

Introducción a la Mecánica de Lagrange y Hamilton

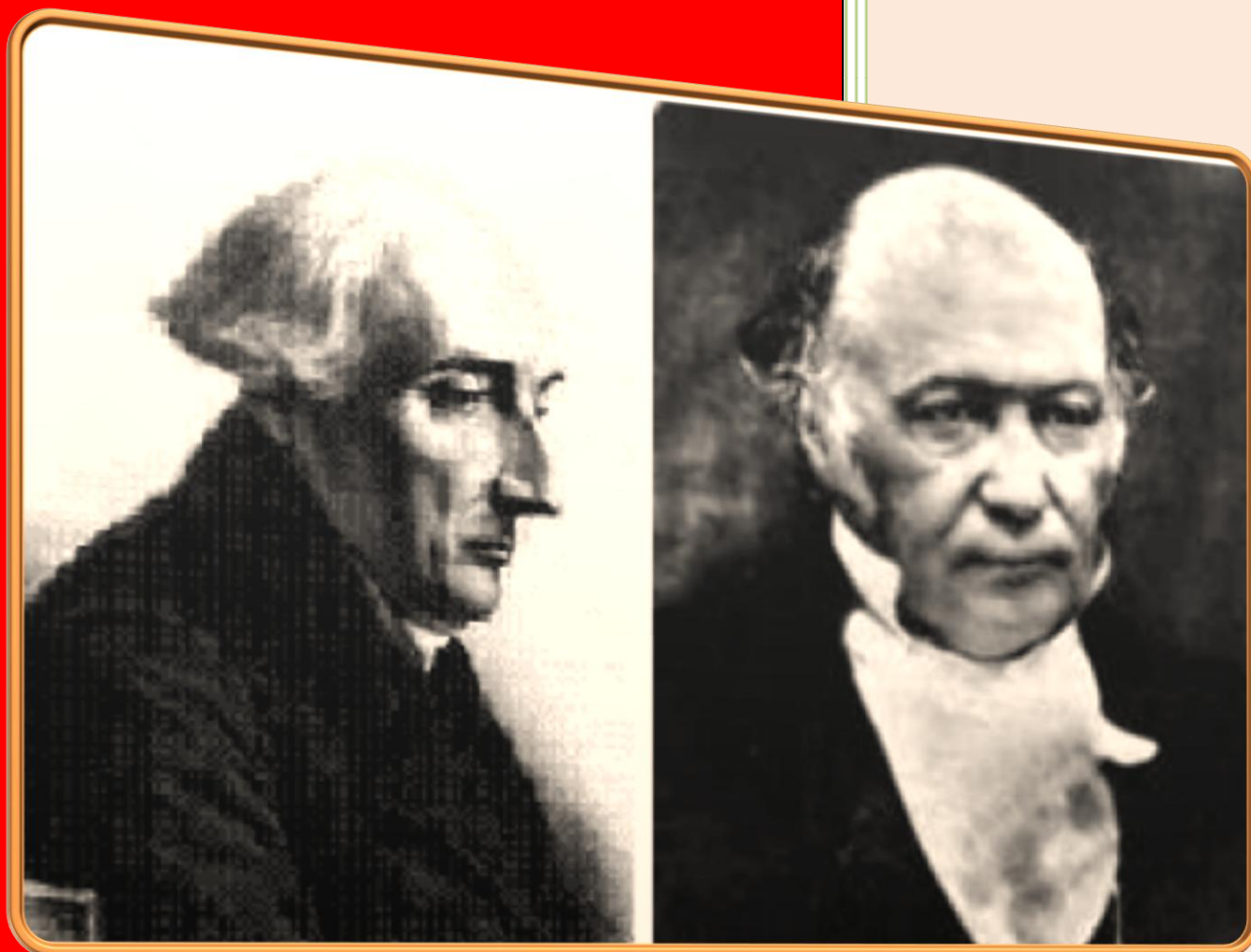


La Universidad del Zulia

1^{ra} edición (preprint)

Enero 2010

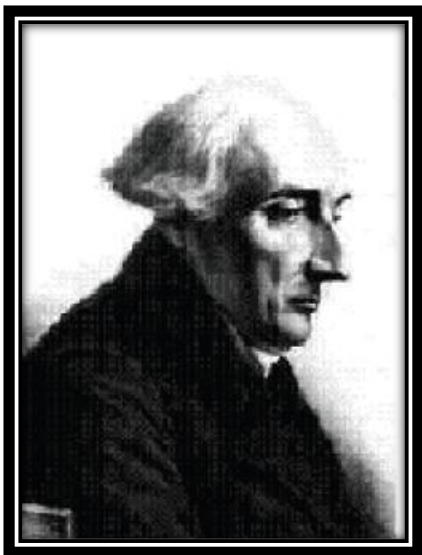
(EN CONSTRUCCION Y REVISION)



*Con numerosos ejemplos y una
presentación que facilita la
comprensión del contenido.*

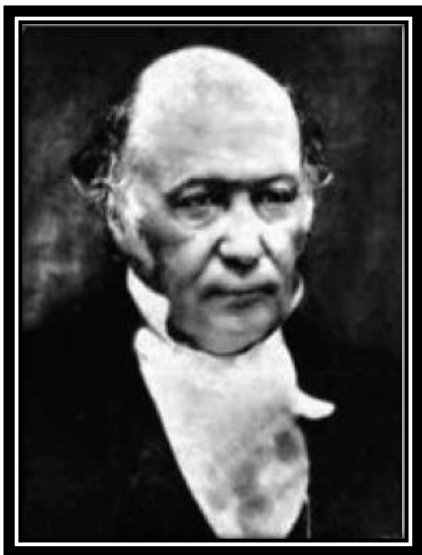
SOLDOVIERI

LA UNIVERSIDAD DEL ZULIA



**GIUSEPPE LODOVICO LAGRANGIA (JOSEPH LOUIS LAGRANGE)
(1736-1813).**

Matemático y astrónomo francés nacido en Turín (Italia), en cuya universidad estudió. Fue nombrado profesor de geometría en la Academia Militar de Turín a los 19 años y en 1758 fundó una sociedad que más tarde se convertiría en la Academia de Ciencias de Turín. En 1766 fue nombrado director de la Academia de Ciencias de Berlín, y 20 años después llegó a París invitado por el rey Luis XVI. Durante el periodo de la Revolución Francesa, estuvo al cargo de la comisión para el establecimiento de un nuevo sistema de pesos y medidas. Después de la Revolución, fue profesor de la nueva École Normale y con Napoleón fue miembro del Senado y recibió el título de conde. Fue uno de los matemáticos más importantes del siglo XVIII; creó el cálculo de variaciones, sistematizó el campo de las ecuaciones diferenciales y trabajó en la teoría de números. Entre sus investigaciones en astronomía destacan los cálculos de la libración de la Luna y los movimientos de los planetas. Su obra más importante es *Mecánica analítica* (1788).



SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865).

Matemático y astrónomo británico, conocido sobre todo por sus trabajos en análisis de vectores y en óptica. Nació en Dublín y estudió en el Trinity College. En 1827, sin haber obtenido su título, fue nombrado profesor de astronomía, y al año siguiente astrónomo real para Irlanda. Hamilton pasó el resto de su vida trabajando en el Trinity College y en el observatorio de Dunsink, cerca de Dublín. En el campo de la dinámica, introdujo las funciones de Hamilton, que expresan la suma de las energías cinética y potencial de un sistema dinámico; son muy importantes en el desarrollo de la dinámica moderna y para el estudio de la teoría cuántica.

SOLDOVIERI C., Terenzio

Licenciado en Física

Profesor agregado del Departamento de Física
Facultad de Ciencias - La Universidad del Zulia (LUZ)

`tsoldovieri@luz.edu.ve`

`tsoldovieri@fec.luz.edu.ve`

`www.cmc.org.ve/tsweb`



La Universidad del Zulia

INTRODUCCION A LA MECANICA DE LAGRANGE Y HAMILTON

Con numerosos ejemplos y una presentación que
facilita la comprensión del contenido.

1^{era} edición (preprint)

Versión 1.12

(EN CONSTRUCCION Y REVISION)

2010

Escrito usando \LaTeX

Copyright © 2010 por Terenzio Soldovieri C.

República Bolivariana de Venezuela

ÍNDICE GENERAL

I Fundamentos físicos y matemáticos básicos para estudiar Mecánica de Lagrange y Hamilton	1
<i>1 Dinámica de un sistema de partículas</i>	3
1.1. Sistema de partículas	4
1.2. Clasificación de los sistemas de partículas	4
1.2.1. Discreto	4
1.2.2. Continuo	5
1.3. Fuerzas en un sistema de partículas	5
1.3.1. Externas e internas	5
Fuerzas externas	6
Fuerzas internas	6
1.3.2. Aplicadas y de reacción	6
Aplicadas	6
De reacción	6
1.4. Centro de masa	8
1.4.1. Para un sistema discreto	8
1.4.2. Para un sistema continuo	10
1.4.3. Para un sistema compuesto	13
1.5. Movimiento del centro de masa	15
1.6. Momento lineal y su conservación	19
1.7. Momento angular y su conservación	20
1.8. Energía y su conservación	25
1.8.1. Energía cinética	25

1.8.2. Energía potencial	26
1.8.3. Conservación de la energía mecánica	28
1.9. Problemas	29
2 Definiciones y principios básicos	39
2.1. Propiedades del espacio y el tiempo	40
2.2. Ligaduras	42
2.3. Clasificación de las ligaduras	45
2.3.1. Si son o no desigualdades	45
Unilaterales	45
Bilaterales	46
2.3.2. Si dependen explícita o implícitamente del tiempo	46
Ligaduras reónomas	46
Ligaduras esclerónomas	48
2.3.3. Por su integrabilidad	48
Ligaduras holónomas o geométricas	48
Ligaduras no-holónomas	49
2.4. Fuerza de ligadura y fuerza aplicada	52
2.4.1. Ligaduras lisas	54
2.4.2. Ligaduras rugosas	54
2.5. Dificultades introducidas por las ligaduras	55
2.6. Coordenadas generalizadas	55
2.7. Espacio de configuración	57
2.8. Magnitudes mecánicas en coordenadas generalizadas	58
2.8.1. Desplazamiento	59
2.8.2. Velocidad	59
2.8.3. Aceleración	59
2.8.4. Trabajo mecánico	60
2.8.5. Energía cinética	61
2.9. Desplazamiento virtual y trabajo virtual	62
2.9.1. Desplazamiento virtual	63
2.9.2. Trabajo virtual	65
2.10. Algunos principios mecánicos básicos	65
2.10.1. Principio de los trabajos virtuales	65
2.10.2. Principio de D'Alembert	69
2.10.3. Principio de Hamilton o de acción estacionaria	74

3	<i>Cálculo variacional con fronteras fijas</i>	77
3.1.	Planteamiento del problema	78
3.2.	Cálculo de extremales sin restricciones	82
3.2.1.	Para una variable dependiente — Ecuación de Euler	82
3.2.2.	Para múltiples variables dependientes — Ecuaciones de Euler - Lagrange	97
3.3.	Cálculo de extremales con restricciones	102
3.3.1.	Restricciones del tipo $g[y_i(x); x] = 0$ y $g[y_i(x), y'_i(x); x] = 0$	102
3.3.2.	Restricciones del tipo isoperimétrico	107
3.4.	La notación δ	114
3.5.	Problemas	116
4	<i>Transformación de Legendre</i>	127
4.1.	Definición	127
4.2.	Para una variable independiente	130
4.3.	Para más de una variable independiente	134
4.4.	Variables activas y pasivas	137
4.5.	Algunas propiedades matemáticas de la transformación de Legendre	142
4.5.1.	La inversa de la transformación de Legendre	142
4.5.2.	Valores extremos	145
4.5.3.	Simetrías y relaciones entre derivadas	146
4.6.	Problemas	147
II	<i>Mecánica de Lagrange y Hamilton</i>	151
5	<i>Mecánica Lagrangiana</i>	153
5.1.	Ecuaciones de Lagrange partiendo del Principio de D'Alembert	154
5.1.1.	Sistemas holónomos	157
	Cuando las ligaduras se usan en forma implícita	157
	Cuando las ligaduras se usan en forma explícita	158
5.1.2.	Sistemas no-holónomos	160
5.2.	Ecuaciones de Lagrange partiendo del Principio de Hamilton	162
5.2.1.	Sistemas holónomos	162
	Cuando las ligaduras se usan en forma implícita	162
	Cuando las ligaduras se usan en forma explícita	163

5.2.2. Sistemas no-holónomos	163
5.3. Ejemplos con ligaduras holónomas (forma implícita)	163
5.4. Ejemplos con ligaduras holónomas (forma explícita)	182
5.5. Ejemplos con ligaduras semi-holónomas	194
5.6. Condición de integrabilidad de las ecuaciones de Lagrange	201
5.7. Invariancia de las ecuaciones de Lagrange	202
5.8. Equivalencia entre las ecuaciones de Lagrange y de Newton	204
5.9. Momentos generalizados	205
5.10. Coordenadas cíclicas o ignorables	206
5.11. Integrales primeras de movimiento	206
5.12. Integrales primeras de movimiento para un sistema cerrado	208
5.13. Teoremas de conservación	209
5.13.1. Conservación de la energía	209
5.13.2. Conservación del momento generalizado - Conservación del mo- mento lineal y angular	212
Conservación del momento lineal	213
Conservación del momento angular	215
5.14. Teorema de Noether	217
5.15. Mecánica Lagrangiana vs la Newtoniana	220
5.16. Problemas	221

6 Mecánica Hamiltoniana 235

6.1. Ecuaciones de Hamilton	237
6.1.1. Sistemas holónomos	237
Las ligaduras se usan en forma implícita	237
Las ligaduras se usan en forma explícita	240
6.1.2. Sistemas no-holónomos	241
6.2. Pasos a seguir para construir un Hamiltoniano	243
6.3. Ejemplos con ligaduras holónomas (forma implícita)	246
6.4. Ejemplos con ligaduras holónomas (forma explícita)	259
6.5. Ejemplos con ligaduras semi-holónomas	267
6.6. Ecuaciones de Hamilton a partir del principio de Hamilton	272
6.7. Espacio de fase	273
6.8. Teorema de Liouville	278
6.9. Forma simpléctica de las Ecuaciones de Hamilton	285
6.10. El método de Routh	287
6.11. Dinámica Lagrangiana vs Hamiltoniana	290

6.12. Problemas	291
7 Transformaciones canónicas	295
7.1. Definición	295
7.2. Ecuaciones de transformación canónicas	297
7.2.1. Caso 1: Función generatriz $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t)$	298
7.2.2. Caso 2: Función generatriz $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t)$	299
7.2.3. Caso 3: Función generatriz $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_3(p_i, \tilde{q}_i, t)$	300
7.2.4. Caso 4: Función generatriz $\mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_4(p_i, \tilde{p}_i, t)$	301
7.3. Invariante integral universal de Poincaré	309
7.4. Corchetes de Lagrange y Poisson	313
7.4.1. Corchetes de Lagrange	313
7.4.2. Corchetes de Poisson	314
7.4.3. Ecuaciones de Hamilton en corchetes de Poisson	320
7.5. Transformaciones canónicas infinitesimales	322
7.6. Forma simpléctica de las transformaciones canónicas	325
7.7. Problemas	327
8 Teoría de Hamilton-Jacobi	331
8.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi	332
8.2. Solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi	335
8.2.1. Para sistemas con H independiente del tiempo	335
8.2.2. Para sistemas con H independiente del tiempo y alguna coordena- nada cíclica	336
8.2.3. Para sistemas con H independiente del tiempo y coordenadas no cíclicas	336
8.3. Ejemplos de aplicación de la ecuación de Hamilton-Jacobi	338
8.4. Variables acción-ángulo en sistemas con un grado de libertad	338
A Teorema de Euler	339
B Funciones monótonas y continuidad	341
C Lema fundamental del cálculo de variaciones	343

<i>D Propiedades de los determinantes</i>	345
<i>E Identidad de Jacobi</i>	349
E.1. Por transformaciones canónicas infinitesimales	349
E.2. Por cálculo directo	350
<i>Bibliografía</i>	353

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Tipos de fuerzas en un sistema de partículas.	5
1.2. Forma fuerte de la tercera ley de Newton.	7
1.3. Fuerzas interacción electromagnética de entre dos partículas cargadas q_i y q_j en movimiento.	8
1.4. Posición del centro de masa de un sistema de partículas.	9
1.5. Sistema discreto formado por tres partículas situadas en los vértices de un triángulo rectángulo (Ejemplo 1.1).	10
1.6. Aro semicircular homogéneo de radio a y densidad lineal λ (Ejemplo 1.2).	11
1.7. Cono sólido homogéneo de altura h y base de radio a (Ejemplo 1.3).	12
1.8. Sistema S discreto de N partículas subdividido (por completo) en s subsistemas $S_1, S_2, S_3, \dots, S_s$	13
1.9. Centro de masa de un sistema compuesto por una concha hemisférica y un hemisferio sólido homogéneo acoplados (Ejemplo 1.4).	15
1.10. Dos partículas de masas iguales que se deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto (Ejemplo 1.5).	17
1.11. Vector de posición \vec{r}'_i	20
1.12. Aro homogéneo, de radio a , que rueda sobre una superficie lisa con frecuencia angular constante (Ejemplo 1.6).	22
1.13. Vector de posición \vec{r}_{ij}	24
1.14. Centro de masa de un cono sólido homogéneo (Problema 1).	29
1.15. Centro de masa de un sistema formado por un cono sólido homogéneo cuya base está unida a la correspondiente de un hemisferio sólido homogéneo (Problema 3).	30

1.16. Centro de masa de un alambre uniforme que sustiende un arco θ circular de radio a (Problema 5).	31
1.17. Centro de gravedad y centro de masa de un sistema de partículas (Problema 6).	31
1.18. Centro de masa de un modelo de la molécula de H_2O (Problema 8).	32
1.19. Centro de masa de un triángulo rectángulo isósceles homogéneo (Problema 9).	32
1.20. Centro de masa de una pirámide homogénea (Problema 10).	33
1.21. Proyectil disparado con un ángulo de elevación el cual estalla en el aire (Problema 14).	34
1.22. Sistema discreto formado por N partículas de igual masa m , que delizan libremente sobre alambres paralelos lisos y se atraen unas a otras con fuerzas proporcionales al producto de sus masas y a sus distancias (Problema 17).	35
1.23. Dos partículas de masa m se mueven, cada una, sobre las correderas lisas perpendiculares OX y OY , atrayéndose con una fuerza proporcional a su distancia (Problema 18).	36
1.24. Torque de un sistema de partículas con respecto a dos sistemas de coordenadas cuyos orígenes no coinciden (Problema 19).	37
2.1. Péndulo simple.	43
2.2. Un bloque de masa m que se mueve sobre una superficie inclinada.	43
2.3. Cuerpo rígido.	44
2.4. Dos masas m_1 y m_2 unidas por una barra rígida de longitud ℓ	44
2.5. Moléculas de gas encerradas en una esfera de radio R	45
2.6. Partícula que se desliza sobre la superficie de una esfera de radio R	46
2.7. Una partícula de masa m que se mueve en un aro cuyo radio cambia con el tiempo.	47
2.8. Partícula que se mueve sobre un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación varía con el tiempo.	48
2.9. Un disco que rueda (sin deslizar) sobre el plano horizontal xy (Ejemplo 2.7).	51
2.10. Movimiento de un círculo que se desplaza sobre un plano inclinado.	52
2.11. Dos masas m_1 y m_2 acopladas por un resorte.	53
2.12. Ligaduras lisa (a) y rugosa (b). Para el movimiento permitido por la ligadura (deslizamiento horizontal) la reacción lisa no realiza trabajo, mientras que en el caso rugoso sí.	54
2.13. El historial temporal de un sistema es representado mediante una curva en el espacio de configuración. Se muestran cuatro posibles.	58

2.14. Desplazamiento real $d\vec{r}$ y desplazamiento virtual $\delta\vec{r}$	63
2.15. Coordenada real $q(t)$ y la coordenada desplazada virtualmente $q(t) + \delta q(t)$	64
2.16. Palanca horizontal en equilibrio estático (Ejemplo 2.10).	67
2.17. Péndulo en equilibrio estático (Ejemplo 2.11).	68
2.18. Sistema de dos masas unidas por una cuerda que pasa a través de una polea (Ejemplo 2.12).	71
2.19. Dos masas unidas por una cuerda que pasa a través de una polea y donde una de las masas se desliza sobre un plano inclinado (Ejemplo 2.13).	72
3.1. La función $y(x)$ es el camino que hace que el funcional J tome un valor extremal. Las funciones $y(\alpha, x) = y(x) + \alpha\eta(x)$ son las funciones vecinas donde $\eta(x)$ se anula en las fronteras del intervalo $[x_1, x_2]$	79
3.2. Función $y(x) = 3x$ entre los límites de $x = 0$ y $x = 2\pi$ y dos de sus variaciones $y(\alpha, x) = 3x + \alpha[\text{Sen}(x) - \text{Cos}(x) + 1]$ (Ejemplo 3.1).	80
3.3. Función $y(x) = x^2$ entre los límites de $x = -1$ y $x = 1$ y dos de sus variaciones $y(\alpha, x) = x^2 + \alpha(x^3 - x)$ (Ejemplo 3.2).	81
3.4. El problema de la braquistócrona (Ejemplo 3.6).	87
3.5. Camino resultante para que la partícula se mueva desde $(x_1, y_1) = (0, 0)$ hasta (x_2, y_2) en el menor tiempo posible (Ejemplo 3.6).	88
3.6. Distancia más corta entre dos puntos del plano (Ejemplo 3.7).	89
3.7. Superficie mínima de revolución (Ejemplo 3.8).	91
3.8. Película de jabón entre dos anillos concéntricos de radio a y separados por una distancia $2d$ (Ejemplo 3.10).	94
3.9. Geodésicas sobre una esfera (Ejemplo 3.11).	96
3.10. Geodésicas en un cilindro circular recto de radio R (Ejemplo 3.15).	104
3.11. Función $y(x)$ cuya área encerrada ha de maximizarse (Ejemplo 3.18).	110
3.12. Cuerda de longitud ℓ colocada entre las orillas de un río de ancho $2a$ (Ejemplo 3.19).	112
3.13. Desplazamiento virtual.	115
3.14. Camino más corto sobre la superficie de un cono de semiángulo α (Problema 43).	123
3.15. Geodésicas sobre la superficie de un cilindro circular recto de radio R (Problema 51).	125
4.1. (a) Representación de la relación fundamental $F = F(u)$. (b) Representación de una familia de relaciones fundamentales.	129
4.2. Una curva dada puede representarse igualmente bien como envolvente de una familia de líneas tangentes.	130

4.3. (a) Gráfica de una función convexa $F = F(u)$. (b) Gráfica de su tangente v en función de u	131
4.4. Representación de la relación fundamental F para el caso de una sola variable.	132
5.1. Partícula de masa m que se desplaza hacia abajo en un plano inclinado un ángulo θ con respecto a la horizontal (Ejemplo 5.1).	164
5.2. Partícula de masa m que se encuentra inmersa en un campo de fuerza conservativo (Ejemplo 5.2).	166
5.3. La máquina simple de Atwood (Ejemplo 5.3).	168
5.4. Anillo de masa m que se desliza por un alambre, de masa despreciable, que gira uniformemente (Ejemplo 5.4).	169
5.5. Movimiento de un proyectil de masa m bajo la acción de la gravedad en dos dimensiones (Ejemplo 5.5).	171
5.6. Partícula de masa m que está obligada a moverse sobre la superficie interna de un cono liso (Ejemplo 5.6).	172
5.7. Un péndulo simple de longitud b y masa pendular m cuyo punto de soporte mueve sobre un anillo con velocidad angular constante (Ejemplo 5.7).	174
5.8. Péndulo simple colocado dentro de un vagón que se mueve con una aceleración constante a en la dirección $+x$ (Ejemplo 5.8).	176
5.9. Cuenta de masa m se desplaza a lo largo de un alambre liso, de masa despreciable, que tiene la forma de la parábola $z = cr^2$ (Ejemplo 5.9).	178
5.10. Sistema de doble polea (Ejemplo 5.10).	180
5.11. Cilindro sólido de centro O' y radio R_1 que rueda sin deslizar dentro de la superficie semicilíndrica fija con centro O y radio $R_2 > R_1$ (Ejemplo 5.11).	181
5.12. Disco de masa M y radio R rueda, sin deslizar, hacia abajo en un plano inclinado (Ejemplo 5.15).	187
5.13. Partícula de masa m que comienza a moverse desde el reposo, partiendo de la parte más alta de un hemisferio fijo y liso (Ejemplo 5.17).	191
5.14. Partícula de masa m que se mueve sobre un plano inclinado móvil (Ejemplo 5.18).	193
5.15. Un disco que rueda (sin deslizar) sobre el plano horizontal xy (Ejemplo 5.20).	196
5.16. Carrito rectangular homogéneo de masa M inmerso en un campo eléctrico uniforme \vec{E} (Ejemplo 5.21).	199
5.17. Cambio del vector de posición debido una traslación del sistema.	214
5.18. Variación del vector de posición al rotar.	216

5.19. Una partícula de masa m está obligada a moverse sobre la superficie interna de un cono liso (Problema 1).	222
5.20. Una partícula de masa m se desplaza sobre un plano inclinado (Problema 4).	223
5.21. Esfera que se desliza, sin rozamiento, en un alambre liso doblado en forma de cicloide (Problema 7).	224
5.22. Péndulo simple (Problema 8).	225
5.23. Péndulo doble (Problema 9).	226
5.24. Dos bloques acoplados mediante una cuerda que pasa a través de una polea (Problema 11).	227
5.25. Bloque de masa m que se desplaza sobre un plano inclinado de masa M móvil (Problema 12).	227
5.26. Dos bloques acoplados mediante una cuerda que pasa a través de una polea (Problema 14).	228
5.27. Péndulo esférico (Problema 17).	229
5.28. Péndulo simple cuyo soporte se mueve verticalmente (Problema 19). . . .	230
5.29. Masa m unida a una vara liviana que pivotea por la acción de un aro que gira (Problema 20).	231
5.30. Masa m sujeta a un soporte fijo mediante un resorte (Problema 21).	232
5.31. Péndulo de masa m y longitud ℓ sujeto a un bloque de masa despreciable el cual esta sujeto, a la vez, a una pared mediante un resorte de masa despreciable (Problema 24).	233
6.1. Partícula de masa m obligada a moverse sobre la superficie de un cilindro (Ejemplo 6.1).	246
6.2. Péndulo esférico (Ejemplo 6.8).	254
6.3. Partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje x sometida a una fuerza $-Kx$ (Ejemplo 6.9).	255
6.4. Partícula de masa m que se mueve en un plano, inmersa en un campo con energía potencial $U = U(r)$ (Ejemplo 6.10).	257
6.5. Péndulo simple de masa m y longitud ℓ (Ejemplo 6.11).	258
6.6. Trayectoria de fase en un espacio de fase.	274
6.7. Diagrama de fase para una partícula de masa m obligada a moverse sobre la superficie de un cilindro (Ejemplo 6.23).	275
6.8. Diagrama de fase para el péndulo simple (Ejemplo 6.24).	276
6.9. Partícula de masa m que se desliza bajo la acción de la gravedad y sin fricción sobre un alambre que tiene forma de parábola $y = \frac{x^2}{2}$ (Ejemplo 6.25).	277

6.10. Diagrama de fase para la partícula de masa m que se mueve sobre un alambre en forma de parábola, para $m = 1$ y $g = 1$ (Ejemplo 6.25).	278
6.11. Péndulo cónico (Ejemplo 6.26).	278
6.12. Diagrama de fase para el péndulo cónico (Ejemplo 6.26).	279
6.13. Diagrama de fase para el ejemplo 6.4 (Ejemplo 6.27).	280
6.14. Evolución de una región en el espacio de fase.	280
6.15. Proyección del elemento de volumen sobre el plano q_k, p_k	282
6.16. Diagrama de fase para un conjunto de partículas de masa m en un campo gravitacional constante (Ejemplo 6.258).	284
6.17. Partícula de masa m está obligada a moverse sobre la superficie interna de un cono liso (Problema 1).	291
6.18. Máquina simple de Atwood (Problema 2).	292
6.19. Partícula de masa m que se desplaza sobre un plano inclinado (Problema 3).	293
6.20. Pequeña esfera que se desliza, sin rozamiento, en un alambre liso doblado en forma de cicloide (Problema 4).	293
6.21. Péndulo simple cuya cuerda es de longitud variable (Problema 8).	294
6.22. Partícula de masa m que se mueve, bajo la influencia de la gravedad, a lo largo de la espiral (Problema 9).	294
C.1. Función arbitraria $\eta(x)$	344

Prefacio

El presente texto constituye un intento de ...

Parte I

Fundamentos físicos y matemáticos básicos para estudiar Mecánica de Lagrange y Hamilton

CAPÍTULO 1

Dinámica de un sistema de partículas

Contents

1.1. Sistema de partículas	4
1.2. Clasificación de los sistemas de partículas	4
1.2.1. Discreto	4
1.2.2. Continuo	5
1.3. Fuerzas en un sistema de partículas	5
1.3.1. Externas e internas	5
1.3.2. Aplicadas y de reacción	6
1.4. Centro de masa	8
1.4.1. Para un sistema discreto	8
1.4.2. Para un sistema continuo	10
1.4.3. Para un sistema compuesto	13
1.5. Movimiento del centro de masa	15
1.6. Momento lineal y su conservación	19
1.7. Momento angular y su conservación	20
1.8. Energía y su conservación	25
1.8.1. Energía cinética	25
1.8.2. Energía potencial	26
1.8.3. Conservación de la energía mecánica	28

1.1. Sistema de partículas

Los cuerpos que se observan a simple vista están formados por un gran número de partículas, macroscópicas, atómicas o subatómicas. Sólo en ciertos casos es válida la simplificación que supone el modelo de la masa puntual. En otros casos, por el contrario, será necesario considerar el sistema como si estuviesen formados por varias partículas.

Se llama *sistema de partículas* o *sistema mecánico* a un conjunto de varias partículas, de número finito o infinito, de las cuales se quiere estudiar su movimiento.

Por otro lado,

Se llama *configuración de un sistema* a la posición de cada una de sus partículas en un instante dado.

Para definir la configuración se necesita un determinado número de parámetros, según el sistema de que se trate. Por ejemplo, una partícula libre precisa de tres parámetros: las coordenadas Cartesianas, (x, y, z) . Un sistema de N partículas libres queda definido por $3N$ parámetros. Sin embargo, si existen ligaduras (detalles en el capítulo 2) que restrinjan el movimiento, el número de parámetros preciso para definir la configuración será menor.

1.2. Clasificación de los sistemas de partículas

Un sistema de partículas puede ser clasificado como:

1.2.1. Discreto

Este modelo de sistema de partículas considera el cuerpo formado por un número finito de partículas. Dentro de este modelo se pueden considerar los sistemas indeformables, en los cuales la distancia relativa entre las partículas del sistema permanece inalterable en el tiempo y los deformables, en los cuales puede cambiar la distancia relativa entre las partículas.

1.2.2. Continuo

Este modelo de sistema de partículas considera el cuerpo formado por una distribución continua de materia, es decir, por un número infinito de partículas. A nivel macroscópico, un cuerpo puede considerarse formado por una distribución continua de materia, llenando todo el espacio que ocupa (esta consideración no es cierta a nivel microscópico ya que se sabe de la discontinuidad de la materia). En este modelo también se consideran los sistemas deformables y los indeformables (sólidos rígidos).

1.3. Fuerzas en un sistema de partículas

En un sistema de partículas están involucradas fuerzas. Las fuerzas ejercidas sobre las partículas de un sistema son las causantes de la variación del movimiento de las mismas y es posible clasificarlas atendiendo a varios criterios (ver figura 1.1):

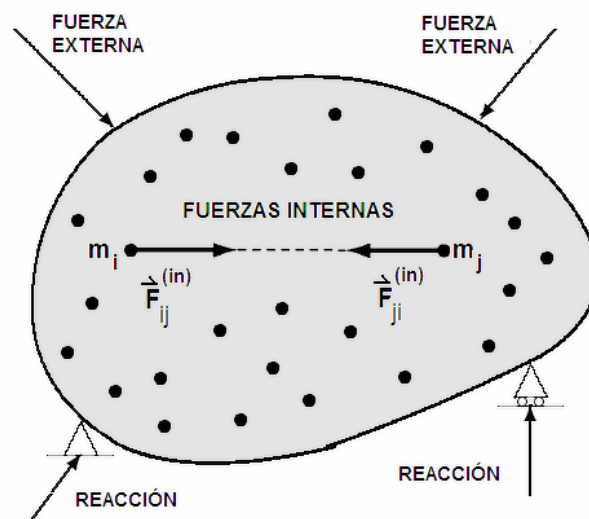


Figura (1.1): Tipos de fuerzas en un sistema de partículas.

1.3.1. Externas e internas

Resulta conveniente en estos modelos clasificar las fuerzas que intervienen, ya que las partículas del sistema no sólo están interaccionando entre sí sino con otras partículas que no pertenecen al sistema en estudio, en *fuerzas externas* y *fuerzas internas*.

Fuerzas externas

Las fuerzas externas son ejercidas por agentes externos al sistema, es decir, son las que están aplicadas a partículas del sistema debidas a partículas que no pertenecen al sistema.

A un sistema de partículas sobre el cual no se aplican fuerzas externas se le denomina *Sistema Aislado* o *sistema cerrado*. Es decir, es un sistema que no interacciona con otros agentes físicos situados fuera de él y, por tanto, no está conectado causalmente ni correlacionalmente con nada externo a él.

Fuerzas internas

Las fuerzas internas, en caso contrario, son ejercidas entre las partículas que constituyen al sistema, es decir, son las que están aplicadas en las partículas del sistema debidas a otras partículas del mismo sistema. Tanto la acción como la reacción se producen sobre partículas del propio sistema.

1.3.2. Aplicadas y de reacción

Se pueden clasificar también en *aplicadas* y *de reacción*.

Aplicadas

A este tipo de fuerzas también se les denomina *fuerzas activas*. Las fuerzas aplicadas son aquellas que actúan a "motu proprio" sobre el sistema, es decir, son las fuerzas impuestas.

De reacción

A este tipo de fuerzas también se les denomina *fuerzas reactivas* o también *fuerzas de ligadura*. Este tipo de fuerzas son aquellas que actúan como respuesta a un movimiento determinado que intentan impedir, en cuyo caso sólo se dan cuando existe la tendencia a este movimiento.

La tercera ley de Newton juega un papel muy importante en la dinámica de un sistema de partículas debido a las fuerzas internas entre las partículas que constituyen el sistema. Dos suposiciones son necesarias referentes a las fuerzas internas:

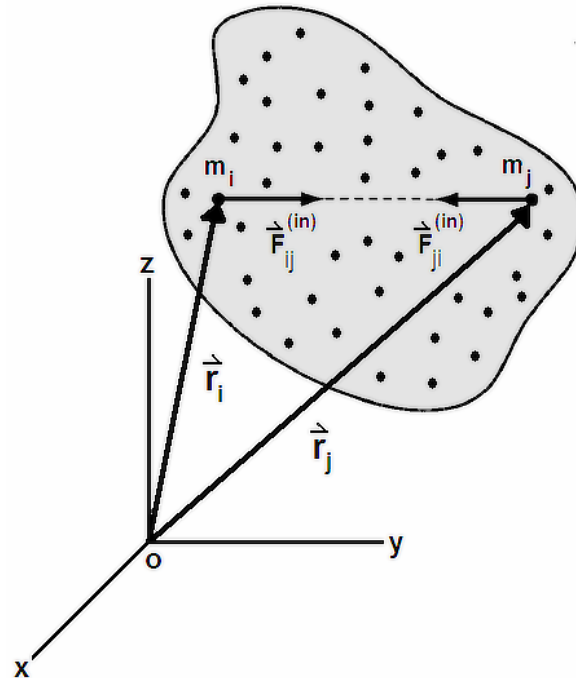


Figura (1.2): Forma fuerte de la tercera ley de Newton.

1. Las fuerzas ejercidas entre dos partículas m_i y m_j son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Si se denota por $\vec{F}_{ij}^{(in)}$ la fuerza (interna del sistema de partículas) ejercida sobre la i -ésima partícula debido a la j -ésima, entonces la llamada forma "débil" de la tercera ley de Newton se escribe como,

$$\vec{F}_{ij}^{(in)} = -\vec{F}_{ji}^{(in)} \quad (1.1)$$

2. Las fuerzas ejercidas entre dos partículas m_i y m_j , además de ser iguales y opuestas, deben darse sobre la línea recta que une a ambas partículas, es decir, si $\vec{F}_{ij}^{(in)}$ es paralela a $\vec{r}_i - \vec{r}_j$. Esta forma más restringida de la tercera ley de Newton, llamada también la forma "fuerte", es mostrada en la figura 1.2. A las fuerzas que cumplen esta forma de la tercera ley de Newton se le denominan *fuerzas centrales*.

Se debe tener cuidado en saber cuándo es aplicable cada una de las formas de la tercera ley de Newton. En verdad, muchas son las fuerzas que obedecen ambas formas de la tercera ley de Newton. Por ejemplo, las fuerza gravitacional y la fuerza electrostática tienen esta propiedad, conservándose el momento lineal total y el momento angular en estos sistemas. Sin embargo, existen algunas fuerzas que, en general, no cumplen con ambas formas a la vez! y el ejemplo más famoso lo constituye la fuerza de Lorentz que viene dada por,

$$\vec{F}_{ij} = q_i \vec{v}_i \times \vec{B}_{ij} \quad (1.2)$$

que se estudia en el curso de electromagnetismo y donde \vec{v}_i es la velocidad de la carga q_i y \vec{B}_{ij} es el campo magnético sobre la carga q_i generado por el movimiento de la carga q_j . Esta fuerza, en general, sólo obedece a la forma débil de la tercera ley de Newton. Para visualizar esto, considérense dos partículas cargadas q_i y q_j que se mueven con velocidades respectivas \vec{v}_i y \vec{v}_j en el plano de esta página, como se muestra en la figura 1.3.

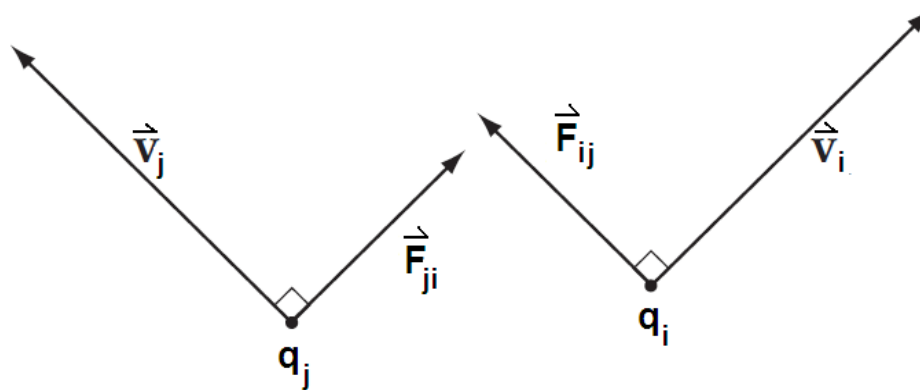


Figura (1.3): Fuerzas interacción electromagnética de entre dos partículas cargadas q_i y q_j en movimiento.

Puesto que \vec{F}_{ij} es perpendicular a ambos \vec{v}_i y \vec{B}_{ij} (el cual puede apuntar hacia adentro o hacia afuera del plano de esta página), \vec{F}_{ij} puede ser paralela a \vec{F}_{ji} sólo cuando \vec{v}_i y \vec{v}_j son paralelas, lo cual no es cierto en general.

Cualquier fuerza que dependa de las velocidades de los cuerpos interactuantes no es central, por lo tanto no es aplicable la forma fuerte. La fuerza gravitacional entre cuerpos en movimiento también depende de la velocidad, pero el efecto es pequeño y difícil de detectar. El único efecto observable es la precesión del perihelio de los planetas interiores (Mercurio, Venus, Tierra y Marte).

1.4. Centro de masa

1.4.1. Para un sistema discreto

Para definir el centro de masa de un sistema de partículas discreto, pártase de uno formado por N partículas de masas m_1, m_2, \dots, m_N cuyos vectores de posición son $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ respectivamente con respecto al origen del sistema de referencia escogido, el cual es inercial (ver figura 1.4). La masa total M del sistema vendrá dada por,

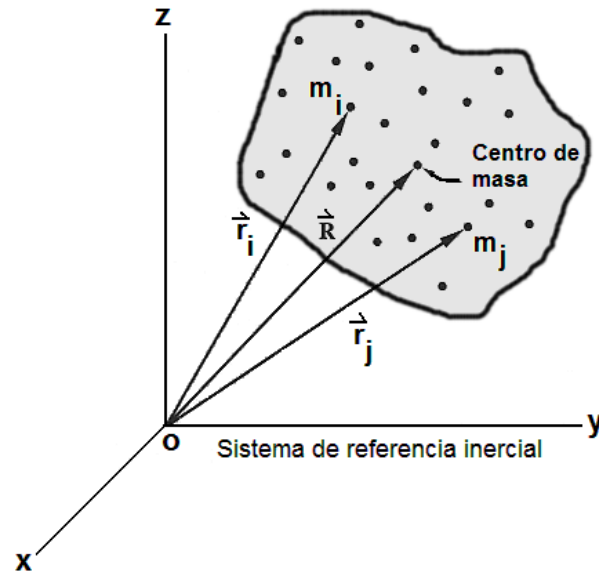


Figura (1.4): Posición del centro de masa de un sistema de partículas.

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (1.3)$$

Ahora bien,

El *centro de masa* de un sistema de partículas se define como el punto cuyo vector de posición \vec{R} viene dado por,

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (1.4)$$

Las componentes Cartesianas de (1.4) son,

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i \quad y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i \quad z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i \quad (1.5)$$

Ejemplo 1.1

Sistema discreto bidimensional. Un sistema consta de tres partículas de masas $m_1 = 2 \text{ Kg}$, $m_2 = 4 \text{ Kg}$ y $m_3 = 8 \text{ Kg}$, localizadas en los vértices de un triángulo rectángulo como se muestra en la figura 1.5. Encuéntrese la posición del centro de masa del sistema respecto al referencial dado.

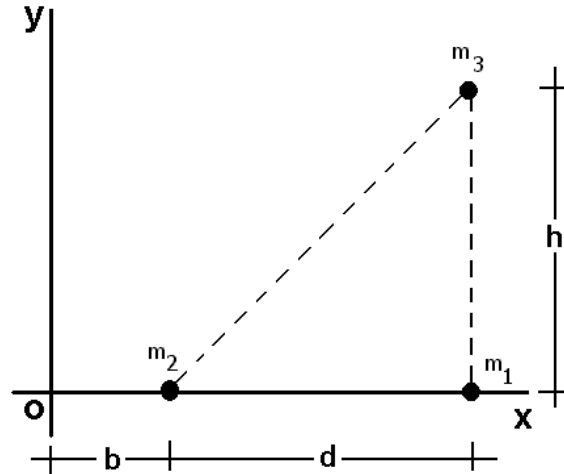


Figura (1.5): Sistema discreto formado por tres partículas situadas en los vértices de un triángulo rectángulo (Ejemplo 1.1).

Solución: Al usar (1.5),

$$\begin{aligned}
 x_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\
 &= \frac{(2Kg)(b+d) + (4Kg)(b) + (8Kg)(b+d)}{2Kg + 4Kg + 8Kg} = \frac{5}{7}d + b \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\
 &= \frac{(2Kg)(0) + (4Kg)(0) + (8Kg)(h)}{2Kg + 4Kg + 8Kg} = \frac{4}{7}h \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

Entonces, de los resultados (1.6) y (1.7), el centro de masa está en la posición,

$$\vec{R} = \left(\frac{5}{7}d + b, \frac{4}{7}h \right) = \left(\frac{5}{7}d + b \right) \hat{e}_x + \frac{4}{7}h \hat{e}_y$$

1.4.2. Para un sistema continuo

En el caso de un sistema continuo se tiene que,

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm, \quad \text{con } M = \int dm \quad (1.8)$$

cuyas componentes Cartesianas son,

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x dm \quad y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm \quad z_{cm} = \frac{1}{M} \int z dm \quad (1.9)$$

Las anteriores integrales pueden ser simples si el sistema continuo es unidimensional, dobles (integrales de superficie) si lo es bidimensional y triples (integrales de volumen) si lo es tridimensional.

Ejemplo 1.2

Sistema continuo unidimensional. Encuéntrese el centro de masa de un aro semicircular homogéneo de radio a y densidad lineal λ (ver figura 1.6).

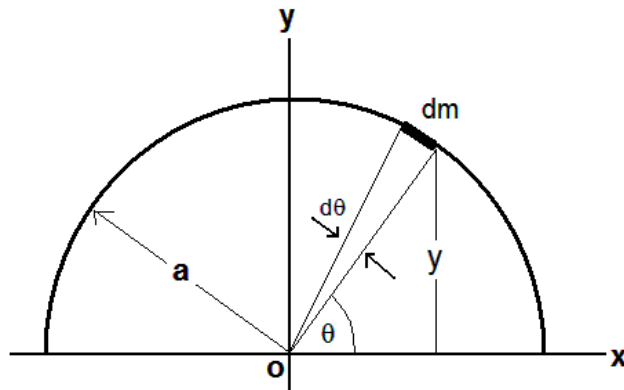


Figura (1.6): Aro semicircular homogéneo de radio a y densidad lineal λ (Ejemplo 1.2).

Solución: Tomando un referencial cuyo origen esté en el centro de la circunferencia que genera el aro, por la simetría del problema,

$$x_{cm} = 0 \quad (1.10)$$

Por otro lado, a partir de (1.9),

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{\int y dm}{\int dm} \quad (1.11)$$

donde, en coordenadas polares,

$$dm = \lambda a d\theta \quad (1.12)$$

por lo tanto, al sustituir (1.12) en (1.11),

$$y_{cm} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int_0^\pi \lambda y a d\theta}{\int_0^\pi \lambda a d\theta} = \frac{\int_0^\pi (a \text{Sen } \theta) d\theta}{\int_0^\pi d\theta} = \frac{2a}{\pi} \quad (1.13)$$

Entonces, de los resultados (1.10) y (1.13), el centro de masa está en la posición,

$$\vec{R} = \left(0, \frac{2a}{\pi} \right) = \frac{2a}{\pi} \hat{e}_y$$

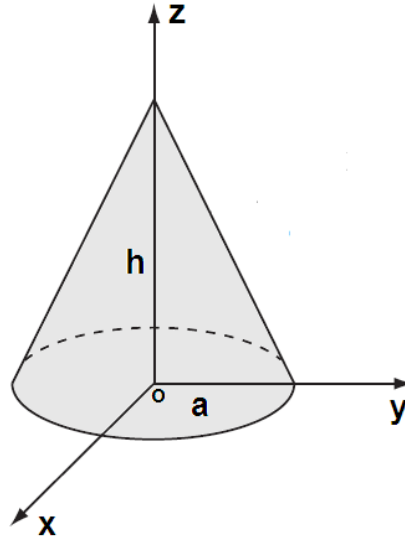


Figura (1.7): Cono sólido homogéneo de altura h y base de radio a (Ejemplo 1.3).

Ejemplo 1.3

Sistema continuo tridimensional. Encuéntrese el centro de masa de un cono sólido homogéneo de altura h y radio de la base a (ver figura 1.7).

Solución: Tomando un referencial cuyo origen esté en el centro de la base del cono, de manera que esta última esté contenida en el plano xy , se encuentra, por la simetría del problema,

$$x_{cm} = y_{cm} = 0 \quad (1.14)$$

Por otro lado, a partir de (1.9), utilizando coordenadas cilíndricas y puesto que la densidad del cono es $\rho = \text{constante}$ (por ser homogéneo), se puede escribir,

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \int z dm = \frac{\int z dm}{\int dm} \quad (1.15)$$

donde,

$$dm = \rho r dr d\theta dz \quad (1.16)$$

por lo tanto, al sustituir (1.16) en (1.15),

$$z_{cm} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{-\frac{h}{a}r+h} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho z r dr d\theta dz}{\int_0^{-\frac{h}{a}r+h} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho r dr d\theta dz} = \frac{1}{4} h \quad (1.17)$$

con respecto a su base. Entonces, de los resultados (1.14) y (1.17), el centro de masa está en la posición,

$$\vec{R} = \left(0, 0, \frac{1}{4} h \right) = \frac{1}{4} h \hat{e}_z$$

1.4.3. Para un sistema compuesto

Considérese un sistema S discreto de N partículas que ha sido subdividido (por completo) en s subsistemas $S_1, S_2, S_3, \dots, S_s$ (ver figura 1.8). Si $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$ representan el número de partículas de cada uno de los subsistemas debe cumplirse que,

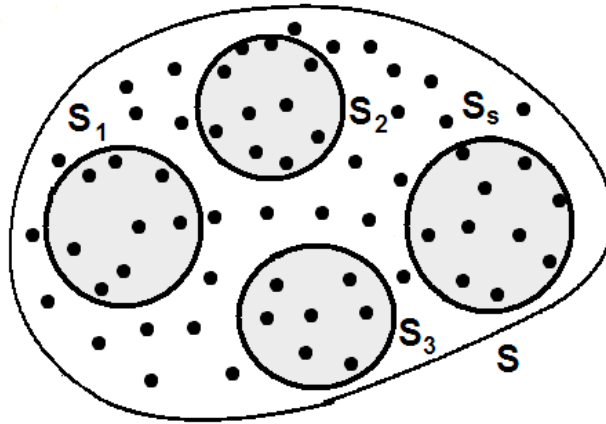


Figura (1.8): Sistema S discreto de N partículas subdividido (por completo) en s subsistemas $S_1, S_2, S_3, \dots, S_s$.

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_s = \sum_{j=1}^s n_j \quad (1.18)$$

Cada uno de los subsistemas tienen su centro de masa posicionados en $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \dots, \vec{R}_s$ y masas totales $M_1, M_2, M_3, \dots, M_s$. Para el subsistema 1 se tiene que su masa total viene dada por,

$$M_1 = m_{11} + m_{12} + m_{13} + \dots + m_{1n_1} = \sum_{i=1}^{n_1} m_{1i} \quad (1.19)$$

(el primer índice indica el sistema y el segundo cada una de las masas de dicho sistema) y los vectores de posición de cada una de las masas de las partículas que lo integran viene dado por $\vec{r}_{11}, \vec{r}_{12}, \vec{r}_{13}, \dots, \vec{r}_{1n_1}$. Para los restantes $s - 1$ subsistemas se hace de forma análoga.

Por la definición de centro de masa (1.4) se tendrá, para cada uno de los s subsis-

temas de partículas,

$$\begin{aligned}
 \text{Subsistema 1: } \vec{R}_1 &= \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{n_1} m_{1i} \vec{r}_{1i} \\
 \text{Subsistema 2: } \vec{R}_2 &= \frac{1}{M_2} \sum_{i=1}^{n_2} m_{2i} \vec{r}_{2i} \\
 \text{Subsistema 3: } \vec{R}_3 &= \frac{1}{M_3} \sum_{i=1}^{n_3} m_{3i} \vec{r}_{3i} \\
 &\vdots \\
 \text{Subsistema } s: \vec{R}_s &= \frac{1}{M_s} \sum_{i=1}^{n_s} m_{si} \vec{r}_{si}
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Por otro lado, al usar la definición(1.4), el centro de masa del sistema S viene dado por,

$$\vec{R}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} m_{1i} \vec{r}_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} m_{2i} \vec{r}_{2i} + \sum_{i=1}^{n_3} m_{3i} \vec{r}_{3i} + \dots + \sum_{i=1}^{n_s} m_{si} \vec{r}_{si}}{\sum_{i=1}^{n_1} m_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} m_{2i} + \sum_{i=1}^{n_3} m_{3i} + \dots + \sum_{i=1}^{n_s} m_{si}} \tag{1.21}$$

Finalmente, al sustituir (1.20) en (1.21) resulta,

$$\begin{aligned}
 \vec{R}_S &= \frac{M_1 \vec{R}_1 + M_2 \vec{R}_2 + M_3 \vec{R}_3 + \dots + M_s \vec{R}_s}{M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_s} \\
 &= \frac{1}{M_S} \sum_{j=1}^s M_j \vec{R}_j, \text{ con } j = 1, 2, 3, \dots, s
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

por lo tanto:

En los sistemas compuestos se pueden encontrar los centros de masa de los sistemas parciales o subsistemas y, a partir de ellos, calcular el centro de masa del sistema completo. A esta propiedad del centro de masa se le conoce como *propiedad de agrupamiento*.

Es fácil mostrar que lo mismo ocurre para sistemas compuestos continuos.

Ejemplo 1.4

Sistema compuesto. Encuéntrese el centro de masa del sistema mos-

trado en la figura 1.9 que consiste en una concha hemisférica de radio externo a e interno b y un hemisferio sólido de radio a , ambos homogéneos de densidad ρ .

Solución: La posición del centro de masa de la concha hemisférica y el hemisferio sólido vienen dadas por (ver problemas 2 y 3),

$$\begin{aligned}
 \vec{R}_{\text{concha}} &= \vec{R}_1 = \frac{3(a^4 - b^4)}{8(a^3 - b^3)} \hat{e}_z, \text{ con } M_1 = \frac{4}{3} \pi \rho (a^3 - b^3) \\
 \vec{R}_{\text{hemisferio}} &= \vec{R}_2 = -\frac{3}{8} a \hat{e}_z, \text{ con } M_2 = \frac{4}{3} \pi \rho a^3
 \end{aligned}$$

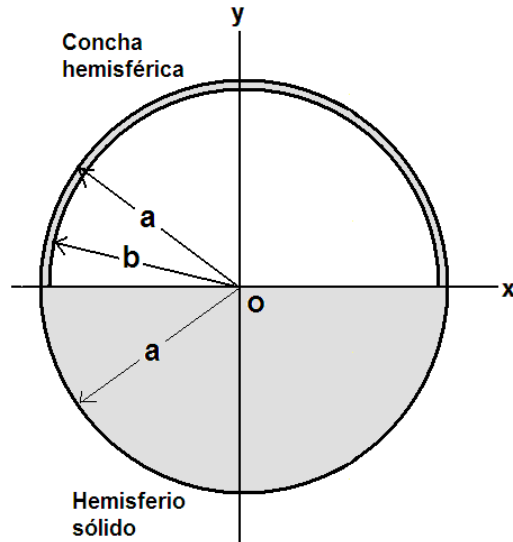


Figura (1.9): Centro de masa de un sistema compuesto por una concha hemisférica y un hemisferio sólido homogéneo acoplados (Ejemplo 1.4).

Ahora, por la propiedad de agrupamiento del centro de masa (1.22),

$$\begin{aligned}
 \vec{R}_S &= \frac{1}{M_S} \sum_j M_j \vec{R}_j = \frac{M_1 \vec{R}_1 + M_2 \vec{R}_2}{M_1 + M_2} \\
 &= \frac{\frac{4}{3}\pi\rho(a^3 - b^3) \frac{3(a^4 - b^4)}{8(a^3 - b^3)} \hat{e}_z + \frac{4}{3}\pi\rho a^3 \left(-\frac{3}{8}a\hat{e}_z\right)}{\frac{4}{3}\pi\rho(a^3 - b^3) + \frac{4}{3}\pi\rho a^3} \\
 &= -\frac{3}{8} \frac{b^4}{2a^3 - b^3} \hat{e}_z
 \end{aligned}$$

1.5. Movimiento del centro de masa

Supóngase que se tiene un sistema constituido por N partículas que interactúan entre sí y sobre el cual actúan fuerzas externas, entonces la fuerza resultante sobre la i -ésima partícula estará compuesta (en general) por dos partes: una parte es la resultante de todas las fuerzas externas $\vec{F}_i^{(ex)}$ y, la otra parte, de todas las fuerzas internas $\vec{F}_i^{(in)}$ que se originan de la interacción de todas las otras $N - 1$ partículas con la i -ésima.

La fuerza $\vec{F}_i^{(in)}$ podrá ser calculada mediante la suma vectorial de todas las fuerzas individuales $\vec{F}_{ij}^{(in)}$ (como se dijo antes, debe leerse como la fuerza aplicada sobre la

i -ésima partícula debida a la j -ésima),

$$\vec{F}_i^{(in)} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^{(in)} \quad (1.23)$$

Por lo tanto, la fuerza total \vec{F}_i sobre la i -ésima partícula vendrá dada por,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ex)} + \vec{F}_i^{(in)} \quad (1.24)$$

Ahora bien, a partir de la segunda ley de Newton, se puede escribir para la i -ésima partícula,

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(ex)} + \vec{F}_i^{(in)} \quad (1.25)$$

o también, en virtud de (1.23) y un pequeño cambio en la derivada,

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_i \vec{r}_i) = \vec{F}_i^{(ex)} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^{(in)} \quad (1.26)$$

y al sumar sobre i en ambos miembros de esta expresión,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(ex)} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{F}_{ij}^{(in)} \quad (1.27)$$

$i \neq j$ (no hay auto-fuerzas)

que representa la fuerza total respecto al origen del referencial escogido.

Si se sustituye $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ a partir de (1.4) en (1.27) resulta,

$$\frac{d^2}{dt^2} (M \vec{R}) = \vec{F}^{(ex)} + \sum_{i,j=1}^N \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}^{(in)} \quad (1.28)$$

donde $\vec{F}^{(ex)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(ex)}$ es la resultante de todas las fuerzas externas y se ha hecho el

cambio de notación $\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N = \sum_{i,j=1}^N \sum_{i \neq j}$. Pero si se supone que se cumple la tercera ley de

Newton (1.1),

$$\sum_{i,j=1}^N \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}^{(in)} = \sum_{i,j=1}^N \sum_{i < j} \left(\vec{F}_{ij}^{(in)} + \vec{F}_{ji}^{(in)} \right) = \vec{0} \quad (1.29)$$

por lo tanto al sustituir (1.29) en (1.28),

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(ex)} \quad (1.30)$$

que es un resultado importantísimo que dice lo siguiente:

El centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si fuera una partícula real, de masa igual a la masa total del sistema sobre el cual actúa la fuerza externa total e independientemente de la naturaleza de las fuerzas internas, siempre que se cumpla la tercera ley de Newton.

Ejemplo 1.5

Dos partículas de masas iguales se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia $-k/d^2$ (k constante positiva). Si las partículas se deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto (ver figura 1.10), demuestre que el centro de masa describe una cónica con su foco en la intersección de las correderas.

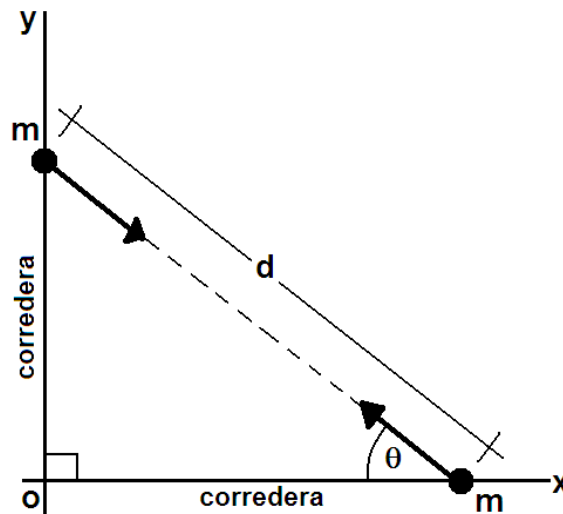


Figura (1.10): Dos partículas de masas iguales que se deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto (Ejemplo 1.5).

Solución: De la figura 1.10, las coordenadas de cada partícula vendrán dadas por,

Para la que se mueve verticalmente (partícula 1) $\rightarrow (0, y)$

Para la que se mueve horizontalmente (partícula 2) $\rightarrow (x, 0)$

por lo tanto, al usar (1.5),

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m(0) + m(x)}{m + m} = \frac{1}{2}x \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{(m)(y) + (m)(0)}{m + m} = \frac{1}{2}y \end{aligned} \quad (1.32)$$

de aquí que,

$$\vec{R} = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y \right) = \frac{1}{2}x\hat{e}_x + \frac{1}{2}y\hat{e}_y$$

y,

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}d \Rightarrow d = 2R \quad (1.33)$$

Por otro lado, la ecuación de movimiento de la partícula 1 y la 2 vendrán dadas respectivamente por,

$$m\ddot{x} = F \cos \theta = -\frac{k}{d^2} \cos \theta = -\frac{kx}{d^3} \quad (1.34)$$

$$m\ddot{y} = F \sin \theta = -\frac{k}{d^2} \sin \theta = -\frac{ky}{d^3} \quad (1.35)$$

ya que, de la figura 1.10,

$$\cos \theta = \frac{x}{d} \text{ y } \sin \theta = \frac{y}{d} \quad (1.36)$$

Ahora bien, al sustituir (1.31) para x en (1.34) resulta,

$$m \frac{d^2}{dt^2} (2x_{cm}) = -\frac{k(2x_{cm})}{d^3}$$

o,

$$\ddot{x}_{cm} = -\frac{kx_{cm}}{md^3} \quad (1.37)$$

y, de forma análoga, al sustituir (1.32) para y en (1.35) resulta,

$$\ddot{y}_{cm} = -\frac{ky_{cm}}{md^3} \quad (1.38)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \vec{a}_{cm} &= \ddot{\vec{R}} = \ddot{x}_{cm}\hat{e}_x + \ddot{y}_{cm}\hat{e}_y = -\frac{kx_{cm}}{md^3}\hat{e}_x - \frac{ky_{cm}}{md^3}\hat{e}_y \\ &= -\frac{k}{md^3}(x_{cm}\hat{e}_x + y_{cm}\hat{e}_y) = -\frac{k}{md^3}\vec{R} \end{aligned} \quad (1.39)$$

y por (1.33),

$$\vec{a}_{cm} = -\frac{k}{8mR^3} \vec{R}$$

o,

$$\vec{a}_{cm} = -\frac{k}{8mR^2} \hat{e}_R \tag{1.40}$$

donde $\hat{e}_R = \frac{\vec{R}}{R}$ es un vector unitario en la dirección de \vec{R} .

Del resultado (1.40) se puede argüir que el centro de masa es atraído hacia O con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a dicho punto O . Cuando se estudió el movimiento de una partícula en un campo de fuerza central, se pudo demostrar que para una fuerza de este tipo la trayectoria seguida es una cónica, por lo tanto, en este caso el centro de masa del sistema sigue este tipo de trayectoria.

.....

1.6. Momento lineal y su conservación

El momento lineal de la i -ésima partícula puede escribirse como,

$$\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i \tag{1.41}$$

y al sumar sobre i en ambos miembros de esta expresión, se obtiene el momento lineal total \vec{p} del sistema,

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \tag{1.42}$$

o también,

$$\vec{p} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) \tag{1.43}$$

ahora, si se sustituye $\sum_{i=1}^N (m_i \vec{r}_i)$ a partir de (1.4) resulta,

$$\vec{p} = \frac{d}{dt} (M \vec{R}) = M \dot{\vec{R}} \tag{1.44}$$

que es otro resultado importantísimo y que dice lo siguiente:

El momento lineal de un sistema de partículas es el mismo que si fuera una partícula real de masa M localizada en la posición de centro de masa y que se mueve de la manera en que él lo hace. Es decir, el momento lineal del sistema de partículas es el mismo de su centro de masa.

