{|Q_L|} = \frac{T_H \ln (V_b/V_a)}{T_L \ln (V_c/V_d)}. \tag{7}$$

La ecuación 38 del capítulo 25 nos permite escribir, para los dos procesos adiabáticos *bc* y *da*,

$$T_H V_b^{\gamma-1} = T_L V_c^{\gamma-1} \quad \text{y} \quad T_H V_a^{\gamma-1} = T_L V_d^{\gamma-1}.$$

Dividiendo estas dos ecuaciones resulta

$$\frac{V_b^{\gamma-1}}{V_a^{\gamma-1}} = \frac{V_c^{\gamma-1}}{V_d^{\gamma-1}}$$

o sea

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}. \tag{8}$$

Al combinar las ecuaciones 7 y 8 nos da

$$\frac{|Q_H|}{|Q_L|} = \frac{T_H}{T_L}. \tag{9}$$

La ecuación 9 es un resultado importante y fundamental del ciclo de Carnot. Necesitaremos este resultado nuevamente más adelante en este mismo capítulo cuando discutamos la entropía.

Usando la ecuación 4 con $Q_{in} = Q_H$ y $Q_{out} = Q_L$ y sustituyendo la ecuación 9, obtenemos la eficiencia de una máquina térmica que opere en un ciclo de Carnot:

$$e = 1 - \frac{T_L}{T_H} = \frac{T_H - T_L}{T_H}. \tag{10}$$

*La eficiencia de una máquina Carnot depende únicamente de la temperatura de los dos depósitos entre los que opera.* Obsérvese que la eficiencia aumenta al decrecer $T_L$, tendiendo a 1 cuando $T_L$ tiende a 0. Puesto que $T_L$ no puede llegar nunca a 0, la eficiencia debe ser menos del 100%.

Un ciclo de Carnot, por ser reversible, puede recorrerse en sentido inverso para constituir un refrigerador. Se deja como ejercicio (véase el problema 19) demostrar que el coeficiente de rendimiento de un refrigerador Carnot es

$$K = \frac{T_L}{T_H - T_L}. \tag{11}$$

Hemos empleado un gas ideal como ejemplo de una sustancia de operación. La sustancia de operación puede ser cualquier cosa, aunque los diagramas $pV$ para otras sustancias serían diferentes. Las máquinas térmicas comunes usan vapor o una mezcla de combustible y aire o combustible y oxígeno como sustancias de operación. Puede obtenerse calor mediante la combustión de un combustible como la gasolina o el carbón, o mediante la liberación de energía nuclear en los reactores de fisión. El calor puede ser descargado en el escape o a un condensador. Si bien las máquinas térmicas reales no operan en un ciclo reversible, el ciclo de Carnot, que es reversible, da una información útil respecto al comportamiento de cualquier máquina térmica. Es especialmente importante, como lo veremos más adelante, porque pone un límite superior al rendimiento de las máquinas reales y por lo tanto ofrece un objetivo a lograr.

## El teorema de Carnot y la segunda ley

Basado en su máquina térmica reversible ideal, Carnot desarrolló un teorema general aplicable a *todas* las máquinas térmicas:

> *La eficiencia de cualquier máquina térmica que opere entre dos temperaturas específicas nunca podrá superar la eficiencia de una máquina Carnot que opere entre las mismas dos temperaturas.*

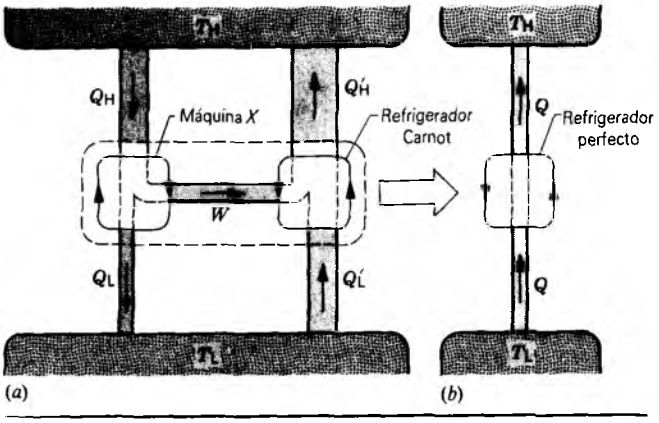



**Figura 8** (*a*) La máquina *X* impulsa un refrigerador Carnot. Si la máquina *X* fuese más eficiente que una máquina Carnot, entonces la combinación sería equivalente al refrigerador perfecto mostrado en (*b*).

Es decir, la eficiencia Carnot (Ec. 10) es el límite superior del desempeño de una máquina térmica. Clausius y Kelvin demostraron que el teorema de Carnot era una consecuencia necesaria de la segunda ley de la termodinámica, pero es notable que el trabajo de Carnot haya sido terminado mucho tiempo antes de que Clausius y Kelvin desarrollasen los enunciados de la segunda ley. (¡El trabajo de Carnot sobre máquinas térmicas se publicó en 1824, el año del natalicio de Kelvin y dos años después de haber nacido Clausius!)

Para demostrar que la violación del teorema de Carnot es también una violación de la segunda ley, supongamos que tenemos una máquina, a la que llamaremos máquina *X*, cuya eficiencia $e_x$ supera a la eficiencia Carnot $e$. Acoplemos la máquina *X* a una máquina Carnot que opere en sentido inverso como un refrigerador, como en la figura 8. La máquina *X* extrae calor $Q_H$ del depósito de alta temperatura y descarga calor $Q_L$ al depósito de baja temperatura, efectuando el trabajo $W$ durante el proceso. Hagamos que este trabajo $W$ impulse el refrigerador Carnot, que extrae calor $Q'_L$ del depósito de baja temperatura y descarga calor $Q'_H$ al depósito de alta temperatura.

El calor neto que fluye del depósito de baja temperatura debido a la combinación de los dos aparatos es $|Q'_L| - |Q_L|$, y el calor neto abastecido al depósito de alta temperatura es $|Q'_H| - |Q_H|$. Al aplicar la primera ley a cada aparato por separado, tenemos $|W| = |Q_H| - |Q_L|$ para la máquina *X*, y $|W| = |Q'_H| - |Q'_L|$ para el refrigerador Carnot. Igualando estas dos expresiones, hallamos

$$|W| = |Q_H| - |Q_L| = |Q'_H| - |Q'_L|,$$

o, definiendo que $Q$ sea la diferencia entre $|Q'_H|$ y $|Q_H|$,

$$Q = |Q'_H| - |Q_H| = |Q'_L| - |Q_L|. \tag{12}$$

Nuestra hipótesis es que la eficiencia de la máquina *X* puede exceder a la eficiencia Carnot; es decir,

$$e_X > e \quad \text{(hipótesis)}. \tag{13}$$

Investiguemos las consecuencias de esta hipótesis. Partiendo de la ecuación 3 de la definición básica de la eficiencia, nuestra hipótesis es equivalente a

$$\frac{|W|}{|Q_H|} > \frac{|W|}{|Q'_H|}$$

o sea

$$|Q'_H| > |Q_H| \quad \text{(consecuencia de la hipótesis)}. \tag{14}$$

Al comparar las ecuaciones 12 y 14 vemos que $Q > 0$ como una consecuencia directa de nuestra hipótesis de que podemos construir una máquina que viole el teorema de Carnot. Entonces, la combinación de la máquina *X* y el refrigerador Carnot es equivalente al refrigerador perfecto mostrado en la figura 8*b*, donde el calor $Q$ es transferido del depósito de baja temperatura a $T_L$ al depósito de alta temperatura a $T_H$ sin trabajo externo. Esto viola claramente la forma Clausius de la segunda ley, y por lo tanto nuestra hipótesis original (Ec. 13) debe ser falsa. El teorema de Carnot es, por lo tanto, una consecuencia necesaria de la segunda ley.

¿Cómo diferiría este argumento si *X* fuese una máquina real? Si $e_x < e$, entonces la ecuación 14 cambiaría a

$$|Q'_H| < |Q_H|,$$

y a partir de la ecuación 12 deduciríamos que $Q < 0$. En este caso, invertiríamos las direcciones de las flechas en la figura 8*b*, que entonces ya no sería más un refrigerador. En cambio, el calor $Q$ fluiría del depósito de alta temperatura al depósito de baja temperatura, que es un proceso natural y no viola ninguna ley básica.

Si la máquina *X* opera en un ciclo compuesto enteramente de procesos reversibles, entonces su eficiencia es igual a la eficiencia Carnot. Si el ciclo es en parte irreversible, entonces en efecto, una porción de la energía transferida en cada ciclo se pierde, quizás por fricción, y no puede recuperarse como trabajo útil. En la figura 8, por ejemplo, no sería verdad que todo el trabajo $W$ producido por una máquina *X* parcialmente irreversible estaría disponible para hacer funcionar al refrigerador; parte se perdería como fricción o por otra causa. Entonces podemos resumir el teorema de Carnot, aplicado a la eficiencia $e$ de cualquier máquina, como sigue:

$$\begin{aligned} e &= e_{\text{Carnot}} \quad \text{(reversible)}, \\ e &< e_{\text{Carnot}} \quad \text{(irreversible)}. \end{aligned} \tag{15}$$

**Problema muestra 3** La turbina de una planta de potencia por vapor toma vapor de una caldera a 520°C y lo descarga a un condensador a 100°C. ¿Cuál es su eficiencia máxima posible?

**Solución** La eficiencia máxima es la eficiencia de una máquina Carnot que opera entre las mismas dos temperaturas. Entonces, según la ecuación 10,

$$e_{máx} = \frac{T_H - T_L}{T_H} = \frac{793\ \text{K} - 373\ \text{K}}{793\ \text{K}}$$
$$= 0.53 \text{ o sea } 53\%$$

Obsérvese que en esta ecuación las temperaturas deben expresarse en la escala Kelvin. Debido a la fricción, la turbulencia, y las pérdidas térmicas no deseadas, pueden obtenerse en tal turbina de vapor, eficiencias reales de alrededor del 40%. Obsérvese que la eficiencia máxima teórica depende únicamente de las dos temperaturas implicadas, no de las presiones o de otros factores.

La eficiencia teórica de un motor ordinario de automóvil es de alrededor del 56%, pero por consideraciones prácticas se reduce a alrededor del 25%.

**Problema muestra 4** Una bomba de calor (véase la fig. 9) es un aparato que, actuando como un refrigerador, puede calentar una casa extrayendo calor del exterior, efectuando cierto trabajo, y descargando calor al interior de la casa. La temperatura exterior es de -10°C, y el interior ha de mantenerse a 22°C. Es necesario entregar calor al interior a 16 kW para compensar las pérdidas de calor normales. ¿Qué cantidad mínima de energía debe suministrarse a la bomba de calor?

**Solución** El depósito de baja temperatura es el exterior a $T_L$ = 273 - 10 = 263 K, y el depósito de alta temperatura es el interior a $T_H$ = 273 + 22 = 295 K. Partiendo de la ecuación 11, el coeficiente de rendimiento máximo de la bomba de calor, que actúa como un refrigerador, es

$$K = \frac{T_L}{T_H - T_L} = \frac{263\ \text{K}}{295\ \text{K} - 263\ \text{K}} = 8.22.$$

Podemos volver a escribir la ecuación 6 como:

$$K = \frac{|Q_L|}{|W|} = \frac{|Q_H| - |W|}{|W|}.$$

Resolviendo para $|W|$ y dividiendo entre el tiempo para expresar el resultado en términos de potencia, obtenemos

$$\frac{|W|}{t} = \frac{|Q_H/t|}{K+1} = \frac{16\ \text{kW}}{8.22+1} = 1.7\ \text{kW}.$$

En esto radica la "magia" de la bomba de calor. Al usar la bomba de calor como un refrigerador para enfriar el enorme exterior, podemos abastecer 16 kW al interior de la casa pero necesitamos pagar únicamente los 1.7 kW que toma hacer funcionar la bomba. En realidad, los 1.7 kW es un requisito mínimo teórico porque se basa en un rendimiento ideal. En la práctica se requeriría una mayor entrada de potencia, pero todavía existiría un ahorro muy considerable sobre, digamos, calentar la casa directamente con calefactores eléctricos. En ese caso, tendríamos que pagar directamente por cada kilowatt de transferencia de calor. Cuando la temperatura exterior es mayor que la temperatura interior, la bomba de calor puede utilizarse como un acondicionador de aire. Aun operando como un refrigerador, bombea ahora calor del interior de la casa al exterior. De nuevo, debe efectuarse un trabajo (y pagar por él) pero la energía trasladada como calor del interior de la casa supera a la energía equivalente del trabajo efectuado. ¡Otra ganga termodinámica! (Véase también el problema muestra 2 para otra indicación de que el refrigerador es un calefactor eficiente.)

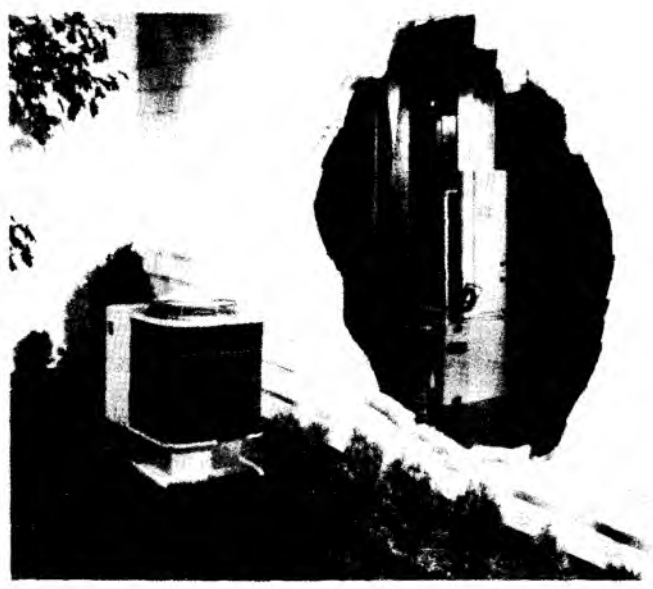


**Figura 9** Problema muestra 4. Una bomba de calor.

## 26-5 LA ESCALA DE TEMPERATURA TERMODINÁMICA

La eficiencia de una máquina reversible es independiente de la sustancia de operación y depende únicamente de las dos temperaturas entre las que trabaja la máquina. Ya que $e = 1 - |Q_L|/|Q_H|$, entonces $|Q_L|/|Q_H|$ puede depender únicamente de las temperaturas. Esto condujo a Kelvin a sugerir una nueva escala de temperatura. Si hacemos que $\theta_L$ y $\theta_H$ representen estas dos temperaturas, su ecuación definitoria es

$$\frac{\theta_L}{\theta_H} = \frac{|Q_L|}{|Q_H|}.$$

Es decir, dos temperaturas en esta escala tienen la misma razón que el calor absorbido y el calor cedido, respectivamente, por una máquina Carnot que opere entre estas temperaturas. Tal escala de temperatura se denomina escala de temperatura *termodinámica* (o de *Kelvin*).

Para completar la definición de la escala termodinámica, asignamos el valor estándar de 273.16 a la temperatura del punto triple del agua. De aquí que $\theta_{tr}$ = 273.16 K. Por lo tanto, para una máquina Carnot que opere entre depósitos a las temperaturas $\theta$ y $\theta_{tr}$, tenemos

$$\frac{\theta}{\theta_{tr}} = \frac{|Q|}{|Q_{tr}|}$$

o sea

$$\theta = 273.16\ \text{K}\,\frac{|Q|}{|Q_{tr}|}. \tag{16}$$

Si comparamos a ésta con la ecuación 7 del capítulo 22,

$$T = 273.16\ \text{K}\,\frac{X}{X_{tr}},$$

vemos que, en la escala termodinámica, $|Q|$ juega el papel de una propiedad termométrica. Sin embargo, $|Q|$ no depende de las características de ninguna sustancia porque *la eficiencia de una máquina Carnot es independiente de la naturaleza de la sustancia de operación.* Por lo tanto, obtenemos una escala de temperatura que está libre de la objeción que podemos poner a la escala del gas ideal del capítulo 22 y, de hecho, llegamos a una definición fundamental de temperatura.

La definición de temperatura termodinámica nos permite reescribir la ecuación para la eficiencia de una máquina reversible como:

$$e = \frac{|Q_H| - |Q_L|}{|Q_H|} = \frac{\theta_H - \theta_L}{\theta_H}. \tag{17}$$

Pero hemos demostrado que la eficiencia de una máquina Carnot que use un gas ideal como sustancia de operación es

$$e = \frac{|Q_H| - |Q_L|}{|Q_H|} = \frac{T_H - T_L}{T_H}, \tag{18}$$

donde $T$ es la temperatura dada por el termómetro a volumen constante que contiene el gas ideal. Al comparar las ecuaciones 17 y 18, vemos que $|Q_H|/|Q_L| = T_H/T_L$ y $|Q_H|/|Q_L| = \theta_H/\theta_L$. Ya que $\theta_{tr} = T_{tr} = 273.16$ y $\theta/\theta_{tr} = T/T_{tr}$, se deduce que $\theta = T$. De aquí que *si estuviese disponible un gas ideal para usarse en un termómetro a volumen constante, el termómetro indicaría la temperatura termodinámica (o Kelvin).* Hemos visto que, si bien no se dispone de un gas ideal, las mediciones hechas usando el proceso límite con gases reales corresponden al comportamiento del gas ideal. Trataremos la escala del gas ideal y la escala termodinámica como idénticas, y usaremos la designación K intercambiablemente para cada una, como de hecho ya lo hemos llevado a cabo.

### El cero absoluto y las temperaturas negativas *(Opcional)*

En la práctica no podemos tener un gas a menos de 1 K, y por lo tanto no podemos medir temperaturas de menos de 1 K usando un termómetro de gas a volumen constante. Por fortuna, es posible medir temperaturas inferiores a 1 K usando la escala termodinámica directamente. Supongamos que tenemos un sistema a una temperatura $T_2$ que queremos medir. Podemos llevar al sistema alrededor de un ciclo Carnot (Fig. 10), primero efectuando un trabajo adiabático sobre él para elevar la temperatura a $T_1$, que es supuestamente conocida en la escala del gas ideal, luego transfiriendo el calor conocido $|Q_1|$ isotérmicamente, efectuando un trabajo adiabático para reducir su temperatura otra vez a $T_2$, y por último transfiriendo el calor $|Q_2|$ necesario

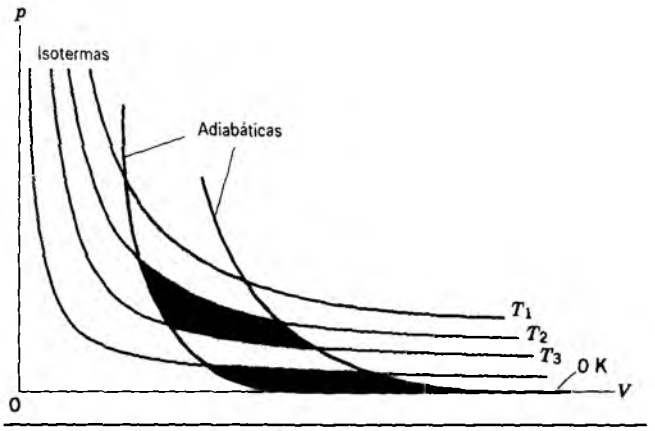



**Figura 10** Una serie de ciclos de Carnot que tienden hacia el cero absoluto de temperatura. La diferencia en pendiente entre los procesos isotérmicos y adiabáticos se ha exagerado aquí para mayor claridad.

para regresar al sistema a su condición original. A partir de los argumentos anteriores concluimos que

$$T_2 = T_1\,\frac{|Q_2|}{|Q_1|}. \tag{19}$$

Así pues, conociendo $T_1$ y midiendo $|Q_1|$ y $|Q_2|$ nos es posible determinar la temperatura $T_2$ directamente. Considerando a $T_2$ como una temperatura conocida, podemos llevar al sistema alrededor de otro ciclo de Carnot para determinar una temperatura $T_3$ aún más baja. En principio, podríamos continuar este proceso hasta el cero absoluto de temperatura; sin embargo, cuanto más pequeña sea la temperatura, menor será el calor $|Q|$ transferido en un proceso isotérmico entre dos procesos adiabáticos determinados (Fig. 10). En el límite del cero absoluto de la escala de temperatura termodinámica, el sistema podría experimentar un proceso isotérmico sin transferencia de calor.

La característica fundamental de todos los procesos de enfriamiento es que cuanto más baja es la temperatura tanto mayor la dificultad para bajarla mas aún. Esta experiencia ha conducido a la formulación de la *tercera ley de la termodinámica*, que puede enunciarse como sigue: *Es imposible por cualquier procedimiento, sin importar lo idealizado que éste sea, reducir un sistema al cero absoluto de temperatura en un número finito de operaciones.* De aquí que una máquina térmica con 100% de eficiencia sea una imposibilidad práctica, a causa de que no podemos obtener un depósito al cero absoluto.

Como una alternativa al proceso cíclico podemos usar ciertos termómetros *absolutos* para determinar la temperatura termodinámica directamente. Estos termómetros se basan en la dependencia de la temperatura de los resultados básicos de la mecánica estadística. Un tipo de termómetro, llamado *termómetro de ruido*, utiliza el movimiento browniano de los electrones en un sólido. En analogía con nuestra explicación de la media de los cuadrados de la velocidad en la sección 24-3, podemos demostrar que la media de los cuadrados de la corriente de estos electrones es proporcional a la temperatura. El valor promedio de estas corrientes fluctuantes puede ser medido con sondas sensibles, y puede determinarse la temperatura directamente sin hacer uso de una calibración. De esta manera, pueden determinarse las temperaturas en la gama del millikelvin (0.001 K). Otro aparato útil en esta región de temperaturas hace

uso de la distribución de Maxwell-Boltzmann de la energía para determinar la temperatura. Supongamos que tenemos un sistema (un átomo o un núcleo) en que la energía pueda adquirir dos valores $E_1$ y $E_2 = E_1 + \Delta E$ (Fig. 11). Si tenemos un gran número de esos átomos o núcleos en equilibrio térmico a la temperatura $T$, entonces una estimación burda del número relativo de átomos o de núcleos con energías $E_1$ y $E_2$ está dada por la parte exponencial de la distribución de Maxwell-Boltzmann (véase la Ec. 32 del capítulo 24):

$$\frac{f_{MB}(E_2)}{f_{MB}(E_1)} = \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}} = e^{-\Delta E/kT}. \tag{20}$$

Existen numerosas maneras de medir directamente la razón $f_{MB}(E_2)/f_{MB}(E_1)$, como, por ejemplo, mediante la observación de la radiación electromagnética emitida por los átomos o los núcleos, y por lo tanto, una vez más, podemos determinar la temperatura termodinámica.

En el límite de temperatura muy baja, la mayoría de los átomos o de los núcleos en el esquema de la figura 11 estaría en el estado de energía más bajo, porque la ecuación 20 sugiere que $f_{MB}(E_2) \to 0$ cuando $T \to 0$. En el límite de alta temperatura, la ecuación 20 indica que $f_{MB}(E_2) = f_{MB}(E_1)$; es decir, existen números iguales de átomos o de núcleos con los dos valores de la energía. Así pues, el aumento de la temperatura de muy baja a muy alta está acompañado por un aumento en el número relativo en el estado más alto de la energía de cerca de 0 a 50%. ¿Es posible que el número sobrepase el 50%? Podemos artificialmente "bombear" sistemas del estado de energía más bajo al estado más alto, haciendo que absorban radiación de la energía $\Delta E$ apropiada. (Tal procedimiento es básico para la operación de un láser, donde debemos tener una "inversión de la población" con más átomos en el estado de energía más alto.) Si tratamos de emplear la ecuación 20 para describir un sistema con $f_{MB}(E_2) > f_{MB}(E_1)$, el resultado es una temperatura *negativa*. Es, pues, posible tener temperaturas negativas, pero en contraste con el significado usual de los números negativos, las temperaturas negativas no están por debajo de cero: ¡están por arriba del infinito!* ■

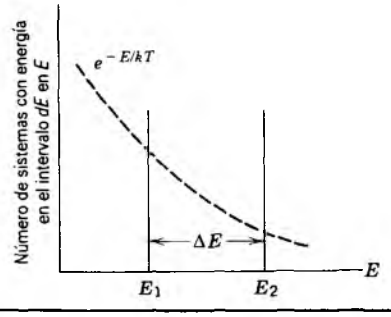



**Figura 11** En un sistema que conste de un gran número de átomos o de núcleos con dos estados de energía discretos, los números relativos que ocupan cada estado de la energía pueden ser hallados partiendo de la distribución de Maxwell-Boltzmann (línea de puntos).

## 26-6 ENTROPÍA: PROCESOS REVERSIBLES

La ley cero de la termodinámica se relaciona con el concepto de temperatura $T$, y la primera ley se relaciona con el concepto de energía interna $E_{int}$. En esta sección y en las siguientes demostraremos que la segunda ley de la termodinámica se relaciona con una variable termodinámica llamada *entropía*, $S$, y que podemos expresar la segunda ley cuantitativamente en términos de esta variable.

Comenzaremos considerando un ciclo de Carnot. Para tal ciclo podemos escribir la ecuación 9 como:

$$\frac{|Q_H|}{T_H} = \frac{|Q_L|}{T_L}.$$

Descartamos ahora la notación del valor absoluto, reconociendo en el proceso que si el ciclo de Carnot se lleva a cabo en el sentido horario, como en una máquina, o antihorario, como en un refrigerador, $Q_H$ y $Q_L$ tienen siempre signos opuestos. Por lo tanto, podemos escribir

$$\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_L}{T_L} = 0. \tag{21}$$

Esta ecuación establece que la suma de las cantidades algebraicas $Q/T$ es cero en un ciclo de Carnot.

Como paso siguiente, queremos generalizar la ecuación 21 a cualquier ciclo reversible, no precisamente a un ciclo de Carnot. Para hacerlo, aproximamos cualquier ciclo reversible como un conjunto de ciclos de Carnot. La figura 12*a* muestra un ciclo reversible arbitrario superpuesto en una familia de isotermas. Podemos aproximar el ciclo real al unir las isotermas por medio de segmentos cortos de líneas adiabáticas elegidos convenientemente (Fig. 12*b*), formando así un conjunto de ciclos de Carnot delgados. Debe usted convencerse de que atravesar los ciclos de Carnot individuales de la figura 12*b* en secuencia es exactamente equivalente, en términos del calor transferido y del trabajo efectuado, a atravesar la secuencia mellada de líneas isotérmicas y adiabáticas que aproxima el ciclo real. Esto es así porque los ciclos de Carnot adyacentes tienen una isoterma común, y dos travesías, en direcciones opuestas, se cancelan entre sí en la región de traslape en lo que concierne a la transferencia de calor y al trabajo efectuado. Haciendo suficientemente pequeño el intervalo de temperatura entre las isotermas de la figura 12*b*, podemos aproximar el ciclo real tan cercanamente como lo deseemos por medio de una secuencia alternante de líneas isotérmicas y adiabáticas.

Entonces podemos escribir para la secuencia de líneas isotérmicas-adiabáticas de la figura 12*b*,

$$\sum \frac{Q}{T} = 0,$$

* Véase "Negative Absolute Temperatures", por Warren G. Proctor, *Scientific American*, agosto de 1978, pág. 90.

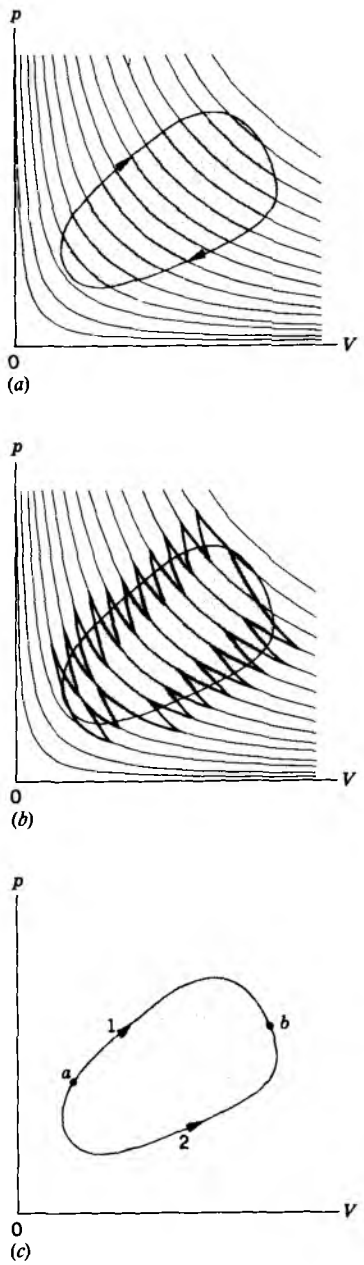



**Figura 12** *(a)* Ciclo reversible superpuesto en una familia de isotermas. *(b)* Las isotermas están unidas por líneas adiabáticas, formando un conjunto de ciclos de Carnot que aproxima al ciclo dado. *(c) a* y *b son dos puntos* arbitrarios en el ciclo, y 1 y 2 son trayectorias reversibles que los unen.

o, en el límite de las diferencias de temperatura infinitesimales entre las isotermas de la figura 12*b*,

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0, \tag{22}$$

donde $\oint$ indica que la integral es evaluada para una travesía completa del ciclo, comenzando y terminando en el mismo punto arbitrario del ciclo. (Téngase en cuenta que $dQ$ en la ecuación 22 no es una diferencial exacta, como ya hemos indicado previamente en conexión con la ecuación 31 del capítulo 25. Es decir, no existe una *función Q*, de la que $dQ$ sea la diferencial. Usamos aquí $dQ$ para significar una cantidad de calor pequeña, no como una diferencial verdadera. En el caso de la figura 12*b*, $dQ$ significa la pequeña cantidad de calor que entra o sale del sistema a lo largo de un elemento corto de la trayectoria.)

Como ya lo hemos visto en la sección 8-1 en el caso de la energía potencial, si la integral de una variable alrededor de cualquier trayectoria cerrada en un sistema de coordenadas es cero, entonces el valor de esa variable en un punto depende únicamente de las coordenadas del punto y no depende en absoluto de la trayectoria por la que se ha llegado a ese punto. Esta variable se llama *variable de estado*, significando que tiene un valor únicamente característico del estado del sistema, sin importar cómo se llegó a ese estado. La ecuación 22 es una integral de éstas, y por lo tanto $dQ/T$ debe ser un cambio diferencial en una variable de estado. Llamamos a esta nueva variable la *entropía S*, de modo que

$$dS = \frac{dQ}{T}, \tag{23}$$

y entonces la ecuación 22 se convierte en

$$\oint dS = 0. \tag{24}$$

La unidad SI para la entropía es J/K.

El punto esencial en las ecuaciones 22 a 24 es que, si bien $dQ$ no es una diferencial exacta, $dQ/T$ sí lo es. La energía potencial gravitatoria $U_g$, la energía interna $E_{int}$, la presión $p$, y la temperatura $T$ son otras variables de estado, y las ecuaciones de la forma $\oint dX = 0$ son válidas para cada una de ellas, donde $X$ se reemplaza por el símbolo apropiado. El calor $Q$ y el trabajo $W$ *no* son variables de estado; sabemos que, en general $\oint dQ \neq 0$ y $\oint dW \neq 0$, como podemos demostrarlo fácilmente en el caso especial de un ciclo de Carnot.

La propiedad de una variable de estado expresada por $\oint dX = 0$ puede expresarse también diciendo que $\int dX$ entre dos estados de equilibrio cualesquiera tiene el mismo valor para todas las trayectorias (reversibles) que unen a esos estados. Demostremos esto para la variable de estado entropía. Podemos escribir la ecuación 24 (véase la Fig. 12*c*) como:

$$\int_{\text{tray 1}}^{b} dS + \int_{\text{tray 2}}^{a} dS = 0, \tag{25}$$

donde $a$ y $b$ son puntos arbitrarios y 1 y 2 describen las trayectorias que unen a esos puntos. Puesto que el ciclo es reversible, podemos recorrer la trayectoria 2 en la dirección opuesta (esto es, de $a$ a $b$ en lugar de $b$ a $a$), en cuyo caso podemos escribir la ecuación 25 como:

$$\int_{a}^{b} dS - \int_{a}^{b} dS = 0$$
$$\text{tray 1} \qquad \text{tray 2}$$

o sea

$$\int_{a}^{b} dS = \int_{a}^{b} dS. \qquad (26)$$
$$\text{tray 1} \qquad \text{tray 2}$$

Nótese que para cambiar el orden de los límites en la segunda integral de la ecuación 25 se requiere que cambiemos también el signo de la integral. Esto da la ecuación 26, la cual nos dice que la cantidad $\int_a^b dS$ entre dos estados de equilibrio cualesquiera del sistema, tales como $a$ y $b$, es independiente de la trayectoria que une a esos estados, ya que 1 y 2 son trayectorias completamente arbitrarias.

Recordemos nuestra exposición casi idéntica en la sección 8-1, donde introdujimos el concepto de fuerza conservativa.

El cambio en la entropía entre dos estados $i$ y $f$ cualesquiera es entonces

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f dS$$
$$= \int_i^f \frac{dQ}{T} \quad \text{(proceso reversible)}, \qquad (27)$$

donde la integral se evalúa sobre *cualquier trayectoria reversible* que una a estos dos estados.

**Problema muestra 5** Un trozo de hielo cuya masa $m$ es de 235 g se funde (reversiblemente) a agua, permaneciendo la temperatura a 0°C durante el proceso. ¿Cuál es el cambio de entropía del cubo de hielo? El calor de fusión del hielo es de 333 kJ/kg.

**Solución** Fundir el hielo reversiblemente significa que debemos poner al hielo en contacto con un depósito térmico cuya temperatura supere los 0°C en una cantidad diferencial únicamente, fundiéndose por lo tanto sólo una pequeña cantidad del hielo. (Si después bajamos la temperatura del depósito en la misma cantidad diferencial, el hielo fundido se congelará; entonces el proceso es reversible.) Para un proceso reversible así, podemos usar la ecuación 27, o, puesto que la temperatura es constante,

$$S_{\text{agua}} - S_{\text{hielo}} = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int dQ = \frac{Q}{T}.$$

Aquí $dQ$ significa los pequeños elementos de energía térmica que entran al hielo desde el depósito térmico, y el total de todos estos elementos es precisamente el calor total absorbido por el hielo, o sea

$$Q = mL = (0.235 \text{ kg})(333 \text{ kJ/kg}) = 7.83 \times 10^4 \text{ J}.$$

Entonces

$$S_{\text{agua}} - S_{\text{hielo}} = \frac{Q}{T} = \frac{7.83 \times 10^4 \text{ J}}{273 \text{ K}} = 287 \text{ J/K}.$$

La respuesta anterior completa nuestro análisis del cambio de entropía del *sistema*, pero llevemos el problema un poco más allá y consideremos también el cambio de entropía del entorno. En este caso, el entorno es el depósito térmico del que se extrae el calor necesario para fundir al hielo. Cada unidad térmica que entra al hielo debe haber salido del depósito, siendo la temperatura la misma tanto del hielo como del depósito. Por lo tanto, el cambio de entropía del depósito es igual en magnitud pero opuesto en signo al del hielo, o sea

$$\Delta S_{\text{depósito}} = -287 \text{ J/K}.$$

El cambio de entropía para el hielo + el depósito, considerados *juntos*, es entonces cero. Esto es cierto para cualquier proceso *reversible*, porque cualquier incremento de calor $+dQ$ que entre al sistema debe originarse de un incremento igual $-dQ$ que salga del depósito.

En la práctica, la fusión del hielo es más bien irreversible, como cuando ponemos un cubo de hielo en un vaso de agua a la temperatura ambiente. La diferencia de temperatura entre el hielo y el depósito (el agua) en este caso no es una cantidad diferencial sino que es de alrededor de 20°C. El proceso sólo opera en una dirección (el hielo se funde) y no puede ser invertido en ninguna etapa haciendo sólo un cambio diferencial en la temperatura del agua. No podemos emplear la ecuación 27 en tal caso, y los cálculos de este problema no son válidos, En la sección siguiente veremos cómo manejar un cálculo de este tipo.

## 26-7 ENTROPÍA: PROCESOS IRREVERSIBLES

La ecuación 27 describe el cálculo del cambio en entropía para un proceso reversible. Sin embargo, no existen en la naturaleza procesos absolutamente reversibles. La fricción y las transferencias de calor no deseadas están siempre presentes, y rara vez podemos llevar a cabo procesos reales en pasos infinitesimales. Por lo tanto, todo proceso termodinámico es hasta cierto punto irreversible.