Además, al derivar con respecto al tiempo (1.44) y teniendo presente (1.30) se obtiene,

$$\dot{\vec{p}} = M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(ex)} \quad (1.45)$$

de la cual se puede enunciar la *ley de conservación del momento lineal* para un sistema de partículas de la siguiente manera:

El momento lineal para un sistema de partículas libre de fuerzas externas ($\vec{F}^{(ex)} = \vec{0}$), es constante e igual al momento lineal de su centro de masa.

1.7. Momento angular y su conservación

El momento angular \vec{L} de la i -ésima partícula en torno al origen del sistema de referencia viene dado por,

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (1.46)$$

que al sumar sobre i en sus dos miembros proporciona el momento angular total \vec{L} del sistema de partículas, pudiéndose escribir,

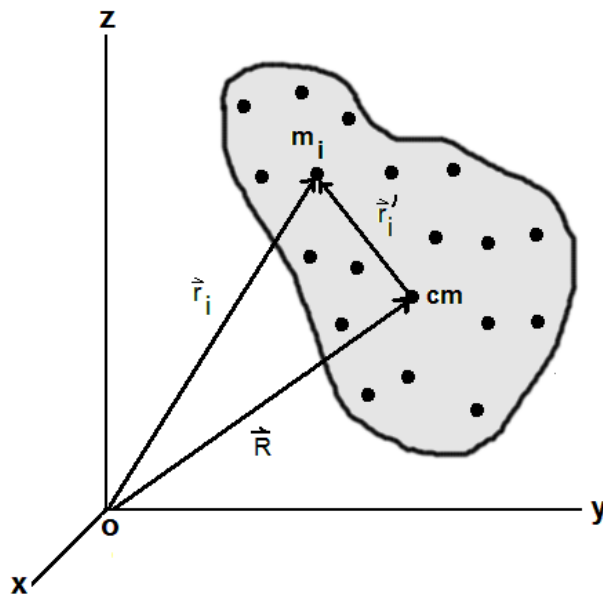


Figura (1.11): Vector de posición \vec{r}'_i .

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i \right) \quad (1.47)$$

Defínase ahora un vector de posición \vec{r}'_i , que posicione a la i -ésima partícula con respecto al centro de masa del sistema. Este vector es mostrado en la figura 1.11, de la cual se puede deducir que,

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{R} \quad (1.48)$$

Ahora, al sustituir (1.48) en (1.47) resulta,

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^N \left[\left(\vec{r}'_i + \vec{R} \right) \times m_i \left(\dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{R}} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \left[m_i \left(\vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i + \vec{r}'_i \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \dot{\vec{r}}'_i + \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\vec{r}'_i \times m_i \dot{\vec{r}}'_i \right) + \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{R} \times \dot{\vec{R}} \right) \end{aligned} \quad (1.49)$$

pero,

$$m_i \dot{\vec{r}}'_i = \dot{\vec{p}}'_i, \quad \sum_{i=1}^N m_i = M \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i &= \sum_{i=1}^N \left[m_i \left(\vec{r}_i - \vec{R} \right) \right] = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \vec{R} \\ &\quad \text{Por (1.48)} \\ &= \underbrace{M \vec{R}}_{\text{Por (1.4)}} - M \vec{R} = \vec{0} \end{aligned} \quad (1.51)$$

esta última indica que $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i$ especifica la posición del centro de masa en el sistema de coordenadas del mismo centro de masa. Ahora debido a (1.50) y (1.51), la expresión (1.49) queda escrita como,

$$\vec{L} = \vec{R} \times M \dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \dot{\vec{p}}'_i$$

o debido a (1.44),

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{R} \times \vec{p}}_{\text{Término 1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \dot{\vec{p}}'_i}_{\text{Término 2}} \quad (1.52)$$

de la que se puede concluir que:

El momento angular total del sistema de partículas respecto al origen de un referencial escogido es la suma del momento angular del centro de masa del sistema respecto a dicho origen (término 1) y el momento angular del sistema con respecto a la posición del centro de masa (término 2).

Ejemplo 1.6

Un aro homogéneo, de radio a , rueda sobre una superficie lisa con frecuencia angular constante (ver figura 1.12). Encuentre el momento angular total.

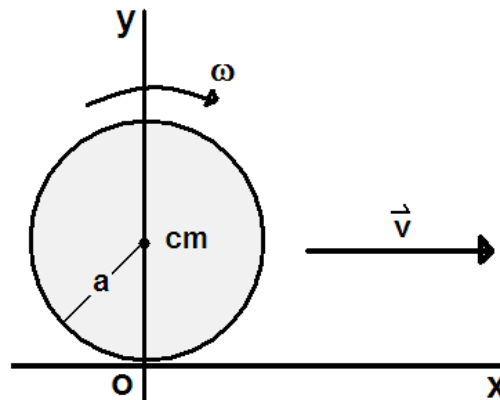


Figura (1.12): Aro homogéneo, de radio a , que rueda sobre una superficie lisa con frecuencia angular constante (Ejemplo 1.6).

Solución: El centro de masa del aro coincide con su centro geométrico por ser homogéneo. Según (1.52) el momento angular total respecto al origen O es la suma del momento angular del centro de masa del sistema respecto a dicho origen $\vec{R} \times \vec{p}$ y el momento angular del sistema con respecto a la posición del centro de masa \vec{L}_{cm} ,

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} + \vec{L}_{cm} \quad (1.53)$$

Para el presente caso,

$$L_{cm} = I_{cm}\omega \quad (1.54)$$

donde I_{cm} es el momento de inercia en torno al centro de masa y,

$$|\vec{R} \times \vec{p}| = R p = a M v \quad (1.55)$$

donde v es la velocidad del centro de masa. Por lo tanto, al sustituir (1.54) y (1.55) en (1.53),

$$\begin{aligned} L &= a M v + I_{cm}\omega = \underbrace{a^2 M \omega}_{v=a\omega} + I_{cm}\omega \\ &= (I_{cm} + M a^2) \omega \end{aligned} \quad (1.56)$$

pero¹,

$$I_{cm} + Ma^2 = I \quad (1.57)$$

donde I es el momento de inercia en torno a O , entonces, de (1.56) y (1.57),

$$L = I\omega$$

Por otro lado, la derivada temporal del momento angular de la i -ésima partícula es, a partir de (1.46),

$$\dot{\vec{L}}_i = \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i}_{=\vec{0}} + \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{(ex)} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^{(in)} \right) \quad (1.58)$$

Por (1.23) y (1.25)

y al sumar sobre i en ambos miembros,

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{L}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ex)} + \sum_{i,j=1 \ i \neq j}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{(in)} \quad (1.59)$$

pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1 \ i \neq j}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{(in)} &= \sum_{i,j=1 \ i < j}^N \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{(in)} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}^{(in)} \right) \\ &\quad \text{De forma análoga a (1.29)} \\ &= \sum_{i,j=1 \ i < j}^N \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{(in)} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}^{(in)} \right) \\ &\quad \text{en virtud de (1.1)} \\ &= \sum_{i,j=1 \ i < j}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{(in)} \end{aligned} \quad (1.60)$$

y puesto que el vector que posiciona a la i -ésima partícula con respecto a la j -ésima se puede definir como (ver figura 1.13),

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad (1.61)$$

entonces de (1.60) y (1.61) se puede escribir (1.59) como,

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ex)} + \sum_{i,j=1 \ i < j}^N \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij}^{(in)} \quad (1.62)$$

¹Teorema de Steiner.

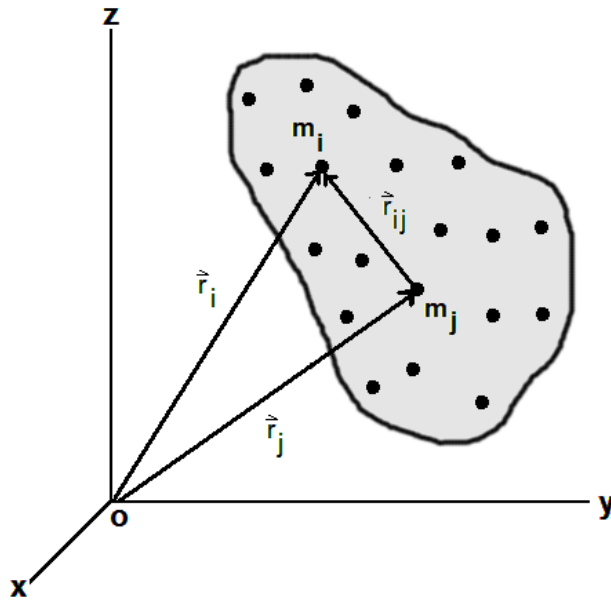


Figura (1.13): Vector de posición \vec{r}_{ij} .

Si en este momento se limita estudio a fuerzas internas centrales, entonces debido a que en este caso $\vec{F}_{ij}^{(in)}$ va a lo largo de la misma dirección de $\pm \vec{r}_{ij}$, entonces

$$\sum_{i,j=1 \ i < j}^N \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij}^{(in)} = \vec{0} \quad (1.63)$$

y, por lo tanto, es posible escribir a partir de (1.62),

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ex)} \quad (1.64)$$

que es justamente (el miembro derecho) la suma de todos los torques $\tau_i^{(ex)}$ externos,

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N \tau_i^{(ex)} = \tau^{(ex)} \quad (1.65)$$

de aquí que se pueda concluir lo siguiente respecto a la conservación del momento angular de un sistema de partículas:

Si el torque externo resultante en torno a un eje dado se anula, entonces el momento angular total del sistema en torno al mismo eje permanece constante en el tiempo, es decir, se conserva.

Se debe notar que,

$$\sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{(in)} \quad (1.66)$$

es el torque sobre la i -ésima partícula debido a todas las fuerzas internas, es decir, es el *torque interno*. Puesto que la suma de esta cantidad sobre todas las partículas i se anula (ver (1.63)), el torque interno total se anula, es decir:

El torque interno total de un sistema de partículas se anula si las fuerzas internas son centrales, es decir, si cumplen con la forma fuerte de la tercera ley de Newton y el momento angular de un sistema de partículas no se altera si no hay fuerzas externas aplicadas.

1.8. Energía y su conservación

1.8.1. Energía cinética

Supóngase que un determinado sistema de partículas pasa de una configuración 1 en la cual todas las coordenadas \vec{r}_i se especifican a una configuración 2 en la cual las coordenadas \vec{r}_i se especifican de alguna forma diferente. El trabajo W_{12} realizado para pasar de la configuración 1 a la 2 vendrá dado por,

$$W_{12} = \sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_i \bullet d\vec{r}_i \quad (1.67)$$

donde \vec{F}_i es la fuerza resultante que actúa sobre la i -ésima partícula. Pero,

$$\begin{aligned} \vec{F}_i \bullet d\vec{r}_i &= \left(m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) \bullet \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} dt \right) = \left(m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) \bullet (\vec{v}_i dt) \\ &= \frac{1}{2} m_i \frac{d}{dt} (\vec{v}_i \bullet \vec{v}_i) dt = \frac{1}{2} m_i \frac{d}{dt} (v_i^2) dt = d \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \end{aligned} \quad (1.68)$$

entonces, al sustituir (1.68) en (1.67) resulta,

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} d \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \Bigg|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2 = T_2 - T_1 \end{aligned} \quad (1.69)$$

donde,

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (1.70)$$

es la energía cinética total.

Por otro lado, si se deriva con respecto al tiempo la expresión (1.48) y se despeja $\dot{\vec{r}}_i$, resulta,

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{R}} \quad (1.71)$$

entonces,

$$\begin{aligned} v_i^2 &= \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \left(\dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{R}} \right) \cdot \left(\dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{R}} \right) \\ &= \dot{\vec{r}}'_i \cdot \dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{r}}'_i \cdot \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} \\ &= v_i'^2 + 2\dot{\vec{r}}'_i \cdot \dot{\vec{R}} + V^2 \end{aligned} \quad (1.72)$$

donde $\dot{\vec{r}}'_i = \dot{\vec{v}}'_i$ y V es la velocidad del centro de masa del sistema de partículas. Entonces en base a (1.72) se puede escribir (1.70) como,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(v_i'^2 + 2\dot{\vec{r}}'_i \cdot \dot{\vec{R}} + V^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i V^2 \end{aligned} \quad (1.73)$$

pero debido a (1.50) y (1.51) se puede escribir (1.73) como,

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M V^2 \quad (1.74)$$

de la cual es posible concluir que:

La energía cinética total de un sistema de partículas es igual a la suma de la energía cinética de una partícula de masa M que se mueve con la velocidad del centro de masa y la energía cinética total del movimiento de las partículas individuales relativas al centro de masa.

1.8.2. Energía potencial

Al sustituir (1.23) y (1.24) en (1.67) resulta,

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \left(\vec{F}_i^{(ex)} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^{(in)} \right) \cdot d\vec{r}_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_i^{(ex)} \cdot d\vec{r}_i}_{\text{Término 1}} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_{ij}^{(in)} \cdot d\vec{r}_i}_{\text{Término 2}} \end{aligned} \quad (1.75)$$

Ahora, si se supone que las fuerzas $\vec{F}_i^{(ex)}$ y $\vec{F}_{ij}^{(in)}$ son conservativas, entonces son derivables a partir de energías potenciales como sigue,

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_i^{(ex)} &= -\vec{\nabla}_i U_i \\ \vec{F}_{ij}^{(in)} &= -\vec{\nabla}_i \bar{U}_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (1.76)$$

donde U_i y \bar{U}_{ij} son funciones de energía potencial que no tienen necesariamente la misma forma. Aquí $\vec{\nabla}_i$ significa que la operación gradiente es realizada con respecto a las coordenadas de la i -ésima partícula.

Desarróllense ahora los términos 1 y 2 de (1.75) con la finalidad de transformar sus integrandos en diferenciales exactas para así efectuar la integración indicada (se supondrá que se cumple la tercera ley de Newton (1.1)):

Término 1: al sustituir la primera de las expresiones (1.76) en el término 1 de (1.75) resulta,

$$\begin{aligned} \text{Término 1} &= \sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_i^{(ex)} \cdot d\vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} (\vec{\nabla}_i U_i) \cdot d\vec{r}_i \\ &= - \sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} dU_i = - \sum_{i=1}^N U_i \Big|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \end{aligned} \quad (1.77)$$

Término 2: de (1.75),

$$\begin{aligned} \text{Término 2} &= \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_{ij}^{(in)} \cdot d\vec{r}_i = \underbrace{\sum_{i,j=1, i < j}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} (\vec{F}_{ij}^{(in)} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji}^{(in)} \cdot d\vec{r}_j)}_{\text{De forma análoga a (1.29)}} \\ &= \underbrace{\sum_{i,j=1, i < j}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_{ij}^{(in)} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j)}_{\text{Por (1.1)}} = \sum_{i,j=1, i < j}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_{ij}^{(in)} \cdot d\vec{r}_{ij} \end{aligned} \quad (1.78)$$

Puesto que \bar{U}_{ij} es una función sólo de la distancia entre las partículas m_i y m_j (el campo es central) depende, por lo tanto, de 6 cantidades, es decir, las 3 coordenadas de m_i (las $x_{i,\alpha}$) y las 3 coordenadas de m_j (las $x_{j,\alpha}$). Ahora bien, la diferencial total de \bar{U}_{ij} es, por lo tanto, la suma de 6 derivadas parciales,

$$d\bar{U}_{ij} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \bar{U}_{ij}}{\partial x_{i,\alpha}} dx_{i,\alpha} + \frac{\partial \bar{U}_{ij}}{\partial x_{j,\alpha}} dx_{j,\alpha} \right) \quad (1.79)$$

(tener presente que α indica la coordenada $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, y la i y j las partículas) donde las $x_{j,\alpha}$ son mantenidas constantes en el primer término y las $x_{i,\alpha}$ son

mantenidas constantes en el segundo término. Así,

$$d\bar{U}_{ij} = \left(\vec{\nabla}_i \bar{U}_{ij} \right) \bullet d\vec{r}_i + \left(\vec{\nabla}_j \bar{U}_{ij} \right) \bullet d\vec{r}_j \quad (1.80)$$

pero como,

$$\bar{U}_{ij} = \bar{U}_{ji} \text{ (por ser escalar no cambia con la dirección)} \quad (1.81)$$

entonces,

$$\vec{\nabla}_j \bar{U}_{ij} = \underbrace{\vec{\nabla}_j \bar{U}_{ji}}_{\text{Por}} = \underbrace{-\vec{F}_{ji}^{(in)}}_{\text{Por (1.76)}} = \underbrace{\vec{F}_{ij}^{(in)}}_{\text{Por (1.1)}} \quad (1.82)$$

Ahora, debido a (1.76) y (1.82), la expresión (1.80) puede escribirse como,

$$\begin{aligned} d\bar{U}_{ij} &= -\vec{F}_{ij}^{(in)} \bullet d\vec{r}_i + \vec{F}_{ij}^{(in)} \bullet d\vec{r}_j = -\vec{F}_{ij}^{(in)} \bullet (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) \\ &= -\vec{F}_{ij}^{(in)} \bullet (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) = \underbrace{-\vec{F}_{ij}^{(in)} \bullet d\vec{r}_{ij}}_{\text{Por (1.61)}} \end{aligned} \quad (1.83)$$

y entonces, al sustituir (1.83) en (1.78), se obtiene,

$$\begin{aligned} \text{Término 2} &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_{ij}^{(in)} \bullet d\vec{r}_{ij} = - \sum_{i,j=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} d\bar{U}_{ij} \\ &= - \sum_{i,j=1}^N \bar{U}_{ij} \Big|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \end{aligned} \quad (1.84)$$

Por último, al sustituir (1.77) y (1.84) en (1.75), resulta,

$$W_{12} = - \sum_{i=1}^N U_i \Big|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} - \sum_{i,j=1}^N \bar{U}_{ij} \Big|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} = - \left(\sum_{i=1}^N U_i + \sum_{i,j=1}^N \bar{U}_{ij} \right) \Big|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \quad (1.85)$$

expresión que fue obtenida suponiendo que las fuerzas externas e internas son derivables de energías potenciales. En este caso, la energía potencial total U (externa + interna) del sistema de partículas puede ser escrita como,

$$U = \sum_{i=1}^N U_i + \sum_{i,j=1}^N \bar{U}_{ij} \quad (1.86)$$

donde el término $\sum_{i,j=1}^N \bar{U}_{ij}$ representa la *energía potencial interna* del sistema de partículas. Ahora bien, (1.85) puede escribirse ahora como,

$$W_{12} = - U \Big|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} = U_1 - U_2 \quad (1.87)$$

1.8.3. Conservación de la energía mecánica

Si se igualan (1.69) y (1.87) resulta,

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= U_1 - U_2 \Rightarrow T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \\ \Rightarrow E_1 &= E_2 \end{aligned} \quad (1.88)$$

que expresa la conservación de la energía total del sistema en el cual todas las fuerzas son derivables a partir de energías potenciales que no dependen explícitamente del tiempo. A tales sistemas, como se sabe, se denominan *sistemas conservativos*:

La energía total de un sistema de partículas se conserva cuando sus fuerzas externas e internas son derivables a partir de energías potenciales que no dependen explícitamente del tiempo.

Si el sistema es un cuerpo rígido donde, como se sabe, las partículas que lo constituyen están restringidas a mantener sus posiciones relativas, entonces, en cualquier proceso en el que se involucre el cuerpo, la energía potencial interna permanece constante. En esta situación, la energía potencial interna puede ser ignorada cuando se calcule la energía potencial total del sistema. Esta cantidad contribuye simplemente a definir la posición cero en la energía potencial, pero esta posición es elegida arbitrariamente en cualquier caso; es decir, sólo la diferencia de energías potenciales es físicamente significativa. El valor absoluto de la energía potencial es una cantidad arbitraria.

1.9. Problemas

- Encuentre el centro de masa de un cono sólido homogéneo de base $2a$ y altura h (ver figura 1.14). **Resp.:** $\vec{R} = -\frac{3}{4}\hat{e}_z$.
- Encuentre el centro de masa de una concha semiesférica de densidad constante de radio interno r_i y radio externo r_e . Posicione el origen del sistema de coordenadas en el centro de la base, de manera tal que ésta quede contenida en el plano XY . **Resp.:** $\vec{R} = \frac{3(r_e^4 - r_i^4)}{8(r_e^3 - r_i^3)}\hat{e}_z$.
- Encuentre el centro de masa de un cono sólido homogéneo cuya base tiene un diámetro $2a$ y altura h y un hemisferio sólido homogéneo de radio a , de manera tal que ambas bases se tocan (ver figura 1.15). **Resp.:** $\vec{R} = \frac{h^2 - 3a^2}{4(2a+h)}\hat{e}_z$.

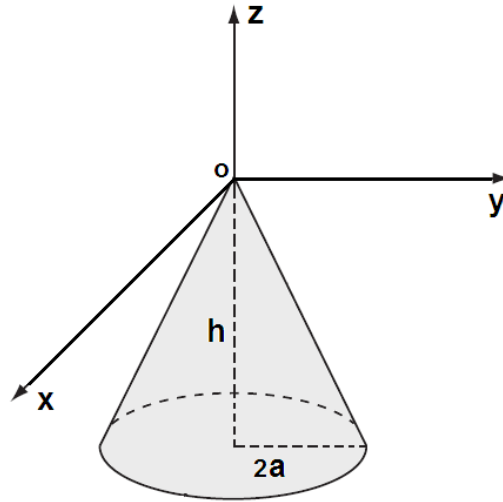


Figura (1.14): Centro de masa de un cono sólido homogéneo (Problema 1).

4. Un conjunto de N partículas de masas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$ están situadas en puntos cuyos vectores de posición con respecto a un origen O son $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N$ respectivamente. Como ya se sabe, el centro de masa CM del conjunto de partículas se define como el punto en el espacio cuyo vector de posición \vec{R} viene dado por,

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Mostrar que si se usara un origen O' diferente, la anterior definición situaría al CM en el mismo punto del espacio.

5. Encuentre el centro de masa de un alambre uniforme que sustituye un arco θ circular de radio a , como el mostrado en la figura 1.16. **Resp.:** $\vec{R} = \frac{2a}{\theta} \text{Sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \hat{e}_x$.
6. El centro de gravedad de un sistema de partículas es el punto en torno al cual las fuerzas externas gravitacionales no ejercen torque. Para una fuerza gravitacional uniforme, mostrar que el centro de gravedad es idéntico al centro de masa para el sistema de partículas. **Ayuda:** Establecer un sistema como el mostrado en la figura 1.17 donde \vec{r}_o indica la posición del centro de gravedad y calcular el torque total del sistema en torno a este punto.
7. Considere dos partículas de masa m . Las fuerzas sobre las partículas son $\vec{F}_1 = \vec{0}$ y $\vec{F}_2 = F_o \hat{i}$. Si las partículas están inicialmente en reposo en el origen, cuál es la

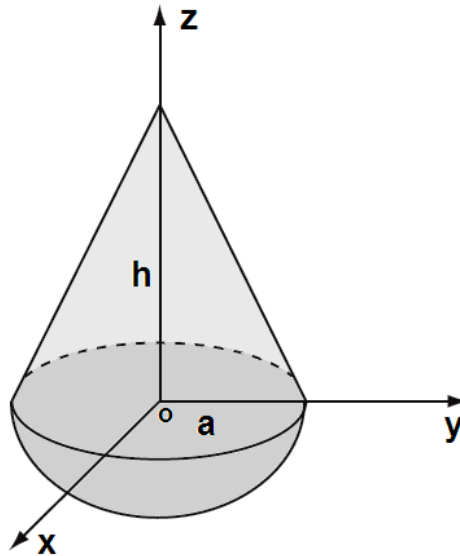


Figura (1.15): Centro de masa de un sistema formado por un cono sólido homogéneo cuya base está unida a la correspondiente de un hemisferio sólido homogéneo (Problema 3).

posición, velocidad y aceleración del centro de masas?. **Resp.:** $\vec{R} = \frac{F_0}{4m} t^2 \hat{e}_x$, $\vec{v} = \frac{F_0}{2m} t \hat{e}_x$, $\vec{a} = \frac{F_0}{2m} \hat{e}_x$.

8. Un modelo de la molécula de H_2O es mostrado en la figura 1.18. Localice el centro de masas. **Resp.:** $\vec{R} = 0,068a \hat{e}_x$

9. ¿Dónde está el centro de masas del triángulo rectángulo isósceles de densidad superficial uniforme mostrado en la figura 1.19?. **Resp.:** $\vec{R} = \frac{a}{3\sqrt{2}} \hat{e}_y$.

10. Hallar la posición del centro de masa de la pirámide mostrada en la figura 1.20. **Resp.:** $\vec{R} = \frac{a}{4} \hat{e}_x + \frac{a}{4} \hat{e}_y + \frac{a}{4} \hat{e}_z$.

11. Mostrar que la expresión $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij}$ en verdad se anula para un sistema de 3 partículas.

12. Mostrar que la magnitud R del vector de posición del centro de masa con respecto a un origen arbitrario es dado por la expresión,

$$M^2 R^2 = M \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N m_i m_j r_{ij}^2$$

13. Mostrar que para una sola partícula de masa constante m la ecuación de movimiento implica la siguiente ecuación diferencial para la energía cinética T ,

$$\dot{T} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

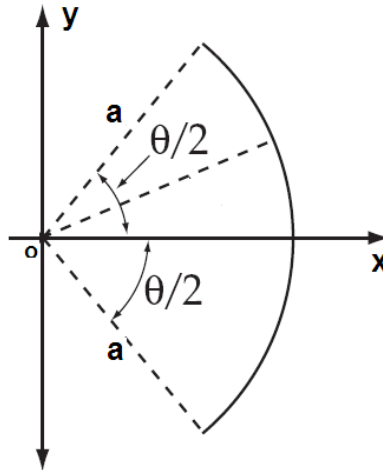


Figura (1.16): Centro de masa de un alambre uniforme que sustituye un arco θ circular de radio a (Problema 5).

mientras que si la masa varía con el tiempo la ecuación correspondiente es,

$$\frac{d(mT)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{p}$$

14. Se dispara un proyectil a un ángulo de 45° con energía cinética inicial E_o . En el punto más alto de su trayectoria, el proyectil explota con energía adicional E_o en dos fragmentos. Un fragmento de masa m_1 cae verticalmente (ver figura 1.21). (a) ¿Cuál es la velocidad (magnitud y dirección) del primer fragmento y del segundo fragmento de masa m_2 ?, (b) ¿Cuánto vale la razón m_1/m_2 cuando m_1 es un máximo?. **Resp.:** (a) $v_1 = -\sqrt{\frac{E_o(2m_2-m_1)}{m_1(m_1+m_2)}}$, verticalmente hacia abajo; $v_2 = \sqrt{\frac{E_o(4m_1+m_2)}{m_2(m_1+m_2)}}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{m_1(2m_2-m_1)}}{m_1+m_2}\right)$; (b) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$.

15. Un sistema de partículas discreto interactúa mediante fuerzas que siguen la "forma fuerte" de la tercera ley de Newton. Dada la relación usual entre las coordenadas fijas y las coordenadas del centro de masa,

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{R}$$

y la fuerza total sobre la i -ésima partícula,

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{(ex)} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^{(in)}$$

mostrar que el torque total $\vec{\tau}$,

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{L}}_i, \text{ con } \vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

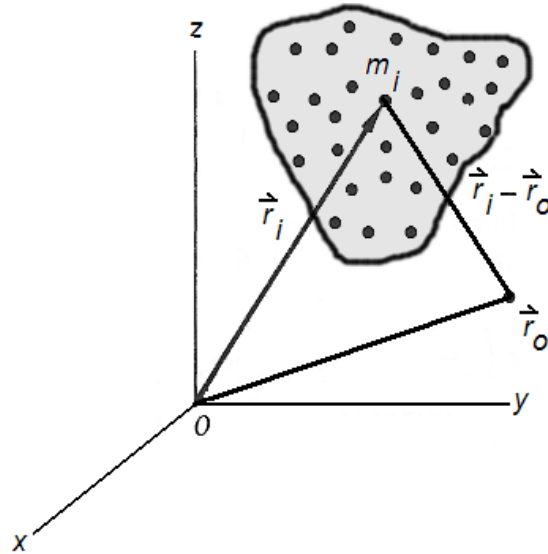


Figura (1.17): Centro de gravedad y centro de masa de un sistema de partículas (Problema 6).

para una fuerza externa de la forma $\vec{F}_i^{(ex)} = m_i \vec{g}$, es simplemente dada por,

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}^{(ex)}$$

donde $\vec{F}^{(ex)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(ex)}$ es la fuerza externa total.

16. Si cada partícula de un sistema discreto es atraída hacia un punto fijo O con una fuerza proporcional a su masa y a su distancia a dicho punto $-km_i \vec{r}_i$ (k constante positiva), demostrar que el centro de masa se mueve como si fuera una partícula del sistema.
17. Un sistema discreto está formado por N partículas de igual masa m que deslizan libremente sobre alambres paralelos lisos y se atraen unas a otras con fuerzas proporcionales al producto de sus masas y a sus distancias $-km_i m_j \vec{r}_{ij}$. Supóngase que las correderas están en la dirección OX y considere dos de ellas, la i -ésima y la j -ésima (ver figura 1.22). En la figura, θ_{ij} es el ángulo que forma la línea de la fuerza con respecto al eje X .

a) Muestre que la aceleración de la i -ésima partícula viene dada por,

$$\ddot{x}_i = km \sum_{j=1}^N (x_j - x_i)$$

b) Muestre que la posición del centro de masa viene dada por,

$$x_{cm} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

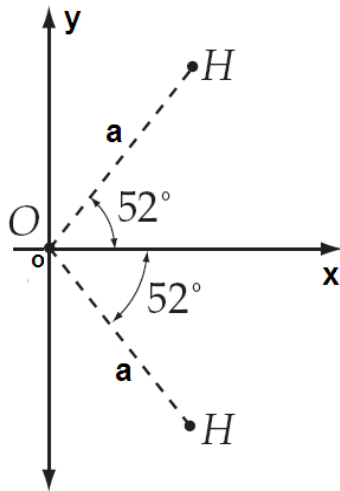


Figura (1.18): Centro de masa de un modelo de la molécula de H_2O (Problema 8).

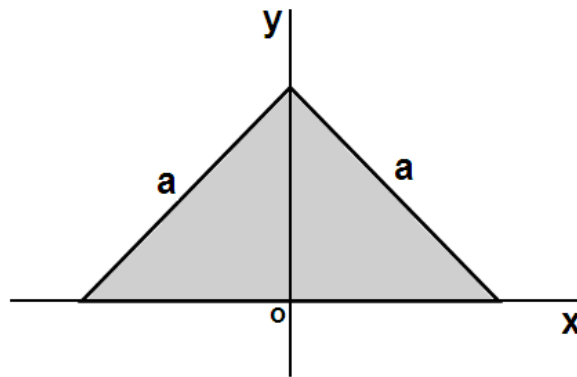


Figura (1.19): Centro de masa de un triángulo rectángulo isósceles homogéneo (Problema 9).

- c) Ahora, combinando lo mostrado en (a) y (b), mostrar que las partículas oscilan con igual frecuencia angular dada por,

$$\omega = \sqrt{kmN}$$

donde se ha supuesto que el centro de masa está en reposo. La independencia de i de esta cantidad es lo que indica que es igual para todas las N partículas del sistema.

18. Dos partículas de masa m se mueven, cada una, sobre las correderas lisas perpendiculares OX y OY (ver figura 1.23), atrayéndose con una fuerza proporcional a su

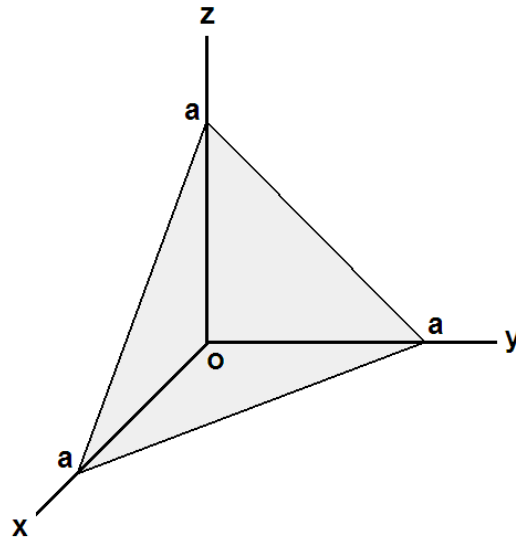


Figura (1.20): Centro de masa de una pirámide homogénea (Problema 10).

distancia $-km_i \vec{r}_i$. Si inicialmente,

$$\begin{aligned} x(t=0) &= a, \dot{x}(t=0) = -V_o \\ y(t=0) &= a, \dot{y}(t=0) = 0 \end{aligned}$$

a) Muestre que,

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(\omega t) - \frac{V_o}{2\omega} \sin(\omega t) \\ y(t) &= a \cos(\omega t) \end{aligned}$$

b) Muestre que la ecuación cartesiana de la trayectoria del centro de masa del sistema viene dada por,

$$y_{cm}^2 \left[1 + \left(\frac{V_o}{a\omega} \right)^2 \right] - 2x_{cm}y_{cm} + x_{cm}^2 = \left(\frac{V_o}{a\omega} \right)^2$$

que representa una elipse.

19. El torque total $\vec{\tau}$ sobre un sistema de partículas, como el mostrado en la figura 1.24, con respecto al origen O del sistema de coordenadas S viene, como ya se sabe, dado por,

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^{(s)} \times \vec{F}_i^{(ex)}$$

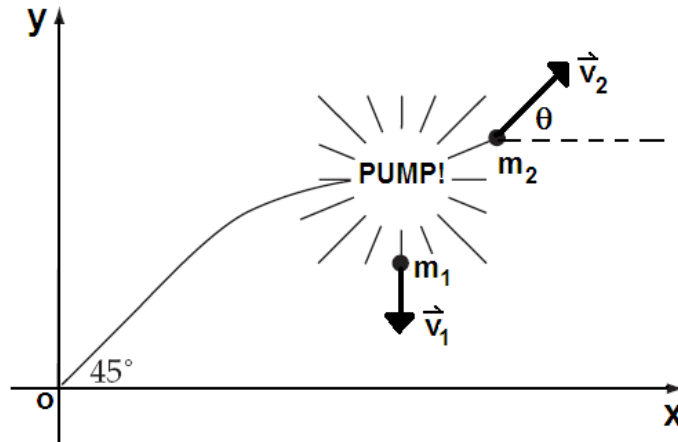


Figura (1.21): Proyectil disparado con un ángulo de elevación el cual estalla en el aire (Problema 14).

Establecer un nuevo sistema de coordenadas S' de origen O' cuya posición respecto de O sea dada por \vec{r}_o y donde $\vec{r}_i^{(s')}$ sea la posición del sistema de partículas respecto a S' . Mostrar que el torque total sobre mismo sistema de partículas con respecto a O' es el mismo $\vec{\tau}$ si $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(ex)} = \vec{0}$, es decir, que el torque resultante tiene el mismo valor en cualquier sistema de coordenadas.

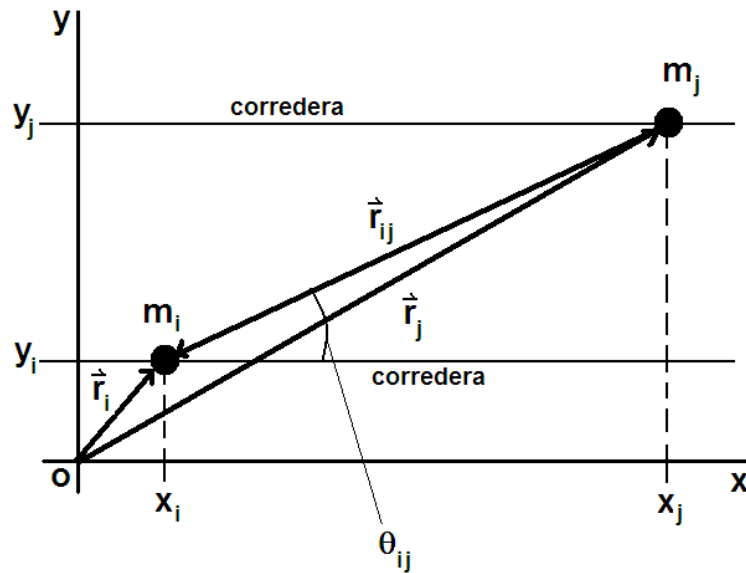


Figura (1.22): Sistema discreto formado por N partículas de igual masa m , que delizan libremente sobre alambres paralelos lisos y se atraen unas a otras con fuerzas proporcionales al producto de sus masas y a sus distancias (Problema 17).

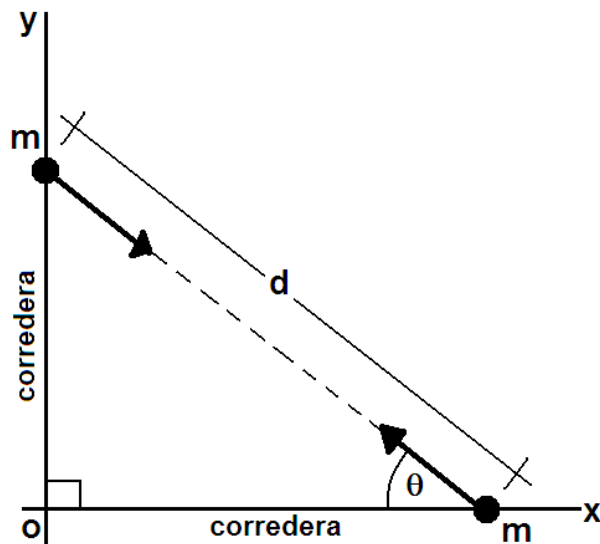


Figura (1.23): Dos partículas de masa m se mueven, cada una, sobre las correderas lisas perpendiculares OX y OY , atrayéndose con una fuerza proporcional a su distancia (Problema 18).

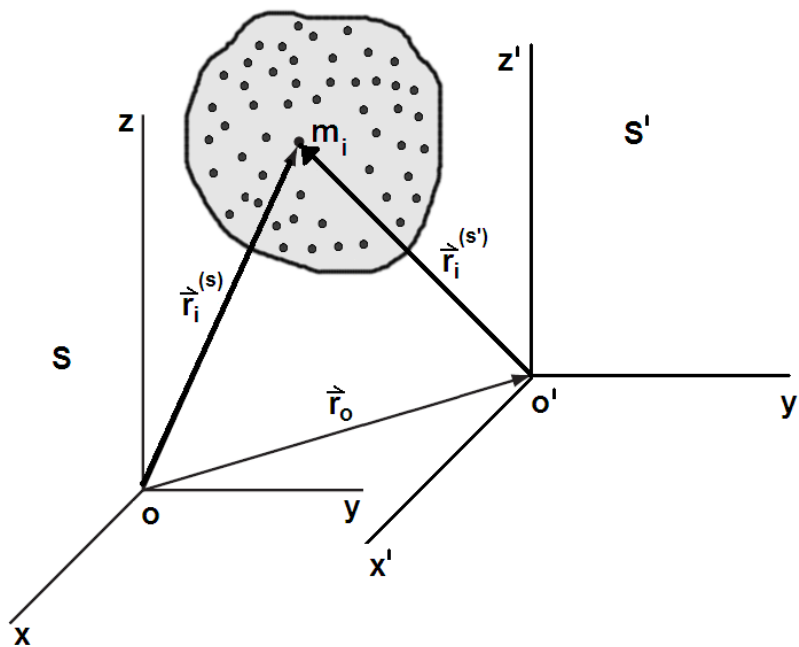


Figura (1.24): Torque de un sistema de partículas con respecto a dos sistemas de coordenadas cuyos orígenes no coinciden (Problema 19).

CAPÍTULO 2

Definiciones y principios básicos

En este capítulo se estudiarán una serie de definiciones y términos que son básicos para la comprensión de lo expuesto en los capítulos subsiguientes.

Contents

2.1. Propiedades del espacio y el tiempo	40
2.2. Ligaduras	42
2.3. Clasificación de las ligaduras	45
2.3.1. Si son o no desigualdades	45
2.3.2. Si dependen explícita o implícitamente del tiempo	46
2.3.3. Por su integrabilidad	48
2.4. Fuerza de ligadura y fuerza aplicada	52
2.4.1. Ligaduras lisas	54
2.4.2. Ligaduras rugosas	54
2.5. Dificultades introducidas por las ligaduras	55
2.6. Coordenadas generalizadas	55
2.7. Espacio de configuración	57
2.8. Magnitudes mecánicas en coordenadas generalizadas	58
2.8.1. Desplazamiento	59
2.8.2. Velocidad	59
2.8.3. Aceleración	59
2.8.4. Trabajo mecánico	60

2.8.5. Energía cinética	61
2.9. Desplazamiento virtual y trabajo virtual	62
2.9.1. Desplazamiento virtual	63
2.9.2. Trabajo virtual	65
2.10. Algunos principios mecánicos básicos	65
2.10.1. Principio de los trabajos virtuales	65
2.10.2. Principio de D'Alembert	69
2.10.3. Principio de Hamilton o de acción estacionaria	74

2.1. Propiedades del espacio y el tiempo

El espacio y el tiempo son dos conceptos fundamentales de la Física y particularmente en la Mecánica Clásica, por lo tanto, sus propiedades son importantísimas en el desarrollo de las teorías que la conforman. Aquí se abordarán las propiedades que tienen el espacio y el tiempo en Mecánica Clásica o Newtoniana.

El espacio, y por tanto su métrica, tienen las propiedades siguientes:

1. El espacio se caracteriza por una métrica Euclídea¹, lo que lo convierte en un espacio puntual Euclidiano en 3 dimensiones, \mathbb{R}^3 .
2. Independencia de los objetos en él inmersos, es decir, la métrica del espacio no se ve afectada por los mismos.
3. Constancia a lo largo del tiempo.
4. **Homogeneidad:** Es igual en todos los puntos, no existiendo puntos privilegiados. La propiedad de homogeneidad del espacio significa que las leyes de la física tienen validez en todos los lugares del universo, es decir, las propiedades mecánicas de un sistema dado no son afectadas por las traslación del mismo en el espacio.

¹Euclides (fl. 300 a.C.), matemático griego, cuya obra principal, Elementos de geometría, es un extenso tratado de matemáticas en 13 volúmenes sobre materias tales como geometría plana, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio. Probablemente estudió en Atenas con discípulos de Platón. Enseñó geometría en Alejandría y allí fundó una escuela de matemáticas.

5. **Isotropía**²: Es igual en todas las direcciones, no existiendo direcciones privilegiadas. La isotropía del espacio se refiere a que las propiedades mecánicas de un sistema en particular no son afectadas por la orientación del mismo. Aparece en el hecho de que la orientación de los ejes de coordenadas, los cuales sirven de marco de referencia para analizar un fenómeno físico, es arbitraria. La isotropía del espacio significa que si un experimento es efectuado en un laboratorio donde el equipo experimental tenga una cierta orientación espacial, los resultados obtenidos serán los mismos si la orientación de todos los instrumentos, el sistema que se va a analizar y el medio ambiente se modifica.

El tiempo se caracteriza, a su vez, por las siguientes propiedades:

1. **Homogeneidad**: No existen instantes privilegiados. La homogeneidad del tiempo se refiere a la equivalencia entre cualesquiera dos instantes de tiempo, independientemente de en que momento se tomen. Se introduce en forma práctica al utilizar marcos de referencia donde el origen de coordenadas puede seleccionarse arbitrariamente. Una forma equivalente de expresar la homogeneidad del tiempo es plantear que las leyes de la física son las mismas ahora que hace mil años.
2. **Anisotropía**: Fluye constantemente en un sentido, por lo que no se puede retroceder ni volver al pasado. Asimismo, los fenómenos futuros no pueden condicionar los presentes. No se cumple, por tanto, la isotropía, existiendo un único sentido en el que puede discurrir el tiempo.
3. **Simultaneidad absoluta**: Los fenómenos considerados simultáneos para dos observadores en sendos sistemas de referencia lo son, asimismo, para cualquier otro observador ligado a cualquier otro sistema de referencia.
4. En Mecánica Clásica, el tiempo se considera una variable de naturaleza distinta de las variables espaciales.

Algunos de estos postulados básicos no son aceptados por la Mecánica Relativista. La Teoría de la Relatividad Especial establece un referencial en cuatro dimensiones espacio-tiempo. La Teoría de la Relatividad General establece un espacio curvado, con métrica Riemanniana, debido a la presencia de masas que condicionan dicha métrica. De esta forma el espacio no sería independiente de los objetos en él inmersos.

²Su etimología está en la raíces griegas **isos** = *equitativo o igual* y **tropos** = *medio, espacio de lugar, dirección*.

2.2. Ligaduras

Después de estudiar en el curso de Física elemental la dinámica de una partícula se tiende, muy frecuentemente, a pensar que para describir el movimiento de las N partículas que constituyen a un sistema dado sólo se tiene que aplicar la segunda ley de Newton a cada una de ellas³,

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}) = m_i \ddot{\vec{r}}_i(x_{i,\alpha}) = \vec{F}_i, \text{ con } i = 1, 2, \dots, N, \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

e integrar las $3N$ ecuaciones resultantes para obtener las $3N$ coordenadas $x_{i,\alpha}$ como función del tiempo. Pero es frecuente descubrir que, además de ser inviable en la mayoría de las situaciones, el sistema de ecuaciones está incompleto. Se necesita algo más, en particular, las coordenadas podrían estar relacionadas o restringidas por *ligaduras*.

Esto se puede ilustrar con el ejemplo sencillo del péndulo simple (ver figura 2.1): una masa m cuelga de un soporte mediante una cuerda inelástica, de masa despreciable y de longitud ℓ , en un campo gravitacional. La fuerza gravitatoria o peso $\vec{w} = m\vec{g}$ no es la única fuerza que actúa sobre la masa puesto que la cuerda misma también ejerce una fuerza \vec{f} sobre m (en realidad la fuerza \vec{f} de la cuerda es una fuerza que describe las interacciones de las partículas de la cuerda con la masa m , dado que el sistema de la masa y las partículas individuales de la cuerda es inmanejable). El problema ahora radica en que, para determinar el movimiento de la masa m a través de la segunda ley de Newton, es necesario conocer también una expresión para \vec{f} pero, dado que \vec{f} es una fuerza que surge de la interacción de la cuerda con la masa, no se tiene esa expresión. El efecto de la fuerza desconocida \vec{f} es mantener la masa a distancia ℓ del origen O , haciendo que el movimiento de la masa esté restringido. Cuando lo anterior ocurre, se dice entonces que la masa está sometida a una *ligadura* y a la fuerza que restringe su movimiento (la ejercida por la cuerda) se le llama *fuerza de ligadura*.

Se denominan ligaduras a las restricciones sobre las coordenadas de un sistema siendo independientes de las fuerzas actuantes, es decir, son condiciones que restringen el movimiento de una partícula o sistema de partículas.

En cualquier sistema dinámico aparecen ligaduras que restringen el movimiento, además de fuerzas que controlan su evolución.

³El subíndice i indica la partícula estudiada y α la coordenada, es decir, $\alpha = 1 \rightarrow x$, $\alpha = 2 \rightarrow y$, $\alpha = 3 \rightarrow z$. De esta manera, para la partícula $i = 1$ las coordenadas serán $(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3})$.

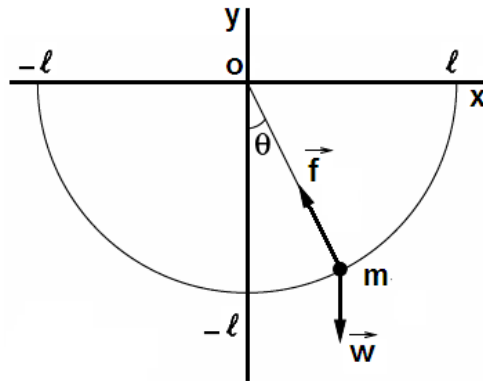
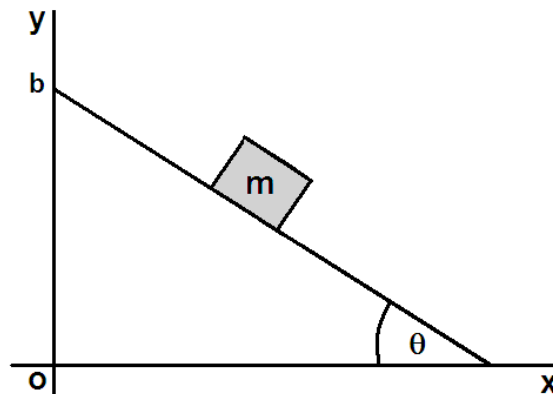


Figura (2.1): Péndulo simple.

Ejemplo 2.1**Algunas ligaduras en sistemas sencillos.**

1. En el caso de un bloque que se desliza sobre un plano inclinado, dicho bloque está obligado a moverse sobre plano (ver figura 2.2) y la ligadura puede expresarse como,

Figura (2.2): Un bloque de masa m que se mueve sobre una superficie inclinada.

$$y = -x \tan \theta + b \quad (2.2)$$

2. Como se vió anteriormente, en un péndulo simple la partícula (masa pendular) está obligada a moverse en una trayectoria semicircular (ver figura 2.1). En este caso la ligadura puede expresarse como,

$$x^2 + y^2 = \ell^2 \quad (2.3)$$

3. En un cuerpo rígido (ver figura 2.3) las partículas están enlazadas de manera que la distancia entre ellas permanezca constante, pudiéndose establecer la ligadura como,

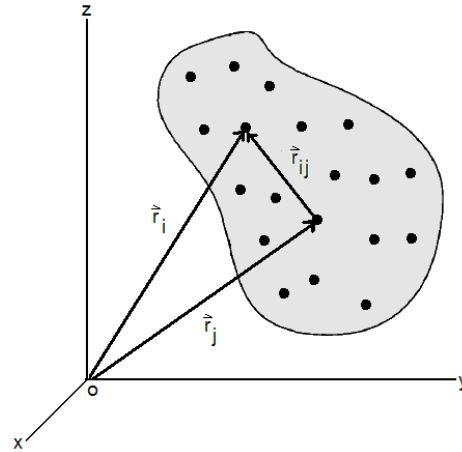


Figura (2.3): Cuerpo rígido.

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = r_{ij} = \text{constante.} \quad (2.4)$$

donde r_{ij} es la distancia entre la partícula i -ésima y la j -ésima. Algo análogo ocurre en un sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por una barra de masa despreciable de longitud ℓ (ver figura 2.4), siendo en este caso la ligadura,

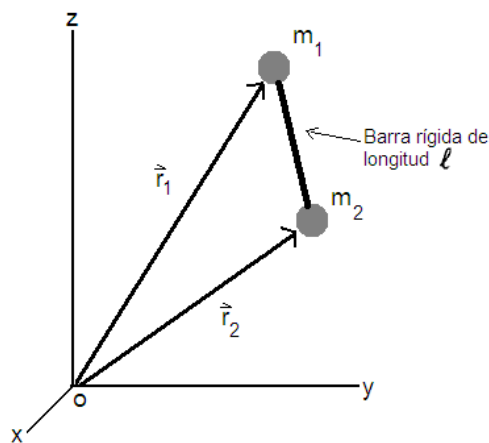


Figura (2.4): Dos masas m_1 y m_2 unidas por una barra rígida de longitud ℓ .

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \ell \quad (2.5)$$

2.3. Clasificación de las ligaduras

Las ligaduras se pueden clasificar de variadas formas, a continuación algunas de ellas,

2.3.1. Si son o no desigualdades

Unilaterales

Se dice que una ligadura es unilateral cuando se expresa mediante una desigualdad.

Ejemplo 2.2 Algunas ligaduras unilaterales.

1. Si se tiene un sistema de moléculas de gas encerrado en una esfera de radio R (ver figura 2.5), las posiciones \vec{r}_i de las moléculas deben satisfacer las ligaduras,

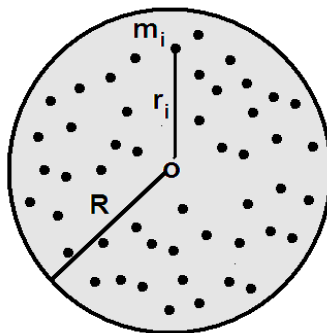


Figura (2.5): Moléculas de gas encerradas en una esfera de radio R .

$$r_i \leq R, \text{ con } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

2. Una partícula colocada sobre la superficie de una esfera de radio R , está sujeta a una ligadura que se puede escribir como,

$$r^2 - R^2 \geq 0 \quad (2.7)$$

Así, en un campo gravitacional, una partícula colocada sobre una superficie de una esfera se deslizará hacia abajo sobre parte de su superficie hasta que, eventualmente, se desprende de dicha superficie (ver figura 2.6).

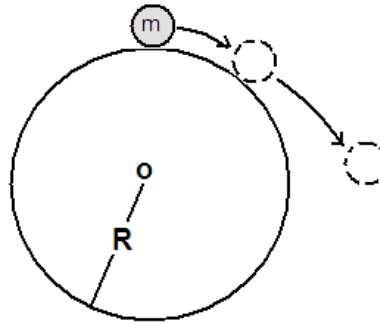


Figura (2.6): Partícula que se desliza sobre la superficie de una esfera de radio R .

Bilaterales

Se dice que una ligadura es bilateral cuando se expresa mediante una igualdad. Este tipo de ligaduras pueden escribirse en la forma general,

$$f_l \left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t \right) = 0, \text{ con } i = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, K \quad (2.8)$$

El subíndice l indica que puede haber más de una ligadura de este tipo en el sistema, siendo k el número total de ellas.

Ejemplo 2.3

Algunas ligaduras bilaterales.

Las ligaduras expresadas por (2.3), (2.4) y (2.5) son ligaduras bilaterales.

2.3.2. Si dependen explícita o implícitamente del tiempo

Ligaduras reónomas

Se dice que una ligadura es reónoma si depende explícitamente del tiempo. También se les llaman *ligaduras móviles*.

Ejemplo 2.4

Algunas ligaduras reónomas.

1. La ligadura presente en un sistema donde una canica hueca se desliza a través de un alambre rígido y curvo, de manera tal que el alambre se mueve de una forma

predeterminada. Es de hacer notar que, si el alambre se mueve como una reacción al movimiento de la canica, entonces la dependencia de la ligadura respecto al tiempo entra en la ecuación de la misma sólo a través de las coordenadas del alambre curvado (las cuales son ahora parte del sistema de coordenadas), por esta razón la ligadura resultante no depende explícitamente del tiempo y por lo tanto no es reónoma.

2. La ligadura presente en un sistema de moléculas de gas encerrado en una esfera cuyo radio R depende del tiempo (ver figura 2.5, con la diferencia de que $R = R(t)$). En este sistema las posiciones \vec{r}_i de las moléculas deben satisfacer las ligaduras,

$$r_i \leq R(t), \text{ con } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.9)$$

3. La ligadura presente en un sistema donde una partícula de masa m es obligada a moverse en un aro que cambia su radio R con el tiempo (ver figura 2.7). En este caso, la ligadura puede ser expresada como,

$$R(t) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.10)$$

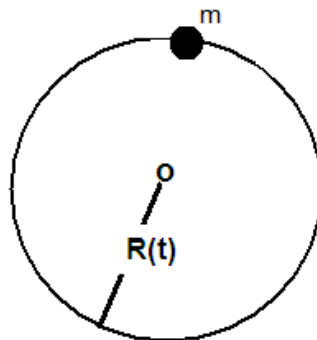


Figura (2.7): Una partícula de masa m que se mueve en un aro cuyo radio cambia con el tiempo.

4. La ligadura presente en un sistema donde una partícula de masa m se desplaza sobre un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación varía con el tiempo (ver figura 2.8). En este caso la ligadura viene representada por,

$$y = \tan(\omega t) x \quad (2.11)$$

apareciendo tiempo explícitamente.

.....

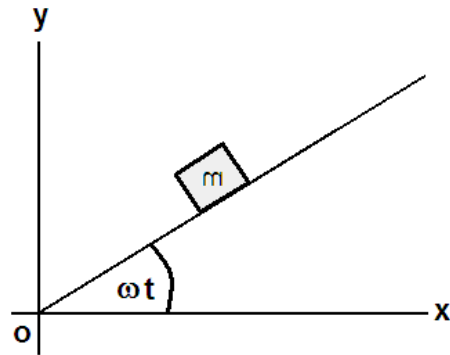


Figura (2.8): Partícula que se mueve sobre un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación varía con el tiempo.

Ligaduras esclerónomas

Se dice que una ligadura es esclerónoma si no depende explícitamente del tiempo. También se les llaman *ligaduras fijas* o *estacionarias*.

Por otro lado, si un sistema tiene todas sus ligaduras esclerónomas entonces se dice que el mismo es esclerónomo, pero si al menos una de sus ligaduras no lo es entonces se dice que es reónomo.

.....

Ejemplo 2.5 Algunas ligaduras esclerónomas.

Las ligaduras expresadas por (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) y (2.7) son ligaduras esclerónomas.

.....

2.3.3. Por su integrabilidad

Ligaduras holónomas o geométricas

Son ligaduras bilaterales que no dependen de las velocidades, sólo dependen de las posiciones de las partículas y el tiempo, exclusivamente. Son integrables, por lo tanto, es posible emplearlas para eliminar las coordenadas dependientes puesto que expresan relaciones algebraicas entre las coordenadas.

Este tipo de ligaduras son geométricas (curvas, superficies, etc.) y se pueden escribir en la forma,

$$f_l(\vec{r}_i, t) = 0, \text{ con } i = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, K \quad (2.12)$$

Ejemplo 2.6**Algunas ligaduras holónomas.**

Las ligaduras expresadas por (2.3), (2.4), (2.5) y (2.10) son ligaduras holónomas.

Ligaduras no-holónomas

Se dice que una ligadura es no-holónoma cuando no se pueden escribir como ligaduras holónomas, es decir, no se pueden escribir en la forma expresada por (2.12). No son integrables, por lo tanto, es imposible emplear las ecuaciones que la expresan para eliminar las coordenadas dependientes.

Si en un sistema al menos una de las ligaduras es no-holónoma, se dice que el sistema es no-holónomo.

Todas las ligaduras unilaterales son de este tipo. Pueden haber ligaduras bilaterales no-holónomas. Un caso particularmente importante de este tipo de ligadura lo constituyen aquellas que pueden ser expresadas en términos de las velocidades de las partículas en el sistema, es decir,

$$f_l(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = 0, \text{ con } i = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, K \quad (2.13)$$

Estas constituyen ligaduras no-holónomas, a menos que la ecuación pueda ser integrada para encontrar relaciones entre las coordenadas. Debido a que algunas veces pueden ser integrables y convertirse en holónomas, a las ligaduras del tipo (2.13) suelen llamárseles *semi-holónomas*.

Las expresiones (2.13) aparecen, frecuentemente, en la forma,

$$f_l(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = \sum_{j=1}^{3N} A_{lj}(\vec{r}_i, t) \dot{x}_j + B_l(\vec{r}_i, t) = 0, \text{ con } l = 1, 2, \dots, K \quad (2.14)$$

llamadas *ligaduras diferenciales*.

En particular si,

$$A_{lj} = \frac{\partial f_l}{\partial x_j}, B_l = \frac{\partial f_l}{\partial t}, f_l = f_l(\vec{r}_i, t)$$

entonces la expresión (2.14) queda en la forma,

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_l}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f_l}{\partial t} dt = 0, \text{ con } l = 1, 2, \dots, K \quad (2.15)$$

que es justo,

$$\frac{df_l}{dt} = 0 \quad (2.16)$$

y que al ser integrada resulta,

$$f_l(\vec{r}_i, t) - C = 0, C = \text{constante de integración} \quad (2.17)$$

donde $C =$ constante de integración. La expresión (2.17) es de la forma (2.12), por lo tanto la ligadura (2.14) es, para este caso particular, holónoma.

Ejemplo 2.7

Algunas ligaduras no-holónomas.

Como ejemplo de ligaduras no-holónomas se tienen los siguientes casos:

1. Las ligaduras representadas por las expresiones (2.6), (2.7) y (2.9) por ser unilaterales.
2. Un ejemplo muy conocido de una ligadura no-holónoma bilateral es el de un objeto que rueda (sin deslizar) sobre una superficie. En particular, un disco que rueda sobre el plano horizontal XY (ver figura 2.9), obligado a moverse de modo que su plano permanezca siempre vertical (el disco puede ser una de las dos ruedas de un eje). Si se eligen como coordenadas para describir el movimiento las (x, y) del centro del disco, un ángulo de giro ϕ alrededor de su eje, y el ángulo θ formado por dicho eje y, por ejemplo, el eje X (ver figura 2.9) entonces, como resultado de la ligadura, la magnitud de la velocidad del centro del disco es proporcional a $\dot{\phi}$,

$$v = R\dot{\phi} \quad (2.18)$$

donde R es el radio del disco, siendo su dirección perpendicular al eje del disco. Sus componentes vienen dadas por,

$$\dot{x} = v \text{ Sen } \theta \quad (2.19)$$

$$\dot{y} = -v \text{ Cos } \theta \quad (2.20)$$

Combinando (2.18) con (2.19) y (2.20), se obtienen dos ecuaciones diferenciales de ligadura,

$$dx - R \text{ Sen } \theta d\phi = 0 \quad (2.21)$$

$$dy + R \text{ Cos } \theta d\phi = 0 \quad (2.22)$$

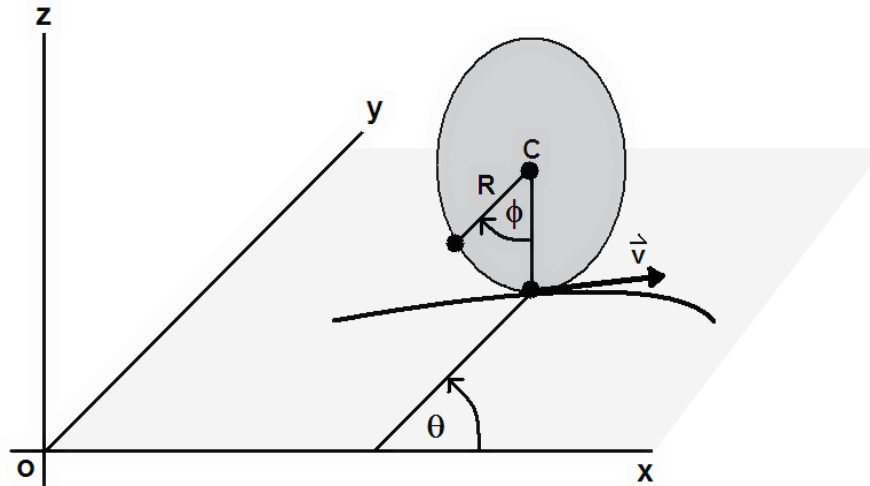


Figura (2.9): Un disco que rueda (sin deslizar) sobre el plano horizontal xy (Ejemplo 2.7).

que no pueden ser integradas sin resolver, de hecho, el problema entero. En otras palabras, no se puede encontrar un factor integrante $f(x, y, \theta, \phi)$ que transforme las ecuaciones (2.22) en diferenciales perfectos, lo que trae como consecuencia que las ligaduras no puedan ser reducidas a la forma expresada por (2.12). A las ligaduras como las representadas por las expresiones (2.22) suelen llamárseles *ligaduras diferenciales*, como ya se había mencionado.