Para calcular el cambio de entropía para un proceso irreversible, tomamos ventaja del hecho de que *la entropía es un estado variable*. La diferencia en entropía entre los estados $i$ y $f$ es independiente de la trayectoria que elijamos de $i$ a $f$. Aun cuando la naturaleza puede elegir una trayectoria irreversible entre $i$ y $f$ para el proceso real, nosotros podemos elegir para el cálculo cualquier trayectoria reversible conveniente.

*Para hallar el cambio de entropía para una trayectoria irreversible entre dos estados de equilibrio, debe hallarse el proceso reversible que une a los mismos estados, y calcularse el cambio de entropía usando la ecuación 27.*

Consideremos dos ejemplos.

**1.** *Expansión libre.* Como en la sección 25-6 (véase la figura 14 del capítulo 25), hagamos que un gas ideal duplique su volumen expandiéndose en un espacio vacío. No se efectúa ningún trabajo contra el vacío, de modo que

$W = 0$, y el gas está confinado en un recipiente aislante, por lo que $Q = 0$. De la primera ley, debemos por lo tanto tener $\Delta E_{int} = 0$. Para un gas ideal, cuya energía interna depende únicamente de la temperatura, se deduce que $T_i = T_f$.

La expansión libre es ciertamente irreversible, porque perdemos el control del sistema una vez que hemos abierto la válvula que separa los dos compartimentos. Existe una diferencia de entropía entre los estados inicial y final, pero no podemos calcularlo usando la ecuación 27, que se aplica únicamente a los procesos reversibles. Claramente, la ecuación 27 no debe ser empleada en forma directa, porque la temperatura no está definida para los pasos intermedios no en equilibrio a través de los cuales evoluciona el sistema una vez que el gas comienza a fluir. Además, $Q = 0$, lo cual presenta una dificultad más para emplear la ecuación 27.

Para hallar el cambio de entropía elegimos una trayectoria reversible de $i$ a $f$ para la cual podamos hacer este cálculo. Una elección conveniente es una expansión isotérmica que sufriese un gas ideal del mismo punto inicial $(p_i, V_i, T_i)$ al mismo punto final $(p_f, V_f, T_f)$. Representa un procedimiento muy diferente al de una expansión libre, pero une al mismo par de estados en equilibrio. De la ecuación 27, podemos tener entonces

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_i^f dQ = \frac{Q}{T} = \frac{-W}{T},$$

donde la última etapa puede llevarse a cabo porque $\Delta E_{int} = 0$ en un proceso isotérmico, y por lo tanto $-W = Q$. Usando la ecuación 27 del capítulo 23 para $W$, obtenemos

$$\Delta S = \frac{-W}{T} = nR \ln \frac{V_f}{V_i} = nR \ln 2. \tag{28}$$

Esto es igual al cambio de entropía para la expansión libre irreversible. Nótese que $\Delta S$ es positivo para el sistema.

Puesto que en la expansión libre no existe transferencia de energía de ninguna clase al entorno, el cambio de entropía del entorno es cero. Así, la entropía total del sistema + el entorno aumenta durante una expansión libre.

**2.** *Transferencia de calor irreversible.* La figura 13*a* muestra dos bloques cuyas temperaturas iniciales son $T_1$ y $T_2$. Para simplificar, suponemos que los bloques tienen la misma masa $m$ y el mismo calor específico $c$. Quitamos la barrera aislante que separa a los bloques y los ponemos en contacto térmico, como se muestra en la figura 13*b*. Finalmente, llegan a la temperatura de equilibrio común $T_e$. Al igual que en la expansión libre, este proceso es totalmente irreversible, porque perdemos el control una vez que hayamos colocado a los bloques en contacto térmico entre sí.

Para hallar el cambio de entropía en este proceso irreversible elegimos una vez más una trayectoria reversible

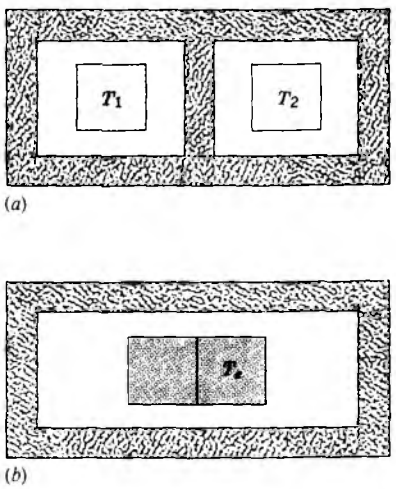



**Figura 13** (*a*) El estado inicial: dos bloques están a temperaturas diferentes en recintos aislados individuales. (*b*) El estado final: la pared aislante entre los bloques se retira, y se permite que lleguen al equilibrio a la temperatura intermedia $T_e$.

que nos conduzca al mismo estado final. Consideremos primero el bloque 1 a la temperatura inicial $T_1$. (Suponemos que ésta es la temperatura inicial más baja.) Imaginemos una serie de depósitos térmicos a las temperaturas $T_1$, $T_1 + dT$, $T_1 + 2dT$, ... , $T_e - dT$, $T_e$. Comenzamos con el bloque 1 en contacto con el primer depósito, y luego lo movemos al siguiente hasta recorrer la secuencia. En cada etapa, entra al bloque una cantidad infinitesimal de calor $dQ$. El proceso es claramente reversible; en cualquier punto podemos mover el bloque de regreso a la etapa más baja anterior, y fluirá la misma cantidad de calor $dQ$ del bloque de regreso hacia el depósito. Cada transferencia reversible de calor $dQ$ puede expresarse como $mc\,dT$, pudiendo entonces emplear la ecuación 27 para hallar el cambio de entropía para el bloque 1:

$$\Delta S_1 = \int_i^f \frac{dQ}{T} = mc \int_{T_1}^{T_e} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_e}{T_1}. \tag{29}$$

De manera similar podemos construir una serie descendente de depósitos para el bloque 2 entre las temperaturas $T_2$ y $T_e$, y hallamos el cambio de entropía para el bloque 2:

$$\Delta S_2 = mc \int_{T_2}^{T_e} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_e}{T_2}. \tag{30}$$

El cambio total de la entropía es

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln \frac{T_e}{T_1} + mc \ln \frac{T_e}{T_2} = mc \ln \frac{T_e^2}{T_1 T_2}. \tag{31}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE

Si $T_1$ es la temperatura más baja, entonces $\Delta S_1 > 0$ y $\Delta S_2 < 0$. Podemos demostrar que el cambio total de entropía $\Delta S$ es siempre positivo, para lo cual necesitamos demostrar que $T_e^2/T_1T_2 > 1$. Hallamos primero la temperatura de equilibrio exigiendo que el calor total transferido sea cero:

$$Q_1 + Q_2 = mc(T_e - T_1) + mc(T_e - T_2) = 0,$$

o sea $T_e = (T_1 + T_2)/2$. Por lo tanto, podemos escribir la cantidad $T_e^2/T_1T_2$ como:

$$\frac{T_e^2}{T_1T_2} = \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2} = \frac{4T_1T_2 + (T_1 - T_2)^2}{4T_1T_2}$$
$$= 1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1T_2}.$$

Claramente, esto es mayor que uno (la última cantidad es siempre positiva), de modo que el logaritmo de la ecuación 31 es mayor que cero, y el cambio de entropía es positivo.

El hecho de colocar a los dos bloques en contacto térmico no produce ningún cambio en absoluto en el entorno, de modo que $\Delta S = 0$ para el entorno. Por lo tanto, la entropía total del sistema + el entorno aumenta en esta transferencia de calor irreversible.

## 26-8 ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY

Ahora estamos listos para expresar la segunda ley en su forma más general en términos de entropía:

*En cualquier proceso termodinámico pasa de un estado de equilibrio a otro, la entropía del sistema + el entorno o bien permanece sin cambio o bien aumenta.*

Para los procesos reversibles, como vimos en la sección 26-6, la entropía permanece sin cambio. Como pudimos ver en el caso del problema muestra 5, el cambio de la entropía del sistema era positivo y el del entorno era negativo y de igual magnitud, así que el total era cero.

Para los procesos irreversibles, (es decir, para todos los procesos naturales), la entropía total del sistema + el entorno debe aumentar. Es posible que la entropía del sistema disminuya, pero la entropía del entorno siempre muestra un aumento de mayor magnitud, de modo que el cambio total en la entropía es siempre positivo. *Ningún proceso natural puede mostrar jamás una disminución en la entropía total del sistema + el entorno.*

Como era el caso para las leyes cero y primera, está implícito en esta forma de la segunda ley un enunciado acerca de la existencia y utilidad de una nueva variable termodinámica, en este caso la entropía.

La segunda ley, al igual que las leyes cero y primera, es una generalización de la experiencia. No puede ser demostrada, pero podemos confirmarla en una variedad de circunstancias. Podemos demostrar que es consistente con la observación, en cuanto que prohíbe procesos que pudieran parecer satisfacer a todas las demás leyes conocidas, pero que no son observados. Consideremos este enunciado de la segunda ley respecto a alguno de los principios que ya hemos establecido en este capítulo.

### Compresión libre

Imaginemos llevar a cabo la expansión libre con una división removible que separe a las dos mitades del recipiente. Cuando quitamos la división, las moléculas del gas que se movían originalmente hacia la derecha en la figura 14 del capítulo 25 no encuentran una división con la cual chocar, y por lo tanto se diseminan en la mitad del recipiente antes vacía, chocando finalmente contra la pared más lejana. Cuando rebotan de esa pared, no todas encuentran su camino de regreso a la otra mitad, porque posiblemente chocan con otras moléculas que encuentran en su camino. Al final, las colisiones tienden a hacer que los movimientos de las moléculas sucedan al azar, y llenen todo el recipiente.

¿Qué nos impide encontrar todas las moléculas de regreso en la mitad del recipiente un tiempo más tarde? Podríamos llamar a este proceso compresión libre, el inverso de la expansión libre. La ecuación 28 muestra que una compresión libre, en la que $V_f < V_i$, tendría un cambio negativo en la entropía del sistema (sin ningún cambio en la entropía del entorno, como en la expansión libre). Esta aseveración de la segunda ley en términos de entropía prohíbe entonces la compresión libre, y por lo tanto es poco probable que podamos hallar a todo el aire precipitándose al lado opuesto del salón en que estamos sentados. (En la siguiente sección damos otra interpretación de este suceso que nunca se presenta.)

### La forma Kelvin-Planck de la segunda ley

A causa de que todas las máquinas operan en ciclos, el cambio de la entropía del sistema (la sustancia de operación) debe ser cero para un ciclo completo de operación. En una máquina perfecta, el entorno (véase la Fig. 3*a*) libera el calor $Q$ a la temperatura $T$, y su cambio de entropía es $Q/T$, una cantidad negativa. Por lo tanto, el cambio total de la entropía del sistema + el entorno es negativo en una máquina perfecta. La existencia de una máquina perfecta violaría entonces el enunciado de la entropía de la segunda ley.

### La forma Clausius de la segunda ley

En un refrigerador perfecto, el sistema nuevamente no tiene un cambio de entropía en un ciclo completo, sino

que el entorno libera el calor $-Q$ a la temperatura $T_L$ y absorbe el calor $Q$ a la temperatura $T_H$. Por lo tanto, el cambio total en la entropía del entorno es

$$\Delta S = \frac{Q}{T_H} - \frac{Q}{T_L} = Q\left(\frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_L}\right).$$

Como $T_H > T_L$, este cambio de entropía es negativo. Entonces, un refrigerador perfecto violaría el enunciado de la entropía de la segunda ley.

## La flecha del tiempo

Es el cambio en la entropía el que nos proporciona en última instancia la respuesta a por qué los sistemas evolucionarán naturalmente en una dirección con el tiempo y no en la otra: los sistemas evolucionan siempre en el tiempo de modo que la entropía total del sistema + el entorno aumenta. Si observamos a un sistema en el que la entropía parece disminuir, podemos estar seguros de que en alguna parte existe un cambio en la entropía del entorno lo suficientemente grande como para hacer positivo el cambio total de la entropía.

**Problema muestra 6** Un trozo de hielo de masa $m_i = 0.012$ kg está inicialmente a la temperatura $T_i = -15°C$. Se le deja caer en un recipiente aislado de capacidad calorífica despreciable que contiene una masa $m_w = 0.056$ kg de agua a la temperatura $T_w = 23°C$. El sistema llega al equilibrio a la temperatura $T_e$. Calcule el cambio total de la entropía del sistema + el entorno. Utilice las capacidades térmicas específicas y el calor de fusión siguientes: $c_i = 2220$ J/kg · K, $c_w = 4190$ J/kg · K, $L = 333$ kJ/kg.

**Solución** Echar el hielo al agua es claramente un proceso irreversible; no se hace en etapas infinitesimales, y no podemos regresar al sistema a su estado original invirtiendo el proceso. Para calcular el cambio en la entropía del sistema, debemos primero hallar la temperatura de equilibrio final. Para hacerlo, suponemos que la temperatura final es mayor de 0°C y que todo el hielo se funde, convirtiéndose finalmente en agua a la temperatura de equilibrio. Más adelante, podemos comprobar si esta hipótesis es consistente. Exigiendo que el calor total transferido entre todos los objetos sea cero, podemos hallar la temperatura de equilibrio:

$$m_i c_i(0°C - T_i) + m_i L + m_i c_w(T_e - 0°C) + m_w c_w(T_e - T_w) = 0,$$

e insertando los valores dados y resolviendo hallamos

$$T_e = 276.6 \text{ K} = 3.5°C.$$

Esto es ciertamente consistente con que todo el hielo se funda. (Si, por otra parte, hubiéramos obtenido una temperatura final de 0°C o más baja, sospecharíamos que nuestra hipótesis original era incorrecta, y cambiaríamos la solución en consecuencia.)

Ahora podemos hallar los cambio en la entropía. Primero para el hielo, separamos el procedimiento en tres etapas: el calentamiento del hielo a 0°C, la fusión del hielo, y por último el calentamiento del agua resultante a $T_e$. Usamos la ecuación 29 para el cambio de entropía (reversible) asociado con un cambio en la temperatura y usamos el resultado del problema muestra 5 para el cambio de la entropía en la fusión. El resultado del cambio de entropía $\Delta S_i$ para el hielo es

$$\begin{aligned}\Delta S_i &= m_i c_i \ln\frac{273 \text{ K}}{T_i} + \frac{m_i L}{273 \text{ K}} + m_i c_w \ln\frac{T_e}{273 \text{ K}} \\ &= (0.012 \text{ kg})(2220 \text{ J/kg·K}) \ln\frac{273 \text{ K}}{258 \text{ K}} \\ &\quad + \frac{(0.012 \text{ kg})(333 \text{ kJ/kg})}{273 \text{ K}} \\ &\quad + (0.012 \text{ kg})(4190 \text{ J/kg·K}) \ln\frac{276.6 \text{ K}}{273 \text{ K}} \\ &= 16.7 \text{ J/K}.\end{aligned}$$

Para el agua, obtenemos similarmente su cambio de entropía (reversible):

$$\begin{aligned}\Delta S_w &= m_w c_w \ln\frac{T_e}{T_w} = (0.056 \text{ kg})(4190 \text{ J/kg·K}) \ln\frac{276.6 \text{ K}}{296 \text{ K}} \\ &= -15.9 \text{ J/K}.\end{aligned}$$

El cambio de entropía del entorno es cero, puesto que todo el procedimiento tiene lugar en un recipiente aislado. El cambio total de la entropía del sistema más el entorno es, por lo tanto:

$$\Delta S = \Delta S_i + \Delta S_w = 16.7 \text{ J/K} + (-15.9 \text{ J/K}) = 0.8 \text{ J/K},$$

y éste es claramente positivo, como lo exige la segunda ley.

## 26-9 ENTROPÍA Y PROBABILIDAD

La entropía es una variable macroscópica, asociada con el estado general de un sistema y calculable a partir de cantidades macroscópicas asociadas con su estado general. Hemos visto que todas las variables macroscópicas en la termodinámica tienen una cantidad microscópica correspondiente (como temperatura, una cantidad macroscópica, y energía cinética molecular media, una cantidad microscópica). Si hacemos ciertas suposiciones respecto a las propiedades microscópicas del sistema, usualmente podemos hallar una manera de relacionar las cantidades macroscópicas y microscópicas. En el caso de la temperatura de un gas, estas suposiciones incluyen un modelo mecánico de las moléculas y sus interacciones, junto con una distribución estadística de las energías moleculares. Por lo tanto, nos gustaría considerar el cálculo microscópico de la entropía de un sistema.

*La cantidad microscópica relacionada con la entropía es la probabilidad relativa de diferentes maneras de distribuir las moléculas del sistema.* Consideremos primeramente algunas aplicaciones cualitativas de esta relación:

**1.** *Expansión libre.* En una expansión libre se permite que las moléculas de gas confinadas a una mitad de una

caja llenen toda la ésta. Consideremos a toda la caja en sus dos circunstancias: primero, en el instante en que la división se retira y todas las moléculas ocupan una mitad de la caja, y segundo, cuando las moléculas llenan toda la caja. La primera condición es un estado de probabilidad muy baja; dejado en libertad, sería muy poco probable que el sistema se distribuyera por sí mismo de esta manera. La segunda condición es más bien de alta probabilidad. Podemos considerar que las moléculas en expansión libre se mueven de una condición de probabilidad baja a otra de probabilidad alta. Es decir, dadas todas las maneras posibles de distribuir las moléculas al azar dentro de la caja, un gran número de esas maneras posibles muestra una distribución más bien uniforme de las moléculas, mientras que un número muy pequeño muestra una distribución no uniforme. Por ejemplo, consideremos una caja con 10 moléculas únicamente y evaluemos el número de maneras en que un número $n$ determinado se encuentra en la mitad izquierda de la caja en cualquier instante. Puesto que, en este esquema, cada molécula tiene dos ubicaciones posibles en la caja (mitad izquierda o mitad derecha), el número total de maneras en que podemos distribuir a las moléculas, con dos alternativas para cada una, es $2^{10} = 1024$. De estas 1024 maneras, en sólo una hallaremos a todas las moléculas en la mitad izquierda ($n = 10$), mientras que puede demostrarse que existen 252 maneras de tener una distribución uniforme ($n = 5$). Al aumentar el número de moléculas, la probabilidad relativa de una distribución uniforme aumenta de manera muy acusada. Con 100 moléculas existe todavía una sola manera de distribuirlas a todas en la mitad izquierda, pero existen unas $10^{29}$ maneras de distribuirlas igualmente entre las dos mitades. La expansión libre, en la cual existe un aumento en entropía, puede ser entonces considerada microscópicamente como una transformación de un estado de muy baja probabilidad a un estado de muy alta probabilidad.

**2.** *Conducción de calor.* En este ejemplo dos cuerpos de temperaturas diferentes $T_1$ y $T_2$ alcanzan una temperatura intermedia uniforme $T_e$ cuando entran en contacto. Este caso es similar a la expansión libre, excepto que hacemos la distribución por velocidad en lugar de hacerlo por posición. De nuevo, consideraremos a todo el sistema en dos circunstancias: justo después del contacto, con las moléculas "calientes" (las que se mueven más rápidamente) en un lado y las moléculas "frías" (que se mueven más despacio) en el otro, y mucho después, cuando la distribución de las velocidades entre las dos mitades es uniforme. Una vez más, la distribución separada (moléculas rápidas en un lado, moléculas lentas en el otro) es un estado de baja probabilidad y la distribución uniforme es un estado de alta probabilidad. Al entrar en contacto, el sistema evoluciona espontáneamente de un estado de baja probabilidad a otro de alta probabilidad.

**3.** *Una taza de café revuelto.* Supongamos que meneamos una taza de café y luego retiramos la cucharilla. Con el tiempo, la circulación del líquido cesa, y la viscosidad hace que la energía del fluido en rotación se disipe como energía interna de las moléculas. En el estado inicial, existe un movimiento ordenado del café en rotación. En el estado de equilibrio final existe un movimiento molecular al azar. Una vez más, la circulación ordenada de las moléculas es un estado de baja probabilidad, mientras que el movimiento desordenado al azar es un estado de alta probabilidad. En este proceso natural, el sistema ha pasado de un estado de baja probabilidad a un estado de alta probabilidad.

En los tres casos anteriores, el sistema ha pasado espontáneamente de un estado de baja probabilidad a otro de alta probabilidad. Las tres situaciones son procesos naturales irreversibles que se caracterizan por un aumento en la entropía del sistema. Por lo tanto, es razonable concluir que existe una relación cuantitativa entre la probabilidad y la entropía. Esta relación, que fue propuesta por Boltzmann, es

$$S = k \ln P. \tag{32}$$

Aquí $k$ es la constante de Boltzmann, y $S$ es la entropía del sistema. $P$, para definirla vagamente, es el número de ordenamientos moleculares diferentes que corresponden al mismo estado macroscópico. Si, por ejemplo, las circunstancias son tan especiales que únicamente es posible un ordenamiento, entonces $P = 1$ y $S (= k \ln P) = 0$, y tenemos un estado completamente ordenado. Los valores de $P$ más grandes, como el que corresponde a la distribución más uniforme de las moléculas en el recipiente, dan valores de entropía más grandes. Cuando decimos que el estado $A$ de un sistema es más probable que el estado $B$, queremos decir simplemente que el estado $A$ tiene el valor de $P$ más grande.

Se ha dicho también que un aumento en la entropía es una medida del aumento en el desorden de un sistema, y entonces la entropía es, en efecto, una medida del desorden. El término "desorden" no tiene una definición matemática precisa, sino que se relaciona cualitativamente con la probabilidad. Un estado de desorden bajo es un estado en el que las componentes de un sistema han sido distribuidas cuidadosamente, como colocando a todas las moléculas con velocidades bajas en una parte de un sistema. Un estado de desorden alto es un estado al azar en el que no ha ocurrido ninguna distribución. El aumento en la entropía de un sistema en los procesos naturales puede entonces considerarse también como un aumento en el nivel de desorden del sistema. Los procesos naturales tienden a hacer al universo más desordenado.*

* Para una relación de intentos de violar la segunda ley, incluyendo al diablo de Maxwell y un diseño de una máquina térmica perfecta en la que la sustancia de operación es una molécula de un gas, véase, "Demons, Engines, and the Second Law", por Charles H. Bennet, *Scientific American*, noviembre de 1987, pág. 108.

La segunda ley de la termodinámica nos dice que, si un sistema aislado experimenta un proceso espontáneo, su estado final será uno en el que la entropía (y también $P$) es máxima. Existe siempre (en principio) la posibilidad de que, debido a una fluctuación estadística, pueda ocurrir algún otro estado, incluso un estado cuya entropía sea más baja que la del estado inicial. En sistemas con un número de partículas muy pequeño, tales fluctuaciones del comportamiento promedio existen, en efecto, siendo un buen ejemplo el movimiento browniano (sección 24-5). En sistemas macroscópicos, sin embargo, la probabilidad de que la entropía crezca realmente en un proceso espontáneo resulta ser increíblemente pequeña. Entonces, podemos predecir con completa seguridad que (1) las moléculas del aire del salón *no* se agruparán espontáneamente en un lado, (2) un vaso de agua a la temperatura ambiente no se separará espontáneamente en cubos de hielo y agua más templada, y (3) el café no comenzará a girar espontáneamente en la taza. Cada uno de estos procesos puede conservar energía, siendo entonces consistente con la primera ley. Sin embargo, no podremos observarlos, ¡aunque nos quedemos esperando un tiempo tan largo como la edad actual del universo! Se ha dicho que los cálculos de las probabilidades de tales eventos le dan un significado operativo a la palabra "nunca". El área de aplicación de la segunda ley de la termodinámica es tan amplia y la posibilidad de que la naturaleza la contradiga es tan pequeña que cuenta con la distinción de ser una de las leyes más útiles y generales de toda la ciencia.

## PREGUNTAS

1. ¿Es el ser humano una máquina térmica? Explique.
2. ¿No podríamos igualmente definir la eficiencia de una máquina como $e = |W|/|Q_{out}|$ en lugar de $e = |W|/|Q_{in}|$? ¿Por qué no podemos?
3. Las eficiencias de las plantas de potencia nuclear son menores que las de las plantas de combustibles fósiles. ¿Por qué?
4. ¿Puede una cantidad dada de energía mecánica ser convertida completamente en energía térmica? De ser así, dé un ejemplo.
5. Un inventor sugirió que una casa podría calentarse de la manera siguiente. Un sistema que se asemeje a un refrigerador extrae calor de la Tierra y lo descarga en la casa. El inventor afirmó que el calor abastecido a la casa podía sobrepasar al trabajo efectuado por la máquina del sistema. ¿Usted qué opina?
6. Comente la aseveración: "Una máquina térmica convierte movimiento mecánico desordenado en movimiento mecánico organizado".
7. ¿Es posible el concepto de que una máquina térmica opere entre el agua de la superficie templada de un mar tropical y el agua más fría bajo la superficie? ¿Es práctica la idea? (Véase "Solar Sea Power", por Clarence Zener, *Physics Today*, enero de 1973, pág. 48).
8. Dé una explicación cualitativa de cómo producen energía interna las fuerzas de fricción entre superficies móviles. ¿Por qué no ocurre el procedimiento inverso (que la energía interna produzca un movimiento relativo de esas superficies)?
9. ¿Son reversibles alguno de los fenómenos siguientes: (*a*) la rotura de una botella de refresco vacía; (*b*) el mezclado de un coctel; (*c*) dar cuerda a un reloj; (*d*) fundir un cubo de hielo en un vaso de té helado; (*e*) quemar un leño; (*f*) ponchar una llanta de automóvil; (*g*) calentar eléctricamente un bloque de metal con aislamiento; (*h*) expandir isotérmicamente un gas no ideal contra un émbolo; (*i*) terminar la "Sinfonía Inconclusa"; (*j*) escribir este libro?
10. Dé algunos ejemplos de procesos irreversibles en la naturaleza.
11. ¿Existen procesos naturales que sean reversibles?
12. ¿Podemos calcular el trabajo efectuado durante un proceso irreversible en términos de un área en un diagrama $pV$? ¿Se efectúa algún trabajo?
13. Si una máquina Carnot es independiente de la sustancia de operación, entonces las máquinas reales serían similarmente independientes, hasta un cierto punto. Entonces, ¿por qué para las máquinas reales nos preocupa tanto hallar combustibles apropiados como el carbón, la gasolina, o un material fisionable? ¿Por qué no usar piedras como combustible?
14. ¿En qué condiciones sería una máquina térmica ideal 100% eficiente?
15. ¿Qué factores reducen la eficiencia de una máquina térmica de su valor ideal?
16. Se desea incrementar la eficiencia de una máquina Carnot tanto como sea posible. Podemos hacerlo aumentando $T_H$ a cierta cantidad, manteniendo a $T_L$ constante, o disminuyendo $T_L$ en la misma cantidad y manteniendo a $T_H$ constante. ¿Cuál elegiría usted?
17. Explique por qué una habitación puede calentarse dejando abierta la puerta de un horno, pero no puede enfriarse dejando abierta la puerta de un refrigerador de cocina.
18. ¿Por qué obtenemos menos kilometraje de la gasolina de nuestro automóvil en invierno que en verano?
19. De vez en cuando los inventores pretenden haber perfeccionado un aparato que efectúe un trabajo útil pero que no consuma combustible (o muy poco). ¿Qué piensa usted que es lo más verosímil en tales casos: (*a*) los inventores tienen razón, (*b*) los inventores están equivocados en sus mediciones, o (*c*) los inventores son unos charlatanes?

¿Piensa usted que tal pretensión debería ser examinada a fondo por una mesa de científicos e ingenieros? En su opinión, ¿se justificaría el tiempo y el esfuerzo?

**20.** Hemos visto que las máquinas reales desechan siempre cantidades sustanciales de calor a sus depósitos de baja temperatura. Parece vergonzoso desperdiciar esta energía calorífica. ¿Por qué no usar este calor para mover una segunda máquina, sirviendo el depósito de baja temperatura de la primera máquina como depósito de alta temperatura de la segunda?

**21.** Dé ejemplos en los que la entropía de un sistema disminuye y explique por qué no se viola la segunda ley de la termodinámica.

**22.** ¿Violan los seres vivos la segunda ley de la termodinámica? Por ejemplo, cuando un pollito sale de un huevo se vuelve cada vez más ordenado y organizado. Sin embargo, el aumento de la entropía requiere desorden y decadencia. ¿Está disminuyendo realmente la entropía del pollito mientras crece?

**23.** Dos recipientes de gases a diferentes temperaturas están aislados del entorno y separados entre sí por una división que permite un intercambio de calor. ¿Qué tendría que pasar si la entropía fuese a disminuir? ¿A aumentar? ¿Qué es más probable que pase?

**24.** ¿Existe un cambio de entropía en los movimientos mecánicos puros?

**25.** Demuestre que la entropía total crece cuando el trabajo se convierte en calor por la fricción entre superficies deslizantes. Describa el aumento de desorden.

**26.** Del Sol a la Tierra fluye energía calorífica. Demuestre que la entropía del sistema Tierra-Sol aumenta durante este proceso.

**27.** ¿Es cierto que la energía calorífica del universo está siendo poco a poco cada vez menos disponible? De ser así, ¿por qué?

**28.** Considere una caja que contiene un número de moléculas muy pequeño, digamos cinco. Puede suceder a veces, por azar, que todas estas moléculas se hallen en la mitad izquierda de la caja, estando completamente vacía la mitad derecha. Esto es precisamente el inverso de la expansión libre, un proceso que hemos declarado ser *irreversible*. ¿Cuál es su explicación?

**29.** Una banda de hule se siente más caliente que su entorno inmediatamente después de haber sido estirada con rapidez; resulta marcadamente más fría cuando se deja que se contraiga súbitamente. También, una banda de hule que soporte una carga se contrae al calentarse. Explique estas observaciones usando el hecho de que las moléculas de hule constan de cadenas largas de átomos entrelazados y estrechamente unidos con una orientación al azar.

**30.** ¿Qué cambio en la entropía ocurre, en caso de que suceda, cuando los 52 naipes de una baraja quedan barajados de un modo particular? ¿Es apropiado en este caso el concepto de entropía? De ser así, explique cómo podría uno obtener un enfriamiento útil llevando a cabo este proceso adiabáticamente.

**31.** Comente la siguiente opinión de Panofsky y Phillips: "Desde el punto de vista de la física formal existe únicamente un concepto que es asimétrico en el tiempo, a saber, la entropía. Pero esto hace que sea razonable suponer que la segunda ley de la termodinámica puede ser empleada para cerciorarse del sentido del tiempo de manera independiente de cualquier marco de referencia; es decir, tomaremos como dirección positiva del tiempo aquella que sea de un desorden estadísticamente creciente, o de entropía creciente." (Véase, a este respecto, "The Arrow of Time", por David Layzer, *Scientific American*, diciembre de 1975, pág. 56.)

**32.** Explique la frase: "Los rayos cósmicos *disminuyen* continuamente la entropía de la Tierra sobre la que inciden." ¿Por qué no contradice esto a la segunda ley de la termodinámica?

**33.** Cuando ponemos naipes juntos en una baraja o ladrillos juntos para construir una casa, por ejemplo, aumentamos el orden del mundo físico. ¿Viola esto la segunda ley de la termodinámica? Explique.

**34.** ¿Podemos emplear la termodinámica terrestre, que se sabe se aplica a cuerpos circunscritos y aislados, para todo el universo? De ser así, ¿está el universo limitado y de qué está aislado el universo?

**35.** La temperatura y la presión son ejemplos de propiedades *intensivas* de un sistema, siendo sus valores para cualquier muestra del sistema independientes del tamaño de la muestra. Sin embargo, la entropía, al igual que la energía interna, es una propiedad *extensiva*, siendo su valor para cualquier muestra de un sistema proporcional al tamaño de la muestra. Comente.

**36.** La primera, segunda, y tercera leyes de la termodinámica pueden parafrasearse, respectivamente, como sigue: (1) Uno no puede ganar. (2) Ni siquiera puede uno empatar. (3) Uno no puede salirse del juego. Explique en qué sentido son permisibles estas frases comparativas.

## PROBLEMAS

*Sección 26-2 Máquinas térmicas y la segunda ley*

**1.** Una máquina térmica absorbe 52.4 kJ de calor y descarga 36.2 kJ de calor en cada ciclo. Calcule (*a*) la eficiencia y (*b*) el trabajo efectuado por la máquina por ciclo.

**2.** Un motor de automóvil desarrolla 8.18 kJ de trabajo por ciclo. (*a*) Antes de una afinación, la eficiencia es del 25.0%. Calcule, por ciclo, el calor absorbido de la combustión del combustible y el calor descargado a la atmósfera. (*b*) Después de una afinación, la eficiencia es del 31.0%. ¿Cuáles son los nuevos valores de las cantidades calculadas en (*a*)?

**3.** Calcule la eficiencia de una planta de potencia por combustible fósil que consume 382 toneladas métricas de car-

bón cada hora para producir trabajo útil a razón de 755 MW. El calor de combustión del carbón es de 28.0 MJ/kg.

4. Dos moles de un gas ideal monoatómico se hacen pasar por el ciclo mostrado en la figura 14. El proceso *bc* es una expansión adiabática reversible. También, $p_b$ = 10.4 atm, $V_b$ = 1.22 m³, y $V_c$ = 9.13 m³. Calcule (*a*) el calor añadido al gas, (*b*) el calor que sale del gas, (*c*) el trabajo neto efectuado por el gas, y (*d*) la eficiencia del ciclo.

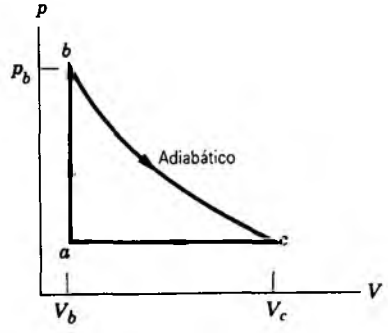



**Figura 14** Problema 4.

5. Un mol de un gas monoatómico ideal inicialmente a un volumen de 10 L y una temperatura de 300 K se calienta a volumen constante a la temperatura de 600 K, se deja expandir isotérmicamente a su presión inicial, y finalmente se comprime isobáricamente (es decir, a presión constante) a su volumen, presión, y temperatura originales. (*a*) Calcule la entrada de calor al sistema durante un ciclo. (*b*) ¿Cuál es el trabajo neto efectuado por el gas durante un ciclo? (*c*) ¿Cuál es la eficiencia de este ciclo?
6. Un motor de combustión interna de gasolina puede ser aproximado por el ciclo mostrado en la figura 15. Suponga un gas diatómico ideal y use una relación de compresión de 4:1 ($V_d = 4V_a$). Suponga que $p_b = 3p_a$. (*a*) Determine la presión y la temperatura en cada uno de los vértices del diagrama *pV* en términos de $p_a$ y de $T_a$. (*b*) Calcule la eficiencia del ciclo.
7. La máquina *A*, comparada con la máquina *B*, produce, por ciclo, cinco veces el trabajo pero recibe el triple y descarga el doble de calor. Determine la eficiencia de cada máquina.

### *Sección 26-3 Refrigeradores y la segunda ley*

8. Un refrigerador efectúa 153 J de trabajo para transferir 568 J de calor desde su compartimento frío. (*a*) Calcule el coeficiente de rendimiento del refrigerador. (*b*) ¿Cuánto calor es descargado a la cocina?
9. Para hacer hielo, un congelador extrae 185 kJ de calor a -12.0°C. El congelador tiene un coeficiente de rendimiento de 5.70. La temperatura ambiente es 26.0°C. (*a*) ¿Cuánto calor fue abastecido a la habitación? (*b*) ¿Cuánto trabajo se requirió para hacer funcionar el congelador?

### *Sección 26-4 El ciclo de Carnot*

10. Cuánto trabajo debe efectuarse para extraer 10.0 J de calor (*a*) de un depósito a 7°C y transferirlo a otro a 27°C por medio de un refrigerador usando un ciclo de Carnot; (*b*) de uno a -73°C a otro a 27°C; (*c*) de uno a -173°C a otro a 27°C; y (*d*) de uno a -223°C a otro a 27°C?