Las ligaduras diferenciales no integrables de la forma (2.22) no son el único tipo de ligaduras no-holónomas. Las condiciones de ligadura pueden involucrar derivadas de orden superior o pueden aparecer en forma de desigualdades, como ya se ha visto.

En principio, siempre se puede encontrar un factor integrante para una ecuación diferencial de ligadura, de primer orden, en sistemas que involucran sólo dos coordenadas siendo estas ligaduras, por lo tanto, holónomas. Un ejemplo familiar (que será desarrollado en un ejemplo en el capítulo 5), ver figura 2.10, es el movimiento en dos dimensiones de un disco que se desplaza sobre un plano inclinado donde,

$$f(x, \theta) = dx - R d\theta = 0 \quad (2.23)$$

Por último, un aspecto que debe ser tomado en consideración sobre las ligaduras es que a .escala de partículas"los sistemas interactúan en base a fuerzas y al describir el movimiento a esa escala no se requiere el uso de ligaduras. Las ligaduras aparecen

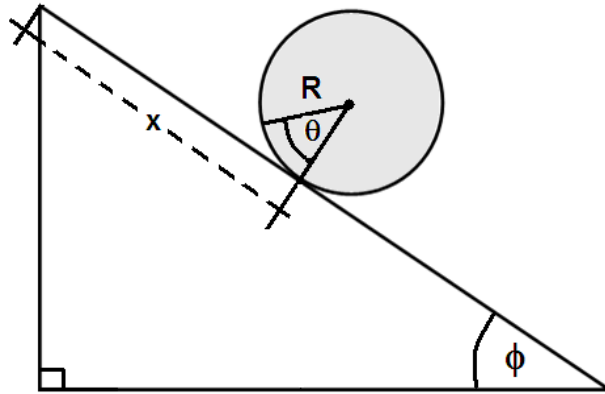


Figura (2.10): Movimiento de un círculo que se desplaza sobre un plano inclinado.

a escala macroscópica como idealizaciones matemáticas de partes del sistema que no se conocen o no se quieren tratar a detalle (como superficies o cuerdas). Imponer ligaduras es un método para tratar con agentes externos que aplican fuerzas, inicialmente desconocidas, al sistema. Generalmente sólo se conoce el efecto geométrico de la acción combinada de estos agentes con las fuerzas conocidas.

2.4. Fuerza de ligadura y fuerza aplicada

La introducción de ligaduras en un sistema lleva al concepto de *fuerza de ligadura*,

Son las que aparecen espontáneamente al establecer una ligadura y aseguran su cumplimiento. Actúan tanto si el sistema está en reposo o si está en movimiento.

En general, las fuerzas de ligadura son desconocidas a priori a diferencia de la llamada *fuerza aplicada*.

La fuerza aplicada es aquella determinada independientemente de cualquier otra fuerza, dando sólo las posiciones (y a veces también las velocidades) de las partículas.

Ejemplo 2.8

Algunas fuerzas aplicadas.

1. La fuerza que ejerce el resorte sobre una de las partículas en un sistema de dos partículas unidas por un resorte es una fuerza aplicada que, como se sabe, depende de la posición de ambas partículas (ver figura 2.11).

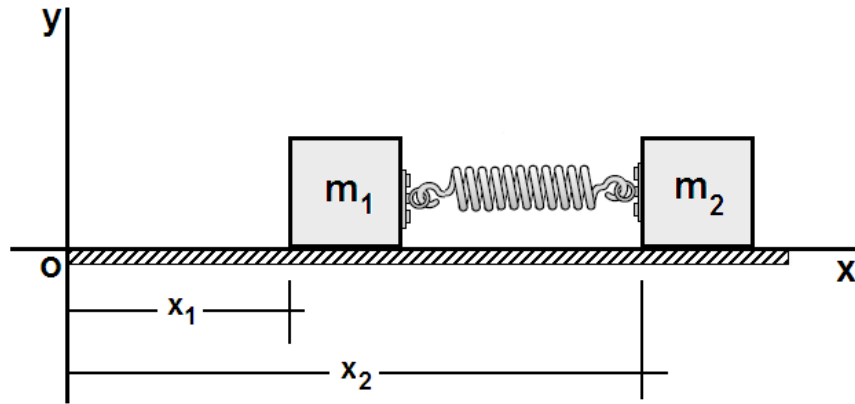


Figura (2.11): Dos masas m_1 y m_2 acopladas por un resorte.

2. El peso, la fuerza eléctrica sobre una partícula cargada, la fuerza magnética (que depende de la velocidad), etc.

Ejemplo 2.9

Algunas fuerzas de ligadura.

1. La fuerza que ejerce un riel que guía el movimiento de una partícula es una fuerza de ligadura que no puede ser determinada sin conocer las otras fuerzas que actúan.
2. La tensión de la cuerda en un péndulo simple y la fuerza normal que ejerce un plano horizontal o inclinado sobre una partícula que se mueve sobre él.

Una condición adicional que se imponen a las fuerzas de ligadura es que puedan ser tan grandes en magnitud como fuera necesario para imponer la ligadura, lo que es una idealización de las ligadura reales, pues los hilos se estiran, las varillas se doblan o se quiebran, etc., pero se trabaja dentro de los límites en lo que esto no pasa o su efecto puede despreciarse.

Un problema con la condición anterior lo dan las fuerzas de rozamiento. Si las condiciones del problema son tales que el rozamiento es suficiente para impedir que haya deslizamiento (rozamiento estático), la fuerza de rozamiento entonces se considera de ligadura.

Si pudiera haber deslizamiento (rozamiento dinámico) se debería considerar al rozamiento como una *fuerza aplicada anómala*, ya que no cumple con ser independiente de las otras fuerzas dado que su magnitud depende de la fuerza de ligadura normal, pero ya no puede ser considerada fuerza de ligadura.

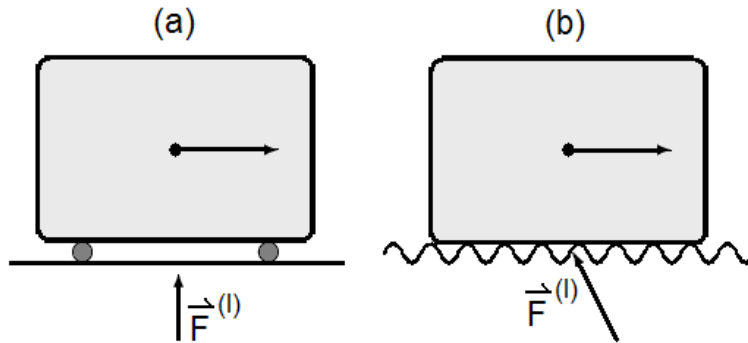


Figura (2.12): Ligaduras lisa (a) y rugosa (b). Para el movimiento permitido por la ligadura (deslizamiento horizontal) la reacción lisa no realiza trabajo, mientras que en el caso rugoso sí.

Aquí se puede ahora introducir una nueva clasificación de las ligaduras, en este caso de las geométricas:

2.4.1. Ligaduras lisas

Son ligaduras sin rozamiento (ver figura 2.12(a)). En este caso, la ligadura no opone reacción a las fuerzas transversales (esto es, tangentes a la ligadura) y, por lo tanto, la fuerza de ligadura $\vec{F}^{(l)}$ es siempre normal a la ligadura.

Lo anterior se puede escribir matemáticamente como,

$$\vec{F}^{(l)} = F_n^{(l)} \hat{n} \quad (2.24)$$

donde $F_n^{(l)}$ es la componente normal de $\vec{F}^{(l)}$ y \hat{n} un versor normal a la ligadura. Aquí, se desconoce el módulo de $\vec{F}^{(l)}$ y se conoce su dirección.

2.4.2. Ligaduras rugosas

Son ligaduras con rozamiento (ver figura 2.12(b)). Aquí, debido al rozamiento, la ligadura opone una reacción a fuerzas tangenciales.

Lo anterior se puede escribir matemáticamente como,

$$\vec{F}^{(l)} = F_n^{(l)} \hat{n} + F_t^{(l)} \hat{t} \quad (2.25)$$

donde $F_t^{(l)}$ es la componente tangencial de $\vec{F}^{(l)}$ y \hat{t} un versor tangencial a la ligadura. Para la reacción normal vale lo dicho antes: es la necesaria para compensar la componente normal de la resultante de las fuerzas aplicadas. En cuanto a la componente tangencial de la reacción, se debe al rozamiento como ya se había dicho.

2.5. Dificultades introducidas por las ligaduras

Las ligaduras introducen dos tipos de dificultades en la solución de problemas mecánicos:

1. Las $3N$ coordenadas $(x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$ no son ahora todas independientes. Para un sistema con s grados de libertad hay sólo s coordenadas independientes.

Los grados de libertad de un sistema son el número de coordenadas independientes (sin incluir el tiempo) que se requieren para describir completamente la posición de todas y cada una de las partículas o partes componentes del sistema.

El término "parte componente" se refiere aquí a cualquier parte del sistema, tal como una palanca, un disco, un piñón, una plataforma, etc., que deben ser tratados como un cuerpo rígido y no como una partícula.

2. Existen fuerzas de ligadura $\vec{F}_i^{(l)}$ que son ejercidas por las superficies, curvas, varillas, etc. sobre las partículas de tal manera que hacen que ellas se muevan de acuerdo a la ligadura. Estas fuerzas no son suministradas a priori y deben ser determinadas como parte de la solución del problema.

Si a las restantes fuerzas se las denomina fuerzas aplicadas $\vec{F}_i^{(a)}$, las $3N$ ecuaciones (2.1) toman la forma,

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(l)}, \text{ con } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.26)$$

que, en conjunto con las K ecuaciones de ligadura, resulta un total de $3N + K$ ecuaciones para las $3N$ $x_{i,\alpha}$ y $F_{i,\alpha}^{(l)}$ (componentes de $\vec{F}_i^{(l)}$) desconocidas⁴.

2.6. Coordenadas generalizadas

De las dificultades descritas en la sección 2.5, la primera es resuelta mediante la introducción de las llamadas *Coordenadas Generalizadas*.

⁴Como ya se dijo, las fuerzas aplicadas $\vec{F}_i^{(a)}$ son conocidas a priori.

Considérese un sistema mecánico genérico, formado por un grupo de N partículas discretas, donde alguna de las cuales podrían estar asociadas para formar cuerpos rígidos. Como ya fue mencionado antes, para describir el estado del sistema en un tiempo dado, es necesario usar N vectores de posición y puesto que, cada vector de posición consiste en un conjunto de tres números (por ejemplo, las coordenadas rectangulares), se necesitan $3N$ de estas cantidades para describir las posiciones de todas las partículas.

Si existen ligaduras holónomas, expresadas en K ecuaciones de la forma (2.12), entonces no todas las $3N$ coordenadas son independientes y se pueden usar estas ecuaciones para eliminar K de las $3N$ coordenadas, quedando $s = 3N - K$ coordenadas independientes, y se dice que el sistema tiene ahora s grados de libertad (las ligaduras reducen los grados de libertad de un sistema).

Es importante hacer notar que si son requeridas s coordenadas en un caso dado, no se tiene que elegir s coordenadas rectangulares o s coordenadas curvilíneas (por ejemplo cilíndricas o esféricas). Se pueden elegir cualesquiera parámetros independientes, siempre y cuando describan completamente el estado del sistema. Estas s cantidades ni siquiera tienen que tener dimensiones de longitud. Dependiendo del problema, es probable que sea más conveniente algunos de los parámetros con dimensiones de energía, algunos con dimensiones de área, algunos podría ser adimensionales y así sucesivamente.

Se da el nombre de coordenadas generalizadas (denotadas con la letra q) de un sistema de s grados de libertad, a las s magnitudes cualesquiera q_1, q_2, \dots, q_s que caracterizan totalmente su estadoo configuración.

Las ecuaciones escritas en términos de estas coordenadas son válidas para cualquier sistema de coordenadas (rectangular, cilíndrico, esférico, etc.). Por conveniencia, se usa q como símbolo general para representar este tipo de coordenadas, no importando cuál sea su naturaleza, como ya fue mencionado.

Es de hacer notar que las coordenadas generalizadas fueron definidas a partir de la incorporación de ligaduras holónomas, pues de lo contrario, no se hubiesen podido usar las ligaduras para eliminar las coordenadas dependientes. Si en el sistema existe al menos una ligadura no-holónoma, esto haría que el sistema fuese no-holónomo y, por lo tanto, ya las coordenadas generalizadas no serían independientes.

Se da el nombre de *coordenadas generalizadas propias* a un conjunto de coordenadas generalizadas que son completamente independientes entre sí.

Usando coordenadas generalizadas, se puede escribir ahora,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j, t), \text{ con } i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, s \quad (2.27)$$

que expresan la relación entre las viejas coordenadas \vec{r}_i y las nuevas s coordenadas independientes q_j . Las expresiones (2.27) contienen las ligaduras (2.12) implícitamente, y son las ecuaciones de transformación desde el conjunto de las coordenadas de la posición \vec{r}_i hacia el conjunto de las q_j o, en forma alternativa, pueden ser consideradas como una representación paramétrica de las posiciones \vec{r}_i .

Se supone, siempre, que también se puede realizar la transformación en sentido contrario (transformación inversa), de manera tal que las ecuaciones (2.27) combinadas con las k ecuaciones de ligadura (2.12), puedan ser invertidas para obtener cualquier q_j como una función de las coordenadas de la posición \vec{r}_i y el tiempo, es decir,

$$q_j = q_j(\vec{r}_i, t), \text{ con } i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, s \quad (2.28)$$

Cuando el sistema de ecuaciones (2.27) no depende explícitamente del tiempo, se dice que el sistema es *natural*.

2.7. Espacio de configuración

Como ya se dijo, el estado de un sistema de N partículas y sujeto a K ligaduras que relacionan algunas de las $3N$ coordenadas rectangulares está completamente descrito por s coordenadas generalizadas. Se puede, por lo tanto, representar el estado de tal sistema mediante un punto en un espacio de dimensión s denominado *espacio de configuración*.

Se da el nombre de espacio de configuración al espacio abstracto constituido por cualquier conjunto de coordenadas generalizadas. La dimensión de este espacio es el número de coordenadas generalizadas independientes s (grados de libertad) que se necesitan para describir, en el espacio tridimensional, cada una de las posiciones de las N partículas del sistema. Cada dimensión de este espacio corresponde a una de las coordenadas q_i .

Se puede representar la historia temporal de un sistema mediante una curva en el espacio de configuración, donde cada punto describe la *configuración* del sistema en un instante particular (ver figura 2.13).

A través de cada punto pasa un infinito número de curvas que representan movimientos posibles del sistema, correspondiendo cada curva a un conjunto particular de

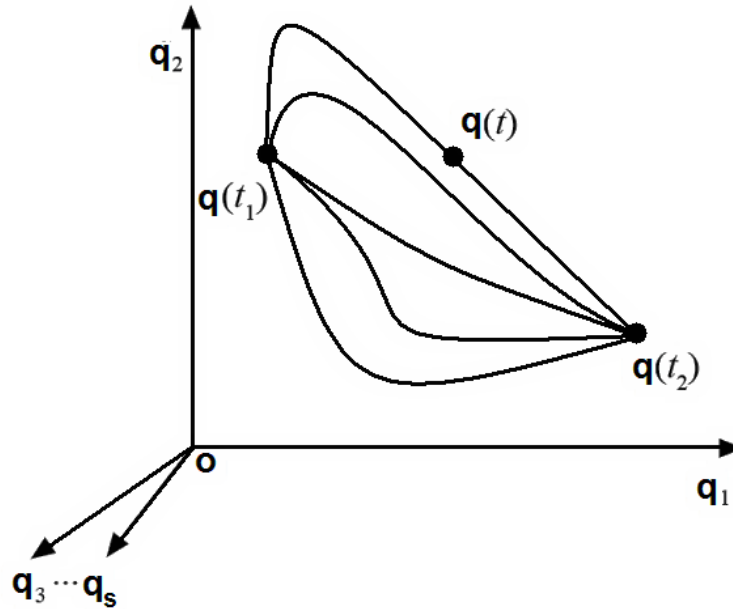


Figura (2.13): El historial temporal de un sistema es representado mediante una curva en el espacio de configuración. Se muestran cuatro posibles.

condiciones iniciales. Por lo tanto, se puede hablar del “camino” de un sistema como si éste se “moviese” a través del espacio de configuración, pero se debe tener cuidado de no confundir esta terminología con aquella aplicada al movimiento de una partícula a lo largo de un camino en el espacio tridimensional ordinario.

Se debe hacer notar también que, un camino dinámico en un espacio de configuración que consiste en un conjunto de coordenadas generalizadas propias es, automáticamente, consistente con las ligaduras del sistema debido a que las coordenadas son elegidas sólo para corresponder a movimientos posibles del sistema.

2.8. Magnitudes mecánicas en coordenadas generalizadas

Seguidamente serán expresadas en coordenadas generalizadas algunas magnitudes físicas de uso frecuente. Se supondrá que el sistema tiene s grados de libertad.

2.8.1. Desplazamiento

De acuerdo a las transformaciones (2.27),

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j, t), \text{ con } i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, s$$

entonces,

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt, \text{ con } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.29)$$

2.8.2. Velocidad

Nuevamente, partiendo de las transformaciones (2.27),

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (2.30)$$

Aquí, a las cantidades \dot{q}_j se les da el nombre de *velocidades generalizadas*.

Para el caso particular de un sistema natural, se puede escribir,

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \text{ con } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.31)$$

puesto que $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$.

2.8.3. Aceleración

Al derivar con respecto al tiempo la expresión (2.30) resulta,

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_i &= \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{j=1}^s \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j \right] + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

pero,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \quad (2.33)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k \quad (2.34)$$

entonces, al sustituir (2.33) y (2.34) en (2.32) resulta,

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j,k=1}^s \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k \quad (2.35)$$

y como los índices que suman son mudos en los últimos dos términos,

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j,k=1}^s \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} \dot{q}_j \right), \text{ con } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.36)$$

Para el caso particular en el que el sistema considerado sea natural se puede escribir,

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j, \text{ con } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.37)$$

2.8.4. Trabajo mecánico

El trabajo mecánico total W realizado sobre un sistema viene dado por,

$$dW = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet d\vec{r}_i \quad (2.38)$$

y al sustituir $d\vec{r}_i$ por la expresión (2.29) resulta,

$$\begin{aligned} dW &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \right) \\ &= \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (2.39)$$

y si el sistema es natural,

$$dW = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j = \sum_{j=1}^s Q_j dq_j \quad (2.40)$$

donde,

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \text{ con } j = 1, 2, \dots, s \quad (2.41)$$

son las llamadas *fuerzas generalizadas*. Puesto que las coordenadas generalizadas q_j no necesariamente tienen dimensión de longitud, entonces las Q_j no necesariamente tienen dimensión fuerza. El producto $Q_j dq_j$, sin embargo, siempre tiene dimensión de trabajo.

En el caso de un sistema conservativo, las fuerzas \vec{F}_i se derivan de una función potencial escalar $U = U(q_i)$, que es la energía potencial del sistema,

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U, \text{ con } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.42)$$

pudiéndose escribir a partir de (2.41),

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i U \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= - \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \hat{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y_i} \hat{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z_i} \hat{e}_z \right) \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \hat{e}_x + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \hat{e}_y + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \hat{e}_z \right) \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

de aquí que,

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}, \text{ con } j = 1, 2, \dots, s, \text{ para sistemas conservativos} \quad (2.44)$$

2.8.5. Energía cinética

La energía cinética total T de un sistema viene dada por,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \quad (2.45)$$

Ahora, al sustituir en ella la expresión(2.30), resulta,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left| \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right|^2 \\ &= a_o + \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= T_o + T_1 + T_2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde a_o , a_j y a_{jk} son funciones definidas de las \vec{r}_i y t , y por lo tanto, de las q_i y t , dadas por,

$$a_o = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left| \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right|^2 \quad (2.47)$$

$$a_j = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \text{ con } j = 1, 2, \dots, s \quad (2.48)$$

$$a_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \text{ con } j, k = 1, 2, \dots, s \quad (2.49)$$

Si el sistema es natural, se anulan todos los términos de (2.46) menos el último,

$$T = \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (2.50)$$

y, por lo tanto, T será siempre una forma cuadrática homogénea respecto a las velocidades generalizadas.

Si se halla la derivada parcial de (2.50) con respecto a las velocidades generalizadas \dot{q}_l resulta,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k=1}^s a_{lk} \dot{q}_k + \sum_{j=1}^s a_{jl} \dot{q}_j, \text{ con } l = 1, 2, \dots, s$$

multiplicando por \dot{q}_l y sumando sobre l ,

$$\sum_{l=1}^s \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k,l=1}^s a_{lk} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{j,l=1}^s a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l$$

y como en este caso, todos los índices son mudos, los dos términos de la derecha son idénticos, entonces,

$$\sum_{l=1}^s \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2 \sum_{j,l=1}^s a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l = 2T \quad (2.51)$$

Este importante resultado es un caso especial del *Teorema de Euler* (ver apéndice A), el cual establece que,

Si $f(y_i)$ es una función homogénea de las y_i que es de grado p , es decir,

$$f(\lambda y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_n) = \lambda^p f(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

siendo $\lambda \neq 0$, entonces,

$$\sum_{j=1}^n \left[y_j \frac{\partial f(y_i)}{\partial y_j} \right] = p f(y_i), \text{ con } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.52)$$

2.9. Desplazamiento virtual y trabajo virtual

Las definiciones de desplazamiento virtual y trabajo virtual serán útiles a la hora de establecer el Principio de D'Alembert más adelante.

2.9.1. Desplazamiento virtual

Se da el nombre de *desplazamiento virtual* a un desplazamiento infinitesimal de la posición de una partícula realizado instantáneamente, es decir, que es realizado a velocidad infinita, sin que transcurra el tiempo durante el desplazamiento (de aquí la condición de virtual ya que no es posible realizarlo efectivamente).

Aparte de ser instantáneo, es arbitrario no relacionado con el movimiento real de la partícula en el instante considerado. Es un desplazamiento hipotético, es simplemente una forma de razonar.

Existen ciertos tipos de desplazamientos virtuales que son los más útiles y que serán de interés más adelante, estos son los denominados *compatibles con las ligaduras*.

Los desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras son aquellos que respetan las ligaduras (no sacan la partícula del riel que la guía, no deforman los cuerpos rígidos, no estiran los hilos, etc.); es decir, que después de realizado un desplazamiento virtual, se mantienen las relaciones de ligadura del sistema.

Un desplazamiento virtual infinitesimal se representará por la diferencial de primer orden $\delta \vec{r}$ en vez de $d\vec{r}$ (usado para los desplazamientos reales). También puede ser un desplazamiento virtual una rotación de un cuerpo.

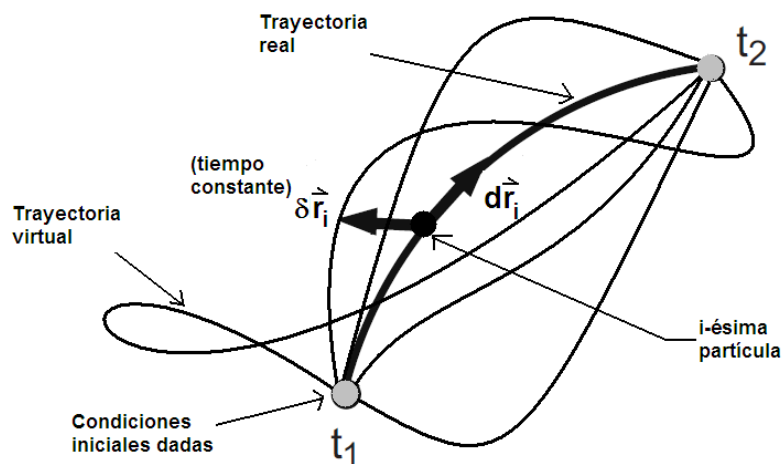


Figura (2.14): Desplazamiento real $d\vec{r}$ y desplazamiento virtual $\delta \vec{r}$.

Es importante hacer notar que si las ligaduras fueran dependientes del tiempo, al ser instantáneo el desplazamiento virtual, las ligaduras permanecen en el estado en que se encontraban en el instante del desplazamiento, por lo que los desplazamientos

virtuales compatibles con las ligaduras deben respetar las condiciones impuestas por estas en ese instante dado, es decir,

$$f_l(q_i, t) = 0 \quad \text{y} \quad f_l(q_i + \delta q_i, t) = 0$$

en el caso de ligaduras holónomas. Por otro lado, en un desplazamiento real transcurriría un tiempo dt en el cual las fuerzas y las ligaduras del sistema podrían variar.

La diferencia entre un desplazamiento virtual $\delta \vec{r}_i$ y un desplazamiento real $d\vec{r}_i$ es posible verla a partir de (2.29). En efecto,

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N$$

y como en los desplazamientos virtuales el tiempo no varía, entonces resulta que,

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.53)$$

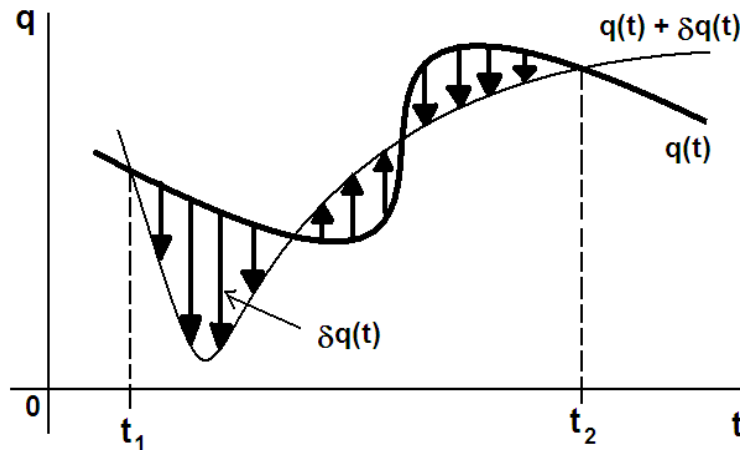


Figura (2.15): Coordenada real $q(t)$ y la coordenada desplazada virtualmente $q(t) + \delta q(t)$.

Por lo tanto, los desplazamientos virtuales son vectores tangenciales en el espacio de configuración. Los vectores $\delta \vec{r}_i$ apuntan a diferentes trayectorias geoméricamente posibles de la i -ésima partícula en un instante de tiempo dado. Por ejemplo, una determinada trayectoria de la i -ésima partícula puede llevarse a cabo partiendo de unas condiciones iniciales dadas, pero $\delta \vec{r}_i$ puede también apuntar hacia otras trayectorias imaginarias (ver figuras 2.14 y 2.15).

Matemáticamente, con el elemento δ se opera de la misma forma que como se hace con un diferencial. Por ejemplo,

$$\delta \tan x = \frac{\delta \tan x}{\delta x} \delta x = (\sec^2 x) \delta x \quad (2.54)$$

2.9.2. Trabajo virtual

El trabajo virtual se define de la siguiente manera:

El trabajo virtual δW realizado por una fuerza \vec{F} para desplazar una partícula un desplazamiento virtual $\delta \vec{r}$ viene dado por,

$$\delta W = \vec{F} \bullet \delta \vec{r} = F \delta r \cos \alpha \quad (2.55)$$

donde F y δr son los módulos de la fuerza \vec{F} y el desplazamiento virtual $\delta \vec{r}$ respectivamente, y α es el ángulo entre ambos vectores.

El trabajo virtual que efectúa un par \vec{C} durante un desplazamiento virtual $\delta \vec{\theta}$ del cuerpo viene dado por,

$$\delta W = \vec{C} \bullet \delta \vec{\theta} = C \delta \theta \cos \alpha \quad (2.56)$$

donde C y $\delta \theta$ son los módulos del par \vec{C} y el desplazamiento virtual $\delta \vec{\theta}$ respectivamente, y α es el ángulo entre ambos vectores.

Es importante hacer notar que, como los desplazamiento virtuales δr y $\delta \theta$ de las expresiones (2.55) y (2.56) corresponden a movimientos ficticios, dichas expresiones no se podrán integrar.

2.10. Algunos principios mecánicos básicos

2.10.1. Principio de los trabajos virtuales

Si un sistema está en equilibrio traslacional significa que es nula la resultante de las fuerzas que actúan sobre cada partícula, $\vec{F}_i = \vec{0}$. Es obvio que en tal caso se anulará también el producto escalar $\vec{F}_i \bullet \delta \vec{r}_i$ que es el trabajo virtual de la fuerza \vec{F}_i en el desplazamiento virtual $\delta \vec{r}_i$. La suma de estos productos nulos extendida a todas las partículas será,

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2.57)$$

Hasta ahora nada se ha dicho que posea un contenido físico nuevo. Desdóblese \vec{F}_i en la fuerza aplicada $\vec{F}_i^{(a)}$ y en la de ligadura $\vec{F}_i^{(l)}$,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(l)} \quad (2.58)$$

de modo que la expresión (2.57) adopte la forma,

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(l)} \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2.59)$$

Limítense ahora el estudio a aquellos sistemas en los que el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura es nulo, condición que se verifica en el sólido rígido y en gran número de diversas ligaduras.

A la ligadura cuya fuerza de ligadura correspondiente no realiza trabajo en los desplazamientos virtuales se le denomina *ligadura ideal*. La ligadura de sólido rígido, los contactos sin rozamiento y la rodadura lo son.

De este modo, si una partícula se ve obligada a moverse sobre una superficie, la fuerza de ligadura será perpendicular a la misma, en tanto que el desplazamiento virtual deberá ser tangente y, por lo tanto, el trabajo virtual será nulo. Lo anterior deja de cumplirse si existen fuerzas de rozamiento, por lo que se habrá de excluir tales fuerzas de la formulación. Entonces,

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2.60)$$

que suele denominarse *principio de los trabajos virtuales*.

El principio de los trabajos virtuales puede enunciarse de la manera siguiente,

En un sistema mecánico sometido a ligaduras lisas, es condición necesaria y suficiente para el equilibrio que el trabajo del conjunto de fuerzas aplicadas sobre dicho sistema, para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras, sea nulo.

Se debe tener presente, además, que:

1. Los coeficientes de $\delta \vec{r}_i$ no son ya nulos, es decir, en general $\vec{F}_i^{(a)} \neq \vec{0}$. En esencia, esto se debe a que las $\delta \vec{r}_i$ no son completamente independientes, sino que están relacionadas por las ligaduras. Es decir, para una fuerza total \vec{F}_i sobre un punto dado, se verifica que $\vec{F}_i \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \forall i$ (no sumado); sin embargo, para la fuerza

aplicada correspondiente $\vec{F}_i^{(a)}$ en general es $\vec{F}_i^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_i \neq 0$ En otras palabras, los términos individuales del trabajo virtual de las fuerzas aplicadas no tienen por qué anularse, aunque la suma sí es siempre nula $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_i = 0$.

- Las fuerzas aplicadas $\vec{F}_i^{(a)}$ deben incluir tanto las externas como las internas que, en un caso general, sí realizan trabajo virtual. Por el contrario, las fuerzas aplicadas $\vec{F}_i^{(a)}$ excluyen a las fuerzas de reacción, que no desarrollan trabajo virtual.

Por último, conviene notar que la ventaja del principio de los trabajos virtuales es que plantea las condiciones para el equilibrio global del sistema, sin emplear las reacciones de las ligaduras lisas, que no hace falta calcular en ningún momento. También pueden tratarse problemas con ligaduras no lisas, agregando a la expresión (2.60) el trabajo virtual correspondiente a las reacciones de las ligaduras no lisas, como si se tratase de fuerzas aplicadas. Dicho de otra forma, las únicas fuerzas de reacción que se eliminan de la expresión general del trabajo virtual son las de las ligaduras lisas.

Ejemplo 2.10

Una palanca (de masa despreciable) horizontal está en equilibrio estático bajo la aplicación de las fuerzas verticales \vec{F}_1 a una distancia ℓ_1 del punto de apoyo y \vec{F}_2 a una distancia ℓ_2 del mismo como se muestra en la figura 2.16. ¿Cuál es la condición sobre estas cantidades para que se mantenga el equilibrio?.

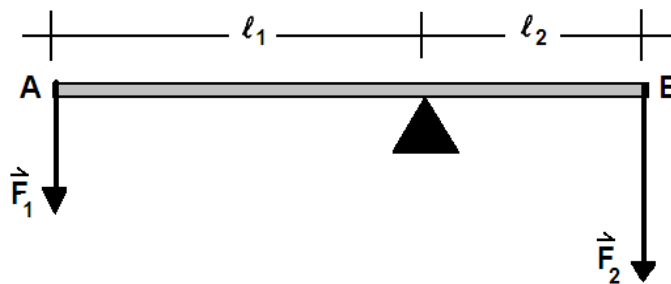


Figura (2.16): Palanca horizontal en equilibrio estático (Ejemplo 2.10).

Solución: Aquí las fuerzas aplicadas son \vec{F}_1 y \vec{F}_2 (no existen fuerzas inerciales). Supóngase que la palanca realiza un desplazamiento virtual, rotando en el sentido horario con respecto a su punto de apoyo un ángulo infinitesimal $\delta\theta$. Debido a esto, el extremo A se mueve hacia arriba una distancia $\ell_1\delta\theta$ y el extremo B se mueve hacia

abajo $\ell_2 \delta \theta$. Al aplicar el principio de los trabajos virtuales (2.60),

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= \vec{F}_1^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_2 = \underbrace{\vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1}_{\text{Trabajo virtual de } \vec{F}_1} + \underbrace{\vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_2}_{\text{Trabajo virtual de } \vec{F}_2} \\ &= F_1 \ell_1 \delta \theta \cos \pi + F_2 \ell_2 \delta \theta \cos 0 = 0 \end{aligned}$$

O,

$$F_1 \ell_1 = F_2 \ell_2$$

Ejemplo 2.11

Encuentre la relación entre las cantidades mostradas en la figura 2.17 para que el péndulo permanezca en equilibrio estático.

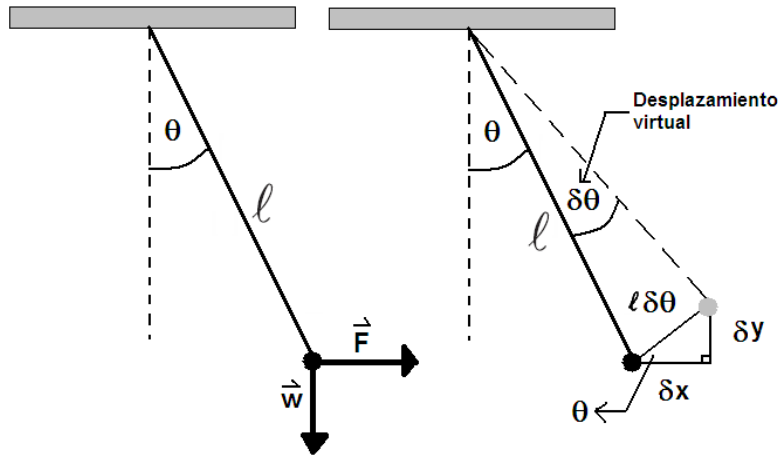


Figura (2.17): Péndulo en equilibrio estático (Ejemplo 2.11).

Solución: En este caso las fuerzas aplicadas son \vec{w} y \vec{F} (no existen fuerzas inerciales). Supóngase un desplazamiento virtual donde el ángulo θ se incrementa una pequeña cantidad $\delta \theta$. Es fácil encontrar, a partir de la figura 2.17, que los desplazamientos horizontal y vertical de la masa pendular para este incremento de θ vienen dados por,

$$\begin{aligned} \delta x &= \ell \delta \theta \cos \theta \\ \delta y &= \ell \delta \theta \sin \theta \end{aligned}$$

por lo tanto, a partir del principio de los trabajos virtuales (2.60),

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{F}_1^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_2 = 0$$

si $\vec{F}_1^{(a)} = \vec{F}$ y $\vec{F}_2^{(a)} = \vec{w}$ entonces,

$$\underbrace{\vec{F} \bullet \delta \vec{r}_1}_{\text{Trabajo virtual de } \vec{F}} + \underbrace{\vec{w} \bullet \delta \vec{r}_2}_{\text{Trabajo virtual de } \vec{w}} = F \delta \theta \cos \theta \cos 0 + w \delta \theta \sin \theta \cos \pi = 0$$

$$F = w \tan \theta$$

2.10.2. Principio de D'Alembert

Se extenderá el principio de los trabajos virtuales (que se refiere a sistemas estáticos) a sistemas dinámicos. Para realizar esto, se recurrirá a un artificio ideado inicialmente por Bernoulli⁵ y perfeccionado después por D'Alembert⁶.

La segunda ley de Newton establece que,

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i \tag{2.61}$$

de donde se tiene que,

$$\vec{\phi}_i = \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = \vec{0} \tag{2.62}$$

Es decir, que si cada partícula i estuviera sometida a una fuerza neta dada por $\vec{\phi}_i$ el sistema estaría en equilibrio estático instantáneamente (las partículas del sistema estarán en equilibrio bajo los efectos de la fuerza real \vec{F}_i y de otra "fuerza efectiva invertida" $-\dot{\vec{p}}_i$). Considerada desde este punto de vista, la dinámica se reduce a la estática.

La fuerza $\vec{\phi}_i$ debe cumplir con lo establecido en el principio de los trabajos virtuales (2.60), por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \tag{2.63}$$

entonces,

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \tag{2.64}$$

⁵Daniel Bernoulli (8 de febrero de 1700 - 17 de marzo de 1782) fue un matemático, estadístico, físico y médico holandés/suizo. Destacó no sólo en matemática pura, sino también en las aplicadas. Hizo importantes contribuciones en hidrodinámica y elasticidad.

⁶Jean le Rond D'Alembert (París, 16 de noviembre 1717 - ídem, 24 de octubre 1783) matemático y filósofo francés. Uno de los máximos exponentes del movimiento ilustrado, concibe las Ciencias como un todo integrado y herramienta para el progreso de la Humanidad.

pero de (2.58),

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(l)} \quad (2.65)$$

donde $\vec{F}_i^{(a)}$ es la fuerza aplicada y $\vec{F}_i^{(l)}$ es la de ligadura, entonces,

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(l)} - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(l)} \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2.66)$$

Ahora, considerando sistemas en los que el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura es nulo, resulta,

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2.67)$$

que suele llamarse *principio de D'Alembert*.

En la expresión (2.67) no aparecen las fuerzas de ligadura, por lo que cabe eliminar el superíndice a sin riesgo de ambigüedad, por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2.68)$$

El principio de D'Alembert puede enunciarse de la manera siguiente:

En un sistema mecánico sometido a ligaduras lisas, la evolución dinámica del sistema está determinada, como condición necesaria y suficiente, por la anulación en todo instante del trabajo de las fuerzas aplicadas más el trabajo de las fuerzas de inercia para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras.

Todos los cuerpos tienen una tendencia a permanecer en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme. Se puede pensar en esto como una resistencia inercial al cambio o, en otras palabras, en una *fuerza inercial*. La forma más conocida de la fuerza inercial es la fuerza centrífuga.

En el principio de D'Alembert la fuerza inercial $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \dot{\vec{p}}_i$ aparece en un pie de igualdad con la fuerza aplicada \vec{F}_i , reduciendo el problema dinámico a un problema estático.

Se debe tener presente, además, que:

1. Para una partícula dada (por ejemplo la i -ésima) sería, en general, $\left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i \neq 0$; es decir, que el sumando individual del trabajo virtual no se anula necesariamente, aunque la suma extendida a todo el sistema sí se anula siempre.

2. Aplica la misma observación realizada arriba para el principio de los trabajos virtuales sobre la naturaleza de las fuerzas $\vec{F}_i^{(a)}$.

Ejemplo 2.12

Encuentre la aceleración del sistema de dos masas unidas por una cuerda de longitud ℓ que pasa a través de una polea (cuyo diámetro es despreciable), como se muestra en la figura (2.18), usando el principio de D'Alembert.

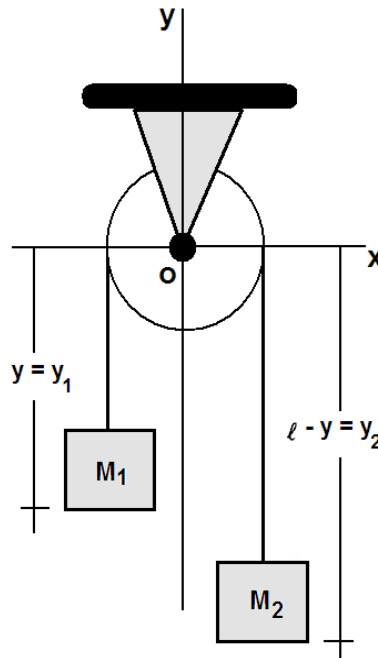


Figura (2.18): Sistema de dos masas unidas por una cuerda que pasa a través de una polea (Ejemplo 2.12).

Solución: Supóngase que la masa M_2 se mueve hacia abajo una distancia δy_2 , en consecuencia la masa M_1 se mueve hacia arriba una distancia δy_1 . Aquí las fuerzas aplicadas son los pesos de cada masa y las fuerzas inerciales son el producto de cada masa por su correspondiente aceleración. Al aplicar el principio de D'Alembert (2.68) resulta,

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i &= \left(\vec{F}_1 - \dot{\vec{p}}_1 \right) \cdot \delta \vec{r}_1 + \left(\vec{F}_2 - \dot{\vec{p}}_2 \right) \cdot \delta \vec{r}_2 \\ &= \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 - \dot{\vec{p}}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 - \dot{\vec{p}}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 \\ &= w_1 \delta y_1 \cos \pi - M_1 \ddot{y}_1 \delta y_1 + w_2 \delta y_2 \cos 0 - M_2 \ddot{y}_2 \delta y_2 = 0 \end{aligned}$$

pero $y_1 = y$ y $y_2 = \ell - y$ entonces,

$$\underbrace{M_1 g \delta y}_{\text{ya que } w_1 = -M_1 g} - M_1 \ddot{y} \delta y - \underbrace{-M_2 g \delta y}_{\text{ya que } w_2 = -M_2 g} - M_2 \ddot{y} \delta y = 0$$

O,

$$\ddot{y} = \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) g$$

resultado conocido del curso de Física elemental.

Ejemplo 2.13

Encuentre la aceleración del sistema que se muestra en la figura (2.19), usando el principio de D'Alembert.

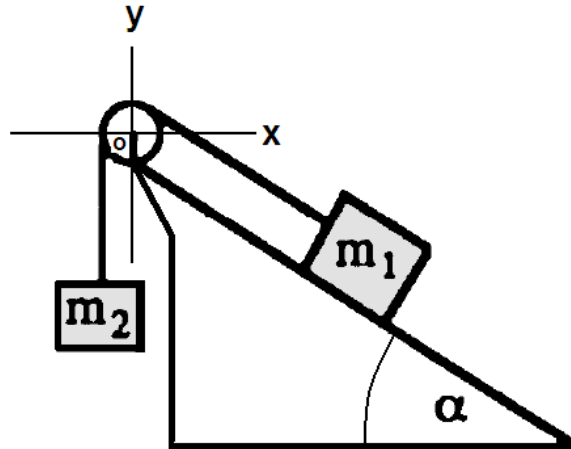


Figura (2.19): Dos masas unidas por una cuerda que pasa a través de una polea y donde una de las masas se desliza sobre un plano inclinado (Ejemplo 2.13).

Solución: En este caso, al igual que en el anterior, las fuerzas aplicadas son los pesos de cada masa y las fuerzas inerciales son el producto de cada masa por su correspondiente aceleración. Supóngase que la masa m_1 se mueve hacia abajo sobre el plano inclinado una distancia δs , entonces se desplazará una distancia horizontal y vertical dadas por,

$$\begin{aligned} x_1 &= s \cos \alpha \Rightarrow \delta x_1 = \delta s \cos \alpha \\ y_2 &= s \sin \alpha \Rightarrow \delta y_1 = \delta s \sin \alpha \end{aligned}$$

y m_2 ,

$$y_2 = s \Rightarrow \delta y_2 = \delta s$$

Al usar el principio de D'Alembert (2.68) resulta,

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i &= \left(\vec{F}_1 - \dot{\vec{p}}_1 \right) \cdot \delta \vec{r}_1 + \left(\vec{F}_2 - \dot{\vec{p}}_2 \right) \cdot \delta \vec{r}_2 + \left(\vec{F}_3 - \dot{\vec{p}}_3 \right) \cdot \delta \vec{r}_3 \\ &= \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 - \dot{\vec{p}}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 - \dot{\vec{p}}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot \delta \vec{r}_3 - \dot{\vec{p}}_3 \cdot \delta \vec{r}_3 \\ &= w_1 \delta x_1 \cos \frac{\pi}{2} - m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 \cos 0 + w_1 \delta y_1 \cos 0 - m_1 \ddot{y}_1 \delta y_1 \cos 0 \\ &\quad + w_2 \delta y_2 \cos \pi - m_2 \ddot{y}_2 \delta y_2 \cos 0 \\ &= -m_1 \ddot{x}_1 \delta s \cos \alpha + w_1 \delta s \sin \alpha - m_1 \ddot{y}_1 \delta s \sin \alpha - w_2 \delta s - m_2 \ddot{y}_2 \delta s = 0 \end{aligned}$$

pero, $\ddot{x}_1 = \ddot{s} \cos \alpha$, $\ddot{y}_1 = \ddot{s} \sin \alpha$, $y_2 = \ddot{s}$, $w_1 = -m_1 g$ y $w_2 = -m_2 g$, entonces,

$$-m_1 \ddot{s} \delta s \cos^2 \alpha - m_1 g \delta s \sin \alpha - m_1 \ddot{s} \delta s \sin^2 \alpha + m_2 g \delta s - m_2 \ddot{s} \delta s = 0$$

O,

$$\ddot{s} = \left(\frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

resultado también conocido del curso de Física elemental.

.....

El principio de D'Alembert (2.68) debe considerarse como un principio básico de la dinámica, alternativo a las leyes de Newton. Como caso particular, el principio de D'Alembert da lugar al principio de los trabajos virtuales estudiado en la sección anterior.

Al igual que en el principio de los trabajos virtuales, el principio de D'Alembert permite expresar la dinámica global del sistema en forma compacta, eliminando las fuerzas de reacción de las ligaduras lisas.

Cuando lo que se busca es precisamente calcular el valor de alguna reacción, es posible realizarlo mediante trabajos virtuales empleando un artificio. Para ello, se considera esta ligadura "liberada" y la fuerza de reacción como una fuerza aplicada normal, que tendría el efecto precisamente de la ligadura, lo cual permite tomar $\delta \vec{r}_i$ vulnerando la ligadura. De esta manera, la reacción correspondiente sí realiza trabajo virtual, y la expresión de los trabajos virtuales (2.60) o (2.68) permite calcular al final dicha reacción.

La importancia de los métodos basados en los trabajos virtuales radica en que permiten obtener formulaciones prácticas muy generales para la estática o la dinámica de sistemas con varias partículas (las ecuaciones de Lagrange, por ejemplo, que

serán estudiadas en el capítulo 5). Asimismo son la base de métodos numéricos, muy extendidos en la práctica, para la resolución de problemas con numerosos grados de libertad, como el *método de los elementos finitos*. Estos métodos son de una gran importancia en la Mecánica Computacional y en el cálculo de las estructuras.

2.10.3. Principio de Hamilton o de acción estacionaria

Antes de establecer el Principio de Hamilton es necesario aclarar la definición de *acción*,

En la Física, la acción S es la magnitud que expresa el producto de la energía implicada en un proceso por el tiempo que dura este proceso.

Se puede clasificar según el lapso de tiempo considerado en acción instantánea, acción promedio, etc. La acción es una magnitud física que no es directamente medible, aunque puede ser calculada a partir de cantidades medibles. Entre otras cosas, eso significa que no existe una escala absoluta de la acción, ni puede definirse sin ambigüedad un cero u origen de esta magnitud. La constante de Planck es el cuanto de acción.

La primera formulación del principio de Hamilton se debe a Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1744)⁷, que dijo que la "naturaleza es económica en todas sus acciones" (D'Alembert había formulado un año antes el principio que lleva su nombre generalizando las leyes de Newton). Entre los que desarrollaron la idea se incluyen Euler y Leibniz⁸. Anteriormente, Pierre de Fermat había introducido la idea de que los rayos de la luz, en situaciones ópticas tales como la refracción y la reflexión, seguían un principio de menor tiempo.

El Principio de Hamilton o de acción estacionaria condujo al desarrollo de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la Mecánica Clásica. Aunque sean al principio más difíciles de captar, tienen la ventaja que su cosmovisión es más transferible a los marcos de la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica que la de las leyes de Newton.

El principio de Hamilton puede enunciarse así:

⁷Pierre Louis Moreau de Maupertuis (7 de julio de 1698, Saint-Malo — 27 de julio de 1759) Filósofo, matemático y astrónomo francés.

⁸Gottfried Wilhelm von Leibniz (Leipzig, 1 de julio de 1646 - Hannover, 14 de noviembre de 1716) fue un filósofo, matemático, jurista, bibliotecario y político alemán. Fue uno de los grandes pensadores del siglo XVII y XVIII, y se le reconoce como el "último genio universal".

De todas las trayectorias posibles (compatibles con las ligaduras), que puede seguir un sistema dinámico para desplazarse de un punto a otro en un intervalo de tiempo determinado, la trayectoria verdaderamente seguida es aquella que hace mínima la acción dada por la integral temporal de la diferencia entre las energías cinética T y potencial U .

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt$$

CAPÍTULO 3

Cálculo variacional con fronteras fijas

El cálculo variacional constituye una herramienta matemática básica para estudiar la Mecánica de Lagrange y Hamilton que será desarrollada en la parte II de este texto. Este contenido es presentado como capítulo aparte debido a su importancia, haciéndose énfasis en aquellos aspectos de la teoría de variaciones que tienen una aplicación directa en los sistemas clásicos, omitiendo algunas pruebas de existencia. El objetivo primario será la determinación del camino que proporciona soluciones estacionarias (extremales), es decir, máximos y mínimos. Por ejemplo, la distancia más corta o el tiempo más corto entre dos puntos determinados. Otro ejemplo, bien conocido, es el Principio de Fermat: la luz viaja por el camino que le toma el menor tiempo.

Contents

3.1. Planteamiento del problema	78
3.2. Cálculo de extremales sin restricciones	82
3.2.1. Para una variable dependiente — Ecuación de Euler	82
3.2.2. Para múltiples variables dependientes — Ecuaciones de Euler - Lagrange	97
3.3. Cálculo de extremales con restricciones	102
3.3.1. Restricciones del tipo $g[y_i(x); x] = 0$ y $g[y_i(x), y'_i(x); x] = 0$	102
3.3.2. Restricciones del tipo isoperimétrico	107
3.4. La notación δ	114
3.5. Problemas	116

3.1. Planteamiento del problema

El problema básico del cálculo de variaciones es el de determinar la función $y(x)$ tal que la integral,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x); x] dx \quad (3.1)$$

tenga un valor estacionario, es decir, que resulte un valor extremal: un máximo o un mínimo.

A la función $y(x)$ así obtenida se le dará el nombre de *función extremal* o *camino extremal* de J . Aquí x_1 y x_2 son fijos (fronteras fijas), $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$ y el punto y coma separa la *variable independiente* x de la *variable dependiente* $y(x)$ y su derivada $y'(x)$. A J se le denomina *funcional*.

Se denomina funcional a una función que toma funciones como su argumento; es decir, una función cuyo dominio es un conjunto de funciones.

Este problema se diferencia del, más familiar, problema del cálculo de valores estacionarios o extremos en el cual se tiene que variar una sola variable o un conjunto de ellas, en que ahora lo que será variado es una función $y(x)$. Sin embargo, se puede aplicar el mismo criterio: cuando la integral (3.1) tiene un valor estacionario, debe permanecer sin cambios hasta el primer orden al hacer una pequeña variación en la función $y(x)$. Este es, justamente, el criterio que será usado más adelante para encontrar los valores estacionarios de (3.1).

Como en el cálculo diferencial, la anulación de la primera derivada es una condición necesaria pero no suficiente para un máximo o un mínimo; así en el cálculo variacional se habla de *primeras variaciones* y *segundas variaciones* de J para discriminar entre máximos, mínimos y puntos de inflexión. En este texto sólo se trabajará con la primera variación y se emplearán razonamientos geométricos o físicos para decidir si se ha encontrado un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

El funcional J (que se denomina también *integral funcional*) depende de la función $y(x)$, y los límites de integración x_1 y x_2 son fijos. No es necesario que los límites de integración sean considerados fijos y, si se permite que estos límites varíen, el problema se convierte en no sólo determinar $y(x)$, sino también x_1 y x_2 de manera tal que J tome un valor estacionario. La función $y(x)$ tiene entonces que ser variada hasta que se consiga un valor estacionario de J , queriéndose decir con esto que si $y = y(x)$ hace que J tome un valor mínimo, entonces cualquier *función vecina*, no importando lo cerca que esté de $y(x)$, hará que J se incremente.

Se da el nombre de *función vecina*, *función variada* o *camino vecino* de $y = y(x)$ a todas las posibles funciones $y = y(\alpha, x)$ con la condición de que, para $\alpha = 0$, $y(0, x) = y(x)$.

Como caso particular se puede considerar (ver figura 3.1),

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x) = y(x) + \alpha\eta(x) \quad (3.2)$$

donde la variación $\eta(x)$ es una función auxiliar que introduce la variación y que debe anularse en las fronteras del camino $x = x_1$ y $x = x_2$,

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (3.3)$$

debido a que la función variada $y(\alpha, x)$ debe ser idéntica a $y(x)$ en las fronteras del camino. Por simplicidad, se supondrá que $y(x)$ y $\eta(x)$ son continuas y no singulares en el intervalo $[x_1, x_2]$ con primera y segunda derivada continua en el mismo intervalo. Cualquier variación que cumpla con la condición (3.3) se denomina *variación admisible*.

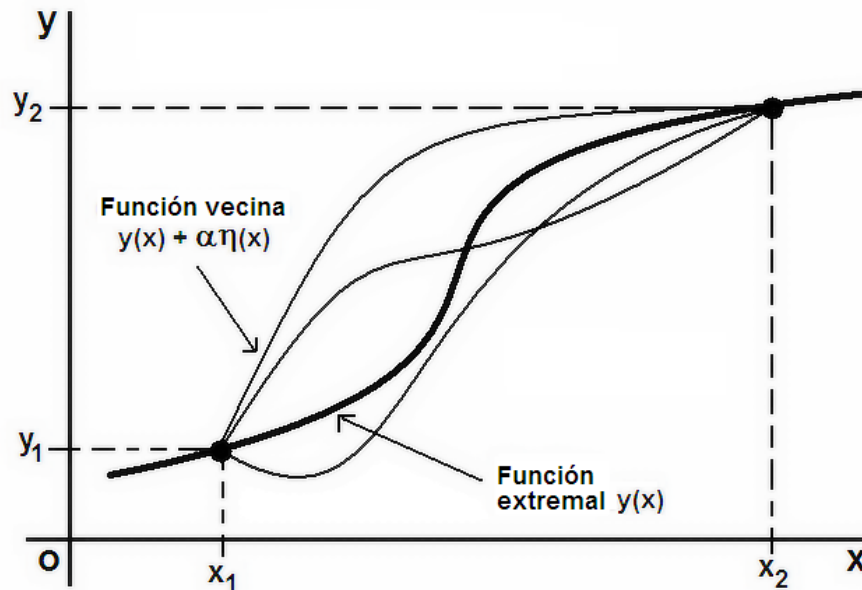


Figura (3.1): La función $y(x)$ es el camino que hace que el funcional J tome un valor extremal. Las funciones $y(\alpha, x) = y(x) + \alpha\eta(x)$ son las funciones vecinas donde $\eta(x)$ se anula en las fronteras del intervalo $[x_1, x_2]$.

Si se consideran funciones del tipo (3.2), la integral J se convierte en un funcional del parámetro α ,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x] dx \quad (3.4)$$

La condición fundamental para que esta integral tome un valor estacionario es que J sea independiente de α en primer orden a lo largo del camino resultando así el valor extremo ($\alpha = 0$), es decir,

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.5)$$

(primera variación) para todas las funciones $\eta(x)$. Esto es sólo una condición necesaria pero no es suficiente, como ya fue mencionado antes.

Ejemplo 3.1

Considerar la función $f = \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2$ donde $y(x) = 3x$. Sumar a $y(x)$ la función $\eta(x) = \text{Sen}(x) - \text{Cos}(x) + 1$, y (a) encontrar $J(\alpha)$ entre los límites de $x = 0$ y $x = 2\pi$, (b) mostrar que el valor estacionario de $J(\alpha)$ se da cuando $\alpha = 0$.

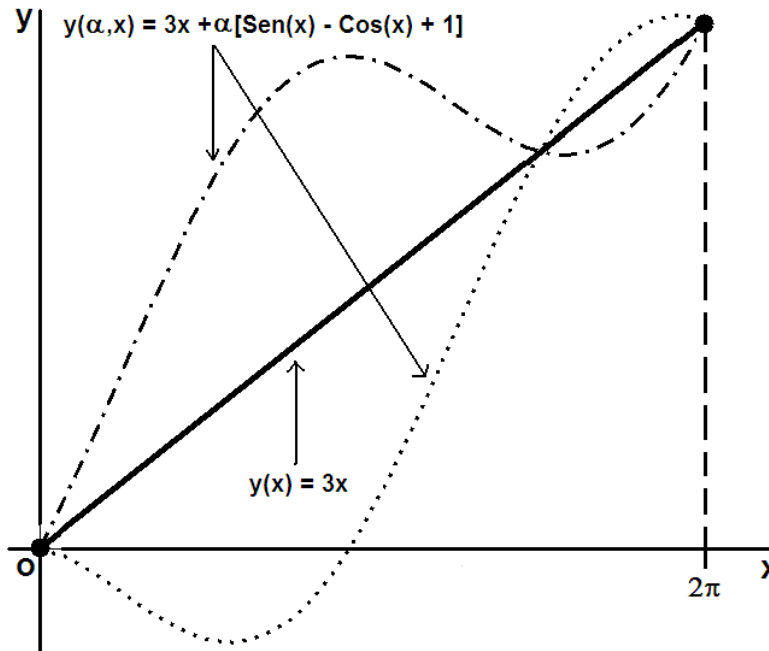


Figura (3.2): Función $y(x) = 3x$ entre los límites de $x = 0$ y $x = 2\pi$ y dos de sus variaciones $y(\alpha, x) = 3x + \alpha [\text{Sen}(x) - \text{Cos}(x) + 1]$ (Ejemplo 3.1).

Solución: Los caminos vecinos al camino estacionario vendrán dados por,

$$y(\alpha, x) = 3x + \alpha [\text{Sen}(x) - \text{Cos}(x) + 1] \quad (3.6)$$

Estos caminos están ilustrados en la figura 3.2 para $\alpha = 0$ y otros dos valores no nulos de la misma. Es claro que la función $\eta(x) = \text{Sen}(x) - \text{Cos}(x) + 1$ cumple con que se anule en las fronteras $x = 0$ y $x = 2\pi$. Para determinar $f(y, y'; x)$, se determina primero,

$$\frac{dy(\alpha, x)}{dx} = 3 + \alpha [\text{Cos}(x) + \text{Sen}(x)] \quad (3.7)$$

entonces,

$$f = \left(\frac{dy(\alpha, x)}{dx} \right)^2 = 9 + 6\alpha [\text{Cos}(x) + \text{Sen}(x)] + \alpha^2 [\text{Sen}(2x) + 1] \quad (3.8)$$

Ahora, a partir de (3.4), se obtiene,

$$J(\alpha) = \int_0^{2\pi} \{9 + 6\alpha [\text{Cos}(x) + \text{Sen}(x)] + \alpha^2 [\text{Sen}(2x) + 1]\} dx = 2\pi (9 + \alpha^2) \quad (3.9)$$

Así se puede ver que $J(\alpha)$ es siempre mayor que $J(0)$, no importando el valor (positivo o negativo) escogido para α . Es obvio que la condición descrita por la expresión (3.5) es también satisfecha.

Ejemplo 3.2

Considerar la función $f = \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2 + x$ donde $y(x) = x^2$. Sumar a $y(x)$ la función $\eta(x) = x^3 - x$, y (a) encontrar $J(\alpha)$ entre los límites de $x = -1$ y $x = 1$, (b) mostrar que el valor estacionario de $J(\alpha)$ se da cuando $\alpha = 0$.

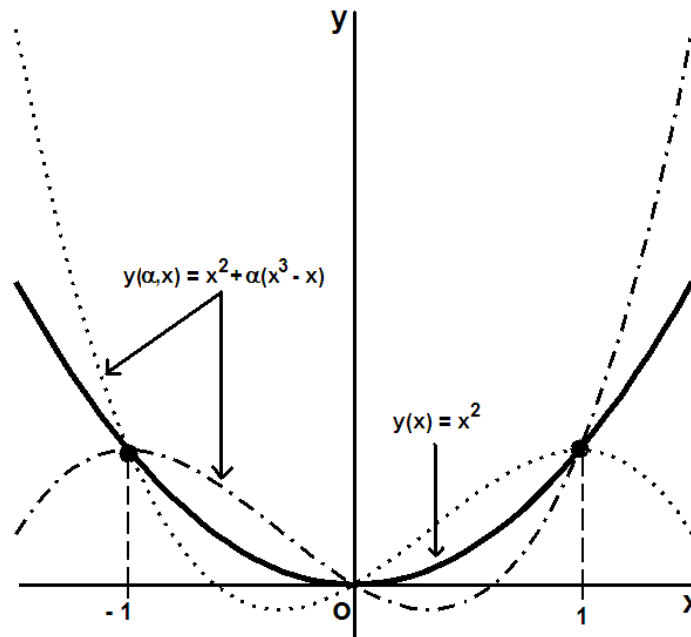


Figura (3.3): Función $y(x) = x^2$ entre los límites de $x = -1$ y $x = 1$ y dos de sus variaciones $y(\alpha, x) = x^2 + \alpha(x^3 - x)$ (Ejemplo 3.2).

Solución: Los caminos vecinos al camino estacionario vendrán dados por,

$$y(\alpha, x) = x^2 + \alpha(x^3 - x) \quad (3.10)$$

Estos caminos están ilustrados en la figura 3.3 para $\alpha = 0$ y otros dos valores no nulos de la misma. Es claro que la función $\eta(x) = x^3 - x$ cumple con que se anule en las fronteras $x = -1$ y $x = 1$. Para determinar $f(y, y'; x)$, se determina primero,

$$\frac{dy(\alpha, x)}{dx} = 2x + \alpha(3x^2 - 1) \tag{3.11}$$

entonces,

$$f = \left(\frac{dy(\alpha, x)}{dx} \right)^2 + x = [2x + \alpha(3x^2 - 1)]^2 + x \tag{3.12}$$

Ahora, a partir de (3.4), se obtiene,

$$J(\alpha) = \int_{-1}^1 \{ [2x + \alpha(3x^2 - 1)]^2 + x \} dx = 8 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\alpha^2 \right) \tag{3.13}$$

Así se puede ver que $J(\alpha)$ es siempre mayor que $J(0)$, no importando el valor (positivo o negativo) escogido para α . Es obvio que la condición descrita por la expresión (3.5) es también satisfecha.

.....

3.2. Cálculo de extremales sin restricciones

En esta sección se calcularán los valores extremos del funcional integral (3.1) pero sin restricciones adicionales a las ya impuestas por las condiciones de frontera $x = x_1$ y $x = x_2$.

3.2.1. Para una variable dependiente — Ecuación de Euler

Para determinar el resultado de la condición descrita por la expresión (3.5), se efectuará la derivada indicada en la expresión (3.4),

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(y, y'; x) dx \tag{3.14}$$

y puesto que los límites de integración son fijos, la derivación sólo afecta al integrando, por lo tanto,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx \tag{3.15}$$

El segundo término en el integrando de (3.15) puede ser escrito como,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{dy}{dx} \right) dx \tag{3.16}$$

que puede ser integrada por partes,

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3.17)$$

$$u = \frac{\partial f}{\partial y'}; \quad dv = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{dy}{dx} \right) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{dy}{dx} \right) dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \quad (3.18)$$

donde el término integrado se anula debido a que la derivada parcial de y con respecto a α en x_1 y x_2 debe anularse. Por lo tanto, la expresión (3.15) queda escrita como,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx \quad (3.19)$$

Al aplicar la condición (3.5), para encontrar así los valores estacionarios de $J(\alpha)$,

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) dx \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.20)$$

La derivada $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ en (3.19) es una función de x que es arbitraria excepto porque debe cumplir con las condiciones de continuidad y valores en las fronteras del camino. Por ejemplo, para el caso particular de la familia paramétrica de caminos variados dados por (3.2), es la función arbitraria $\eta(x)$.

Por otro lado, en el cálculo variacional existe el llamado *lema¹ fundamental del cálculo de variaciones* (ver apéndice C) que establece lo siguiente:

Si,

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x) \mu(x) dx = 0 \quad (3.21)$$

para todas las funciones arbitrarias $\mu(x)$ continuas hasta la segunda derivada (al menos), entonces $M(x)$ debe anularse idénticamente en el intervalo (x_1, x_2) .

Ahora bien, al aplicar el anterior lema a la expresión (3.20) resulta,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{Ecuación de Euler} \quad (3.22)$$

donde, ahora, y y y' son independientes de α . Este resultado es conocido como la *Ecuación de Euler*², que constituye la condición necesaria para que J tenga un valor estacionario.

¹Proposición que es preciso demostrar antes de establecer un teorema.

²Leonhard Paul Euler nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza, y murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia. Fue un respetado matemático y físico, y está considerado como el principal matemático del siglo XVIII y como uno de los más grandes de todos los tiempos.

Ejemplo 3.3

Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx$$

Solución: Aquí,

$$f = y^2 + y'^2 + 2ye^x \quad (3.23)$$

Ahora bien, al sustituir (3.23) en la ecuación de Euler (3.22) resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (y^2 + y'^2 + 2ye^x) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} (y^2 + y'^2 + 2ye^x) \right] &= 0 \\ y + e^x - y'' &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

La expresión (3.24) es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes, cuya solución es,

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$$

Ejemplo 3.4

Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_1^2 \frac{y'^2}{4x} dx$$

que satisfagan las condiciones de frontera $y(1) = 5$ y $y(2) = 11$.

Solución: Aquí,

$$f = \frac{y'^2}{4x} \quad (3.25)$$

Ahora bien, al sustituir (3.25) en la ecuación de Euler (3.22) resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y'^2}{4x} \right) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{y'^2}{4x} \right) \right] &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{x} \right) &= 0 \end{aligned}$$

que al integrarse produce,

$$y' = c_1 x \quad (3.26)$$

Al integrar (3.26) resulta,

$$y = \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 \quad (3.27)$$

Si ahora se aplican las condiciones de frontera sobre (3.27) resulta,

$$\text{Para } y(1) = 5: \frac{c_1}{2} + c_2 = 5$$

$$\text{Para } y(2) = 11: 2c_1 + c_2 = 11$$

de las cuales se obtiene $c_1 = 4$ y $c_2 = 3$. Por lo tanto, al sustituir estos resultados en (3.27) se obtiene finalmente,

$$y = 2x^2 + 3 \tag{3.28}$$

que es una parábola.

Queda ahora por responder la pregunta: ¿la parábola (3.28) maximiza o minimiza a J ? La extremal hallada puede maximizar, minimizar o no hacer ninguna de las dos cosas. Con la teoría mostrada en este texto no es posible, en general, decidir qué es lo que ocurre. Sin embargo existen unos pocos casos simples (este ejemplo es uno de ellos) donde se puede decidir muy fácilmente.

Si ψ es cualquier variación admisible (no necesariamente pequeña), entonces la variación que sobre J hace ψ viene dada por ($y_e = y$ extremal = $2x^2 + 3$),

$$\begin{aligned} J(y_e + \psi) - J(y_e) &= \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{1}{x} \left[\frac{d}{dx} (y_e + \psi) \right]^2 dx - \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{1}{x} \left[\frac{d}{dx} (y_e) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{(4x + \psi')^2}{x} dx - 4 \int_1^2 x dx \\ &= 2\psi \Big|_1^2 + \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{\psi'^2}{x} dx \end{aligned}$$

y como ψ , por ser una variación admisible, debe satisfacer $\psi(1) = 0$ y $\psi(2) = 0$; se tiene que,

$$J(y_e + \psi) - J(y_e) = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{\psi'^2}{x} dx \geq 0$$

puesto que la integral de una función positiva debe ser positiva (x es positiva en el intervalo de integración). Así (3.28) proporciona realmente un mínimo global de J . El mínimo global de J viene dado al sustituir (3.28) en J y evaluar la integral resultante. En efecto,

$$J(2x^2 + 3) = \int_1^2 \frac{1}{4x} \left[\frac{d}{dx} (2x^2 + 3) \right]^2 dx = 6$$

Ejemplo 3.5

¿En qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional,

$$J = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx$$

sabiendo que $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$?

Solución: Aquí,

$$f = y'^2 + 12xy \tag{3.29}$$

Ahora bien, al sustituir (3.29) en la ecuación de Euler (3.22) resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (y'^2 + 12xy) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} (y'^2 + 12xy) \right] &= 0 \\ 6x - y'' &= 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

La ecuación diferencial (3.30) tiene como solución,

$$y = x^3 + c_1x + c_2 \tag{3.31}$$

Para hallar las constantes c_1 y c_2 se aplican sobre (3.31) las condiciones de frontera dadas. En efecto,

$$\text{Para } y(0) = 0: \quad c_2 = 0 \tag{3.32}$$

$$\text{Para } y(1) = 1: \quad 1 + c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 0 \tag{3.33}$$

Por último, al sustituir (3.32) y (3.33) en (3.31) resulta,

$$y = x^3$$

Ejemplo 3.6

El problema de la braquistócrona³. Considérese una partícula que se mueve en un campo de fuerza constante \vec{F} (el campo gravitacional cerca de la superficie de la Tierra, por ejemplo), iniciando desde el reposo en algún punto $P_1 = (x_1, y_1)$ hasta otro punto más bajo $P_2 = (x_2, y_2)$. Encontrar el camino que permite a la partícula moverse entre ambos puntos en el menor tiempo posible.

Solución: Si se coloca el origen del sistema de coordenadas de referencia en el punto donde la partícula comienza a moverse, se tiene que $P_1 = (x_1, y_1) = (0, 0)$. Además, supóngase que el campo de fuerza está dirigido a lo largo del eje x (ver figura 3.4). Puesto que la fuerza sobre la partícula es constante y si se ignora la posibilidad de fricción, el campo es conservativo, es decir, la energía total E de la partícula es constante. En el punto P_1 , $E = T + U = 0$. La energía cinética es $T = \frac{1}{2}mv^2$ y la energía potencial es $U = -mgx$, donde g es la aceleración originada por el campo de fuerza. Así,

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - mgx = 0 \tag{3.34}$$

³Del griego Braquistos = "el más breve" y Cronos= tiempo.

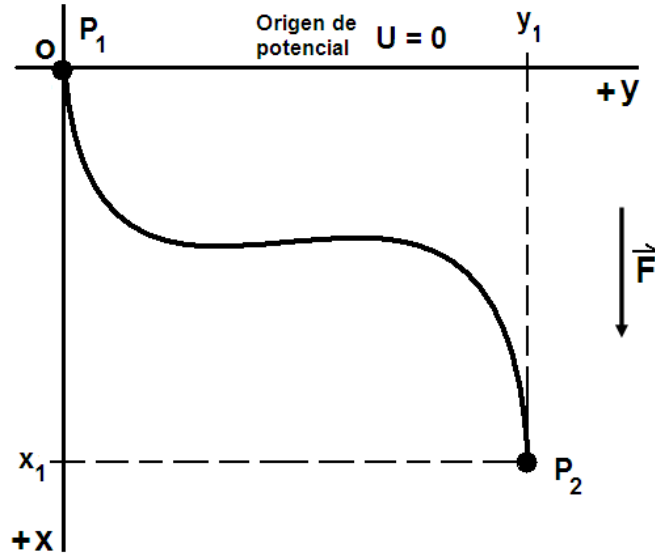


Figura (3.4): El problema de la braquistócrona (Ejemplo 3.6).

resultando,

$$v = \sqrt{2gx} \quad (3.35)$$

Por otro lado, se sabe que,

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (3.36)$$

entonces,

$$t = \int_{(x_1, y_1)=(0,0)}^{(x_2, y_2)} \frac{ds}{v} = \int \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{(2gx)^{\frac{1}{2}}} = \int_{x_1=0}^{x_2} \left(\frac{1 + y'^2}{2gx} \right)^{\frac{1}{2}} dx \quad (3.37)$$

donde se ha supuesto que la partícula parte en $t = 0$.

El tiempo transcurrido durante todo el movimiento es la cantidad que se quiere minimizar, por lo tanto, la función f puede ser identificada como,

$$f = \left(\frac{1 + y'^2}{2gx} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.38)$$

entonces de la ecuación de Euler (3.22) resulta,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1 + y'^2}{2gx} \right)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \left[\left(\frac{1 + y'^2}{2gx} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} = 0$$

o,

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \left[\left(\frac{1 + y'^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} = 0 \quad (3.39)$$

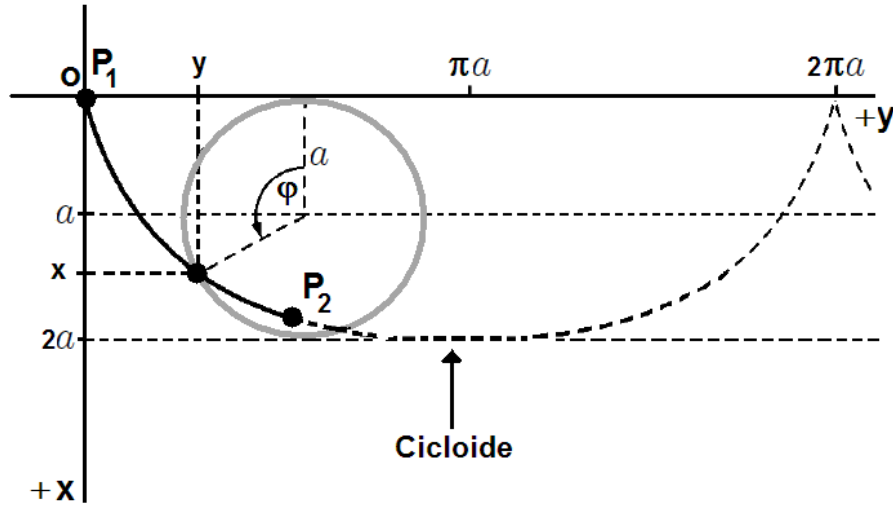


Figura (3.5): Camino resultante para que la partícula se mueva desde $(x_1, y_1) = (0, 0)$ hasta (x_2, y_2) en el menor tiempo posible (Ejemplo 3.6).

que al ser integrada resulta en,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c_1, c_1 = \text{constante} \quad (3.40)$$

y desarrollando la derivada parcial,

$$\frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = c_1^2 \quad (3.41)$$

que puede escribirse en la forma,

$$y = \int \left(\frac{x}{\frac{1}{c_1^2} - x} \right)^{\frac{1}{2}} dx \quad (3.42)$$

Al hacer el cambio de variable,

$$x = \frac{1}{2c_1^2} (1 - \text{Cos } \varphi) \quad (3.43)$$

$$dx = \frac{1}{2c_1^2} \text{Sen } \varphi d\varphi$$

resulta,

$$y = \frac{1}{2c_1^2} \int (1 - \text{Cos } \varphi) d\varphi = \frac{1}{2c_1} (\varphi - \text{Sen } \varphi) + c_2, c_2 = \text{constante}$$

de aquí que, al hacer la constante de integración c_2 igual a cero para cumplir con el requerimiento de que $(0, 0)$ es el punto de partida del movimiento,

$$y = \frac{1}{2c_1} (\varphi - \text{Sen } \varphi) \quad (3.44)$$

por lo tanto, en conjunto, las expresiones (3.43) y (3.44),

$$\left. \begin{aligned} x &= a(1 - \cos \varphi) \\ y &= a(\varphi - \sin \varphi) \end{aligned} \right\}, a = \frac{1}{2c_1^2} \quad (3.45)$$

son las ecuaciones paramétricas para una cicloide que pasa por el origen (ver figura 3.5) y la constante a debe ser ajustada para permitir que la cicloide pase a través del punto de llegada $P_2 = (x_2, y_2)$ del movimiento de la partícula.

La solución del problema de la braquistocrona resultó, en verdad, en el camino que debe seguir la partícula para que el tiempo sea mínimo.

Ejemplo 3.7

Distancia más corta entre dos puntos del plano. Encuentre la ecuación de la línea que proporciona la distancia más corta entre dos puntos en un plano (ver figura 3.6).

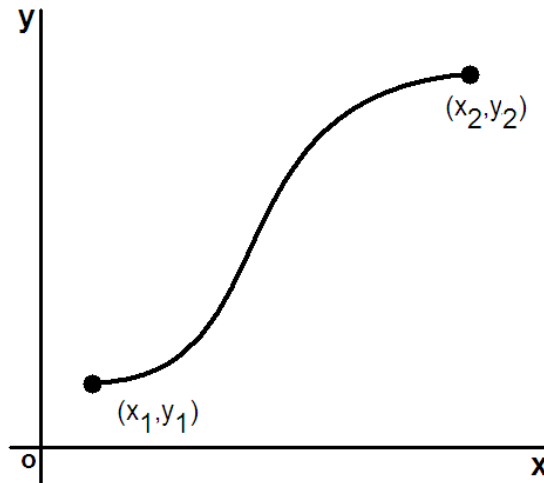


Figura (3.6): Distancia más corta entre dos puntos del plano (Ejemplo 3.7).

Solución: El elemento de línea en un plano viene dado por,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

por lo tanto, la longitud total de cualquier curva que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) vendrá dada por,

$$s = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \int_{x_1}^{x_2} (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (3.47)$$

que es precisamente la cantidad que se quiere minimizar.. Es fácil notar que aquí,

$$f = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.48}$$

de aquí que,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.49}$$

Ahora, al usar la ecuación de Euler (3.22) resulta,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0 \tag{3.50}$$

o bien,

$$\frac{y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} = c_1 \tag{3.51}$$

donde c_1 es una constante de integración y de la cual se puede escribir,

$$y' = c_2 \tag{3.52}$$

con,

$$c_2 = \frac{c_1}{(1 - c_1^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Finalmente, al integrar (3.52), resulta,

$$y = c_2x + c_3 \tag{3.53}$$

donde c_3 es otra constante de integración. En rigor, sólo se ha probado que la recta es una trayectoria que hace que (3.47) dé un valor estacionario, aunque en este problema es obvio que se trata de un mínimo. Las constantes de integración c_2 y c_3 quedan determinadas por la condición de que la curva pase por los dos puntos fronteras (x_1, y_1) y (x_2, y_2) .

Ejemplo 3.8

Superficie mínima de revolución. Considerar la superficie generada al hacer girar una línea que une dos puntos fijos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en torno a un eje coplanar con los dos puntos. Determinar la ecuación de la línea que une dichos puntos de manera tal que el área de la superficie generada (el área de la superficie de revolución) sea mínima.

Solución: Supóngase que la curva que pasa a través de (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es trasladada en torno al eje y , coplanar con los dos puntos. Para calcular el área total de la

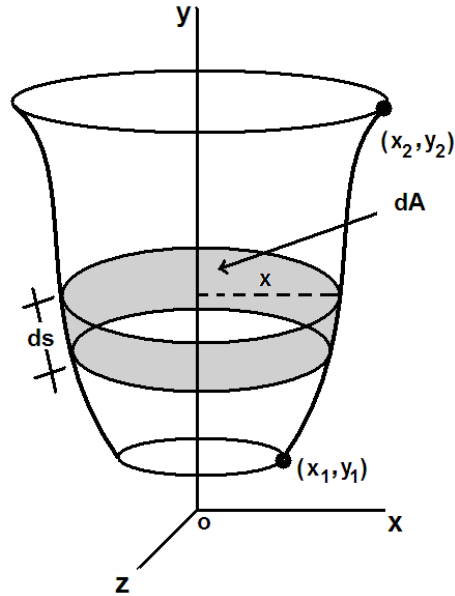


Figura (3.7): Superficie mínima de revolución (Ejemplo 3.8).

superficie de revolución, primero se encuentra el área dA de una cinta (ver figura 3.7), de manera que,

$$dA = 2\pi x ds = 2\pi x (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.54)$$

$$A = 2\pi \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} x (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (3.55)$$

Aquí,

$$f = 2\pi x (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.56)$$

y como,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

por lo tanto, de (3.22) resulta,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0$$

$$\frac{xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} = c_1, c_1 = \text{constante} \quad (3.57)$$

de aquí que,

$$y' = \frac{a}{(x^2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y = c_1 \int \frac{dx}{(x^2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.58)$$

cuya solución es,

$$y = c_1 \operatorname{Cosh}^{-1} \left(\frac{x}{c_1} \right) + c_2 \quad (3.59)$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración que pueden ser determinadas requiriendo que la curva pase por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . La expresión (3.59) puede ser escrita también como,

$$x = c_1 \operatorname{Cosh} \left(\frac{y - c_2}{c_1} \right) \quad (3.60)$$

la cual es más fácil de reconocer como la ecuación de la catenaria, la curva que forma una cuerda flexible que cuelga entre dos puntos de soporte fijos.

.....

Una segunda forma de la ecuación de Euler puede ser obtenida a partir de la ecuación de Euler (3.22) que será conveniente para funciones f que no dependen explícitamente de x , es decir, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Nótese primero que para cualquier función $f(y, y'; x)$ se tiene,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} = y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.61)$$

También,

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \quad (3.62)$$

o, sustituyendo $y'' \frac{\partial f}{\partial y'}$ de (3.61),

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} + y' \left[y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \right] \quad (3.63)$$

donde el último término se anula debido a la ecuación de Euler (3.22). Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (3.64)$$

que a menudo se le llama *segunda forma de la ecuación de Euler*. Se puede usar esta ecuación en casos en los cuales f no depende explícitamente de x , de manera que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Entonces,

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c, \quad c = \text{constante} \quad \left(\text{para } \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \right) \quad (3.65)$$

que es la llamada *forma integrada de la ecuación de Euler*.

.....

Ejemplo 3.9

Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{y'^2 + 1}}{y} dx$$

Solución: Aquí,

$$f = \frac{\sqrt{y'^2 + 1}}{y} \tag{3.66}$$

que no depende explícitamente de x , por lo tanto, es posible usar la forma integrada de la ecuación de Euler. En efecto, al sustituir (3.66) en (3.65) resulta,

$$\frac{\sqrt{y'^2 + 1}}{y} - y' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\sqrt{y'^2 + 1}}{y} \right) = c$$

$$\frac{1}{y\sqrt{y'^2 + 1}} = c$$

o,

$$y' = \pm \frac{1}{cy} \sqrt{1 - c^2 y^2} \tag{3.67}$$

que constituyen un par de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de variables separables. Al integrar (3.67) resulta,

$$(x - c_1)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$$

donde c_1 es una constante de integración. Por lo tanto, las curvas extremales de la funcional dada son una familia de circunferencias.

Ejemplo 3.10

Se tiene una película de jabón entre dos anillos paralelos concéntricos de radio a , separados por una distancia $2d$ (ver figura 3.8). Encuentre la forma adquirida por la película de jabón.

Solución: La forma que adquirirá la película de jabón será aquella que minimice la energía del sistema (todo sistema al tender a la estabilidad, tiende a su estado de mínima energía), por lo tanto este estado debe corresponder a aquél donde la superficie de la película de jabón sea la mínima.

Es fácil ver de la figura 3.8 que las condiciones de frontera vienen dadas por $y(d) = a$ y $y(-d) = a$. El elemento de superficie de la película de jabón vendrá dado por,

$$dS = 2\pi y ds$$

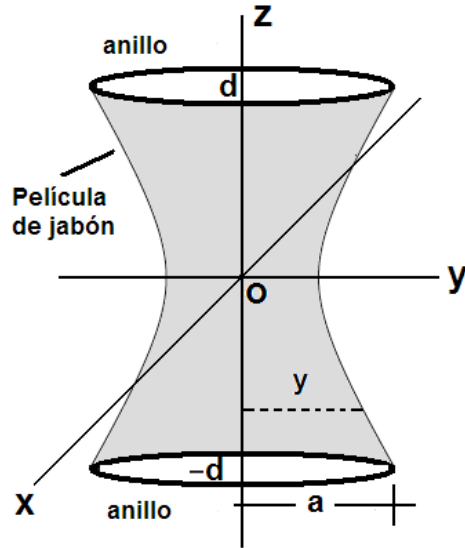


Figura (3.8): Película de jabón entre dos anillos concéntricos de radio a y separados por una distancia $2d$ (Ejemplo 3.10).

Y,

$$ds^2 = dy^2 + dz^2 \Rightarrow ds = \sqrt{y'^2 + 1} dz$$

con $y' = \frac{dy}{dz}$. Por lo tanto,

$$S = 2\pi \int_{-d}^d y \sqrt{y'^2 + 1} dz \quad (3.68)$$

que es la cantidad que se quiere minimizar. En (3.68) es posible identificar,

$$f = 2\pi y \sqrt{y'^2 + 1} \quad (3.69)$$

Ahora bien, como f no depende de la variable independiente z , entonces es posible usar la forma integrada (3.65) de la ecuación de Euler. Entonces,

$$2\pi y \sqrt{y'^2 + 1} - 2\pi y' \frac{\partial}{\partial y'} (y \sqrt{y'^2 + 1}) = c$$

O,

$$y'^2 = \frac{y^2}{c_1^2} - 1 \quad (3.70)$$

con $c_1 = \frac{c}{2\pi}$. Al introducir el cambio de variable,

$$y = c_1 \text{Cosh } u \quad (3.71)$$

en (3.70) e integrando resulta,

$$\frac{y}{c_1} = \text{Cosh} \left(\frac{z}{c_1} + c_2 \right) \quad (3.72)$$

con c_2 una constante de integración.

Las constantes c_1 y c_2 se calculan aplicando las condiciones de frontera $y(d) = a$ y $y(-d) = a$ sobre (3.72). En efecto,

$$\begin{aligned} \text{Para } y(d) = a: \quad \frac{a}{c_1} &= \text{Cosh} \left(\frac{d}{c_1} + c_2 \right) \\ \text{Para } y(-d) = a: \quad \frac{a}{c_1} &= \text{Cosh} \left(-\frac{d}{c_1} + c_2 \right) \end{aligned}$$

de las cuales se deduce que $c_2 = 0$ ya que $d \neq 0$. La constante c_1 vendrá dada por,

$$\frac{a}{c_1} = \text{Cosh} \left(\frac{d}{c_1} \right) \tag{3.73}$$

que es una ecuación trascendental para dicha constante.

Por último (3.72) se puede escribir como,

$$y = c_1 \text{Cosh} \left(\frac{z}{c_1} \right) \tag{3.74}$$

con c_1 dada por (3.73). La expresión (3.74) es la ecuación de una catenaria, por lo tanto, en perfil la película de jabón toma esta forma, con una distancia mínima al eje dada por c_1 (verificarlo).

Ejemplo 3.11

La geodésica. La geodésica es una línea que representa el camino más corto entre dos puntos cuando el camino está restringido a una superficie en particular. Encuentre la geodésica sobre una esfera de radio R .

Solución: En la figura 3.9 se muestra la situación planteada en el enunciado. El elemento de longitud (elemento de línea) en coordenadas esféricas viene dado por,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{Sen}^2 \theta d\varphi^2 \tag{3.75}$$

y para una esfera de radio $r = R$ se convierte en,

$$ds = R (d\theta^2 + \text{Sen}^2 \theta d\varphi^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.76}$$

que proporciona la distancia entre dos puntos sobre la esfera de radio R . De esta forma, la distancia s entre los puntos 1 y 2 viene dada por,

$$s = R \int_1^2 \left[\left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 + \text{Sen}^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} d\varphi \tag{3.77}$$

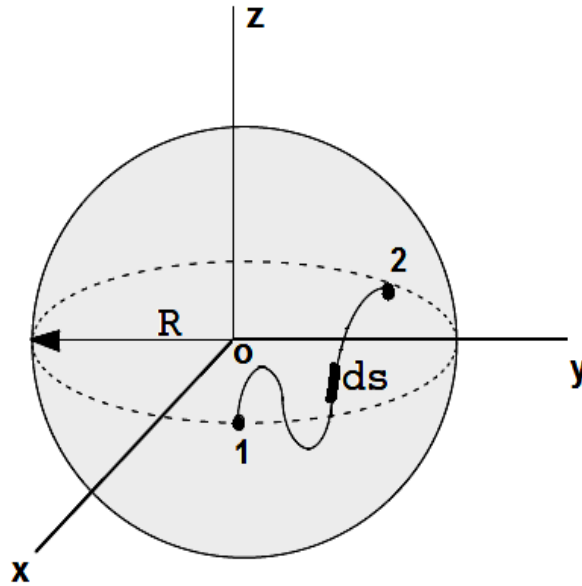


Figura (3.9): Geodésicas sobre una esfera (Ejemplo 3.11).

y si s debe ser un mínimo, se puede identificar f como,

$$f = R (\theta'^2 + \text{Sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (3.78)$$

donde $\theta' = \frac{d\theta}{d\varphi}$.

Ahora, puesto que $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$, se puede usar la forma integrada de la ecuación de Euler (3.65) obteniéndose,

$$(\theta'^2 + \text{Sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}} - \theta' \frac{\partial}{\partial \theta'} \left[(\theta'^2 + \text{Sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \right] = C, \text{ con } C = \frac{c}{R} \quad (3.79)$$

$$\text{Sen}^2 \theta = C (\theta'^2 + \text{Sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (3.80)$$

de la cual resulta,

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{C \csc^2 \theta}{(1 - C^2 \csc^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.81)$$

y al integrar,

$$\varphi = \text{Sen}^{-1} \left(\frac{\cot \theta}{\beta} \right) + \alpha \quad (3.82)$$

donde α es la constante de integración y $\beta^2 = \frac{(1-C^2)}{C^2}$ que, al reescribirla, produce,

$$\cot \theta = \beta \text{Sen} (\varphi - \alpha) \quad (3.83)$$

Para interpretar este resultado, se transforma (3.83) a coordenadas rectangulares. Con este fin, multiplicando (3.83) por $R \text{ Sen } \theta$ se obtiene,

$$\underbrace{(\beta \text{ Cos } \alpha) R \text{ Sen } \theta \text{ Sen } \varphi - (\beta \text{ Sen } \alpha) R \text{ Sen } \theta \text{ Cos } \varphi}_{\text{Aplicando la identidad } \text{Sen}(\varphi - \alpha) = \text{Sen } \varphi \text{ Cos } \alpha + \text{Cos } \varphi \text{ Sen } \alpha} = R \text{ Cos } \theta \quad (3.84)$$

y puesto que α y β son constantes, se puede escribir,

$$\beta \text{ Cos } \alpha = A, \quad \beta \text{ Sen } \alpha = B \quad (3.85)$$

de modo que (3.84) queda escrita como,

$$A (R \text{ Sen } \theta \text{ Sen } \varphi) - B (R \text{ Sen } \theta \text{ Cos } \varphi) = (R \text{ Cos } \theta) \quad (3.86)$$

Las cantidades en los paréntesis son justo las expresiones para y , x y z respectivamente, en coordenadas esféricas, por lo tanto resulta,

$$Ay - Bx = z \quad (3.87)$$

que es la ecuación de un plano que pasa a través del centro de la esfera. Por lo tanto la geodésica sobre una esfera es el camino que el plano (3.87) en la intersección con la esfera, el círculo mayor. Nótese que el círculo mayor es el máximo a la vez que es la mínima distancia en "línea recta" entre dos puntos sobre la superficie de una esfera.

3.2.2. Para múltiples variables dependientes — Ecuaciones de Euler - Lagrange

La ecuación de Euler encontrada en la sección 3.2.1 es la solución del problema variacional en el cual se deseaba determinar la única función $y(x)$ tal que la integral del funcional f (3.1) tome un valor estacionario. El caso más comúnmente encontrado en Mecánica es aquél en el cual f es un funcional de múltiples variables dependientes, es decir,

$$f = f [y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), \dots; x] \quad (3.88)$$

o simplemente,

$$f = f [y_i(x), y_i'(x); x], \text{ con } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.89)$$

En este caso, el problema variacional se convierte en encontrar las funciones $y_i(x)$ que hacen que,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f [y_i(x), y_i'(x); x] dx \quad (3.90)$$

tome un valor estacionario. Siguiendo un procedimiento análogo al mostrado en la sección 3.2.1 resulta,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \right] \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} dx \quad (3.91)$$

Ahora, al aplicar la condición (3.5), para encontrar así los valores estacionarios de $J(\alpha)$,

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \right] \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} dx \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.92)$$

y al aplicar el lema fundamental del cálculo de variaciones (3.21),

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) = 0, \text{ con } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.93)$$

que son las ecuaciones de Euler para un funcional f de múltiple variables dependientes y conforman un conjunto de n ecuaciones diferenciales. Se les conoce también como *ecuaciones de Euler-Lagrange*.

Posteriores generalizaciones del problema variacional fundamental son posibles fácilmente. Así se puede suponer que f es un funcional de las derivadas de orden superior $y'', y''', \text{ etc.}$, resultando en ecuaciones diferentes a las (3.93). O es posible extenderlo a casos donde hay múltiples parámetros x_j convirtiéndose la integral (3.1) en múltiple, donde f involucraría también como variables derivadas de y_i con respecto a cada uno de los parámetros x_j . Finalmente, es posible considerar variaciones en las cuales los puntos fronteras del camino no sean fijos.

Ejemplo 3.12

Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx$$

sabiendo que $y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1$ y $z(0) = 0, z(\frac{\pi}{2}) = -1$.

Solución: Aquí,

$$f = y'^2 + z'^2 + 2yz \quad (3.94)$$

Ahora bien, f tiene dos variables y y z , por lo tanto, se debe escribir una ecuación de Euler para cada una de estas variables. Al sustituir (3.94) en las ecuaciones de Euler (3.93) (para $i = 1, 2$ con $y_1 = y$ y $y_2 = z$) resulta,

$$\text{Para } i = 1: \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (y'^2 + z'^2 + 2yz) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} (y'^2 + z'^2 + 2yz) \right] &= 0 \\ z - y'' &= 0 \end{aligned} \quad (3.95)$$

y,

$$\text{Para } i = 2: \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (y'^2 + z'^2 + 2yz) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial z'} (y'^2 + z'^2 + 2yz) \right] &= 0 \\ y - z'' &= 0 \end{aligned} \quad (3.96)$$

Si entre (3.95) y (3.96) se elimina z resulta,

$$y^{IV} - y = 0$$

que al integrarla produce,

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \text{Cos } x + c_4 \text{Sen } x \quad (3.97)$$

Para encontrar z , se sustituye (3.97) en (3.95) resultando,

$$z = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \text{Cos } x - c_4 \text{Sen } x \quad (3.98)$$

Por último, al aplicar las condiciones de frontera sobre (3.97) en (3.98) resulta,

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0 \quad \text{y} \quad c_4 = 1 \quad (3.99)$$

por lo tanto, sustituyendo (3.99) en (3.97) y (3.98),

$$y = \text{Sen } x \quad \text{y} \quad z = -\text{Sen } x$$

Ejemplo 3.13

Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_0^1 (y'^2 + z'^2) dx$$

sabiendo que $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ y $z(0) = 0$, $z(1) = -2$.

Solución: Aquí,

$$f = y'^2 + z'^2 \quad (3.100)$$

Ahora bien, f tiene dos variables y y z , por lo tanto, se debe escribir una ecuación de Euler para cada una de estas variables. Al sustituir (3.100) en las ecuaciones de Euler (3.93) (para $i = 1, 2$ con $y_1 = y$ y $y_2 = z$) resulta,

$$\text{Para } i = 1: \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (y'^2 + z'^2) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} (y'^2 + z'^2) \right] &= 0 \\ y'' &= 0 \end{aligned} \tag{3.101}$$

y,

$$\text{Para } i = 2: \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (y'^2 + z'^2) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial z'} (y'^2 + z'^2) \right] &= 0 \\ z'' &= 0 \end{aligned} \tag{3.102}$$

Las soluciones de (3.101) y (3.102) son respectivamente,

$$y = c_1 x + c_2 \tag{3.103}$$

$$z = c_3 x + c_4 \tag{3.104}$$

Por último, al aplicar las condiciones de frontera sobre (3.103) en (3.104) resulta,

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -2 \quad \text{y} \quad c_4 = 0 \tag{3.105}$$

por lo tanto, sustituyendo (3.105) en (3.103) y (3.104),

$$y = x \quad \text{y} \quad z = -2x$$

Ejemplo 3.14

Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y', z') dx$$

Solución: Aquí,

$$f = f(y', z') \tag{3.106}$$

Ahora bien, f tiene dos variables y y z , por lo tanto, se debe escribir una ecuación de Euler para cada una de estas variables. Al sustituir (3.106) en las ecuaciones de Euler (3.93) (para $i = 1, 2$ con $y_1 = y$ y $y_2 = z$) resulta,

$$\begin{aligned} \text{Para } i = 1: \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(y', z')}_{=0} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} f(y', z') \right] &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} f(y', z') \right] &= 0 \\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dz'}{dx}}_{\text{Por regla de la cadena}} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial z' \partial y'} z'' &= 0 \end{aligned} \tag{3.107}$$

y,

$$\begin{aligned} \text{Para } i = 2: \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} f(y', z')}_{=0} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial z'} f(y', z') \right] &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial z'} f(y', z') \right] &= 0 \\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{dz'}{dx}}_{\text{Por regla de la cadena}} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial z'} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} z'' &= 0 \end{aligned} \tag{3.108}$$

Por último, al resolver el sistema formado por (3.107) y (3.108) resulta,

$$\left. \begin{aligned} y'' &= 0 \\ z'' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ si } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial z'} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} \neq 0$$

de las cuales resulta, como se vió en el ejemplo anterior, lo siguiente,

$$y = c_1 x + c_2 \quad \text{Y} \quad z = c_3 x + c_4$$

que es una familia de líneas rectas en el espacio. Como se puede ver, el ejemplo anterior constituye un caso especial de éste.

.....

3.3. Cálculo de extremales con restricciones

Existen aplicaciones en las que es natural considerar ciertas restricciones adicionales sobre el conjunto de funciones de las que depende el funcional integral J definido por (3.90). Supóngase que se quiere buscar, por ejemplo, el camino más corto entre dos puntos sobre una superficie. Entonces, adicionalmente a las condiciones ya discutidas antes, existe ahora la restricción de que el camino debe satisfacer la ecuación de dicha superficie.

Una forma de abordar este problema es la de transformar el problema con restricciones dado, a un problema equivalente sin restricciones mediante el uso del método de los *multiplicadores de Lagrange*; de forma análoga a como se procede para hallar los valores extremales para las funciones de varias variables en el curso básico de cálculo varias variables.

3.3.1. Restricciones del tipo $g[y_i(x); x] = 0$ y $g[y_i(x), y'_i(x); x] = 0$

En general, supóngase que se quiere encontrar las funciones $y_i(x)$ que hacen que la integral (3.90),

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f[y_i(x), y'_i(x); x] dx, \text{ con } i = 1, 2, \dots, n$$

tome un valor estacionario, pero bajo las restricciones algebraicas impuestas por,

$$g_l[y_i(x); x] = 0, \text{ con } l = 1, 2, \dots, m \quad (3.109)$$

(el subíndice l indica que puede haber más de una restricción de este tipo, en total m) entonces, al aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange, es posible demostrar⁴ que se puede escribir la nueva integral funcional,

$$\tilde{J} = \int_{x_1}^{x_2} \tilde{f} dx \quad (3.110)$$

con,

$$\tilde{f} = f + \sum_{l=1}^m \lambda_l(x) g_l \quad (3.111)$$

donde las λ_l son los llamados *multiplicadores de Lagrange*. La expresión (3.110) representa el problema variacional sin restricciones (pues ahora están contenidas en \tilde{f}) del problema variacional con restricciones original planteado por las expresiones (3.90) y

⁴Ver (15), págs. 388-390.

(3.109) en conjunto. Como (3.110) es sin restricciones, entonces \tilde{f} debe cumplir con las ecuaciones de Euler - Lagrange (3.93), por lo tanto,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'_i} \right) = 0$$

o,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i} = Q_i \tag{3.112}$$

donde,

$$Q_i = \sum_{l=1}^m \left\{ \lambda_l \left[\frac{\partial g_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g_l}{\partial y'_i} \right) \right] - \frac{d\lambda_l}{dx} \frac{\partial g_l}{\partial y'_i} \right\} \tag{3.113}$$

que son las ecuaciones de Euler - Lagrange para el problema planteado. La generalización para $\lambda_l = \lambda_l [y_i(x), y'_i(x); x]$ es sencilla.

La solución completa al problema depende ahora de la determinación de n funciones y_i y m funciones λ_l . Como hay m dadas por (3.109) y n ecuaciones dadas por (3.112), entonces existen suficientes ecuaciones para permitir una solución completa al problema planteado. Aquí las λ_l son consideradas indeterminadas y son obtenidas como parte de la solución.

En el caso de que se tenga una restricción del tipo $g_l = g [y_i(x); x]$, la expresión (3.113) se reduce a,

$$Q_i = \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial y_i} \tag{3.114}$$

Ejemplo 3.15

Hallar las geodésicas del cilindro circular $r = R$.

Solución: En la figura 3.10 se muestra esquemáticamente lo planteado. En coordenadas Cartesianas,

$$g = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \tag{3.115}$$

y el elemento de longitud (elemento de línea) viene dado por,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

de aquí que la longitud de la curva venga dada por,

$$s = \int_1^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = \int_1^2 (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

de modo que,

$$f = (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}$$

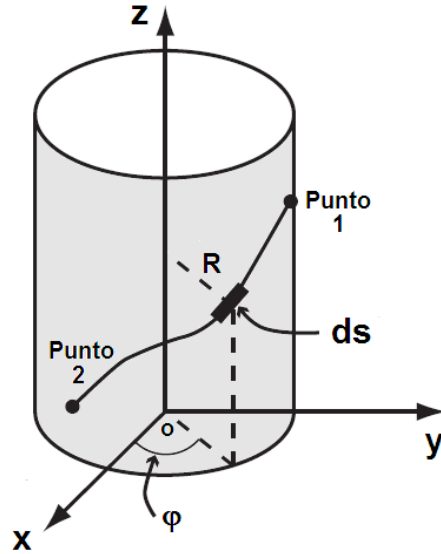


Figura (3.10): Geodésicas en un cilindro circular recto de radio R (Ejemplo 3.15).

Ahora, al usar (3.112) con Q_i dada por (3.114) puesto que en este caso g no depende de las y'_i , las ecuaciones de Euler vendrán dadas por,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} &= Q_y \\ \frac{d}{dx} \left[(1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} y' \right] &= 2\lambda y \end{aligned} \quad (3.116)$$

y,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} &= Q_z \\ \frac{d}{dx} \left[(1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} z' \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.117)$$

Ahora bien, de (3.117) resulta,

$$(1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} z' = c_1 \quad (3.118)$$

y de (3.115),

$$y = \pm (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.119)$$

Al sustituir (3.119) en (3.118) resulta,

$$z' = \pm \frac{c_1 R}{(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.120)$$

donde,

$$c_2 = \left(\frac{c_1^2}{1 - c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Por último, al resolver (3.120) se obtiene,

$$z = c_2 R \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) + c_3 \quad (3.121)$$

Ejemplo 3.16

Geodésicas en general. Sea $\xi(x, y, z) = 0$ la ecuación de una superficie S dada y suponiendo que toda curva diferenciable definida sobre S admite una parametrización del tipo,

$$\alpha(t) = (x(t); y(t); z(t)), \quad \alpha : [t_0, t_1] \rightarrow S$$

hallar las geodésicas sobre S .

Solución: Aquí,

$$g = \xi(x, y, z) = 0 \quad (3.122)$$

En coordenadas Cartesianas el elemento de longitud (elemento de línea) viene dado por,

$$ds^2 = [dx(t)]^2 + [dy(t)]^2 + [dz(t)]^2$$

de aquí que la longitud de la curva venga dada por,

$$s = \int_1^2 \{ [dx(t)]^2 + [dy(t)]^2 + [dz(t)]^2 \}^{\frac{1}{2}} = \int_1^2 \{ [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 \}^{\frac{1}{2}} dt \quad (3.123)$$

que es la cantidad que se quiere minimizar, de modo que,

$$f = \{ [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 \}^{\frac{1}{2}} \quad (3.124)$$

Ahora bien, f tiene tres variables dependientes x, y, z y t como variable independiente. Por lo tanto, se debe escribir una ecuación de Euler para cada una de estas variables dependientes. Ahora, al usar (3.112) con Q_i dada por (3.114) puesto que en este caso g no depende de las y'_i , las ecuaciones de Euler (para $i = 1, 2, 3$ con $y_1 = x, y_2 = y, y_3 = z$ y para $l = 1$ por haber sólo una restricción) vendrán dadas por,

$$\text{Para } i = 1: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x'} (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{\partial f}{\partial x} (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} &= \lambda \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] &= \lambda \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.125)$$

Para $i = 2$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial \xi}{\partial y}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial y'} (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{\partial f}{\partial y} (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} &= \lambda \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] &= \lambda \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.126)$$

y,

Para $i = 3$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial \xi}{\partial z}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial z'} (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{\partial f}{\partial z} (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} &= \lambda \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] &= \lambda \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.127)$$

pero como,

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} = s' \frac{d}{ds}$$

y de (3.123),

$$\frac{ds}{dt} = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}$$

entonces (3.125), (3.126) y (3.127) se pueden escribir como,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x / ds^2}{\partial \xi / \partial x} &= \frac{\lambda}{s'} \\ \frac{d^2 y / ds^2}{\partial \xi / \partial y} &= \frac{\lambda}{s'} \\ \frac{d^2 z / ds^2}{\partial \xi / \partial z} &= \frac{\lambda}{s'} \end{aligned}$$

o,

$$\frac{d^2 x / ds^2}{\partial \xi / \partial x} = \frac{d^2 y / ds^2}{\partial \xi / \partial y} = \frac{d^2 z / ds^2}{\partial \xi / \partial z} = \frac{\lambda}{s'}$$

expresando que la normal a la curva coincide con la normal a la superficie, definición usual de geodésica en geometría diferencial.

.....

3.3.2. Restricciones del tipo isoperimétrico

Se llaman problemas isoperimétricos, en el sentido estricto de esta palabra, a los problemas sobre la determinación de una figura geométrica de superficie máxima con perímetro dado.

En la actualidad se llaman problemas isoperimétricos a una clase mucho más general de problemas, más precisamente, a todos los problemas variacionales en los cuales se pide hallar el extremo de la funcional (3.90),

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f [y_i(x), y'_i(x); x] dx, \text{ con } i = 1, 2, \dots, n$$

tome un valor estacionario, pero bajo las llamadas *restricciones isoperimétricas*,

$$\int_{x_1}^{x_2} g_l [y_i(x), y'_i(x); x] dx = \varrho_l, \text{ con } l = 1, 2, \dots, m \quad (3.128)$$

donde las ϱ_l son constantes; m puede ser mayor, menor o igual a n , y también problemas análogos para funcionales más complejas.

Los problemas isoperimétricos pueden ser reducidos a problemas con restricciones del tipo $g [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$ por medio de la introducción de nuevas funciones desconocidas. En efecto, al hacer,

$$\int_{x_1}^{x_2} g_l [y_i(x), y'_i(x); x] dx = h_l(x) \quad (3.129)$$

con,

$$\begin{aligned} h_l(x_1) &= 0 \\ h_l(x_2) &= \varrho_l, \text{ por la condición (3.128)} \end{aligned}$$

y derivando $h_l(x)$ con respecto a x , se obtiene,

$$h'_l(x) = g_l [y_i(x), y'_i(x); x] \quad \text{ó} \quad g_l [y_i(x), y'_i(x); x] - h'_l(x) = 0 \quad (3.130)$$

de manera que las restricciones isoperimétricas (3.128) han sido reemplazadas por restricciones diferenciales, reduciéndose así al problema estudiado en la sección anterior.

Ahora bien, en lugar de estudiar los valores extremos de (3.90) restringidos por (3.130), se pueden estudiar (inspirándose en el procedimiento seguido en la sección anterior) los valores extremos sin restricción de la funcional,

$$\tilde{J} = \int_{x_1}^{x_2} \left[f + \sum_{l=1}^m \lambda_l(x) (g_l - h'_l) \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \tilde{f} dx \quad (3.131)$$

donde,

$$\tilde{f} = f + \sum_{l=1}^m \lambda_l(x) (g_l - h_l) \quad (3.132)$$

cuyas ecuaciones de Euler vienen dadas por,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i} &= 0, \text{ con } i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} + \sum_l \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} - \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial y_i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.133)$$

y,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial h'_l} \right) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial h_l} &= 0, \text{ con } l = 1, 2, \dots, m \\ \frac{d\lambda_l(x)}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad (3.134)$$

de la cual se deduce que todos los λ_l son constantes. Por lo tanto, de (3.133) y (3.134) se pueden escribir las ecuaciones de Euler - Lagrange para este caso como,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = Q_i$$

con,

$$Q_i = \sum_{l=1}^m \lambda_l \left[\frac{\partial g_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g_l}{\partial y'_i} \right) \right] \quad (3.135)$$

que es lo mismo que se obtiene a partir de (3.112) sabiendo que los λ_l son constantes.

Ejemplo 3.17

Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_0^\pi y'^2 dx$$

sabiendo que $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ y sujeta a la restricción isoperimétrica,

$$\int_0^\pi y^2 dx = 1$$

Solución: Aquí,

$$f = y'^2 \quad (3.136)$$

y,

$$g = y^2 \quad (3.137)$$

y como para este caso λ es constante (por ser un caso de restricción isoperimétrica), se obtiene de (3.112) y (3.135) ($i = l = 1$),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y'^2}{\partial y'} \right) - \frac{\partial y'^2}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial y^2}{\partial y} \\ y'' &= \lambda y \end{aligned} \quad (3.138)$$

que representa un problema de autovalores. Las raíces del polinomio característico son $\pm\sqrt{\lambda}$.

Son posibles dos casos:

1. Si $\lambda \geq 0$, la solución general viene dada por,

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

que no puede satisfacer las condiciones de frontera dadas, no existiendo así solución para $\lambda \geq 0$.

2. Si $\lambda < 0$, la solución general viene dada por,

$$y(x) = c_1 \text{Sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \text{Cos}(\sqrt{-\lambda}x) \quad (3.139)$$

De la condición de frontera $y(0) = 0$ resulta,

$$y(0) = c_2 = 0 \quad (3.140)$$

y de $y(\pi) = 0$,

$$\text{Sen}(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, -1, -4, \dots, -n^2, \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.141)$$

Ahora, teniendo presente (3.140) y (3.141), de la restricción isoperimétrica resulta,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left[c_1 \text{Sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \text{Cos}(\sqrt{-\lambda}x) \right]^2 dx &= 1 \\ c_1 &= \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned} \quad (3.142)$$

Por lo tanto, al sustituir los resultados (3.140) y (3.142) en (3.139), se obtiene,

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Sen}(nx), \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots$$

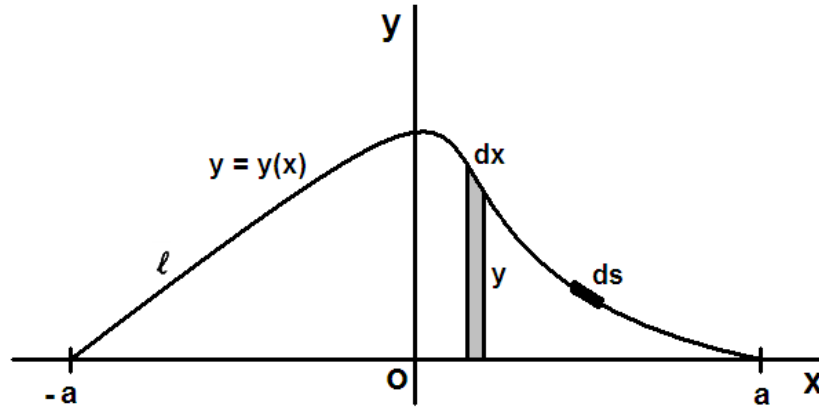


Figura (3.11): Función $y(x)$ cuya área encerrada ha de maximizarse (Ejemplo 3.18).

Ejemplo 3.18

Determinar la función $y(x)$ de longitud ℓ limitada por el eje x en la parte inferior y que pasa por los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ y que encierra la mayor área.

Solución: En la figura 3.11 se muestra que,

$$dA = ydx \tag{3.143}$$

de manera que,

$$A = \int_{-a}^a ydx \tag{3.144}$$

que es la cantidad que se quiere maximizar, por lo tanto,

$$f = y \tag{3.145}$$

teniéndose presente que $y(x)$ debe cumplir con las condiciones $y(-a) = 0$ y $y(a) = 0$.

Por otro lado, $y(x)$ debe tener longitud ℓ , por lo tanto,

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow s = \int_{-a}^a (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx = \ell \tag{3.146}$$

que es una restricción isoperimétrica. De aquí que,

$$g = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.147}$$

y como para este caso λ es constante (por ser un caso de restricción isoperimétrica), se obtiene de (3.112) y (3.135) ($i = l = 1$),

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \left[\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'} \right) \right] \tag{3.148}$$

pero,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial y'} = \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

entonces,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{1}{\lambda} \tag{3.149}$$

que al integrar resulta,

$$\frac{\lambda y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = x - c_1, \text{ con } c_1 \text{ constante de integración} \tag{3.150}$$

Esta ecuación puede ser reescrita como,

$$dy = \pm \frac{(x - c_1)}{[\lambda^2 - (x - c_1)^2]^{\frac{1}{2}}} dx \tag{3.151}$$

y al integrarla resulta,

$$y = \mp [\lambda^2 - (x - c_1)^2]^{\frac{1}{2}} + c_2, \text{ con } c_2 \text{ otra constante de integración} \tag{3.152}$$

y reordenando términos,

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2 \tag{3.153}$$

que representa un círculo de radio λ centrado en (c_1, c_2) . El área máxima es un semi-círculo limitado por la línea $y = 0$. El semicírculo parte del punto $(-a, 0)$ y llega hasta el $(a, 0)$ (o viceversa), lo cual significa que el círculo debe estar centrado en el origen $(c_1, c_2) = (0, 0)$ y tiene radio $\lambda = a$. La longitud del semicírculo es $\pi a = \ell$, por lo tanto, $a = \ell/\pi$. De todo lo anterior se deduce que,

$$y = \left[\left(\frac{\ell}{\pi} \right)^2 - x^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

sea la función buscada.

Ejemplo 3.19

Para atravesar un río se coloca, desde una orilla a la otra, una cuerda de longitud ℓ de densidad lineal de masa μ . Si la separación entre las orillas es $2a$ ($2a < \ell$), ¿qué forma tomará la cuerda con el fin de minimizar la energía potencial? (ver figura 3.12).

Solución: Si ds es el elemento de longitud de la cuerda, entonces su energía potencial vendrá dada por,

$$dU = -\mu g y ds \tag{3.154}$$

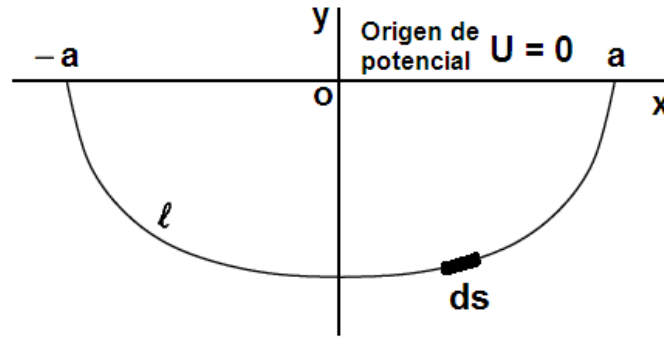


Figura (3.12): Cuerda de longitud ℓ colocada entre las orillas de un río de ancho $2a$ (Ejemplo 3.19).

y como,

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

entonces,

$$U = -\mu g \int_{-a}^a y (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (3.155)$$

que es la cantidad que se quiere minimizar, pero sujeta a la restricción de que la longitud de la cuerda permanezca constante, es decir,

$$\int ds = \int_{-a}^a (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx = \ell \quad (3.156)$$

que es una restricción de tipo isoperimétrica. De (3.155) y (3.156) se puede identificar,

$$f = -\mu g y (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.157)$$

$$g^* = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.158)$$

(se ha escrito g^* para no confundirla con la aceleración debida a la gravedad g). Como para este caso λ es constante y g^* depende de las y_i , se obtiene de (3.112) y (3.135) ($i = l = 1$),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \left[\frac{\partial g^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g^*}{\partial y'} \right) \right] \\ -\mu g \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \left[y (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} + \mu g \frac{\partial}{\partial y} \left[y (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \right] &= \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad - \lambda \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \left[(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

o,

$$y'' \left(y - \frac{\lambda}{\mu g} \right) = 1 + y'^2$$

que puede ser escrita como,

$$\frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{dx}{y - \frac{\lambda}{\mu g}} \quad (3.159)$$

y puesto que $dx = \frac{dx}{dy} dy$, entonces (3.159) se puede escribir como,

$$\frac{y' dy'}{1+y'^2} = \frac{dy}{y - \frac{\lambda}{\mu g}} \quad (3.160)$$

Ahora bien, al integrar (3.160) resulta,

$$y'^2 = c_1 \left(y - \frac{\lambda}{\mu g} \right)^2 - 1, \quad c_2 = \text{constante de integración} \quad (3.161)$$

y al hacer la sustitución,

$$y - \frac{\lambda}{\mu g} = \frac{1}{c_1^{1/2}} \text{Cosh } u \quad (3.162)$$

en (3.161) se obtiene,

$$u'^2 = c_1$$

cuya solución es,

$$u = c_1^{1/2} x + c_2, \quad c_2 = \text{constante de integración} \quad (3.163)$$

Entonces, de (3.162) y (3.163) se obtiene,

$$y = \frac{1}{c_1^{1/2}} \text{Cosh} \left(c_1^{1/2} x + c_2 \right) + \frac{\lambda}{\mu g} \quad (3.164)$$

Las condiciones de frontera establecen que $y(\pm a) = 0$. Al aplicarlas sobre (3.164) resulta que,

$$\text{Para } y(a) = 0: \quad 0 = \frac{1}{c_1^{1/2}} \text{Cosh} \left(c_1^{1/2} a + c_2 \right) + \frac{\lambda}{\mu g}$$

$$\text{Para } y(-a) = 0: \quad 0 = \frac{1}{c_1^{1/2}} \text{Cosh} \left(-c_1^{1/2} a + c_2 \right) + \frac{\lambda}{\mu g}$$

de las cuales se puede deducir que $c_2 = 0$ ya que $a \neq 0$ y, por lo tanto,

$$\lambda = -\frac{\mu g}{c_1^{1/2}} \text{Cosh} \left(c_1^{1/2} a \right) \quad (3.165)$$

Por otro lado, para hallar c_1 se usa la restricción isoperimétrica (3.156). En efecto, al sustituir (3.164) en dicha restricción resulta,

$$\int_{-a}^a \left[1 + \text{Senh}^2 \left(c_1^{1/2} x \right) \right]^{\frac{1}{2}} dx = \ell \Rightarrow \frac{2}{c_1^{1/2}} \text{Senh} \left(c_1^{1/2} a \right) = \ell \quad (3.166)$$

que es una ecuación trascendental para c_1 .

Finalmente, de (3.164) y (3.165) resulta,

$$y = \frac{1}{c_1^{1/2}} \left[\text{Cosh} \left(c_1^{1/2} x \right) - \text{Cosh} \left(c_1^{1/2} a \right) \right]$$

que es una catenaria, con c_1 dada por (3.166).

.....

3.4. La notación δ

En el análisis donde se usa el cálculo de variaciones, se acostumbra a usar una notación compacta para representar la variación. Ahora bien, la expresión (3.19) puede ser escrita como,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha dx \quad (3.167)$$

y si se hace,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \delta J \quad (3.168)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha = \delta y \quad (3.169)$$

se puede escribir (3.167) como,

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

Ahora, en vista de la nueva notación, la condición para que la integral (3.1),

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f [y(x), y'(x); x] dx$$

tenga un valor estacionario, puede escribirse ahora como,

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f [y(x), y'(x); x] dx = 0 \quad (3.170)$$

Introduciendo el símbolo de variación δ en la integral (puesto que por hipótesis los límites de integración no son afectados por la variación por ser fijos) se tiene,

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y - \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx$$

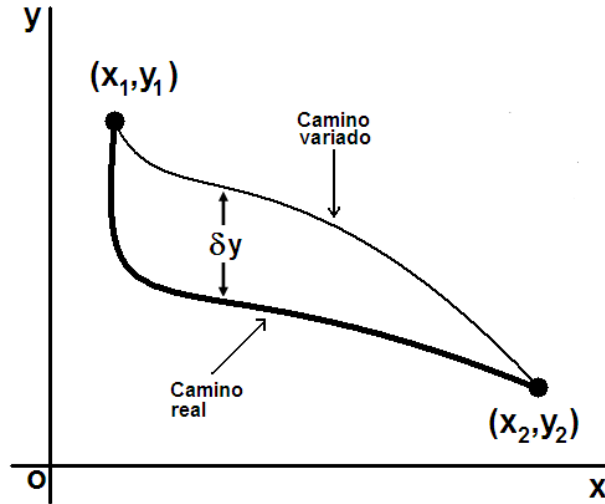


Figura (3.13): Desplazamiento virtual.

pero,

$$\delta y' = \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y)$$

entonces,

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y - \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right] dx$$

e integrando el segundo término por partes,

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx \quad (3.171)$$

Puesto que la variación δy es arbitraria, la condición para que J tenga un valor estacionario,

$$\delta J = 0$$

requiere que el integrando de (3.171) se anule debido al lema fundamental del cálculo de variaciones enunciado en la sección 3.2.1, resultando así la ecuación de Euler (3.22).

Aunque la notación δ es usada frecuentemente, es importante darse cuenta que es sólo una notación compacta de cantidades diferenciales más precisas. El camino variado δy puede ser interpretado físicamente como un desplazamiento virtual desde el camino real consistente con todas las fuerzas y ligaduras (ver figura 3.13). Esta variación δy se distingue del desplazamiento diferencial dy por la condición de que $dt = 0$, es decir, el tiempo es fijo como fue visto en la sección 2.9.1. El camino variado δy de hecho, ni siquiera corresponde a un posible camino de movimiento. La variación debe anularse en los extremos del camino.

3.5. Problemas

1. Hallar la extremal del problema isoperimétrico,

$$J = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx$$

con la restricción,

$$\int_0^1 y^2 dx = 2$$

sabiendo que $y(0) = 0$ y $y(1) = 0$. **Resp.:** $y = \pm 2 \text{Sen}(n\pi x)$, donde n es un entero.

2. Hallar las extremales del problema isoperimétrico,

$$J = \int_0^1 y'^2 dx$$

con la restricción,

$$\int_0^1 y dx = a$$

donde a es una constante. **Resp.:** $y = \lambda x^2 + c_1 x + c_2$, donde c_1 , c_2 y λ se determinan de las condiciones de frontera y de la condición isoperimétrica.

3. Dada la funcional,

$$J = \int_0^1 (ay'^2 - by^2) dx$$

donde a y b son constantes positivas y que satisface las condiciones de frontera $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$.

a. Hallar el camino extremal de la funcional.

b. Encuentre el valor de J usando el camino extremal hallado en (a).

4. Hallar el extremal de la funcional,

$$J = \int_0^\pi (2y \text{Sen } x - y'^2) dx$$

que satisface $y(0) = 0$ y $y(\pi) = 0$. Mostrar que este extremal hace que J tome un máximo global. **Resp.:** $y = \text{Sen } x$.

5. Hallar la extremal del problema isoperimétrico,

$$J = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z) dx$$

con la restricción,

$$\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2) dx = 2$$

sabiendo que $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ y $y(1) = 1$, $z(1) = 1$. **Resp.:** $y = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$; $z = x$.

6. Analizar el extremo de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (y^2 + 2xyy') dx$$

sabiendo que $y(x_1) = y_0$ y $y(x_2) = y_1$. **Resp.:** La integral no depende del camino de integración. El problema variacional no tiene sentido.

7. Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y' (1 + x^2 y') dx$$

Resp.: Las extremales son las hipérbolas $y = \frac{c_1}{x} + c_2$.

8. Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + 2xy' - 16y^2) dx$$

Resp.: $y = c_1 \text{Sen}(4x - c_2)$.

9. Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_0^1 (y'^2 + x) dx$$

bajo las condiciones de frontera $y(0) = 1$ y $y(1) = 2$.

10. Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx$$

bajo las condiciones de frontera $y(0) = 1$ y $y(1) = e^{-1}$. Tener presente que $e^{\pm x} = \text{Cosh } x \pm \text{Senh } x$. **Resp.:** $y = \text{Cosh } x - \text{Senh } x$.

11. Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (xy' + y'^2) dx$$

Resp.: $y = -\frac{x^2}{4} + c_1x + c_2$.

12. Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x + y^2}{y'^2} dx$$

Resp.: $y = \sinh(c_1x + c_2)$.

13. Sea $F(x, y) = y + xy'$. Muestre que $\int_a^b F(x, y) dx$ no depende del camino $y = y(x)$, por lo tanto, el problema de optimizar dicha integral no tiene sentido.

14. Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (y^2 + y'^2 - 2y \operatorname{Sen} x) dx$$

Resp.: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \operatorname{Sen} x$.

15. Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2) dx$$

Resp.: $y = (c_1 x + c_2) \operatorname{Cos} x + (c_3 x + c_4) \operatorname{Sen} x$; $z = 2y + y''$, de donde z se determina fácilmente.

16. ¿En qué curva puede alcanzar su extremo la funcional

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2) dx$$

sabiendo que $y(0) = 0$ y $y(\frac{\pi}{2}) = 1$? **Resp.:** $y = \operatorname{Sen} x$.

17. ¿En qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional

$$J = \int_0^1 (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

sabiendo que $y(0) = 0$ y $y(1) = 0$?. Mostrar que esta extremal hace que J tome un mínimo global.

18. ¿En qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

sabiendo que $y(x_1) = y_0$ y $y(x_2) = y_1$?. **Resp.:** $y = 0$. La extremal $y = 0$ pasa por los puntos frontera sólo cuando $y_0 = 0$ y $y_1 = 0$.

19. Hallar el extremal de la funcional,

$$J = \int_1^2 x^2 y'^2 dx$$

que satisface $y(1) = 0$ y $y(2) = 1$.

20. Hallar el extremal de la funcional,

$$J = \int_0^1 \frac{(1 + y^2)^2}{y'^2} dx$$

que satisface $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$.

21. Hallar el extremal de la funcional,

$$J = \int_0^1 (y'^2 - y'^4) dx$$

que satisface $y(0) = 0$ y $y(1) = 0$.

22. Hallar el extremal de la funcional,

$$J = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^3} dx$$

que satisface $y(1) = 1$ y $y(2) = 4$.

23. Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(2x - y) dx$$

bajo las condiciones de frontera $y(0) = 0$ y $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

24. Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (y^2 - y'^2 - 2y \operatorname{Cosh} x) dx$$

25. Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (y^2 - y'^2 - 2y \operatorname{Sen} x) dx$$

26. Obténgase la forma que adopta la ecuación de Euler-Lagrange en los siguientes casos particulares:

a) f sólo depende de y .

b) f no depende de y .

c) $f = Q(x, y) \sqrt{1 + y'^2}$.

27. Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_1^2 (y'^2 - 2xy) dx$$

bajo las condiciones de frontera $y(1) = 0$ y $y(2) = -1$. **Resp.:** $y(x) = \frac{x}{6}(1 - x^2)$.

28. Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_1^3 (3x - y) y dx$$

bajo las condiciones de frontera $y(1) = 1$ y $y(3) = 4\frac{1}{2}$. **Resp.:** La extremal encontrada no satisface la condición $y(1) = 1$, por lo tanto, este problema variacional no tiene solución.

29. Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_1^2 (y' + y)^2 dx$$

bajo las condiciones de frontera $y(1) = 1$ y $y(2) = 0$. **Resp.:** $y(x) = \frac{\text{Senh}(2-x)}{\text{Senh} 1}$.

30. Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_0^1 \sqrt{y(1 + y'^2)} dx$$

bajo las condiciones de frontera $y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **Resp.:** Hay dos extremales dadas por,

$$y(x) = \frac{1 + (3 \pm 2\sqrt{2})(2x - 1)^2}{4(\sqrt{2} \pm 1)}$$

31. Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_0^1 yy'^2 dx$$

bajo las condiciones de frontera $y(0) = 1$ y $y(1) = \sqrt[3]{4}$. **Resp.:** Hay dos extremales dadas por, $y(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ y $y(x) = \sqrt[3]{(3x-1)^2}$.

32. Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - y) e^{2x} dx$$

bajo las condiciones de frontera $y(0) = 0$ y $y(1) = e^{-1}$. **Resp.:** $y(x) = \frac{1}{2}[e^{-x} + (1+e)xe^{-x} - 1]$.

33. Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_1^e (xy'^2 + yy') dx$$

bajo las condiciones de frontera $y(1) = 0$ y $y(e) = 1$. **Resp.:** $y(x) = \ln x$.

34. Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_a^b [2xy + (x^2 + e^y) y'] dx$$

bajo las condiciones de frontera $y(a) = A$ y $y(b) = B$. **Resp.:** La integral no depende del camino de integración por lo tanto, este problema variacional, no tiene sentido.

35. Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_0^1 (xy' + e^y) dx$$

bajo las condiciones de frontera $y(0) = 0$ y $y(1) = \alpha$. **Resp.:** $y(x) = 0$ si $\alpha = 0$; si $\alpha \neq 0$ no existe extremal suave.

36. Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_0^1 (2e^y - y^2) dx$$

bajo las condiciones de frontera $y(0) = 1$ y $y(1) = e$. **Resp.:** No hay extremales, la ecuación de Euler no tiene soluciones.

37. Considérese la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x); x] dx$$

con las condiciones de frontera $y(x_1) = A$ y $y(x_2) = B$. Demostrar que la ecuación de Euler se mantiene al agregar al integrando la derivada total de cualquier función $u = u(x, y)$.

38. Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_a^b x^n y'^2 dx$$

y probar que para $n \geq 1$ no existen extremales que pasen por dos puntos distintos situados sobre el eje Oy .

39. Demuéstrese la invariancia de la ecuación de Euler frente a cambios de coordenadas.

40. Considerar la función $f = \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2$ donde $y(x) = x$. Sumar a $y(x)$ la función $\eta(x) = \text{Sen}(x)$, y (a) graficar $y(x)$ y dos de sus variaciones $y(\alpha, x)$ en un mismo plano Cartesiano, (b) encontrar $J(\alpha)$ entre los límites $x = 0$ y $x = 2\pi$, (b) mostrar que el valor estacionario de $J(\alpha)$ se da cuando $\alpha = 0$. **Resp.:** (b) $J(\alpha) = \pi(2 + \alpha^2)$.

41. Considerar la función $f = \left[\left(\frac{dy(x)}{dx}\right) - e^x - 1\right]^2 + x^2$ donde $y(x) = x + e^x$. Sumar a $y(x)$ la función $\eta(x) = x^2 - \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1$, y (a) graficar $y(x)$ y dos de sus variaciones $y(\alpha, x)$ en un mismo plano Cartesiano, (b) encontrar $J(\alpha)$ entre los límites $x = -1$ y $x = 1$, (b) mostrar que el valor estacionario de $J(\alpha)$ se da cuando $\alpha = 0$. **Resp.:** (b) $J(\alpha) = \frac{2}{3} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{4}\pi^3 + \frac{8}{3}\pi + 16\right) \alpha^2$.

42. Encuentre y resuelva las ecuaciones para las geodésicas sobre un plano, usando coordenadas polares planas (r, φ) en términos de las cuales el elemento de distancia ds es dado por $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$.

43. Encuentre:

a) La expresión general para el camino más corto sobre la superficie de un cono de semiángulo α mediante cálculo variacional. Tome la ecuación del camino en la forma $\rho = \rho(\varphi)$, donde ρ es la distancia desde el vértice O y φ es el ángulo polar cilíndrico medido alrededor del eje del cono (ver figura 3.14). La ecuación de un cono viene dada por $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. **Resp.:** $\rho = \frac{1}{b} \text{Sen } \alpha \sec [(\varphi - c) \text{Sen } \alpha]$, con c una constante.

b) Encuentre el camino particular que satisface las condiciones de frontera $\rho(\pm\frac{\pi}{2}) = a$. **Resp.:** $\rho = \frac{a \text{Cos}(\frac{\pi}{2} \text{Sen } \alpha)}{\text{Cos}(\varphi \text{Sen } \alpha)}$.

44. Un fabricante desea minimizar la funcional de costo,

$$C = \int_0^4 [(3 + y')y' + 2y] dx$$

sujeta a las condiciones de frontera $y(0) = 0$ y $y(4) = X$, donde X es el volumen deseado de producción. Encuentre el extremal de C que satisface las condiciones dadas y pruebe que ésta hace que C tome un mínimo global. **Resp.:** $y = \frac{1}{4}x(2x + X - 8)$.

45. Considérese la propagación de los rayos de luz en un medio axialmente simétrico donde, en un sistema de coordenadas cilíndricas (r, φ, z) , el índice de refracción es

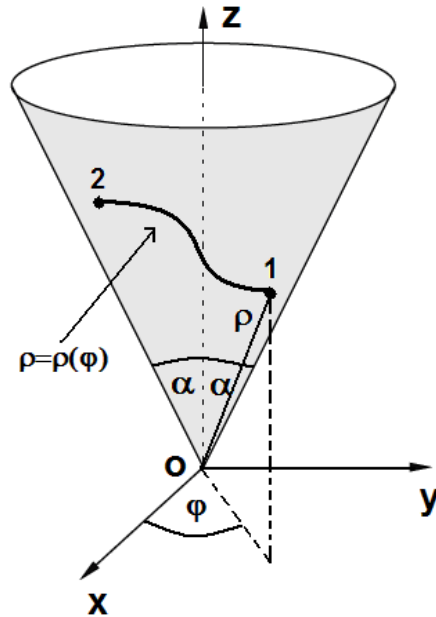


Figura (3.14): Camino más corto sobre la superficie de un cono de semiángulo α (Problema 43).

$n = n(r)$ y los rayos están en el plano $z = 0$. Para este caso el principio de Fermat resulta en la funcional,

$$T = c^{-1} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} n (r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, T es el tiempo empleado por un rayo de luz para ir de un punto a otro, $r = r(\varphi)$ es la ecuación del camino seguido y $r' = \frac{dr}{d\varphi}$.

a) Mostrar que las extremales de T satisfacen la ecuación diferencial ordinaria,

$$\frac{nr^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{constante}$$

b) Mostrar que si se escribe $r' = r \tan \psi$ (ψ ángulo entre la tangente al rayo y la superficie cilíndrica local $r = \text{constante}$), la anterior ecuación se transforma en,

$$rn \cos \psi = \text{constante}$$

que es la forma de la ley de Snell para este caso.

46. Muestre que el extremal de,

$$J = \frac{1}{V} \iiint [\vec{\nabla} \phi(x_1, x_2, x_3)]^2 dx_1 dx_2 dx_3$$

viene dado por,

$$\nabla^2 \phi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

J representa el valor promedio del cuadrado del gradiente de $\phi(x_1, x_2, x_3)$ dentro de un cierto volumen V .

47. Encuentre el camino más corto sobre la superficie de una esfera, pero usando ahora los multiplicadores de Lagrange.

48. A partir de la forma usual (no integrada) de la ecuación de Euler, rehacer el problema de encontrar el camino más corto sobre la superficie de una esfera, usando θ como variable dependiente y φ como independiente. Mostrar,

a) que se obtiene la ecuación diferencial,

$$\tan \theta - \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\theta'}{\text{Sen}^2 \theta} \right) = 0$$

donde $\theta' = \frac{d\theta}{d\varphi}$.

b) y que,

$$\frac{d}{d\varphi} (\tan \theta) = -\frac{\theta'}{\text{Sen}^2 \theta}$$

Use esta expresión para resolver la ecuación encontrada en (a).

49. Rehaga el problema de encontrar el camino más corto sobre la superficie de una esfera usando ambas θ y φ como variables dependientes, formulándolo como un problema paramétrico escribiendo las condiciones de frontera apropiadas. Combine las dos Ecuaciones de Euler-Lagrange resultantes y muestre que se obtiene el camino ya conocido.

50. Dada la superficie $z = x^{\frac{3}{2}}$,

a) ¿cuál es la curva sobre esta superficie que une los puntos $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$ que tiene la mínima longitud?. **Resp.:** $y = \frac{8}{13^{3/2}-8} \left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} - 1 \right]$.

b) Use la computadora para generar una gráfica conjunta que muestre la superficie dada y el camino más corto obtenido en (a).

51. Mostrar que la geodésica sobre la superficie de un cilindro circular recto de radio R (ver figura 3.15) es un segmento de hélice,

$$\varphi = c_1 + c_2 z$$

Usar coordenadas cilíndricas $ds^2 = R^2 d\varphi^2 + dz^2$.

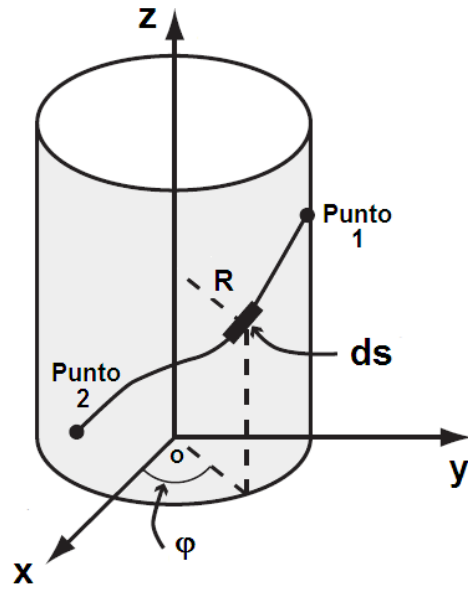


Figura (3.15): Geodésicas sobre la superficie de un cilindro circular recto de radio R (Problema 51).

- a) Sin usar multiplicadores de Lagrange.
- b) Usando multiplicadores de Lagrange.

52. Considérese la línea que une los puntos $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Mediante los siguientes pasos, se mostrará explícitamente que la función $y(x) = x$ produce un camino de mínima longitud mediante el uso de la función variada $y(\alpha, x) = x + \alpha \text{Sen} [\pi(1 - x)]$.

- a) Muestre que la longitud s de la curva $y(\alpha, x)$ que une los puntos $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y $(x_1, y_1) = (1, 1)$ es,

$$s = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \left[1 - \alpha\pi \text{Cos } u + \frac{1}{2} \alpha^2 \pi^2 \text{Cos}^2 u \right]^{1/2} du$$

donde se ha hecho el cambio $\pi(1 - x) = u$. Aquí s es el funcional.

- b) La anterior integral no puede resolverse directamente puesto que, de hecho, es una integral elíptica. Sin embargo, como α es pequeña se puede desarrollar el integrando en la forma $(1 - x)^{1/2}$ hasta el término cuadrático. Mostrar que el

resultado de esta operación viene dado por,

$$s = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \left[1 - \frac{1}{2} (\alpha\pi \cos u - \frac{1}{2} \alpha^2 \pi^2 \cos^2 u) - \frac{1}{8} (\alpha\pi \cos u - \frac{1}{2} \alpha^2 \pi^2 \cos^2 u)^2 + \dots \right] du$$

c) Ahora, si en la anterior expresión se dejan sólo los términos hasta $\cos^2 u$ y se integra, mostrar que el resultado viene dado por,

$$s = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{16} \pi^2 \alpha^2 \right)$$

d) Por último, mostrar que cumple con la condición para que esta integral tome un valor estacionario, es decir,

$$\left. \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

mostrándose así que la función $y(x) = x$ produce un camino de mínima longitud.

53. Encuéntrese la ecuación de la línea que proporciona la distancia más corta entre dos puntos en el espacio (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) . **Ayuda:** Supóngase que x , y y z dependen del parámetro ℓ y que los puntos extremos son expresados por $(x_1(\ell_1), y_1(\ell_1), z_1(\ell_1))$ y $(x_2(\ell_2), y_2(\ell_2), z_2(\ell_2))$. **Resp.:** $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ que es la ecuación de la recta en el espacio que pasa por los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) .

CAPÍTULO 4

Transformación de Legendre

Contents

4.1. Definición	127
4.2. Para una variable independiente	130
4.3. Para más de una variable independiente	134
4.4. Variables activas y pasivas	137
4.5. Algunas propiedades matemáticas de la transformación de Legendre	142
4.5.1. La inversa de la transformación de Legendre	142
4.5.2. Valores extremos	145
4.5.3. Simetrías y relaciones entre derivadas	146
4.6. Problemas	147

4.1. Definición

La transformación de Legendre¹ es una herramienta matemática comúnmente utilizada en Mecánica Clásica, Mecánica Estadística y Termodinámica.

¹Reciben su nombre debido a Adrien-Marie Legendre (París, 18 de septiembre de 1752 - Auteuil, Francia, 10 de enero de 1833), Matemático francés. Hizo importantes contribuciones a la estadística, la teoría de números, el álgebra abstracta y el análisis matemático.

Bajo algunas circunstancias, es útil almacenar la información contenida en una determinada función de una forma diferente. Dos ejemplos comunes son las transformaciones de Fourier y de Laplace. Estas expresan la función como la suma de exponenciales (reales o complejas), mostrando la información contenida en la función en términos de la suma de cada componente contenida en la misma más que en términos de su valor.

Una *transformación de Legendre* da como resultado una nueva función, en la que se sustituye una o más variables independientes con la derivada de la función original respecto a esa variable.

En ciertos problemas matemáticos o físicos es deseable expresar una cierta magnitud F (como la energía interna) mediante una función diferente G en la que los argumentos sean precisamente las derivadas de la función respecto a las antiguas variables.

Supóngase que se tiene una relación matemática cualquiera,

$$F = F(u_1, u_2, \dots, u_n) = F(u_i), \text{ con } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

que será llamada *relación fundamental* para señalar que contiene toda la información necesaria para caracterizar la relación. Ahora, es de interés tomar las variables,

$$v_i = \frac{\partial F(u_j)}{\partial u_i} \quad (4.2)$$

como variables independientes sin perder nada de la información contenida en la relación fundamental, es decir, se quiere escribir $F = F(v_i)$. Esto no se logra por el simple artificio de escribir las u_i en términos de las v_i usando (4.2) y reemplazándolas en la relación fundamental (4.1).

Para comprender mejor lo inadecuado de este procedimiento, piénsese en el caso de una sola variable u . Si la relación fundamental $F = F(u)$ está representada como se muestra en la figura 4.1(a) y se elimina u mediante la expresión para la pendiente v ,

$$v = \frac{dF(u)}{du} \quad (4.3)$$

una breve reflexión indica que con tal procedimiento se perdería algo del contenido matemático de la relación fundamental $F = F(u)$, puesto que:

1. Desde el punto de vista geométrico, es evidente que el conocimiento de F en función de la pendiente v no permitirá reconstruir la curva $F = F(u)$. En efecto, cualquiera de las curvas de la figura 4.1(b) satisface la relación $F = F(v)$.

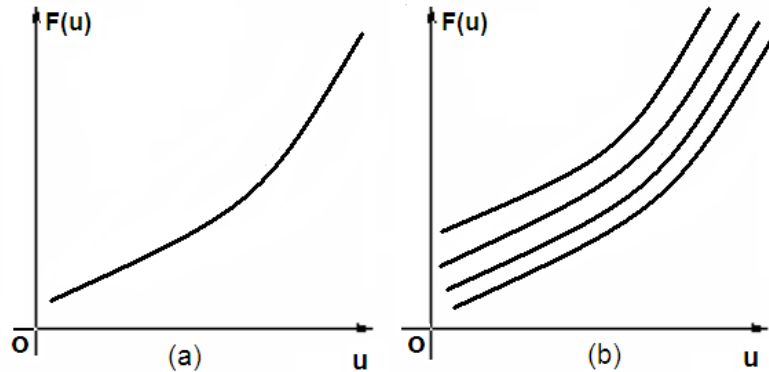


Figura (4.1): (a) Representación de la relación fundamental $F = F(u)$. (b) Representación de una familia de relaciones fundamentales.

2. Desde el punto de vista analítico, la relación $F = F(v)$ es una ecuación diferencial de primer orden, y su integración da una $F = F(u)$ en la que queda indeterminada una constante de integración. Así pues, se ve que la aceptación de $F = F(v)$ como relación fundamental en lugar de $F = F(u)$ implicaría la pérdida de parte de la información contenida originalmente en la relación fundamental.

A pesar de la conveniencia de disponer de v como variable independiente, este sacrificio del contenido informativo es completamente inaceptable. La solución aceptable al problema planteado es suministrada por la dualidad entre la geometría convencional del punto y la geometría de Plücker² de las líneas³.

El concepto esencial en la geometría de líneas es que una curva dada puede representarse igualmente bien como envolvente de una familia de líneas tangentes (ver figura 4.2) o como lugar geométrico de los puntos que satisfacen la relación fundamental $F = F(u)$. Por consiguiente, cualquier expresión que permita construir la familia de líneas tangentes determina la curva tan satisfactoriamente como la relación $F = F(u)$.

Del mismo modo que cualquier punto del plano está descrito por dos números $(u, F(u))$, así cualquier recta del plano puede describirse por los dos números $(v, G(v))$,

²Julius Plücker nació en Elberfeld (ahora parte de Wuppertal). Después de ser educado en Düsseldorf y las universidades de Bonn, Heidelberg y Berlín fue a París en 1823, donde encontró la influencia de la gran escuela de geómetras, cuyo fundador, Gaspard Monge, había muerto recientemente. En 1825 volvió a Bonn, y en 1828 se hizo catedrático en matemática. En el mismo año publicó el primer volumen de su *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, que introdujo por primera vez el método de anotación abreviada. En 1831 publicó el segundo volumen, en el cual estableció la dualidad proyectiva en una base sólida e independiente.

³La geometría de Plücker propone una relación funcional para las rectas a través de los pares ordenados $(v, G(v))$ donde v es la pendiente y $G(v)$ la ordenada al origen.

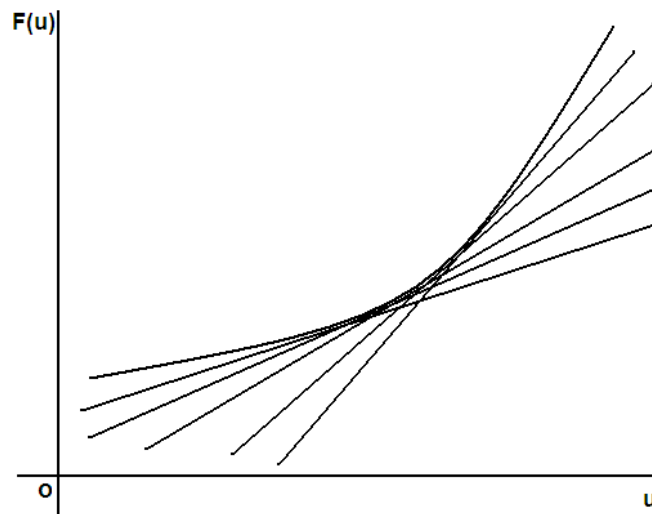


Figura (4.2): Una curva dada puede representarse igualmente bien como envolvente de una familia de líneas tangentes.

donde $G(v)$ es su intersección con el eje u . Por lo tanto, del mismo modo que la relación fundamental $F = F(u)$ selecciona un subconjunto de todos los puntos posibles $(u, G(u))$, una relación $G = G(v)$ selecciona un subconjunto de todas las rectas posibles $(v, G(v))$. El conocimiento de las intersecciones G de las líneas tangentes en función de las pendientes v permite construir la familia de líneas tangentes, y por consiguiente la curva que constituye su envolvente. Así, la relación,

$$G = G(v) \quad (4.4)$$

es completamente equivalente a la relación fundamental $F = F(u)$. En (4.4), la variable independiente es v , por lo que proporciona una solución completa y satisfactoria al problema y puede considerarse como una relación fundamental equivalente.

El procedimiento para encontrar (4.4) lo proporciona la llamada *transformación de Legendre*.

4.2. Para una variable independiente

Dada una función $F(u)$, la transformación de Legendre proporciona una forma más conveniente de almacenar la información en la función cuando son satisfechas las siguientes condiciones:

1. La función $F(u)$ debe ser suave, es decir, tiene "suficientes" derivadas continuas.

- Es estrictamente convexa, es decir, la segunda derivada nunca cambia de signo o es nula (es siempre positiva o siempre negativa); que es equivalente a decir que la función pendiente $v(u) = \frac{dF(u)}{du}$ es una función estrictamente monótona (ver apéndice B) de u .
- Es más fácil medir, controlar o pensar sobre la derivada de F con respecto a u que medir o pensar directamente respecto a u .

Debido a la condición 1, la derivada de $F(u)$ con respecto a u puede servir como un sustituto de u , es decir, hay un mapeo uno a uno entre u y $\frac{dF(u)}{du}$. La transformación de Legendre muestra cómo crear una función que contenga la misma información que $F(u)$ pero que, en vez de ser función de u , sea función de $\frac{dF(u)}{du}$.

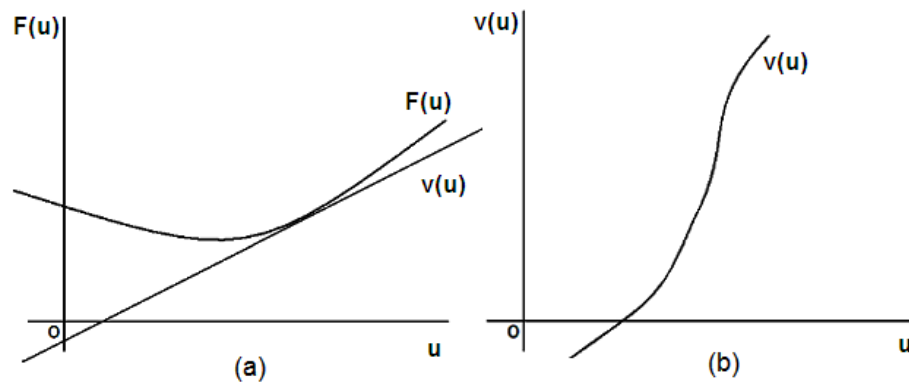


Figura (4.3): (a) Gráfica de una función convexa $F = F(u)$. (b) Gráfica de su tangente v en función de u .

Una forma gráfica de constatar cómo el valor de la pendiente v puede sustituir el valor de u en una función convexa, puede verse considerando el ejemplo mostrado en la figura 4.3(a). En dicha figura la curva dibujada representa una función $F(u)$ convexa. Al moverse a lo largo de la curva hacia la derecha (el sentido en que u se incrementa), la pendiente v de la tangente a la curva se incrementa continuamente. En otras palabras, si se grafica la pendiente v como una función de u , resultará una curva suavemente creciente, como se muestra en la figura 4.3(b). Si la segunda derivada de $F(u)$ existe (en cualquier rango de u en la cual $F(u)$ está definida, que es parte de la condición de que $F(u)$ sea suave), existe un valor único de la pendiente v para cada valor de u y viceversa. En lenguaje matemático apropiado, se dice que existe una relación 1 – 1 entre v y u .

Para encontrar la forma de realizar esta transformación, se tomará una ruta geométrica. Considérese la gráfica de $F(u)$ vs. u mostrada en la figura 4.4. Escójase un

valor de u , que represente la abcisa del punto donde la recta tangente toca a $F(u)$, por lo tanto, $F(u)$ será la ordenada de dicho punto. La ordenada del punto de corte de la tangente a la curva con el eje horizontal ("eje F ") está representado por G . Es fácil entonces ver, a partir del triángulo Δabc que,

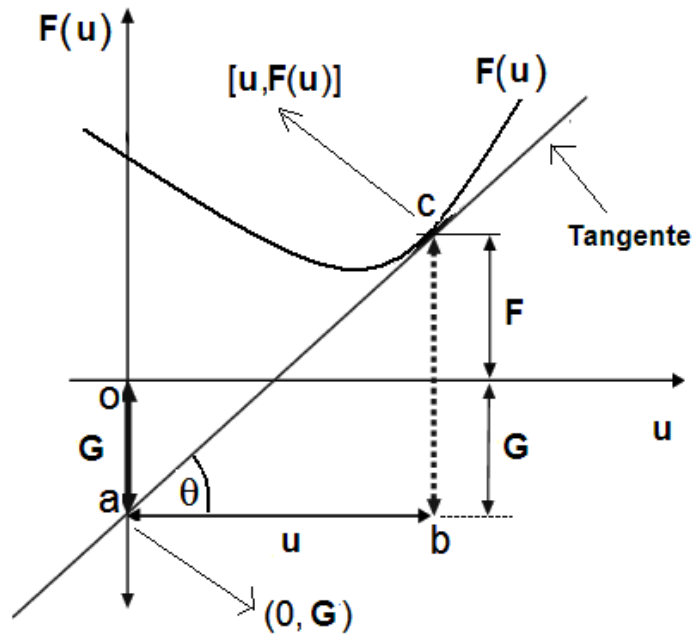


Figura (4.4): Representación de la relación fundamental F para el caso de una sola variable.

$$\tan(\theta) = v = \frac{F + G}{u} = \frac{dF(u)}{du} \quad (4.5)$$

de aquí que,

$$G(v) = uv - F(u) \quad (4.6)$$

donde la función G se denomina *transformada de legendre* de F .

Se tienen ahora dos posibles situaciones,

1. Si se tiene la relación $F(u)$ entonces se tiene también $v = \frac{dF(u)}{du}$, de donde se puede despejar $u(v)$ y reemplazarla en ella, de manera que queda G como una función sólo de v , $G = G(v)$.
2. Si se conoce la relación $G(v)$ y se quiere hallar $F(u)$ entonces, al diferenciar (4.6),

$$dG = vdu + u dv - dF \quad (4.7)$$

y como por (4.5),

$$dF = vdu$$

se puede escribir,

$$dG = u dv \quad (4.8)$$

de manera que,

$$u = \frac{dG}{dv} \quad (4.9)$$

De esta manera, si se dispone de v en función de u y se usa (4.9) para obtener $G = G(u)$, se puede escribir escribir,

$$F = uv - G \quad (4.10)$$

sólo en términos de la variable u .

Ejemplo 4.1

Sea $F(u) = u^3$, encontrar su transformada de Legendre.

Solución: De (4.6),

$$G(v) = uv - u^3 \quad (4.11)$$

y de (4.5),

$$v = \frac{dF(u)}{du} = \frac{d}{du}(u^3) = 3u^2 \Rightarrow u(v) = \left(\frac{v}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

por lo tanto, al sustituir (4.12) en (4.11) resulta,

$$G(v) = \left(\frac{v}{3}\right)^{\frac{1}{2}} v - \left(\frac{v}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = 2 \left(\frac{v}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Ejemplo 4.2

Sea $F(u) = au^2 + bu + c$ (a, b y c constantes), encontrar su transformada de Legendre.

Solución: De (4.6),

$$G(v) = uv - (au^2 + bu + c) \quad (4.13)$$

y de (4.5),

$$v = \frac{dF(u)}{du} = \frac{d}{du}(au^2 + bu + c) = 2au + b \Rightarrow u(v) = \frac{1}{2a}(v - b) \quad (4.14)$$

por lo tanto, al sustituir (4.14) en (4.13) resulta,

$$\begin{aligned} G(v) &= \frac{1}{2a}(v - b)v - \left\{ a \left[\frac{1}{2a}(v - b) \right]^2 + b \left[\frac{1}{2a}(v - b) \right] + c \right\} \\ &= \frac{1}{4a}(v - b)^2 - c \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3

Sea $F(u) = e^u + 1$, encontrar su transformada de Legendre.

Solución: De (4.6),

$$G(v) = uv - (e^u + 1) \tag{4.15}$$

y de (4.5),

$$v = \frac{dF(u)}{du} = \frac{d}{du}(e^u + 1) = e^u \Rightarrow u(v) = \ln v \tag{4.16}$$

por lo tanto, al sustituir (4.16) en (4.15) resulta,

$$G(v) = v \ln v - (v + 1) = v(\ln v - 1) - 1$$

4.3. Para más de una variable independiente

Ahora bien, todo el desarrollo anterior es válido para el caso de más de una variable independiente, así la transformada de Legendre tomará la forma,

$$G(v_j) = \sum_{i=1}^n u_i v_i - F(u_j) \tag{4.17}$$

con,

$$v_i = \frac{\partial F(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_i} = \frac{\partial F(u_j)}{\partial u_i} \tag{4.18}$$

y donde la sumatoria podría incluir sólo algunos términos, que corresponden a las variables que se transforman (*variables activas*), mientras que las otras se dejan inalteradas (*variables pasivas*).

El caso contrario vendrá dado por,

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^n u_i v_i - G(v_j) \tag{4.19}$$

con,

$$u_i = \frac{\partial G(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial v_i} = \frac{\partial F(v_j)}{\partial v_i} \tag{4.20}$$

Ejemplo 4.4

Encuentre la transformada de Legendre $G(v_1, v_2)$ de la función,

$$F(u_1, u_2) = e^{u_1} + u_2^2$$

Solución: Este es un caso de dos variables independientes, por lo tanto, de (4.17),

$$G(v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2 - (e^{u_1} + u_2^2) \quad (4.21)$$

y de (4.18),

$$v_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} (e^{u_1} + u_2^2) = e^{u_1} \Rightarrow u_1 = \ln v_1 \quad (4.22)$$

$$v_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2} (e^{u_1} + u_2^2) = 2u_2 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}v_2 \quad (4.23)$$

por lo tanto, al sustituir (4.22) y (4.23) en (4.21) resulta,

$$\begin{aligned} G(v_1, v_2) &= v_1 \ln v_1 + \frac{1}{2}v_2 v_2 - \left[v_1 + \left(\frac{1}{2}v_2 \right)^2 \right] \\ &= v_1 (\ln v_1 - 1) + \frac{1}{4}v_2^2 \end{aligned}$$

que es la transformada de Legendre pedida.

Ejemplo 4.5

Encuentre la transformada de Legendre $G(v_1, v_2, v_3)$ de la función,

$$F(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + cu_3 \text{Sen } u_2$$

donde c es una constante.

Solución: Este es un caso de tres variables independientes, por lo tanto, de (4.17),

$$G(v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 - (u_1^2 + cu_3 \text{Sen } u_2) \quad (4.24)$$

y de (4.18),

$$v_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} (u_1^2 + cu_3 \text{Sen } u_2) = 2u_1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}v_1$$

$$v_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2} (u_1^2 + cu_3 \text{Sen } u_2) = cu_3 \text{Cos } u_2 \Rightarrow u_3 = \frac{1}{c}v_2 \sec u_2$$

$$v_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3} = \frac{\partial}{\partial u_3} (u_1^2 + cu_3 \text{Sen } u_2) = c \text{Sen } u_2 \Rightarrow u_2 = \text{Sen}^{-1} \left(\frac{1}{c}v_3 \right)$$

de las cuales,

$$u_1 = \frac{1}{2}v_1 \quad (4.25)$$

$$u_2 = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{1}{c}v_3\right) \quad (4.26)$$

$$u_3 = \frac{1}{c}v_2 \sec\left[\text{Sen}^{-1}\left(\frac{1}{c}v_3\right)\right] = \frac{v_2}{\sqrt{c^2 - v_3^2}} \quad (4.27)$$

por lo tanto, al sustituir (4.25), (4.26) y (4.27) en (4.24) resulta,

$$\begin{aligned} G(v_1, v_2, v_3) &= \frac{1}{2}v_1v_1 + v_2 \text{Sen}^{-1}\left(\frac{1}{c}v_3\right) + v_3 \frac{v_2}{\sqrt{c^2 - v_3^2}} \\ &\quad - \left\{ \left(\frac{1}{2}v_1\right)^2 + c \frac{v_2}{\sqrt{c^2 - v_3^2}} \text{Sen}\left[\text{Sen}^{-1}\left(\frac{1}{c}v_3\right)\right] \right\} \\ &= \frac{1}{4}v_1^2 + v_2 \text{Sen}^{-1}\left(\frac{1}{c}v_3\right) \end{aligned}$$

que es la transformada de Legendre pedida.

Ejemplo 4.6

Encuentre la transformada de Legendre $G(v_1, v_2, v_3, v_4)$ de la función,

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_2 \ln u_1 - \text{Cos } u_3 + u_2 u_4$$

donde c es una constante.

Solución: Este es un caso de cuatro variables independientes, por lo tanto, de (4.17),

$$G(v_1, v_2, v_3, v_4) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 - (u_2 \ln u_1 - \text{Cos } u_3 + u_2u_4) \quad (4.28)$$

y de (4.18),

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}(u_2 \ln u_1 - \text{Cos } u_3 + u_2u_4) = \frac{u_2}{u_1} \\ v_2 &= \frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2}(u_2 \ln u_1 - \text{Cos } u_3 + u_2u_4) = \ln u_1 + u_4 \\ v_3 &= \frac{\partial F}{\partial u_3} = \frac{\partial}{\partial u_3}(u_2 \ln u_1 - \text{Cos } u_3 + u_2u_4) = \text{Sen } u_3 \\ v_4 &= \frac{\partial F}{\partial u_4} = \frac{\partial}{\partial u_4}(u_2 \ln u_1 - \text{Cos } u_3 + u_2u_4) = u_2 \end{aligned}$$

de las cuales,

$$u_1 = \frac{v_4}{v_1} \quad (4.29)$$

$$u_2 = v_4 \quad (4.30)$$

$$u_3 = \text{Sen}^{-1}(v_3) \quad (4.31)$$

$$u_4 = v_2 - \ln\left(\frac{v_4}{v_1}\right) \quad (4.32)$$

por lo tanto, al sustituir (4.29) a (4.32) en (4.28) resulta,

$$\begin{aligned}
 G(v_1, v_2, v_3, v_4) &= \frac{v_4}{v_1} v_1 + v_4 v_2 + v_3 \text{Sen}^{-1}(v_3) + \left[v_2 - \ln\left(\frac{v_4}{v_1}\right) \right] v_4 \\
 &\quad - \left\{ v_4 \ln\left(\frac{v_4}{v_1}\right) - \text{Cos}[\text{Sen}^{-1}(v_3)] + v_4 \left[v_2 - \ln\left(\frac{v_4}{v_1}\right) \right] \right\} \\
 &= v_4 \left[1 + v_2 - \ln\left(\frac{v_4}{v_1}\right) \right] + \sqrt{1 - v_3^2} + v_3 \text{Sen}^{-1}(v_3)
 \end{aligned}$$

que es la transformada de Legendre pedida.

4.4. Variables activas y pasivas

A las variables que se incluyen en la sumatoria de (4.17), es decir, las variables que se transforman se les denominan *variables activas* y las variables adicionales que no son parte de la transformación como tal, pero tienen estatus de parámetros, se les denominan *variables pasivas*.

Es posible encontrar cómo están relacionadas las derivadas parciales, con respecto a las variables pasivas, de las funciones F y G . En efecto, supóngase que se tiene $F = F(u_1, u_2, w)$ y $G = G(v_1, v_2, w)$, donde w es una variable pasiva, y que satisfacen las expresiones,

$$v_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1}, \quad v_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} \tag{4.33}$$

$$u_1 = \frac{\partial G}{\partial v_1}, \quad u_2 = \frac{\partial G}{\partial v_2} \tag{4.34}$$

donde (4.33) define v_1 y v_2 como funciones de u_1, u_2 y w ; y (4.34) define u_1 y u_2 como funciones de v_1, v_2 y w , es decir,

$$v_1 = v_1(u_1, u_2, w), \quad v_2 = v_2(u_1, u_2, w)$$

$$u_1 = u_1(v_1, v_2, w), \quad u_2 = u_2(v_1, v_2, w)$$

De (4.17) se tiene que,

$$F(u_1, u_2, w) + G(v_1, v_2, w) = u_1 v_1 + u_2 v_2 \tag{4.35}$$

y supóngase, además, que se sustituye en ella v_1 y v_2 por sus respectivas expresiones en términos de u_1, u_2 y w . Entonces, al derivar parcialmente (4.35) respecto a w , resulta,

$$\frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial w} + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial w}}_{=1} = u_1 \frac{\partial v_1}{\partial w} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial w}$$

o,

$$\frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial w} = \underbrace{\left(u_1 - \frac{\partial G}{\partial v_1}\right)}_{=0 \text{ por (4.35)}} \frac{\partial v_1}{\partial w} + \underbrace{\left(u_2 - \frac{\partial G}{\partial v_2}\right)}_{=0 \text{ por (4.35)}} \frac{\partial v_2}{\partial w} = 0$$

de aquí que,

$$\frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial w} = 0$$

que es la relación buscada y se mantiene para cada una de las variables pasivas. En general,

$$\frac{\partial F(u_j, w_j)}{\partial w_i} + \frac{\partial G(v_j, w_j)}{\partial w_i} = 0 \quad (4.36)$$

donde las w_j son las distintas variables pasivas que pueda contener F .

.....

Ejemplo 4.7

Encuentre la transformada de Legendre $G(v_1, v_2, w)$ de la función,

$$F(u_1, u_2, w) = 2u_1^2 - 3u_1u_2 + u_2^2 + 3wu_1$$

donde w es una variable pasiva. Verifique que,

$$\frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial w} = 0$$

Solución: De (4.17),

$$G(v_1, v_2, w) = u_1v_1 + u_2v_2 - (2u_1^2 - 3u_1u_2 + u_2^2 + 3wu_1) \quad (4.37)$$

y de (4.18),

$$v_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} (2u_1^2 - 3u_1u_2 + u_2^2 + 3wu_1) = 4u_1 - 3u_2 + 3w \quad (4.38)$$

$$v_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2} (2u_1^2 - 3u_1u_2 + u_2^2 + 3wu_1) = -3u_1 + 2u_2 \quad (4.39)$$

Al resolver el sistema formado por (4.38) y (4.39) para u_1 y u_2 resulta,

$$u_1 = -2v_1 - 3v_2 + 6w \quad (4.40)$$

$$u_2 = -3v_1 - 4v_2 + 9w \quad (4.41)$$

por lo tanto, al sustituir (4.40) y (4.41) en (4.37), y después de algunos cálculos algebraicos elementales resulta,

$$G(v_1, v_2, w) = -(v_1 - 3w)^2 + v_2(9w - 3v_1 - 2v_2)$$

que es la transformada de Legendre pedida.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w} (2u_1^2 - 3u_1u_2 + u_2^2 + 3wu_1) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial w} [-(v_1 - 3w)^2 + v_2(9w - 3v_1 - 2v_2)] \\ &= 3u_1 + 6(v_1 - 3w) + 9v_2 \\ &= \underbrace{3(-2v_1 - 3v_2 + 6w)}_{\text{por (4.40)}} + 6(v_1 - 3w) + 9v_2 = 0 \end{aligned}$$

verificándose así que $\frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial w} = 0$.

Ejemplo 4.8

Encuentre la transformada de Legendre $G(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2)$ de la función,

$$F(u_1, u_2, u_3, w_1, w_2) = 7u_1u_3 + 2u_2^2 - 5w_1u_3 - w_2^2$$

donde w_1 y w_2 son variables pasivas. Verifique además que,

$$\frac{\partial F}{\partial w_1} + \frac{\partial G}{\partial w_1} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial w_2} + \frac{\partial G}{\partial w_2} = 0$$

Solución: De (4.17),

$$G(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 - (7u_1u_3 + 2u_2^2 - 5w_1u_3 - w_2^2) \quad (4.42)$$

y de (4.18),

$$v_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} = 7u_3 \quad (4.43)$$

$$v_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} = 4u_2 \quad (4.44)$$

$$v_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3} = 7u_1 - 5w_1 \quad (4.45)$$

de las cuales se obtiene,

$$u_1 = \frac{1}{7}(v_3 + 5w_1) \quad (4.46)$$

$$u_2 = \frac{1}{4}v_2 \quad (4.47)$$

$$u_3 = \frac{1}{7}v_1 \quad (4.48)$$

por lo tanto, al sustituir (4.46), (4.47) y (4.48) en (4.42) resulta,

$$G(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2) = \frac{1}{8}v_2^2 + \frac{1}{7}v_1(v_3 + 5w_1) + w_2^2$$

que es la transformada de Legendre pedida.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w_1} + \frac{\partial G}{\partial w_1} &= \frac{\partial F}{\partial w_1} (7u_1u_3 + 2u_2^2 - 5w_1u_3 - w_2^2) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial w_1} \left[\frac{1}{8}v_2^2 + \frac{1}{7}v_1(v_3 + 5w_1) + w_2^2 \right] \\ &= -5u_3 + \frac{5}{7}v_1 \\ &= \underbrace{-5 \left(\frac{1}{7}v_1 \right)}_{\text{por (4.48)}} + \frac{5}{7}v_1 = 0 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w_2} + \frac{\partial G}{\partial w_2} &= \frac{\partial}{\partial w_2} (7u_1u_3 + 2u_2^2 - 5w_1u_3 - w_2^2) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial w_2} \left[\frac{1}{8}v_2^2 + \frac{1}{7}v_1(v_3 + 5w_1) + w_2^2 \right] \\ &= -2w_2 + 2w_2 = 0 \end{aligned}$$

verificándose así que $\frac{\partial F}{\partial w_1} + \frac{\partial G}{\partial w_1} = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial w_2} + \frac{\partial G}{\partial w_2} = 0$.

Ejemplo 4.9

Encuentre la transformada de Legendre $G(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3)$ de la función,

$$F(u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3) = w_1u_2 \ln u_1 - w_3 \text{Cos } u_3 + w_2u_2$$

donde w_1, w_2 y w_3 son variables pasivas. Verifique que,

$$\frac{\partial F}{\partial w_1} + \frac{\partial G}{\partial w_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial w_2} + \frac{\partial G}{\partial w_2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial w_3} + \frac{\partial G}{\partial w_3} = 0$$

Solución: De (4.17),

$$G(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 - (w_1u_2 \ln u_1 - w_3 \text{Cos } u_3 + w_2u_2) \quad (4.49)$$

y de (4.18),

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} (w_1 u_2 \ln u_1 - w_3 \cos u_3 + w_2 u_2) = \frac{w_1 u_2}{u_1} \\ v_2 &= \frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2} (w_1 u_2 \ln u_1 - w_3 \cos u_3 + w_2 u_2) = w_1 \ln u_1 + w_2 \\ v_3 &= \frac{\partial F}{\partial u_3} = \frac{\partial}{\partial u_3} (w_1 u_2 \ln u_1 - w_3 \cos u_3 + w_2 u_2) = w_3 \operatorname{Sen} u_3 \end{aligned}$$

de las cuales resulta,

$$u_1 = e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} \quad (4.50)$$

$$u_2 = \frac{v_1}{w_1} e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} \quad (4.51)$$

$$u_3 = \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{v_3}{w_3} \right) \quad (4.52)$$

por lo tanto, al sustituir (2.47) a (2.49) en (4.49) resulta,

$$\begin{aligned} G(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3) &= v_1 e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} + v_2 \frac{v_1}{w_1} e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} + v_3 \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{v_3}{w_3} \right) \\ &\quad - \left\{ w_1 \frac{v_1}{w_1} e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} \ln e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} - w_3 \cos \left[\operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{v_3}{w_3} \right) \right] + w_2 \frac{v_1}{w_1} e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} \right\} \\ &= \sqrt{w_3^2 - v_3^2} + v_1 e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} + v_3 \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{v_3}{w_3} \right) \end{aligned}$$

que es la transformada de Legendre pedida.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w_1} + \frac{\partial G}{\partial w_1} &= \frac{\partial}{\partial w_1} (w_1 u_2 \ln u_1 - w_3 \cos u_3 + w_2 u_2) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial w_1} \left[\sqrt{w_3^2 - v_3^2} + v_1 e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} + v_3 \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{v_3}{w_3} \right) \right] \\ &= u_2 \ln u_1 - \frac{v_1}{w_1^2} (v_2 - w_2) e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} \\ &= \underbrace{\frac{v_1}{w_1} e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} \ln e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} - \frac{v_1}{w_1^2} (v_2 - w_2) e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}}}_{\text{por (??) y (??)}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w_2} + \frac{\partial G}{\partial w_2} &= \frac{\partial}{\partial w_2} (w_1 u_2 \ln u_1 - w_3 \cos u_3 + w_2 u_2) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial w_2} \left[\sqrt{w_3^2 - v_3^2} + v_1 e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} + v_3 \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{v_3}{w_3} \right) \right] \\ &= u_2 - \frac{v_1}{w_1} e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} \\ &= \underbrace{\frac{v_1}{w_1} e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} - \frac{v_1}{w_1} e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}}}_{\text{por (??)}} = 0 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w_3} + \frac{\partial G}{\partial w_3} &= \frac{\partial}{\partial w_3} (w_1 u_2 \ln u_1 - w_3 \cos u_3 + w_2 u_2) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial w_3} \left[\sqrt{w_3^2 - v_3^2} + v_1 e^{\frac{v_2 - w_2}{w_1}} + v_3 \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{v_3}{w_3} \right) \right] \\ &= -\cos u_3 + \frac{w_3}{\sqrt{w_3^2 - v_3^2}} - \frac{v_3^2}{w_3 \sqrt{w_3^2 - v_3^2}} \\ &= \underbrace{-\cos \left[\operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{v_3}{w_3} \right) \right]}_{\text{por (??)}} + \frac{w_3}{\sqrt{w_3^2 - v_3^2}} - \frac{v_3^2}{w_3 \sqrt{w_3^2 - v_3^2}} = 0 \end{aligned}$$

verificándose así que $\frac{\partial F}{\partial w_1} + \frac{\partial G}{\partial w_1} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial w_2} + \frac{\partial G}{\partial w_2} = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial w_3} + \frac{\partial G}{\partial w_3} = 0$.

4.5. Algunas propiedades matemáticas de la transformación de Legendre

La construcción geométrica y las relaciones resultantes permiten mostrar relaciones elegantes y útiles. En particular considérense las siguientes:

4.5.1. La inversa de la transformación de Legendre

Ordinariamente, la inversa de una transformación es distinta de la transformación en sí. La transformación de Legendre se distingue entre ellas ya que ella misma es su inversa. Si se lleva a cabo la transformación de Legendre por segunda vez, se recobra la función convexa y suave original.

Por simplicidad, se mostrará esta propiedad para el caso de una variable independiente pero el resultado es válido para el caso de más de una variable independiente. Dada la función $F = F(u)$, su transformada de Legendre viene dada según (4.6) por,

$$G(v) = uv - F(u), \text{ con } v = \frac{dF(u)}{du}$$

Ahora, supóngase que se quiere la transformada de Legendre de $G(v)$. De forma análoga, su transformada H se obtiene al estilo de (4.6) como sigue,

$$H(u^*) = u^*v - G(v), \text{ con } u^* = \frac{dG(v)}{dv} \tag{4.53}$$

Según la propiedad, debe cumplirse que $H = F$. En efecto, de (4.53),

$$H(u^*) = u^*v - \underbrace{[uv - F(u)]}_{\text{por (4.6)}} = (u^* - u)v + F(u) \quad (4.54)$$

pero,

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{dG(v)}{dv} = \frac{d}{dv} \underbrace{[uv - F(u)]}_{\text{por (4.6)}} = u + v \frac{du}{dv} - \frac{dF(u)}{du} \frac{du}{dv} \\ &= u + v \frac{du}{dv} - \underbrace{v}_{\text{por (4.5)}} \frac{du}{dv} = u \end{aligned} \quad (4.55)$$

por lo tanto, al sustituir el resultado (4.55) en (4.54), resulta,

$$H(u) = F(u)$$

de aquí que,

La transformación de Legendre de una transformación de Legendre es la función original y la transformación de Legendre es su propia inversa.

Esta dualidad de la transformación de Legendre es mejor resumida, a partir de (4.6), por la expresión,

$$G(v) + F(u) = uv \quad (4.56)$$

que muestra la simetría entre G, v y F, u explícitamente. Esta expresión debe leerse con cuidado, en particular, a pesar de su apariencia, hay sólo una variable independiente: la u o la v . Estas dos variables están relacionadas la una con la otra a través de,

$$u(v) = \frac{dG(v)}{dv}, \quad \circ \quad v(u) = \frac{dF(u)}{du} \quad (4.57)$$

de esta manera la expresión (4.56) puede escribirse para ambos casos como,

$$G(v) + F[u(v)] = u(v)v, \quad \circ \quad G[v(u)] + F(u) = uv(u) \quad (4.58)$$

respectivamente.

Ejemplo 4.10

Encuentre la transformada de Legendre de la transformada encontrada en el ejemplo 4.1, es decir de,

$$G(v) = 2 \left(\frac{v}{3} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Solución: De (4.10),

$$F(u) = uv - 2 \left(\frac{v}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{4.59}$$

y de (4.9),

$$u = \frac{dG(v)}{dv} = \frac{d}{dv} \left[2 \left(\frac{v}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \right] = \left(\frac{v}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = 3u^2 \tag{4.60}$$

por lo tanto, al sustituir (4.60) en (4.59) resulta,

$$F(u) = 3u^2u - 2 \left(\frac{1}{3}3u^2\right)^{\frac{3}{2}} = u^3$$

que es, precisamente, la función cuya transformada de Legendre es $G(v)$.

Ejemplo 4.11

Encuentre la transformada de Legendre de la transformada encontrada en el ejemplo 4.4, es decir de,

$$G(v_1, v_2) = v_1 (\ln v_1 - 1) + \frac{1}{4}v_2^2$$

Solución: Este es un caso de dos variables independientes, por lo tanto, de (4.19),

$$F(u_1, u_2) = u_1v_1 + u_2v_2 - \left[v_1 (\ln v_1 - 1) + \frac{1}{4}v_2^2 \right] \tag{4.61}$$

y de (4.20),

$$u_1 = \frac{\partial G}{\partial v_1} = \frac{\partial}{\partial v_1} \left[v_1 (\ln v_1 - 1) + \frac{1}{4}v_2^2 \right] = \ln v_1 \Rightarrow v_1 = e^{u_1} \tag{4.62}$$

$$u_2 = \frac{\partial G}{\partial v_2} = \frac{\partial}{\partial v_2} \left[v_1 (\ln v_1 - 1) + \frac{1}{4}v_2^2 \right] = \frac{1}{2}v_2 \Rightarrow v_2 = 2u_2 \tag{4.63}$$

por lo tanto, al sustituir (4.62) y (4.63) en (4.61) resulta,

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2) &= u_1e^{u_1} + 2u_2u_2 - \left[e^{u_1} (\ln e^{u_1} - 1) + \frac{1}{4}(2u_2)^2 \right] \\ &= e^{u_1} + u_2^2 \end{aligned}$$

que es, precisamente, la función cuya transformada de Legendre es $G(v_1, v_2)$.

Ejemplo 4.12

Encuentre la transformada de Legendre de la transformada encontrada en el ejemplo 4.8, es decir de,

$$G(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2) = \frac{1}{8}v_2^2 + \frac{1}{7}v_1(v_3 + 5w_1) + w_2^2$$

Solución: Este es un caso de tres variables independientes, por lo tanto, de (4.19),

$$F(u_1, u_2, u_3, w_1, w_2) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 - \left[\frac{1}{8}v_2^2 + \frac{1}{7}v_1(v_3 + 5w_1) + w_2^2 \right] \quad (4.64)$$

y de (4.20),

$$u_1 = \frac{\partial G}{\partial v_1} = \frac{\partial}{\partial v_1} \left[\frac{1}{8}v_2^2 + \frac{1}{7}v_1(v_3 + 5w_1) + w_2^2 \right] = \frac{1}{7}(v_3 + 5w_1) \Rightarrow v_3 = 7u_1 - 5w_1 \quad (4.65)$$

$$u_2 = \frac{\partial G}{\partial v_2} = \frac{\partial}{\partial v_2} \left[\frac{1}{8}v_2^2 + \frac{1}{7}v_1(v_3 + 5w_1) + w_2^2 \right] = \frac{1}{4}v_2 \Rightarrow v_2 = 4u_2 \quad (4.66)$$

$$u_3 = \frac{\partial G}{\partial v_3} = \frac{\partial}{\partial v_3} \left[\frac{1}{8}v_2^2 + \frac{1}{7}v_1(v_3 + 5w_1) + w_2^2 \right] = \frac{1}{7}v_1 \Rightarrow v_1 = 7u_3 \quad (4.67)$$

por lo tanto, al sustituir (4.62) y (4.63) en (4.61) resulta,

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2, u_3, w_1, w_2) &= 7u_3u_1 + 4u_2u_2 + u_3(7u_1 - 5w_1) \\ &\quad - \left[\frac{1}{8}(4u_2)^2 + \frac{1}{7}7u_3(7u_1 - 5w_1 + 5w_1) + w_2^2 \right] \\ &= 7u_1u_3 + 2u_2^2 - 5w_1u_3 - w_2^2 \end{aligned}$$

que es, precisamente, la función cuya transformada de Legendre es $G(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2)$.

.....

4.5.2. Valores extremos

Supóngase que la función $F(u)$ es cóncava hacia arriba (tal como en la figura 4.4), entonces debe tener un mínimo. Suponiendo que esto ocurre, entonces el mínimo es único. Denótese este punto por,

$$F_{\text{mín}} = F(u_{\text{mín}}) \quad (4.68)$$

Por supuesto, la pendiente se anula en este punto, es decir, $v(u_{\text{mín}}) = 0$. Si se introduce este punto en la expresión (4.6) que define la transformación de Legendre, resulta que el valor mínimo de F es,

$$F_{\text{mín}} = -G(0) \quad (4.69)$$

De forma similar, a partir del hecho de que F es la transformación de Legendre de G , se puede concluir que el valor mínimo de G es,

$$G_{\text{mín}} = -F(0) \quad (4.70)$$

Ahora bien, se puede usar la relación simétrica (4.56) para ver qué ocurre para extremos generales. Supóngase que F toma su valor extremo en u_{ext} , el cual corresponde a una tangente horizontal, $v = 0$. De esta manera, a partir de (4.56),

$$G(0) + F(u_{\text{ext}}) = 0 \quad (4.71)$$

De forma similar, G tendrá un valor extremo en v_{ext} , donde $u(v_{\text{ext}}) = 0$ debido a (4.9), de manera que,

$$G(v_{\text{ext}}) + F(0) = 0 \quad (4.72)$$

Para apreciar el significado geométrico de esta ecuación, sólo se necesita examinar la figura 4.4 y ver que la intersección de la tangente a la curva $F(u)$ con el eje vertical nunca alcanza más allá de $F(0)$.

4.5.3. Simetrías y relaciones entre derivadas

Puesto que F y G son transformaciones de Legendre la una de la otra, es de esperarse que existan numerosas relaciones simétricas. Las expresiones (4.56) y (4.57) constituyen dos de ellas. A partir de estas expresiones, se puede obtener un conjunto infinito de relaciones entre F y G , que conducen a algunas relaciones muy elegantes e interesantes.

Puesto que cada función depende sólo de una variable, a partir de (4.57) es posible escribir,

$$dG(v) = u(v) dv, \quad \text{y} \quad dF(u) = v(u) du \quad (4.73)$$

Ahora, se pueden derivar nuevamente las expresiones (4.57) con respecto a v o u , de manera que,

$$\frac{d^2 G(v)}{dv^2} = \frac{du(v)}{dv}, \quad \text{y} \quad \frac{d^2 F(u)}{du^2} = \frac{dv(u)}{du}$$

pero como $du/dv = (dv/du)^{-1}$ entonces,

$$\frac{d^2 G(v)}{dv^2} \frac{d^2 F(u)}{du^2} = 1 \quad (4.74)$$

que ilustra claramente la importancia de la convexidad (estricta) ya que ninguno de los dos factores pueden anularse.

Derivando nuevamente (4.74), se puede escribir una relación simétrica para la tercera derivada,

$$\frac{\frac{d^3 G}{dv^3}}{\left(\frac{d^2 G}{dv^2}\right)^{3/2}} + \frac{\frac{d^3 F}{du^3}}{\left(\frac{d^2 F}{du^2}\right)^{3/2}} = 0 \quad (4.75)$$

Es posible obtener un conjunto infinito de relaciones como las anteriores para derivadas de orden superior derivando una y otra vez. Tal ejercicio también muestra que si F es suave, entonces G también lo es. Las relaciones para derivadas superiores son más y más complejas.

4.6. Problemas

1. Sea $F(u) = u^n$, encontrar su transformada de Legendre. **Resp.:** $G(v) = (n-1) \left(\frac{v}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}$.
2. Sea $F(u) = \frac{1}{2}ku^2$ (k constante), encontrar su transformada de Legendre. **Resp.:** $G(v) = \frac{1}{2k}v^2$.
3. Sea $F(u) = u^\alpha/\alpha$ (α constante), encontrar su transformada de Legendre. **Resp.:** $G(v) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) v^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.
4. Encuentre la transformada de Legendre $G(v_1, v_2)$ de la función,

$$F(u_1, u_2) = 2u_1^2 + 3u_1u_2 + u_2^2$$

Resp.: $G(v_1, v_2) = -v_1^2 + 3v_1v_2 - 2v_2^2$.

5. Encuentre la transformada de Legendre $G(v_1, v_2, v_3)$ de la función,

$$F(u_1, u_2, u_3) = au_1^2 + bu_3^2 + u_2u_1$$

donde a y b son constantes.

6. Encuentre la transformada de Legendre $G(v, w)$ de la función,

$$F(u, w) = w(u^2w - 4)$$

donde w es una variable pasiva. Verifique que,

$$\frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial w} = 0$$

7. Encuentre la transformada de Legendre $G(v_1, v_2, w_1, w_2)$ de la función,

$$F(u_1, u_2, w_1, w_2) = 2u_1^2 w_1 + 3u_1 u_2 w_2 + u_2^2$$

donde w_1 y w_2 son variables pasivas. Verifique que,

$$\frac{\partial F}{\partial w_1} + \frac{\partial G}{\partial w_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial w_2} + \frac{\partial G}{\partial w_2} = 0$$

8. Encuentre la transformada de Legendre $G(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3)$ de la función,

$$F(u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3) = w_1 u_2^2 - w_3 u_3 u_2 + w_2 u_2 u_1 + w_2^2$$

donde w_1, w_2 y w_3 son variables pasivas. Verifique que,

$$\frac{\partial F}{\partial w_1} + \frac{\partial G}{\partial w_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial w_2} + \frac{\partial G}{\partial w_2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial w_3} + \frac{\partial G}{\partial w_3} = 0$$

9. Muestre que,

$$\frac{\frac{d^3 G}{dv^3}}{\left(\frac{d^2 G}{dv^2}\right)^{3/2}} + \frac{\frac{d^3 F}{du^3}}{\left(\frac{d^2 F}{du^2}\right)^{3/2}} = 0$$

donde $G = G(v)$ es la transformada de Legendre de $F = F(u)$.

10. Muestre que si $G = G(v_i)$ es la transformada de Legendre de $F = F(u_i)$, entonces la transformada de Legendre de $G = G(v_i)$ es precisamente $F = F(u_i)$.

11. Encuentre la transformada de Legendre de la función G obtenida en el problema 1 y verifique que se reobtiene la función F dada en dicho problema.

12. Encuentre la transformada de Legendre de la función G obtenida en el problema 2 y verifique que se reobtiene la función F dada en dicho problema.

13. Encuentre la transformada de Legendre de la función G obtenida en el problema 3 y verifique que se reobtiene la función F dada en dicho problema.

14. Encuentre la transformada de Legendre de la función G obtenida en el problema 4 y verifique que se reobtiene la función F dada en dicho problema.

15. Encuentre la transformada de Legendre de la función G obtenida en el problema 5 y verifique que se reobtiene la función F dada en dicho problema.

16. Encuentre la transformada de Legendre de la función G obtenida en el problema 6 y verifique que se reobtiene la función F dada en dicho problema.

17. Encuentre la transformada de Legendre de la función G obtenida en el problema 7 y verifique que se reobtiene la función F dada en dicho problema.
18. Encuentre la transformada de Legendre de la función G obtenida en el problema 8 y verifique que se reobtiene la función F dada en dicho problema.