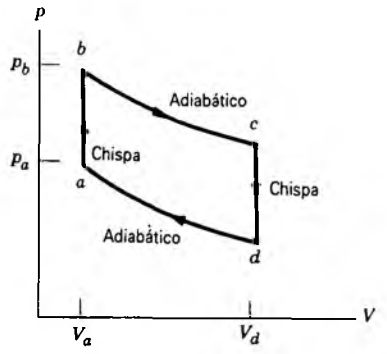



**Figura 15** Problema 6.

11. En un ciclo de Carnot, la expansión isotérmica de un gas ideal tiene lugar a 412 K y la compresión isotérmica a 297 K. Durante la expansión se transfieren al gas 2090 J de energía calorífica. Determine (*a*) el trabajo llevado a cabo por el gas durante la expansión isotérmica, (*b*) el calor rechazado por el gas durante la compresión isotérmica, y (*c*) el trabajo efectuado sobre el gas durante la compresión isotérmica.
12. Una máquina de Carnot tiene una eficiencia de 22%. Opera entre depósitos de calor cuya temperatura difiere en 75°C. Halle las temperaturas de los depósitos.
13. Para el ciclo de Carnot ilustrado en la figura 7, demuestre que el trabajo efectuado por el gas durante el proceso *bc* (etapa 2) tiene el mismo valor absoluto que el trabajo efectuado sobre el gas durante el proceso *da* (etapa 4).
14. Un aparato que licua helio está en un laboratorio a 296 K. El helio en el aparato está a 4.0 K. Si se transfieren 150 mJ de calor del helio, halle la cantidad mínima de calor abastecido al laboratorio.
15. Un acondicionador de aire toma aire de una habitación a 70°F y lo transfiere al exterior, el cual está a 95°F. ¿Cuántos joules de calor se transfieren de la habitación por cada joule de energía eléctrica necesaria para hacer funcionar al refrigerador?
16. Un inventor pretende haber creado una bomba de calor que extrae calor de un lago a 3.0°C y abastece calor a razón de 20 kW a un edificio a 35°C, empleando únicamente 1.9 kW de potencia eléctrica. ¿Cómo juzga usted esta pretensión?
17. (*a*) Una máquina Carnot opera entre un depósito caliente a 322 K y un depósito frío a 258 K. Si absorbe 568 J de calor por ciclo del depósito caliente, ¿cuánto trabajo por ciclo abastece? (*b*) Si la misma máquina, trabajando en sentido inverso, funciona como un refrigerador entre los mismos dos depósitos, ¿cuánto trabajo por ciclo debe ser suministrado para transferir 1230 J de calor del depósito frío?
18. Se usa una bomba de calor para calentar un edificio. La temperatura del exterior es de -5.0°C y la temperatura dentro del edificio debe mantenerse a 22°C. El coeficiente

de rendimiento es 3.8, y la bomba suministra 7.6 MJ de calor al edificio cada hora. ¿A qué razón debe efectuarse trabajo para hacer funcionar la bomba?

**19.** Si un ciclo de Carnot se recorre en sentido inverso, tenemos un refrigerador ideal. Se absorbe una cantidad de calor $|Q_L|$ a la temperatura $T_L$ más baja y se suministra una cantidad de calor $|Q_H|$ a la temperatura $T_H$ más alta. La diferencia es el trabajo $W$ que debe ser abastecido para hacer funcionar al refrigerador. (*a*) Demuestre que

$$|W| = |Q_L| \frac{T_H - T_L}{T_L}.$$

(*b*) El coeficiente de rendimiento $K$ de un refrigerador se define como la razón del calor extraído de la fuente fría al trabajo necesario para hacer funcionar al refrigerador. Demuestre que, idealmente,

$$K = \frac{T_L}{T_H - T_L}.$$

(*c*) En un refrigerador mecánico el serpentín de baja temperatura está a una temperatura de -13°C y el gas comprimido en el condensador tiene una temperatura de 25°C. Halle el coeficiente teórico de rendimiento.

**20.** El motor de un refrigerador tiene una potencia de salida de 210 W. El compartimiento de congelar está a -3.0°C y el aire exterior está a 26°C. Suponiendo que la eficiencia sea el 85% de la ideal, calcule la cantidad de calor que puede ser extraído del compartimiento de congelar en 15 min.

**21.** Demuestre que la eficiencia de una máquina térmica reversible ideal se relaciona con el coeficiente de rendimiento del refrigerador reversible obtenido al hacer marchar el motor en reversa según la relación $e = 1/(K + 1)$.

**22.** (*a*) En una máquina térmica de Carnot de dos tiempos, se absorbe una cantidad de calor $|Q_1|$ a una temperatura $T_1$, se efectúa un trabajo $|W_1|$, y se descarga una cantidad de calor $|Q_2|$ a una temperatura más baja $T_2$ durante el primer tiempo. El segundo tiempo absorbe el calor cargado por el primero, efectúa el trabajo $|W_2|$, y descarga una cantidad de calor $|Q_3|$ a la temperatura $T_3$ más baja. Demuestre que la eficiencia de la combinación es $(T_1 - T_3)/T_1$. (*b*) Una combinación mercurio-turbina de vapor aspira vapor de mercurio saturado de una caldera a 469°C y lo descarga para calentar una caldera de vapor a 238°C. La turbina de vapor recibe el vapor a esta temperatura y lo descarga a un condensador a 37.8°C. Calcule la eficiencia máxima de la combinación.

**23.** Una máquina de Carnot trabaja entre las temperaturas $T_1$ y $T_2$. Impulsa a un refrigerador de Carnot que trabaja entre dos temperaturas diferentes $T_3$ y $T_4$ (véase la Fig. 16). Halle la razón $|Q_3|/|Q_1|$ en términos de las cuatro temperaturas.

**24.** Un inventor pretende haber inventado cuatro máquinas, cada una de las cuales opera entre depósitos de calor a 400 y 300 K. Los datos de cada máquina, por ciclo de operación, son como sigue: Máquina *A*: $Q_{in}$ = 200 J, $Q_{out}$ = -175 J, $W$ = 40 J; máquina *B*: $Q_{in}$ = 500 J, $Q_{out}$ = -200 J, $W$ = 400 J; máquina *C*: $Q_{in}$ = 600 J, $Q_{out}$ = -200 J, $W$ = 400 J; máquina *D*: $Q_{in}$ = 100 J, $Q_{out}$ = -90 J, $W$ = 10 J. ¿Qué ley, de la termodinámica la primera o la segunda viola cada máquina?

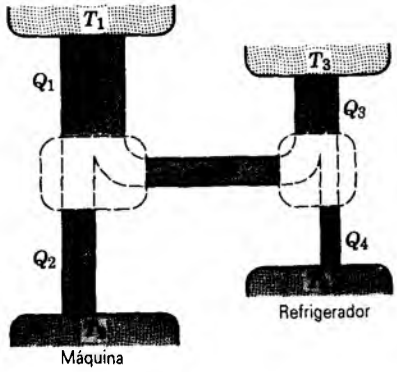



**Figura 16** Problema 23.

**25.** En una locomotora de vapor, entra a los cilindros vapor a una presión de caldera de 16.0 atm, se expande adiabáticamente a 5.60 veces su volumen original, y luego escapa a la atmósfera. Calcule (*a*) la presión del vapor después de la expansión y (*b*) la mayor eficiencia posible de la máquina.

**26.** (*a*) Trace con precisión un ciclo de Carnot en un diagrama $pV$ para un mol de un gas ideal. El punto *a* (véase la Fig. 7) corresponde a $p$ = 1.00 atm, $T$ = 300 K, y el punto *b* corresponde a 0.500 atm, $T$ = 300 K; considere que el depósito de baja temperatura está a 100 K. Sea $\gamma$ = 1.67. (*b*) Calcule gráficamente el trabajo efectuado en este ciclo. (*c*) Calcule el trabajo analíticamente.

**27.** Un mol de un gas monoatómico ideal se emplea como la sustancia en una máquina que opera según el ciclo mostrado en la figura 17. Calcule (*a*) el trabajo efectuado por la máquina por ciclo, (*b*) el calor añadido por ciclo durante la carrera de expansión *abc*, y (*c*) la eficiencia de la máquina. (*d*) ¿Cuál es la eficiencia Carnot de una máquina que opera entre las temperaturas más alta y más baja presentes en el ciclo? ¿Cómo se compara ésta con la eficiencia calculada en (*c*)? Suponga que $p_1 = 2p_0$, $V_1 = 2V_0$, $p_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa, y $V_0 = 0.0225$ m³.

### *Sección 26-6 Entropía: procesos reversibles*

**28.** En la figura 12*c*, supongamos que el cambio en la entropía del sistema al pasar del estado *a* al estado *b* a lo largo de

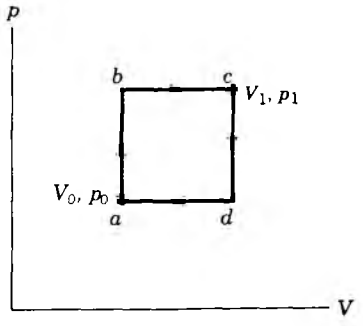



**Figura 17** Problema 27.

la trayectoria 1 es +0.60 J/K. ¿Cuál es el cambio de la entropía al pasar (*a*) del estado *a* al estado *b* a lo largo de la trayectoria 2 y (*b*) del estado *b* al estado *a* a lo largo de la trayectoria 2?

**29.** Un gas ideal experimenta una expansión isotérmica reversible a 132°C. La entropía del gas aumenta en 46.2 J/K. ¿Cuánto calor fue absorbido?

**30.** Se hace que cuatro moles de un gas ideal se expandan de un volumen $V_1$ a un volumen $V_2 = 3.45V$. (*a*) Si la expansión es isotérmica a la temperatura $T = 410$ K, halle el trabajo efectuado sobre el gas al expandirse. (*b*) Halle el cambio en la entropía, de haber alguno. (*c*) Si la expansión fuese reversiblemente adiabática en lugar de isotérmica, ¿cuál es el cambio en la entropía?

**31.** (*a*) Demuestre que un ciclo de Carnot, graficado sobre un diagrama de temperatura versus contra entropía (*TS*), es un rectángulo. Para el ciclo de Carnot mostrado en la figura 18, calcule (*b*) el calor que entra y (*c*) el trabajo efectuado sobre el sistema.

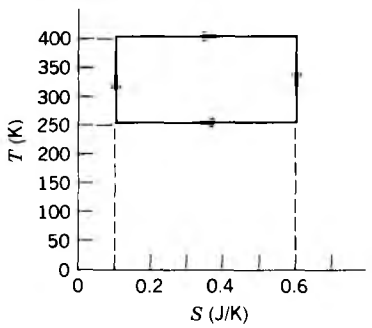



**Figura 18** Problema 31.

**32.** Halle (*a*) el calor absorbido y (*b*) el cambio en entropía de un bloque de cobre de 1.22 kg cuya temperatura aumenta reversiblemente de 25.0 hasta 105°C.

**33.** A temperaturas muy bajas, el calor específico molar de muchos sólidos es (aproximadamente) proporcional a $T^3$; es decir, $C_V = AT^3$, donde $A$ depende de la sustancia en particular. Para el aluminio, $A = 3.15 \times 10^{-5}$ J/mol · K$^4$. Halle el cambio de entropía de 4.8 mol de aluminio cuando su temperatura se eleva de 5.0 a 10 K.

**34.** Puede transferirse calor del agua a 0°C, a la presión atmosférica, sin provocar que el agua se congele, si se hace con poca agitación del agua. Suponga que el agua se enfría a -5.0°C antes de que el hielo comience a formarse. Halle el cambio en entropía que ocurre durante la congelación súbita de 1.0 g de agua que tiene lugar entonces.

**35.** Un objeto de capacidad calorífica constante $C$ se calienta de una temperatura inicial $T_i$ a una temperatura final $T_f$ al ponerse en contacto con un depósito a $T_f$. Represente el proceso en una gráfica de $C/T$ contra $T$ y demuestre gráficamente que el cambio total $\Delta S$ en la entropía (objeto + depósito) es positivo y (*b*) demuestre cómo el uso de depósitos a temperaturas intermedias permite que el proceso se lleve a cabo de una manera que haga a $\Delta S$ tan pequeña como se desee.

**36.** Se hace que un mol de un gas monoatómico ideal recorra el ciclo mostrado en la figura 19. (*a*) ¿Cuánto trabajo se efectúa sobre el gas al expandirlo de *a* a *c* a lo largo de la trayectoria *abc*? (*b*) ¿Cuál es el cambio en la energía interna y en la entropía al pasar de *b* a *c*? (*c*) ¿Cuál es el cambio en la energía interna y en la entropía al pasar por un ciclo completo? Exprese todas las respuestas en términos de la presión $p_0$ y del volumen $V_0$ en el punto *a* del diagrama.

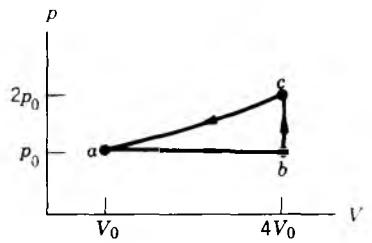



**Figura 19** Problema 36.

### *Sección 26-7 Entropía: procesos irreversibles*

**37.** Un gas ideal experimenta una expansión isotérmica a 77°C, aumentando su volumen de 1.3 a 3.4 L. El cambio de entropía del gas es de 24 J/K. ¿Cuántos moles de gas están presentes?

**38.** Suponga que se trasfiere la misma cantidad de energía calorífica, digamos 260 J, por conducción de un depósito térmico a una temperatura de 400 K a otro depósito, cuya temperatura es (*a*) 100 K; (*b*) 200 K; (*c*) 300 K, y (*d*) 360 K. Calcule los cambios en la entropía y explique la tendencia.

**39.** Una barra de latón está en contacto térmico con un depósito de calor a 130°C en un extremo y un depósito de calor a 24.0°C en el otro extremo. (*a*) Calcule el cambio total en la entropía que surge del proceso de conducción de 1200 J de calor a través de la barra. (*b*) ¿Cambia la entropía de la barra durante el proceso?

**40.** Se hace que un mol de un gas diatómico ideal recorra el ciclo mostrado en el diagrama *pV* de la figura 20 donde $V_2 = 3V_1$. Determine, en términos de $p_1$, $V_1$, $T_1$, y $R$: (*a*) $p_2$, $p_3$, y $T_3$ y (*b*) $W$, $Q$, $\Delta E_{int}$, y $\Delta S$ para los tres procesos.

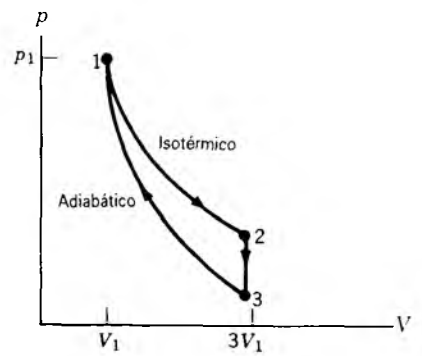



**Figura 20** Problema 40.

**41.** Un mol de un gas monoatómico ideal es llevado de un estado inicial de presión $p_0$ y volumen $V_0$ a un estado final de presión $2p_0$ y volumen $2V_0$ por dos procesos diferentes. (I) Se expande isotérmicamente hasta que su volumen se duplica, y luego se aumenta su presión a volumen constante hasta el estado final. ( II ) Se le comprime isotérmicamente hasta que su presión se duplica, y luego se aumenta su volumen a presión constante hasta el estado final. Muestre la trayectoria de cada proceso en un diagrama $pV$. Calcule para cada proceso, en términos de $p_0$ y de $V_0$: (*a*) el calor absorbido por el gas en cada parte del proceso; (*b*) el trabajo efectuado sobre el gas en cada parte del proceso; (*c*) el cambio en la energía interna del gas, $E_{\text{int,f}} - E_{\text{int,i}}$; y (*d*) el cambio en la entropía del gas, $S_f - S_i$.

***Sección 26-8 Entropía y la segunda ley***

**42.** Un bloque de cobre de 50.0 g que tiene una temperatura de 400 K se sitúa en una caja aislante con un bloque de plomo de 100 g que tiene una temperatura de 200 K. (*a*) ¿Cuál es la temperatura de equilibrio de este sistema de dos bloques? (*b*) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del sistema de los dos bloques al cambiar de la condición inicial a la condición de equilibrio? (*c*) ¿Cuál es el cambio en la entropía del sistema de los dos bloques? (Véase la tabla 1 en el capítulo 25.)

**43.** Una mezcla de 1.78 kg de agua y 262 g de hielo a 0°C se lleva, en un proceso reversible, a un estado final de equilibrio donde la relación agua/hielo, por masa, es de 1:1 a 0°C. (*a*) Calcule el cambio de entropía del sistema durante el proceso. (*b*) El sistema es luego regresado al primer estado de equilibrio, pero de un modo irreversible (haciendo uso de un quemador Bunsen, por ejemplo). Calcule el cambio de entropía del sistema durante este proceso. (*c*) Demuestre que su respuesta es consistente con la segunda ley de la termodinámica.

**44.** En un experimento de calor específico se mezclan 196 g de aluminio a 107°C con 52.3 g de agua a 18.6°C. (*a*) Calcule la temperatura de equilibrio. Halle el cambio de entropía de (*b*) el aluminio y (*c*) el agua. (*d*) Calcule el cambio de entropía del sistema. (*Sugerencia*: Véanse las Ec. 29 y 30).

**45.** Un cubo de hielo de 12.6 g a -10.0°C se coloca en un lago cuya temperatura es de +15.0°C. Calcule el cambio en la entropía del sistema cuando el cubo de hielo llegue al equilibrio térmico con el lago. (***Sugerencia***: ¿Afectará el cubo de hielo la temperatura del lago?)

# APÉNDICE A

# EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)†

LAS UNIDADES SI BÁSICAS

| *Cantidad* | *Nombre* | *Símbolo* | *Definición* |
|---|---|---|---|
| longitud | metro | m | "...la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío en 1/299,792,458 de segundo."(1983) |
| masa | kilogramo | kg | "...este prototipo [un cilindro de platino-iridio] se considerará en lo sucesivo como la unidad de masa." (1889) |
| tiempo | segundo | s | "...la duración de 9,192,631,770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado base del átomo cesio-133." (1967) |
| corriente eléctrica | ampere | A | "...aquélla corriente constante que, si se mantiene en dos conductores paralelos rectos de longitud infinita, de sección transversal circular despreciable, y situados a 1 metro de separación en el vacío, produciría entre estos conductores una fuerza igual a $2 \times 10^{-7}$ newton por metro de longitud." (1946) |
| temperatura termodinámica | kelvin | K | "...la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua." (1967) |
| cantidad de sustancia | mol | mol | "...la cantidad de sustancia de un sistema que contenga tantas entidades elementales como átomos existen en 0.012 kilogramos de carbono 12." (1971) |
| intensidad luminosa | candela | cd | "...la intensidad luminosa en la dirección perpendicular, de un área de 1/600,000 metros cuadrados de un cuerpo negro a la temperatura de congelación del platino a una presión de 101.325 newton por metro cuadrado." (1967) |

† Adaptada de "The International System of Units (SI)", National Bureau of Standards Special Publication 330, edición de 1972 de Estados Unidos. Las definiciones fueron adoptadas por la Conferencia General de Pesas y Medidas, organismo internacional, en las fechas mostradas. En este libro no se usa la candela.

## ALGUNAS UNIDADES SI DERIVADAS

| *Cantidad* | *Nombre de la unidad* | *Símbolo* | *Equivalente* |
|---|---|---|---|
| área | metro cuadrado | $m^2$ | |
| volumen | metro cúbico | $m^3$ | |
| frecuencia | hertz | Hz | $s^{-1}$ |
| densidad de masa (densidad) | kilogramo por metro cúbico | $kg/m^3$ | |
| velocidad | metro por segundo | m/s | |
| velocidad angular | radián por segundo | rad/s | |
| aceleración | metro por segundo al cuadrado | $m/s^2$ | |
| aceleración angular | radián por segundo al cuadrado | $rad/s^2$ | |
| fuerza | newton | N | $kg \cdot m/s^2$ |
| presión | pascal | Pa | $N/m^2$ |
| trabajo, energía, cantidad de calor | joule | J | $N \cdot m$ |
| potencia | watt | W | J/s |
| cantidad de electricidad | coulomb | C | $A \cdot s$ |
| diferencia de potencial, fuerza electromotriz | volt | V | $N \cdot m/C$ |
| campo eléctrico | volt/metro | V/m | N/C |
| resistencia eléctrica | ohm | Ω | V/A |
| capacitancia | farad | F | $A \cdot s/V$ |
| flujo magnético | weber | Wb | $V \cdot s$ |
| inductancia | henry | H | $V \cdot s/A$ |
| campo magnético | tesla | T | $Wb/m^2$, $N/A \cdot m$ |
| entropía | joule por kelvin | J/K | |
| capacidad calorífica específica | joule por kilogramo kelvin | $J/(kg \cdot K)$ | |
| conductividad térmica | watt por metro kelvin | $W/(m \cdot K)$ | |
| intensidad radiante | watt por esterradián | W/sr | |

## LAS UNIDADES SI SUPLEMENTARIAS

| *Cantidad* | *Nombre de la unidad* | *Símbolo* |
|---|---|---|
| ángulo plano | radián | rad |
| ángulo sólido | esterradián | sr |

# APÉNDICE B

# ALGUNAS CONSTANTES FUNDAMENTALES DE LA FÍSICA

| *Constante* | *Símbolo* | *Valor de cálculo* | *Mejor valor(1986)* | |
|---|---|---|---|---|
| | | | *Valor*† | *Incertidumbre*‡ |
| Velocidad de la luz en el vacío | $c$ | $3.00 \times 10^{8}$ m/s | 2.99792458 | exacto |
| Carga elemental | $e$ | $1.60 \times 10^{-19}$ C | 1.60217733 | 0.30 |
| Masa del electrón en reposo | $m_e$ | $9.11 \times 10^{-31}$ kg | 9.1093897 | 0.59 |
| Constante dieléctrica | $\epsilon_0$ | $8.85 \times 10^{-12}$ F/m | 8.85418781762 | exacto |
| Constante de permeabilidad | $\mu_0$ | $1.26 \times 10^{-6}$ H/m | 1.25663706143 | exacto |
| Masa en reposo del electrón§ | $m_e$ | $5.49 \times 10^{-4}$ u | 5.48579902 | 0.023 |
| Masa en reposo del neutrón§ | $m_n$ | 1.0087 u | 1.008664904 | 0.014 |
| Masa en reposo del átomo de hidrógeno§ | $m(^1\mathrm{H})$ | 1.0078 u | 1.007825035 | 0.011 |
| Masa en reposo del átomo de deuterio§ | $m(^2\mathrm{H})$ | 2.0141 u | 2.014101779 | 0.012 |
| Masa en reposo del átomo de helio§ | $m(^4\mathrm{He})$ | 4.0026 u | 4.00260324 | 0.012 |
| Razón carga a masa del electrón | $e/m_e$ | $1.76 \times 10^{11}$ C/kg | 1.75881962 | 0.30 |
| Masa en reposo del protón | $m_p$ | $1.67 \times 10^{-27}$ kg | 1.6726231 | 0.59 |
| Razón de la masa protón a electrón | $m_p/m_e$ | 1840 | 1836.152701 | 0.020 |
| Masa en reposo del neutrón | $m_n$ | $1.67 \times 10^{-27}$ kg | 1.6749286 | 0.59 |
| Masa en reposo del muón | $m_\mu$ | $1.88 \times 10^{-28}$ kg | 1.8835327 | 0.61 |
| Constante de Planck | $h$ | $6.63 \times 10^{-34}$ J·s | 6.6260755 | 0.60 |
| Longitud de onda Compton del electrón | $\lambda_e$ | $2.43 \times 10^{-12}$ m | 2.42631058 | 0.089 |
| Constante universal de los gases | $R$ | 8.31 J/mol·K | 8.314510 | 8.4 |
| Constante de Avogadro | $N_A$ | $6.02 \times 10^{23}$ mol$^{-1}$ | 6.0221367 | 0.59 |
| Constante de Boltzmann | $k$ | $1.38 \times 10^{-23}$ J/K | 1.3806513 | 1.8 |
| Volumen molar del gas ideal a STP¶ | $V_m$ | $2.24 \times 10^{-2}$ m$^3$/mol | 2.2413992 | 1.7 |
| Constante de Faraday | $F$ | $9.65 \times 10^{4}$ C/mol | 9.6485309 | 0.30 |
| Constante de Stefan-Boltzmann | $\sigma$ | $5.67 \times 10^{-8}$ W/m$^2$·K$^4$ | 5.670399 | 6.8 |
| Constante de Rydberg | $R$ | $1.10 \times 10^{7}$ m$^{-1}$ | 1.0973731571 | 0.00036 |
| Constante gravitatoria | $G$ | $6.67 \times 10^{-11}$ m$^3$/s$^2$·kg | 6.67259 | 128 |
| Radio de Bohr | $a_0$ | $5.29 \times 10^{-11}$ m | 5.29177249 | 0.045 |
| Momento magnético del electrón | $\mu_e$ | $9.28 \times 10^{-24}$ J/T | 9.2847700 | 0.34 |
| Momento magnético del protón | $\mu_p$ | $1.41 \times 10^{-26}$ J/T | 1.41060761 | 0.34 |
| Magnetón de Bohr | $\mu_B$ | $9.27 \times 10^{-24}$ J/T | 9.2740154 | 0.34 |
| Magnetón nuclear | $\mu_N$ | $5.05 \times 10^{-27}$ J/T | 5.0507865 | 0.34 |
| Constante de la estructura fina | $\alpha$ | 1/137 | 1/137.0359895 | 0.045 |
| Cuanto de flujo magnético | $\Phi_0$ | $2.07 \times 10^{-15}$ Wb | 2.06783461 | 0.30 |
| Resistencia Hall cuantizada | $R_H$ | 25800 Ω | 25812.8056 | 0.045 |

† Misma unidad y potencia de diez que el valor de cálculo

‡ Partes por millón

§ Masa dada en unidades unificadas de masa atómica, donde 1 u = $1.6605402 \times 10^{-27}$ kg.

¶ STP —temperatura y presión estándar = 0°C y 1.0 bar. (Las siglas corresponden a *standard temperature and pressure.*)

MONTEVIDEO - URUGUAY

# APÉNDICE C

# ALGUNOS DATOS ASTRONÓMICOS

## EL SOL, LA TIERRA, Y LA LUNA

| *Propiedad* | *Sol*† | *Tierra* | *Luna* |
|---|---|---|---|
| Masa (kg) | $1.99 \times 10^{30}$ | $5.98 \times 10^{24}$ | $7.36 \times 10^{22}$ |
| Radio medio (m) | $6.96 \times 10^{8}$ | $6.37 \times 10^{6}$ | $1.74 \times 10^{6}$ |
| Densidad media ($kg/m^3$) | 1410 | 5520 | 3340 |
| Gravedad en la superficie ($m/s^2$) | 274 | 9.81 | 1.67 |
| Velocidad de escape (km/s) | 618 | 11.2 | 2.38 |
| Periodo de rotación§ (d) | 26–37‡ | 0.997 | 27.3 |
| Radio orbital medio (km) | $2.6 \times 10^{17}$¶ | $1.50 \times 10^{8}$* | $3.82 \times 10^{5}$‖ |
| Periodo orbital | $2.4 \times 10^{8}$ y¶ | 1.00 y* | 27.3 d‖ |

† El Sol irradia energía a razón de $3.90 \times 10^{26}$ W; la energía solar se recibe a razón de 1380 $W/m^2$ justo afuera de la atmósfera de la Tierra, suponiendo una incidencia normal.

‡ El Sol, una bola de gas, no gira como un cuerpo rígido. Su periodo rotatorio varía entre 26 d en el ecuador y 37 d en los polos.

§ Medido respecto a las estrellas distantes.

¶ Con respecto al centro de la galaxia.

* Con respecto al Sol.

‖ Con respecto a la Tierra.

## ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS PLANETAS

| | *Mercurio* | *Venus* | *Tierra* | *Marte* | *Júpiter* | *Saturno* | *Urano* | *Neptuno* | *Plutón* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Distancia media desde el Sol ($10^6$ km) | 57.9 | 108 | 150 | 228 | 778 | 1,430 | 2,870 | 4,500 | 5,900 |
| Periodo de revolución (años) | 0.241 | 0.615 | 1.00 | 1.88 | 11.9 | 29.5 | 84.0 | 165 | 248 |
| Periodo de rotación† (días) | 58.7 | 243‡ | 0.997 | 1.03 | 0.409 | 0.426 | 0.451‡ | 0.658 | 6.39 |
| Velocidad orbital (km/s) | 47.9 | 35.0 | 29.8 | 24.1 | 13.1 | 9.64 | 6.81 | 5.43 | 4.74 |
| Inclinación del eje respecto a la órbita | 0.0° | 2.6° | 23.5° | 24.0° | 3.08° | 26.7° | 82.1° | 28.8° | 65° |
| Inclinación de la órbita respecto a la órbita de la Tierra | 7.00° | 3.39° | — | 1.85° | 1.30° | 2.49° | 0.77° | 1.77° | 17.2° |
| Excentricidad de la órbita | 0.206 | 0.0068 | 0.0167 | 0.0934 | 0.0485 | 0.0556 | 0.0472 | 0.0086 | 0.250 |
| Diámetro ecuatorial (km) | 4,880 | 12,100 | 12,800 | 6,790 | 143,000 | 120,000 | 51,800 | 49,500 | 3,400 |
| Masa (Tierra = 1) | 0.0558 | 0.815 | 1.000 | 0.107 | 318 | 95.1 | 14.5 | 17.2 | 0.002 |
| Densidad promedio ($g/cm^3$) | 5.60 | 5.20 | 5.52 | 3.95 | 1.31 | 0.704 | 1.21 | 1.67 | 0.5(?) |
| Gravedad en la superficie§ ($m/s^2$) | 3.78 | 8.60 | 9.78 | 3.72 | 22.9 | 9.05 | 7.77 | 11.0 | 0.03 |
| Velocidad de escape (km/s) | 4.3 | 10.3 | 11.2 | 5.0 | 59.5 | 35.6 | 21.2 | 23.6 | 1.3 |
| Satélites conocidos | 0 | 0 | 1 | 2 | 16 + anillos | 19 + anillos | 15 + anillos | 8 + anillos | 1 |

† Medido con respecto a las estrellas distantes.

‡ El sentido de rotación es opuesto al del movimiento orbital.

§ Medida en el ecuador del planeta.

# APÉNDICE D

# PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

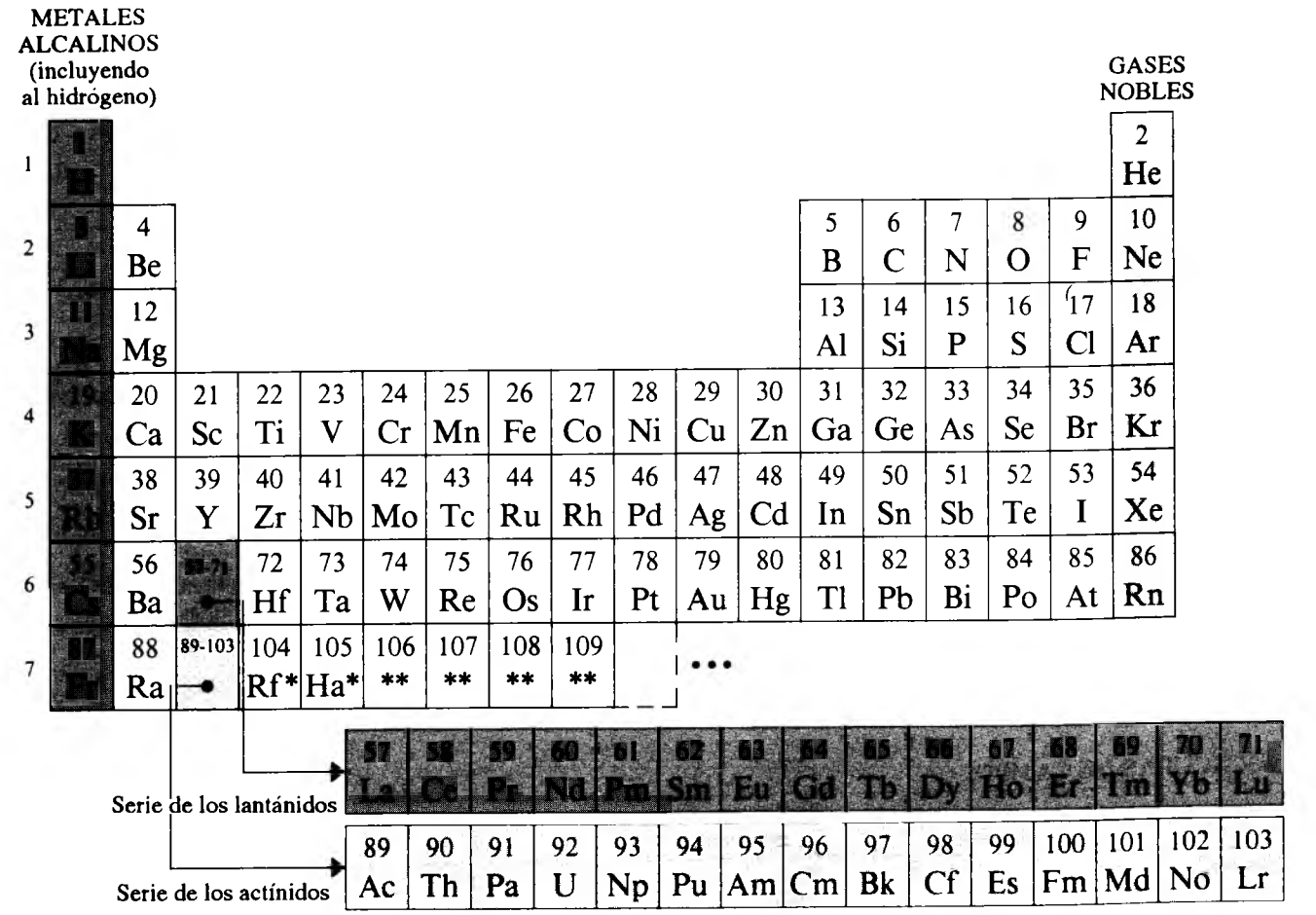
| *Elemento* | *Símbolo* | *Número atómico Z* | *Masa molar* (g/mol) | *Densidad* ($g/cm^3$) a 20°C | *Punto de fusión* (°C) | *Punto de ebullición* (°C) | *Calor específico* ($J/g \cdot C^\circ$) a 25°C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Actinio | Ac | 89 | (227) | – | 1050 | 3200 | 0.092 |
| Aluminio | Al | 13 | 26.9815 | 2.699 | 660 | 2467 | 0.900 |
| Americio | Am | 95 | (243) | 13.7 | 994 | 2607 | – |
| Antimonio | Sb | 51 | 121.75 | 6.69 | 630.5 | 1750 | 0.205 |
| Argón | Ar | 18 | 39.948 | $1.6626 \times 10^{-3}$ | -189.2 | -185.7 | 0.523 |
| Arsénico | As | 33 | 74.9216 | 5.72 | 817 (28 at.) | 613 | 0.331 |
| Astato | At | 85 | (210) | – | 302 | 337 | – |
| Azufre | S | 16 | 32.066 | 2.07 | 112.8 | 444.6 | 0.707 |
| Bario | Ba | 56 | 137.33 | 3.5 | 725 | 1640 | 0.205 |
| Berilio | Be | 4 | 9.0122 | 1.848 | 12.78 | 2970 | 1.83 |
| Berkelio | Bk | 97 | (247) | – | – | – | – |
| Bismuto | Bi | 83 | 208.980 | 9.75 | 271.3 | 1560 | 0.122 |
| Boro | B | 5 | 10.811 | 2.34 | 20.79 | 2550 | 1.11 |
| Bromo | Br | 35 | 79.909 | 3.12(líquido) | -7.2 | 58 | 0.293 |
| Cadmio | Cd | 48 | 112.41 | 8.65 | 320.9 | 765 | 0.226 |
| Calcio | Ca | 20 | 40.08 | 1.55 | 839 | 1484 | 0.624 |
| Californio | Cf | 98 | (251) | – | – | – | – |
| Carbono | C | 6 | 12.011 | 2.25 | 3550 | – | 0.691 |
| Cerio | Ce | 58 | 140.12 | 6.768 | 798 | 3443 | 0.188 |
| Cesio | Cs | 55 | 132.905 | 1.873 | 28.40 | 6.69 | 0.243 |
| Cinc | Zn | 30 | 65.37 | 7.133 | 419.58 | 907 | 0.389 |
| Cloro | Cl | 17 | 35.453 | $3.214 \times 10^{-3}$ (0°C) | -101 | -34.6 | 0.486 |
| Cobalto | Co | 27 | 58.9332 | 8.85 | 1495 | 2870 | 0.423 |
| Cobre | Cu | 29 | 63.54 | 8.96 | 1083.4 | 2567 | 0.385 |
| Criptón | Kr | 36 | 83.80 | $3.488 \times 10^{-3}$ | -156.6 | -152.3 | 0.247 |
| Cromo | Cr | 24 | 51.996 | 7.19 | 1857 | 2672 | 0.448 |
| Curio | Cm | 96 | (247) | – | 1340 | – | – |
| Disprosio | Dy | 66 | 162.50 | 8.55 | 1412 | 2567 | 0.172 |
| Einstenio | Es | 99 | (252) | – | – | – | – |
| Erbio | Er | 68 | 167.26 | 9.07 | 1529 | 2868 | 0.167 |
| Escandio | Sc | 21 | 44.956 | 2.99 | 1541 | 2836 | 0.569 |
| Estaño | Sn | 50 | 118.71 | 7.31 | 231.97 | 2270 | 0.226 |
| Estroncio | Sr | 38 | 87.62 | 2.54 | 769 | 1384 | 0.737 |
| Europio | Eu | 63 | 151.96 | 5.245 | 822 | 1527 | 0.163 |
| Fermio | Fm | 100 | (257) | – | – | – | – |
| Flúor | F | 9 | 18.9984 | $1.696 \times 10^{-3}$ (0°C) | -219.6 | -188.2 | 0.753 |
| Fósforo | P | 15 | 30.9738 | 1.83 | 44.25 | 280 | 0.741 |
| Francio | Fr | 87 | (223) | – | (27) | (677) | – |
| Gadolinio | Gd | 64 | 157.25 | 7.90 | 1313 | 3273 | 0.234 |
| Galio | Ga | 31 | 69.72 | 5.907 | 29.78 | 2403 | 0.377 |
| Germanio | Ge | 32 | 72.61 | 5.323 | 937.4 | 2830 | 0.322 |
| Hafnio | Hf | 72 | 178.49 | 13.31 | 2227 | 4602 | 0.144 |
| Helio | He | 2 | 4.0026 | $0.1664 \times 10^{-3}$ | -272.2 | -268.9 | 5.23 |
| Hidrógeno | H | 1 | 1.00797 | $0.08375 \times 10^{-3}$ | -259.34 | -252.87 | 14.4 |
| Hierro | Fe | 26 | 55.847 | 7.87 | 1535 | 2750 | 0.447 |
| Holmio | Ho | 67 | 164.930 | 8.79 | 1474 | 2700 | 0.165 |

| *Elemento* | *Símbolo* | *Número atómico Z* | *Masa molar* (g/mol) | *Densidad* (g/cm³) a 20°C | *Punto de fusión* (°C) | *Punto de ebullición* (°C) | *Calor específico* (J/g · C°) a 25°C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Indio | In | 49 | 114.82 | 7.31 | 156.6 | 2080 | 0.233 |
| Iridio | Ir | 77 | 192.2 | 22.5 | 2410 | 4130 | 0.130 |
| Iterbio | Yb | 70 | 173.04 | 6.966 | 819 | 1196 | 0.155 |
| Itrio | Y | 39 | 88.905 | 4.469 | 1552 | 5338 | 0.297 |
| Lantano | La | 57 | 138.91 | 6.145 | 918 | 3464 | 0.195 |
| Laurencio | Lr | 103 | (260) | - | - | - | - |
| Litio | Li | 3 | 6.939 | 0.534 | 180.54 | 1342 | 3.58 |
| Lutecio | Lu | 71 | 174.97 | 9.84 | 1663 | 3402 | 0.155 |
| Magnesio | Mg | 12 | 24.305 | 1.74 | 649 | 1090 | 1.03 |
| Manganeso | Mn | 25 | 54.9380 | 7.43 | 1244 | 1962 | 0.481 |
| Mendelevio | Md | 101 | (258) | - | - | - | - |
| Mercurio | Hg | 80 | 200.59 | 13.55 | -38.87 | 357 | 0.138 |
| Molibdeno | Mo | 42 | 95.94 | 10.22 | 2617 | 4612 | 0.251 |
| Neodimio | Nd | 60 | 144.24 | 7.00 | 1021 | 3074 | 0.188 |
| Neón | Ne | 10 | 20.180 | $0.8387 \times 10^{-3}$ | -248.67 | -246.0 | 1.03 |
| Neptunio | Np | 93 | (237) | 20.25 | 640 | 3902 | 1.26 |
| Niobio | Nb | 41 | 92.906 | 8.57 | 2468 | 4742 | 0.264 |
| Níquel | Ni | 28 | 58.69 | 8.902 | 1453 | 2732 | 0.444 |
| Nitrógeno | N | 7 | 14.0067 | $1.1649 \times 10^{-3}$ | -210 | -195.8 | 1.03 |
| Nobelio | No | 102 | (259) | - | - | - | - |
| Oro | Au | 79 | 196.967 | 19.32 | 1064.43 | 2808 | 0.131 |
| Osmio | Os | 76 | 190.2 | 22.57 | 3045 | 5027 | 0.130 |
| Oxígeno | O | 8 | 15.9994 | $1.3318 \times 10^{-3}$ | -218.4 | -183.0 | 0.913 |
| Paladio | Pd | 46 | 106.4 | 12.02 | 1554 | 3140 | 0.243 |
| Plata | Ag | 47 | 107.68 | 10.49 | 961.9 | 2212 | 0.234 |
| Platino | Pt | 78 | 195.09 | 21.45 | 1772 | 3827 | 0.134 |
| Plomo | Pb | 82 | 207.19 | 11.36 | 327.50 | 1740 | 0.129 |
| Plutonio | Pu | 94 | (244) | 19.84 | 641 | 3232 | 0.130 |
| Polonio | Po | 84 | (209) | 9.24 | 254 | 962 | - |
| Potasio | K | 19 | 39.098 | 0.86 | 63.25 | 760 | 0.758 |
| Praseodimio | Pr | 59 | 140.907 | 6.773 | 931 | 3520 | 0.197 |
| Promecio | Pm | 61 | (145) | 7.264 | 1042 | (3000) | - |
| Protactinio | Pa | 91 | (231) | - | 1600 | - | - |
| Radio | Ra | 88 | (226) | 5.0 | 700 | 1140 | - |
| Radón | Rn | 86 | (222) | $9.96 \times 10^{-3}$ (0°C) | -71 | -61.8 | 0.092 |
| Renio | Re | 75 | 186.2 | 21.04 | 3180 | 5627 | 0.134 |
| Rodio | Rh | 45 | 102.905 | 12.44 | 1965 | 3727 | 0.243 |
| Rubidio | Rb | 37 | 85.47 | 1.53 | 38.89 | 686 | 0.364 |
| Rutenio | Ru | 44 | 101.107 | 12.2 | 2310 | 3900 | 0.239 |
| Samario | Sm | 62 | 150.35 | 7.49 | 1074 | 1794 | 0.197 |
| Selenio | Se | 34 | 78.96 | 4.79 | 217 | 685 | 0.318 |
| Silicio | Si | 14 | 28.086 | 2.33 | 1410 | 2355 | 0.712 |
| Sodio | Na | 11 | 22.9898 | 0.9712 | 97.81 | 882.9 | 1.23 |
| Talio | Tl | 81 | 204.38 | 11.85 | 304 | 1457 | 0.130 |
| Tantalio | Ta | 73 | 180.948 | 16.6 | 2996 | 5425 | 0.138 |
| Tecnecio | Tc | 43 | (98) | 11.46 | 2172 | 4877 | 0.209 |
| Telurio | Te | 52 | 127.60 | 6.24 | 449.5 | 990 | 0.201 |
| Terbio | Tb | 65 | 158.924 | 8.25 | 1357 | 3230 | 0.180 |
| Titanio | Ti | 22 | 4788 | 4.54 | 1660 | 3287 | 0.523 |
| Torio | Th | 90 | (232) | 11.72 | 1750 | (3850) | 0.117 |
| Tulio | Tm | 69 | 168.934 | 9.31 | 1545 | 1950 | 0.159 |
| Tungsteno | W | 74 | 183.85 | 19.3 | 3410 | 5660 | 0.134 |
| Uranio | U | 92 | (238) | 19.07 | 1132 | 3818 | 0.117 |
| Vanadio | V | 23 | 50.942 | 6.1 | 1890 | 3380 | 0.490 |
| Xenón | Xe | 54 | 131.30 | $5.495 \times 10^{-3}$ | -111.79 | -108 | 0.159 |
| Yodo | I | 53 | 126.9044 | 4.94 | 113.5 | 184.35 | 0.218 |
| Zirconio | Zr | 40 | 91.22 | 6.506 | 1852 | 4377 | 0.276 |

Los valores entre paréntesis en la columna de masas atómicas son los números de masa de los isótopos más estables de los elementos que son radiactivos. Los puntos de fusión y de ebullición entre paréntesis son inciertos. Todas las propiedades físicas están dadas para una presión de una atmósfera a menos que se indique lo contrario. Los datos para los gases son válidos únicamente cuando están en su estado molecular usual, tal como $H_2$, He, $O_2$, Ne, etc. Los calores específicos de los gases son los valores a presión constante. *Fuente: Handbook of Chemistry and Physics*, edición núm. 71 (CRC Press, 1990).

# APÉNDICE E

# TABLA PERIÓDICA DE LOS ELEMENTOS




* Los nombres de estos elementos (Ruterfordio y Hahnio) no han sido aceptados debido a la controversia por el crédito a sus descubridores. Un grupo de la antes Unión Soviética ha propuesto los nombres de Kurchatovio y Neilsbohrio.

** Se ha reportado el descubrimiento de estos elementos, pero no tienen un nombre universalmente adoptado todavía.

# APÉNDICE F

# PARTÍCULAS ELEMENTALES

## 1. LAS PARTÍCULAS FUNDAMENTALES

### LEPTONES

| *Partícula* | *Símbolo* | *Anti-partícula* | *Carga (e)* | *Espín ($h/2\pi$)* | *Energía de reposo* (MeV) | *Vida media* (s) | *Productos típicos de la desintegración* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Electrón | $e^-$ | $e^+$ | $-1$ | 1/2 | 0.511 | $\infty$ | |
| Neutrino del electrón | $\nu_e$ | $\bar{\nu}_e$ | 0 | 1/2 | $<0.00002$ | $\infty$ | |
| Muón | $\mu^-$ | $\mu^+$ | $-1$ | 1/2 | 105.7 | $2.2 \times 10^{-6}$ | $e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ |
| Neutrino del muón | $\nu_\mu$ | $\bar{\nu}_\mu$ | 0 | 1/2 | $<0.3$ | $\infty$ | |
| Tau | $\tau^-$ | $\tau^+$ | $-1$ | 1/2 | 1784 | $3.0 \times 10^{-13}$ | $\mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$ |
| Neutrino tau | $\nu_\tau$ | $\bar{\nu}_\tau$ | 0 | 1/2 | $<40$ | $\infty$ | |

### QUARKS

| *Sabor** | *Símbolo* | *Antipartícula* | *Carga (e)* | *Espín ($h/2\pi$)* | *Energía de reposo*† (MeV) | *Otra propiedad* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Arriba | u | $\bar{u}$ | $+2/3$ | 1/2 | 300 | $C = S = T = B = 0$ |
| Abajo | d | $\bar{d}$ | $-1/3$ | 1/2 | 300 | $C = S = T = B = 0$ |
| Encanto | c | $\bar{c}$ | $+2/3$ | 1/2 | 1500 | Encantamiento $(C) = +1$ |
| Extraño | s | $\bar{s}$ | $-1/3$ | 1/2 | 500 | Extrañeza $(S) = -1$ |
| Cima‡ | t | $\bar{t}$ | $+2/3$ | 1/2 | $>40{,}000$ | Encumbramiento $(T) = +1$ |
| Fondo | b | $\bar{b}$ | $-1/3$ | 1/2 | 4700 | Profundidad $(B) = -1$ |

### PARTÍCULAS DE CAMPO

| *Partícula* | *Símbolo* | *Interacción* | *Carga (e)* | *Espín ($h/2\pi$)* | *Energía en reposo* (GeV) |
|---|---|---|---|---|---|
| Gravitón‡ | | Gravedad | 0 | 2 | 0 |
| Bosón débil | $W^+$, $W^-$ | Débil | $\pm 1$ | 1 | 80.6 |
| Bosón débil | $Z^0$ | Débil | 0 | 1 | 91.2 |
| Fotón | $\gamma$ | Electromagnética | 0 | 1 | 0 |
| Gluón | g | Fuerte (color) | 0 | 1 | 0 |

## 2. ALGUNAS PARTÍCULAS COMPUESTAS

### BARIONES

| *Partícula* | *Símbolo* | *Contenido de quarks* | *Anti-partícula* | *Carga (e)* | *Espín (h/2π)* | *Energía en reposo* (MeV) | *Vida media* (s) | *Desintegración típica* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Protón | p | uud | $\bar{p}$ | +1 | 1/2 | 938 | $>10^{40}$ | $\pi^0 + e^+$ (?) |
| Neutrón | n | udd | $\bar{n}$ | 0 | 1/2 | 940 | 889 | $p + e^- + \nu_e$ |
| Lambda | $\Lambda^0$ | uds | $\overline{\Lambda^0}$ | 0 | 1/2 | 1116 | $2.6 \times 10^{-10}$ | $p + \pi^-$ |
| Omega | $\Omega^-$ | sss | $\overline{\Omega^-}$ | −1 | 3/2 | 1673 | $8.2 \times 10^{-11}$ | $\Lambda^0 + K^-$ |
| Delta | $\Delta^{++}$ | uuu | $\overline{\Delta^{++}}$ | +2 | 3/2 | 1232 | $5.7 \times 10^{-24}$ | $p + \pi^+$ |
| Lambda encantada | $\Lambda_c^+$ | udc | $\overline{\Lambda_c^+}$ | +1 | 1/2 | 2285 | $1.9 \times 10^{-13}$ | $\Lambda^0 + \pi^+$ |

### MESONES

| *Partícula* | *Símbolo* | *Contenido de quarks* | *Anti-partícula* | *Carga (e)* | *Espín (h/2π)* | *Energía en reposo* (MeV) | *Vida media* (s) | *Desintegración típica* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pión | $\pi^+$ | $u\bar{d}$ | $\pi^-$ | +1 | 0 | 140 | $2.6 \times 10^{-8}$ | $\mu^+ + \nu_\mu$ |
| Pión | $\pi^0$ | $u\bar{u} + d\bar{d}$ | $\pi^0$ | 0 | 0 | 135 | $8.4 \times 10^{-17}$ | $\gamma + \gamma$ |
| Kaón | $K^+$ | $u\bar{s}$ | $K^-$ | +1 | 0 | 494 | $1.2 \times 10^{-8}$ | $\mu^+ + \nu_\mu$ |
| Kaón | $K^0$ | $d\bar{s}$ | $\overline{K^0}$ | 0 | 0 | 498 | $0.9 \times 10^{-10}$ | $\pi^+ + \pi^-$ |
| Rho | $\rho^+$ | $u\bar{d}$ | $\rho^-$ | +1 | 1 | 768 | $4.5 \times 10^{-24}$ | $\pi^+ + \pi^-$ |
| Mesón-D | $D^+$ | $c\bar{d}$ | $D^-$ | +1 | 0 | 1869 | $1.1 \times 10^{-12}$ | $K^- + \pi^+ + \pi^+$ |
| Psi | $\psi$ | $c\bar{c}$ | $\psi$ | 0 | 1 | 3097 | $1.0 \times 10^{-20}$ | $e^+ + e^-$ |
| Mesón-B | $B^+$ | $u\bar{b}$ | $B^-$ | +1 | 0 | 5278 | $1.2 \times 10^{-12}$ | $D^- + \pi^+ + \pi^+$ |
| Ípsilon | $\Upsilon$ | $b\bar{b}$ | $\Upsilon$ | 0 | 1 | 9460 | $1.3 \times 10^{-20}$ | $e^+ + e^-$ |

† Las energías en reposo listadas para los quarks no son las asociadas con los quarks libres; puesto que todavía no ha sido observado ningún quark libre, no ha sido posible la medición de sus energías en reposo en el estado libre. Los valores tabulados son energías en reposo efectivas correspondientes a quarks *constituyentes*, aquellos ligados en partículas compuestas.

‡ Se cree que existen las partículas pero todavía no han sido observadas.

*Fuente*: "Review of Particle Properties", *Physics Letters B*, vol. 239 (abril de 1990).

# APÉNDICE G

# FACTORES DE CONVERSIÓN

Los factores de conversión pueden leerse directamente de las tablas. Por ejemplo, 1 grado = $2.778 \times 10^{-3}$ revoluciones, de modo que $16.7° = 16.7 \times 2.778 \times 10^{-3}$ rev. Las cantidades SI están en letras mayúsculas. Parcialmente adaptado de G. Shortley y D. Williams, *Elements of Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

ÁNGULO PLANO

| | ° | ′ | ″ | RADIAN | rev |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 grado = | 1 | 60 | 3600 | $1.745 \times 10^{-2}$ | $2.778 \times 10^{-3}$ |
| 1 minuto = | $1.667 \times 10^{-2}$ | 1 | 60 | $2.909 \times 10^{-4}$ | $4.630 \times 10^{-5}$ |
| 1 segundo = | $2.778 \times 10^{-4}$ | $1.667 \times 10^{-2}$ | 1 | $4.848 \times 10^{-6}$ | $7.716 \times 10^{-7}$ |
| 1 RADIAN = | 57.30 | 3438 | $2.063 \times 10^{5}$ | 1 | 0.1592 |
| 1 revolución = | 360 | $2.16 \times 10^{4}$ | $1.296 \times 10^{6}$ | 6.283 | 1 |

ÁNGULO SÓLIDO

1 esfera = $4\pi$ esterradianes = 12.57 esterradianes

LONGITUD

| | cm | METRO | km | in | ft | mi |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 centímetro = | 1 | $10^{-2}$ | $10^{-5}$ | 0.3937 | $3.281 \times 10^{-2}$ | $6.214 \times 10^{-6}$ |
| 1 METRO = | 100 | 1 | $10^{-3}$ | 39.37 | 3.281 | $6.214 \times 10^{-4}$ |
| 1 kilómetro = | $10^{5}$ | 1000 | 1 | $3.937 \times 10^{4}$ | 3281 | 0.6214 |
| 1 pulgada = | 2.540 | $2.540 \times 10^{-2}$ | $2.540 \times 10^{-5}$ | 1 | $8.333 \times 10^{-2}$ | $1.578 \times 10^{-5}$ |
| 1 pie = | 30.48 | 0.3048 | $3.048 \times 10^{-4}$ | 12 | 1 | $1.894 \times 10^{-4}$ |
| 1 milla = | $1.609 \times 10^{5}$ | 1609 | 1.609 | $6.336 \times 10^{4}$ | 5280 | 1 |

1 angström = $10^{-10}$ m
1 milla náutica = 1852 m
= 1.151 millas = 6076 ft
1 fermi = $10^{-15}$ m

1 año-luz = $9.460 \times 10^{12}$ km
1 parsec = $3.084 \times 10^{13}$ km
1 fathom = 6 ft
1 radio de Bohr = $5.292 \times 10^{-11}$ m

1 yarda = 3 ft
1 rod = 16.5 ft
1 mil = $10^{-3}$ in
1 nm = $10^{-9}$ m

ÁREA

| | METRO$^2$ | cm$^2$ | ft$^2$ | in$^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 METRO CUADRADO = | 1 | $10^{4}$ | 10.76 | 1550 |
| 1 centímetro cuadrado = | $10^{-4}$ | 1 | $1.076 \times 10^{-3}$ | 0.1550 |
| 1 pie cuadrado = | $9.290 \times 10^{-2}$ | 929.0 | 1 | 144 |
| 1 pulgada cuadrada = | $6.452 \times 10^{-4}$ | 6.452 | $6.944 \times 10^{-3}$ | 1 |

1 milla cuadrada = $2.788 \times 10^{7}$ ft$^2$ = 640 acres
1 barnio = $10^{-28}$ m

1 acre = 43,560 ft$^2$
1 hectárea = $10^{4}$ m$^2$ = 2.471 acres

## VOLUMEN

| | METRO$^3$ | cm$^3$ | L | ft$^3$ | in$^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 METRO CÚBICO = | 1 | $10^6$ | 1000 | 35.31 | $6.102 \times 10^4$ |
| 1 centímetro cúbico = | $10^{-6}$ | 1 | $1.000 \times 10^{-3}$ | $3.531 \times 10^{-5}$ | $6.102 \times 10^{-2}$ |
| 1 litro = | $1.000 \times 10^{-3}$ | 1000 | 1 | $3.531 \times 10^{-2}$ | 61.02 |
| 1 pie cúbico = | $2.832 \times 10^{-2}$ | $2.832 \times 10^4$ | 28.32 | 1 | 1728 |
| 1 pulgada cúbica = | $1.639 \times 10^{-5}$ | 16.39 | $1.639 \times 10^{-2}$ | $5.787 \times 10^{-4}$ | 1 |

1 galón fluido U.S. = 4 cuartos fluidos U.S. = 8 pintas U.S. = 128 onzas fluidas U.S. = 231 in$^3$
1 galón imperial britanico = 277.4 in$^3$ = 1.201 galones fluidos U.S.

## MASA

| | g | KILOGRAMO | slug | u | oz | lb | ton |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 gramo = | 1 | 0.001 | $6.852 \times 10^{-5}$ | $6.022 \times 10^{23}$ | $3.527 \times 10^{-2}$ | $2.205 \times 10^{-3}$ | $1.102 \times 10^{-6}$ |
| 1 KILOGRAMO = | 1000 | 1 | $6.852 \times 10^{-2}$ | $6.022 \times 10^{26}$ | 35.27 | 2.205 | $1.102 \times 10^{-3}$ |
| 1 slug = | $1.459 \times 10^4$ | 14.59 | 1 | $8.786 \times 10^{27}$ | 514.8 | 32.17 | $1.609 \times 10^{-2}$ |
| 1 u = | $1.661 \times 10^{-24}$ | $1.661 \times 10^{-27}$ | $1.138 \times 10^{-28}$ | 1 | $5.857 \times 10^{-26}$ | $3.662 \times 10^{-27}$ | $1.830 \times 10^{-30}$ |
| 1 onza = | 28.35 | $2.835 \times 10^{-2}$ | $1.943 \times 10^{-3}$ | $1.718 \times 10^{25}$ | 1 | $6.250 \times 10^{-2}$ | $3.125 \times 10^{-5}$ |
| 1 libra = | 453.6 | 0.4536 | $3.108 \times 10^{-2}$ | $2.732 \times 10^{26}$ | 16 | 1 | 0.0005 |
| 1 ton = | $9.072 \times 10^5$ | 907.2 | 62.16 | $5.463 \times 10^{29}$ | $3.2 \times 10^4$ | 2000 | 1 |

1 tonelada métrica = 1000 kg
Las cantidades en las zonas sombreadas no son unidades de masa pero se usan a menudo como tales. Por ejemplo, cuando escribimos 1 kg "=" 2.205 lb significa que un kilogramo es una masa que pesa 2.205 libras en condiciones de gravedad estándar ($g$ = 9.80665 m/s$^2$).

## DENSIDAD

| | slug/ft$^3$ | KILOGRAMO/METRO$^3$ | g/cm$^3$ | lb/ft$^3$ | lb/in$^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 slug por ft$^3$ = | 1 | 515.4 | 0.5154 | 32.17 | $1.862 \times 10^{-2}$ |
| 1 KILOGRAMO por METRO$^3$ = | $1.940 \times 10^{-3}$ | 1 | 0.001 | $6.243 \times 10^{-2}$ | $3.613 \times 10^{-5}$ |
| 1 gramo por cm$^3$ = | 1.940 | 1000 | 1 | 62.43 | $3.613 \times 10^{-2}$ |
| 1 libra por ft$^3$ = | $3.108 \times 10^{-2}$ | 16.02 | $1.602 \times 10^{-2}$ | 1 | $5.787 \times 10^{-4}$ |
| 1 libra por in$^3$ = | 53.71 | $2.768 \times 10^4$ | 27.68 | 1728 | 1 |

Las cantidades en las zonas sombreadas son densidades de peso y, como tales, son dimensionalmente diferentes a las densidades de masa. Véase la nota en la tabla de masas.

## TIEMPO

| | y | d | h | min | SEGUNDO |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 año = | 1 | 365.25 | $8.766 \times 10^3$ | $5.259 \times 10^5$ | $3.156 \times 10^7$ |
| 1 día = | $2.738 \times 10^{-3}$ | 1 | 24 | 1440 | $8.640 \times 10^4$ |
| 1 hora = | $1.141 \times 10^{-4}$ | $4.167 \times 10^{-2}$ | 1 | 60 | 3600 |
| 1 minuto = | $1.901 \times 10^{-6}$ | $6.944 \times 10^{-4}$ | $1.667 \times 10^{-2}$ | 1 | 60 |
| 1 SEGUNDO = | $3.169 \times 10^{-8}$ | $1.157 \times 10^{-5}$ | $2.778 \times 10^{-4}$ | $1.667 \times 10^{-2}$ | 1 |

## VELOCIDAD

| | ft/s | km/h | METROS/SEGUNDO | mi/h | cm/s |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 pie por segundo = | 1 | 1.097 | 0.3048 | 0.6818 | 30.48 |
| 1 kilómetro por hora = | 0.9113 | 1 | 0.2778 | 0.6214 | 27.78 |
| 1 METRO por SEGUNDO = | 3.281 | 3.6 | 1 | 2.237 | 100 |
| 1 milla por hora = | 1.467 | 1.609 | 0.4470 | 1 | 44.70 |
| 1 centímetro por segundo = | $3.281 \times 10^{-2}$ | $3.6 \times 10^{-2}$ | 0.01 | $2.237 \times 10^{-2}$ | 1 |

1 nudo = 1 milla náutica por hora 1.688 ft/s  1 mi/min = 88.00 ft/s = 60.00 mi/h

## FUERZA

| | dina | NEWTON | lb | pdl | gf | kgf |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 dina = | 1 | $10^{-5}$ | $2.248 \times 10^{-6}$ | $7.233 \times 10^{-5}$ | $1.020 \times 10^{-3}$ | $1.020 \times 10^{-6}$ |
| 1 NEWTON = | $10^5$ | 1 | 0.2248 | 7.233 | 102.0 | 0.1020 |
| 1 libra = | $4.448 \times 10^5$ | 4.448 | 1 | 32.17 | 453.6 | 0.4536 |
| 1 poundal* = | $1.383 \times 10^4$ | 0.1383 | $3.108 \times 10^{-2}$ | 1 | 14.10 | $1.410 \times 10^{-2}$ |
| 1 gramo-fuerza = | 980.7 | $9.807 \times 10^{-3}$ | $2.205 \times 10^{-3}$ | $7.093 \times 10^{-2}$ | 1 | 0.001 |
| 1 kilogramo-fuerza = | $9.807 \times 10^5$ | 9.807 | 2.205 | 70.93 | 1000 | 1 |

*(Unidad absoluta de fuerza)
Las cantidades en la zonas sombreadas no son unidades de fuerza pero a menudo se usan como tales. Por ejemplo, si escribimos 1 gramo-fuerza "=" 980.7 dinas, queremos decir que un gramo-masa experimenta una fuerza de 980.7 dinas en condiciones de gravedad estándar ($g$ = 9.80665 m/s$^2$)

## ENERGÍA, TRABAJO, CALOR

| | Btu | erg | ft·lb | hp·h | JOULE | cal | kW·h | eV | MeV | kg | u |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 unidad térmica británica = | 1 | $1.055 \times 10^{10}$ | 777.9 | $3.929 \times 10^{-4}$ | 1055 | 252.0 | $2.930 \times 10^{-4}$ | $6.585 \times 10^{21}$ | $6.585 \times 10^{15}$ | $1.174 \times 10^{-14}$ | $7.070 \times 10^{12}$ |
| 1 erg = | $9.481 \times 10^{-11}$ | 1 | $7.376 \times 10^{-8}$ | $3.725 \times 10^{-14}$ | $10^{-7}$ | $2.389 \times 10^{-8}$ | $2.778 \times 10^{-14}$ | $6.242 \times 10^{11}$ | $6.242 \times 10^5$ | $1.113 \times 10^{-24}$ | 670.2 |
| 1 libra-pie = | $1.285 \times 10^{-3}$ | $1.356 \times 10^7$ | 1 | $5.051 \times 10^{-7}$ | 1.356 | 0.3238 | $3.766 \times 10^{-7}$ | $8.464 \times 10^{18}$ | $8.464 \times 10^{12}$ | $1.509 \times 10^{-17}$ | $9.037 \times 10^9$ |
| 1 caballo de fuerza-hora = | 2545 | $2.685 \times 10^{13}$ | $1.980 \times 10^6$ | 1 | $2.685 \times 10^6$ | $6.413 \times 10^5$ | 0.7457 | $1.676 \times 10^{25}$ | $1.676 \times 10^{19}$ | $2.988 \times 10^{-11}$ | $1.799 \times 10^{16}$ |
| 1 JOULE = | $9.481 \times 10^{-4}$ | $10^7$ | 0.7376 | $3.725 \times 10^{-7}$ | 1 | 0.2389 | $2.778 \times 10^{-7}$ | $6.242 \times 10^{18}$ | $6.242 \times 10^{12}$ | $1.113 \times 10^{-17}$ | $6.702 \times 10^9$ |
| 1 caloría = | $3.969 \times 10^{-3}$ | $4.186 \times 10^7$ | 3.088 | $1.560 \times 10^{-6}$ | 4.186 | 1 | $1.163 \times 10^{-6}$ | $2.613 \times 10^{19}$ | $2.613 \times 10^{13}$ | $4.660 \times 10^{-17}$ | $2.806 \times 10^{10}$ |
| 1 kilowatt-hora = | 3413 | $3.6 \times 10^{13}$ | $2.655 \times 10^6$ | 1.341 | $3.6 \times 10^6$ | $8.600 \times 10^5$ | 1 | $2.247 \times 10^{25}$ | $2.247 \times 10^{19}$ | $4.007 \times 10^{-11}$ | $2.413 \times 10^{16}$ |
| 1 electrónvolt = | $1.519 \times 10^{-22}$ | $1.602 \times 10^{-12}$ | $1.182 \times 10^{-19}$ | $5.967 \times 10^{-26}$ | $1.602 \times 10^{-19}$ | $3.827 \times 10^{-20}$ | $4.450 \times 10^{-26}$ | 1 | $10^{-6}$ | $1.783 \times 10^{-36}$ | $1.074 \times 10^{-9}$ |
| 1 millón de electronvolts = | $1.519 \times 10^{-16}$ | $1.602 \times 10^{-6}$ | $1.182 \times 10^{-13}$ | $5.967 \times 10^{-20}$ | $1.602 \times 10^{-13}$ | $3.827 \times 10^{14}$ | $4.450 \times 10^{-20}$ | $10^6$ | 1 | $1.783 \times 10^{-30}$ | $1.074 \times 10^{-3}$ |
| 1 kilogramo = | $8.521 \times 10^{13}$ | $8.987 \times 10^{23}$ | $6.629 \times 10^{16}$ | $3.348 \times 10^{10}$ | $8.987 \times 10^{16}$ | $2.146 \times 10^{16}$ | $2.497 \times 10^{10}$ | $5.610 \times 10^{35}$ | $5.610 \times 10^{29}$ | 1 | $6.022 \times 10^{26}$ |
| 1 unidad unificada de masa atómica = | $1.415 \times 10^{-13}$ | $1.492 \times 10^{-3}$ | $1.101 \times 10^{-10}$ | $5.559 \times 10^{-17}$ | $1.492 \times 10^{-10}$ | $3.564 \times 10^{-11}$ | $4.146 \times 10^{-17}$ | $9.32 \times 10^8$ | 932.0 | $1.661 \times 10^{-27}$ | 1 |

Las cantidades en las zonas sombreadas no son unidades de energía propiamente pero se incluyen por conveniencia. Provienen de la fórmula de equivalencia masa-energía relativista $E = mc^2$ y representan la energía equivalente de una masa de un kilogramo o una unidad unificada de masa atómica (u).

PRESIÓN

| | atm | dina/cm² | in de agua | cm Hg | PASCAL | lb/in ² | lb/ft² |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 atmósfera = | 1 | $1.013 \times 10^6$ | 406.8 | 76 | $1.013 \times 10^5$ | 14.70 | 2116 |
| 1 dina por cm² = | $9.869 \times 10^{-7}$ | 1 | $4.015 \times 10^{-4}$ | $7.501 \times 10^{-5}$ | 0.1 | $1.405 \times 10^{-5}$ | $2.089 \times 10^{-3}$ |
| 1 in de agua† a 4°C = | $2.458 \times 10^{-3}$ | 2491 | 1 | 0.1868 | 249.1 | $3.613 \times 10^{-2}$ | 5.202 |
| 1 centímetro de mercurio† a 0°C = | $1.316 \times 10^{-2}$ | $1.333 \times 10^4$ | 5.353 | 1 | 1333 | 0.1934 | 27.85 |
| 1 PASCAL = | $9.869 \times 10^{-6}$ | 10 | $4.015 \times 10^{-3}$ | $7.501 \times 10^{-4}$ | 1 | $1.450 \times 10^{-4}$ | $2.089 \times 10^{-2}$ |
| 1 libra por in² = | $6.805 \times 10^{-2}$ | $6.895 \times 10^4$ | 27.68 | 5.171 | $6.895 \times 10^3$ | 1 | 144 |
| 1 libra por ft² = | $4.725 \times 10^{-4}$ | 478.8 | 0.1922 | $3.591 \times 10^{-2}$ | 47.88 | $6.944 \times 10^{-3}$ | 1 |

† En donde la aceleración de la gravedad tiene el valor estandar 9.80665 m/s².
1 bar = $10^6$ dinas/cm² = 0.1 MPa  1 milibar = $10^3$ dinas/cm² = $10^2$ Pa  1 torr = 1 milímetro de mercurio

POTENCIA

| | Btu/h | ft·lb/s | hp | cal/s | kW | WATT |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 unidad térmica británica por hora = | 1 | 0.2161 | $3.929 \times 10^{-4}$ | $6.998 \times 10^{-2}$ | $2.930 \times 10^{-4}$ | 0.2930 |
| 1 libra-pie por segundo = | 4.628 | 1 | $1.818 \times 10^{-3}$ | 0.3239 | $1.356 \times 10^{-3}$ | 1.356 |
| 1 caballo de fuerza = | 2545 | 550 | 1 | 178.1 | 0.7457 | 745.7 |
| 1 caloría por segundo = | 14.29 | 3.088 | $5.615 \times 10^{-3}$ | 1 | $4.186 \times 10^{-3}$ | 4.186 |
| 1 kilowatt = | 3413 | 737.6 | 1.341 | 238.9 | 1 | 1000 |
| 1 WATT = | 3.413 | 0.7376 | $1.341 \times 10^{-3}$ | 0.2389 | 0.001 | 1 |

FLUJO MAGNÉTICO

| | maxwell | WEBER |
|---|---|---|
| 1 maxwell = | 1 | $10^{-8}$ |
| 1 WEBER = | $10^8$ | 1 |

CAMPO MAGNÉTICO

| | gauss | TESLA | milligauss |
|---|---|---|---|
| 1 gauss = | 1 | $10^{-4}$ | 1000 |
| 1 TESLA = | $10^4$ | 1 | $10^7$ |
| 1 milligauss = | 0.001 | $10^{-7}$ | 1 |

1 tesla = 1 weber/metro²

# APÉNDICE H

# FÓRMULAS MATEMÁTICAS

## GEOMETRÍA

Círculo de radio $r$: circunferencia = $2\pi r$; área = $\pi r^2$.
Esfera de radio $r$: área = $4\pi r^2$; volumen = $\frac{4}{3}\pi r^3$.
Cilindro circular recto de radio $r$ y altura $h$: área = $2\pi r^2 + 2\pi rh$; volumen = $\pi r^2 h$.
Triángulo de base $a$ y altura $h$: área = $\frac{1}{2}ah$.