Parte II

Mecánica de Lagrange y Hamilton

CAPÍTULO 5

Mecánica Lagrangiana

La aplicación directa de las leyes de Newton al movimiento de sistemas mecánicos será ahora sustituido por una propuesta general, un método muy elegante y sofisticado para encontrar las ecuaciones de movimiento para todos los sistemas dinámicos, desarrollado por el matemático Joseph Louis Lagrange.

Contents

5.1. Ecuaciones de Lagrange partiendo del Principio de D'Alembert . . .	154
5.1.1. Sistemas holónomos	157
5.1.2. Sistemas no-holónomos	160
5.2. Ecuaciones de Lagrange partiendo del Principio de Hamilton	162
5.2.1. Sistemas holónomos	162
5.2.2. Sistemas no-holónomos	163
5.3. Ejemplos con ligaduras holónomas (forma implícita)	163
5.4. Ejemplos con ligaduras holónomas (forma explícita)	182
5.5. Ejemplos con ligaduras semi-holónomas	194
5.6. Condición de integrabilidad de las ecuaciones de Lagrange	201
5.7. Invariancia de las ecuaciones de Lagrange	202
5.8. Equivalencia entre las ecuaciones de Lagrange y de Newton	204
5.9. Momentos generalizados	205
5.10. Coordenadas cíclicas o ignorables	206
5.11. Integrales primeras de movimiento	206

5.12. Integrales primeras de movimiento para un sistema cerrado 208

5.13. Teoremas de conservación 209

 5.13.1. Conservación de la energía 209

 5.13.2. Conservación del momento generalizado - Conservación del momento lineal y angular 212

5.14. Teorema de Noether 217

5.15. Mecánica Lagrangiana vs la Newtoniana 220

5.16. Problemas 221

5.1. Ecuaciones de Lagrange partiendo del Principio de D'Alembert

Comiencese por tratar de escribir el principio de D'Alembert (2.68) de manera que incluya los desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas.

Recuérdese, de la sección 2.9.1, que la expresión para los desplazamientos virtuales $\delta \vec{r}_i$ viene dada por (2.53) como sigue,

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \text{ con } i = 1, 2, \dots, N \tag{5.1}$$

donde, a diferencia de (2.53), se supone que en principio no existen ligaduras en el sistema, por esta razón la sumatoria se hace hasta $3N$. Nótese que no hay cambio alguno de tiempo δt pues, como se vio en la sección 2.9.1, por definición de desplazamiento virtual, en éste sólo intervienen cambios de las coordenadas espaciales, por lo que el desplazamiento virtual es perpendicular a la fuerza de ligadura sólo si la ligadura misma cambia con el tiempo. Ahora, de (2.68) se puede escribir,

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \delta \vec{r}_i}_{\text{Término A}} - \underbrace{\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \bullet \delta \vec{r}_i}_{\text{Término B}} = 0 \tag{5.2}$$

El término A de (5.2) queda, al usar (5.1), como,

$$\begin{aligned} \text{Término A} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i \bullet \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{3N} \left(\vec{F}_i \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^{3N} \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{3N} Q_j \delta q_j \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde,

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (5.4)$$

son las componentes de las llamadas *fuerzas generalizadas* como ya se vio en la sección 2.8.4, expresión (2.41).

Por otro lado, el término B de la expresión (5.2) puede escribirse, en virtud de (5.1), como,

$$\begin{aligned} \text{Término B} &= \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^{3N} \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde, para desarrollar $\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ se ha usado la propiedad,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} = \frac{d}{dt} (\vec{A} \cdot \vec{B}) - \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}, \text{ con } \vec{A} = \dot{\vec{r}}_i \text{ y } \vec{B} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

y además,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}}_{\text{por (2.30)}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j} = \underbrace{\sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \delta_{lj}}_{\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{lj}} \\ &= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (5.7)$$

a la que suele llamársele *regla de supresión o eliminación de puntos*. Ahora, al sustituir (5.6) y (5.7) en (5.5) resulta,

$$\text{Término B} = \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \quad (5.8)$$

y como,

$$m_i \dot{\vec{r}}_i \bullet \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \bullet \dot{\vec{r}}_i \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.9)$$

$$m_i \dot{\vec{r}}_i \bullet \underbrace{\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}}_{\neq 0, \dot{\vec{r}}_i(q_i, \dot{q}_i, t)} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \bullet \dot{\vec{r}}_i \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \quad (5.10)$$

entonces, al sustituir (5.9) y (5.10) en (5.8) resulta,

$$\begin{aligned} \text{Término B} &= \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N T_i \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^N T_i \right) \right] \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j \end{aligned} \quad (5.11)$$

Por último, al sustituir (5.3) y (5.11) en (5.2), el principio de D'Alembert adopta la forma,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3N} Q_j \delta q_j - \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Esta expresión, al tratarse del principio de D'Alembert, puede ser considerada como ecuación fundamental de la dinámica. Por otro lado, las fuerzas generalizadas (5.4) pueden ser descompuestas en una parte Q_j^U derivada de un potencial $U = U(q_i, \dot{q}_i, t)$ (potenciales dependientes de la velocidad)¹,

$$Q_j^U(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (5.13)$$

y una parte Q_j^{NU} no derivada de un potencial,

$$Q_j^{NU} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{NU} \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (5.14)$$

es decir,

$$Q_j = Q_j^U + Q_j^{NU} \quad (5.15)$$

¹Los campos de fuerzas electromagnéticos sobre las cargas en movimiento son de este tipo.

por lo que (5.12) puede escribirse como,

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - Q_j^{NU} \right] \delta q_j = 0 \quad (5.16)$$

donde la función,

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (5.17)$$

que será llamada *la lagrangiana* o *lagrangiano* del sistema a estudiar.

5.1.1. Sistemas holónomos

Es posible que se presenten dos casos:

Cuando las ligaduras se usan en forma implícita

Cuando las K ligaduras holónomas (2.12), escritas en función de las coordenadas generalizadas, es decir,

$$f_l(q_i, t) = 0, \text{ con } i = 1, 2, \dots, s = 3N - k; l = 1, 2, \dots, K \quad (5.18)$$

son usadas para reducir el número de coordenadas generalizadas desde $3N$ (dependientes + independientes) a $s = 3N - K$ (independientes), entonces todos los s desplazamientos virtuales δq_j en (5.16) se convierten en independientes los unos de los otros. Ahora, debido a que cada desplazamiento virtual puede tomar cualquier valor para cada tiempo t , entonces para que se satisfaga (5.16) se requiere que cada coeficiente de los δq_j se anule, es decir que,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - Q_j^{NU} = 0, \text{ con } j = 1, 2, \dots, s \quad (5.19)$$

para las s coordenadas q_i independientes o grados de libertad del sistema. Por lo tanto, hay s de estas ecuaciones, y junto con las K ecuaciones de ligadura y las condiciones iniciales que son impuestas, describen completamente el movimiento del sistema. Estas ecuaciones constituyen las llamadas *Ecuaciones de Lagrange* para sistemas holónomos.

Si el sistema es conservativo, es decir $Q_j^{NU} = 0$ y $U = U(q_i)$, entonces las ecuaciones (5.19) se pueden escribir como,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \text{ con } j = 1, 2, \dots, s \quad (5.20)$$

Además, de (5.12), ya que los desplazamientos virtuales δq_j son independientes, se obtiene,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \text{ con } j = 1, 2, \dots, s \quad (5.21)$$

que son las llamadas *ecuaciones de Lagrange en su forma básica*. El significado físico de los términos $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$ es el de las fuerzas de inercia. Para comprobarlo, tómease como coordenadas las propias las coordenadas vectoriales x_j ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) \right] = \frac{d}{dt} (m_j \dot{x}_j) = m_j \ddot{x}_j$$

y los término $\frac{\partial T}{\partial q_j}$ pueden interpretarse como fuerzas ficticias procedentes de la elección del conjunto de coordenadas generalizadas q_j . En caso de que éstas sean simplemente las componentes cartesianas de los vectores \vec{r}_i , desaparecerían. Estas fuerzas se añaden a las fuerzas generalizadas Q_j en la dirección de q_j .

Cuando las ligaduras se usan en forma explícita

Cuando las K ligaduras holónomas (2.12) (o (5.18) ya escritas en función de las coordenadas generalizadas) no son usadas para reducir las coordenadas generalizadas a sólo aquellas que son independientes sino que son anexadas en forma explícita a la expresión (5.16), entonces, K de los desplazamientos virtuales δq_j en (5.16) dependen de las s coordenadas independientes y están relacionados por K ligaduras²,

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_l}{\partial q_j} \delta q_j = 0, \text{ con } l = 1, 2, \dots, K \quad (5.22)$$

las cuales reciben el nombre de *ligaduras instantáneas* (proviene de un tiempo fijo). Es posible, en forma explícita, introducir (5.22) en (5.16) mediante el uso del método de los multiplicadores de Lagrange $\lambda_l(t)$, sumando la cantidad,

$$\sum_{l=1}^K \sum_{j=1}^{3N} \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \quad (5.23)$$

a su miembro derecho (y haciendo algunos arreglos) resultando,

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^K \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial q_j} - Q_j^{NU} \right] \delta q_j(t) = 0 \quad (5.24)$$

²Se obtiene diferenciando (5.18) y luego haciendo $dt = 0$. La sumatoria se efectúa hasta $3N$ debido a que las ligaduras no se están usando para suprimir las coordenadas dependientes.

Si ahora se denotan las s coordenadas independientes mediante q_1, q_2, \dots, q_s y las K dependientes como $q_{s+1}, q_{s+2}, \dots, q_{3N}$, entonces los K multiplicadores λ_l previamente no asignados son ahora elegidos de tal manera que satisfagan las K ecuaciones,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^K \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial q_j} + Q_j^{NU}, \text{ con } j = s+1, s+2, \dots, 3N \quad (5.25)$$

de aquí que las ecuaciones (5.24) se reduzcan a,

$$\sum_{j=1}^s \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^K \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial q_j} - Q_j^{NU} \right] \delta q_j(t) = 0 \quad (5.26)$$

para las s coordenadas q_j independientes. Ahora, los s desplazamientos virtuales δq_j en (5.26) son todos independientes y arbitrarios, por lo tanto cada uno de sus coeficientes debe anularse por separado.

De lo anterior, se deduce entonces que las ecuaciones,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^K \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial q_j} + Q_j^{NU}, \text{ con } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (5.27)$$

representan las ecuaciones de Lagrange para el conjunto completo de coordenadas dependientes e independientes q_1, q_2, \dots, q_{3N} . Estas $3N$ ecuaciones en conjunto con las K ecuaciones dadas por (5.18) forman un sistema de $3N + K$ ecuaciones para $3N + K$ incógnitas, $3N$ q_j y K λ_l , quedando así determinado dicho sistema (en principio).

Las ecuaciones (5.27) tienen un término adicional con respecto a las (5.19), el cual viene dado por,

$$Q_j^{lig} = \sum_{l=1}^K \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial q_j}, \text{ con } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (5.28)$$

que son fuerzas adicionales que actúan sobre el sistema. Estas fuerzas están relacionadas con las ligaduras y se les da el nombre de *fuerzas generalizadas de ligadura*. Estas fuerzas, debido a (5.22) no realizan trabajo virtual como lo requiere la validez del principio de D'Alembert.

Si se consideran sólo fuerzas que se derivan de potenciales, las ecuaciones (5.27) se reducen a,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^K \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial q_j}, \text{ con } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (5.29)$$

Por otro lado, como las ligaduras (5.18) son independientes de las velocidades generalizadas \dot{q}_i , es posible escribir (5.27) de la siguiente forma,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_j} - Q_j^{NU} = 0, \text{ con } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (5.30)$$

donde,

$$\tilde{L} = L + \sum_{l=1}^K \lambda_l(t) f_l \quad (5.31)$$

es decir, el problema se ha reducido al del caso 1 pero con un Lagrangiano dado por (5.31), mostrándose así la equivalencia entre (5.20) y (5.30).

Nótese que los caminos variados (desplazados) $q_i + \delta q_i$ no sólo cumplen con las condiciones esenciales (5.22) para los desplazamientos virtuales, sino que también satisfacen las ecuaciones de ligadura,

$$f_l(q_i + \delta q_i, t) = f_l(q_i, t) + \delta f_l(q_i, t) \quad (5.32)$$

ya que no hay cambio para las ligaduras (5.18). es decir,

$$\delta f_l = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_l}{\partial q_j} \delta q_j = 0, \text{ con } l = 1, 2, \dots, K$$

Debido a esto, los caminos variados son todos geoméricamente posibles ya que todos se ajustan a las ecuaciones (5.18), que es el requerimiento clave para poder aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange.

5.1.2. Sistemas no-holónomos

Las ligaduras no-holónomas sólo pueden ser introducidas en forma explícita ya que, por su naturaleza, no es posible usarlas para eliminar coordenadas dependientes. Estas ligaduras, como fue mencionado en la sección 2.3.3, vienen dadas (en coordenadas generalizadas) por,

$$f_l(q_i, \dot{q}_i, t) = 0, \text{ con } i = 1, 2, \dots, 3N; l = 1, 2, \dots, K \quad (5.33)$$

que son frecuentemente encontradas en la forma,

$$f_l(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{j=1}^{3N} A_{lj}(q_i, t) \dot{q}_j + B_l(q_i, t) = 0, \text{ con } l = 1, 2, \dots, K \quad (5.34)$$

Los desplazamientos virtuales δq_j para sistemas no-holónomos con K ligaduras lineales del tipo (5.18) obedecidas por los caminos verdaderos, están también obligados a obedecer las K condiciones instantáneas³,

$$\sum_{j=1}^{3N} A_{lj}(q_i, t) \delta q_j = 0, \text{ con } l = 1, 2, \dots, K \quad (5.35)$$

Al igual como se hizo con (5.22), las condiciones lineales (5.35) también pueden ser anexadas al principio de D'Alembert en forma explícita, ya que (5.16) es lineal en δq_j . Sumando,

$$\sum_{l=1}^K \sum_{j=1}^{3N} \lambda_l(q_i, t) A_{lj}(q_i, t) \delta q_j = 0 \quad (5.36)$$

al miembro derecho de (5.16) y procediendo de forma análoga a la sección anterior, las ecuaciones de Lagrange para las ligaduras no-holónomas (5.34) resultan en la forma,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^K \lambda_l(q_i, t) A_{lj} + Q_j^{NU}, \text{ con } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (5.37)$$

para todas las coordenadas. Aquí las fuerzas generalizadas de ligadura vienen dadas por,

$$Q_j^{lig} = \sum_{l=1}^K \lambda_l(q_i, t) A_{lj}, \text{ con } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (5.38)$$

Ecuaciones análogas a (5.30) no son posibles para las ligaduras no-holónomas ya que los caminos desplazados $q_i + \delta q_i$ para sistemas con ligaduras holónomas lineales no son geoméricamente posibles y, por lo tanto, no satisfacen el requerimiento clave para la aplicación del método de los multiplicadores de Lagrange. Sólo es posible en el caso en que las ligaduras (5.34) sean integrables, convirtiéndose así en holónomas⁴.

Para el caso en que las fuerza sean derivables de potenciales, las ecuaciones (5.37) se reducen a,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^K \lambda_l A_{lj}, \text{ con } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (5.39)$$

³Se obtienen escribiendo (5.34) en forma diferencial $f_l dt = \sum_i A_{li}(q_i, t) dq_i + B_l dt$ y luego haciendo $dt = 0$.

⁴Ver referencia (17) para detalles.

5.2. Ecuaciones de Lagrange partiendo del Principio de Hamilton

5.2.1. Sistemas holónomos

Como en la sección 5.1 es posible que se presenten dos casos:

Cuando las ligaduras se usan en forma implícita

En términos del cálculo de variaciones, el Principio de Hamilton (sección 2.10.3) se puede escribir como,

$$\delta S = 0 \quad (5.40)$$

donde S es la acción dada por,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (5.41)$$

con,

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q_i, t) \quad (5.42)$$

es el Lagrangiano ya definido en la sección 5.1, expresión (5.17).

El procedimiento a seguir es análogo al seguido en la sección 3.2.2 tomando las coordenadas generalizadas q_i como independientes, por haberse eliminado las dependientes mediante el uso de las ligaduras holónomas (5.18). Por lo tanto, la integral de la expresión (5.41) es análoga a la expresión (3.90) estudiada en la sección 3.2.2. Si se hace una comparación entre estas expresiones se encuentra que,

Sección 3.2.2	Esta sección
x	t
$y_i(x)$	$q_i(t)$
$y'_i(x)$	$\dot{q}_i(t)$
$f(y_i, y'_i; x)$	$L(q_i, \dot{q}_i, t)$

de manera que, las ecuaciones de Euler (3.93) correspondientes al problema variacional establecido en la expresión (5.40), pueden ser escritas como,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \text{ con } j = 1, 2, \dots, s \quad (5.43)$$

que son las mismas dadas por (5.19) pero donde se han considerado sólo fuerzas derivables de potenciales (es decir, las mismas (5.20)).

Cuando las ligaduras se usan en forma explícita

Para este caso es posible, como se mostró en la sección 5.1, escribir un Lagrangiano \tilde{L} dado por (5.31) en el cual se han introducido las ligaduras holónomas (5.18) en forma explícita mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange. Por lo tanto, el problema variacional para este caso puede escribirse como,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[L + \sum_{l=1}^K \lambda_l(t) f_l \right] dt \quad (5.44)$$

que, siguiendo un procedimiento análogo al empleado para tratar el problema variacional planteado por (5.41), resulta en las ecuaciones de Euler,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i = \sum_{l=1}^K \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i}, \text{ con } i = 1, 2, \dots, 3N \quad (5.45)$$

que son las mismas dadas por (5.27) pero donde se han considerado sólo fuerzas derivables de potenciales (es decir, las mismas (5.29)).

5.2.2. Sistemas no-holónomos

Para este caso, al considerar ligaduras no-holónomas (5.34) que son las más frecuentes en los problemas de Mecánica, sólo es posible escribir un problema variacional como el planteado por (5.44) cuando dichas ligaduras son integrables, es decir, cuando son en realidad holónomas⁵. Como las ligaduras son holónomas, el problema variacional a plantearse debe concluir encontrándose las mismas ecuaciones (5.45) o (5.27) si se consideran fuerzas que no se derivan de un potencial.

5.3. Ejemplos con ligaduras holónomas (forma implícita)

Los ejemplos siguientes representan sistemas holónomos en los que las ecuaciones de ligadura (de haberlas) serán usadas en forma implícita, es decir, serán usadas para reducir el conjunto de coordenadas generalizadas particular de cada situación planteada, a un conjunto de coordenadas generalizadas propias, es decir, independientes las unas de las otras. Es de hacer notar que sólo la ejercitación intensa y continua es la que permitirá, al novicio, adquirir destrezas e intuición a la hora de escoger las coordenadas generalizadas óptimas para un problema particular.

⁵Ver referencia (17) para detalles sobre esta afirmación.

Ejemplo 5.1

Para la partícula de masa m mostrada en la figura 5.1, encuentre la ecuación de movimiento y su aceleración a lo largo del plano inclinado usando las ecuaciones de Lagrange.

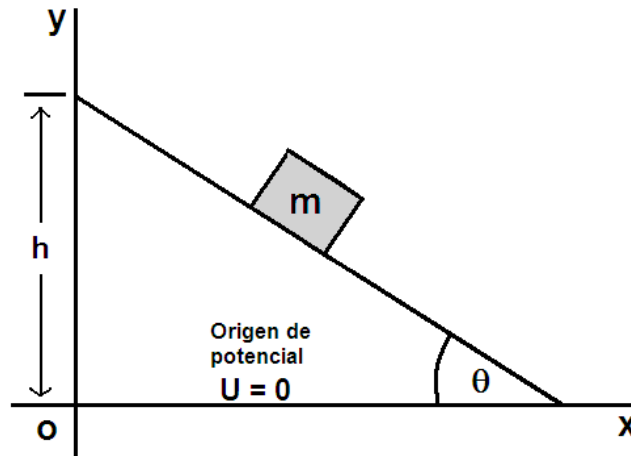


Figura (5.1): Partícula de masa m que se desplaza hacia abajo en un plano inclinado un ángulo θ con respecto a la horizontal (Ejemplo 5.1).

Solución: En coordenadas Cartesianas se tiene que la energía cinética viene dada por,

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (5.46)$$

y la energía potencial (para el origen de potencial escogido) por,

$$U = mgy \quad (5.47)$$

de manera que el Lagrangiano viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \quad (5.48)$$

Por otro lado, es fácil notar que la relación entre x y y viene dada por la ecuación de la recta que describe el plano inclinado, por lo tanto,

$$y = -x \tan \theta + h \quad (5.49)$$

de manera que el sistema tiene sólo un grado de libertad. Si se escoge x como coordenada generalizada, es decir, sustituyendo (5.49) en (5.48), el Lagrangiano se puede escribir como,

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \left(-\dot{x} \tan \theta \right)^2 \right] - mg(-x \tan \theta + h) \\ &= \frac{1}{2}m \dot{x}^2 \sec^2 \theta + mgx \tan \theta - mgh \end{aligned} \quad (5.50)$$

de aquí que,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg \tan \theta \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \sec^2 \theta \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \sec^2 \theta$$

Entonces, a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.20), se obtiene,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = g \text{ Sen } \theta \text{ Cos } \theta \quad (5.51)$$

que es la ecuación de movimiento pedida.

La ecuación para la aceleración en y viene dada por la segunda derivada total de (5.49) con respecto al tiempo, es decir,

$$\ddot{y} = -\ddot{x} \tan \theta \quad (5.52)$$

entonces la aceleración a lo largo del plano inclinado viene dada por,

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \underbrace{\left(-\ddot{x} \tan \theta \right)^2}_{\text{por (5.49)}}} = \ddot{x} \sec \theta \quad (5.53)$$

y al usar (5.51),

$$a = g \text{ Sen } \theta$$

que es el resultado ya conocido de la Física elemental.

Ejemplo 5.2

Encuentre, usando las ecuaciones de Lagrange, las ecuaciones de movimiento de una partícula de masa m que se encuentra inmersa en un campo de fuerza conservativo (ver figura 5.2) (a) en coordenadas Cartesianas y (b) en coordenadas esféricas.

Solución: La figura 5.2 muestra la situación descrita en el problema.

(a) En coordenadas Cartesianas se tiene que el Lagrangiano se puede escribir como,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - U(x, y, z) \quad (5.54)$$

de aquí que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x & \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y & \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= m\ddot{y} \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z & \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) &= m\ddot{z} \end{aligned}$$

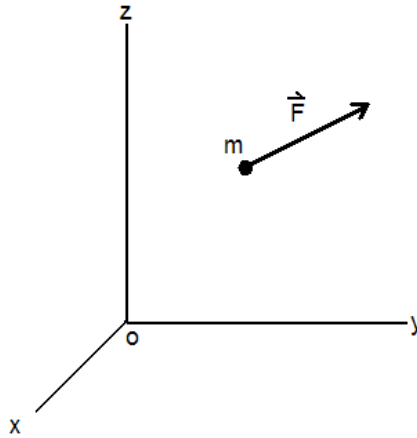


Figura (5.2): Partícula de masa m que se encuentra inmersa en un campo de fuerza conservativo (Ejemplo 5.2).

Entonces, a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.20), se obtiene,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 &\Rightarrow F_x = m\ddot{x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 &\Rightarrow F_y = m\ddot{y} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 &\Rightarrow F_z = m\ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

que son las ecuaciones de movimiento buscadas.

(b) En coordenadas esféricas, el módulo cuadrado de la velocidad viene dado por,

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \text{Sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2 \quad (5.56)$$

entonces, el Lagrangiano viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \text{Sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) - U(r, \theta, \varphi) \quad (5.57)$$

de aquí que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= m r \dot{\theta}^2 + m r \text{Sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m \dot{r} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= m \ddot{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= mr^2 \text{Sen } \theta \text{Cos } \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2 \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= mr^2 \ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = F_\varphi \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mr^2 \text{Sen}^2 \theta \dot{\varphi}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 2mr\dot{r} \text{Sen}^2 \theta \dot{\varphi} + 2mr^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \text{Sen } \theta \text{Cos } \theta + mr^2 \text{Sen}^2 \theta \ddot{\varphi}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.20), se obtiene,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow mr\ddot{\theta} + mr \text{Sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = m\ddot{r} \quad (5.58)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mr^2 \text{Sen } \theta \text{Cos } \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial \theta} = mr^2 \ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 2mr\dot{r} \text{Sen}^2 \theta \dot{\varphi} + 2mr^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \text{Sen } \theta \text{Cos } \theta \\ &\quad + mr^2 \text{Sen}^2 \theta \ddot{\varphi}\end{aligned} \quad (5.60)$$

pero, en coordenadas esféricas,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial r} \hat{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{e}_\theta - \frac{1}{r \text{Sen } \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \quad (5.61)$$

es decir,

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = F_r \quad (5.62)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = F_\theta \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial \theta} = rF_\theta \quad (5.63)$$

$$-\frac{1}{r \text{Sen } \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = F_\varphi \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = r \text{Sen } \theta F_\varphi \quad (5.64)$$

Por último, al sustituir (5.62), (5.63) y (5.64) en (5.58), (5.59) y (5.60) respectivamente, de obtiene,

$$\left. \begin{aligned}F_r &= m\ddot{r} - mr\ddot{\theta} - mr \text{Sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2 \\ rF_\theta &= mr^2 \ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mr^2 \text{Sen } \theta \text{Cos } \theta \dot{\varphi}^2 \\ r \text{Sen } \theta F_\varphi &= 2mr\dot{r} \text{Sen}^2 \theta \dot{\varphi} + 2mr^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \text{Sen } \theta \text{Cos } \theta + mr^2 \text{Sen}^2 \theta \ddot{\varphi}\end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

que son las ecuaciones de movimiento buscadas.

Ejemplo 5.3

La máquina simple de Atwood. Encuentre la aceleración, usando las ecuaciones de Lagrange, del sistema mostrado en la figura 5.3. Se desprecia el rozamiento en la polea.

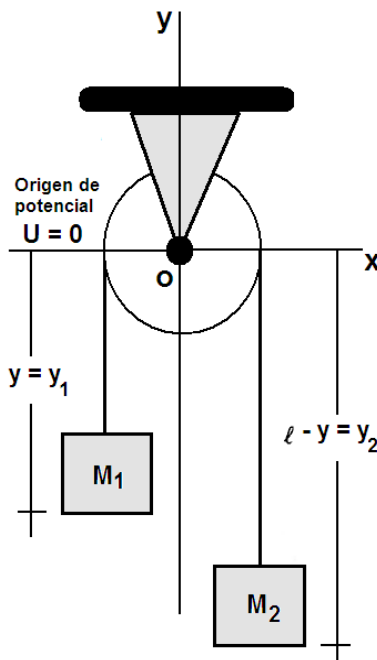


Figura (5.3): La máquina simple de Atwood (Ejemplo 5.3).

Solución: Este es un ejemplo de sistema conservativo con ligaduras holónomas y esclerónomas. Es claro que sólo hay una coordenada independiente y , estando determinada por la condición (ligadura) de que la longitud de la cuerda existente entre ambos cuerpos sea ℓ , es decir,

$$y_1 + y_2 = \ell \tag{5.66}$$

y si se hace $y_1 = y$ entonces $y_2 = \ell - y$. Es fácil notar que la energía potencial es,

$$U = -M_1gy_1 - M_2gy_2 = -M_1gy - M_2g(\ell - y) \tag{5.67}$$

y que la cinética es,

$$T = \frac{1}{2}M_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{y}_2^2 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{y}^2 \tag{5.68}$$

de aquí que el Lagrangiano venga dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{y}^2 + M_1gy + M_2g(\ell - y) \tag{5.69}$$

de donde,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y} &= (M_1 - M_2)g \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= (M_1 + M_2)\dot{y} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= (M_1 + M_2)\ddot{y}\end{aligned}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.20), se obtiene,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow (M_1 + M_2)\ddot{y} - (M_1 - M_2)g = 0 \quad (5.70)$$

de la cual,

$$\ddot{y} = \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) g \quad (5.71)$$

resultado familiar de los cursos de Física elemental.

Ejemplo 5.4

Encontrar la ecuación de movimiento, usando las ecuaciones de Lagrange, de un anillo de masa m que se desliza por un alambre (de masa despreciable) que gira uniformemente con una velocidad angular ω en una región libre de fuerzas (ver figura 5.4).

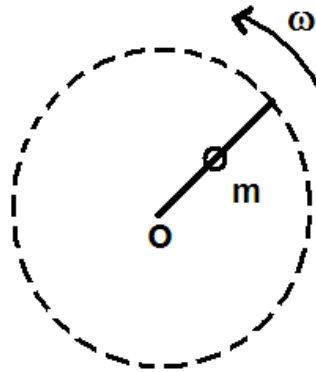


Figura (5.4): Anillo de masa m que se desliza por un alambre, de masa despreciable, que gira uniformemente (Ejemplo 5.4).

Solución: Este ejemplo es un caso sencillo de ligadura holónoma y reónoma (dependiente del tiempo), por lo que las ecuaciones de transformación contendrán explícitamente el tiempo,

$$x = r \text{Cos}(\omega t) \quad (5.72)$$

$$y = r \text{Sen}(\omega t) \quad (5.73)$$

de manera que,

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left[\dot{r} \cos(\omega t) - r\omega \sin(\omega t) \right]^2 + \left[\dot{r} \sin(\omega t) + r\omega \cos(\omega t) \right]^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2\omega^2 \end{aligned}$$

y como se encuentra en una región libre de fuerzas $U = 0$, entonces el Lagrangiano viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 \right) \quad (5.74)$$

resultando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\omega^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= m\ddot{r} \end{aligned}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.20), se obtiene,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \ddot{r} = r\omega^2 \quad (5.75)$$

que expresa el resultado ya conocido de que el anillo se mueve hacia afuera debido a la fuerza centrípeta. Como en el caso anterior, el método no sirve para allar la fuerza que mantiene unido el anillo al alambre.

Ejemplo 5.5

Considérese el caso del movimiento de un proyectil de masa m bajo la acción de la gravedad en dos dimensiones (ver figura 5.5). Encontrar las ecuaciones de movimiento, usando las ecuaciones de Lagrange, en: (a) coordenadas Cartesianas y (b) polares.

Solución: Aquí θ es el ángulo de tiro. En coordenadas Cartesianas, serán usadas x (horizontal) y y (vertical). En coordenadas polares serán usadas r (en la dirección radial) y φ (ángulo con respecto a la horizontal).

(a) Primero, en coordenadas Cartesianas se tiene,

$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) \quad (5.76)$$

$$U = mgy \quad (5.77)$$

donde $U = 0$ en $y = 0$. De esta manera el Lagrangiano viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - mgy \quad (5.78)$$

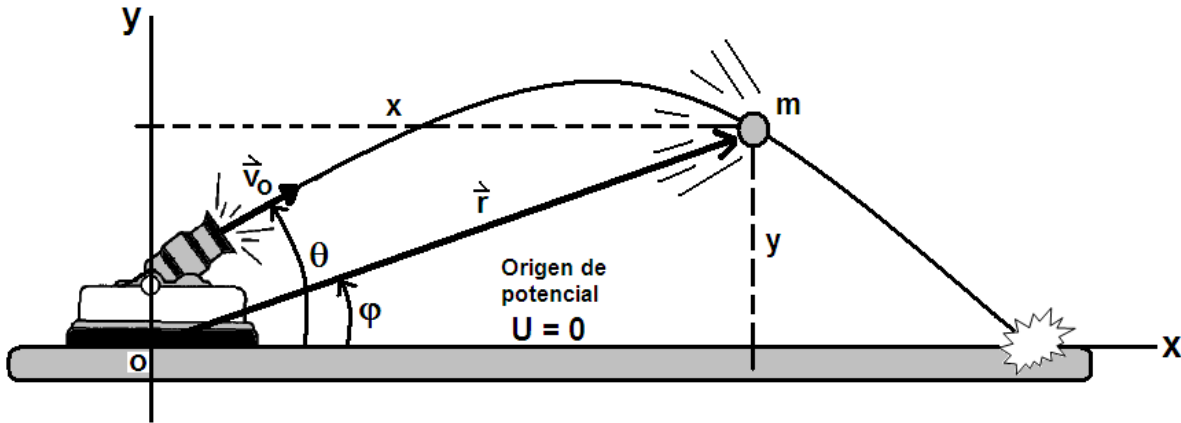


Figura (5.5): Movimiento de un proyectil de masa m bajo la acción de la gravedad en dos dimensiones (Ejemplo 5.5).

resultando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m\ddot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} \end{aligned}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.20), se obtiene,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned} \right\} \quad (5.79)$$

(b) En coordenadas polares,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \quad (5.80)$$

$$U = mgr \text{ Sen } \varphi \quad (5.81)$$

donde $U = 0$ cuando $\theta = 0$. De esta manera el Lagrangiano viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - mgr \text{ Sen } \varphi \quad (5.82)$$

resultando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= m\dot{\varphi}^2 - mg \text{ Sen } \varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgr \text{ Cos } \varphi \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= m\ddot{r}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 2mr\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.20), se obtiene,

$$\left. \begin{aligned} r\dot{\varphi}^2 - g \operatorname{Sen} \varphi - \ddot{r} &= 0 \\ -gr \operatorname{Cos} \varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi} - r^2\ddot{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.83)$$

Las ecuaciones de movimiento (5.79) claramente son más simples que las (5.83). Por esta razón se escogerían coordenadas Cartesianas como coordenadas generalizadas para resolver este problema, la clave es reconocer que en estas la energía potencial sólo depende de la coordenada y , mientras que en coordenadas polares depende de r y φ .

Ejemplo 5.6

Una partícula de masa m está obligada a moverse sobre la superficie interna de un cono liso como se muestra en la figura 5.6, donde α es constante. La partícula está sometida a una fuerza gravitacional. Determinar un conjunto de coordenadas generalizadas y determinar las ligaduras. Encuentre las ecuaciones de movimiento usando las ecuaciones de Lagrange.

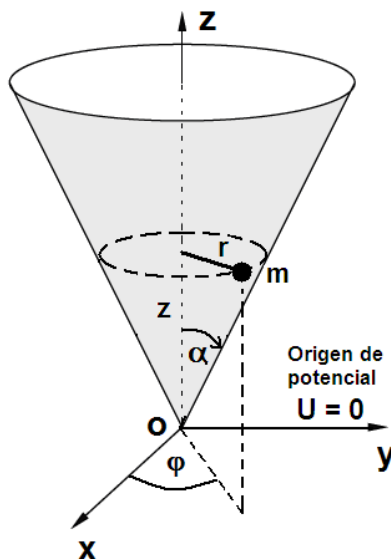


Figura (5.6): Partícula de masa m que está obligada a moverse sobre la superficie interna de un cono liso (Ejemplo 5.6).

Solución: Hágase que el eje del cono corresponda al eje z y colóquese el vértice del cono en el origen. Puesto que el problema posee simetría cilíndrica, escójase r, φ y z como coordenadas generalizadas. Pero, sin embargo, se tiene la ligadura,

$$z = r \cot \alpha \quad (5.84)$$

de manera que el sistema tiene sólo dos grados de libertad y, por lo tanto, dos coordenadas generalizadas. Se puede usar (5.84) para eliminar z o r .

En coordenadas cilíndricas, el módulo cuadrado de la velocidad viene dado por,

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$$

que, al usar (5.84),

$$v^2 = r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 (1 + \cot^2 \alpha)$$

y como $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$,

$$v^2 = \dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2 \tag{5.85}$$

Por otro lado, la energía potencial (si se elige $U = 0$ en $z = 0$), viene dada por,

$$U = mgz = mgr \cot \alpha \tag{5.86}$$

entonces el Lagrangiano se puede escribir como,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - mgr \cot \alpha \tag{5.87}$$

resultando que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi}) \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= mr \dot{\varphi}^2 - mg \cot \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \csc^2 \alpha, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r} \csc^2 \alpha \end{aligned}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.20), se obtiene,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{constante.} \\ \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \text{ Sen}^2 \alpha + g \text{ Sen} \alpha \text{ Cos} \alpha = 0 \end{aligned} \right\} \tag{5.88}$$

donde la primera ecuación expresa la conservación del momento angular en torno al eje z y la segunda es la ecuación de movimiento para la coordenada r .

Ejemplo 5.7

El punto de soporte para un péndulo simple de longitud b y masa pendular m se mueve sobre un anillo (de masa despreciable) de radio a con velocidad angular constante ω . (a) Obtener la expresión en coordenadas Cartesianas de la velocidad y la aceleración para la masa m y (b) usando las ecuaciones de Lagrange, obtener también la aceleración angular para θ . Ver figura 5.7.

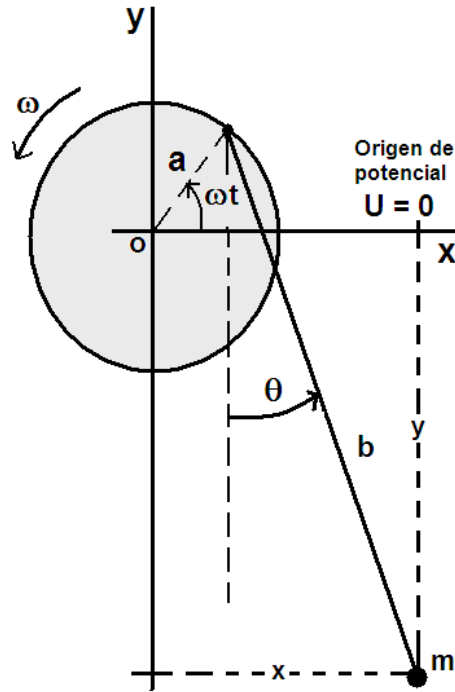


Figura (5.7): Un péndulo simple de longitud b y masa pendular m cuyo punto de soporte mueve sobre un anillo con velocidad angular constante (Ejemplo 5.7).

Solución: Se posicionará el origen del sistema de coordenadas en el centro del anillo rotante.

(a) La posición de m en coordenadas Cartesianas viene dada por,

$$x = a \cos(\omega t) + b \sin \theta \tag{5.89}$$

$$y = a \sin(\omega t) - b \cos \theta \tag{5.90}$$

por lo tanto las velocidades son,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -a\omega \sin(\omega t) + b\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} &= a\omega \cos(\omega t) + b\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \right\} \tag{5.91}$$

y las aceleraciones,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -a\omega^2 \cos(\omega t) + b \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \\ \ddot{y} &= -a\omega^2 \sin(\omega t) + b \left(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \end{aligned} \right\} \tag{5.92}$$

(b) Es claro que la única coordenada generalizada es θ . Las energías cinética y potencial vendrán dadas por,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ U &= mgy \end{aligned}$$

donde $U = 0$ en $y = 0$. Entonces el Lagrangiano se puede escribir como,

$$L = T - U = \frac{m}{2} \left[a^2\omega^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2b\dot{\theta}a\omega \text{Sen}(\theta - \omega t) \right] - mg[a \text{Sen}(\omega t) - b \text{Cos} \theta] \quad (5.93)$$

de aquí que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mb\dot{\theta}a\omega \text{Cos}(\theta - \omega t) - mgb \text{Sen} \theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= mb^2\ddot{\theta} + mba\omega (\dot{\theta} - \omega) \text{Cos}(\theta - \omega t) \end{aligned}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.20), se obtiene,

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2 a}{b} \text{Cos}(\theta - \omega t) - \frac{g}{b} \text{Sen} \theta \quad (5.94)$$

Nótese que este resultado se reduce a la bien conocida ecuación de movimiento del péndulo simple cuando $\omega = 0$, es decir, cuando el anillo no rota.

Ejemplo 5.8

Encuentre la frecuencia, para pequeñas oscilaciones, de un péndulo simple colocado dentro de un vagón que se mueve con una aceleración constante a en la dirección $+x$, usando las ecuaciones de Lagrange.

Solución: Un diagrama de la situación descrita es mostrado en la figura 5.8a, para un péndulo de longitud ℓ , masa m y ángulo de desplazamiento θ . Se muestra un sistema de coordenadas fijo con $x = 0$ y $\dot{x} = v_o$ en $t = 0$. La posición y la velocidad de m vienen dadas por,

$$\begin{aligned} x &= v_o t + \frac{1}{2}at^2 + \ell \text{Sen} \theta \\ y &= -\ell \text{Cos} \theta \\ \dot{x} &= v_o + at + \ell\dot{\theta} \text{Cos} \theta \\ \dot{y} &= \ell\dot{\theta} \text{Sen} \theta \end{aligned}$$

Las energías cinética y potencial son,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ U &= -mg\ell \text{Cos} \theta \end{aligned}$$

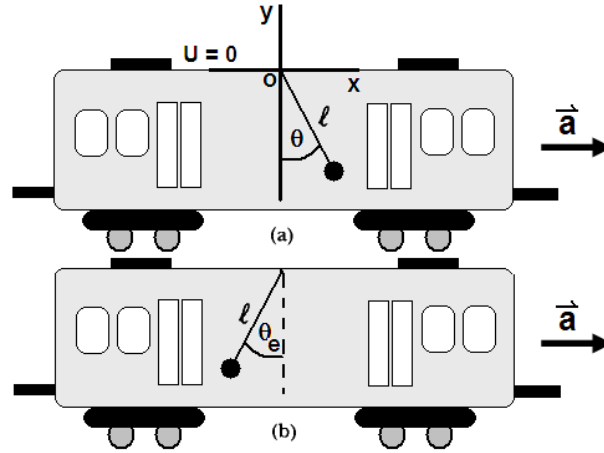


Figura (5.8): Péndulo simple colocado dentro de un vagón que se mueve con una aceleración constante a en la dirección $+x$ (Ejemplo 5.8).

y el Lagrangiano es,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m \left(v_o + at + \dot{\ell}\theta \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{2}m \left(\dot{\ell}\theta \sin \theta \right)^2 + mgl \cos \theta$$

de aquí que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m\dot{\ell}\dot{\theta} \left(v_o + at + \dot{\ell}\dot{\theta} \cos \theta \right) \sin \theta + m\dot{\ell}^2\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta \\ &\quad - mgl \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m\dot{\ell} \left(v_o + at + \dot{\ell}\dot{\theta} \cos \theta \right) \cos \theta + m\dot{\ell}^2\dot{\theta} \sin^2 \theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= -m\dot{\ell}\ddot{\theta} \left(v_o + at + \dot{\ell}\dot{\theta} \cos \theta \right) \sin \theta \\ &\quad + m\dot{\ell} \cos \theta \left(a + \ddot{\ell}\dot{\theta} \cos \theta - \dot{\ell}\ddot{\theta} \sin \theta \right) + 2m\dot{\ell}^2\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \\ &\quad + m\dot{\ell}^2\ddot{\theta} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.20), se obtiene,

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{\dot{\ell}} (g \sin \theta + a \cos \theta) \quad (5.95)$$

Se puede determinar el ángulo de equilibrio θ_e (mostrado en la figura 5.8b) al hacer $\ddot{\theta} = 0$ en (5.95),

$$0 = g \sin \theta_e + a \cos \theta_e \quad (5.96)$$

$$\tan \theta_e = -\frac{a}{g} \quad (5.97)$$

Por otro lado, debido a que las oscilaciones son pequeñas y se dan en torno al ángulo de equilibrio, hágase,

$$\theta = \theta_e + \eta \tag{5.98}$$

donde η es un ángulo pequeño. Entonces, al sustituir (5.98) en (5.95) resulta,

$$\ddot{\eta} = -\frac{g}{\ell} \text{Sen}(\theta_e + \eta) - \frac{a}{\ell} \text{Cos}(\theta_e + \eta) \tag{5.99}$$

Ahora, al usar las identidades para el seno y coseno de la suma de dos ángulos y usar la aproximación para ángulo pequeño en $\text{Sen} \eta$ y $\text{Cos} \eta$ (tomando sólo el primer término de los desarrollos en series de Taylor para ambos), resulta,

$$\ddot{\eta} = -\frac{1}{\ell} [(g \text{Sen} \theta_e + a \text{Cos} \theta_e) + \eta (g \text{Cos} \theta_e - a \text{Sen} \theta_e)] \tag{5.100}$$

pero el primer término entre paréntesis es nulo debido a (5.96), quedando,

$$\ddot{\eta} = -\frac{\eta}{\ell} (g \text{Cos} \theta_e - a \text{Sen} \theta_e) \tag{5.101}$$

y usando (5.97),

$$\ddot{\eta} + \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{\ell} \eta = 0 \tag{5.102}$$

que es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple con,

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{\ell} \tag{5.103}$$

Este resultado se ve plausible, ya que para $a = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{g/\ell}$ que es la frecuencia angular del péndulo simple cuando el vagón está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.

Ejemplo 5.9

Una cuenta de masa m se desplaza a lo largo de un alambre liso (de masa despreciable) que tiene la forma de la parábola $z = cr^2$ (ver figura 3.79). La cuenta rota en un círculo de radio R cuando el alambre está rotando en torno a su eje vertical de simetría con velocidad angular ω . Encuentre el valor de c usando las ecuaciones de Lagrange.

Solución: Debido a que el problema tiene simetría cilíndrica, se escogen r, φ y z como coordenadas generalizadas. Por lo tanto, la energía cinética de la cuenta vendrá dada por,

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) \tag{5.104}$$

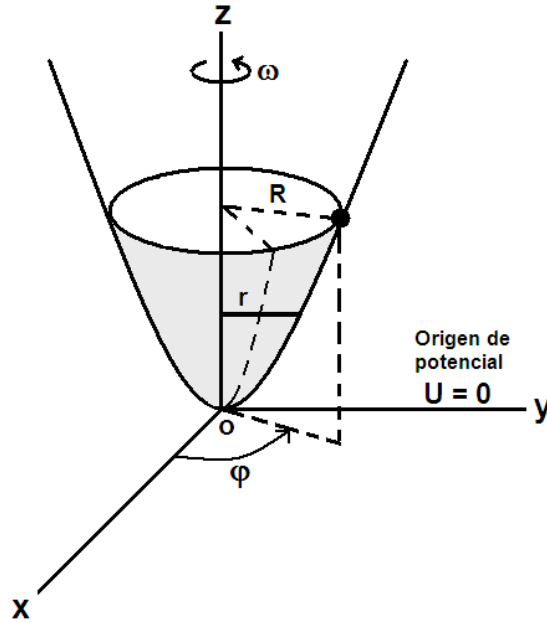


Figura (5.9): Cuenta de masa m se desplaza a lo largo de un alambre liso, de masa despreciable, que tiene la forma de la parábola $z = cr^2$ (Ejemplo 5.9).

y si se elige $U = 0$ en $z = 0$, la energía potencial vendrá dada por,

$$U = mgz \quad (5.105)$$

Pero r , φ y z no son independientes. La ecuación de ligadura es la ecuación de la parábola,

$$z = cr^2 \quad (5.106)$$

$$\dot{z} = 2cr\dot{r} \quad (5.107)$$

y además, se tiene también una dependencia explícita del tiempo dada por,

$$\varphi = \omega t \quad (5.108)$$

$$\dot{\varphi} = \omega \quad (5.109)$$

por lo tanto, el Lagrangiano se puede escribir como,

$$L = T - U = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + 4c^2 r^2 \dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \right) - mgcr^2 \quad (5.110)$$

de aquí que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= m \left(4c^2 r \dot{r}^2 + r \omega^2 - 2gcr \right) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{m}{2} \left(2\dot{r} + 8c^2 r^2 \dot{r} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= \frac{m}{2} \left(2\ddot{r} + 16c^2 r \dot{r}^2 + 8c^2 r^2 \ddot{r} \right) \end{aligned}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.20), se obtiene,

$$\ddot{r} (1 + 4c^2 r^2) + \dot{r}^2 4c^2 r + r (2gc - \omega^2) = 0 \quad (5.111)$$

que es un resultado complicado. Si, sin embargo, la cuenta rota con $r = R = \text{constante}$, entonces $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, la ecuación (5.111) se convierte en,

$$R (2gc - \omega^2) = 0 \quad (5.112)$$

y de aquí,

$$c = \frac{\omega^2}{2g} \quad (5.113)$$

que es el resultado pedido.

Ejemplo 5.10

Considérese el sistema de doble polea (de masa despreciable) mostrado en la figura 5.10. Usar las coordenadas indicadas y determinar las ecuaciones de movimiento usando las ecuaciones de Lagrange.

Solución: Aquí ℓ_1 es la longitud de la cuerda que pasa por la polea 1 y ℓ_2 es la longitud de la cuerda que pasa por la polea 2. Las distancias y_1 y y_2 son medidas con respecto al centro de las dos poleas.

Para m_1 :

$$v_1 = \dot{y}_1 \quad (5.114)$$

Para m_2 :

$$v_2 = \frac{d}{dt} (\ell_1 - y_1 + y_2) = -\dot{y}_1 + \dot{y}_2 \quad (5.115)$$

Para m_3 :

$$v_3 = \frac{d}{dt} (\ell_1 - y_1 + \ell_2 - y_2) = -\dot{y}_1 - \dot{y}_2 \quad (5.116)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (-\dot{y}_1 + \dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (-\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 \end{aligned} \quad (5.117)$$

y si $U = 0$ en $y_1 = 0$,

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_3 \\ &= -m_1 g y_1 - m_2 g (\ell_1 - y_1 + y_2) - m_3 g (\ell_1 - y_1 + \ell_2 - y_2) \end{aligned} \quad (5.118)$$

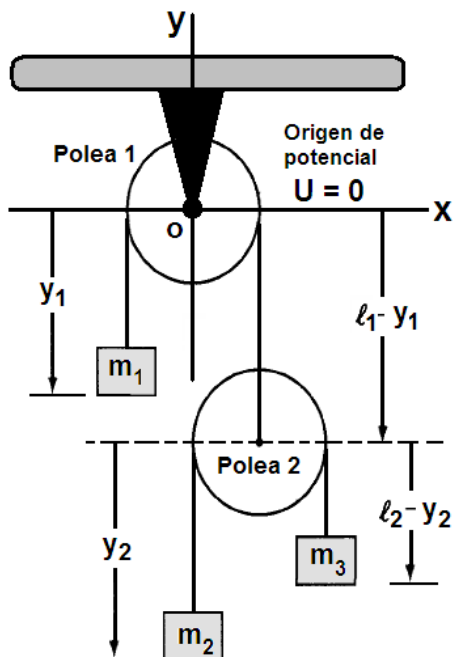


Figura (5.10): Sistema de doble polea (Ejemplo 5.10).

Entonces, a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.20), se obtiene,

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + m_2 (\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) + m_3 (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) &= (m_1 - m_2 - m_3) g \\ -m_2 (\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) + m_3 (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) &= (m_2 - m_3) g \end{aligned} \right\} \quad (5.119)$$

ecuaciones que pueden ser resueltas para \ddot{y}_1 y \ddot{y}_2 .

Ejemplo 5.11

Considérese un cilindro sólido de centro O' y radio R_1 que rueda sin deslizar dentro de la superficie semicilíndrica fija con centro O y radio $R_2 > R_1$ (ver figura 5.11). Encuentre la ecuación de movimiento y el período para pequeñas oscilaciones (θ pequeño) en torno a la posición de equilibrio, usando las ecuaciones de Lagrange.

Solución: La velocidad del centro de masa del cilindro debe ser igual a la velocidad con la cual gira, por lo tanto,

$$(R_2 - R_1) \dot{\theta} = R_1 \dot{\phi} \Rightarrow (R_2 - R_1) \dot{\theta} - R_1 \dot{\phi} = 0 \quad (5.120)$$

representando una ligadura cinemática que, afortunadamente, es integrable. Si se toma $\phi = 0$ cuando $\theta = 0$, al integrar (5.120) resulta,

$$(R_2 - R_1) \theta - R_1 \phi = 0 \quad (5.121)$$

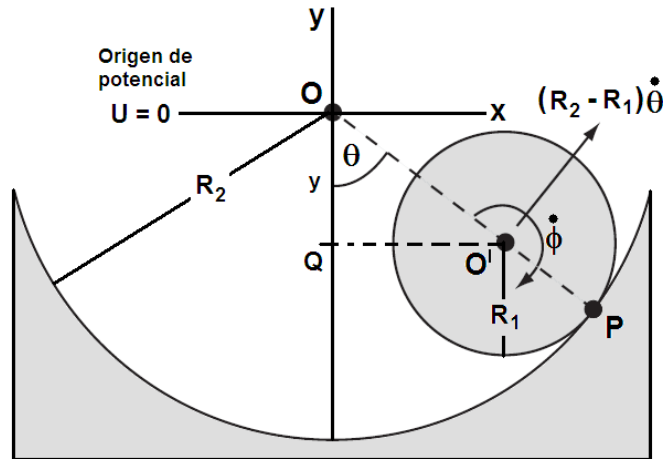


Figura (5.11): Cilindro sólido de centro O' y radio R_1 que rueda sin deslizar dentro de la superficie semi-cilíndrica fija con centro O y radio $R_2 > R_1$ (Ejemplo 5.11).

por lo tanto el sistema sólo tiene un grado de libertad. La energía cinética viene dada por,

$$T = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 \quad (5.122)$$

donde v_{cm} es la velocidad del centro de masa del cilindro e I su momento de inercia dados por,

$$v_{cm} = (R_2 - R_1)\dot{\theta} \quad (5.123)$$

$$I = \frac{1}{2}mR_1^2 \quad (5.124)$$

por lo tanto, al sustituir (5.123) y (5.124) en (5.122) resulta,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m \left[(R_2 - R_1)\dot{\theta} \right]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mR_1^2 \right) \dot{\phi}^2 \\ &= \frac{1}{2}m(R_2 - R_1)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mR_1^2\dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (5.125)$$

y si ahora se escoge θ como coordenada entonces, teniendo presente la ligadura (5.120), (5.125) se puede escribir como,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(R_2 - R_1)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mR_1^2 \underbrace{\left[\frac{(R_2 - R_1)\dot{\theta}}{R_1} \right]^2}_{\text{por (5.120)}} \\ &= \frac{3}{4}m(R_2 - R_1)^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, la energía potencial U vendrá dada por,

$$U = -mgy = -mg \underbrace{(R_2 - R_1) \text{Cos } \theta}_{\text{del } \Delta QOO', \text{ fig. 5.11}} \quad (5.126)$$

entonces, a partir de (5.125) y (5.126), el Lagrangiano se puede escribir como,

$$L = T - U = \frac{3}{4}m(R_2 - R_1)^2 \dot{\theta}^2 + mg(R_2 - R_1) \text{Cos } \theta \quad (5.127)$$

Ahora, a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.20) (en este caso hay sólo una, para θ), se obtiene,

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R_2 - R_1)} \text{Sen } \theta = 0 \quad (5.128)$$

que es la misma ecuación que para un péndulo simple de longitud $\frac{3}{2}(R_2 - R_1)$. Ahora bien, para θ pequeño se tiene que,

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R_2 - R_1)} \theta = 0 \quad (5.129)$$

ya que $\text{Sen } \theta \approx \theta$, de aquí que el período de oscilación τ del cilindro venga dado por,

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2g} (R_2 - R_1)}$$

5.4. Ejemplos con ligaduras holónomas (forma explícita)

Los ejemplos siguientes representan sistemas holónomos en los que las ecuaciones de ligadura serán usadas para ser incluidas, en forma explícita, en las ecuaciones de Lagrange mediante el uso del método de los multiplicadores de Lagrange.

En ciertos casos puede ser deseable conocer las fuerzas de ligadura. Por ejemplo, desde el punto de vista de un ingeniero, podría ser útil conocer las fuerzas de ligadura para propósitos de diseño. Estas fuerzas las proporcionan las fuerzas generalizadas de ligadura (5.28).

La utilidad del método de los multiplicadores de Lagrange, es doble:

1. Los multiplicadores de Lagrange están relacionados con las fuerzas de ligadura, a través de (5.28), que son requeridas frecuentemente.
2. Cuando, para un sistema dado, no se desea un conjunto de coordenadas generalizadas propias o es muy difícil obtenerlas, el método puede ser usado para incrementar el número de coordenadas generalizadas mediante la inclusión explícita de las relaciones de ligadura entre las coordenadas.

Ejemplo 5.12

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.1.

Solución: Aquí, a partir de (5.49), la ecuación para la ligadura se puede escribir como,

$$f(x, y) = y + x \tan \theta - h = 0 \quad (5.130)$$

por lo tanto el sistema tiene sólo un grado de libertad, pudiéndose entonces elegir x o y como coordenada generalizada como se hizo en el ejemplo 5.1. Alternativamente, se puede continuar considerando ambas x y y como coordenadas generalizadas y usar el método de los multiplicadores de Lagrange. Aquí se seguirá lo último.

Teniendo presente que la ligadura (5.130) es holónoma, se pueden obtener las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.29). Para este caso (con $K = 1$ por sólo haber una ligadura),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} \quad (5.131)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} \quad (5.132)$$

A partir de (5.48) el Lagrangiano, sin incluir la ligadura, viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

por lo tanto, de aquí y de (5.130) se halla que,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = \tan \theta \quad (5.133)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 \quad (5.134)$$

Ahora, al sustituir los resultados (5.133) y (5.134) en (5.131) y (5.132) respectivamente, se obtiene,

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \tan \theta \quad (5.135)$$

$$m\ddot{y} + mg = \lambda_1 \quad (5.136)$$

y del sistema formado por (5.130), (5.135) y (5.136) es fácil encontrar que,

$$\lambda_1 = mg \cos^2 \theta$$

por lo tanto, a partir de (5.28), las fuerzas generalizadas de ligadura vendrán dadas por,

$$Q_x^{lig} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = mg \cos^2 \theta \tan \theta = mg \cos \theta \sin \theta \quad (5.137)$$

$$Q_y^{lig} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} = mg \cos^2 \theta \quad (5.138)$$

que representan las componentes de la fuerza de ligadura en el referencial escogido. Entonces, la magnitud de la resultante de las fuerzas de ligadura vendrá dada por,

$$Q^{lig} = \sqrt{(Q_x^{lig})^2 + (Q_y^{lig})^2} = mg \cos \theta$$

que no es más que la fuerza normal ya calculada en cursos de Física elemental.

Ejemplo 5.13

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.3.

Solución: Aquí, a partir de (5.66), la ecuación para la ligadura se puede escribir como,

$$f(y_1, y_2) = y_1 + y_2 - \ell = 0 \quad (5.139)$$

Teniendo presente que la ligadura (5.139) es holónoma, se pueden obtener las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.29). Para este caso (con $K = 1$ por sólo haber una ligadura),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_1} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \quad (5.140)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_2} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \quad (5.141)$$

A partir de (5.67) y (5.68) el Lagrangiano, sin incluir la ligadura, viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2} M_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{y}_2^2 + M_1 g y_1 + M_2 g y_2$$

por lo tanto, de aquí y de (5.139) se halla que,

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = M_1 g \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = M_1 \dot{y}_1 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) = M_1 \ddot{y}_1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 1 \quad (5.142)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = M_2 g \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = M_2 \dot{y}_2 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) = M_2 \ddot{y}_2 \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 1 \quad (5.143)$$

Ahora, al sustituir los resultados (5.142) y (5.143) en (5.140) y (5.141) respectivamente, se obtiene,

$$M_1 \ddot{y}_1 - M_1 g = \lambda_1 \quad (5.144)$$

$$M_2 \ddot{y}_2 - M_2 g = \lambda_1 \quad (5.145)$$

Por último, del sistema formado por (5.139), (5.144) y (5.145) es fácil encontrar que,

$$\lambda_1 = -\frac{2M_1 M_2}{M_1 + M_2} g$$

por lo tanto, a partir de (5.28), las fuerzas generalizadas de ligadura vendrán dadas por,

$$Q_{y_1}^{lig} = Q_{y_2}^{lig} = \frac{2M_1 M_2}{M_1 + M_2} g \quad (5.146)$$

Este resultado coincide con la tensión de la cuerda que se calcula en cursos de Física elemental.

Ejemplo 5.14

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.9.

Solución: Aquí, a partir de (5.106), la ecuación para la ligadura se puede escribir como,

$$f(z, r) = z - cr^2 = 0 \quad (5.147)$$

Teniendo presente que la ligadura (5.147) es holónoma, se pueden obtener las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.29). Para este caso (con $K = 1$ por sólo haber una ligadura),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \sum_{i=1}^1 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial r} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} \quad (5.148)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \sum_{i=1}^1 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \quad (5.149)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = \sum_{i=1}^1 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} \quad (5.150)$$

A partir de (5.104) y (5.105) el Lagrangiano, sin incluir la ligadura, viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz$$

por lo tanto, de aquí y de (5.147) se halla que,

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r} \quad \frac{\partial f_1}{\partial r} = -2cr \quad (5.151)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} \quad \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = 0 \quad (5.152)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -mg \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z} \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 1 \quad (5.153)$$

Ahora, al sustituir los resultados (5.151), (5.152) y (5.153) en (5.148), (5.149) y (5.150) respectivamente, se obtiene,

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -2cr\lambda_1 \quad (5.154)$$

$$2r\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi}^2 = 0 \quad (5.155)$$

$$m\ddot{z} + mg = \lambda_1 \quad (5.156)$$

pero como $r = R$ y $\dot{\varphi} = \omega$, este sistema de ecuaciones se reduce a,

$$m\omega^2 = 2c\lambda_1 \quad (5.157)$$

$$m\ddot{z} + mg = \lambda_1 \quad (5.158)$$

a partir de las cuales, junto con (5.147), se encuentra que,

$$\lambda_1 = mg \quad (5.159)$$

$$c = \frac{\omega^2}{2g} \quad (5.160)$$

por lo tanto, a partir de (5.28), las fuerzas generalizadas de ligadura vendrán dadas por,

$$Q_r^{lig} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial r} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} = -m\omega^2 R \quad (5.161)$$

$$Q_\varphi^{lig} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \varphi} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = 0 \quad (5.162)$$

$$Q_z^{lig} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} = mg \quad (5.163)$$

donde (5.161) y (5.163) representan, respectivamente, la fuerza centrípeta y el peso.

Ejemplo 5.15

Un disco de masa M y radio R rueda, sin deslizar, hacia abajo en un plano inclinado (ver figura 5.12). (a) Encontrar las ecuaciones de movimiento, (b) las fuerzas generalizadas de ligadura y (c) la aceleración angular.

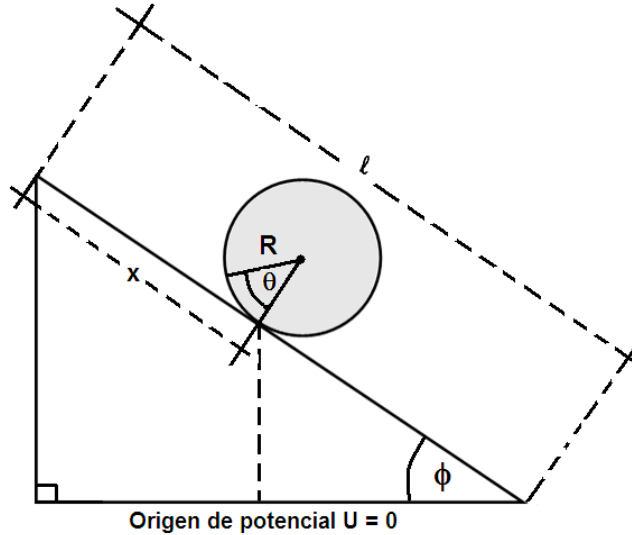


Figura (5.12): Disco de masa M y radio R rueda, sin deslizar, hacia abajo en un plano inclinado (Ejemplo 5.15).