## FÓRMULA CUADRÁTICA

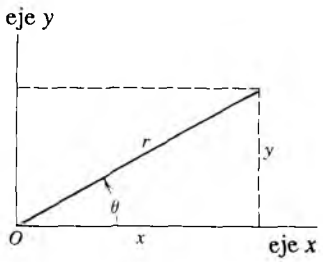
Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO $\theta$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

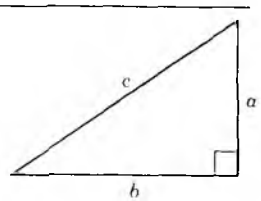
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \quad \csc\theta = \frac{r}{y}$$




## TEOREMA DE PITÁGORAS

$a^2 + b^2 = c^2$



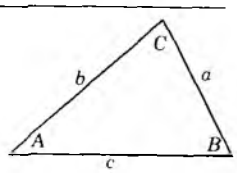

## TRIÁNGULOS

Ángulos $A$, $B$, $C$
Lados opuestos $a$, $b$, $c$

$A + B + C = 180°$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$




## SIGNOS Y SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$=$ igual a
$\approx$ aproximadamente igual a
$\sim$ es del orden de magnitud de
$\neq$ no es igual a
$\equiv$ es idéntico a, se define como
$>$ es mayor que ($\gg$ es mucho mayor que)
$<$ es menor que ($\ll$ es mucho menor que)
$\geq$ es mayor que o igual a (o, no es menor que)
$\leq$ es menor que o igual a (o, no es mayor que)
$\pm$ más o menos ($\sqrt{4} = \pm 2$)
$\propto$ es proporcional a
$\Sigma$ la suma de
$\bar{x}$ el valor promedio de $x$

## PRODUCTOS DE VECTORES

Sean $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vectores unitarios en las direcciones $x$, $y$, $z$. Entonces

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0,$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0,$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Cualquier vector $\mathbf{a}$ con componentes $a_x$, $a_y$, $a_z$ a lo largo de los ejes $x$, $y$, $z$ puede escribirse

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vectores arbitrarios con magnitudes $a$, $b$, $c$. Entonces

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

$$(s\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \quad (s = \text{un escalar}).$$

Sea $\theta$ el más pequeño de los dos ángulos entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Entonces

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z)\mathbf{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\mathbf{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\ \operatorname{sen}\theta$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

## IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$
$\operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$
$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \quad \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$
$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$
$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$$

## TEOREMA DEL BINOMIO

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \quad (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \cdots \quad (x^2 < 1)$$

## DESARROLLO EXPONENCIAL

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

## DESARROLLO LOGARÍTMICO

$$\ln(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots \quad (|x| < 1)$$

## DESARROLLOS TRIGONOMÉTRICOS ($\theta$ en radianes)

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots$$

## DERIVADAS E INTEGRALES

En lo que sigue, las letras $u$ y $v$ son válidas para cualquier función de $x$, y $a$ y $m$ son constantes. A cada una de las integrales indefinidas deberá añadírsele una constante de integración arbitraria. El *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.) proporciona una tabulación más extensa.

| | |
|---|---|
| 1. $\dfrac{dx}{dx} = 1$ | 1. $\displaystyle\int dx = x$ |
| 2. $\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$ | 2. $\displaystyle\int au\,dx = a\int u\,dx$ |
| 3. $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$ | 3. $\displaystyle\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$ |
| 4. $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$ | 4. $\displaystyle\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$ |
| 5. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ | 5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$ |
| 6. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ | 6. $\displaystyle\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$ |
| 7. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$ | 7. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$ |
| 8. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$ | 8. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$ |
| 9. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$ | 9. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$ |
| 10. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ | 10. $\displaystyle\int \tan x\,dx = \ln\lvert\sec x\rvert$ |
| 11. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$ | 11. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$ |
| 12. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x\sec x$ | 12. $\displaystyle\int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$ |
| 13. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\cot x\csc x$ | 13. $\displaystyle\int xe^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$ |
| 14. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$ | 14. $\displaystyle\int x^2e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$ |
| 15. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} u \quad \cos u\dfrac{du}{dx}$ | 15. $\displaystyle\int_0^\infty x^ne^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ |
| 16. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u\dfrac{du}{dx}$ | 16. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ |

# APÉNDICE I

# PROGRAMAS DE COMPUTADORA

Se proporcionan tres ejemplos de programas de computadora que han sido usados en el texto para los cálculos cinemáticos que involucran a fuerzas no-constantes que actúan sobre una partícula. Los programas están escritos en el lenguaje BASIC y pueden adaptarse fácilmente a la mayoría de las computadoras personales. En cada caso, la velocidad y la posición iniciales de la partícula deben ser puestos en los programas en las líneas 40 y 50, respectivamente.

## 1. FUERZAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO

Este programa se usó en la sección 6-6 para hallar la posición y la velocidad de un automóvil cuya aceleración depende del tiempo. El programa puede ser usado para cualquier aceleración dependiente del tiempo cambiando la línea 180 de modo que muestre la $a(t)$ deseada. En este caso usamos el ejemplo de la sección 6-6, $a(t) = -2.67t$.

LISTADO DEL PROGRAMA

```
10  ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- TIME DEPENDENT FORCES
20  ' GIVEN A(T), V0, X0;   COMPUTES V(T), X(T)
30  ' SPECIFY INITIAL VALUES
40  V0 = 29.2
50  X0 = 0
60  'SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
70  '     FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
80  TMAX = 10
90  'SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
100 '     EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
110 '     EXAMPLE: 2.0 FOR 2.0 HOUR
120 TU = .5
130 'SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '     INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT = 100
160 DT = TU/NT
170 'INSERT A(T) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
180 DEF FNA(T)=-2.67*T
190 V=V0
200 X=X0
210 PRINT "TIME          VELOCITY      POSITION"
220 LPRINT   "TIME          VELOCITY      POSITION"
230 'BEGIN ITERATION
240 FOR TIME = 1 TO TMAX
250 FOR N = 1 TO NT
260 T = (TIME-1)*TU + N*DT
270 AI=FNA(T)
280 AI1=FNA(T-DT)
290 AV=.5*(AI+AI1)
```

```
300 DV=AV*DT
310 V = V + DV
320 DX = .5*(V + V - DV)*DT
330 X = X+DX
340 NEXT N
350 PRINT TIME*TU,V,X
360 LPRINT TIME*TU,V,X
370 NEXT TIME
400 END
```

SALIDA DE MUESTRA

```
TIME          VELOCITY        POSITION
 .5            28.86625        14.54437
 1             27.86499        28.75499
 1.5           26.19618        42.2981
 2             23.85994        54.83993
 2.5           20.85615        66.04676
 3             17.18486        75.5848
 3.5           12.84612        83.1203
 4             7.839843        88.31959
 4.5           2.166084        90.84886
 5            -4.175166        90.37431
```

## 2. FUERZAS DEPENDIENTES DE LA VELOCIDAD

Este programa puede utilizarse como se describió en la sección 6-7 para analizar el movimiento de un proyectil sujeto a una fuerza de arrastre. En este caso la fuerza está escrita en la línea 200 como $F(x) = g - bv^2$, siendo $g = 9.8$ y $b = 0.33$. Pueden ser sustituidas en la línea 200 otras expresiones para fuerzas dependientes de la velocidad. La salida nos muestra que la partícula alcanza su velocidad terminal de alrededor de 5.4 m/s después de un tiempo de 1.5 s, durante el cual ha viajado unos 6 m.

LISTADO DEL PROGRAMA

```
10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- VELOCITY DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN A(V), V0, X0;   COMPUTES V(T), X(T)
30 'SPECIFY INITIAL VALUES
40 V0 = 0
50 X0 = 0
60 'SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
70 '      FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
80 TMAX = 10
90 'SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
100 '       EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
110 '       EXAMPLE: 2.0 FOR 2.0 HOUR
120 TU=.25
130 'SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '       INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT=100
160 DT=TU/NT
170 V=V0
180 X=X0
190 'INSERT A(V) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
200 DEF FNA(V)=9.8 - .33*V*V
210 PRINT "TIME           VELOCITY       POSITION"
220 LPRINT "TIME          VELOCITY       POSITION"
230 'BEGIN ITERATION
240 FOR TIME = 1 TO TMAX
250 FOR N = 1 TO NT
```

```
260 AV=FNA(V)
270 DV=AV*DT
280 V = V + DV
290 DX = .5*(V + V - DV)*DT
300 X = X+DX
310 NEXT N
320 PRINT TIME*TU,V,X
330 LPRINT TIME*TU,V,X
340 NEXT TIME
400 END
```

SALIDA DE MUESTRA

```
TIME          VELOCITY        POSITION
 .25          2.299237        .2966358
 .5           3.905542        1.08959
 .75          4.765719        2.18636
 1            5.161553        3.434
 1.25         5.330923        4.748592
 1.5          5.401125        6.091382
 1.75         5.42984         7.445783
 2            5.441519        8.804918
 2.25         5.446261        10.16598
 2.5          5.448183        11.52782
```

## 3. FUERZAS DEPENDIENTES DE LA POSICIÓN

Este programa se usó en la sección 8-4 para analizar el movimiento de una partícula oscilante sujeta a una fuerza $F = -kx$. La fuerza está insertada en la línea 200 como $F(x) = -9.6x$, de modo que $k = 9.6$. La salida muestra que la partícula oscila con un periodo de 3.2 s, como es de esperarse para una partícula de esta masa (línea 60).

LISTADO DE PROGRAMA

```
10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- POSITION DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN F(X), V0, X0, M;   COMPUTES V(T), X(T)
30 'SPECIFY INITIAL VALUES AND MASS OF PARTICLE
40 V0 = 0      'METERS PER SECOND
50 X0 = .05        'METERS
60 M = 2.5 'KILOGRAMS'
70 'SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
80 '      FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
90 TMAX = 40
100 'SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
110 '      EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
120 TU=.1
130 'SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '      INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT = 10
160 DT = TU/NT
170 V=V0
180 X=X0
190 'INSERT F(X) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
200 DEF FNF(X)=-9.600001*X
210 PRINT " TIME        VELOCITY       POSITION"
220 PRINT "   (S)         (M/S)            (M) "
230 LPRINT " TIME        VELOCITY       POSITION"
240 LPRINT "   (S)         (M/S)            (M) "
250 LPRINT USING "###.##";TIME;:PRINT USING "+##########.###";V0,X0
260 PRINT USING "###.##";TIME;:PRINT USING "+##########.###";V0,X0
```

```
270  'BEGIN ITERATION
280  FOR TIME = 1 TO TMAX
290  FOR N = 1 TO NT
300  A=FNF(X)/M 'ACCELERATION IN INTERVAL
310  X = X + V*DT + .5*A*DT*DT 'POSITION AT END OF INTERVAL
320  V = V + A*DT 'VELOCITY AT END OF INTERVAL
330  NEXT N
340  PRINT USING "###.##";TIME*TU;:PRINT USING "+##########.###";V,X
350  LPRINT USING "###.##";TIME*TU;:LPRINT USING "+##########.###";V,X
360  NEXT TIME
400  END
```

SALIDA DE MUESTRA

| TIME (S) | VELOCITY (M/S) | POSITION (M) |
|---|---|---|
| 0.00 | +0.000 | +0.050 |
| 0.10 | -0.019 | +0.049 |
| 0.20 | -0.037 | +0.046 |
| 0.30 | -0.054 | +0.042 |
| 0.40 | -0.069 | +0.035 |
| 0.50 | -0.082 | +0.028 |
| 0.60 | -0.091 | +0.019 |
| 0.70 | -0.097 | +0.010 |
| 0.80 | -0.099 | -0.000 |
| 0.90 | -0.097 | -0.010 |
| 1.00 | -0.092 | -0.019 |
| 1.10 | -0.083 | -0.028 |
| 1.20 | -0.070 | -0.036 |
| 1.30 | -0.056 | -0.042 |
| 1.40 | -0.039 | -0.047 |
| 1.50 | -0.020 | -0.050 |
| 1.60 | -0.001 | -0.051 |
| 1.70 | +0.019 | -0.050 |
| 1.80 | +0.037 | -0.047 |
| 1.90 | +0.055 | -0.042 |
| 2.00 | +0.070 | -0.036 |
| 2.10 | +0.083 | -0.028 |
| 2.20 | +0.092 | -0.020 |
| 2.30 | +0.098 | -0.010 |
| 2.40 | +0.100 | -0.000 |
| 2.50 | +0.099 | +0.010 |
| 2.60 | +0.093 | +0.019 |
| 2.70 | +0.084 | +0.028 |
| 2.80 | +0.072 | +0.036 |
| 2.90 | +0.057 | +0.043 |
| 3.00 | +0.040 | +0.047 |
| 3.10 | +0.021 | +0.050 |
| 3.20 | +0.001 | +0.052 |
| 3.30 | -0.018 | +0.051 |
| 3.40 | -0.037 | +0.048 |
| 3.50 | -0.055 | +0.043 |
| 3.60 | -0.071 | +0.037 |
| 3.70 | -0.084 | +0.029 |
| 3.80 | -0.093 | +0.020 |
| 3.90 | -0.099 | +0.011 |
| 4.00 | -0.102 | +0.001 |

# APÉNDICE J

# PREMIOS NOBEL DE FÍSICA*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1901 | Wilhelm Konrad Röentgen | 1845-1923 | por el descubrimiento de los rayos X |
| 1902 | Hendrik Antoon Lorentz | 1853-1928 | por sus investigaciones sobre la influencia |
| | Pieter Zeeman | 1865-1943 | del magnetismo en los fenómenos de radiación |
| 1903 | Antoine Henri Becquerel | 1852-1908 | por su descubrimiento de la radiactividad espontánea |
| | Pierre Curie | 1859-1906 | por sus investigaciones conjuntas sobre los fenómenos de radiación |
| | Marie Sklowdowska-Curie | 1867-1934 | descubiertos por el profesor Henri Becquerel |
| 1904 | Lord Rayleigh (John William Strutt) | 1842-1919 | por sus investigaciones de las densidades de los gases más importantes y por su descubrimiento del argón |
| 1905 | Philipp Eduard Anton v. Lenard | 1862-1947 | por su trabajo sobre los rayos catódicos |
| 1906 | Joseph John Thomson | 1856-1940 | por sus investigaciones teóricas y experimentales sobre la conducción de la electricidad en los gases |
| 1907 | Albert Abraham Michelson | 1852-1931 | por sus instrumentos ópticos de precisión y las investigaciones metrológicas llevadas a cabo con su ayuda |
| 1908 | Gabriel Lippmann | 1845-1921 | por su método para reproducir los colores fotográficamente basado en los fenómenos de interferencia |
| 1909 | Guglielmo Marconi | 1874-1937 | por sus contribuciones al desarrollo de la telegrafía |
| | Carl Ferdinand Braun | 1850-1918 | inalámbrica |
| 1910 | Johannes Diderik van der Waals | 1837-1932 | por su trabajo sobre la ecuacion de estado para los gases y los líquidos |
| 1911 | Wilhelm Wien | 1864-1928 | por sus descubrimientos con respecto a las leyes que gobiernan la radiación del calor |
| 1912 | Nils Gustaf Dalén | 1869-1937 | por su invento de los reguladores automáticos para usarse junto con los acumuladores de gas para iluminar los faros y las boyas |
| 1913 | Heike Kamerlingh Onnes | 1853-1926 | por sus investigaciones de las propiedades de la materia a bajas temperaturas que condujeron, entre otras cosas, a la producción del helio líquido |
| 1914 | Max von Laue | 1879-1960 | por su descubrimiento de la difracción de los rayos Röntgen en los cristales |
| 1915 | William Henry Bragg | 1862-1942 | por sus servicios en el analisis de la estructura cristalina por |
| | William Lawrence Bragg | 1890-1971 | medio de los rayos X |
| 1917 | Charles Glover Barkla | 1877-1944 | por su descubrimiento de los rayos X característicos de los elementos |
| 1918 | Max Planck | 1858-1947 | por su descubrimiento de los cuantos de energía |
| 1919 | Johannes Stark | 1874-1957 | por su descubrimiento del efecto Doppler en los rayos canal y la separación de las líneas espectrales en los campos eléctricos |
| 1920 | Charles-Édouard Guillaume | 1861-1938 | por el servicio rendido a las mediciones de precisión en física a través de su descubrimiento de las anomalías en las aleaciones de acero-níquel |
| 1921 | Albert Einstein | 1879-1955 | por sus servicios a la física teórica, y especialmente por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico |
| 1922 | Neils Bohr | 1885-1962 | por la investigación de la estructura de los átomos y de la radiación que emana de ellos |
| 1923 | Robert Andrews Millikan | 1868-1953 | por su trabajo sobre la carga elemental de electricidad y sobre el efecto fotoeléctrico |
| 1924 | Karl Manne Georg Siegbahn | 1888-1979 | por sus descubrimientos e investigación en el campo de la espectroscopia de rayos X |
| 1925 | James Franck | 1882-1964 | por su descubrimiento de las leyes que gobiernan el |
| | Gustav Hertz | 1887-1975 | impacto de un electrón sobre un átomo |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1926 | Jean Baptiste Perrin | 1870-1942 | por su trabajo sobre la estructura discontinua de la materia, y especialmente por su descubrimiento del equilibrio de la sedimentación |
| 1927 | Arthur Holly Compton | 1892-1962 | por su descubrimiento del efecto que lleva su nombre |
| | Charles Thomson Rees Wilson | 1869-1959 | por su método para hacer visibles las trayectorias de las partículas cargadas eléctricamente por la condensación del vapor |
| 1928 | Owen Willans Richardson | 1879-1959 | por su trabajo sobre los fenómenos termoiónicos y especialmente por el descubrimiento de la ley que lleva su nombre |
| 1929 | Prince Louis-Victor de Broglie | 1892-1987 | por su descubrimiento de la naturaleza ondulatoria de los electrones |
| 1930 | Sir Chandrasekhara Ventaca Raman | 1888-1970 | por su trabajo sobre la dispersión de la luz y por el descubrimiento del efecto que lleva su nombre |
| 1932 | Werner Heisenberg | 1901-1976 | por la creación de la mecánica cuántica cuya aplicación ha conducido, entre otras cosas, al descubrimiento de las formas alotrópicas del hidrógeno |
| 1933 | Erwin Schrödinger | 1887-1961 | por el descubrimiento de nuevas formas productivas de la teoría atómica |
| | Paul Adrien Maurice Dirac | 1902-1984 | |
| 1935 | James Chadwick | 1891-1974 | por su descubrimiento del neutrón |
| 1936 | Victor Franz Hess | 1883-1964 | por el descubrimiento de la radiación cósmica |
| | Carl David Anderson | 1905-1991 | por su descubrimiento del positrón |
| 1937 | Clinton Joseph Davisson | 1881-1958 | por sus descubrimientos experimentales de la difracción de los |
| | George Paget Thomson | 1892-1975 | electrones por cristales |
| 1938 | Enrico Fermi | 1901-1954 | por sus demostraciones de la existencia de nuevos elementos radiactivos producidos por la irradiación con neutrones, y por su descubrimiento relacionado con las reacciones nucleares causadas por neutrones lentos |
| 1939 | Ernest Orlando Lawrence | 1901-1958 | por el invento y desarrollo del ciclotrón y por los resultados obtenidos con él, especialmente en elementos radiactivos artificiales |
| 1943 | Otto Stern | 1888-1969 | por su contribución al desarrollo del método de rayos moleculares y su descubrimiento del momento magnético del protón |
| 1944 | Isidor Isaac Rabi | 1898-1988 | por su método de la resonancia para registrar las propiedades magnéticas de los núcleos (de los átomos) |
| 1945 | Wolfgang Pauli | 1900-1958 | por el descubrimiento del Principio de exclusión (principio Pauli) |
| 1946 | Percy Williams Bridgman | 1882-1961 | por el invento de un aparato para producir presiones extremadamente altas, y por los descubrimientos que hizo por ello en el campo de la física de altas presiones |
| 1947 | Sir Edward Victor Appleton | 1892-1965 | por sus investigaciones de la física de la alta atmósfera, especialmente por el descubrimiento de la capa llamada Appleton |
| 1948 | Patrick Maynard Stuart Blackett | 1897-1974 | por su desarrollo del método de la cámara Wilson, y con ello sus descubrimientos en física nuclear y radiación cósmica |
| 1949 | Hideki Yukawa | 1907-1981 | por su predicción de la existencia de los mesones con base en el trabajo teórico sobre las fuerzas nucleares |
| 1950 | Cecil Frank Powell | 1903-1969 | por su desarrollo del método fotográfico para estudiar los procesos nucleares y sus descubrimientos, hechos con este método, con respecto a los mesones |
| 1951 | Sir John Douglas Cockcroft | 1897-1967 | por su trabajo pionero sobre la transmutación de los núcleos |
| | Ernest Thomas Sinton Walton | 1903- | atómicos por partículas atómicas aceleradas artificialmente |
| 1952 | Felix Bloch | 1905-1983 | por su desarrollo de nuevos métodos de precisión para la resonancia |
| | Edward Mills Purcell | 1912- | magnética nuclear y sus descubrimientos en conexión con ellos |
| 1953 | Frits Zernike | 1888-1966 | por su demostración del método de contraste de fase, especialmente por su invento del microscopio de contraste de fase |
| 1954 | Max Born | 1882-1970 | por su investigación fundamental en la mecánica cuántica, especialmente por su interpretación estadística de la función de onda |
| | Walther Bothe | 1891-1957 | por el método de coincidencia y sus descubrimientos a partir de ello |
| 1955 | Willis Eugene Lamb | 1913- | por sus descubrimientos concernientes a la estructura fina del espectro del hidrógeno |
| | Polykarp Kusch | 1911- | por su determinación de precisión del momento magnético del electrón |
| 1956 | William Shockley | 1910-1989 | por sus investigaciones sobre los semiconductores y su |
| | John Bardeen | 1908-1991 | descubrimiento del efecto transistor |
| | Walter Houser Brattain | 1902-1987 | |
| 1957 | Chen Ning Yang | 1922- | por su penetrante investigación de las leyes de la paridad que |
| | Tsung Dao Lee | 1926- | condujeron a importantes descubrimientos sobre las partículas elementales |
| 1958 | Pavel Alecksejecič Čerenkov | 1904- | por el descubrimiento e interpretación del efecto Cerenkov |
| | Il'ja Michajlovic Frank | 1908-1990 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Igor' Evgen' evic Tamm | 1895-1971 | |
| 1959 | Emilio Gino Segrĕ | 1905-1989 | por su descubrimiento del antiprotón |
| | Owen Chamberlain | 1920- | |
| 1960 | Donald Arthur Glaser | 1926- | por el invento de la cámara de burbujas |
| 1961 | Robert Hofstadter | 1915-1990 | por sus estudios pioneros sobre la dispersión de los electrones por núcleos atómicos y por sus descubrimientos realizados concernientes a la estructura de los nucleones |
| | Rudolf Ludwig Mössbauer | 1929- | por sus investigaciones concernientes a absorción de los rayos $\gamma$ en resonancia y su descubrimiento a este respecto del efecto que lleva su nombre |
| 1962 | Lev Davidovič Landau | 1908-1968 | por sus teorías pioneras de la materia condensada, especialmente del helio líquido |
| 1963 | Eugene P. Wigner | 1902- | por su contribución a la teoría del núcleo atómico y las partículas elementales, particularmente a través del descubrimiento y la aplicación de los principios fundamentales de la simetría |
| | Maria Goeppert Mayer | 1906-1972 | por sus descubrimientos concernientes a la estructura de capas del núcleo |
| | J. Hans D. Jensen | 1907-1973 | |
| 1964 | Charles H. Townes | 1915- | por el trabajo fundamental en el campo de la electrónica cuántica que |
| | Nikolai G. Basov | 1922- | condujo a la construcción de los osciladores y los amplificadores |
| | Alexander M. Prochorov | 1916- | basada en el principio maser-láser |
| 1965 | Sin-itiro Tomonaga | 1906-1979 | por el trabajo fundamental en el campo de la electrodinámica |
| | Julian Schwinger | 1918- | cuántica, con consecuencias de profunda penetración en la física |
| | Richard P. Feynman | 1918-1988 | de las partículas elementales |
| 1966 | Alfred Kastler | 1902-1984 | por el descubrimiento y desarrollo de métodos ópticos para el estudio de la resonancia Hertziana en los átomos |
| 1967 | Hans Albrecht Bethe | 1906- | por sus contribuciones a la teoría de las reacciones nucleares, especialmente sus decubrimientos concernientes a la producción de energía en las estrellas |
| 1968 | Luis W. Alvarez | 1911-1988 | por su contribución decisiva a la física de las partículas elementales, en particular el descubrimiento de un gran número de estados de resonancia, hecho posible a través de su desarrollo de la técnica de emplear la cámara de burbujas de hidrógeno y el análisis de datos |
| 1969 | Murray Gell-Mann | 1929- | por su contribución y descubrimientos concernientes a la clasificación de las partículas elementales y sus interacciones |
| 1970 | Hannes Alvén | 1908- | por el trabajo fundamental y los descubrimientos en magneto-hidrodinámica con aplicaciones fructíferas en diferentes partes de la física del plasma |
| | Louis Néel | 1904- | por el trabajo fundamental y los descubrimientos concernientes al antiferromagnetismo y el ferromagnetismo que condujeron a aplicaciones importantes en la física del estado sólido |
| 1971 | Dennis Gabor | 1900-1979 | por su descubrimiento de los principios de la holografía |
| 1972 | John Bardeen | 1908-1991 | por su desarrollo de una teoría de la superconductividad |
| | Leon N. Cooper | 1930- | |
| | J. Robert Schrieffer | 1931- | |
| 1973 | Leo Esaki | 1925- | por su descubrimiento del efecto túnel en los semiconductores |
| | Ivar Giaever | 1929- | por su descubrimiento del efecto túnel en los superconductores |
| | Brian D. Josephson | 1940- | por su predicción teórica de las propiedades de una supercorriente a través de una barrera túnel |
| 1974 | Antony Hewish | 1924- | por su descubrimiento de los púlsares |
| | Sir Martin Ryle | 1918-1984 | por su trabajo pionero en radioastronomía |
| 1975 | Aage Bohr | 1922- | por el descubrimiento de la conexión entre el movimiento colectivo |
| | Ben Mottelson | 1926- | y el movimiento de partícula y el desarrollo de la teoría de la |
| | James Rainwater | 1917-1986 | estructura del núcleo atómico basada en esta conexión |
| 1976 | Burton Richter | 1931- | por su descubrimiento (independiente) de una partícula fundamental |
| | Samuel Chao Chung Ting | 1936- | importante |
| 1977 | Philip Warren Anderson | 1923- | por sus investigaciones teóricas fundamentales de la estructura |
| | Nevill Francis Mott | 1905- | electrónica de los sistemas magnéticos y desordenados |
| | John Hasbrouck Van Vleck | 1899-1980 | |
| 1978 | Peter L. Kapitza | 1894-1984 | por sus inventos y descubrimientos básicos en física de bajas temperaturas |
| | Arno A. Penzias | 1926- | por su descubrimiento de la radiación fósil (radiación cósmica de fondo en la región de las microondas) |
| | Robert Woodrow Wilson | 1936- | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1979 | Sheldon Lee Glashow | 1932- | por sus modelos unificados de la acción de las fuerzas débiles electromagnéticas y por su predicción de la existencia de corrientes neutras |
| | Abdus Salam | 1926- | |
| | Steven Weinberg | 1933- | |
| 1980 | James W. Cronin | 1931- | por el descubrimiento de las violaciones de los principios fundamentales de la simetría en la desintegración de los mesones K neutros |
| | Val L. Fitch | 1923- | |
| 1981 | Nicolaas Bloembergen | 1920- | por su contribución al desarrollo de la espectroscopia láser |
| | Arthur Leonard Schawlow | 1921- | |
| | Kai M. Siegbahn | 1918- | por su contribución de la espectroscopia electrónica de alta resolución |
| 1982 | Kenneth Geddes Wilson | 1936- | por su método para analizar los fenómenos críticos inherentes en los cambios de la materia bajo la influencia de la presión y la temperatura |
| 1983 | Subrehmanyan Chandrasekhar | 1910- | por sus estudios teóricos de la estructura y evolución de las estrellas |
| | William A. Fowler | 1911- | por sus estudios de la formación de los elementos químicos en el Universo |
| 1984 | Carlo Rubbia | 1934- | por sus contribuciones decisivas al gran proyecto que condujo al descubrimiento de las partículas de campo W y Z, portadoras de la interacción débil |
| | Simon van der Meer | 1925- | |
| 1985 | Klaus von Klitzing | 1943- | por su descubrimiento de la resistencia Hall cuantizada |
| 1986 | Ernst Ruska | 1906- | por su invento del microscopio electrónico |
| | Gerd Binnig | 1947- | por su invento del microscopico electrónico de barrido por efecto túnel |
| | Heinrich Rohrer | 1933- | |
| 1987 | Karl Alex Müller | 1927- | por su descubrimiento de una nueva clase de superconductores |
| | J. Georg Bednorz | 1950- | |
| 1988 | Leon M. Lederman | 1922- | por experimentos con haces de neutrinos y el descubrimiento del neutrino del muón |
| | Melvin Schwartz | 1932- | |
| | Jack Steinberger | 1921- | |
| 1989 | Hans G. Dehmelt | 1922- | por su desarrollo de las técnicas para atrapar átomos individuales |
| | Wolfgang Paul | 1913- | |
| | Norman F. Ramsey | 1915- | por sus descubrimientos en la espectroscopia por resonancia atómica, que condujeron a los masers de hidrógeno y a los relojes atómicos |
| 1990 | Richard E. Taylor | 1929- | por sus experimentos sobre la dispersión de los electrones por núcleos, lo que revela la presencia de los quarks dentro de los nucleones |
| | Jerome I. Friedman | 1930- | |
| | Henry W. Kendall | 1926- | |
| 1991 | Pierre-Gilles de Gennes | 1932- | por descubrimientos respecto al ordenamiento de las moléculas en sustancias tales como los cristales líquidos, los superconductores y los polímeros |

* Véase *Nobel Lectures, Physics*, Elsevier Publishing Company para las biografías de los premiados y las disertaciones dadas por ellos al recibir el premio.

# APÉNDICE K

# TABLAS

## ALGUNOS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

| | | | |
|---|---|---|---|
| $=$ | igual a | $\sim$ | es del orden de la magnitud de |
| $\approx$ | aproximadamente igual a | $\propto$ | es proporcional a |
| $\neq$ | no es igual a | lím | el límite de |
| $\equiv$ | es idéntico a, se define como | $\Sigma$ | la suma de |
| $>$ | es mayor que | $\int$ | la integral de |
| $>>$ | es mucho mayor que | $\Delta x$ | el cambio o diferencia en $x$ |
| $\geq$ | es mayor que o igual a | $\lvert x \rvert$ | el valor absoluto o la magnitud absoluta de $x$ |
| $<$ | es menor que | $\bar{x}$ | el valor promedio de $x$ |
| $<<$ | es mucho menor que | $df/dx$ | la derivada de $f$ con respecto a $x$ |
| $\leq$ | es menor que o igual a | $\partial f/\partial x$ | la derivada parcial de $f$ con respecto a $x$ |

## LOS PREFIJOS DEL SISTEMA INTERNACIONAL (SI)

| *Factor* | *Prefijo* | *Símbolo* | *Factor* | *Prefijo* | *Símbolo* |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^{18}$ | exa | E | $10^{-1}$ | deci | d |
| $10^{15}$ | peta | P | $10^{-2}$ | centi | c |
| $10^{12}$ | tera | T | $10^{-3}$ | mili | m |
| $10^{9}$ | giga | G | $10^{-6}$ | micro | $\mu$ |
| $10^{6}$ | mega | M | $10^{-9}$ | nano | n |
| $10^{3}$ | kilo | k | $10^{-12}$ | pico | p |
| $10^{2}$ | hecto | h | $10^{-15}$ | femto | f |
| $10^{1}$ | deca | d | $10^{-18}$ | atto | a |

## ALFABETO GRIEGO

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| alfa | A | $\alpha$ | iota | I | $\iota$ | rho | $\Pi$ | $\rho$ |
| beta | B | $\beta$ | kappa | K | $\kappa$ | sigma | $\Sigma$ | $\sigma$ |
| gamma | $\Gamma$ | $\gamma$ | lambda | $\Lambda$ | $\lambda$ | tau | T | $\tau$ |
| delta | $\Delta$ | $\delta$ | my | M | $\mu$ | ípsilon | Y | $\upsilon$ |
| épsilon | E | $\varepsilon$ | ny | N | $\nu$ | fi | $\Phi$ | $\phi$ |
| zeta | Z | $\zeta$ | xi | $\Xi$ | $\xi$ | ji | $X$ | $\chi$ |
| eta | H | $\eta$ | ómicron | O | $o$ | psi | $\Psi$ | $\psi$ |
| theta | $\Theta$ | $\theta$ | pi | $\Pi$ | $\pi$ | omega | $\Omega$ | $\omega$ |

## ALGUNAS TABLAS EN EL TEXTO


| *Tabla* | *Capítulo* | *Página* |
|---|---|---|
| Unidades básicas del SI | 1 | 2 |
| Prefijos del SI | 1 | 3 |
| Ecuaciones para el movimiento con aceleración constante | 2 | 27 |
| Ecuaciones vectoriales para el movimiento con aceleración constante | 4 | 62 |
| Coeficientes de fricción | 6 | 120 |
| Algunas velocidades terminales en el aire | 6 | 132 |
| Movimiento con aceleración lineal o angular constante | 11 | 265 |
| Inercias de rotación (figura) | 12 | 282 |
| Comparacion de las ecuaciones de la dinámica lineal y de rotación | 12 | 288 |
| Resumen de las ecuaciones de la dinámica rotatoria | 13 | 321 |
| Algunas propiedades elásticas de materiales selectos de interés en ingeniería | 14 | 343 |
| Variación de $g_0$ con la altitud | 16 | 389 |
| Ciertas velocidades de escape | 16 | 395 |
| Algunas densidades | 17 | 422 |
| Viscosidad de una selección de fluidos | 18 | 453 |
| La velocidad del sonido | 20 | 497 |
| Algunas intensidades y niveles de sonido | 20 | 501 |
| Las ecuaciones de transformación de Lorentz | 21 | 528 |
| La transformación de Lorentz de la velocidad | 21 | 530 |
| Algunos coeficientes de dilatación lineal promedio | 22 | 556 |
| Algunas velocidades moleculares a la temperatura ambiente | 23 | 570 |
| Capacidades caloríficas de algunas sustancias | 25 | 610 |
| Algunos calores de transformación | 25 | 610 |
| Capacidades caloríficas molares de los gases | 25 | 614 |
| Algunas conductividades térmicas y valores de $R$ | 25 | 623 |


## ALGUNAS UNIDADES Y SUS ABREVIATURAS

| | | | |
|---|---|---|---|
| ampere | A | litro | L |
| año | y | metro | m |
| atmósfera | atm | milla | mi |
| caballo de vapor | hp | minuto | min |
| caloría | cal | mol | mol |
| coulomb | C | newton | N |
| día | d | ohm | Ω |
| electronvolt | eV | pascal | Pa |
| farad | F | pie | ft |
| gauss | G | pulgada | in. |
| grado Celsius | °C | radián | rad |
| grado Fahrenheit | °F | revolución | rev |
| gramo | g | segundo | s |
| henry | H | tesla | T |
| hertz | Hz | unidad de masa atómica unificada | u |
| hora | h | unidad térmica británica | Btu |
| joule | J | volt | V |
| kelvin | K | watt | W |
| libra | lb | weber | Wb |

## ALGUNAS PROPIEDADES FÍSICAS

| | |
|---|---|
| Aire (seco, a 20°C y 1 atm) | |
| Densidad | 1.21 kg/m$^3$ |
| Calor específico a presión constante | 1010 J/kg · K |
| Razón de las capacidades caloríficas específicas | 1.40 |
| Velocidad del sonido | 343 m/s |
| Resistencia a la disrupción eléctrica | 3 × 10$^6$ V/m |
| Masa molar efectiva | 0.0289 kg/mol |
| Agua | |
| Densidad | 1000 kg/m$^3$ |
| Velocidad del sonido | 1460 m/s |
| Calor específico a presión constante | 4190 J/kg · K |
| Calor de fusión (0°C) | 333 kJ/kg |
| Calor de vaporización (100°C) | 2260 kJ/kg |
| Índice de refracción ($\lambda$ = 589 nm) | 1.33 |
| Masa molar | 0.0180 kg/mol |
| Tierra | |
| Masa | 5.98 × 10$^{24}$ kg |
| Radio medio | 6.37 × 10$^6$ m |
| Aceleración de la caída libre en la superficie de la Tierra | 9.81 m/s$^2$ |
| Atmósfera estándar | 1.01 × 10$^5$ Pa |
| Periodo del satélite a 100 km de altitud | 86.3 min |
| Radio de la órbita geosíncrona | 42,200 km |
| Velocidad de escape | 11.2 km/s |
| Momento dipolar magnético | 8.0 × 10$^{22}$ A · m$^2$ |
| Campo eléctrico medio en la superficie | 150 V/m, abajo |
| Distancia a: | |
| La Luna | 3.82 × 10$^8$ m |
| El Sol | 1.50 × 10$^{11}$ m |
| La estrella más cercana | 4.04 × 10$^{16}$ m |
| El centro galáctico | 2.2 × 10$^{20}$ m |
| La galaxia de Andrómeda | 2.1 × 10$^{22}$ m |
| Borde del universo observable | ~ 10$^{26}$ m |

## ALGUNAS CONSTANTES FÍSICAS*

| | | |
|---|---|---|
| Velocidad de la luz | $c$ | $3.00 \times 10^{8}$ m/s |
| Constante gravitatoria | $G$ | $6.67 \times 10^{11}$ N · m²/kg² |
| Constante de Avogadro | $N_A$ | $6.02 \times 10^{23}$ mol$^{-1}$ |
| Constante universal de los gases | $R$ | 8.31 J/mol · K |
| Relación masa-energía | $c^2$ | $8.99 \times 10^{16}$ J/kg |
| | | 931.5 × MeV/u |
| Constante dieléctrica | $\epsilon_0$ | $8.85 \times 10^{-12}$ F/m |
| Constante de permeabilidad | $\mu_0$ | $1.26 \times 10^{-6}$ H/m |
| Constante de Planck | $h$ | $6.63 \times 10^{-34}$ J · s |
| | | $4.14 \times 10^{-15}$ eV · s |
| Constante de Boltzmann | $k$ | $1.38 \times 10^{-23}$ J/K |
| | | $8.62 \times 10^{-5}$ eV/K |
| Carga elemental | $e$ | $1.60 \times 10^{-19}$ C |
| Masa de un electrón en reposo | $m_e$ | $9.11 \times 10^{-31}$ kg |
| Masa de un protón en reposo | $m_p$ | $1.67 \times 10^{-27}$ kg |
| Radio de Bohr | $a_0$ | $5.29 \times 10^{-11}$ m |
| Magnetón de Bohr | $\mu_B$ | $9.27 \times 10^{-24}$ J/T |
| | | $5.79 \times 10^{-5}$ eV/T |

*Para una lista más completa que muestre también los valores experimentales más usados, véase el apéndice B.

## ALGUNOS FACTORES DE CONVERSIÓN*

Masa
1 kg = 1000 g = $6.02 \times 10^{26}$ u
1 u = $1.66 \times 10^{-27}$ kg

Longitud
1 m = 100 cm = 39.4 in = 3.28 ft
1 mi = 1.61 km = 5280 ft
1 in = 2.54 cm
1 nm = $10^{-9}$ m = 10 A

Tiempo
1 d = 86 400 s
1 año = $365\frac{1}{4}$ d = $3.16 \times 10^{7}$ s

Volumen
1 L = 1000 cm³ = $10^{-3}$ m³ = 1.06 cuartos de galón
1 gal (U.S.) = 231 in³ = 3.79 L

Medidas angulares
1 rad = 57.3° = 0.159 rev
$\pi$ rad = 180° = $\frac{1}{2}$ rev

Velocidad
1 m/s = 3.28 ft/s = 2.24 mi/h
1 km/h = 0.621 mi/h

Fuerza y presión
1 N = $10^{5}$ dinas = 0.225 lb
1 Pa = 1 N/m² = 10 dinas/cm² = $1.45 \times 10^{-4}$ lb/in²
1 atm = $1.01 \times 10^{5}$ Pa = 14.7 lb/in² = 76 cmHg

Energía y potencia
1 J = $10^{7}$ erg = 0.239 cal = 0.738 ft · lb
1 kW · h = $3.6 \times 10^{6}$ J
1 cal = 4.19 J
1 eV = $1.60 \times 10^{-19}$ J
1 horsepower = 746 W = 550 · lb/s

Electricidad y magnetismo
1 T = 1 Wb/m² = $10^{4}$ gauss

*Véase el apéndice G para una lista más completa.

# RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS CON NÚMERO IMPAR

## CAPÍTULO 1

**3.** 52.6 min; 5.2%. **5.** −0.44%. **7.** (*a*) Sí. (*b*) 8.6 s.
**9.** 720 días. **11.** 55 s; alrededor de un minuto. **13.** 2 d 5 h.
**15.** (*a*) 100 m; 8.56 m; 28.1 ft. (*b*) 1 mi; 109 m; 358 ft.
**17.** $1.88 \times 10^{22}$ cm$^3$. **19.** (*a*) $4.00 \times 10^4$ km.
(*b*) $5.10 \times 10^8$ km$^2$. (*c*) $1.08 \times 10^{12}$ km$^3$.
**21.** $2.86 \times 10^{-3}$ años-luz/siglo.
**23.** (*a*) $4.85 \times 10^{-6}$ pc; $1.58 \times 10^{-5}$ años-luz.
(*b*) $9.48 \times 10^{12}$ km; $3.08 \times 10^{13}$ km. **25.** (*a*) 390.
(*b*) $5.9 \times 10^7$. (*c*) 3500 km. **27.** $5.97 \times 10^{26}$.
**29.** Nueva York. **31.** 840 km. **33.** 132 kg/s.
**37.** 605.780211 nm. **39.** (*a*) 43.2 cm$^2$. (*b*) 43 cm$^2$.
**41.** $\sqrt{Gh/c^3} = 4.05 \times 10^{-35}$ m.

## CAPÍTULO 2

**1.** 81 ft (24 m). **3.** 2 cm/año. **5.** 48 mi/h.
(El físico hizo otro movimiento además de este viaje semanal.)
**7.** (*a*) 45.0 mi/h (72.4 km/h). (*b*) 42.8 mi/h (68.8 km/h).
(*c*) 43.9 mi/h (70.6 km/h). **9.** (*a*) 0, 0, −2, 0, 12 m.
(*b*) −2, 12 m. (*c*) 7, 0 m/s. **11.** (*a*) 5.7 ft/s. (*b*) 7.0 ft/s.
**13.** (*a*) 28.5 cm/s. (*b*) 18.0 cm/s. (*c*) 40.5 cm/s. (*d*) 28.1 cm/s.
(*e*) 30.4 cm/s. **15.** −2 m/s$^2$.
**19.** (*a*) *OA*: +, −; *AB*: 0, 0; *BC*: +, +; *CD*: +, 0. (*b*) No.
**21.** (*e*) Situaciones (*a*), (*b*), y (*d*). **23.** (*a*) 80 m/s.
(*b*) 110 m/s. (*c*) 20 m/s$^2$.
**25.** (*b*) −0.030, −0.020, −0.010, 0.0 m/s.
(*c*) −0.040, −0.020, 0.0, 0.020, 0.040, 0.060 m/s.
(*e*) 0.020, 0.020, 0.020 m/s$^2$. **27.** (*b*) 19 m/s. (*c*) 31 m.
**29.** 2.8 m/s$^2$ (9.4 ft/s$^2$). **31.** 560 ms. **33.** $1.4 \times 10^{15}$ m/s$^2$.
**35.** 2.6 s. **37.** (*a*) $4.5 \times 10^4$ ft/s$^2$. (*b*) 5.8 ms.
**39.** (*a*) 5.71 m/s$^2$. (*b*) 3.68 s. (*c*) 5.78 s. (*d*) 95.4 m.
**41.** (*a*) 60.6 s. (*b*) 36.4 m/s. **43.** (*a*) 0.75 s. (*b*) 50 m.
**45.** (*a*) 82 m. (*b*) 19 m/s. **47.** (*a*) 12 ft/s$^2$ (3.6 m/s$^2$).
(*b*) 3.7 ft/s (1.4 m/s). **49.** (*a*) 0.74 s. (*b*) −20 ft/s$^2$.
**51.** (*a*) 48.5 m/s. (*b*) 4.95 s. (*c*) 34.3 m/s. (*d*) 3.50 s.
**53.** (*a*) 32.4 m/s. (*b*) 6.62 s. **55.** Mercurio.
**57.** 1.23, 4.90, 11.0, 19.6, 30.6 cm. **59.** 3.0 m (9.8 ft).
**61.** (*a*) 350 ms. (*b*) 82 ms.
**63.** 22.2 y 88.9 cm abajo de la boca de una regadera. **65.** 130 m/s$^2$, arriba.
**67.** (*a*) 3.41 s. (*b*) 57.0 m. **69.** ≈ 0.3 s. **71.** (*a*) 17.1 s.
(*b*) 293 m. **75.** 6.8 cm.

## CAPÍTULO 3

**1.** Los desplazamientos deberán ser (*a*) paralelos, (*b*) antiparalelos, (*c*) perpendiculares. **3.** (*a*) 370 m, 57° al Este del Norte.
(*b*) Magnitud del desplazamiento = 370 m; distancia caminada = 420 m.
**7.** (*a*) 4.5 unidades, 52° al Norte del Este.
(*b*) 8.4 unidades, 25° al Sur del Este.
**9.** Walpole (la prisión estatal). **11.** (*a*) 4.9 m. (*b*) 12 m.
**13.** 4.76 km. **15.** (*a*) 28 m. (*b*) 13 m.
**17.** (*a*) $10\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$. (*b*) 21 ft.
(*c*) Puede ser igual o mayor, pero no menor. (*d*) 26 ft.
**19.** (*a*) $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. (*b*) $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. (*c*) $-5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.
**21.** (*a*) $1400\mathbf{i} + 2100\mathbf{j} - 48\mathbf{k}$. (*b*) Cero.
**23.** (*a*) $r_x = 2.50$, $r_y = 15.3$. (*b*) 15.5. (*c*) 80.7°.
**27.** (*a*) $\mathbf{ai} + \mathbf{aj} + \mathbf{ak}$, $\mathbf{ai} + \mathbf{aj} - \mathbf{ak}$, $\mathbf{ai} - \mathbf{aj} - \mathbf{ak}$, $\mathbf{ai} - \mathbf{aj} + \mathbf{ak}$.
(*b*) 54.7°. (*c*) $a\sqrt{3}$. **33.** (*a*) -19. (*b*) 27, dirección +*z* positiva.
**39.** (*a*) −21. (*b*) −9. (*c*) $5\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$. **41.** (*a*) 0. (*b*) −16.
(*c*) −9. **43.** (*a*) 2.97. (*b*) $1.51\mathbf{i} - 2.67\mathbf{j} - 1.36\mathbf{k}$. (*c*) 48.5°.
**49.** 70.5°.

## CAPÍTULO 4

**1.** (*a*) 920 mi, 63° al Sur del Este.
(*b*) 410 mi/h, 63° al Sur del Este. (*c*) 550 mi/h.
**3.** (*a*) 3.9 km/h. (*b*) 13°. **5.** (*a*) 24 ns. (*b*) 2.7 mm.
(*c*) $9.6 \times 10^8$ cm/s; $2.3 \times 10^8$ cm/s. **7.** (*a*) $8t\mathbf{j} + \mathbf{k}$. (*b*) $8\mathbf{j}$.
(*c*) Una parábola. **9.** 60°. **11.** (*a*) 514 ms. (*b*) 9.94 ft/s.
**13.** (*a*) 18 cm. (*b*) 1.9 m. **15.** (*a*) 3.03 s. (*b*) 758 m.
(*c*) 29.7 m/s. **17.** No. **19.** (*a*) 1.16 s. (*b*) 13.0 m.
(*c*) 18.8 m/s; 5.56 m/s. (*d*) No. **21.** (*b*) 76.0°. **23.** (*a*) 99 ft.
(*b*) 90 ft/s. (*c*) 180 ft. **25.** (*a*) 285 km/h. (*b*) 33°.
**27.** (*a*) 310 ms. (*b*) 1.9 m y 2.9 m sobre las manos.
**29.** El tercero. **31.** Sí. **33.** (*a*) 260 m/s. (*b*) 45 s.
**35.** 23 ft/s. **37.** (*a*) 9.8 s. (*b*) 2700 ft.
**39.** 40 m (130 ft) aproximadamente. **41.** (*a*) 20 cm.
(*b*) No; la pelota golpea la red a 4.4 cm arriba del suelo.
**43.** Entre los ángulos 31° y 63° sobre la horizontal.
**45.** 115 ft/s. **47.** (*a*) $D = v\sqrt{(2L/g)\operatorname{sen}\theta} - L\cos\theta$.
(*b*) El proyectil pasará sobre la cabeza del observador si $D$ es positiva y pega en el suelo antes si $D$ es negativa.
**49.** 5.66 s. **51.** $8.98 \times 10^{22}$ m/s$^2$. **53.** (*a*) 7.49 km/s.
(*b*) 8.00 m/s$^2$. **55.** (*a*) 94 cm. (*b*) 19 m/s. (*c*) 2400 m/s$^2$.
**57.** (*a*) 130 km/s. (*b*) 850 km/s$^2$. **61.** (*a*) 92. (*b*) 9.6.
(*c*) $92 = (9.6)^2$. **63.** 2.6 cm/s$^2$. **65.** (*a*) 33.6 m/s$^2$.
(*b*) 89.7 m/s$^2$. **67.** 36 s; no.
**69.** El viento sopla del Oeste a 55 mi/h. **71.** 31 m/s.
**75.** (*a*) 5.8 m/s. (*b*) 17 m. (*c*) 67°. (*d*) 49°.
**77.** 170 km/h, 7.3° al Sur del Oeste. **79.** (*a*) 30° corriente arriba.
(*b*) 69 min. (*c*) 80 min. (*d*) 80 min.
(*e*) Perpendicular a la corriente; 60 min.
**81.** Dirigir al bote 25° corriente arriba. (*b*) 0.21 h. **83.** 0.83*c*.
**85.** (*b*) $t = 2.16$ s, $x = 97.7$ m, $y = 22.8$ m.
(*c*) $t = 4.31$ s, $x = 195$ m, $v_x = 45.3$ m/s, $v_y = -21.1$ m/s.

## CAPÍTULO 5

**1.** 6.3 años. **3.** (*a*) $1.0 \times 10^{-15}$ N. (*b*) $8.9 \times 10^{-30}$ N.
**5.** 8.0 cm/s². **7.** 6500 N. **9.** (*a*) 3.1 cm/s². (*b*) $1.2 \times 10^5$ km.
(*c*) 2.7 km/s. **11.** (*a*) 42**i** + 34**j**, m/s. (*b*) 630**i** + 250**j**, m.
**13.** (*a*) $1.39 \times 10^8$ N; $6.94 \times 10^6$ N. (*b*) 4.11 años; 4.19 años.
**15.** (*a*) 0.62 m/s². (*b*) 0.13 m/s². (*c*) 2.6 m.
**17.** (*a*) 44.4 slug; 1420 lb. (*b*) 412 kg; 4040 N.
**19.** (*a*) 12.2 N; 2.65 kg. (*b*) Cero; 2.65 kg. **21.** 1600 lb
**23.** $1.19 \times 10^6$ N (133 ton). **25.** (*a*) 1.8 mN. (*b*) 3.3 mN.
**27.** 0.15 N. **29.** (*a*) 210 m/s² (710 ft/s²). (*b*) 17 kN (4000 lb).
**31.** (*a*) 7.3 kg (0.50 slug). (*b*) 89 N (20 lb). **33.** (*a*) 2.1 m/s².
(*b*) 120 N. (*c*) 21 m/s². **35.** (*a*) 1.8 m/s². (*b*) 3.8 m/s.
(*c*) 4.0 m. (*d*) 11°. **37.** 18.4 kN. **39.** (*b*) 12 ft/s². (*c*) 8.9°.
**41.** 33 m/s. **43.** (*a*) 730 N. (*b*) 1300 N. **45.** (*a*) 3260 N.
(*b*) 2720 kg. (*c*) 1.20 m/s². **47.** (*a*) $5.0 \times 10^5$ N.
(*b*) $1.4 \times 10^6$ N. **49.** $2M\left(\dfrac{a}{a+g}\right)$.
**51.** (*a*) $g$ sen $\theta$, hacia abajo del plano inclinado.
(*b*) $g$ sen $\theta$, hacia abajo del plano inclinado. (*c*) $(g - a)$ sen $\theta$, hacia abajo del plano inclinado.
(*d*) $(g + a)$ sen $\theta$, hacia abajo del plano inclinado. (*e*) Cero.
(*f*) $m(g - a)\cos\theta$. **53.** (*a*) 6.8 m/s.
(*b*) Sí; puede subir por el cable mientras cae.
**55.** (*a*) 0.97 m/s². (*b*) $T_1 = 1.2$ N; $T_2 = 3.5$ N.
**57.** (*a*) 135 N. (*b*) 45.3 N. (*c*) 75.4 N. **59.** (*a*) 0.217 m/s².
(*b*) 17.8 N. **61.** (*a*) 12.1 kN. (*b*) 10.5 kN.
(*c*) 1.60 kN, hacia el contrapeso. **63.** (*a*) 37 N.
(*b*) 55 N. (*c*) 36 m/s², hacia arriba.
**65.** (*b*) $P/(m + M)$. (*c*) $PM/(m + M)$.
(*d*) $P(m + 2M)/2(m + M)$. **67.** 130 lb.

## CAPÍTULO 6

**1.** 2.3°. **3.** 9.3 m/s². **5.** 900 N. **7.** (*a*) 9.1 kN. (*b*) 9.0 kN.
**9.** (*a*) No. (*b*) Una fuerza de 12 lb hacia la izquierda y una fuerza de 5.0 lb hacia arriba.
**11.** (*a*) 11.1 N. (*b*) 47.3 N. (*c*) 40.1 N. **15.** (*a*) $v_0^2/4g$ sen $\theta$.
(*b*) No. **17.** (*a*) 10 kg. (*b*) 2.7 m/s². **19.** (*a*) 61 N. (*b*) 66 N.
(*c*) 5.9 kN. **21.** (*a*) 70 lb. (*b*) 4.6 ft/s². **23.** (*b*) 30 MN.
**25.** (*a*) 1.24 m/s². (*b*) 13.4 N. **27.** $g(\text{sen}\,\theta - \sqrt{2}\mu_k \cos\theta)$.
**29.** (*a*) 3.46 m/s². (*b*) 0.910 N, en tensión.
(*c*) 3.46 m/s²; 0.910 N en compresión. **31.** (*a*) 7.6 m/s².
(*b*) 0.86 m/s². **33.** (*a*) 730 lb (3200 N). (*b*) 0.30.
**35.** (*a*) 0.46. (*b*) 0.92. **37.** 870 N; 17°. **39.** 0.032.
**41.** (*a*) 0.43. (*b*) 42 m. **43.** (*a*) 175 lb. (*b*) 50.0 lb.
**45.** (*a*) 30 cm/s. (*b*) 170 cm/s², radialmente hacia adentro. (*c*) 2.9 mN. (*d*) 0.40. **47.** 2.32 km. **49.** (*a*) En el fondo del círculo.
(*b*) 31 ft/s. **51.** (*a*) 0.0337 N. (*b*) 9.77 N.
**53.** (*a*) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g(\tan\theta + \mu_s)}{r(1 - \mu_s \tan\theta)}}$. (*b*) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g(\tan\theta - \mu_s)}{r(1 + \mu_s \tan\theta)}}$.
**55.** (*a*) 235 m/s. (*b*) 107 m/s². (*c*) 232 N.
**57.** (*a*) $0.632F_0T/m$. (*b*) $0.368F_0T^2/m$. **59.** $\sqrt{mg/b}$.
**61.** $2.0 \times 10^{-5}$ N·s/m. **63.** 1.30 m/s.
**65.** (*a*) $\left(\dfrac{m}{b}\right)\ln(v_i/v_f)$. (*b*) 19 s. **67.** (*b*) 370 m.
**69.** (*a*) 11.7 s. (*b*) 59.8 m/s. (*c*) 0.610.
**71.** 819, 838, 833, 805, 762 m; 30°.
**73.** (*a*) $t = 1.95$ s, $x = 80.4$ m, $y = 20.0$ m,
$v_x = 37.3$ m/s, $v_y = 0$, $a_x = -3.73$ m/s², $a_y = -9.80$ m/s²;
(*b*) $t = 1.79$ s, $x = 68.3$ m, $y = 17.8$ m, $v_x = 31.7$ m/s, $v_y = 0$,
$a_x = -6.33$ m/s², $a_y = -9.80$ m/s²; (*c*) 151 m, 121 m;
(*d*) para $b = 0.10$ s⁻¹: $v_x = 30.3$ m/s, $v_y = -18.5$ m/s;
para $b = 0.20$ s⁻¹: $v_x = 21.1$ m/s, $v_y = -16.4$ m/s

## CAPÍTULO 7

**1.** (*a*) 580 J. (*b*) Cero. (*c*) Cero. **3.** (*a*) 430 J. (*b*) -400 J.
(*c*) Cero. **5.** (*a*) $-\frac{3}{4}Mgd$. (*b*) $Mgd$. **7.** (*a*) 2160 J.
(*b*) −1430 J. **9.** (*a*) 215 lb. (*b*) $1.01 \times 10^4$ ft·lb. (*c*) 48.0 ft.
(*d*) $1.03 \times 10^4$ ft·lb. **11.** 800 J. **13.** $(3/2)F_0x_0$.
**15.** (*a*) 23 mm. (*b*) 45 N. **17.** (*a*) 135 N. (*b*) 60.0 J.
**19.** 1200 km/s. **21.** *AB*: +; *BC*: 0; *CD*: −; *DE*: +.
**23.** 100 ft; no. **25.** 20.2 ft·lb (24.4 J).
**27.** Hombre, 2.41 m/s; joven, 4.82 m/s.
**29.** (*a*) $9.0 \times 10^4$ "megatones de TNT". (*b*) 45 km.
**31.** 6.55 m/s. **33.** (*a*) 304 mJ. (*b*) −1.75 J. (*c*) 3.32 m/s.
(*d*) 22.5 cm. **35.** 720 W (0.97 hp). **37.** 24 W.
**39.** (*a*) $2.45 \times 10^5$ ft·lb. (*b*) 0.619 hp. **41.** 90.3 kN.
**43.** 25 hp. **45.** (*a*) 0.77 mi. (*b*) 71 kW. **47.** 16.6 kW.
**49.** (*b*) $mtv_f^2/t_f^2$. **51.** 2.66 hp. **53.** (*b*) 1.95.
**55.** (*a*) 10.0 kW. (*b*) 2.97 kJ. **57.** 69 hp. **61.** (*a*) 0.13*c*.
(*b*) 4.6 keV. (*c*) Bajo por 1.3%. **63.** (*a*) 79.1 keV.
(*b*) 3.11 MeV. (*c*) 10.9 MeV.

## CAPÍTULO 8

**1.** 110 MN/m. **3.** (*a*) 7.8 MJ. (*b*) 6.2. **5.** 2.15 m/s.
**7.** (*a*) 27.0 kJ. (*b*) 2.94 kJ. (*c*) 158 m/s; *a*, *b*. **9.** (*a*) 2.56 J.
(*b*) 11.1 m/s. **11.** 830 ft. **13.** 2.75 m/s. **15.** (*a*) 1300 MW.
(*b*) 137 M$. **19.** 4.24 m. **21.** (*a*) 34.2 ft/s. (*b*) 4.32 in.
**23.** $mgL/32$. **25.** 11.1 cm.
**27.** (*a*) $8.06mg$, a 82.9° a la izquierda de la vertical. (*b*) $5R/2$.
**29.** (*a*) $U(x) = -Gm_1m_2/x$. (*b*) $Gm_1m_2\,d/x_1(x_1 + d)$.
**31.** (*a*) 69.2 J. (*b*) 7.99 m/s. (*c*) Conservativa.
**35.** (*a*) 44.6 cm. (*b*) 3.47 cm. **37.** (*a*) $\sqrt{5gR}$.
(*b*) $\theta = \text{sen}^{-1}(1/3)$. **41.** (*c*) $-1.2 \times 10^{-19}$ J. (*d*) $2.2 \times 10^{-19}$ J.
(*e*) $\approx 1 \times 10^{-9}$ N, hacia *M*. **45.** (*a*) $-U_0(r_0r^{-2} + r^{-1})e^{-r/r_0}$.
(*b*) 0.14, 0.0078, $6.8 \times 10^{-6}$. **47.** (*a*) 3.02 kJ. (*b*) 391 J.
(*c*) 2.63 kJ. **49.** 39 kW. **51.** 472 kJ. **53.** 4.19 m.
**55.** 65.1 cm/s. **57.** (*a*) 48.7 m/s. (*b*) 64.5 kJ.
**59.** (*a*) 24.0 ft/s. (*b*) 3.00 ft. (*c*) 9.00 ft. (*d*) 48.8 ft.
**61.** (*a*) 10.8 PJ. (*b*) 263,000 años. **63.** Disminuye en 1.10 kg.
**65.** 266 veces la circunferencia ecuatorial de la Tierra.
**67.** 191. **69.** 2.21 eV. **71.** (*a*) −12.5 kJ. (*b*) 2.70 kJ.
(*c*) −9.80 kJ. (*d*) 1.70 kJ. (*e*) 100 J.
(*f*) $x = 2.95$ m, $y = -2.95$ m.
**73.** (*a*) 0.541, 0.541, 0.541 J. (*b*) 0.541, 1.08, 0.383 J.

## CAPÍTULO 9

**1.** (*c*) $x_1 = x_{cm} - (m_2/M)(L + d_i \cos\omega t)$;
$x_2 = x_{cm} + (m_1/M)(L + d_i \cos\omega t)$; $v_1 = (m_2/M)d_i\omega$ *sen* $\omega t$;
$v_2 = -(m_1/M)d_i\omega$ sen $\omega t$.
**3.** 4640 km (1730 km bajo la superficie de la Tierra).
**5.** 75.2 km/h. **7.** (*a*) Abajo; $mv/(m + M)$.
(*b*) Globo de nuevo estacionario. **9.** (*a*) $L$. (*b*) Cero.
**11.** (*a*) A medio camino entre ellos.
(*b*) Se mueve 1.12 mm hacia el cuerpo más pesado.
(*c*) $0.00160g$, hacia abajo. **13.** $g(1 - 2x/L)$. **15.** 55.2 kg.
**17.** $L/5$ a partir de la barra pesada, a lo largo del eje de simetría.
**19.** $x_{cm} = y_{cm} = 20$ cm; $z_{cm} = 16$ cm.
**21.** $4R/3\pi$ arriba de la base plana, a lo largo del eje de simetría.
**23.** (*a*) $6.94 \times 10^4$ J.
(*b*) $3.56 \times 10^4$ kg · m/s, 38.7° al Sur del Este. **25.** (*a*) 6.96 J.
(*b*) $P_i = 0.854$ kg · m/s, 27.4° arriba de la horizontal;
$P_f = 0.854$ kg · m/s, 27.4° abajo de la horizontal; 0.786 kg · m/s, verticalmente hacia abajo. (*c*) 1.53 s.
**29.** 0.0103 ft/s, hacia atrás. **31.** $wv_{rel}/(W + w)$. **33.** 27.
**35.** (*a*) Cubierta del cohete: 7290 m/s; carga útil: 8200 m/s.

(*b*) Antes: 12.71 GJ; después: 12.75 GJ.
**37.** (*a*) $1.4 \times 10^{-22}$ kg · m/s, a 150° de la traza del electrón y 120° de la traza del neutrino. (*b*) 1.0 eV.
**39.** (*a*) 746 m/s. (*b*) 963 m/s. **41.** Sí.
**43.** $\left(\frac{u\cos\alpha}{\sqrt{1-u\cos^2\alpha}}\right)\sqrt{2gh}$, $u = \frac{m}{m+M}$. **45.** 2.66 m/s.
**47.** (*a*) 1790 N. (*b*) 609 J. **51.** (*a*) 2.72. (*b*) 7.39.
**53.** 1.33 km/s. **55.** 60 N. **57.** (*a*) 49.1 kg. (*b*) 141 kg.
**59.** (*a*) 23.4 kN (5260 lb). (*b*) 4.31 MW (5780 hp).

## CAPÍTULO 10

**1.** 64 kN. **3.** $2\mu u$. **5.** (*a*) 2.40 N·s. (*b*) 2.40 N·s.
(*c*) 2.00 kN. (*d*) 62.7 J. **7.** 3.29 kN (744 lb).
**9.** (*a*) 2.20 N · s, a la izquierda. (*b*) 212 N, a la derecha.
**11.** (*a*) $1.95 \times 10^5$ kg · m/s, para cada dirección del empuje: (*b*) Hacia atrás: +66.1 MJ; hacia adelante: -50.9 MJ; lateralmente: +7.61 MJ. **13.** 41.7 cm/s.
**17.** (*a*) 1.03 kg·m/s. (*b*) 250 J. (*c*) 10.3 N. (*d*) 824 N.
**19.** 124 kW. **21.** (*a*) 1.9 m/s, a la derecha. (*b*) Sí.
**23.** 4.2 m/s. **25.** (*a*) 2.74 m/s. (*b*) 1.46 km/s.
**27.** ≈2 mm/año. **29.** 1.2 kg.
**31.** (*a*) 74.4 m/s. (*b*) 81.5 m/s; 84.1 m/s.
**33.** (*a*) *A*: 4.57 m/s; *B*: 3.94 m/s. (*b*) 7.53 m/s.
**35.** 12.9 toneladas **37.** (*a*) 4.21 ft/s; 2210 ft · lb.
(*b*) 3.21 ft/s; 5.51 ft/s. **39.** 41.0 N. **41.** 35.9 cm.
**43.** $\sqrt{2E\left(\frac{M+m}{Mm}\right)}$. **47.** (*a*) 4.0i + 5.0j, m/s.
(*b*) Se gana 700 J. **51.** (*a*) 26° a partir de la dirección de llegada del protón. (*b*) 227 m/s; 466 m/s. **53.** $v = V/4$.
**55.** (*a*) 3.43 m/s, desviado 17.3° a la derecha. (*b*) 954 kJ.
**57.** (*a*) 28.0°. (*b*) 7.44 m/s. **61.** 2.44 m/s, a la izquierda.
**63.** (*a*) 117 MeV. (*b*) $K_\pi$ = 102 MeV; $K_n$ = 15.0 MeV.
**65.** (*a*) $(-1.04\mathbf{i} + 0.655\mathbf{j}) \times 10^{-19}$ kg·m/s. (*b*) 7.66 MeV.

## CAPÍTULO 11

**3.** (*a*) $5.5 \times 10^{15}$ s. (*b*) 26. **5.** (*a*) 0.105 rad/s.
(*b*) $1.75 \times 10^{-3}$ rad/s. (*c*) $1.45 \times 10^{-4}$ rad/s. **7.** 11 rad/s.
**9.** (*a*) 4.8 m/s. (*b*) No. **11.** (*b*) 23 h 56 min.
**13.** (*a*) 8140 rev/min². (*b*) 425 rev. **15.** (*a*) −1.28 rad/s².
(*b*) 248 rad. (*c*) 39.5 rev. **17.** (*a*) 2.0 rev/s. (*b*) 3.8 s.
**19.** (*a*) 369 s. (*b*) $-3.90 \times 10^{-3}$ rad/s². (*c*) 108 s.
**21.** (*b*) $-2.30 \times 10^{-9}$ rad/s². (*c*) ≈4610. (*d*) 24 ms.
**23.** (*a*) 3.49 rad/s. (*b*) 20.6 in./s. (*c*) 10.1 in./s.
(*d*) 71.9 in./s²; 35.3 in./s². **25.** 5.6 rad/s².
**27.** (*a*) 3.65 rad/s. (*b*) 38.0 m/s. (*c*) 6.78 m/s². (*d*) 139 m/s².
**29.** 4.56 s. **31.** (*a*) −1.18 rev/min². (*b*) 10,300.
(*c*) 1.08 mm/s². (*d*) 30.2 m/s².
**33.** (*a*) $6.3 \times 10^4$ ft/min ($1.9 \times 10^4$ m/min).
(*b*) $6.8 \times 10^4$ ft/min ($2.1 \times 10^4$ m/min). **35.** 16.4 s.
**37.** (*a*) $r\alpha^2t^2$. (*b*) $r\alpha$. (*c*) 44.1°. **39.** (*a*) 71 rad/s.
(*b*) −13 rad/s². (*c*) 72 m.
**41.** (*a*) $x^2 + y^2 = R^2$; un círculo de radio $R$;
$\omega$ es la velocidad angular del objeto.
(*b*) $v_x = -\omega y$; $v_y = \omega x$; **v** es tangente al círculo; $v = \omega R$.
(*c*) $a = \omega^2 R$; **a** apunta radialmente hacia adentro.

## CAPÍTULO 12

**1.** (*a*) 1305 g·cm². (*b*) 545 g·cm². (*c*) 1850 g·cm².
**3.** $6.75 \times 10^{12}$ rad/s. **5.** (*a*) 6490 kg·m². (*b*) 4.36 MJ.
**7.** 0.097 kg·m². **9.** (*b*) $MR^2/4$. **13.** (*a*) $dm/M = 2r\,dr/R^2$.
(*b*) $dI = 2Mr^3\,dr/R^2$. (*c*) $I = \frac{1}{2}MR^2$.
**15.** 3.66 N · m, hacia la página. **17.** 12 N · m, saliendo de la página.
**19.** 7.63 rad/s², saliendo de la página. **21.** (*a*) 28.2 rad/s².
(*b*) 1.94 G-años. **27.** 690 rad/s. **29.** (*a*) $2\theta/t^2$. (*b*) $2R\theta/T^2$.
(*c*) $T_1 = M(g - 2R\theta/t^2)$; $T_2 = Mg - (2\theta/t^2)(MR + I/R)$.
**31.** $1.73 \times 10^5$ g·cm². **33.** 6.11 m/s.
**35.** (*a*) −7.67 rad/s². (*b*) −11.7 N·m. (*c*) 45.8 kJ. (*d*) 624 rev.
(*e*) La energía disipada por fricción; 45.8 kJ.
**37.** (*a*) $4.82 \times 10^5$ N. (*b*) $1.12 \times 10^4$ N·m.
**39.** (*a*) $1.88 \times 10^{12}$ J/s. (*b*) $-2.67 \times 10^{-22}$ rad/s².
(*c*) $4.06 \times 10^9$ N. **41.** (*a*) 47.9 km/h. (*b*) 3.65 rad/s².
(*c*) 8.68 kW. **45.** (*a*) 56.5 rad/s. (*b*) −8.88 rad/s².
(*c*) 69.2 m. **47.** (*a*) 12.5 cm/s². (*b*) 4.63 s. (*c*) 28.8 rev/s.
(*d*) 70.8 rev/s. **49.** 48 m. **51.** (*a*) $W/6$. (*b*) $2g/3$.
**55.** $\alpha = 2F/MR$; $a = F/M$. **57.** (*a*) 57.9 rad/s. (*b*) 4.21 m.

## CAPÍTULO 13

**5.** $mvd$. **11.** (*a*) −4.17 m/s². (*b*) −16.9 rad/s².
(*c*) −2.62 N·m. **15.** (*a*) 1.49 N·m. (*b*) 20.8 rad. (*c*) − 31.0 J.
(*d*) 20.3 W. **17.** El centro de masa se mueve en la dirección de la fuerza impulsiva con una velocidad de 2.90 m/s; la estaca gira con respecto a su centro de masa con una velocidad angular de 10.7 rad/s. **21.** (*b*) $ML^2/(L^2 + 12d^2)$. **25.** (*a*) 1.18 s. (*b*) 8.60 m.
(*c*) 5.18 rev. (*d*) 6.07 m/s. **27.** 3.0 min. **29.** $mv/(m + M)R$.
**31.** (*a*) 171 rev/min. (*b*) 0.792. **33.** (*a*) 5.12 mrad/s.
(*b*) 1.90 cm/s. **35.** (*a*) $MR^2\omega_0^2/4$; $MR^2\omega_0/2$. (*b*) $R^2\omega_0^2/2g$.
(*c*) $\omega_0$. **37.** $\sqrt{2gr\sec\theta_0}$.
**39.** (*a*) Cada uno se mueve en un círculo de 1.46 m de radio a 0.945 rad/s.
(*b*) 9.12 rad/s. (*c*) $K_a$ = 97.5 J; $K_b$ = 941 J. **41.** −0.127.
**43.** 1.90 min.