Solución:

(a) La energía cinética se desdobra en la energía cinética del centro de masa y la energía cinética del movimiento alrededor de éste,

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 \quad (5.164)$$

donde $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ es la energía rotacional e $I = \frac{1}{2}MR^2$ es el momento de inercia del disco. La energía potencial es,

$$U = Mg(l - x) \text{ Sen } \phi \quad (5.165)$$

donde l es la longitud de la superficie inclinada y $U = 0$ para $x = l$ (final del plano).

El Lagrangiano es por lo tanto,

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - Mg(l - x) \text{ Sen } \phi \quad (5.166)$$

Además, la ecuación de ligadura es,

$$f(x, \theta) = x - R\theta \quad (5.167)$$

por lo tanto el sistema tiene sólo un grado de libertad, pudiéndose entonces elegir y o θ como coordenada generalizada y usar (5.167) para eliminar la otra. Alternativamente, se puede continuar considerando ambas y y θ como coordenadas generalizadas y usar el método de los multiplicadores de Lagrange. Aquí se seguirá lo último.

Teniendo presente que la ligadura (5.167) es holónoma, se pueden obtener las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.29). Para este caso (con $K = 1$ por sólo haber una ligadura),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} \quad (5.168)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \theta} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \quad (5.169)$$

De (5.166) y (5.167) se halla que,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = Mg \text{Sen } \phi \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = M \ddot{x} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 \quad (5.170)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{2} MR^2 \ddot{\theta} \quad \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -R \quad (5.171)$$

y al sustituir estos resultados en (5.170) y (5.171), resulta,

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x} - Mg \text{Sen } \phi - \lambda_1 &= 0 \\ \frac{1}{2} MR \ddot{\theta} + \lambda_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.172)$$

que son las ecuaciones de movimiento pedidas y que, junto con la ecuación de ligadura (5.167),

$$x = R\theta \quad (5.173)$$

constituyen un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas θ, x, λ_1 .

(b) Derivando con respecto al tiempo la ecuación de ligadura (5.173) dos veces,

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{R} \quad (5.174)$$

y al combinar este resultado con la segunda de las (5.172) resulta,

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} M \ddot{x} \quad (5.175)$$

que al combinarla con la primera de las (5.172) resulta,

$$\ddot{x} = \frac{2}{3} g \text{Sen } \phi \quad (5.176)$$

Por último, de (5.175) y (5.176), resulta,

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3} Mg \text{Sen } \phi \quad (5.177)$$

entonces las fuerzas generalizadas de ligadura (5.28) en este caso son,

$$\left. \begin{aligned} Q_x^{lig} &= \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{1}{3} Mg \text{Sen } \phi \\ Q_\theta^{lig} &= \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \theta} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = \frac{1}{3} MgR \text{Sen } \phi \end{aligned} \right\} \quad (5.178)$$

donde Q_x^{lig} y Q_θ^{lig} son la fuerza de fricción y un torque, respectivamente, y son las fuerzas generalizadas de ligadura requeridas para mantener el disco rodando sobre el plano sin resbalar.

(c) De (5.174) y (5.176), resulta,

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{3R} g \text{Sen } \phi \quad (5.179)$$

que es la aceleración angular pedida.

Nótese que si el disco se hubiese deslizado sin fricción, se tendría $\ddot{x} = g \text{Sen } \phi$. Por lo tanto la ligadura reduce la aceleración en $2/3$ del valor sin fricción.

Ejemplo 5.16

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.11.

Solución: Aquí, a partir de (5.121), la ecuación para la ligadura se puede escribir como,

$$f(\theta, \phi) = (R_2 - R_1)\theta - R_1\phi = 0 \quad (5.180)$$

Teniendo presente que la ligadura (5.180) es holónoma, se pueden obtener las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.29). Para este caso (con $K = 1$ por sólo haber una ligadura),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \theta} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \quad (5.181)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \phi} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \phi} \quad (5.182)$$

A partir de (5.125) y (5.126) el Lagrangiano, sin incluir la ligadura, viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (R_2 - R_1)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m R_1^2 \dot{\phi}^2 + mg (R_2 - R_1) \text{Cos } \theta$$

por lo tanto, de aquí y de (5.180) se halla que,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(R_2 - R_1) \text{Sen } \theta & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(R_2 - R_1)^2 \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m(R_2 - R_1)^2 \ddot{\theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = R_2 - R_1 \end{cases} \quad (5.183)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2}mR_1^2 \dot{\phi} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{1}{2}mR_1^2 \ddot{\phi} \quad \frac{\partial f_1}{\partial \phi} = -R_1 \quad (5.184)$$

Ahora, al sustituir los resultados (5.183) y (5.184) en (5.181) y (5.182) respectivamente, se obtiene,

$$m(R_2 - R_1) \ddot{\theta} + mg \text{Sen } \theta = \lambda_1 \quad (5.185)$$

$$\frac{1}{2}mR_1 \ddot{\phi} = -\lambda_1 \quad (5.186)$$

a partir de las cuales, junto con (5.180), se encuentra que,

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}mg \text{Sen } \theta \quad (5.187)$$

por lo tanto, a partir de (5.28), las fuerzas generalizadas de ligadura vendrán dadas por,

$$Q_{\theta}^{lig} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \theta} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = \frac{1}{3}mg(R_2 - R_1) \text{Sen } \theta \quad (5.188)$$

$$Q_{\phi}^{lig} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \phi} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \phi} = -\frac{1}{3}mgR_1 \text{Sen } \theta \quad (5.189)$$

Aquí Q_{θ}^{lig} y Q_{ϕ}^{lig} son dos torques, y son las fuerzas generalizadas de ligadura requeridas para mantener el cilindro sólido de radio R_1 rodando sobre la superficie interior del cilindro de radio R_2 sin resbalar.

Ejemplo 5.17

Una partícula de masa m comienza a moverse desde el reposo, partiendo de la parte más alta de un hemisferio fijo y liso de radio a . Encuentre las fuerzas generalizadas de ligadura y el ángulo en el cual la partícula abandona la superficie del hemisferio.

Solución: Ver figura 5.13. Debido a que se está considerando la posibilidad de que la partícula abandone la superficie del hemisferio, se eligen como coordenadas generalizadas r y θ . La ecuación de ligadura es,

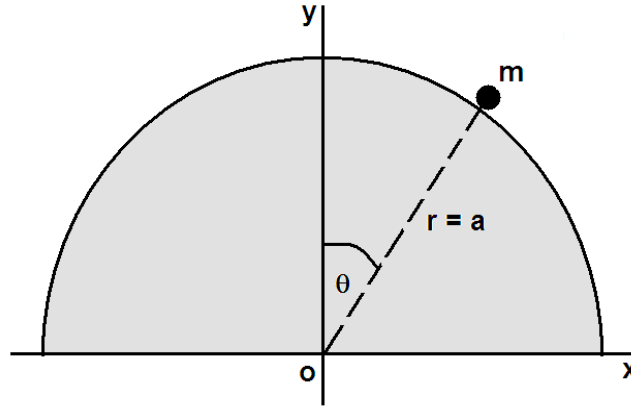


Figura (5.13): Partícula de masa m que comienza a moverse desde el reposo, partiendo de la parte más alta de un hemisferio fijo y liso (Ejemplo 5.17).

$$f(r) = r - a = 0 \quad (5.190)$$

Además,

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) \\ U &= mgr \text{Cos } \theta \\ L &= T - U = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - mgr \text{Cos } \theta \end{aligned} \quad (5.191)$$

donde la energía potencial es cero en la parte más baja del hemisferio. Las ecuaciones de Lagrange (5.29) son para este caso (con $K = 1$ por sólo haber una ligadura),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial r} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} \quad (5.192)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \theta} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \quad (5.193)$$

y de aquí, en virtud de (5.191), resulta,

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \text{Cos } \theta - \lambda_1 &= 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - g \text{Sen } \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.194)$$

y al aplicar la ligadura $r = a$ a las anteriores ecuaciones,

$$-ma\dot{\theta}^2 + mg \text{Cos } \theta - \lambda_1 = 0 \quad (5.195)$$

$$a\ddot{\theta} - g \text{Sen } \theta = 0 \quad (5.196)$$

A partir de (5.196) se tiene que,

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a} \text{Sen } \theta \quad (5.197)$$

que se puede integrar para determinar $\dot{\theta}^2$. Nótese primero que,

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \quad (5.198)$$

entonces de (5.197),

$$\int_0^{\dot{\theta}} \tilde{\theta} d\tilde{\theta} = \frac{g}{a} \int_0^{\theta} \text{Sen } \tilde{\theta} d\tilde{\theta} \quad (5.199)$$

ya que $\dot{\theta} = 0$ en $t = 0$ cuando $\theta = 0$ y la tilde se usó para hacer diferencia entre las variables de integración y los límites. De aquí resulta,

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{a} \text{Cos } \theta + \frac{g}{a} \quad (5.200)$$

Sustituyendo $\dot{\theta}^2$ de (5.200) en (5.195) resulta,

$$\lambda_1 = mg (3 \text{Cos } \theta - 2) \quad (5.201)$$

por lo tanto, a partir de (5.28), las fuerzas generalizadas de ligadura vendrán dadas por,

$$Q_r^{lig} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial r} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} = \lambda_1 = mg (3 \text{Cos } \theta - 2) \quad (5.202)$$

$$Q_\theta^{lig} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \theta} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0 \quad (5.203)$$

La partícula se desprende de la superficie del hemisferio en el ángulo θ_d (el sub-índice d significa desprendimiento) cuando $Q_r^{lig} = 0$,

$$Q_r^{lig} = 0 = mg (3 \text{Cos } \theta_d - 2) \quad (5.204)$$

de manera que,

$$\theta_d = \text{Cos}^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) = 48, 2^\circ \quad (5.205)$$

Nótese que la fuerza generalizada de ligadura es $Q_r^{lig} = mg$ en $\theta = 0$, es decir, cuando la partícula se encuentra en la parte más alta del hemisferio⁶.

⁶Comparar el resultado aquí obtenido con el problema 8.39, página 236, de la referencia (1).

Ejemplo 5.18

La figura 5.14 muestra una partícula de masa m sobre un plano inclinado que se mueve con θ constante. Encuéntrese la aceleración de m a lo largo del plano inclinado y las fuerzas generalizadas de ligadura .

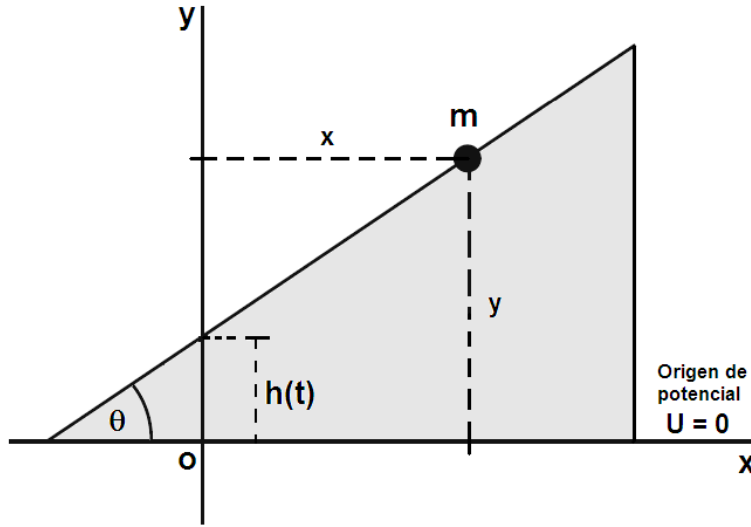


Figura (5.14): Partícula de masa m que se mueve sobre un plano inclinado móvil (Ejemplo 5.18).

Solución: La ecuación de la recta que define el plano inclinado viene dada por,

$$y = x \tan \theta + h(t) \tag{5.206}$$

de aquí que la ligadura sea,

$$f(x, y, t) = y - x \tan \theta - h(t) = 0 \tag{5.207}$$

Teniendo presente que la ligadura (5.207) es holónoma (reónoma), se pueden obtener las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.29). Para este caso (con $K = 1$ por sólo haber una ligadura),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} \tag{5.208}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} \tag{5.209}$$

El Lagrangiano viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \tag{5.210}$$

por lo tanto, de aquí y de (5.207) se halla que,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\tan \theta \quad (5.211)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 \quad (5.212)$$

Ahora, al sustituir los resultados (5.211) y (5.212) en (5.208) y (5.209) respectivamente, se obtiene,

$$m\ddot{x} = -\lambda_1 \tan \theta \quad (5.213)$$

$$m\ddot{y} + mg = \lambda_1 \quad (5.214)$$

a partir de las cuales, junto con (5.207), se encuentra que,

$$\ddot{x} = - \left(g + \ddot{h} \right) \text{Cos } \theta \text{ Sen } \theta \quad (5.215)$$

$$\ddot{y} = -g \text{ Sen}^2 \theta + \ddot{h} \text{Cos}^2 \theta \quad (5.216)$$

$$\lambda_1 = m \left(g + \ddot{h} \right) \text{Cos}^2 \theta \quad (5.217)$$

De (5.215) y (5.216) la aceleración a a lo largo del plano inclinado viene dada por,

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{g^2 \text{Sen}^2 \theta + \ddot{h}^2 \text{Cos}^2 \theta} \quad (5.218)$$

por lo tanto, a partir de (5.28), las fuerzas generalizadas de ligadura vendrán dadas por,

$$Q_x^{lig} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = -m \left(g + \ddot{h} \right) \text{Cos } \theta \text{ Sen } \theta \quad (5.219)$$

$$Q_y^{lig} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} = m \left(g + \ddot{h} \right) \text{Cos}^2 \theta \quad (5.220)$$

Aquí Q_x^{lig} y Q_y^{lig} son dos fuerzas, y son las fuerzas generalizadas de ligadura requeridas para mantener a m sobre la superficie del plano inclinado. El módulo de la resultante de las fuerzas (5.219) y (5.220) viene dada por,

$$Q^{lig} = \sqrt{\left(Q_x^{lig} \right)^2 + \left(Q_y^{lig} \right)^2} = m \left(g + \ddot{h} \right) \text{Cos } \theta \quad (5.221)$$

que es la fuerza de reacción normal al plano inclinado. Nótese que si $\ddot{h} = 0$, todo lo anterior se reduce a los resultados de los ejemplos 5.1 y 5.12.

.....

5.5. Ejemplos con ligaduras semi-holónomas

Ejemplo 5.19

Resolver la parte (b) del ejemplo 5.15 pero expresando la ligadura en forma diferencial.

Solución: La ecuación de ligadura, en forma diferencial, viene dada por,

$$f(x, \theta) = dx - R d\theta = \dot{x} - R\dot{\theta} = 0 \quad (5.222)$$

que es, en realidad, una ligadura holónoma pues es posible integrarla. En este caso se desea dejarla en esta forma. Aquí se tiene una ligadura y dos coordenadas generalizadas. A partir de (5.34) para $K = 1$ y $j = 1, 2$ resulta,

$$A_{11}\dot{q}_1 + A_{12}\dot{q}_2 + B_1(q_1, q_2, t) = 0$$

y si $q_1 = x$ y $q_2 = \theta$ entonces la anterior ecuación se puede escribir como,

$$A_{1x}\dot{x} + A_{1\theta}\dot{\theta} + B_1(x, \theta, t) = 0 \quad (5.223)$$

Al comparar (5.222) con (5.223) es fácil encontrar que,

$$A_{1x} = 1 \text{ y } A_{1\theta} = -R \quad (5.224)$$

Ahora al usar las ecuaciones de Lagrange (5.39) resulta,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{lx} \Rightarrow M\ddot{x} - Mg \text{ Sen } \phi = \lambda_1 \quad (5.225)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{l\theta} \Rightarrow \frac{1}{2} MR^2 \ddot{\theta} = -R\lambda_1 \quad (5.226)$$

donde se ha usado el Lagrangiano (5.166). Obsérvese que son idénticas a las encontradas en el ejemplo 5.15, por lo tanto,

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3} Mg \text{ Sen } \phi \quad (5.227)$$

y las fuerzas generalizadas de ligadura, al usar (5.38), vendrán dadas por,

$$\left. \begin{aligned} Q_x^{lig} &= \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{lx} = \lambda_1 A_{1x} = -\frac{1}{3} Mg \text{ Sen } \phi \\ Q_\theta^{lig} &= \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{l\theta} = \lambda_1 A_{1\theta} = \frac{1}{3} Mg R \text{ Sen } \phi \end{aligned} \right\} \quad (5.228)$$

resultados idénticos a los obtenidos en el ejemplo 5.15.

Ejemplo 5.20

Un disco rueda (sin deslizar) sobre el plano horizontal XY (ver figura 5.31), obligado a moverse de modo que su plano permanezca siempre vertical (el disco puede ser una de las dos ruedas de un eje). Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura.

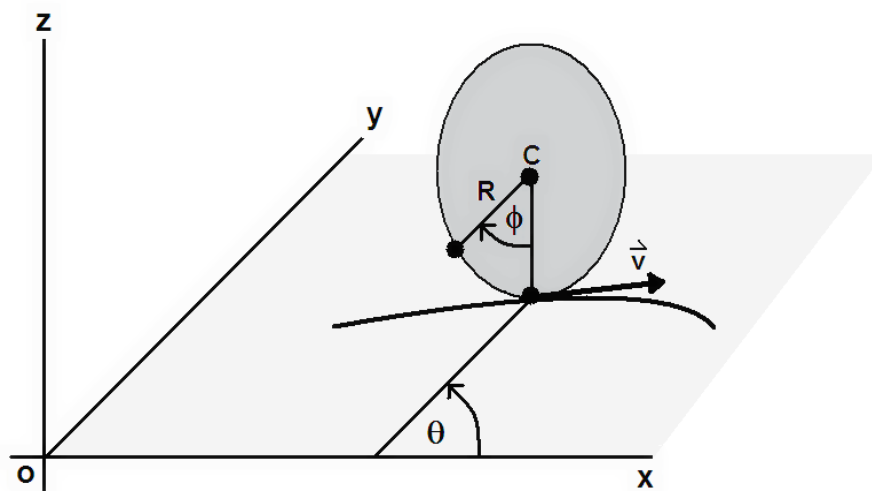


Figura (5.15): Un disco que rueda (sin deslizar) sobre el plano horizontal xy (Ejemplo 5.20).

Solución: Si se eligen como coordenadas para describir el movimiento las (x, y) del centro del disco, un ángulo de giro ϕ alrededor de su eje, y el ángulo θ formado por dicho eje y el eje X (ver figura 2.9) entonces, como resultado de la ligadura, la magnitud de la velocidad del centro del disco es proporcional a $\dot{\phi}$. Por lo tanto, las ecuaciones de ligadura vienen dadas por (ver ejemplo 2.7),

$$\dot{x} - R \text{Sen } \theta \dot{\phi} = 0 \tag{5.229}$$

$$\dot{y} + R \text{Cos } \theta \dot{\phi} = 0 \tag{5.230}$$

que no son integrables, es decir, son no-holónomas. Aquí se tienen dos ligaduras y cuatro coordenadas generalizadas. A partir de (5.34) para $l = 1, 2$ y $j = 1, 2, 3, 4$ resulta,

$$A_{11}\dot{q}_1 + A_{12}\dot{q}_2 + A_{13}\dot{q}_3 + A_{14}\dot{q}_4 + B_1(q_1, q_2, q_3, q_4, t) = 0$$

$$A_{21}\dot{q}_1 + A_{22}\dot{q}_2 + A_{23}\dot{q}_3 + A_{24}\dot{q}_4 + B_2(q_1, q_2, q_3, q_4, t) = 0$$

y si $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \phi$ y $q_4 = \theta$, entonces las anteriores ecuaciones se pueden escribir como,

$$A_{1x}\dot{x} + A_{1y}\dot{y} + A_{1\phi}\dot{\phi} + A_{1\theta}\dot{\theta} + B_1(x, y, \phi, \theta, t) = 0 \tag{5.231}$$

$$A_{2x}\dot{x} + A_{2y}\dot{y} + A_{2\phi}\dot{\phi} + A_{2\theta}\dot{\theta} + B_2(x, y, \phi, \theta, t) = 0 \tag{5.232}$$

Al comparar (5.231) con (5.229) y (5.232) con (5.230) resulta,

$$\begin{cases} A_{1x} = 1 & A_{1y} = 0 & A_{1\phi} = -R \text{Sen } \theta & A_{1\theta} = 0 \\ A_{2x} = 0 & A_{2y} = 1 & A_{2\phi} = R \text{Cos } \theta & A_{2\theta} = 0 \end{cases} \quad (5.233)$$

y a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.39) se puede escribir,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{lx} = \lambda_1 A_{1x} + \lambda_2 A_{2x} = \lambda_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{ly} = \lambda_1 A_{1y} + \lambda_2 A_{2y} = \lambda_2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{l\phi} = \lambda_1 A_{1\phi} + \lambda_2 A_{2\phi} = -\lambda_1 R \text{Sen } \theta + \lambda_2 R \text{Cos } \theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{l\theta} = \lambda_1 A_{1\theta} + \lambda_2 A_{2\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.234)$$

El Lagrangiano para este sistema viene dado por,

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_{\phi} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_{\theta} \dot{\theta}^2 \quad (5.235)$$

entonces, al sustituir (5.235) en las ecuaciones (5.234) resulta,

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda_1 \\ m\ddot{y} &= \lambda_2 \\ I_{\phi}\ddot{\phi} &= -\lambda_1 R \text{Sen } \theta + \lambda_2 R \text{Cos } \theta \\ I_{\theta}\ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.236)$$

que son las ecuaciones de Lagrange del sistema dado.

Ahora bien, de la primera y segunda de (5.236) y con el uso de (5.229) y (5.230) se obtiene,

$$\lambda_1 = m\ddot{x} = mR \left(\ddot{\phi} \text{Sen } \theta + \dot{\phi}\dot{\theta} \text{Cos } \theta \right) \quad (5.237)$$

$$\lambda_2 = m\ddot{y} = mR \left(-\dot{\phi}\dot{\theta} \text{Cos } \theta + \ddot{\phi}\text{Sen } \theta \right) \quad (5.238)$$

que al sustituir las en la tercera de las ecuaciones (5.236) resulta,

$$\begin{aligned} I_{\phi}\ddot{\phi} &= -mR^2 \left(\ddot{\phi} \text{Sen } \theta + \dot{\phi}\dot{\theta} \text{Cos } \theta \right) \text{Sen } \theta + mR^2 \left(-\dot{\phi}\dot{\theta} \text{Cos } \theta + \ddot{\phi}\text{Sen } \theta \right) \text{Cos } \theta \\ &= -mR^2 \dot{\phi}\dot{\theta} \end{aligned}$$

O,

$$\underbrace{(I_\phi + mR^2)}_{\neq 0} \ddot{\phi} = 0$$

de aquí que,

$$\ddot{\phi} = 0 \rightarrow \dot{\phi} = \omega = \text{constante} \tag{5.239}$$

y de la última de las ecuaciones (5.236) se obtiene,

$$\ddot{\theta} = 0 \rightarrow \dot{\theta} = \Omega = \text{constante} \tag{5.240}$$

Al sustituir (5.239) y (5.240) en (5.237) y (5.238) resulta,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= mR\omega\Omega \text{Cos } \theta \\ \lambda_2 &= mR\omega\Omega \text{Sen } \theta \end{aligned}$$

por lo tanto, de (5.38), las fuerzas generalizadas de ligadura vienen dadas por,

$$\left. \begin{aligned} Q_x^{lig} &= \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{lx} = \lambda_1 = mR\omega\Omega \text{Cos } \theta \\ Q_y^{lig} &= \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{ly} = \lambda_2 = mR\omega\Omega \text{Sen } \theta \\ Q_\phi^{lig} &= \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{l\phi} = 0 \\ Q_\theta^{lig} &= \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{l\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \tag{5.241}$$

La resultante de Q_x^{lig} y Q_y^{lig} es,

$$Q^{lig} = Q_x^{lig} \hat{e}_x + Q_y^{lig} \hat{e}_y = mR\omega\Omega (\text{Cos } \theta \hat{e}_x + \text{Sen } \theta \hat{e}_y)$$

que es perpendicular a la velocidad \vec{v} del disco, es decir, está dirigida a lo largo de su eje.

Ejemplo 5.21

⁷ La figura 5.16 muestra un carrito que consiste en un bloque rectangular de densidad uniforme y masa M , sobre una superficie horizontal (plano xy). El carrito posee dos ruedas de masa despreciable a la mitad de cada lado, de manera

⁷Ver referencia (20).

que el centro de masa está a la mitad de la distancia entre ambas. Además, el carrito tiene una carga Q en su centro y cargas q y $-q$ a la mitad de su parte frontal y trasera (cada una a una distancia b del centro del rectángulo) y está inmerso en un campo eléctrico uniforme \vec{E} en la dirección $+x$. Encuentre las ecuaciones de Lagrange (no hay deslizamiento en las ruedas).

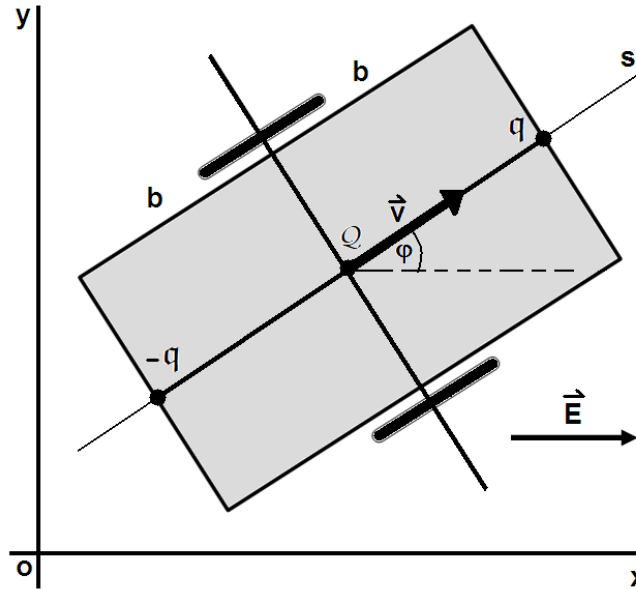


Figura (5.16): Carrito rectangular homogéneo de masa M inmerso en un campo eléctrico uniforme \vec{E} (Ejemplo 5.21).

Solución: La ecuación de ligadura viene dada por⁸,

$$f(\dot{x}, \dot{y}, \varphi) = \dot{x} \text{Sen } \varphi - \dot{y} \text{Cos } \varphi = 0 \quad (5.242)$$

Esta ligadura no es integrable, es decir, es no-holónoma. Aquí se tiene una ligadura y tres coordenadas generalizadas x , y y φ . A partir de (5.34) para $l = 1$ y $j = 1, 2, 3$ resulta,

$$A_{11}\dot{q}_1 + A_{12}\dot{q}_2 + A_{13}\dot{q}_3 + B_1(q_1, q_2, q_3, t) = 0$$

y si $q_1 = x$, $q_2 = y$ y $q_3 = \varphi$ entonces,

$$A_{1x}\dot{x} + A_{1y}\dot{y} + A_{1\varphi}\dot{\varphi} + B_1(x, y, \varphi, t) = 0 \quad (5.243)$$

Al comparar (5.242) con (5.243) resulta,

$$A_{1x} = \text{Sen } \varphi \quad A_{1y} = -\text{Cos } \varphi \quad A_{1\varphi} = 0 \quad (5.244)$$

⁸Resulta de combinar $\dot{x} = v \text{Cos } \varphi$ y $\dot{y} = v \text{Sen } \varphi$.

y a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.39) se puede escribir,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{lx} = \lambda_1 A_{1x} = \lambda_1 \text{Sen } \varphi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{ly} = \lambda_1 A_{1y} = -\lambda_1 \text{Cos } \varphi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{l\varphi} = \lambda_1 A_{1\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.245)$$

El Lagrangiano para este sistema viene dado por,

$$\begin{aligned} L &= T - U = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_{\varphi} \dot{\varphi}^2 - (-QEx - 2qEb \text{Cos } \varphi) \\ &= \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_{\varphi} \dot{\varphi}^2 + QEx + 2qEb \text{Cos } \varphi \end{aligned} \quad (5.246)$$

entonces, al sustituir (5.246) en las ecuaciones (5.245) resulta,

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} - QE &= \lambda_1 \text{Sen } \varphi \\ M\ddot{y} &= -\lambda_1 \text{Cos } \varphi \\ I_{\varphi}\ddot{\varphi} + 2qEb \text{Sen } \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.247)$$

que son las ecuaciones de Lagrange del sistema dado. Nótese que la última de las ecuaciones (5.247) es, formalmente, la misma que la del péndulo simple.

Ejemplo 5.22

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura en el ejemplo 5.21 pero tomando como coordenadas generalizadas s , φ y x .

Solución: El Lagrangiano en las nuevas coordenadas viene dado por,

$$L = \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} I_{\varphi} \dot{\varphi}^2 + QEx + 2qEb \text{Cos } \varphi \quad (5.248)$$

Para este caso es posible escribir dos ecuaciones de ligadura¹⁰,

$$\dot{x} = \dot{s} \text{Cos } \varphi \Rightarrow f(x, s, \varphi) = \dot{s} \text{Cos } \varphi - \dot{x} = 0 \quad (5.249)$$

$$\dot{y} = \dot{s} \text{Sen } \varphi \Rightarrow f(y, s, \varphi) = \dot{s} \text{Sen } \varphi - \dot{y} = 0 \quad (5.250)$$

Estas ligaduras son no-holónomas. Tomando la ecuación de ligadura (5.249), se tiene una ligadura y tres coordenadas generalizadas s , x y φ . A partir de (5.34) para $l = 1$ y $j = 1, 2, 3$ resulta,

$$A_{11}\dot{q}_1 + A_{12}\dot{q}_2 + A_{13}\dot{q}_3 + B_1(q_1, q_2, q_3, t) = 0$$

⁹Ver referencia (20).

¹⁰ $\dot{s} = v$.

y si $q_1 = s$, $q_2 = x$ y $q_3 = \varphi$ entonces,

$$A_{1s}\dot{s} + A_{1x}\dot{x} + A_{1\varphi}\dot{\varphi} + B_1(s, x, \varphi, t) = 0 \quad (5.251)$$

Al comparar (5.249) con (5.251) resulta,

$$A_{1s} = \text{Cos } \varphi \quad A_{1x} = -1 \quad A_{1\varphi} = 0 \quad (5.252)$$

y a partir de las ecuaciones de Lagrange (5.39) se puede escribir,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} &= \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{ls} = \lambda_1 A_{1s} = \lambda_1 \text{Cos } \varphi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{lx} = \lambda_1 A_{1x} = -\lambda_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{l\varphi} = \lambda_1 A_{1\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.253)$$

entonces, al sustituir (5.248) en las ecuaciones (5.253) resulta,

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{s} &= \lambda_1 \text{Cos } \varphi \\ QE &= \lambda_1 \\ I_\varphi\ddot{\varphi} + 2qEb \text{Sen } \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.254)$$

por lo tanto, de la segunda de las ecuaciones (5.254) y (5.38), las fuerzas generalizadas de ligadura vienen dadas por,

$$\left. \begin{aligned} Q_s^{lig} &= \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{ls} = \lambda_1 \text{Cos } \varphi = QE \text{Cos } \varphi \\ Q_x^{lig} &= \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{lx} = -\lambda_1 = -QE \\ Q_\varphi^{lig} &= \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{l\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.255)$$

5.6. Condición de integrabilidad de las ecuaciones de Lagrange

El sistema de las s ecuaciones diferenciales de segundo orden que conforman las ecuaciones de Lagrange, requieren como condición para su integrabilidad que,

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0 \quad (5.256)$$

En el fondo, esta condición significa poder despejar las aceleraciones del conjunto de ecuaciones diferenciales de Lagrange. Quedan así excluidos en esta formulación los Lagrangianos singulares o de primer orden en las velocidades generalizadas \dot{q}_i .

5.7. Invariancia de las ecuaciones de Lagrange

Una propiedad importante de las ecuaciones de Lagrange es que son invariantes¹¹, es decir, su forma es la misma en cualquier sistema de referencia. En efecto, si se hace una transformación de las coordenadas generalizadas (incluso habiendo dependencia explícita del tiempo) y se escriben las coordenadas q_i en términos de unas nuevas coordenadas \tilde{q}_i ,

$$q_i = f_i(\tilde{q}_i, t) \quad (5.257)$$

y se reemplazan por las coordenadas viejas en el Lagrangiano, se obtiene éste en función de las nuevas coordenadas $\tilde{L} = \tilde{L}(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t)$. Es claro que se deben reemplazar también las velocidades generalizadas por,

$$\dot{q}_i = \sum_l \frac{\partial f_i}{\partial \tilde{q}_l} \dot{\tilde{q}}_l + \frac{\partial f_i}{\partial t} \quad (5.258)$$

Se denominan *transformaciones puntuales o de contacto* a las transformaciones del tipo (5.257).

Sin embargo, el valor de L y \tilde{L} es el mismo en cada instante dado (sólo que expresado en las nuevas coordenadas), por lo que la acción (5.41) queda ahora en las nuevas coordenadas como,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t) dt \quad (5.259)$$

y las ecuaciones de Lagrange correspondientes, al extremar la acción, tienen igual forma a las (5.43),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_i} = 0 \quad (5.260)$$

Nótese que las nuevas coordenadas podrían ser, por ejemplo, coordenadas del sistema mecánico en un sistema de referencia no inercial y, sin embargo, no hay necesidad de incluir ninguna fuerza de inercia o algo equivalente. Aquí se ve la ventaja de

¹¹La invariancia se refiere a la propiedad de una cantidad o ley física de no variar bajo ciertas transformaciones u operaciones.

la formulación variacional sobre el principio de D'Alembert ya que, si se hubiese usado este principio, se habría tenido que calcular la aceleración de cada partícula y el trabajo virtual de las fuerzas de inercia para poder llegar a (5.260) en un sistema no inercial. Por otro lado, la invariancia de las ecuaciones de Lagrange permite usar las coordenadas mejor adaptadas al problema, siempre y cuando se pueda expresar el Lagrangiano en términos de ellas.

Otra propiedad importante es que si al Lagrangiano se le suma una derivada total con respecto al tiempo de una determinada función $M = M(q_i, t)$,

$$L \longrightarrow L + \frac{dM}{dt} \quad (5.261)$$

las ecuaciones de Lagrange no sufren cambio alguno. En efecto, al sustituir (5.260) en las ecuaciones de Lagrange (5.43) se obtiene,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(L + \frac{dM}{dt} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(L + \frac{dM}{dt} \right) = 0$$

o,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}}_{=0 \text{ en virtud de (5.43)}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \dot{M}}{\partial q_i} = 0$$

de la cual,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \dot{M}}{\partial q_i} = 0 \quad (5.262)$$

Ahora bien, se mostrará que, en verdad, (5.262) es una identidad $0 = 0$. Concéntrase en el primer término del lado izquierdo de la anterior expresión. Se sabe, por la llamada regla de supresión de puntos mostrada en la sección 5.1 con la expresión (5.7), que,

$$\frac{\partial \dot{M}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial M}{\partial q_i}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_l \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial M}{\partial q_i} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial M}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_l \frac{\partial M}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial M}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{M}}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (5.263)$$

que es idéntico al segundo término del miembro izquierdo de (5.262) con signo contrario, verificándose así la identidad y haciendo que las ecuaciones de Lagrange no se modifiquen. Así, por ejemplo, términos como,

$$C_1 \dot{q}_1 = \frac{d}{dt} (C_1 q_1) \quad \text{ó} \quad C_1 q_1 \dot{q}_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C_1 q_1^2 \right) \quad \text{con } C_1 \text{ constante}$$

sumados a L no aportan a las ecuaciones de movimiento.

Se denominan *transformaciones de gauge* a las transformaciones del tipo (5.261).

5.8. Equivalencia entre las ecuaciones de Lagrange y de Newton

Se demostrará ahora explícitamente la equivalencia existente entre las ecuaciones de Lagrange y de Newton, mostrando que los dos conjuntos de ecuaciones de movimiento son de hecho las mismas.

En la expresión (5.43) elijanse como coordenadas generalizadas, las coordenadas rectangulares. Las ecuaciones de Lagrange (para una partícula) se escriben como,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.264)$$

o,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial (T - U)}{\partial x_i} = 0 \quad (5.265)$$

Pero en coordenadas rectangulares y para sistemas conservativos, se tiene que $T = T(\dot{x}_i)$ y $U = U(x_i)$ así, de las ecuaciones (5.265), resulta,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = - \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (5.266)$$

y como (para sistemas conservativos),

$$- \frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i$$

y además,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 m \dot{x}_j^2 \right) \right] = \frac{d}{dt} (m \dot{x}_i) = \dot{p}_i \quad (5.267)$$

de manera que de (5.266) resulta,

$$F_i = \dot{p}_i \quad (5.268)$$

Así, las ecuaciones Lagrangianas y Newtonianas son idénticas si las coordenadas generalizadas son las coordenadas rectangulares.

5.9. Momentos generalizados

Considérese como ejemplo un sistema de partículas bajo la influencia de fuerzas derivables de potenciales dependientes sólo de la posición. Entonces,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) \right] = m \dot{x}_i = p_{ix}$$

que es la componente x del momento lineal asociado con la i -ésima partícula.

El anterior resultado sugiere una generalización obvia del concepto de momento como sigue,

Se define el *momento generalizado*, *momento canónico* o *momento conjugado* a la coordenada q_i mediante,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.269)$$

Téngase presente que si q_i no es una coordenada Cartesiana, p_i no tiene por qué tener las dimensiones de un momento lineal. Aún más, si el potencial depende de las velocidades generalizadas \dot{q}_i , incluso si las q_i son Cartesianas, los momentos generalizados no serán idénticos a los momentos mecánicos ordinarios.

Entonces las ecuaciones de Lagrange (5.19), (5.21), (5.27) y (5.37) pueden ser escritas, respectivamente, como,

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} + Q_j^{NU}, \text{ con } j = 1, 2, \dots, s \quad (5.270)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \text{ con } j = 1, 2, \dots, s \quad (5.271)$$

cuando se consideran ligaduras holónomas en forma implícita,

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^K \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial q_j} + Q_j^{NU}, \text{ con } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (5.272)$$

cuando se consideran ligaduras holónomas en forma explícita y,

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^K \lambda_l(q_i, t) A_{lj} + Q_j^{NU}, \text{ con } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (5.273)$$

cuando se consideran ligaduras no-holónomas del tipo (5.34).

5.10. Coordenadas cíclicas o ignorables

Una definición importante que se usará en adelante es el de *coordenada cíclica o ignorable*.

Se dice que una coordenada q_i de un sistema es cíclica o ignorable si el Lagrangiano L no contiene dicha coordenada de forma explícita, es decir,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

aunque puede contener la correspondiente velocidad \dot{q}_i .

Como consecuencia de la anterior definición, las ecuaciones de Lagrange (5.19),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

se reducen para una coordenada cíclica a,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

de modo que,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \text{constante} \quad (5.274)$$

de manera que los momentos generalizados para dichas coordenadas son constantes, es decir, se conservan.

5.11. Integrales primeras de movimiento

A veces, las ecuaciones de movimiento podrán ser integrables por medio de funciones conocidas, pero no siempre será este el caso. En realidad, en la mayor parte

de los casos no son integrables. Sin embargo, aun cuando no puedan obtenerse soluciones completas es posible, con frecuencia, inferir abundante información sobre la naturaleza física del movimiento del sistema. Además, tal información entraña a veces más interés para el físico que la solución completa que proporcionan las coordenadas generalizadas en función del tiempo. Por tanto, es de gran importancia averiguar todo lo que es posible decir acerca del movimiento de un sistema dado sin necesidad de integrar por completo las ecuaciones de movimiento.

Durante el movimiento de un sistema mecánico, las $2s$ cantidades q_i y \dot{q}_i ($i = 1, 2, \dots, s$, $s =$ grados de libertad del sistema), que especifican el estado del sistema, varían con el tiempo. Sin embargo, hay muchos problemas para los que pueden obtenerse inmediatamente cierto número de funciones de estas cantidades $G_l = G_l(q_i, \dot{q}_i, t)$, de manera que,

$$G_l(q_i, \dot{q}_i, t) = \text{constante} \quad (5.275)$$

que son ecuaciones diferenciales de primer orden.

Se denominan *integrales primeras de movimiento* o simplemente *integrales de movimiento* a las funciones $G_l(q_i, \dot{q}_i, t)$ cuyos valores permanecen constantes durante el movimiento de un sistema dado, correspondiendo a cantidades físicas conservadas y que dependen de las condiciones iniciales del mismo.

El interés de estas integrales primeras radica en que suelen decir algo de orden físico sobre el sistema objeto de estudio y pueden usarse en la solución de un problema de varias formas; por ejemplo, con estas l funciones se pueden eliminar el mismo número de variables dinámicas, velocidades o coordenadas y con esto disminuir el número de variables por determinar. También, mediante estas integrales primeras de movimiento se pueden conocer algunas propiedades dinámicas del sistema sin necesidad de resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales de movimiento.

Sin embargo, no todas las integrales de movimiento son de igual importancia en Mecánica. Hay algunas cuya constancia tienen un profundo origen y significado, ligado a las propiedades fundamentales del espacio y tiempo, es decir, a su homogeneidad e isotropía.

Todas estas magnitudes que, como suele decirse, son conservativas, tienen una propiedad general muy importante: la de ser aditivas, es decir, que su valor para un sistema formado por varias partes, cuya interacción entre sí es insignificante, será igual a la suma de los valores de cada una de dichas partes.

Es debido a esta aditividad el que estas cantidades tengan una importancia especial en Mecánica. Supóngase, por ejemplo, que dos cuerpos interactúan durante un cierto intervalo de tiempo. Puesto que cada una de las integrales aditivas de la totalidad del sistema son ambas, antes y después de la interacción, igual a la suma de sus valores para los dos cuerpos separadamente, las leyes de conservación para estas cantidades hacen inmediatamente posible obtener varias conclusiones referentes al estado de los cuerpos después de la interacción, si sus estados antes de la misma son conocidos.

La siguiente tabla muestra tres de las más importantes de estas cantidades conservadas para el caso de un sistema cerrado: la energía total, el momento lineal y el momento angular; relacionándolas con las propiedades del el espacio, el tiempo (ver sección 2.1) y el Lagrangiano.

Característica del sistema inercial	Propiedad del Lagrangiano	Cantidad conservada
Tiempo homogéneo	Función no explícita de t	Energía total
Espacio homogéneo	Invariante en traslaciones	Momento lineal
Espacio isótropo	Invariante en rotaciones	Momento angular

5.12. Integrales primeras de movimiento para un sistema cerrado

Una propiedad importante de los sistemas cerrados (ver sección 1.3) es que las ecuaciones de evolución temporal, o ecuaciones de movimiento, de dicho sistema sólo dependen de variables y factores contenidos en el sistema. Para un sistema de ese tipo, por ejemplo, la elección del origen de tiempos es arbitraria (homogeneidad del tiempo) y por tanto las ecuaciones de evolución temporal son invariantes respecto a las traslaciones temporales, implicando que la energía total de dicho sistema se conserva (como se verá en la siguiente sección). De hecho, un sistema cerrado al estar aislado no puede intercambiar energía con nada externo a él.

El universo entero considerado como un todo es probablemente el único sistema realmente cerrado, sin embargo, en la práctica muchos sistemas no completamente aislados pueden estudiarse como sistemas cerrados con un grado de aproximación muy bueno o casi perfecto.

El número de integrales de movimiento independientes para un sistema mecánico cerrado con s grados de libertad es $2s - 1$, lo cual es evidente a partir de los siguientes argumentos simples.

La solución general de las ecuaciones de movimiento contienen $2s$ constantes arbitrarias, puesto que:

Las ecuaciones de movimiento para un sistema cerrado no involucran al tiempo de forma explícita.

La elección del origen del tiempo es completamente arbitraria, y una de las constantes arbitrarias en la solución de las ecuaciones puede tomarse siempre como una constante aditiva t_o en el tiempo. Eliminado $t + t_o$ de las $2s$ funciones,

$$q_i = q_i(t + t_o, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1})$$

se pueden expresar las $2s - 1$ constantes arbitrarias $C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}$ como funciones de q_i y \dot{q}_i , y estas funciones serán integrales de movimiento.

5.13. Teoremas de conservación

5.13.1. Conservación de la energía

La homogeneidad del tiempo tiene como consecuencia la conservación de la energía en un sistema aislado.

Comiencese con un sistema donde el Lagrangiano presente una dependencia explícita del tiempo. En la formulación de Lagrange es posible demostrar un teorema de conservación para el cual la conservación de la energía total representa sólo un caso especial. Considérese un Lagrangiano general que depende de las coordenadas q_i , las velocidades \dot{q}_i y que podría depender explícitamente también del tiempo $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Entonces la derivada total de L con respecto del tiempo es,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (5.276)$$

pero por las ecuaciones de Lagrange (5.43),

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

de manera que (5.276) queda escrita como,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}$$

o,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

y de aquí que,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (5.277)$$

A la cantidad entre paréntesis es en muchos casos llamada *función de energía*, la cual será denotada con h ,

$$h \left(q_j, \dot{q}_j, t \right) = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \quad (5.278)$$

de manera que de (5.277) se obtiene,

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (5.279)$$

Ahora, si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo (consecuencia de la homogeneidad del tiempo en un sistema aislado o cerrado) sino sólo de manera implícita mediante la variación con respecto al tiempo de las q_i y las \dot{q}_i , entonces la expresión (5.279) dice que h se conserva. Se dice entonces que h es una integral primera del movimiento.

A un sistema cuyo Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo se le da el nombre de *sistema autónomo*.

Bajo ciertas circunstancias, la función h es la energía total del sistema. Para determinar cuáles son estas circunstancias, recuérdese (sección 2.8.5) que la energía cinética total de un sistema puede escribirse siempre como,

$$T = T_o + T_1 + T_2 \quad (5.280)$$

donde $T_o = T_o(q_i)$ es una función sólo de las coordenadas generalizadas, $T_1 = T_1(q_i, \dot{q}_i)$ es lineal con respecto a las velocidades generalizadas \dot{q}_i y $T_2 = T_2(q_i, \dot{q}_i)$ es una función cuadrática de las \dot{q}_i .

Para un amplio rango de sistemas y conjuntos de coordenadas generalizadas, el Lagrangiano puede ser separado de forma semejante con respecto a su comportamiento funcional en relación a las \dot{q}_i ,

$$L \left(q_i, \dot{q}_i, t \right) = L_o(q_i, t) + L_1 \left(q_i, \dot{q}_i, t \right) + L_2 \left(q_i, \dot{q}_i, t \right) \quad (5.281)$$

donde L_2 es una función homogénea de segundo grado (no meramente cuadrática) respecto a las \dot{q}_i , mientras que L_1 es una función homogénea de primer grado respecto a las \dot{q}_i . No existe una razón intrínseca en la Mecánica que requiera que el Lagrangiano se ajuste a (5.281) pero, de hecho, lo hace para la mayoría de los problemas de interés. Claramente el Lagrangiano tiene esta forma cuando las fuerzas pueden ser derivables a partir de potenciales que no involucren las velocidades. Incluso, con potenciales dependientes de las velocidades, se nota que el Lagrangiano para una partícula cargada en un campo electromagnético satisface (5.281).

Si se sustituye (la anterior) en (ecuación para h) resulta,

$$\begin{aligned} h &= \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (L_o + L_1 + L_2) - (L_o + L_1 + L_2) \\ &= \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} - L_o - L_1 - L_2 \end{aligned}$$

ahora, al aplicar el teorema de Euler (expresión (2.52) sección 2.8.5), resulta,

$$h = L_1 + 2L_2 - L_o - L_1 - L_2 = L_2 - L_o \quad (5.282)$$

Por otro lado, si el sistema es natural, es decir, si las ecuaciones de transformación (2.27) que definen las coordenadas generalizadas no involucran explícitamente el tiempo entonces, a partir de (2.46), resulta,

$$T = T_2 \quad (5.283)$$

y si, además, el potencial no depende de las velocidades generalizadas \dot{q}_i se tiene que¹²,

$$L_2 = T, L_o = -U \quad (5.284)$$

Por último, al sustituir el resultado anterior en (5.282) resulta,

$$h = T + U = E \quad (5.285)$$

y así la función de energía h es en verdad la energía del sistema. Bajo estas circunstancias, si U no involucra explícitamente al tiempo, tampoco lo hará L . De aquí que, debido a (5.279), h (que aquí es la energía total) será conservada.

¹² L en (5.281) tiene que ser igual a $T - U$, es decir, $L_o + L_1 + L_2 = T - U$. Observemos que el único término dependiente sólo de las coordenadas generalizadas es L_o , por lo que puede ser identificado con $-U$ ya que tiene la misma dependencia. El resto $L_1 + L_2$ tiene que ser igual a $T = T_2$, pero como T_2 debe ser una función homogénea de segundo orden respecto a las velocidades generalizadas entonces, $L_1 = 0$ por lo que $T = L_2$.

Nótese que las condiciones para la conservación de h son, en principio, bastante distintas de aquellas que identifican h como la energía total. Se puede tener un conjunto de coordenadas generalizadas tal que, en un problema en particular, h se conserve pero no sea la energía total. Por otro lado, h puede ser la energía total, en la forma $T + U$, y no conservarse. Nótese también que mientras que el Lagrangiano está definido para cada sistema en la forma única,

$$L = T - U$$

independientemente de las coordenadas generalizadas, la función de energía h depende en magnitud y forma funcional de un conjunto específico de coordenadas generalizadas. Para un mismo sistema, se pueden generar varias funciones de energía de diferente contenido físico dependiendo de como sean elegidas las coordenadas generalizadas.

El caso más común es aquél en que todos los términos de energía cinética son de la forma $\frac{1}{2}m\dot{q}_i^2$ o $\frac{p_i^2}{2m}$ y la energía potencial depende sólo de las coordenadas q_i . En estas condiciones, la función de energía es conservada y es también la energía total.

5.13.2. Conservación del momento generalizado - Conservación del momento lineal y angular

De las expresiones (5.274) y (5.269) se puede deducir que, para una coordenada cíclica o ignorable, se cumple que,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (5.286)$$

por lo tanto, de inmediato se puede establecer el siguiente teorema de conservación general,

El momento generalizado conjugado a una coordenada cíclica o ignorable, se conserva.

Es de hacer notar que la obtención de (5.286) supone que q_i es una coordenada generalizada, es decir, una coordenada que es linealmente independiente de todas las otra coordenadas. Como caso particular, en el ejemplo 4.10, la coordenada angular θ no está presente en el Lagrangiano pero, aparece en la ecuación de ligadura $f(x, \theta) = x - R\theta$, dando como resultado que el momento angular $p_\theta = MR^2\dot{\theta}$ no sea una constante de movimiento.

La expresión (5.286) constituye una primera integral de movimiento de la forma (5.275) y puede ser usada formalmente para eliminar la coordenada cíclica del problema, el cual puede ser resuelto completamente en términos de las coordenadas generalizadas restantes. En breves palabras, el procedimiento (debido a Routh) consiste en modificar el Lagrangiano, de modo que en vez de ser función de la velocidad generalizada correspondiente a la coordenada cíclica, lo sea sólo de su momento conjugado. La ventaja que se obtiene es la posibilidad de considerar p_i como una de las constantes de integración, con lo que las integraciones restantes dependen sólo de coordenadas no cíclicas.

Téngase presente que las condiciones para que se conserven los momentos generalizados son más generales que los teoremas de conservación del momento lineal y momento angular estudiados en Mecánica Newtoniana. Con suposiciones como: la homogeneidad e isotropía del espacio, la expresión (5.286) se reduce a dichos teoremas.

Conservación del momento lineal

La homogeneidad del espacio da lugar a otro teorema de conservación, el del momento lineal. Debido a dicha homogeneidad, las propiedades mecánicas de un sistema aislado no deben variar si dicho sistema, en su conjunto, experimenta un desplazamiento paralelo (traslación) en el espacio.

Considérese una coordenada q_j , en la que un cambio dq_j represente una traslación del sistema en conjunto en una dirección dada. Un ejemplo de este caso podría ser una de las coordenadas Cartesianas del centro de masa del sistema.

Es claro que q_j no aparecerá en T , pues las velocidades no se alteran al trasladar el origen y $\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$ (homogeneidad del espacio). Se supondrá, además, que se trata de sistemas conservativos en los que U no depende de las velocidades, con lo que se eliminarán anomalías tales como las fuerzas electromagnéticas. Por tanto, la ecuación de Lagrange para una coordenada definida de esta forma será,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \underbrace{\dot{p}_j}_{\text{por (5.270)}} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} = \underbrace{Q_j}_{\text{por (2.44)}} \quad (5.287)$$

Ya establecidas las consideraciones adecuadas, se demostrará ahora que:

1. La expresión (5.287) es la ecuación de movimiento para el momento lineal total, es decir, que Q_j representa la componente de la fuerza total a lo largo de la dirección de traslación q_j .

2. p_j es la componente del momento lineal total en la misma dirección.

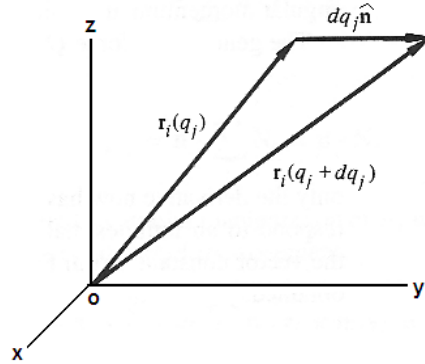


Figura (5.17): Cambio del vector de posición debido una traslación del sistema.

En general, la fuerza generalizada Q_j , como se vio en la sección 2.8.4 expresión (2.41), viene dada por,

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

pero como dq_j corresponde a una traslación del sistema a lo largo de cierto eje, los vectores $\vec{r}_i(q_j)$ y $\vec{r}_i(q_j + dq_j)$ están relacionados como se puede ver en la figura 5.17. Por definición de derivada,

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_i(q_j + dq_j) - \vec{r}_i(q_j)}{dq_j} = \frac{dq_j \hat{n}}{dq_j} = \hat{n} \quad (5.288)$$

donde \hat{n} es un versor en la dirección de traslación. Así,

$$Q_j = \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) \cdot \hat{n} = \hat{n} \cdot \vec{F}$$

que es la componente de la fuerza total en la dirección \hat{n} .

Para probar la segunda parte, téngase en cuenta que con una energía cinética de la forma,

$$T = \frac{1}{2} m_j \dot{r}_j^2 = \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \dot{\vec{r}}_j$$

el momento conjugado es,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{\text{por (5.7)}}$$

que, debido a (5.288), se convierte en,

$$p_j = \hat{n} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

que no es más que la componente del momento lineal total del sistema en la dirección del versor \hat{n}

Si se supone ahora que la coordenada de traslación q_j es cíclica, q_j no aparecerá en L (y por ende tampoco en U) y, por tanto,

$$-\frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j = 0$$

que es precisamente el conocido teorema de conservación del momento lineal en la Mecánica Newtoniana, que dice,

Si es nula una componente de la fuerza total aplicada, se conserva la correspondiente componente del momento lineal.

Conservación del momento angular

La isotropía del espacio da lugar a otro teorema de conservación, el del momento angular. Debido a la isotropía del espacio, un sistema aislado sometido a un cambio de orientación no debería variar su comportamiento dinámico.

Procediendo de modo análogo a lo realizado para la conservación del momento lineal, se puede demostrar que si una coordenada cíclica q_j es tal que dq_j corresponde a un giro del sistema alrededor de cierto eje, la conservación de su momento conjugado corresponde a la conservación de un momento angular.

Por el mismo razonamiento utilizado anteriormente, q_j no puede estar contenida en T , pues las magnitudes de las velocidades no se alteran al girar el sistema de referencia (isotropía del espacio). Por tanto $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 0$, y como U es independiente de \dot{q}_j , se encuentra nuevamente la expresión (5.287). Se probará ahora que:

1. si q_j es una coordenada de rotación, la fuerza generalizada (5.287) es la componente del par resultante aplicado alrededor del eje de rotación,
2. p_j es la componente del momento angular total respecto al mismo eje.

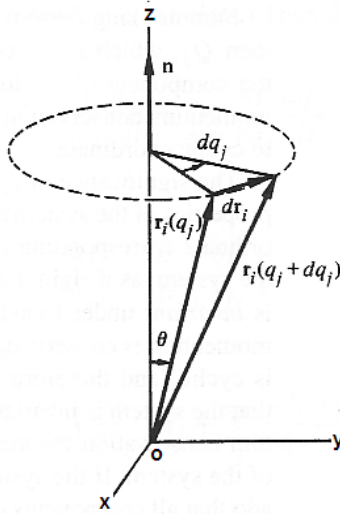


Figura (5.18): Variación del vector de posición al rotar.

La fuerza generalizada está dada de nuevo por,

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

teniendo la derivada ahora un significado diferente. En este caso el cambio de q_j ha de corresponder a un giro infinitesimal del vector \vec{r}_i , que deje inalterado su módulo. El módulo de la derivada se obtiene fácilmente a partir de la figura (5.18),

$$|d\vec{r}_i| = r_i \text{ Sen } \theta dq_j$$

y

$$\left| \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right| = r_i \text{ Sen } \theta$$

y su dirección es perpendicular a \vec{r}_i y a \hat{n} . Esta derivada se expresa también como producto vectorial como sigue,

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \hat{n} \times \vec{r}_i$$

de manera que la fuerza generalizada se convierte en,

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N \hat{n} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

o

$$Q_j = \hat{n} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{N}_i = \hat{n} \cdot \vec{N}$$

lo que prueba la primera parte.

Ahora, para demostrar la segunda parte,

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \hat{n} \cdot \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \hat{n} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \hat{n} \cdot \vec{L} \quad (5.289)$$

Si se supone ahora que la coordenada de rotación q_j es cíclica, q_j no aparecerá en L (y por ende tampoco en U) y, por tanto,

$$-\frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j = 0$$

que es precisamente el conocido teorema de conservación del momento angular en la Mecánica Newtoniana, que dice,

Si es nula una componente del torque aplicado en una dirección determinada, la componente del momento angular en la misma dirección será constante.

5.14. Teorema de Noether

Considérense transformaciones simétricas continuas de las coordenadas generalizadas dependientes de un parámetro real σ tales que para $\sigma = 0$ se reduzca a la transformación identidad, es decir,

$$\tilde{q}_j = \tilde{q}_j(q_i, \sigma), \text{ siendo } q_i = \tilde{q}_i(q_i, 0) \quad (5.290)$$

el teorema de Noether¹³ dice que,

¹³Emmy Noether (1882-1935), matemática alemana, notable por su trabajo en álgebra abstracta. Nació en una familia de matemáticos y fue oyente de cursos universitarios, ya que en aquella época las universidades alemanas no admitían a las mujeres. Sin embargo, consiguió el doctorado en 1907 por la Universidad de Erlangen. Cuando los nazis llegaron al poder en 1933, Noether emigró a Estados Unidos, donde dio clases en el Bryn Mawr College y en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, en Nueva Jersey. Su trabajo en la teoría de las invariantes fue utilizado por Albert Einstein en la formulación de algunos de sus conceptos relativistas.

Si el Lagrangiano de un sistema autónomo $L = L(q_i, \dot{q}_i)$ es invariante bajo dicha transformación, es decir si,

$$L = L\left[\tilde{q}_i(q_i, \sigma), \dot{\tilde{q}}_i(q_i, \sigma)\right]$$

no depende de σ , entonces se tiene una cantidad I conservada, o integral primera de movimiento asociada con dicha simetría por cada parámetro de la transformación. Estas cantidades pueden ser encontradas derivando cada coordenada con respecto al parámetro de la transformación en la vecindad inmediata de la transformación identidad, multiplicándolas por el momento conjugado, y sumando sobre los grados de libertad, es decir,

$$I_i(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{l=1}^s p_l \left. \frac{d\tilde{q}_l}{d\sigma_i} \right|_{\text{todos } \sigma=0} = \text{constante} \quad (5.291)$$

donde la evaluación en $\sigma = 0$ se hace por conveniencia y donde los p_l son los momentos generalizados o momentos conjugados definidos en la sección 5.9 por (5.269). Para rotaciones espaciales, I_1, I_2 e I_3 , son las componentes del momento angular \vec{L} .

Demostración:

Pártase de que el Lagrangiano no depende de σ , por lo tanto,

$$\frac{d}{ds} L\left[\tilde{q}_i(q_i, \sigma), \dot{\tilde{q}}_i(q_i, \sigma)\right] = 0 \quad (5.292)$$

es decir,

$$\sum_{l=1}^s \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_l} \frac{d\tilde{q}_l}{d\sigma} + \sum_{l=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_l} \frac{d\dot{\tilde{q}}_l}{d\sigma} = 0 \quad (5.293)$$

y al hacer $\sigma = 0$ se tiene que,

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_l} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_l} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right)}_{\text{Por (5.270)}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_l} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \quad (5.294)$$

de modo que se obtiene,

$$\sum_{l=1}^s \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \frac{d\tilde{q}_l}{d\sigma} + \sum_{l=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\dot{\tilde{q}}_l}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = 0 \quad (5.295)$$

o bien,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\tilde{q}_l}{d\sigma} \right) \Bigg|_{\sigma=0} = 0 \quad (5.296)$$

o también, para el i -ésimo parámetro σ ,

$$\sum_{l=1}^s p_l \frac{d\tilde{q}_l}{d\sigma_i} \Bigg|_{\sigma=0} = \text{constante}$$

que prueba el teorema.

Ejemplo 5.23

Encontrar las cantidades conservadas para un sistema cuyo Lagrangiano es $L = L(\dot{q}_i)$, bajo las transformaciones $\tilde{q}_i = q_i + \sigma a_i$ (el Lagrangiano es obviamente invariante bajo estas transformaciones), donde las a_i son constantes arbitrarias.

Solución: De (5.291) y teniendo presente que para este caso $i = 1$ (por lo que se omite),

$$\begin{aligned} I &= \sum_{l=1}^s p_l \frac{d\tilde{q}_l}{d\sigma} \Bigg|_{\text{todos } \sigma=0} = \sum_{l=1}^s p_l \frac{d}{d\sigma} (q_l + \sigma a_l) \Bigg|_{\text{todos } \sigma=0} \\ &= \sum_{l=1}^s p_l a_l = \text{constante} \end{aligned}$$

y como los a_l son arbitrarios, deben conservarse independientemente todos los momentos generalizados,

$$p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Ejemplo 5.24

Encontrar la cantidad conservada si el Lagrangiano del sistema $L = L(q_i, \dot{q}_i)$ de una de las coordenadas generalizadas, q_k por ejemplo, o sea que es invariante bajo la transformación $\tilde{q}_i = q_i + \sigma \delta_{ik}$ (δ_{il} es el símbolo delta de Kronecker).