## CAPÍTULO 14

**1.** (*a*) Dos. (*b*) Siete. **5.** (*a*) 2.5 m. (*b*) 7.3°.
**7.** (*a*) Se desliza; 31°. (*b*) Se vuelca; 34°. **9.** 1200 lb.
**11.** (*a*) 2.78 kN. (*b*) 3.89 kN.
**13.** Pedestal izquierdo: 1.17 kN (tensión);
pedestal derecho: 1.89 kN (compresión).
**15.** Tres cuartos de la longitud de la viga desde el obrero del extremo.
**17.** $F_{\text{músculo}}$ = 1.91 kN, arriba, $3W$; $F_{\text{hueso}}$ = 2.55 kN, abajo, $4W$.
**19.** $W\sqrt{h(2r-h)}/(r-h)$.
**21.** (*a*) $F_1 = w \operatorname{sen}\theta_2/\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)$;
$F_2 = w \operatorname{sen}\theta_1/\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)$; normal a los planos.
**23.** (*a*) 416 N. (*b*) 238 N; 172 N. **25.** (*a*) 47.0 lb.
(*b*) 21.3 lb; 10.9 lb. **27.** (*a*) 1460 lb. (*b*) 1220 lb; 1420 lb.
**29.** (*a*) $Wx/L \operatorname{sen}\theta$. (*b*) $Wx/L \tan\theta$. (*c*) $W(1 - x/L)$.
**31.** (*a*) Pivote inferior: $F_h$ = 180 lb, $F_v$ = 210 lb; pivote superior: $F_h$ = 180 lb, $F_v$ = 60 lb.
(*b*) $F_h$ = 180 lb, $F_v$ = 60 lb, en cada viga, directamente opuestas.
**33.** (*a*) 47 lb. (*b*) $F_A$ = 120 lb; $F_E$ = 72 lb. **35.** (*a*) 446 N.
(*b*) 0.500. (*c*) Sí; empuje 45° hacia arriba; 315 N.
**37.** (*a*) $L/2$, $L/4$, $L/6$. (*c*) $N = n$. **41.** 75 GN/m².
**43.** 3.65 mm. **45.** 201 kN. **47.** 802 rev/min.
**49.** (*a*) 18.0 MN. (*b*) 14.4 MN. (*c*) 16.

## CAPÍTULO 15

**1.** 289 ms. **3.** 708 N/m. **5.** (*a*) 495 N/m. (*b*) 1.57 cm.
(*c*) 1.55 Hz. **7.** (*a*) 1250 N/cm. (*b*) 2.63 Hz. **9.** 30.4 lb.
**11.** (*b*) 12.47 kg. (*c*) 72.85 kg. **13.** 2.08 h. **15.** 2.83 cm.
**17.** (*c*) $2\pi\sqrt{mb^3/a^4}$. **19.** (*a*) 0.183*L*. (*b*) Misma dirección.
**23.** (*a*) 1.07 Hz. (*b*) 4.73 cm. **27.** (*a*) 6.97 MN/m.
(*b*) 48,500. **29.** (*a*) 3.04 ms. (*b*) 3.84 m/s. (*c*) 90.7 J.
**33.** (*a*) 31.9 cm. (*b*) 34.4°. **37.** (*a*) 5.60 J. (*b*) 2.80 J.
**39.** 24.9 cm. **41.** 8.35 s. **43.** (*a*) 436 mHz. (*b*) 1.31 m.

**45.** 906 ms. **47.** 5.57 cm. **49.** (*a*) $2\pi\sqrt{(L^2 + 12d^2)/12gd}$.

**51.** $1.22v_0$. **55.** $\left(\frac{1}{2\pi}\right)\sqrt{\left(\frac{g}{L}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{Rg}\right)^2}}$.

**59.** (*a*) Línea recta, $y = \pm x$.
(*b*) Elipse, $y^2 - \sqrt{3}xy + x^2 = A^2/4$. (*c*) Círculo, $x^2 + y^2 = A^2$.
**65.** $k = 490$ N/cm; $b = 1100$ kg/s. **67.** 1.9 in.
**69.** 362 ms. **71.** (*a*) 8.00 u; 0.98 u; 6.86 u. (*b*) 490 N/m.
**73.** (*a*) 2.8 cm, 0. (*b*) 2.8 cm, 3.14 rad.
(*c*) 1.98 cm, −1.57 rad. (*d*) 1.98 cm, 1.57 rad.
(*e*) 3.43 cm, −0.615 rad. (*f*) 3.43 cm, 0.615 rad.
(*g*) 3.43 cm, 3.76 rad. (*h*) 3.43 cm, 2.53 rad.

## CAPÍTULO 16

**1.** 39.2 nN. **3.** $2.60 \times 10^5$ km. **5.** 997 ms. **7.** 997 km.
**9.** (*a*) $1.33 \times 10^{12}$ m/s². (*b*) $1.79 \times 10^6$ m/s. **11.** 9.78 m/s².
**17.** (*b*) 1.9 h. **21.** 7.90 km/s.
**23.** $\frac{GMm}{d^2}\left[1 - \frac{1}{8(1 - R/2d)^2}\right]$
**25.** (*a*) 9.83 m/s². (*b*) 9.84 m/s². (*c*) 9.79 m/s².
**27.** (*b*) $2.0 \times 10^8$ N/m². (*c*) 180 km. **31.** 220 km/s.
**37.** 98.4 pJ. **39.** (*a*) 2.02 km/s. (*b*) 523 km. (*c*) 1.26 km/s.
(*d*) $4.80 \times 10^{22}$ kg. **41.** (*a*) $3.34 \times 10^7$ m/s. (*b*) $5.49 \times 10^7$ m/s.
**45.** $6.5 \times 10^{23}$ kg. **47.** 0.354 meses lunares.
**49.** (*a*) 1.68 km/s. (*b*) 108 min. **51.** $7.20R_S$. **53.** 58.3 km/s.
**55.** Las propiedades son proporcionales a (*a*) $r^{3/2}$; (*b*) $r^{-1}$;
(*c*) $r^{1/2}$; (*d*) $r^{-1/2}$. **59.** 3.5 años.
**61.** $4\pi r^{3/2}/\sqrt{G(4M + m)}$. **63.** (*a*) 7.54 km/s. (*b*) 97.3 min.
(*c*) 405 km; 7.68 km/s; 92.3 min. (*d*) 3.18 mN.
(*e*) Del satélite, no; del sistema Tierra + satélite, sí.
**65.** (*a*) No. (*b*) La misma. (*c*) Sí.
**67.** (*a*) Fácilmente; pesaría sólo unas 3 lb.
(*b*) Probablemente; tendría que serle posible correr a 6.9 m/s.
**69.** Sur, 35.4° sobre el horizonte. **71.** (*a*) 7964 m/s (7750 m/s para *A*). (*b*) 7820 m/s (7750 m/s para *A*). **73.** $\sqrt{GM/L}$.

## CAPÍTULO 17

**1.** 429 kPa. **3.** 27.4 kN. **5.** 6.0 lb/in.² **7.** 0.52 m.
**9.** 1.29 MPa. **11.** 130 km. **13.** 0.412 cm.
**15.** (*a*) 600, 30, 80 toneladas.
(*b*) No; aun cuando las respuestas anteriores cambiasen a 3100, 280, 760 toneladas, la presión atmosférica actúa sobre cada lado de las paredes y se cancela.
**17.** 809 kN. **19.** 43.5 km. **21.** 230 MPa.
**23.** $\frac{1}{4}\rho g A(h_2 - h_1)^2$. **25.** (*b*) *a*. **27.** (*b*) $p = \rho gh$.
**31.** (*a*) 35.6 kN. (*b*) Sí; disminuye en 0.0851 m³.
**33.** 1070 g. **35.** $2.0 \times 10^{-4}$. **37.** (*a*) 38.4 kN. (*b*) 40.5 kN.
(*c*) 2.35 kN. (*d*) 2.08 kN. **39.** 4.74 MN. **41.** 56.1 cm.
**43.** 4. **45.** 0.190. **47.** (*a*) 1.82 m³. (*b*) 4.61 m³.
**49.** 740 kg/m³. **51.** 500 μJ. **53.** 61.6 μJ. **57.** (*a*) 3.25 Pa.
(*b*) 1.79 Pa. (*c*) 68.7 J. (*d*) 765 μJ.

## CAPÍTULO 18

**1.** 1 h 49 min. **3.** 3.9 m. **5.** 1.1 m/s. **7.** $1.7 \times 10^5$ N·m.
**9.** (*a*) 2.66 m/s. (*b*) 271 Pa. **11.** (*a*) 2. (*b*) 1/2. (*c*) *h*/4, abajo.
**13.** 10.8 kN. **15.** (*b*) A la altura *h*. **17.** 41.0 m/s.
**19.** 1.38 cm. **21.** (*a*) $\sqrt{2g(h_2 + d)}$. (*b*) $p_{atm} - \rho g(h_2 + d + h_1)$.
(*c*) 10.3 m. **23.** 5 min 42 s. **25.** $\frac{1}{2}\rho v^2 A$. **29.** 410 m/s.
**37.** 320 kPa. **39.** (*b*) 35.5 mPa. **43.** 3630 s.

## CAPÍTULO 19

**1.** (*a*) 7.43 kHz. (*b*) 135 μs. **3.** (*a*) 712 ms. (*b*) 1.40 Hz.
(*c*) 1.93 m/s.
**5.** $y = 0.0112$ sen $(10.6x + 3440t)$, en donde $x$ y $y$ están en metros y $t$ está en segundos.
**9.** (*a*) 6.0 cm. (*b*) 100 cm. (*c*) 2.0 Hz. (*d*) 200 cm/s.
(*e*) Dirección $x$ negativa. (*f*) *75 cm/s.* **11.** 135 N.
**13.** 91.9 g/m. **15.** (*a*) 5.0 cm. (*b*) 40 cm. (*c*) 12 m/s.
(*d*) 33 ms. (*e*) 9.4 m/s.
(*f*) $y = 5.0$ sen$(0.16x + 190t + 0.93)$, con $x$ y $y$ en cm y $t$ en segundos. **17.** $2\pi y_m/\lambda$.
**19.** 7.54 m desde el extremo del alambre donde generó el primer pulso.
**21.** (*a*) $\sqrt{k\,\Delta L(L + \Delta L)/m}$. **25.** 198 Hz. **27.** (*b*) Longitud².
**29.** (*b*) 474 nJ/m³. **31.** 68.8°, 1.20 rad.
**37.** $\lambda = 2\sqrt{4(H + h)^2 + d^2} - 2\sqrt{4H^2 + d^2}$. **39.** (*a*) 81.4 m/s.
(*b*) 16.7 m. (*c*) 4.87 Hz. **41.** (*a*) −3.9 cm.
(*b*) $y = 0.15$ sen $(0.79x + 13t)$. (*c*) -14 cm. **43.** (*a*) 1.25 m.
(*b*) $y = (3.80 \times 10^{-3})$ sen $10.1x$ cos $3910t$, en donde $x$ y $y$ están en metros y $t$ está en segundos.
**49.** 7.47, 14.9, 22.4 Hz. **51.** 480, 160, 96 cm. **53.** 36.8 N.
**55.** 190 Hz.

## CAPÍTULO 20

**1.** (*a*) 76.2 μm. (*b*) 333 μm. **3.** (*a*) 57 nm. (*b*) ~35.
**5.** 170 m. **7.** (*a*) $L(V - v)/Vv$. (*b*) 43.5 m. **9.** 40.7 m.
**11.** (*a*) 1.48 Pa. (*b*) 167 Hz. (*c*) 1.87 m. (*d*) 312 m/s.
**13.** 4.47 W. **15.** 27.1 mJ. **19.** (*a*) 44.2 μW/m². (*b*) 164 nm
(*c*) 894 mPa. **21.** 51.9 nJ/m³. **23.** (*a*) 5.20 kHz.
(*b*) $B/A = \frac{1}{2}$. **25.** 190 dB. **27.** 63 dB. **29.** (*a*) 66.8 μW/m².
(*b*) 5.02 nW. (*c*) 7.53 μJ.
**31.** (*a*) $v = 307n$ Hz, $n = 1, 3, \ldots 65$.
(*b*) $v = 615n$ Hz, $n = 1, 2, \ldots 32$.
**33.** **A ±0.286, 0.857, 1.43, 2.00 m del punto medio.**
**35.** 346 m. **37.** 19.8 kHz. **39.** (*a*) 1130, 1500, 1880 Hz.
**41.** 57.2 m. **45.** Cuatro.
**47.** Tubo abierto: 58.9 cm; tubo cerrado: 44.2 cm. **49.** 45.4 N.
**51.** 2.25 ms. **53.** (*a*) Diez. (*b*) Cuatro. **55.** 17.4 kHz.
**57.** (*a*) 522 Hz. (*b*) 554 Hz. **59.** 31° **61.** $2.65 \times 10^8$ m/s.
**63.** 7.16 km. **67.** 160 Hz. **69.** (*a*) 464 Hz. (*b*) 490 Hz.
**71.** 8.8°C. **73.** 41.2 kHz. **75.** (*a*) 2.0 kHz. (*b*) 2.0 kHz.

## CAPÍTULO 21

**1.** (*a*) $7.1 \times 10^{-10}$ s. (*b*) $2.5 \times 10^{-18}$ m. **3.** 1.30 m.
**5.** 0.445 ps. **7.** $0.805c$. **9.** (*a*) 87.4 m. (*b*) 394 ns.
**11.** (*a*) 15.8 km/s. (*b*) $6.95 \times 10^{-10}$. **13.** 0.75.
**15.** (*a*) $x' = 3.78 \times 10^7$ m; $t' = 2.26$ s.
(*b*) $6.54 \times 10^8$ m; 3.14 s. **17.** (*a*) 25.8 μs.
(*b*) El destello rojo, corrido por Doppler. **19.** (*a*) $-u$; $c\sqrt{1 - u^2/c^2}$.
**21.** (*a*) $0.347c$. (*b*) $0.619c$. **23.** Siete.
**25.** (*a*) $0.933c$, 31.0° al Este del Sur.
(*b*) $0.933c$, 59.0° al Oeste del Norte. **27.** 6.29 cm. **29.** 1.23 μs.
**31.** (*a*) $0.491c$, en la dirección $x$ negativa. (*b*) 4.32 μs; rojo.
**33.** (*a*) 26.3 años. (*b*) 52.3 años. (*c*) 4.06 años. **35.** (*a*) 4.00 μs.
33. (*a*) 26.3 y. (*b*) 52.3 y. (*c*) 4.06 y. **35.** (*a*) 4.00 μs.
(*b*) 2.50 μs. **39.** (*a*) 0.999 165. (*b*) 0.0133.
**41.** (*a*) 0.9988; 20.6. (*b*) 0.145; 1.01. (*c*) 0.073; 1.0027.
**43.** 21.2 ums/año. **45.** $\sqrt{8}mc$. **49.** (*b*) $K = p^2/2m$. (*c*) $207m_e$.
**51.** (*a*) 996 eV. (*b*) 1.05 MeV. **53.** (*a*) $\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}c$.
(*b*) $\sqrt{2(\gamma + 1)}m$. **55.** (*b*) 202 GeV. (*c*) 49.1 GeV.
**57.** (*b*) $0.796c$.

## CAPÍTULO 22

**1.** 291.1 K. **3.** 31.2. **5.** No; 310 K = 98.6°F. **7.** (*a*) −40°.
(*b*) 575°. (*c*) Ninguna. **11.** 1.3660.

**13.** 0.073 cm Hg; nitrógeno. **15.** 0.038 in. **17.** 6.2 mm. **19.** (*a*) 13.8 $cm^2$. (*b*) 115 $cm^3$. **25.** $2.3 \times 10^{-5}/C°$. **27.** (*b*) Acero: 71 cm; latón: 41 cm. **29.** 360°C. **35.** 909 g. **37.** (*b*) Usar 39.3 cm de acero y 13.1 cm de latón. **39.** (*a*) Cero. (*b*) -0.36%. (*c*) -0.36%. **41.** +0.68 s/h. **43.** 0.17 mm. **45.** 66.4°C. **47.** 0.27 mm. **49.** (*a*) 2.25 ft. (*b*) 3.99 ft.

## CAPÍTULO 23

**1.** (*a*) 0.0225 $m^3$. **3.** (*a*) 113. (*b*) 0.900 $m^3$. **5.** 5.59 $m^3$. **9.** 26.9 lb/$in.^2$ **11.** 104 $cm^3$. **13.** 200 kPa. **15.** $4.34 \times 10^{-5}$. **17.** 180 m/s. **19.** 0.76. **21.** (*a*) 531 m/s. (*b*) 28 g/mol; $N_2$. **23.** 1/5. **25.** (*a*) 3.53 meV; 4.83 meV. (*b*) 3400 J; 4650 J. **27.** $2.2 \times 10^{-5}$. **29.** (*a*) $3.31 \times 10^{-20}$ J. (*b*) 0.207 eV. **31.** (*a*) $(N_a + N_b)(kT/V)$. (*b*) $\frac{1}{2}$. **33.** (*a*) $1.0 \times 10^4$ K; $1.6 \times 10^5$ K. (*b*) 440 K; 7000 K. **35.** 89.0°C. **37.** 45 kJ a lo largo de la trayectoria 1; -45 kJ a lo largo de la trayectoria 2. **39.** (*a*) 1.40. (*b*) 29.0 g/mol. **41.** 1.14 kJ. **43.** (*a*) 8.39 atm. (*b*) 544 K. (*c*) 966 J. **45.** 265 K. **47.** (*a*) 2.95 cm. (*b*) 2.11 cm. **49.** 2.48 kJ. **51.** (*a*) 1.20. (*b*) 105°C. (*c*) 628 mol. (*d*) 1.96 MJ; 2.96 MJ. (*e*) 0.813. **53.** (*a*) 423 kPa. (*b*) 431 kPa.

## CAPÍTULO 24

**5.** (*a*) $2.69 \times 10^{25}$. (*b*) 0.171 nm. **7.** (*a*) 1.67. (*b*) $49.5 \times 10^{-6}$ cm. (*c*) $7.87 \times 10^{-6}$ cm. **9.** 3.86 GHz. **11.** −12°C. **13.** (*a*) 420 m/s; 458 m/s; sí. **15.** 13.9 rev/s. **17.** 4.71. **21.** (*a*) $3N/v_0^3$. (*b*) $0.750v_0$. (*c*) $0.775v_0$. **25.** (*a*) $\sqrt{\frac{15}{4}}kT$. **27.** 1.5 m/s. **29.** 1.5 cm/s. **31.** (*a*) 35 cm/s. (*b*) $4.4 \times 10^6$ rev/s. **33.** (*a*) 8. (*b*) 4.

## CAPÍTULO 25

**1.** 44.5 $m^3$. **3.** 107 g. **5.** (*a*) 0.12 C°. **7.** (*a*) 75.4 kJ. (*b*) 4.46 kJ. (*c*) 757°C. **9.** 42.7 kJ. **11.** 2.4 días. **13.** (*a*) 117 s. (*b*) 718 s. **15.** (*a*) $6.75 \times 10^{-20}$ J. (*b*) 10.7. **17.** (*a*) 5.26°C; no queda hielo. (*b*) 0°C; quedan 62.0 g de hielo. **19.** 4.81 g. **21.** 17 mJ. **23.** 1.2 kJ. **25.** 11.3 kJ. **27.** (*a*) 7880 J. (*b*) 5630 J. (*c*) 3380 J. **29.** Diatómico. **31.** $nRT\ln(V_f/V_i)$. **33.** (*a*) +214 J. (*b*) −293 J. (*c*) −79.0 J. **35.** (*a*) 1090°C. (*b*) 460°C. **37.** (*a*) $-1.5nRT_1$. (*b*) $4.5nRT_1$. (*c*) $6nRT_1$. (*d*) $2R$. **39.** (*a*) −6.0 J. (*b*) −43 J. (*c*) 40 J. (*d*) 18 J; 18 J. **41.** (*a*) 15.9 J. (*b*) 34.4 J/mol·K. (*c*) 26.1 J/mol·K. **43.** (*a*) $Q$, $\Delta E_{int}$, $W$: $AB$: 3740, 3740, 0 J; $BC$: 0, −1810, −1810 J; $CA$: −3220, −1930, +1290 J; ciclo: 520, 0, −520 J. (*b*) $V_B = 0.0246\ m^3$; $p_B = 2.00$ atm; $V_C = 0.0373\ m^3$; $p_C = 1.00$ atm. **45.** 12.0 kW. **47.** 720°C. **49.** (*a*) 546 C°/m. (*b*) 394 kW. (*c*) 63.9°C. **51.** Arreglo *b*. **53.** 1.84 W/m · K. **55.** (*a*) 24 kW. (*b*) 25 W. **57.** (*a*) 1.8 W. (*b*) 0.025 C°. **59.** 1.15 m.

## CAPÍTULO 26

**1.** (*a*) 30.9%. (*b*) 16.2 kJ. **3.** 25.4%. **5.** (*a*) 7200 J. (*b*) 960 J. (*c*) 13%. **7.** $e_A = 33.3\%$; $e_B = 55.6\%$. **9.** (*a*) 217 kJ. (*b*) 32.5 kJ. **11.** (*a*) 2090 J. (*b*) 1510 J. (*c*) 1510 J. **15.** 21 J. **17.** (*a*) 113 J. (*b*) 305 J. **19.** (*c*) 6.8. **23.** $[1 - T_2/T_1]/[1 - T_4/T_3]$. **25.** (*a*) 1.62 atm. (*b*) 43.7%. **27.** (*a*) 2.27 kJ. (*b*) 14.8 kJ. (*c*) 15.3%. (*d*) 75.0%. **29.** 18.7 kJ. **31.** (*b*) 200 J. (*c*) −75 J. **33.** 0.044 J/K. **37.** 3.0 mol. **39.** (*a*) +1.06 J/K. (*b*) No. **41.** (*a*) Trayectoria I: $Q_T = p_0V_0 \ln 2$; $Q_V = (9/2)p_0V_0$. Trayectoria II: $Q_T = -p_0V_0 \ln 2$; $Q_P = (15/2)p_0V_0$. (*b*) Trayectoria I: $W_T = -p_0V_0 \ln 2$; $W_V = 0$. Trayectoria II: $W_T = p_0V_0 \ln 2$; $W_P = 3p_0V_0$. (*c*) $(9/2)p_0V_0$ para cada proceso. (*d*) $4R \ln 2$ para cada proceso. **43.** (*a*) −926 J/K. (*b*) 926 J/K. **45.** +0.95 J/K.

# CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS

**CAPÍTULO 1**
Figura 1: Cortesía de National Bureau of Standards and Technology. Figura 4: Cortesía de National Physical Laboratories, Teddington, England. Figura 5: Cortesía de National Bureau of Standards and Technology. Figura 6: Cortesía del Profesor R. C. Barber, The University of Manitoba. Figura 7: Stephen Pitkin.

**CAPÍTULO 2**
Figura 21: Cortesía de National Bureau of Standards and Technology. Figura 22: Cortesía de Baltimore Office of Promotion and Tourism. Figura 30: NASA. Figura 31: Cortesía de Marriott Marquis, N.Y.C., Figura 33: National Basketball Asociation.

**CAPÍTULO 3**
Figura 21: NASA.

**CAPÍTULO 4**
Figuras 6 y 7: Education Development Center, Inc. Figura 15: De *The Particle Explosion*, Oxford Press, 1987. Figura 32: Cortesía de Boeing.

**CAPÍTULO 5**
Figuras 11 y 23: NASA. Figura 25: Cortesía de Hale Observatories. Figura 29: Cortesía de Smithsonian Astrophysical Observatory. Figura 32: Cortesía de A. A. Bartlett y Boeing. Figura 36: NASA. Figura 46: Cortesía de USAADTA. Foto de PUT Eugenio P. Redmond.

**CAPÍTULO 6**
Figura 2: De *Friction and Lubrication of Solids*, de F. P. Bowden y S. Tabor, Clarendon Press, 1950. Figura 18: NOAA. Figura 19: NASA. Figura 23: Ira Kirschenbaum/Stock, Boston. Figura 41: EPU/Heine Pederson/Woodfin Camp.

**CAPÍTULO 7**
Figura 2: Ed Goldfarb/Black Star. Figura 21: UPI/Archivo Bettmann. Figura 22: Cortesía de Cunard.

**CAPÍTULO 8**
Figura 8: Cortesía de Six Flags. Figura 15: De *Introduction to the Detection of Nuclear Particles in a Bubble Chamber*, Ealing Press, 1969. Cortesía de Lawrence Berkeley Radiation Laboratories, University of California at Berkeley. Figura 17: Cortesía del Departamento de Astronomía, University of Texas at Austin. Figura 45: NASA. Figura 50: Cortesía de American Red Cross.

**CAPÍTULO 9**
Figura 31: United Feature Syndicate.

**CAPÍTULO 10**
Figura 1: Cortesía de Harold E. Edgerton, M. I. T., Cambridge, Mass. Figura 2: PSSC, *Physics*, Haber-Scham, Cross, Dodge, y Walter, D. C. Health and Co., Boston. Education Development Center, Newton, Mass., 1976. Figura 4: Cortesía de CERN. Figura 5: Bob Kalman/The Image Works. Figura 13: Cortesía de Laurence Radiation Laboratory, Figura 18: Cortesía del Stanford Linear Accelerator Center. Figura 19: Cortesía de Fermi National Accelerator Laboratory. Figura 21: Sylvia Johnson/Woodfin Camp and Associates. Figura 28: Marca registrada de DC Comics, Inc., copyright © 1963. Figura 31: Georg Gerster/Compstock

**CAPÍTULO 11**
Figura 1: K. Bendo. Figura 10: Reproducido con autorización de *The Courier-Journal* y *The Louisville Times*. Figura 13: NASA.

**CAPÍTULO 12**
Figura 19: Education Development Center, Inc. Figura 22: Cortesía de Alice Halliday. Figura 44: Cortesía de Lawrence Livermore Laboratory.

**CAPÍTULO 13**
Figura 15: NASA. Figura 20: Cortesía de GE Medical Systems.

**CAPÍTULO 14**
Figura 15: Cortesía de Micro Measurements Division, Measurements Group, Inc., Raleigh, N. C. Figura 20: The Bettmann Archive.

**CAPÍTULO 15**
Figura 17: Cortesía de Tektronix. Figura 24: NASA.

**CAPÍTULO 16**
Figura 17 y 23*a*: Cortesía del observatorio de Lick. Figura 23*b*: observatorios Mt. Wilson y Palomar. Figura 26: Cortesía de Kitt Peak National Observatory. Figura 27: Cortesía de P. J. E. Peebles, basado en el catálogo del observatorio de Lick por C. Shane y C. Wirtanen.

**CAPÍTULO 17**
Figura 14: Mark Antman/The Image Works. Figura 16: NASA. Figura 26: Cortesía de Goodyear Tire y Rubber Company.

**CAPÍTULO 18**
Figura 21: Richard Megna/Fundamental Photos. Figura 22: Imperial College, London. Figura 24: Profesor Harry Swinney, University of Texas en Austin.

**CAPÍTULO 19**
Figura 2: G. Whiteby/Photo Researchers. Figura 16: Clifford Swartz, Figura 23: De PSSC, *Physics*, D. C. Health, Lexington, Mass., 1960, con autorización.

**CAPÍTULO 20**
Figura 10: Cortesía del Dr. T. D. Rossing, Northern Illinois University. Figura 14: Cortesía de U. S. Army Ballistic Research Laboratory. Figura 15: Cortesía de John S. Foster, Stanford University. Foto de C. F. Quate. Figura 17: Cortesía de Pilgrim Nuclear Power Plant/Boston Edison.

**CAPÍTULO 22**
Figura 6: AP/Wide World Photos. Figura 20: Palmer/Monkmeyer Press.

**CAPÍTULO 23**
Figura 19: NASA.

**CAPÍTULO 24**
Figura 15: Cortesía de IBM. Figuras 18 y 19: Mendelssohn, *The Quest for Absolute Zero.*

**CAPÍTULO 25**
Figura 28: Cortesía de Soehngen.

**CAPÍTULO 26**
Figura 9: Cortesía de The Bryant Day and Night y Payne Brands de Carrier Corporation.

# ÍNDICE


**A**

Acción a una distancia, 396
Aceleración angular:
  como vector, 267
  componentes radial y tangencial, 268
  constante, rotación con, 264-265
  movimiento rotacional, 263
Aceleración, 18-19, 22, 23-25
  caída libre, 28-32
  centrípeta, 68-69, 70
  centro de masa, 206
  componentes radial y tangencial, 268
  constante, 25-28
    en dos y tres dimensiones, 61-63
  definición, 23
  instántanea, 23-70
  masa y, 90-92
  movimiento en dos y tres dimensiones, 59-60
  radial, 68
  relación entre las variables lineal y angular, 269-270
  tangencial, 69-71
  vectores, movimiento circular, 69-71
    *véase también* Aceleración angular
Aceleradores de partículas, 247-248
Adhesión superficial, 120
Afelio, 398
Agentes surfactantes, 431-432
Agua:
  expansión volumétrica, 557
  punto triple, 551
Aislamiento del sistema, 334-335
Alcance horizontal, de un proyectil, 64
Amortiguamiento crítico, 369
Amplificador de transistores, ganancia, 560
Amplitud, 354
  modulación, 507
Análisis dimensional, 10-11
Aproximación de un ángulo pequeño, 67
Ángulo azimutal, 44
Ángulos, factores de conversión, A-10
Año-luz, 7, 14
Anomalías, 412
Antinodos, 482
Antiprotón p, 539-540
Apogeo, 398
Área:
  factores de conversión, A-10
  ley del, 398
Arrastre, fuerzas de, 130-133
Arquímedes, Principio de, 428-429
Átomos, movimiento browniano, 599-600
Atwood, máquina de, 104-105
Avogadro, constante de, 8, 566
  movimiento browniano y, 599-600
Avogadro, ley de, 566

**B**

Balanza de brazos iguales, 100
Bariones, A-9
Barómetro, 430-431
Barras vibratorias, 506
Barrera sónica, 511
Báscula de resortes, 99
Bernoulli, aplicaciones de la ecuación, 447
  ecuación de, 445-447
Binomio, teorema del, A-15
Bohr, modelo del átomo de hidrógeno, 143
Boltzmann, Ludwig, 599
  constante de, 567-571
Bose-Einstein, distribución, 601-602
Bosones, 601
Boyle, ley de, 566-567
Brahe, Tycho, 384
Brazo, del momento 285
Brown, Robert, 599
Browniano, movimiento, 599-600

**C**

Caballo de fuerza, 160
*Caída libre:*
  aceleración en la, 28-32
  cuerpos en, 28-32, 130
  Galileo, 29-30
  medición, 30-32
Calisto, movimiento circular uniforme, 365
Calor, 607-626
  bomba de, 644
  conceptos erróneos, 608
  convección, 624

de fusión, 610
de transformación, 610
de vaporización, 610
definición, 607
equivalente mecánico, 608-609
específico, 609-610
razón del, 614
factores de conversión, A-13
latente, 610
radiación, 624-625
transferencia, 622-626
irreversible, 649-650
*véase también* Primera ley de la termodinámica; Segunda ley de la termodinámica; Termodinámica
Caloría, 607-608
Capacidad calorífica, 609-611
definición, 609
Dulong-Petit, valor, 612
gas ideal, 612-616
molar, 611-612
sólidos, 611-612
Calorímetro de flujo, 629
Campo eléctrico, 397
Campo, concepto de, 396-397
Campo, partículas de, A-8
Campos de flujo, 450-453
Cantidades extensivas, 583
Caos, teoría del, 136, 455-456
Carga, fuerza de, 101, 119-120
Carnot, ciclo de, 641-644, 646-647
eficiencia de la máquina de 642-643
teorema de, en la segunda ley de la termodinámica, 642-643
Casi-estático, proceso, 636
Cavendish, Henry, 387
Cedencia, límite de, 342
Celsius, Anders, 550
escala de, 550-551
Centígrada, escala, 550-551
Centrífuga, fuerza, 134
Centrípeta, aceleración, 68-70
en el movimiento circular, 68-70
Centrípetas, fuerzas, 10, 123
Centro de masa, 211-214
aceleración, 207
centro de gravedad, 333
ecuación, 218
marco de referencia, 244-248
objetos sólidos, 209-212
sistema Tierra-Luna, 207
trabajo, 218
velocidad, 245-246
Centro de flotación, 429
Centro de oscilación, 364
Cero absoluto, 645-646
Cesio, reloj de, 4-5
Charles, ley de, 567
Cicloide, 290
Cifras significativas, 8-9
Cinemática, partículas, 17
Clarke, órbita geosíncrona de, 399-400
Clausius, forma de, segunda ley de la termodinámica, 640-641, 650-651
Coeficiente:
de dilatación lineal, 556
de expansión volumétrica, 557
de fricción, variables, 120
de fricción cinética, 119
estática, 119
de rendimiento, 639
refrigerador de Carnot, 642
de viscosidad, 453
Cohete:
ecuación, 222-224
lanzamiento, 449-450
Colapso, estrellas en, conservacion del ímpetu angular, 316-317
Colisiones, 233-250
bidimensionales, 241-244
centro de masa, marco de referencia, 244-248
conservación del ímpetu, 236-237
lineal, 237
definición, 233-234
elásticas, 238-240
bidimensionales, 241-243
centro de masa, marco de referencia, 249
blanco masivo, 240
conservación del ímpetu, 239
masas iguales, 239
proyectil masivo, 240
unidimensional, 237-241
centro de masa, marco de referencia, 244-245
gas ideal, 568-569
impulso e ímpetu, 234-236
inelásticas, 240-241
bidimensional, 241-244
completamente inelásticas, 238, 240
partículas que se adhieren entre sí, 240
unidimensional, 240-241
centro de masa, marco de referencia, 245-246
molecular, recorrido libre medio, 591-593
parámetro del impacto, 242
procesos de desintegración espontáneos, 248-250
unidimensionales, 237-241
Compresión, 342-343
Computadora, programas para la, A-16-A-19
Conducción de calor, 622-624, 652
Conductividad térmica, 496, 622-624
Conservación:
de la energía mecánica, 174, 176-177
de la masa, 188, 443
de la paridad, 53
del ímpetu angular, 313-319
del ímpetu lineal, 214-217
del ímpetu, 236-237
leyes de, 157
Constante de torsión, 361
Constantes del movimiento, 401
Constantes fundamentales, A-3
Contacto, fuerzas de, 101

Convección, calor, 624
Convención de signos, 184
Conversión, factores de, A-10-A-13
Coordenadas espacio-tiempo, 529
Coordenadas, sistemas de, 45-46
Copérnico, Nicolas, 384
Coriolis, fuerza, 134-135
Corriente, líneas de flujo, 442-445, 449
Coulomb, Charles Augustin, leyes de fricción, 119
Cuadrática, fórmula, A-14
Cuanto, 190
  distribuciones estadísticas del, 600-603
  teoría del, capacidad calorífica molar del gas ideal, 615-616
Cuarzo, reloj de, 4
Cuerda, instrumentos de, 503-505
Cuerpo libre, diagrama del, 92-93
Cuerpo rígido:
  centro de gravedad, 332-334
  dinámica rotatoria, 286-290
  elasticidad, 341-344
  energía cinética rotatoria, 278-279
  movimiento de traslación, 262
  rotación pura, 261-262
  *véase también* Equilibrio, cuerpos rígidos
Cuerpos asimétricos, ímpetu angular, 313
Cuerpos simétricos, ímpetu angular, 313
Curva peraltada, 125-126

**D**

da Vinci, Leonardo, leyes de fricción, 119
Darcy, ley de, 15
Datos astronómicos, A-4
Debye, temperatura, 611
Desceleración, 24
Decibeles, 500
Deformación, 342
  medidor de la, 343
Densidad:
  estática de los fluidos, 421-422
  factores de conversión, A-11
  gas, 425
  relativa, 425-426
Densidad de masa lineal, 472
Depósito térmico, 565
Derivadas, A-15
Desarrollo esponencial, A-15
Desintegraciones beta, 53
Desintegración espontánea, procesos de, 248-250
Desintegración radiactiva, procesos de, 248-250
Desplazamiento, 41
  movimiento en dos y tres dimensiones, 59-61
Detergentes, 432
Diagrama pV, 572-573
Dilatación del tiempo, 520, 523, 531
Dilatación térmica, 554-558
  bases microscópicas, 558
Dinámica caótica, 136-137
Dinámica rotatoria, 277-296
  movimientos de traslación y rotación combinados, 290-296
  comparación de ecuaciones dinámicas y lineales, 286-287
  energía, gas ideal, 615
  energía cinética, 278-281
  teorema de ejes paralelos, 280
  cuerpo rígido, 286-290
  rodamiento sin deslizamiento, 292-293
  inercia rotacional, 278-281
  resumen de ecuaciones, 322
  torca sobre una partícula, 283-286
  teorema de trabajo y energía, 228
Disociación, energía de, 180-181
Dispersión, ondas de, 470-471
Distribución estadística, 587-589
  cuántica, 600-603
Doppler, efecto, 508-511
  a alta velocidad, 510-511
  efecto transversal, 533
  fuente en movimiento, observador en reposo, 509-510
  fuente en reposo, observador en movimiento, 508-509
  transformación de Lorentz, 531
    consecuencias, 531-535
    inversa, 528
    relatividad de longitud, 533-534
    relatividad de tiempo, 531-533
    velocidad, 529-530

**E**

Ecuación de estado, 547
  gas, 567
  van der Waals, 579-581
Ecuación de continuidad, 444-445
  aplicaciones, 447
Ecuación del movimiento, 126-128
  oscilador armónico simple, 356-357
Ecuación de onda, 474-475
Efecto de honda, 234
Einstein, Albert:
  paradoja de, 521
  teoría del movimiento browniano, 599
  teoría especial de la relatividad, 135
  transformación de velocidades, 74
Elasticidad:
  cortante, 343
  compresión, 342-343
  cuerpos rígidos, 341-344
  propiedades de los materiales, 343
  tensión, 342-343
Electromagnética, fuerza, 117
Electrón-positrón, aniquilación, 187
Electronvolt, 151
Elementos: propiedades de los, A-5-A-6
  tabla periódica, A-7
Energía:
  cuantización, 189-190
  de amarre o sujeción, 200, 396
  distribución, 597-598
  en el movimiento de planetas y satélites, 400-402

en reposo, 188
factores de conversión, A-12
interna, 184
base microscópica, 186-187
gas ideal, 576, 598, 616-617
masa y, 187-189
mecánica, conservación de la, 174, 176-177
sistema de partículas, 185-186
movimiento armónico simple, 359-361
relativista, 537-540
sistema de partículas, 217-220
transferencia en la máquina de calor, 637-638
Energía, conservación de la, 171-190
escala microscópica, 189-190
fuerza de fricción, 172
fuerza de resorte, 171-172, 185
*gravedad*, 172
ley de, 185
ley generalizada, 185
*límite cuántico*, 189
sistemas conservativos bi y tridimensionales, 182-183
sistema de partículas, 183-187
solución analítica, 181
solución numérica, 181-182
Energía cinética, 157-159
colisiones, 238-239
definición, 157
molécula diatómica, 576-577
fórmula general, 162
alta velocidad, 162-163
neutrones, 158-159
expresión relativista, 537-538
rodada sin deslizamiento, 292-293
rotatoria, 278-281
en el movimiento armónico simple, 359-361
Energía potencial, 174-176
átomos adyacentes, distancia de separación internuclear, 558
cambio en, 175
*función de la*:
fuerzas conservativas, 339-340
oscilaciones, 353-355
gravitación, 393-396
gravedad, 177-179
sistema de muchas partículas, 395-396
gravitatoria, 393
sistemas conservativos
unidimensionales, 176-177
movimiento armónico simple, 359-360
fuerza en resortes, 177
Yukawa, 198
Entropía, 635-653
conducción de calor, 652
definición, 646
expansión libre, 651-652
proceso irreversible, 648-649
probabilidad, 651-653
segunda ley de la termodinámica, 650-651
Epiciclos, 383-384
Equilibrio:
cuerpos rígidos, 331-344
condiciones de, 331-332
centro de gravedad, 332-334
ejemplos, 334-339
en campo gravitacional 339-341
estable, 180
inestable, 180
mecánico, 331
neutro, 180
Equipartición de la energía, 577
Equivalencia, principio de, 405-406
erg, 151
Escalares, 42
Escape, velocidades de, 395
Esfuerzo cortante, 343
Esfuerzo, 342
definición, 342
Esfuerzo-deformación, curva, 342
Espín, número cuántico del, 320
Estabilidad direccional, 316
Estabilidad de orientación, 316
Estabilidad, objetos en giro, 316
Estrella pulsante, 273
Estrellas, desviación de la luz cerca del Sol, 407
Estrellas:
en colapso, conservación del momento angular, 316-317
velocidades tangenciales, 403
Euler, Leonhard, 441
Excentricidad, 398
Expansión libre, 648-649
entropía, 651-652
primera ley de la termodinámica, 616-619
Expansión logarítmica, A-15

**F**

Factor de separación, 572
Factorial, 589
Fahrenheit, Daniel, 550
Fahrenheit, escala, 550-551
Fase, constante, 357, 470
combinaciones de movimientos armónicos, 367
Fase:
diferencia, movimiento ondulatorio, 479
onda viajera, 470
velocidad, 468
Fermi National Accelerator Laboratory, 248
Fermi-Dirac, distribución de, 601-602
Fermiones, 601
Física clásica, problemas con la, 519-521
Fluidos, dinámica de los: 441-456
arranque del cohete, 449-450
campos de flujo, 450-453
capa frontera, 448
ecuación de Bernoulli, 445-447
ecuación de continuidad, 444-445, 447
elevación dinámica, 448-449
flujo caótico, 455-456
gradiente de velocidad, 453

ley de, 454
líneas de corriente, 442-444, 448-449
medidor Venturi, 448
presión dinámica, 446
presión estática, 446
teorema de trabajo y energía, 445-446 tubo pitot, 448
turbulencia, 454-455
viscosidad, 453-454
Fluidos, estática de los: 419-433
Principio de Arquímedes, 428-429
densidad, 421-422
palanca hidráulica, 427-428
principio de Pascal, 426
presión, 420-421
medida, 429-431
variación, fluido en reposo, 422-426
tensión superficial, 431-433
densidad de peso, 422
Fluido no rotatorio, 442
Flujo bipolar lineal, 452
Flujo caótico, 455-456
Flujo de los fluidos, conceptos, 441-442
Flujo en película, 542
Flujo estacionario, 453
Flujo rotatorio uniforme, 451-452
Fotósfera, 624
Fourier, análisis de, 471
Frecuencia angular:
movimiento armónico simple, 357
ondas, 469
resonante, 371
Frecuencia relativa, 587
Frecuencia, 354
Frente de onda, 467
Fricción cinética, 119
Fricción de deslizamiento, 120
Fricción estática, 119-120
Fricción:
base microscópica, 120-121
fuerzas de, 118-123
cinética, 119
conservación de la energía, 172
estática, 119-120
resistencia, 120
Fuerza, 90
básica, 117
bidimensional, trabajo efectuado por, 155-157
centrífuga, 134
centrípeta, 123-124
conservativa contra no conservativa, 172-173
constante:
ecuaciones del movimiento, 126-127
trabajo, 149-153
constante de, 153
Coriolis, 134-135
de contacto, 101
definición, 88, 89
de fricción:
cinética, 119
conservación de la energía, 172
estática, 119-120
de arrastre, 130-133
de resorte:
conservación de la energía, 171-173, 183-186
energía potencial, 177
de restitución, 154
dependiente del tiempo, 127, 128-129
electrodébil, 117
fuerte, 117
impulsiva, 233
intermolecular, gas ideal, 578-579
interna, 185
medición:
método dinámico, 90
método estático, 98-99
momento de la, 285
no constante, ecuaciones de movimiento, 126-128
normal, 101
nuclear débil, 117
leyes de la, 88, 117-118
unidades de, 96-97
unidimensional, trabajo efectuado por, 155-157
Fuerza impulsiva, colisiones en la, 234-235
Fuerzas inerciales, 133-135
*véase también* Fuerza Centrífuga; Fuerza Coriolis
Función de estado, 617
Fusión, calor de, 610

**G**

Galaxia:
enjambres, 403-404
materia oscura, 404
Galileo, aceleración en caída libre, 29-30
Ganancia, amplificador de transistores, 560
Gas:
diatómico, 576
densidad, 424
ecuación de estado, 567
equipartición de la energía, 577
función de estado, 617
grados de libertad, 577
ley de Avogadro, 566
ley de Boyle, 566-567
ley de Charles, 567
Maxwell-Boltzmann, distribución de la energía, 597-598
propiedades macroscópicas, 565-567
razón de los calores específicos, 574
recorrido libre medio, 591-593
volumen, dependencia de
número de moléculas, 566-567
presión, 565-567
temperatura, 565-567
*véase también* Primera ley de la termodinámica; Gas ideal; Segunda" ley de la termodinámica
Gas ideal:
capacidad calorífica molar:
a presión constante, 613-615
a volumen constante, 613
efecto de la teoría cuántica, 615-616
cálculo de la presión, 569-571

colisiones, 568-569
ecuación de estado, 567
van der Waals, 579-581
energía cinética de traslación, 571
energía interna, 576, 598, 616-617
energía potencial mutua de dos moléculas, 578-579
energía rotacional, 615
energía vibratoria, 615
factor de separación, 572
fuerzas intermoleculares, 578-579
hipótesis, 568
isotermas, 580-581
modelo, 568-569
presión sobre las paredes de un recipiente, 579
razón de las capacidades caloríficas molares, 613-614
razón del calor específico, 614
temperatura, 571-572
teoría cinética, 569
trabajo, 572-576
a presión constante, 573-574
a temperatura constante, 574
a volumen constante, 573
en aislamiento térmico, 574-575
velocidad media cuadrática, 570, 594
velocidades moleculares, 570
distribución, 593-597
*véase también* Gas
Gases diatómicos, 576
Gay-Lussac, ley de, 567
Geometría, fórmulas, A-14
Giro, objetos en:
estabilidad, 316
ímpetu angular, 320-321
Gotas de lluvia, 130
Gradiente de temperatura, 624
Grados de libertad, 577, 611
Gran unificación, teorías de la, 117-118, 541
Gravedad, 383-408
aceleración debida a, 28-29
centro de gravedad, cuerpo rígido, 332-334
cerca de la superficie de la Tierra, 388-390
conservación de la energía, 172
constante fundamental, 10-11
distribución esférica de la materia, 390-393
energía potencial, 177-179, 393-396
específica, 425
fuerza, 117
sobre la partícula interior, 391-392
historia, 383-384
ley del inverso de los cuadrados, 392-393
masa, 405
Newton, Isaac, 384, 385-386
carga debida a la, 333
planetas, 397-402
potencial, 397
radiación, 407-408
satélites, 397-402
universal, 402-404
variación con la:
altitud, 389
latitud al nivel del mar, 390
Gravitación universal, 402-404
Gravitatoria, constante, 10-11, 386-388
determinación de la, 387-388
Gravitatorio, campo, 396-397
equilibrio de los cuerpos rígidos en el, 339-341
Grupo de ondas, velocidad del, 470-471

**H**

Halley, cometa, 400
Helio, superfluidez, 602
Hertz, 354
Hidrógeno, modelo Bohr del átomo, 143
Hooke, ley de, 154, 359, 361

**I**

Impacto, parámetro del, 242
Ímpetu:
a altas velocidades, 212-214
conservación, 236-238
de fuerza, 285
brazo del, 285
de la inercia, 245
definición, 482
en colisiones, 234
partículas, 212-213
relativista, 535-537
segunda ley de Newton, 221
*véase también* Ímpetu angular, Ímpetu lineal
Ímpetu angular, 305-321
conservación, 313-319
clavadista en el trampolín, 314-315
estabilidad de los objetos al girar, 316
estrellas en colapso, 316-317
patinador que gira, 314
rueda de bicicleta girando, 315-316
cuantización, 320-321
cuerpos simétricos vs. asimétricos, 313
definición, 305
intrínseco, 320
partículas, 305-307
regla de la mano derecha, 306
relación en torca 306
sistema de partículas, 307-309
torca, 307
trompo, 319-320
velocidad angular e, 309-313
Ímpetu angular orbital, 320
Ímpetu lineal, 235
conservación, 214-217
partículas, 213-214
sistema de partículas, 213-214
Ímpetu relativista, 482-483
Impulso angular, 324
Impulso-ímpetu, teorema, 235
Incertidumbre, 8-9
Incompresible, flujo, 442
Inelásticas, colisiones, 240-241
Inercia rotatoria, 277-281

Inercia, 89
momento de, 277
Integrales, A-15
Intensidad:
movimiento ondulatorio, 478-481
ondas de sonido, 499-501
Ingravidez del astronauta, 98-99
Interferencia:
constructiva, 479-480
destructiva, 479
en el espacio, 506
en el tiempo, 506
movimiento ondulatorio, 478-482
Intermolecular, fuerzas, gas ideal, 578-579
Intrínseco, ímpetu angular, 320
Inversa, transformación de Lorentz, 528
Isotermas, 574
críticas, 580-581
gas ideal, 581
módulo volumétrico, 496, 612
Isotérmicos, procesos, 574
primera ley de la termodinámica, 620
Isotrópicos, sólidos, dilatación lineal, 556

**J**

Joule, 151, 607
Joule, aparato de, 608

**K**

Kelvin, William Thomson, 551
escala de temperatura, 551-552, 644-646
Kelvin-Planck, forma, segunda ley de la termodinámica, 640-641, 650.
Kepler, Johannes, 384
tercera ley, 399, 403
Kilowatt-hora, 160

**L**

Lagrange, Joseph Louis, 441
Laminilla bimetálica, 554, 555
Lengüeta, instrumentos de, 505
Leptones, A-8
Ley:
asociativa, adición vectorial, 42-43
cero de la termodinámica, 548-549
conmutativa, suma de vectores, 42-43
de la conservación de la energía, 185
de la conservación de la masa, 443
de la gravitación universal, 385-386
de la inercia, 89
de la transformación de velocidades, 72
de las áreas, 398-399
de las órbitas, 398
de los periodos, 399
del inverso de los cuadrados, 392-393
Límite de cedencia, 342
Límite elástico, 342
Límites de un sistema, 183-184
Línea, integrales de, 156
Lissajous, curva de, 380
figura de, 369
Longitud:
contracción, 524
factores de conversión, A-10
medición, 5-7
problemas con nuestras ideas sobre la, 520
relatividad, 524-525
transformación de Lorentz, 533-534
Longitud propia, 524
Lorentz, factor de, 527-528
transformación de, 526-529
consecuencias, 531-535
inversa, 528
relatividad de la longitud, 533-534
relatividad del tiempo, 531-533
velocidad, 529-530
Lubricación, 120
Luna:
datos astronómicos, A-4
presión atmosférica, 595
Luz:
problemas con nuestras ideas sobre la, 520-521
velocidad de la, 6
principio de constancia, 521

**M**

Mach, Ernst, 599
Mach, cono de, 511
Mach, número, 511
Magnética, resonancia, imagen de la, 321
Magnético, campo, factores de conversión, A-13
Magnético, flujo, factores de conversión, A-13
Mano derecha, regla de la:
ímpetu angular, 306
ímpetu rotatorio, 267
productos vectoriales, 49
Manómetro, tubo abierto, 430
Máquina de calor, 637-639 Ciclo de Carnot, 641-644
coeficiente de rendimiento, 639
eficiencia, 638
Marcos de referencia, 160-162
Mareas, fuerza de las, 412
Mareas vivas, 409
Masa, 90-92
conservación de la, 188, 443
de la Tierra, 388
energía y, 187-189R factores de conversión, A-11
flujo de, 443
ley de la conservación de la, 443
norma del SI, 7-8
reducida, 372
relación a peso, 97-98
reposo, 538
total, 204
Matemáticas, fórmulas, A-14-A-15
Materia oscura en la galaxia, 404
Materia oscura, 135
Maxwell-Boltzmann, distribución de la energía, 597-598, 601-602, 646

Mecánica:
aplicación de las leyes de Newton, 100-106
clásica, 87-88
marcos no inerciales, 133-135
estadística, 547, 587-603
movimiento browniano, 599-600
energía interna, gas ideal, 598
distribución Maxwell-Boltzmann de energía, 597-598
trayectoria libre media, 589-591
distribución velocidad molecular, 593-597
probabilidad, 588
distribuciones estadísticas cuánticas, 600-603
velocidad media cuadrática, 596
distribución estadística 587-589
fuerza, 90
masa, 90-92
primera ley de Newton, 88-90
segunda ley de Newton, 92-94
tercera ley de Newton, 94-96
Medición, 1-11
Análisis dimensional 10-11
longitud, 5-7
masa, 7-8
precisión y cifras significativas, 8-9
patrones, 1-2
sistema internacional de unidades, 2-3
tiempo, 3-5
Membrana vibratoria, 506
Mercurio, barómetro de, 480
Mercurio, precesión del perihelio, 406-407
Mesones, A-9
Método de componentes en la suma vectorial, 46-48
Metro, patrón, 5-7
Michelson-Morley, experimento de, 520
Movimiento armónico, 356-359
amortiguado, 368-370
combinaciones, 367-368
Modelaje, 433, 568-569
Módulo de Young, 343
Módulo de corte, 343
Módulo de elasticidad, 342
Módulo volumétrico adiabático, 496
Mol, definición, 8
Molécula diatómica, energía cinética, 576
Molecular, velocidad:
distribución, 593-597
confirmación experimental, 596-597
gas ideal, 570
selector de la velocidad, 597
Movimiento, 17-32
a velocidad constante, 18
aceleración, 18, 22, 23-25, 59-61
aceleración constante, 25-28
en dos y tres dimensiones, 61-63
armónico simple angular, 361
armónico simple, 356-359
automóvil en aceleración y frenado, 18-19, 22
bola de arcilla pegajosa, 19, 23
browniano, 599-600
centro de masa, 218
circular uniforme, 67-69
curva peraltada, 125-126
aceleración centrípeta, 366
péndulo cónico, 124-125
dinámica, 123-126
rotor, 125
con respecto al centro de masa, 400
cuerpos en caída libre, 28-32
descripción, 17-20
desplazamiento, 59-60
disparo a un blanco en caída, 65-67
en dos y tres dimensiones, 59-74
partículas, 17
principio de exclusión de Pauli, 601
proyectiles, 63-65, 130-133
puntos de retorno, 179
rebote del disco de goma en el hockey, 19, 22-23
relativo, 71-74
rotatorio, 261-270
a altas velocidades, 74
segunda ley, 212-213
velocidad, 59-60
velocidad instantánea, 21-23
velocidad media, 20
Movimiento armónico simple, 356-359
angular, 361
frecuencia angular, 357
aplicaciones, 361-365
péndulo físico, 363-365
péndulo simple, 362-363
oscilador de torsión, 361-362
consideraciones energéticas, 359-361
energía cinética, 359
energía potencial, 359
movimiento circular uniforme, 365-367
Movimiento circular:
aceleración tangencial, 69-71
uniforme, 67-69
dinámica, 123-126
vectores de velocidad y de aceleración, 69-71
Movimiento ondulatorio, 465-487
amplitud, 469
elementos concentrados, 486
elementos distribuidos, 486
frecuencia, 469
intensidad, 476
interferencia, 478-481
resortes unidos con densidad de masa diferente, 483-484
frecuencias naturales, 485
diferencia de trayectoria, 481
periodo, 421
diferencia de fase, 481
plano polarizado, 488
potencia e intensidad, 475-476
resonancia, 485-487
principio de superposición, 476-478
transmisión de ondas, 484
ondas viajeras, 467-471

ecuación de onda, 474-475
longitud de onda, 469
velocidad de onda, 471-474
Movimiento rotatorio, 261-270
de aceleración angular, 263, 269
de componentes tangencial y radial, 268
desplazamiento angular, 263
velocidad angular, 263
con constante de aceleración angular, 264-265
puro, en el cuerpo rígido, 261-262
cantidades como vectores, 265-268
relación entre variables lineal y angular,
forma escalar, 268-269
forma vectorial, 269-270
regla de la mano derecha, 267
variables, 262-264
Muones, 525-526

N
Neutrino, 186
Neutrones, energía cinética, 158
Neutrónica, estrella, 317, 390
Newton, 89, 96
Newton, leyes:
de la gravitación universal, 385-386
primera ley de, 88-90
segunda ley de, 51, 92-94
forma angular, 361
curva peraltada, 125-126
péndulo cónico, 124-125
movimiento armónico amortiguado, 369
fuerzas de arrastre, 130-131
flujo fluido, 444
fricción, 120-121
analogía rotatoria, 277
rotor, 125
ondas sonoras, 496-497
movimiento de translación, 294
dinámica rotatoria de dos cuerpos, 371
movimiento circular uniforme, 123-124
unidades, 96-97
validez, 136
ecuación de onda, 474-475
tercera ley de, 94-96
forma fuerte de la, 307
Newton-metro, 151
Nivel de compensación, 437
Nivel del sonido, *500*
No-inerciales, marcos, 133-135
No-viscosidad, 442
Nobel, premios de Física, A-20-A-23
Nodos, 482
Normal, fuerza, 101, 119-120
Nuclear, resonancia magnética, 321

O
Onda, número de, 469
Onda:
armónica, 467
clasificación, 466-467
complejas, principio de superposición, 477-478
esférica, 467
estacionarias, 482-485
sistema bloque-resorte, 483
sonido longitudinal, 501-503
pulsación reflejada, 483-484
frecuencia angular de la, 469
frente de la, 467
longitudinal, 466
mecánicas, 465
plana, 467
sinusoidales, 469-470
sonoras, 495-511
transmitida, 484
transversal, 466
viajeras, 467-471
velocidad de la, 471-474
análisis dimensional, 471-472
análisis mecánico, 472-473
velocidad transversal de la partícula, 473
Ondas sonoras, 495-511
alcance del oído humano, 500
amplitud de la presión, 498
análisis mecánico, 472-473
columnas de aire vibratorias, 504-505
cuerdas vibratorias, 504
desplazamiento longitudinal, 497
efecto Doppler, 508-511
modulación de la amplitud, 507
nodos y antinodos de presión, 502
ondas longitudinales estacionarias, 501-503
ondas longitudinales viajeras, 497-499
potencia e intensidad, 499-501
pulsaciones, 506-508
principio de superposición, 506
velocidad, 495-497
sistemas vibratorios, 503-506
umbral de dolor, 500
Órbitas, ley de las, 398
Oscilaciones, 353-373
armónicas, 355
combinaciones de frecuencias diferentes, 367-368
condiciones, 353-354
de dos cuerpos, 371-373
forzadas, 370-371
frecuencias naturales, 485
fuerza de restitución, 356
*función de la energía potencial, 354-355*
puntos de retorno, 354
*véase también* movimiento armónico simple
Oscilador armónico simple, 355-356
Oscilador de torsión, 361-362
Osciladores de dos cuerpos, 371-373
Oscilatorios, sistemas, 353-355
Ostwald, Wilhelm, 599

P
Palanca hidráulica, 427-428
Par, producción del, 187
Paradoja de los gemelos, 524, 533

Paradoja hidrostática, 434
Pared adiabática, 548
Pared diatérmica, 548
Paridad, conservación de la, 53
Parsec, 402
Partículas:
  aceleradores de, 247-248
  cinemática de las, 17
  compuestas, A-9
  conservación de la energía, 183-187
  distribución estadística, 600-601
  efecto de la gravitación de la distribución esférica de la materia, 390-393
  elementales, A-8
  elementales, colisiones entre, 234
  energía de sujeción, 396
  fluidos, 441
  fundamentales, A-8
  ley de la gravitación universal de Newton, 385
  ímpetu lineal, 212-213
  movimiento en trayectoria circular, torca, 312-313
  torca que actúa sobre, 283-286
  velocidad trasversal, ondas, 473
  *véase también* Sistemas de partículas
Pascal, 421
  principio de, 426
Patinador, giro, conservación del ímpetu angular, 314
Pauli, principio de exclusión de, 601
Péndulo:
  balístico, 241
  centro de oscilación, 364
  cónico, 124-125
  de torsión, 362
  físico, 363-365
  método de, medición de la aceleración en caída libre, 30-32
  torca de restitución, 362
  simple, 362-363
Perigeo, 398
Perihelio, 398
  precesión, Mercurio, 406-407
Periódica, tabla, A-7
Periodo: 354
  ley del, 399
Perrin, Jean, 600
Peso, 97
  carencia de, 98
  densidad, 422-423
  relación con la masa, 97-98
Pión, 519-520
Pitágoras, teorema de, A-14
Pitot, tubo de, 448
Planetas:
  movimiento, 397-402
    consideraciones energéticas, 400-402
    en torno al centro de masa, 400
  propiedades, A-4
Planck; constante de 11, 190
  Planetas: movimiento, 397-402
    con respecto al centro de masa 400
    consideraciones de energía 400-402
    propiedades A-4
Plasma, 419-420
Plasticidad, 342
Poder ascensional dinámico, 448-449
Poise, 453
Poiseuille, ley de, 454
Polar, ángulo, 44
Polar, vector, 52
Posición, fuerzas dependientes de la, 128
  programas de computación, A-18—A-19
Positrón, emisión, 187
Potencia, 159-160
  definición, 160
  factores de conversión, A-13
  movimiento ondulatorio, 475-476
Precesión, perihelio de Mercurio, 406-407
Presión:
  absoluta, 430
  amplitud, ondas sonoras, 498
  cálculo, gas ideal, 569-571
  estática, 446
  estática de los fluidos, 420-421
  factores de conversión, A-13
  manométrica, 430
  medición, fluidos, 429-431
  onda de, 498
  variación atmosférica, 424-426
  variación, fluido en reposo, 422-426
Presión atmosférica, variación de la, 424-426
Presión dinámica, 446
Primera ley de la termodinámica, 616-619
  procesos adiabáticos 619-620
  aplicaciones, 619-622
  procesos a volumen constante 620
  procesos cíclicos 620
  expansión libre 620-621
  procesos isotérmicos 620
Principio de equivalencia, 405-406
Principio de la constancia de la velocidad de la luz, 521, 540
Principio de relatividad, 521, 538
Principio de superposición, 476-478
Probabilidad, 588
  entropía, 646-648
Proceso adiabático, 574-575, 636
  primera ley de la termodinámica, 619-620
Procesos cíclicos, primera ley de la termodinámica, 620
Proceso reversible, 635-637
  entropía 646-648
Proceso irreversible, 635-637
  entropía, 648-650
Producto punto, vectores, 48
Propiedad termométrica, 550
Proyectiles
  movimiento, 397
    en torno al centro de masa, 400
    consideraciones energéticas, 400-402
  propiedades, A-4
Proyección, 44
Ptolomeo, 383-384

Pulsaciones, 506-508
Pulsar, 273
Punto silla, 341
Punto triple del agua, 551
Puntos de retorno, 354

**Q**
Quarks, A-8

**R**
Radar, retardo del eco, 407
Radiación gamma, 187, 522
Radiación:
  calor, 624
  gravitatoria, 407-408
  presión, 317
Radiactividad, 187-189
Rayo, 467
Razón de las capacidades caloríficas molares, 613-614
Razón de los calores específicos, 574, 614
Recorrido libre medio, 589-593
    cálculo microscópico 591-593
Red cristalina, 341
Referencia, marcos de, 160-162
  centro de masa, 244-248
  no inercial, 133-135
  transformación de la velocidad entre, 245-246
Refrigeradores, segunda ley de la termodinámica, 639-641
Regulador, 169
Relatividad de la simultaneidad, 532
Relatividad de la longitud, transformación de Lorentz, 533-534
Relatividad del tiempo, 522-524
  transformación de Lorentz, 531-534
Relatividad especial, 135-136
Relatividad, 135-136
  teoría general de la, 404-408
  principio de, 521, 538
Reloj de cesio, 4-5
Relojes atómicos, 4-5
Reposo, energía de, 188
Reposo, longitud, 524
Reposo, masa, 538
Resistencia del aire, movimiento de proyectiles, 132-133
Resistencia térmica, 624
Resistencia, friccional, 120
Resistencia, termómetro de, 558-559
Resonancia, 370-371
  definición, 371
  movimiento ondulatorio, 485-487
Resorte, fuerza del:
  Resortes:
  energía potencial, 174-176 ley de la fuerza, 154
Reverberación, tiempo de, salas de concierto, 515
Reynolds, número de, 455
Roche, límite de, 418
Rodamiento, sin deslizamiento, 292-296
Sistemas vibratorios, 503-506
Rotación:
  del sistema de coordenadas, 45-46
  *véase también* Ímpetu angular
Rueda:
  en rotación, conservación del ímpetu angular, 315-316
Rueda rodante, dinámica, 291
Ruido, termómetro de, 645

**S**
SI: *véase* Sistema Internacional de Unidades
Satélites:
  en órbita de la Tierra, 95
  movimientos, 397-402
    consideraciones de energía, 400-402
    en torno al centro de masa, 400
Segunda ley de la termodinámica, 639-640
  compresión libre, 650
  entropía, 650-651
  flecha del tiempo, 651
  forma de Clausius, 640-641, 650-651
  forma de Kelvin-Planck, 640-641, 650
  refrigeradores, 639-641
  teorema de Carnot, 642-643
Segunda ley del movimiento, 212-213
Selector de velocidad, 597
Semieje mayor, 398, 402
Seudofuerzas, 133-135
  *véase también* Fuerza Centrífuga; fuerza Coriolis"
Seudotrabajo, 218
Seudovector, 52
Signos y símbolos matemáticos, A-14
Simetría axial, 310
Simultaneidad, relatividad, 531-532
Sistema Internacional de Unidades, 2-3, A-1-A-2
  calor, 607
  hertz, 354
  masa 7-8
  metro, 5-7
  presión, 420-421
  temperatura, 549-550
  trabajo, 151
  unidades de base, A-1
  unidades de fuerza, 97
  viscosidad, 453
Sistema binario de estrellas, 400
Sistema bola-cascarón, fuerzas externas, 212
Sistema inglés:
  trabajo, 151
  unidades de fuerza, 97
  unidades térmicas, 607
Sistema cgs:
  trabajo, 151
  unidades de fuerza, 97
Sistema de partículas:
  de dos partículas, 203-206
    giro de, 313
  energía, 217-220
  energía potencial, gravitación, 393-396
  energía relativista total, 538
  masa variable, 220-224
  ímpetu angular, 307-308
  ímpetu lineal, 213-214
  muchas partículas, 206-209

torca externa, 307-308
trabajo, 217-220
Sistema solar, ley de los periodos, 399
Sistemas de dos partículas, 203-206
Sistemas de muchas partículas, 206-209
Sistemas vibratorios, 503-506
Sol:
cambio en masa, 188
datos astronómicos, A-4
desviación de la luz de las estrellas, 407
Sólido cristalino, expansión y contracción, 554-556
Sólidos, 419-420
capacidad calorífica, 611-612
centro de masa, 209-212
inercia rotatoria, 281-283
Stanford Linear Accelerator Center, 247-248
Sublimación, 626
Sustancia plástica, 419
Sustancia termométrica, 550
Superconductividad, 602-603
Superfluidez, 603-603
Supergrupos, ligados gravitatoriamente, 404
Superposición, principio de, 476-478
ondas complejas, 477-478
análisis de Fourier, 478
interferencia en el tiempo, 506

**T**

Tacoma Narrows, puente de Bridge, 371
Tambor, parche de, 505-506
Tangencial, aceleración, movimiento circular, 70-71
Tangencial, fuerza, 309
Temperatura:
cambio de volumen en los fluidos, 557
cero absoluto, 645-646
coeficiente de dilatación lineal, 556
Debye, 611
definición, 549
descripciones macroscópica y microscópica, 547-548
dilatación térmica, 554-558
equilibrio térmico, 548-549
escala Celsius, 550-551
escala de temperatura del gas ideal, 552-554
escala Fahrenheit, 550-551
escala internacional, 554
escala Kelvin, 551-552
gas ideal, 571-572
medición, 549-552
negativa, 645-646
punto triple del agua, 551
termodinámica, definición, 644
*véase también* termodinámica
Temperatura termodinámica, definición, 644
Temperaturas negativas, 645-646
Tensión, 100, 342-343
definición, 343
Tensión superficial, 432
Tensor, 50
Teorema de los ejes paralelos, 280-281
Teoría especial de la relatividad, 519-541
y el sentido común, 540-541
transformación de Lorentz, 526-529, 530
consecuencias, 531-535
coordenadas de medición espacio-tiempo, 529
postulados, 521-522, 540-541
suma relativista de velocidades, 524-525
energía relativista, 537-540
ímpetu relativista, 535-537
relatividad de longitud, 524
relatividad del tiempo, 522-524
transformación de velocidades, 529-531
Tercera ley de la termodinámica, 645
Térmica, máquina, 637-639
Termómetros, 549
gas a volumen constante, 552-553
laminilla bimetálica, 554-555
resistencia, 559-560
Tiempo:
factores de conversión, A-11
medición, 3-5
problemas con nuestras ideas acerca del, 519-520
propio, 523
relatividad, 522-524
transformación de Lorentz, 531-533
Tiempo de vuelo, método, 158
Tiempo propio, 523
Tierra: datos astronómicos, A-4
masa de la, 388
Tierra-Luna (sistema), centro de masa, 207-208
Torca:
actuación sobre partículas, 283-286
ímpetu angular, 307-308
debido a la gravedad, 333
definición, 277
externo, 307-308
partícula moviéndose en una trayectoria circular, 312-313
relación con el ímpetu angular, 306
unidades, 285
Torr, 421
Torricelli, Evangelista, 431
ley de, 459
Trabajo, 572-576
definición, 149-151
factores de conversión, A-13
fuerza constante, 149-152
fuerza variable:
bidimensional, 155-157
unidimensional, 153-155
sistema de partículas, 217-220
unidad de, 151
Trabajo-energía, teorema, 157-159
dinámica de los fluidos, 445
dinámica rotatoria, 278
dinámica rotatoria del cuerpo rígido, 286
limitación, 159
prueba general, 158-159
Transformación, ecuaciones, 50
teoría especial de la relatividad, 526-529
Transformación galileana, ecuaciones de, 526-527

Traslación:
combinada con movimiento rotatorio, 290-296
cuerpo rígido, 262
del sistema de coordenadas, 45-46
segunda ley de Newton, 294
Tren de ondas, 467
Triángulos, formulas, A-14
Trigonometría:
desarrollos, A-15
funciones, A-14
identidades. A-15
Tren de ondas periódico, 467
Trompo, giro, ímpetu angular, 319-320
Tubo de flujo, 443
Turbulencia, 454-455

**U**
Unidad astronómica, 14, 402

**V**
Valor medio, 587-589
Valor-R, 624
van der Waals, ecuación de estado, 579-581
Vaporización, calor de, 610
Variable de estado, 647
Vectores, 41-53
axiales, 52-53
cantidades rotatorias como, 265-268
componentes, 43-45
en dos o tres dimensiones, 63-64
definición, 42-52
ecuaciones, aceleración constante, dos y tres dimensiones, 60-63
ecuaciones de transformación, 50
en dos y tres dimensiones, 60-63
fuerzas como, 90
invariantes, 51
leyes, 50-52, 386
multiplicación, 48-50
polares, 52-53
producto escalar, 150
productos, A-15
productos generalizados, 50
proyección, 44
simetría de reflexión, 52-53
sistemas de coordenadas, 45-46
suma de:
método de las componentes, 46-48
método gráfico, 42-43
Vectores, suma de:
método de las componentes, 46-48
método gráfico, 42-43
Velocidad angular:
ímpetu angular, y 309-313
movimiento rotacional, 263
vector, 52
Velocidad:
crítica, turbulencia, 455
factores de conversión, A-12
parámetro, 527-528
fuerzas dependientes de la, 127-128
gradiente, dinámica de los fluidos, 453
instantánea, 21-23
ley de transformación, 72
media, promedio, 20
media cuadrática, 570, 594
movimiento en dos y tres dimensiones, 59-60
onda transversal, 473
problemas con nuestras ideas sobre, 520
proceso límite, 21
suma relativista, 524-525
transformación:
entre marcos de referencia, 245-246
ley de, 72
teoría especial de la relatividad, 529-531
vectores, movimiento circular, 69-71
*véase también* Velocidad angular
Velocidad de Maxwell.
*Véase* Velocidad molecular
Velocidad molecular:
distribución, 593-597
confirmación experimental, 596-597
en el gas ideal, 569-570
selector de velocidad en la, 597
Velocidad terminal, cuerpo en caída, 130-133
Velocidad transversal, partículas, ondas, 473
Velocidad, ley de la suma, 525
Venturi, medidor, 448
Vibratoria, energía, gas ideal, 615
Vibratoria, membrana, 506
Vibratorias, columnas de aire, 504-505
Vibratorias, cuerdas, 504
Vibratorios, sistemas, 503-506
Viscosidad, 442, 453-454
Volumen:
factores de conversión, A-11
caudal, flujo, 443
Volumen constante, procesos, primera ley de la termodinámica, 620
Volumen constante, termómetros de gas a, 552-553
Volumen específico, 557
Volumétrico, módulo, 422
Vórtice, campo de flujo, 451

**W**
Watt, 160

**Y**
Yarda, definición, 5
Young, módulo de, 343
Yukawa, energía potencial de, 198