Solución: De (5.291),

$$\begin{aligned} I &= \sum_{l=1}^s p_l \frac{d\tilde{q}_l}{d\sigma} \Bigg|_{\text{todos } \sigma=0} = \sum_{l=1}^s p_l \frac{d}{d\sigma} (q_l + \sigma \delta_{lk}) \Bigg|_{\text{todos } \sigma=0} \\ &= \sum_{l=1}^s p_l \delta_{lk} = p_k = \text{constante} \end{aligned}$$

conservándose así el momento generalizado a la coordenada que no aparece en el Lagrangiano, resultado que ya se conocía de la sección 5.10.

Ejemplo 5.25

Encontrar la cantidad conservada si el Lagrangiano del sistema $L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ es invariante bajo una rotación infinitesimal $\vec{r}' = \vec{r} + d\theta \hat{n} \times \vec{r}$.

Solución: De (5.291),

$$\begin{aligned} I &= \sum_{l=1}^s p_l \frac{d\tilde{q}_l}{d\sigma} \Big|_{\text{todos } \sigma=0} = \vec{p}_r \bullet \frac{d}{d\theta} (\vec{r} + d\theta \hat{n} \times \vec{r}) \Big|_{\text{todos } \theta=0} \\ &= \vec{p}_r \bullet \hat{n} \times \vec{r} = \vec{r} \times \vec{p}_r \bullet \hat{n} = \vec{L} \bullet \hat{n} = \text{constante} \end{aligned}$$

conservándose así la componente \hat{n} del momento angular, como se había visto en la sección 5.13.2.

5.15. Mecánica Lagrangiana vs la Newtoniana

Históricamente, las ecuaciones de movimiento de Lagrange expresadas en coordenadas generalizadas fueron derivadas antes de que el principio de Hamilton fuese enunciado.¹⁴

La Mecánica Lagrangiana no constituye una nueva teoría. Los resultados de un análisis Lagrangiano o uno Newtoniano deberían ser los mismos para cualquier sistema mecánico dado. La única diferencia es el método usado para obtener los dichos resultados.

Mientras que el punto de vista Newtoniano enfatiza un agente externo que actúa sobre un cuerpo (la fuerza), el método Lagrangiano utiliza sólo cantidades asociadas con el cuerpo (las energía cinética y potencial). De hecho, en ningún lugar de la formulación Lagrangiana entra el concepto de fuerza. Debido a que la energía es un escalar, la función Lagrangiana para un determinado sistema es invariante bajo transformaciones de coordenadas. En verdad, tales transformaciones no están restringidas a que se den entre sistemas de coordenadas ortogonales, también pueden ser

¹⁴En 1788 las ecuaciones de Lagrange y en 1834 el principio de Hamilton.

transformaciones entre coordenadas ordinarias y coordenadas generalizadas. De esta manera, es posible pasar del espacio ordinario (donde las ecuaciones de movimiento pueden ser bastante complicadas) a un espacio de configuración que puede ser escogido de tal forma que rinda la máxima simplificación para un problema en particular. Se está acostumbrado a estudiar los sistemas mecánicos en términos de cantidades vectoriales tales como la fuerza, la velocidad, el momento angular, el momento lineal y el torque. Pero en la formulación Lagrangiana, las ecuaciones de movimiento son obtenidas completamente en términos de operaciones escalares en el espacio de configuración.

Otro aspecto importante del punto de vista fuerza-versus-energía es que en ciertas situaciones incluso puede no ser posible establecer explícitamente todas las fuerzas actuantes sobre un cuerpo (como es algunas veces el caso de las fuerzas de ligadura), mientras que es aún posible dar expresiones para las energía cinética y potencial. Justamente este hecho es el que hace que el principio de Hamilton sea útil para los sistemas mecánico-cuánticos donde normalmente se conocen las energías pero no las fuerzas.

Se ha mostrado que la naturaleza diferencial contenida en las ecuaciones de Newton y la naturaleza integral del principio de Hamilton (y las ecuaciones Lagrangianas resultantes) son completamente equivalentes. Por lo tanto, no existe distinción entre estos puntos de vista, los cuales están basados en la descripción de los efectos físicos. Pero desde el punto de vista filosófico, se puede hacer una diferencia. En la formulación Newtoniana, cierta fuerza sobre un cuerpo produce un movimiento definido, es decir, siempre se asocia un efecto con una causa. Sin embargo, de acuerdo con el principio de Hamilton el movimiento de un cuerpo resulta del intento de la naturaleza de lograr cierto propósito, el cual es minimizar la integral temporal de la diferencia entre las energías cinética y potencial. La solución operacional de los problemas en la Mecánica no depende de la adopción de uno u otro de estos puntos de vista, pero históricamente tales consideraciones han tenido una profunda influencia en el desarrollo de la misma.

5.16. Problemas

1. Una partícula de masa m está obligada a moverse sobre la superficie interna de un cono liso. Ver figura 5.19, donde α es constante. La partícula está sometida a una fuerza gravitacional. Encuentre las fuerzas generalizadas de ligadura .

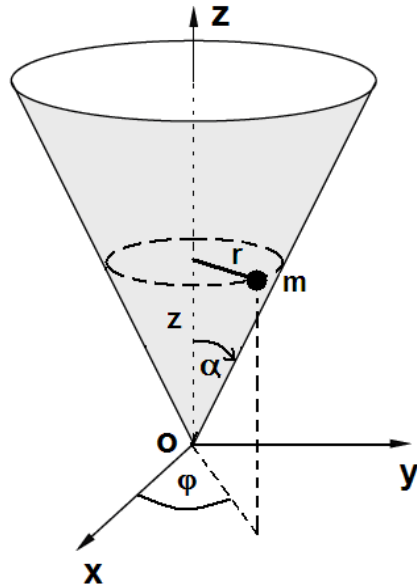


Figura (5.19): Una partícula de masa m está obligada a moverse sobre la superficie interna de un cono liso (Problema 1).

2. Mostrar que las ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

vistas en clases, pueden ser escritas en la forma,

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

que es la llamada *forma de Nilsen* de las ecuaciones de Lagrange.

3. Si $L(q, \dot{q}, t)$ es un Lagrangiano para un sistema de n grados de libertad que satisface las ecuaciones de Lagrange, mostrar mediante sustitución directa que,

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q_1, q_2, \dots, q_n, t)}{dt}$$

también satisface las ecuaciones de Lagrange, donde F es una función arbitraria y diferenciable.

4. Un bloque de masa m se desplaza sobre un plano inclinado sin rozamiento (ver figura 5.20). Encontrar las ecuaciones de movimiento de Lagrange para el referencial mostrado y la aceleración del bloque a lo largo del plano inclinado.

5. Encuentre las fuerzas generalizadas de ligadura en el problema 4.

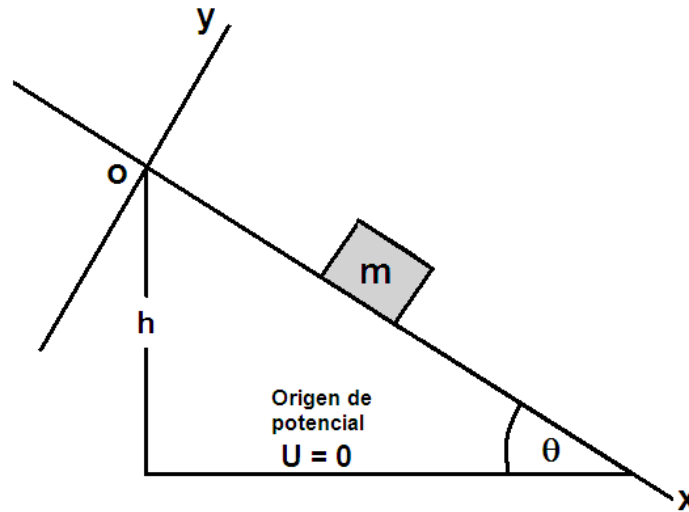


Figura (5.20): Una partícula de masa m se desplaza sobre un plano inclinado (Problema 4).

6. Sean q_1, q_2, \dots, q_n un conjunto de coordenadas generalizadas independientes para un sistema de n grados de libertad, con Lagrangiano $L = L(q, \dot{q}, t)$. Supóngase que se transforma a otro conjunto de coordenadas independientes s_1, s_2, \dots, s_n mediante las ecuaciones de transformación,

$$q_i = q_i(s_1, s_2, \dots, s_n, t) \text{ con } i = 1, 2, \dots, n.$$

(a este tipo de transformación se le denomina *transformación de punto*). Mostrar que si el Lagrangiano es expresado como una función de s_j, \dot{s}_j y t mediante las ecuaciones de transformación, entonces L satisface las ecuaciones de Lagrange con respecto a las coordenadas s ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0$$

En otras palabras, la forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo una transformación puntual.

7. Una pequeña esfera se desliza sin rozamiento en un alambre liso doblado en forma de cicloide (ver figura 5.21) cuya ecuación es,

$$x = a(\theta - \text{Sen } \theta), \quad y = a(1 + \text{Cos } \theta)$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

a) Mostrar que la ecuación de movimiento viene dada por,

$$(1 - \text{Cos } \theta) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \text{Sen } \theta \dot{\theta}^2 - \frac{g}{2a} \text{Sen } \theta = 0$$

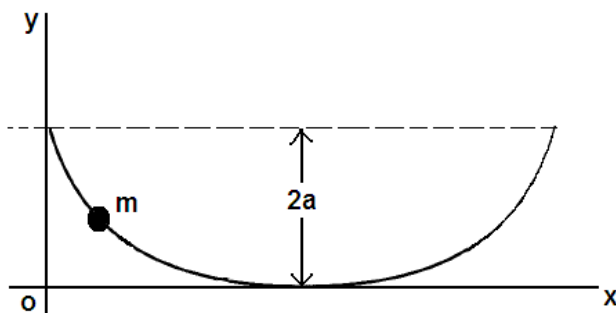


Figura (5.21): Esfera que se desliza, sin rozamiento, en un alambre liso doblado en forma de cicloide (Problema 7).

b) Encuentre las fuerzas generalizadas de ligadura .

c) Mostrar que la ecuación de movimiento puede escribirse como,

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

donde $\omega^2 = \frac{g}{4a}$ y $u = \text{Cos}(\theta/2)$, que es la ecuación del oscilador armónico simple.

8. Mostrar que de las ecuaciones de Lagrange para un péndulo plano (ver figura 5.22) se obtiene, usando coordenadas polares,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \text{Sen} \theta = 0$$

y,

$$\ddot{x} + \frac{x\dot{x}^2}{\ell^2 - x^2} + \frac{gx}{\ell^2} \sqrt{\ell^2 - x^2} = 0$$

si se usan coordenadas Cartesianas.

9. Mostrar que:

a) El Lagrangiano para el péndulo doble mostrado en la figura 5.23 viene dado por,

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\ & - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) \\ & + (m_1 + m_2) g \ell_2 \text{Cos} \theta_1 + m_2 g \ell_2 \text{Cos} \theta_2 \end{aligned}$$

b) Las ecuaciones de movimiento son,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[(m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\theta}_1 - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2 \text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) \right] \\ & = - (m_1 + m_2) g \ell_2 \text{Sen} \theta_1 \\ & \frac{d}{dt} \left[\ell_2 \dot{\theta}_2 - \ell_1 \dot{\theta}_1 \text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) \right] = -g \text{Sen} \theta_2 \end{aligned}$$

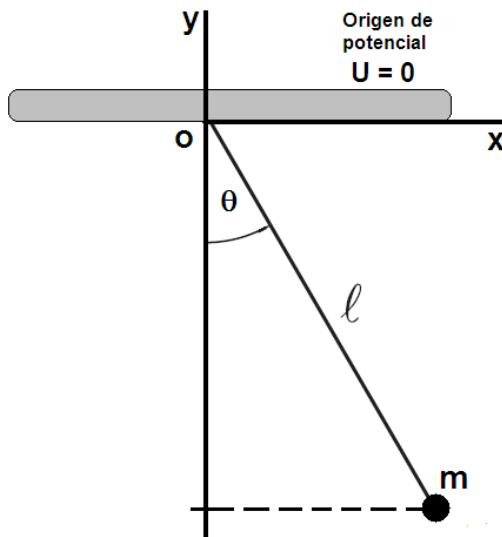


Figura (5.22): Péndulo simple (Problema 8).

c) Si $\dot{\theta}_1 = 0$, de tal manera que el soporte para el segundo péndulo se hace fijo, entonces la segunda de estas ecuaciones se reduce a la primera ecuación obtenida en el problema 8.

10. Encuentre las fuerzas generalizadas de ligadura en el problema 9.

11. Encuentre las aceleraciones de los bloques mostrados en la figura 5.24 a partir de las ecuaciones de Lagrange. No existe rozamiento alguno.

12. Dado el sistema mostrado en la figura 5.25 (no existe rozamiento),

a) Tome como coordenadas generalizadas las variables x y s . Muestre que el lagrangiano viene dado por,

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos\theta) + mgs\sin\theta$$

y que,

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{1}{2} \frac{mg \operatorname{Sen}(2\theta)}{M + m \operatorname{Sen}^2 \theta} \\ \ddot{s} &= \frac{(M + m)g \operatorname{Sen} \theta}{M + m \operatorname{Sen}^2 \theta}\end{aligned}$$

b) El bloque de masa m parte del reposo respecto al plano inclinado y desde el punto A . Demuestre que el tiempo que tarda la partícula en llegar al punto B

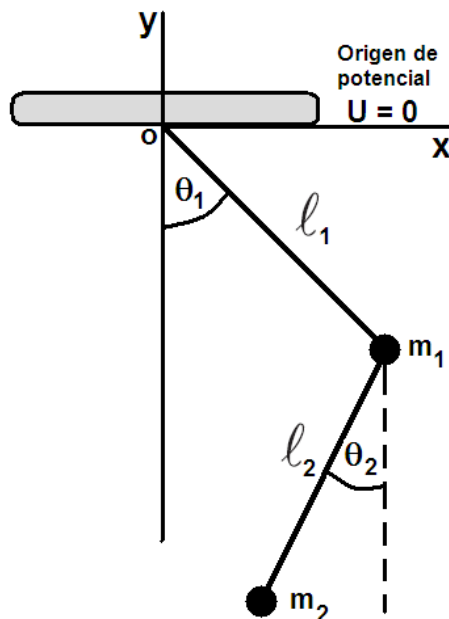


Figura (5.23): Péndulo doble (Problema 9).

viene dado por,

$$t = \sqrt{\frac{2\ell (M + m \text{Sen}^2 \theta)}{(M + m) g \text{Sen} \theta}}$$

- c) ¿Hay alguna coordenada cíclica?, ¿qué valor tiene su momento conjugado?, ¿se conserva la función de energía h ?, ¿es igual a la energía mecánica total?

13. El Lagrangiano para un sistema físico particular puede ser escrito como,

$$L' = \frac{m}{2} (a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{K}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

donde a, b y c son constantes arbitrarias pero sujetas a la condición $b^2 - ac \neq 0$.

a) Mostrar que las ecuaciones de movimiento vienen dadas por,

$$\begin{aligned} m (a\ddot{x} + b\ddot{y}) &= -K (ax + by) \\ m (b\ddot{x} + c\ddot{y}) &= -K (bx + cy) \end{aligned}$$

b) Examine particularmente los dos casos $a = c = 0$ y $b = 0, c = -a$. ¿Cuál es el sistema físico descrito por el anterior Lagrangiano?

c) Mostrar que el lagrangiano usual para este sistema está relacionado con L' (ver problema 3) por una transformación puntual (ver problema 6) y (d) ¿cuál es el significado de la condición $b^2 - ac \neq 0$?

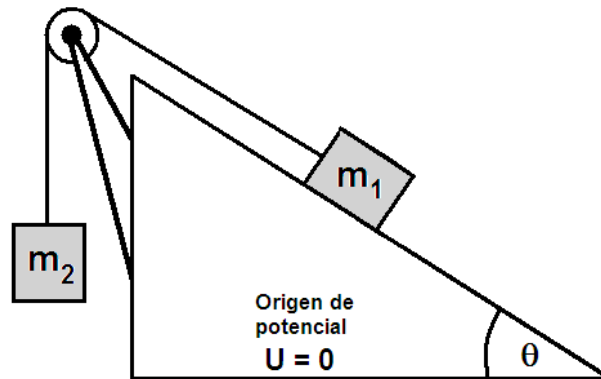


Figura (5.24): Dos bloques acoplados mediante una cuerda que pasa a través de una polea (Problema 11).

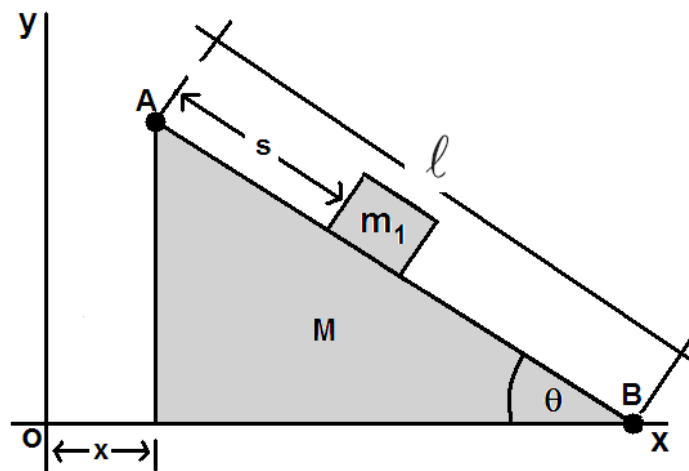


Figura (5.25): Bloque de masa m que se desliza sobre un plano inclinado de masa M móvil (Problema 12).

14. Dos masas m_1 y m_2 están unidas por una cuerda de longitud ℓ inextensible y de masa despreciable como se muestra en la figura 5.26. Encuentre las aceleraciones de los bloques a partir de las ecuaciones de Lagrange, (a) usando ℓ como coordenada generalizada y (b) usando ℓ_1 como coordenada generalizada. No existe rozamiento alguno.
15. Considérese el caso del movimiento de un proyectil de masa m bajo la acción de la gravedad en dos dimensiones (estudiado en Física I como lanzamiento de un proyectil con ángulo de elevación). Encontrar las ecuaciones de movimiento de Lagrange en: (a) Coordenadas Cartesianas y (b) polares. Muestre un diagrama de la situación.
16. Mostrar que la ecuación de movimiento de una partícula que cae verticalmente

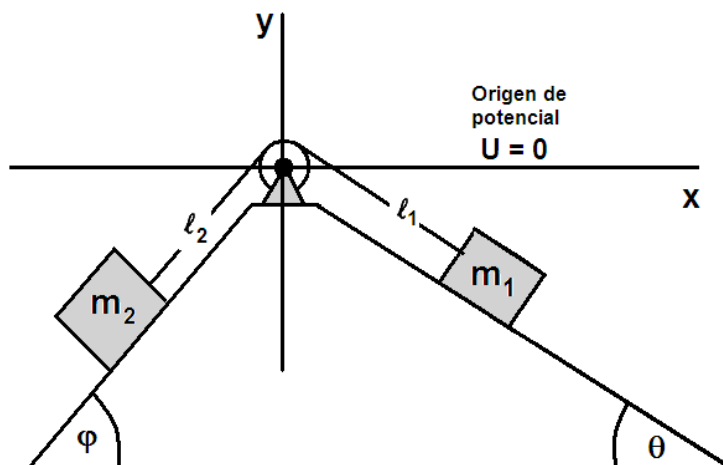


Figura (5.26): Dos bloques acoplados mediante una cuerda que pasa a través de una polea (Problema 14).

bajo la influencia de la gravedad cuando están presentes fuerzas de fricción que se pueden obtener de la función de disipación $\frac{1}{2}kv^2$ viene dada por,

$$\ddot{z} = -g - \frac{k}{m} \dot{z}$$

Integrar la ecuación para obtener la velocidad como una función del tiempo y mostrar que la máxima velocidad posible para una caída desde el reposo es $v = \frac{mg}{k}$.

17. Obtener las ecuaciones de Lagrange para un péndulo esférico (ver figura 5.27).

Resp.: $\ddot{\theta} - \text{Sen } \theta \text{ Cos } \theta \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{\ell} \text{Sen } \theta = 0, \frac{d}{dt} (\text{Sen}^2 \theta \dot{\varphi}) = 0.$

18. Encuentre las fuerzas generalizadas de ligadura en el problema 17.

19. Se tiene un péndulo simple plano cuyo punto de soporte se mueve verticalmente de acuerdo a $y_s = u(t)$, donde $u(t)$ es una función dada del tiempo (ver figura 5.28).

a) Mostrar que,

$$x = \ell \text{Sen } \theta, \quad y = u(t) - \ell \text{Cos } \theta$$

b) Mostrar que el Lagrangiano se puede escribir como,

$$L = \frac{1}{2}m \left(\ell^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{u}\dot{\theta} \text{Sen } \theta + \dot{u}^2 \right) - mg(u - \ell \text{Cos } \theta)$$

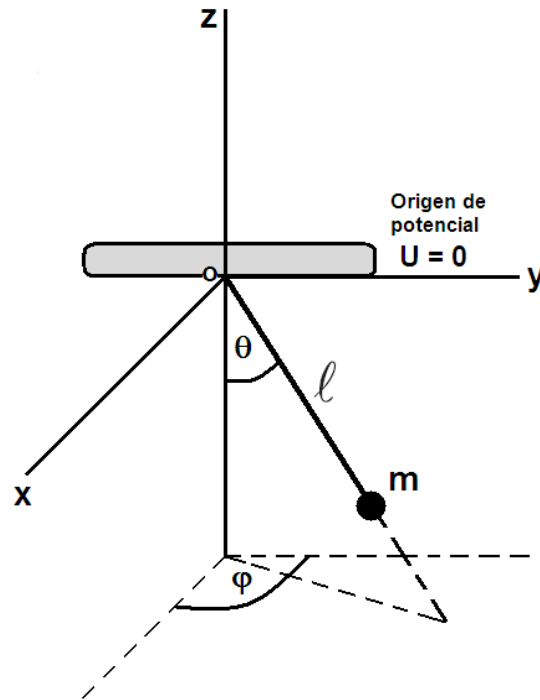


Figura (5.27): Péndulo esférico (Problema 17).

c) Mostrar, a partir de las ecuaciones de Lagrange, que,

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g + \ddot{u}}{\ell} \right) \text{Sen } \theta = 0$$

20. El sistema mostrado en la figura 5.29 consta de una masa m sujeta a uno de los extremos de una vara liviana de longitud ℓ . El otro extremo está sujeto a un aro, también liviano, de radio R que gira (en torno a su centro) en un plano con velocidad angular constante ω , haciendo que la vara pivotee en el mismo plano. Ignore el campo gravitacional.

a) Mostrar que la posición de la masa m viene dada por,

$$x = \ell \text{Cos}(\omega t + \beta) + R \text{Cos}(\omega t)$$

$$y = \ell \text{Sen}(\omega t + \beta) + R \text{Sen}(\omega t)$$

b) Mostrar, a partir de las ecuaciones de Lagrange, que,

$$\ddot{\beta} + \left(\frac{R\omega^2}{\ell} \right) \text{Sen } \beta = 0$$

que es la ecuación de movimiento de un péndulo simple con $g = R\omega^2$.

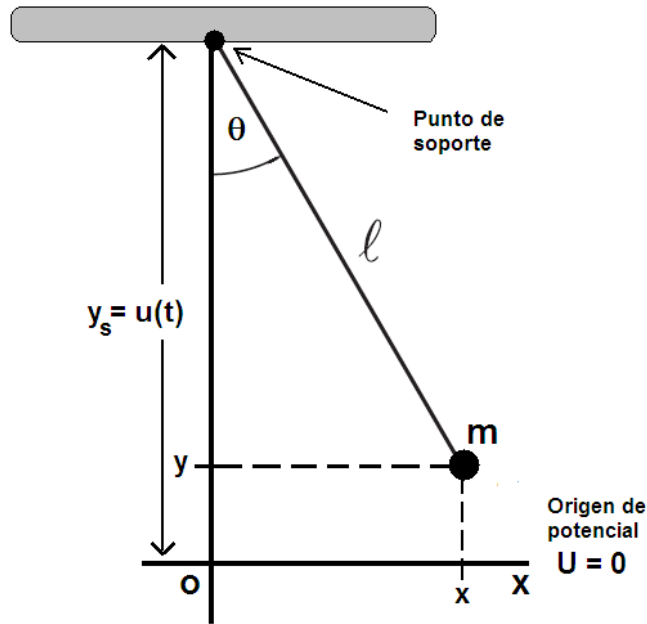


Figura (5.28): Péndulo simple cuyo soporte se mueve verticalmente (Problema 19).

21. El sistema mostrado en la figura 5.30 consta de una masa m sujeta a un soporte fijo mediante un resorte de constante de elasticidad k y de longitud ℓ_o cuando no está perturbado. La masa m se mueve en un plano fijo.

a) Mostrar que el Lagrangiano, en coordenadas Cartesianas, viene dado por,

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy - \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + y^2} - \ell_o)^2$$

y las correspondientes ecuaciones de Lagrange por,

$$m\ddot{x} = -kx \left(1 - \frac{\ell_o}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$m\ddot{y} = mg - ky \left(1 - \frac{\ell_o}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

b) Mostrar que el Lagrangiano, en coordenadas polares, viene dado por,

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta - \frac{1}{2}k(r - \ell_o)^2$$

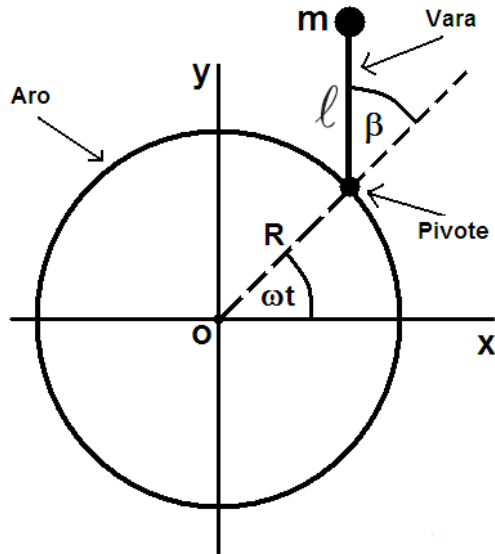


Figura (5.29): Masa m unida a una vara liviana que pivotea por la acción de un aro que gira (Problema 20).

y las correspondientes ecuaciones de Lagrange por,

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - k(r - \ell_0)$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = -mgr \sin \theta$$

22. Una partícula de masa m describe, en el plano XY , una curva dada por la ecuación $y = f(x)$ cuando está sometida a un potencial $U = U(y)$. Si v_0 es la proyección de la velocidad sobre el eje X , se pide:

a) Usando las ecuaciones de Lagrange, mostrar que la expresión general del potencial en función de f viene dada por,

$$U = c - mv_0^2 \int \frac{d^2 f(x)}{dx^2} dy$$

donde c es una constante arbitraria.

b) Hallar U para el caso particular $y = \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}$.

23. Una cuenta de masa m desliza sin rozamiento a lo largo de un alambre circular de radio R . El alambre, situado verticalmente en un campo gravitatorio, gira alrededor de su diámetro vertical con velocidad angular ω . Para una velocidad angular ω

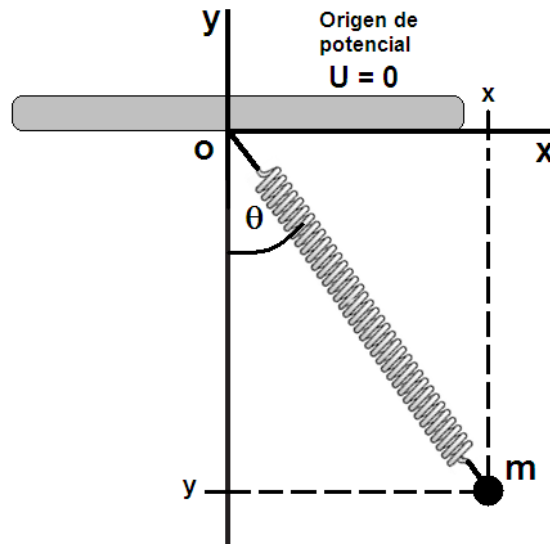


Figura (5.30): Masa m sujeta a un soporte fijo mediante un resorte (Problema 21).

mayor que un cierto valor crítico ω_c , la cuenta tiene un punto de equilibrio mecánico estable en una posición dada por un ángulo θ_o respecto de la vertical. Se pide:

a) Mostrar que el Lagrangiano viene dado por,

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \text{Sen}^2 \theta - mgR \text{Cos} \theta$$

donde θ es el ángulo que forma la posición de la cuenta con el eje vertical de giro, correspondiendo $\theta = 0$ con la partícula en la posición más baja en el alambre.

b) Usando las ecuaciones de Lagrange mostrar que,

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$\theta_o = \text{Cos}^{-1} \left(\frac{g}{R\omega^2} \right)$$

c) Mostrar que la ecuación de movimiento para $\theta = \theta_o + \eta$, donde η es un parámetro pequeño, viene dada por,

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{R^2\omega^4} \right) \eta = 0$$

que es la ecuación de movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de θ_o .

24. Considere el caso (ver figura ??) de un péndulo de masa m y longitud ℓ sujeto a un bloque de masa despreciable el cual esta sujeto, a la vez, a una pared mediante

un resorte de masa despreciable y constante k . El bloque se mueve sin fricción sobre un conjunto de rieles.

a. Mostrar que el Lagrangiano se puede escribir como,

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2\ell \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta \right) - \frac{1}{2}kx^2 + mgl \cos \theta$$

b. Mostrar que las ecuaciones de movimiento vienen dadas por,

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= \ell \left(\dot{\theta}^2 \operatorname{Sen} \theta - \ddot{\theta} \operatorname{Cos} \theta \right), \text{ con } \omega_1^2 = \frac{k}{m} \\ \ddot{\theta} + \omega_2^2 \theta &= -\frac{1}{\ell} \ddot{x} \operatorname{Cos} \theta, \text{ con } \omega_2^2 = \frac{g}{l} \end{aligned}$$

c. ¿Qué ocurre en las ecuaciones anteriores cuando $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{x} = 0$?

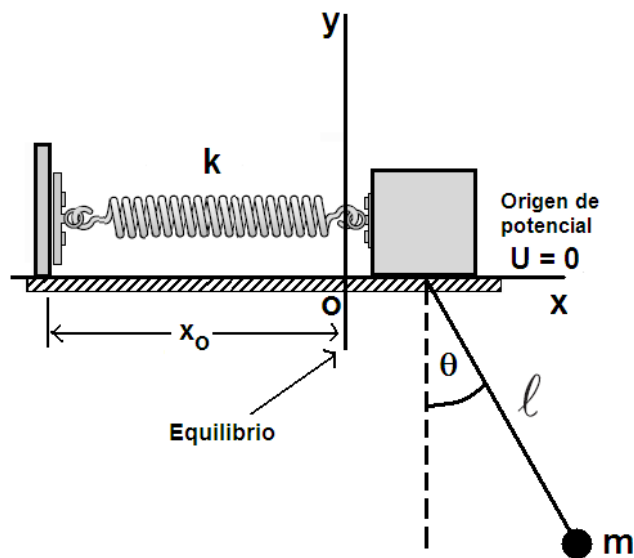


Figura (5.31): Péndulo de masa m y longitud l sujeto a un bloque de masa despreciable el cual está sujeto, a la vez, a una pared mediante un resorte de masa despreciable (Problema 24).

CAPÍTULO 6

Mecánica Hamiltoniana

En el capítulo anterior se desarrolló y aplicó, con cierta profundidad, la dinámica Lagrangiana. En el presente capítulo será desarrollada nuevamente la Mecánica pero mediante una formulación diferente a la Lagrangiana, conocida con el nombre de formulación Hamiltoniana. Desde el punto de vista físico nada novedoso se va a agregar, eso sí, se va a adquirir un instrumento más potente para lidiar con los principios físicos conocidos. La teoría Hamiltoniana conduce a una comprensión esencial de la estructura formal de la Mecánica.

En el siglo XIX, el irlandés William Rowan Hamilton, que había apreciado la potencia y elegancia con que Lagrange había dotado a la Mecánica, emprende el trabajo de sistematización de la óptica, con objeto de someterla a un esquema parecido al de la Mecánica. No sólo consiguió su objetivo, sino que además apreció que los sistemas ópticos y los sistemas mecánicos obedecen a un mismo principio variacional. La concepción sintética de Hamilton produjo una nueva visión de la Mecánica, más intrínseca que la Lagrangiana. La formulación Hamiltoniana, desarrollada posteriormente por Jacobi, Poisson, etc., introdujo de nuevo una geometría en el espacio de fase (del cual se hablará en la sección 6.7) de los sistemas mecánicos, en la que las normas euclídeas tradicionales de los espacios ordinarios se sustituyen por las formas simplécticas, los productos escalares, por los corchetes de Poisson, etc. Gracias al estudio de esta nueva geometría, científicos del siglo XX, como Poincaré y Burns lograron resolver problemas de Mecánica Celeste que habían permanecido sin resolver durante mucho tiempo.

La formulación Hamiltoniana tiene como base el estudio de una función denomina-

da *Hamiltoniano*, en la cual está la información dinámica del sistema mecánico estudiado. Esta formulación fue de básica importancia para la transición desde la Mecánica Clásica a la Mecánica Cuántica a comienzos del siglo XX, principalmente en los modelos de De Broglie, Schrodinger, Heisenberg, etc. Aunque no pueden deducirse las leyes de la Mecánica Cuántica a partir de la formulación clásica Hamiltoniana, el principio de correspondencia¹ proporciona información muy valiosa para inferir el Hamiltoniano cuántico a partir del clásico (en ambos casos el Hamiltoniano determina la evolución del sistema).

Las variables del Lagrangiano son las coordenadas generalizadas q_i y las correspondientes velocidades generalizadas \dot{q}_i mientras que en la teoría de Hamilton, las coordenadas generalizadas q_i y los correspondientes momentos generalizados p_i (“coordenadas de momento”) son usados como variables independientes.

Contents

6.1. Ecuaciones de Hamilton	237
6.1.1. Sistemas holónomos	237
6.1.2. Sistemas no-holónomos	241
6.2. Pasos a seguir para construir un Hamiltoniano	243
6.3. Ejemplos con ligaduras holónomas (forma implícita)	246
6.4. Ejemplos con ligaduras holónomas (forma explícita)	259
6.5. Ejemplos con ligaduras semi-holónomas	267
6.6. Ecuaciones de Hamilton a partir del principio de Hamilton	272
6.7. Espacio de fase	273
6.8. Teorema de Liouville	278
6.9. Forma simpléctica de las Ecuaciones de Hamilton	285
6.10. El método de Routh	287
6.11. Dinámica Lagrangiana vs Hamiltoniana	290
6.12. Problemas	291

¹Principio que afirma que una nueva teoría física debe explicar todos los fenómenos explicados por la teoría a la que complementa. Originalmente formulado por el físico danés Niels Bohr, se empleó inicialmente para describir la relación entre la teoría cuántica y la física clásica. En su formulación de la teoría cuántica, Bohr y otros teóricos lo emplearon para guiarse en sus trabajos. Los físicos formularon sus teorías de forma que, en situaciones en las que la física clásica es válida, las ecuaciones utilizadas para la descripción de fenómenos cuánticos correspondieran a las ecuaciones obtenidas por la física clásica. Este principio se cumple en gran parte de la teoría cuántica, y también en otras teorías como la de la relatividad.

6.1. Ecuaciones de Hamilton

Visto estrictamente como un problema matemático, la transición desde la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana corresponde a cambiar las variables en las funciones matemáticas desde las (q_i, \dot{q}_i, t) a las (q_i, p_i, t) , donde las p_i están relacionadas con las q_i mediante,

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, 2, \dots, 3N \quad (6.1)$$

que no son más que los momentos generalizados ya definidos en la sección 5.9 mediante la expresión (5.269).

En la formulación Hamiltoniana, a las cantidades (q_i, p_i) se les da el nombre de *variables canónicas*.

El procedimiento para el cambio de variables requerido es proporcionado por una transformación de Legendre (ya estudiada en el capítulo 4) la cual está adaptada justamente para este tipo de cambio de variable.

6.1.1. Sistemas holónomos

Las ligaduras se usan en forma implícita

Al igual que en la sección 5.1.1, cuando las K ligaduras holónomas (2.12), escritas en función de las coordenadas generalizadas, es decir,

$$f_l(q_i, t) = 0, \text{ con } i = 1, 2, \dots, s = 3N - k; l = 1, 2, \dots, K$$

son usadas para reducir el número de coordenadas generalizadas, entonces el sistema considerado pasa de tener $3N$ coordenadas generalizadas (dependientes + independientes) a $s = 3N - K$ (independientes). Como ya se sabe, la desventaja en este caso radica en que no se obtiene información alguna sobre las fuerzas de ligadura actuantes en el sistema.

Con la finalidad de obtener las ecuaciones de Hamilton, comiencese escribiendo el diferencial total del Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$,

$$dL = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (6.2)$$

que en virtud de (5.269) y (5.270) se puede escribir como,

$$dL = \sum_{i=1}^s \left(\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (6.3)$$

Por otro lado, el Hamiltoniano $H(q_i, p_i, t)$ es generado mediante la transformación de Legendre,

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (6.4)$$

que no es más que la función de energía h definida en la sección 5.13.1 por la expresión (5.278). La diferencial total de $H = H(q_i, p_i, t)$ viene dada por,

$$dH = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (6.5)$$

y lo mismo, pero a partir de (6.4) es,

$$dH = \sum_{i=1}^s \left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i \right) - dL \quad (6.6)$$

que, al usar (6.3), se convierte en,

$$dH = \sum_{i=1}^s \left(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (6.7)$$

Ahora bien, al comparar las expresiones (6.5) y (6.7) resulta,

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (6.9)$$

Adicionalmente, al sustituir las expresiones (6.8) en (6.5), se obtiene,

$$\frac{dH}{dt} = \dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (6.10)$$

y, por lo tanto, de (6.9) y (6.10),

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (6.11)$$

diciendo que,

Si el tiempo no aparece explícitamente en el Lagrangiano o en el Hamiltoniano (sistema autónomo), $H = \text{constante}$ (queda implícito que se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange y que las fuerzas son conservativas). Para estos sistemas $H = H(q_i, p_i) = E$ y las ecuaciones de Hamilton (6.7) determinan la evolución del sistema, confinado a un sub-espacio de energía constante del espacio definido por las q_i y los p_i , denominado *espacio de fase*, del cual se hablará más adelante.

Las expresiones (6.8) reciben el nombre de *ecuaciones canónicas de Hamilton* o simplemente *ecuaciones de movimiento de Hamilton*² que constituyen un conjunto de $2s$ ecuaciones de primer orden que reemplazan las s ecuaciones de Lagrange de segundo orden (recordar que $s = 3N - k$ es el número de grados de libertad del sistema, con N el número de partículas y k el número de ligaduras).

Cuando un sistema admite un Hamiltoniano, se le denomina *sistema canónico*.

La primera mitad de las ecuaciones de Hamilton proporcionan las \dot{q}_i como funciones de (q_j, p_j, t) , es decir, $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_j, p_j, t)$; que, por lo tanto, forman la inversa de las ecuaciones (6.1), las cuales definen los momentos p_i como funciones de (q_j, \dot{q}_j, t) , es decir, $p_i = p_i(q_j, \dot{q}_j, t)$. Se puede decir, por lo tanto, que estas ecuaciones no proporcionan nueva información en términos de la resolución de problemas mecánicos por medio de las ecuaciones canónicas. La segunda mitad dice lo mismo para los \dot{p}_i .

Por supuesto, el Hamiltoniano H fue construido de la misma forma (y tiene idéntico valor) que la función de energía h definida en la sección 5.13.1 por la expresión (5.278), pero son funciones de variables diferentes:

Al igual que el Lagrangiano, h es una función de las q_i, \dot{q}_i (y posiblemente t), mientras que H debe ser siempre expresado como una función de las q_i, p_i (y posiblemente t). Debe hacerse hincapié respecto a esta diferencia en el comportamiento funcional, a pesar de que ambas h y H tienen los mismos valores numéricos.

Las ligaduras se usan en forma explícita

Como en la sección 5.1.1, cuando las K ligaduras holónomas (2.12) (o (5.18) ya escritas en función de las coordenadas generalizadas) no son usadas para reducir las coordenadas generalizadas a sólo aquellas que son independientes, sino que son anexadas en forma explícita, entonces el sistema considerado sigue teniendo $3N$ coordenadas generalizadas (dependientes + independientes).

²Estas ecuaciones fueron primeramente obtenidas por Lagrange en el año 1809 y, en este mismo año, Poisson obtuvo unas ecuaciones similares. Sin embargo ninguno de ellos reconoció a éstas como un conjunto básico de ecuaciones de movimiento, habiéndolo hecho por primera vez en 1831, Cauchy. Fue Hamilton en el año 1834 quien obtuvo por primera vez estas ecuaciones a partir de un principio variacional fundamental y convirtiéndolas en la base de una amplia teoría de la dinámica. Así, la designación *ecuaciones de Hamilton* es totalmente merecida.

Al derivar parcialmente (6.4) con respecto a las q_i resulta,

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (6.12)$$

que al ser sustituido en (5.272) y al derivar parcialmente (6.4) ahora con respecto a los p_i resulta respectivamente,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^K \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial q_i} + Q_i^{NU} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \right\}, \text{ con } i = 1, 2, \dots, 3N \quad (6.13)$$

El conjunto de ecuaciones (6.13) constituyen las ecuaciones de Hamilton para este caso. Aquí, al igual que en la sección 5.1.1, las fuerzas de ligadura generalizadas Q_i^{lig} vienen dadas por,

$$Q_i^{lig} = \sum_{l=1}^K \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i} \quad (6.14)$$

Nótese que al hacer $Q_i^{lig} = 0$ y $Q_i^{NU} = 0$ en estas ecuaciones, se reducen a las (6.8) como era de esperarse.

Por otro lado, al sustituir las ecuaciones (6.13) en (6.5) resulta,

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^{3N} \left(\left[\left(-\dot{p}_i + \sum_{l=1}^K \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial q_i} + Q_i^{NU} \right) dq_i + \dot{q}_i dp_i \right] \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \sum_{l=1}^K \left(\lambda_l(t) \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_l}{\partial q_i} dq_i \right) + \sum_{i=1}^{3N} Q_i^{NU} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (6.15)$$

donde la sumatoria respecto al índice i se hace hasta $3N$ ya que las ligaduras no son usadas para eliminar las coordenadas dependientes. Pero el diferencial total de $f_l(q_i, t) = 0$ viene dado por,

$$df_l = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_l}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f_l}{\partial t} dt = 0$$

o,

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_l}{\partial q_i} dq_i = -\frac{\partial f_l}{\partial t} dt \quad (6.16)$$

entonces (6.15) puede ser escrita como,

$$dH = -\sum_{l=1}^K \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{3N} Q_i^{NU} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

O,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} - \sum_{l=1}^K \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} Q_i^{NU} \dot{q}_i \quad (6.17)$$

que es la equivalente para el presente caso de la expresión (6.11). Nótese que se reduce a esta última cuando $\sum_{l=1}^K \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial q_i} = 0$ y $Q_i^{NU} = 0$.

Si no existen fuerzas que no provengan de potenciales ($Q_i^{NU} = 0$), entonces las ecuaciones (6.13) y (6.17) se pueden escribir como,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^K \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \right\}, \text{ con } i = 1, 2, \dots, 3N \quad (6.18)$$

y,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} - \sum_{l=1}^K \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial t} \quad (6.19)$$

6.1.2. Sistemas no-holónomos

Como ya se mencionó en la sección 5.1.2, las ligaduras no-holónomas son frecuentemente encontradas en la forma,

$$f_l(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{j=1}^{3N} A_{lj}(q_i, t) \dot{q}_j + B_l(q_i, t) = 0, \text{ con } l = 1, 2, \dots, K$$

Al sustituir (6.12) en (5.273) y al derivar parcialmente (6.4) con respecto a los p_i resulta respectivamente,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^K \lambda_l(q_i, t) A_{li} + Q_i^{NU} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \right\}, \text{ con } i = 1, 2, \dots, 3N \quad (6.20)$$

Aquí, al igual que en la sección 5.1.1, las fuerzas de ligadura generalizadas Q_i^{lig} vienen dadas por,

$$Q_i^{lig} = \sum_{l=1}^K \lambda_l A_{li} \quad (6.21)$$

El conjunto de ecuaciones (6.20) constituyen las ecuaciones de Hamilton para este caso. Nótese que al hacer $Q_i^{lig} = 0$ y $Q_i^{NU} = 0$ en estas ecuaciones, se reducen a las (6.8) como era de esperarse.

Por otro lado, al sustituir las ecuaciones (6.20) en (6.5) resulta,

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^{3N} \left(\left[\left(-\dot{p}_i + \sum_{l=1}^K \lambda_l(q_i, t) A_{li} + Q_i^{NU} \right) dq_i + \dot{q}_i dp_i \right] \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \sum_{l=1}^K \left(\lambda_l(q_i, t) \sum_{i=1}^{3N} A_{li} dq_i \right) + \sum_{i=1}^{3N} Q_i^{NU} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (6.22)$$

donde la sumatoria respecto al índice i se hace hasta $3N$ ya que las ligaduras no son usadas para eliminar las coordenadas dependientes. Esta expresión también puede ser escrita como,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{l=1}^K \left(\lambda_l(q_i, t) \sum_{i=1}^{3N} A_{li} \dot{q}_i \right) + \sum_{i=1}^{3N} Q_i^{NU} \dot{q}_i$$

o,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} - \sum_{l=1}^K \lambda_l(q_i, t) B_l(q_i, t) + \sum_{i=1}^{3N} Q_i^{NU} \dot{q}_i \quad (6.23)$$

que es la equivalente para el presente caso de la expresión (6.11). Nótese que se reduce a esta última cuando $\sum_{l=1}^K \lambda_l(q_i, t) B_l(q_i, t) = 0$ y $Q_i^{NU} = 0$.

Si no existen fuerzas que no provengan de potenciales ($Q_i^{NU} = 0$), entonces las ecuaciones (6.20) y (6.23) se pueden escribir como,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^K \lambda_l A_{li} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \right\}, \text{ con } i = 1, 2, \dots, 3N \quad (6.24)$$

y,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} - \sum_{l=1}^K \lambda_l B_l \quad (6.25)$$

6.2. Pasos a seguir para construir un Hamiltoniano

Los pasos a seguir para construir un Hamiltoniano son los siguientes:

1. Después de escogido un conjunto de coordenadas generalizadas q_i , se construye el Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$.
2. Los momentos conjugados son definidos como funciones de las q_i , \dot{q}_i y t mediante (6.1),

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

3. Se usa (6.4) para formar el Hamiltoniano,

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

En este paso se tiene H como una función mixta de las q_i , \dot{q}_i , p_i y t pero, se necesita que H sea una función sólo de q_i , p_i y t , de aquí que tengan que eliminarse las \dot{q}_i .

4. Se invierten las ecuaciones (6.1) del paso 2 para obtener las \dot{q}_i como funciones de q_i , p_i y t .

5. Los resultados del paso anterior se usan para eliminar las \dot{q}_i de H , para poder expresarlo sólo como función de q_i , p_i y t .

Después de efectuados los pasos anteriores, se estará listo para usar las ecuaciones canónicas de Hamilton (6.8), (6.13) o (6.20).

Para muchos sistemas físicos es posible acortar los pasos anteriores. Como se mostró en la sección 5.13.1, en muchos problemas el Lagrangiano es la suma de funciones, cada una homogénea en las velocidades generalizadas \dot{q}_i de grado 0, 1 y 2, respectivamente. En este caso, H debido a (6.4) es dado por,

$$H = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i p_i - \left[L_o(q_i, t) + L_1(q_i, t) \dot{q}_l + L_2(q_i, t) \dot{q}_l \dot{q}_m \right] \quad (6.26)$$

donde L_o es la parte del Lagrangiano que es independiente de las velocidades generalizadas, L_1 representa los coeficientes de la parte del Lagrangiano que es homogénea en \dot{q}_i en primer grado y L_2 es la parte que es homogénea en \dot{q}_i en segundo grado. Además, si las expresiones que definen las coordenadas generalizadas no dependen explícitamente del tiempo (sistema natural u holónomo), entonces $L_2 \dot{q}_l \dot{q}_m = T$ (energía cinética), y si las fuerzas son derivables de un potencial conservativo U (el trabajo es independiente del camino), entonces $L_o = -U$. Cuando estas condiciones son satisfechas, el Hamiltoniano es automáticamente la energía total,

$$H = T + U = E \quad (6.27)$$

Hay una forma práctica de obtener el Hamiltoniano. En muchos casos la eliminación de las velocidades generalizadas de la expresión de H (pasos 4 y 5 al final de la sección anterior) es, en realidad, es extremadamente sencilla. Sin embargo, en un caso general la eliminación de las velocidades generalizadas puede resultar algo más

engorrosa, al incluir expresiones de segundo grado en las velocidades. En efecto, de (6.4),

$$H = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i p_i - L = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i p_i - T + U \quad (6.28)$$

y al usar (2.46),

$$H = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i p_i - \left(a_o + \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) + U \quad (6.29)$$

De aquí habría que eliminar \dot{q}_i mediante sus expresiones en función de p_i dadas por (6.1) para poder expresar H sólo como función de q_i , p_i y t . En (6.29) intervienen en expresiones cuadráticas de las \dot{q}_i pudiendo ser, la eliminación de las mismas, un desarrollo bastante engorrosa.

Aquí será encontrada otra expresión equivalente más sencilla, que será lineal en las velocidades \dot{q}_i . En efecto,

$$\dot{q}_i p_i = \dot{q}_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{\text{Por (6.1)}} = \dot{q}_i \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

y usando (2.46),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \dot{q}_i p_i &= \sum_{i=1}^s \left[\dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(a_o + \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^s \left[\dot{q}_i \left(\sum_{j=1}^s a_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \frac{\partial \dot{q}_j \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^s \left[\dot{q}_i \left(\sum_{j=1}^s a_j \delta_{ji} + \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \delta_{ji} \dot{q}_k + \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \delta_{ki} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^s \left[\dot{q}_i \left(a_i + \underbrace{\sum_{k=1}^s a_{ik} \dot{q}_k + \sum_{j=1}^s a_{ji} \dot{q}_j}_{\text{Términos iguales}} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^s \left[\dot{q}_i \left(a_i + 2 \sum_{k=1}^s a_{ik} \dot{q}_k \right) \right] = \sum_{i=1}^s a_i \dot{q}_i + 2 \sum_{i,k=1}^s a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (6.30) \end{aligned}$$

pero, nuevamente, de (2.46)

$$\sum_{i,k=1}^s a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = T - a_o - \sum_{i=1}^s a_i \dot{q}_i \quad (6.31)$$

entonces, al sustituir (6.31) en (6.30),

$$\sum_i \dot{q}_i p_i = \sum_i a_i \dot{q}_i + 2 \left(T - a_o - \sum_{i=1}^s a_i \dot{q}_i \right)$$

y de aquí que,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \left(\dot{q}_i p_i + a_i \dot{q}_i \right) + a_o \quad (6.32)$$

Por último, al sustituir (6.32) en (6.28),

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - T + U = \sum_i \dot{q}_i p_i - \left(\frac{1}{2} \sum_i \left(\dot{q}_i p_i + a_i \dot{q}_i \right) + a_o \right) + U$$

o,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \left(\dot{q}_i p_i - a_i \dot{q}_i \right) - a_o + U \quad (6.33)$$

Obsérvese que la eliminación de las velocidades \dot{q}_i resulta más fácil en la expresión (6.33) que en (6.29). En el caso en que T sea homogénea cuadrática en \dot{q}_i (lo que en la práctica es bastante común) la expresión anterior se simplifica para dar,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \dot{q}_i p_i + U \quad (6.34)$$

6.3. Ejemplos con ligaduras holónomas (forma implícita)

Ejemplo 6.1

Usar el método Hamiltoniano para encontrar las ecuaciones de movimiento de una partícula de masa m obligada a moverse sobre la superficie de un cilindro definido por $x^2 + y^2 = R^2$. La partícula está sujeta a una fuerza dirigida hacia el origen y proporcional a la distancia de la partícula al origen: $\vec{F} = -K \vec{r}$ (no existe fricción alguna).

Solución: La figura 6.1 ilustra lo descrito en el enunciado del problema. Por la obvia simetría del problema serán escogidas coordenadas cilíndricas (r', φ, z) para ubicar la partícula (se ha escrito r' en vez de r para diferenciarlo del módulo del vector de posición \vec{r} en $\vec{F} = -K \vec{r}$).

La ligadura viene representada por la ecuación del cilindro,

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (6.35)$$

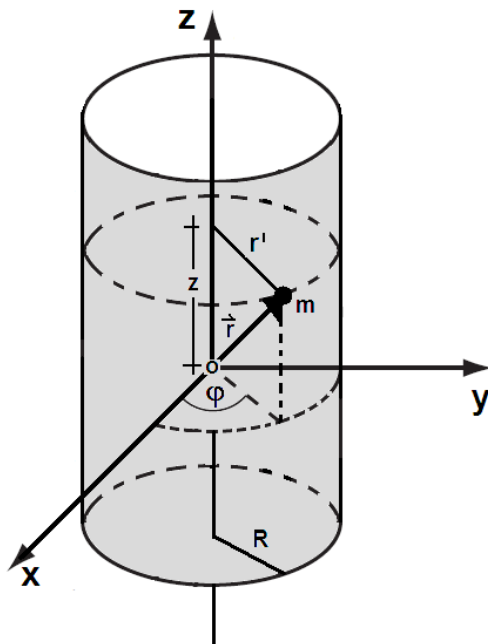


Figura (6.1): Partícula de masa m obligada a moverse sobre la superficie de un cilindro (Ejemplo 6.1).

que es una ligadura holónoma, por lo tanto, con ella es posible eliminar coordenadas dependientes.

Se construye el Lagrangiano: La energía potencial correspondiente a la fuerza \vec{F} es,

$$U = - \int_r^0 F dr = \frac{1}{2} K r^2 = \frac{1}{2} K (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} K \left(\underbrace{R^2}_{\text{Por (6.35)}} + z^2 \right) \quad (6.36)$$

y la energía cinética, en coordenadas cilíndricas, viene dada por,

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left[(\dot{r})^2 + r'^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right] = \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) \quad (6.37)$$

Puesto que $r' = R = \text{constante}$

entonces,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - \frac{1}{2} K \left(R^2 + z^2 \right) \quad (6.38)$$

Se observa que φ es cíclica.

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son φ y z , y los momentos generalizados (6.1) son,

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m R^2 \dot{\varphi} \quad (6.39)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \quad (6.40)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo (el campo de fuerza considerado es central y no existen fuerzas de fricción) y que las ecuaciones de transformación entre las coordenadas Cartesianas y cilíndricas no involucran explícitamente al tiempo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27) expresado en términos de las variables φ , p_φ , z y p_z (φ no aparece explícitamente), entonces,

$$H(z, p_\varphi, p_z) = T + U = \frac{p_\varphi^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}K(R^2 + z^2) \quad (6.41)$$

donde se ha usado (6.39) y (6.40) para eliminar $\dot{\varphi}$ y \dot{z} .

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.8),

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad (6.42)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -Kz \quad (6.43)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2} \quad (6.44)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \quad (6.45)$$

El momento generalizado conjugado a φ se conserva, ya que esta coordenada es cíclica.

Las ecuaciones (6.44) y (6.45) duplican a las ecuaciones (6.39) y (6.40). De las ecuaciones (6.39) y (6.42) se obtiene,

$$p_\varphi = mR^2\dot{\varphi} = \text{constante} \quad (6.46)$$

expresando que el momento angular en torno al eje z es una constante de movimiento. Este resultado es debido a que z es el eje de simetría del problema. Combinando las ecuaciones (6.40) y (6.43), se obtiene,

$$\ddot{z} + \omega_o^2 z = 0 \quad (6.47)$$

donde,

$$\omega_o^2 = \frac{K}{m} \quad (6.48)$$

expresando que el movimiento en la dirección z es armónico simple.

.....

Ejemplo 6.2

Resolver el ejemplo 5.1 por el método Hamiltoniano.

Solución:

Se construye el Lagrangiano: El Lagrangiano viene dado por (5.50),

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \sec^2 \theta + mgx \tan \theta - mgh$$

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: La única coordenada generalizada es x ,

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \sec^2 \theta \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} \cos^2 \theta \quad (6.49)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \sec^2 \theta - mgx \tan \theta + mgh \\ &= \frac{p_x^2}{2m} \cos^2 \theta - mgx \tan \theta + mgh \end{aligned} \quad (6.50)$$

donde se ha usado (6.49) para eliminar \dot{x} .

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.8),

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -mg \tan \theta \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \cos^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

Es fácil probar que estas ecuaciones corresponden con la ecuación (5.51) obtenida por el método de Lagrange.

Ejemplo 6.3

Resolver la parte (a) del ejemplo 5.2 por el método Hamiltoniano.

Solución:

Se construye el Lagrangiano: El Lagrangiano viene dado por (5.54),

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son x, y y z ,

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m} \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6.52)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z) \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + U(x, y, z) \end{aligned} \quad (6.53)$$

donde se ha usado (6.52) para eliminar \dot{x} , \dot{y} y \dot{z} .

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.8),

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y \\ \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

que son las ecuaciones de Hamilton pedidas. Es fácil probar que estas ecuaciones corresponden con las ecuaciones (5.55) obtenidas por el método de Lagrange.

Ejemplo 6.4

Resolver el ejemplo 5.3 por el método Hamiltoniano.

Solución:

Se construye el Lagrangiano: El Lagrangiano viene dado por (5.69),

$$L = T - U = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{y}^2 + M_1gy + M_2g(\ell - y)$$

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: La única coordenada generalizada es y ,

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (M_1 + M_2)\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{(M_1 + M_2)} \quad (6.55)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{y}^2 - M_1gy - M_2g(\ell - y) \\ &= \frac{p_y^2}{2(M_1 + M_2)} - M_1gy - M_2g(\ell - y) \end{aligned} \quad (6.56)$$

donde se ha usado (6.55) para eliminar \dot{y} .

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.8),

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = M_1g - M_2g \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{(M_1+M_2)} \end{aligned} \right\} \quad (6.57)$$

Es fácil probar que estas ecuaciones corresponden con la ecuación (5.71) obtenida por el método de Lagrange.

Ejemplo 6.5

Resolver el ejemplo 5.4 por el método Hamiltoniano.

Solución:

Se construye el Lagrangiano: El Lagrangiano viene dado por (5.74),

$$L = T - U = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\omega^2)$$

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: La única coordenada generalizada es r ,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad (6.58)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\omega^2) \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \end{aligned} \quad (6.59)$$

donde se ha usado (6.58) para eliminar \dot{r} .

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.8),

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = mr\omega^2 \\ \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

Es fácil probar que estas ecuaciones corresponden con la ecuación (5.75) obtenida por el método de Lagrange.

Ejemplo 6.6

Resolver el ejemplo 5.5 por el método Hamiltoniano.

Solución:

(a) Coordenadas Cartesianas:

Se construye el Lagrangiano: El Lagrangiano viene dado por (5.78),

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Obsérvese que x es cíclica.

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son x y y ,

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6.61)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + mgy \end{aligned} \quad (6.62)$$

donde se ha usado (6.61) para eliminar \dot{x} y \dot{y} .

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.8),

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -mg \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6.63)$$

El momento generalizado conjugado a la coordenada x se conserva, ya que esta coordenada es cíclica. Es fácil probar que estas ecuaciones corresponden con las ecuaciones (5.79) obtenidas por el método de Lagrange.

(b) Coordenadas polares:

Se construye el Lagrangiano: El Lagrangiano viene dado por (5.82),

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - mgr \text{ Sen } \varphi$$

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son r y φ ,

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr \text{ Sen } \varphi \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr \text{ Sen } \varphi \end{aligned} \quad (6.65)$$

donde se ha usado (6.64) para eliminar \dot{r} y $\dot{\varphi}$.

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.8),

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\varphi^2}{mr^3} - mg \text{ Sen } \varphi \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgr \text{ Cos } \varphi \\ \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.66)$$

Es fácil probar que estas ecuaciones corresponden con las ecuaciones (5.83) obtenidas por el método de Lagrange.

Ejemplo 6.7

Resolver el ejemplo 5.6 por el método Hamiltoniano.

Solución:

Se construye el Lagrangiano: El Lagrangiano viene dado por (5.87),

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2\dot{\varphi}^2) - mgr \cot \alpha$$

Obsérvese que φ es cíclica.

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son r y φ ,

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \csc^2 \alpha \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \text{ Sen}^2 \alpha \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.67)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + mgr \cot \alpha \\ &= \frac{p_r^2}{2m} \operatorname{Sen}^2 \alpha + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr \cot \alpha \end{aligned} \quad (6.68)$$

donde se ha usado (6.67) para eliminar \dot{r} y $\dot{\varphi}$.

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.8),

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\varphi^2}{mr^3} - mg \cot \alpha \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \\ \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \operatorname{Sen}^2 \alpha \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.69)$$

El momento generalizado conjugado a la coordenada φ se conserva, ya que esta coordenada es cíclica. Es fácil probar que estas ecuaciones corresponden con las ecuaciones (5.88) obtenidas por el método de Lagrange.

Ejemplo 6.8

Usando el método Hamiltoniano, encuentre las ecuaciones de movimiento para un péndulo esférico de masa m y longitud b .

Solución: La figura 6.2 ilustra lo descrito en el enunciado del problema.

Se construye el Lagrangiano: Las coordenadas generalizadas son θ y φ . La energía cinética (en coordenadas esféricas) es,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{Sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) = \frac{1}{2}mb^2 \left(\dot{\theta}^2 + \operatorname{Sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) \quad (6.70)$$

Puesto que $r=b=$ constante

Por otro lado, la única fuerza que actúa sobre el péndulo es la gravedad y si se define el potencial cero en el punto de soporte del péndulo,

$$U = -mgb \operatorname{Cos} \theta \quad (6.71)$$

entonces,

$$L = T - U = \frac{1}{2}mb^2 \left(\dot{\theta}^2 + \operatorname{Sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) + mgb \operatorname{Cos} \theta \quad (6.72)$$

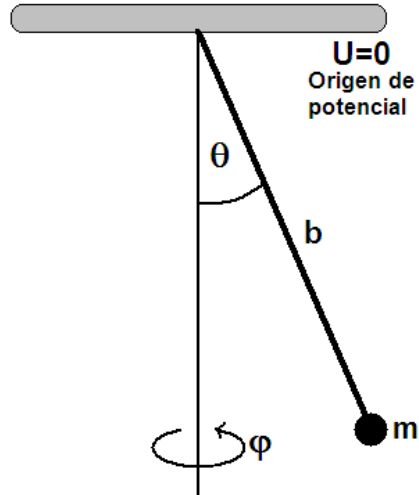


Figura (6.2): Péndulo esférico (Ejemplo 6.8).

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son θ y φ , y los momentos generalizados (6.1) son,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mb^2 \dot{\theta} \tag{6.73}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mb^2 \text{Sen}^2 \theta \dot{\varphi} \tag{6.74}$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo y que las ecuaciones de transformación entre las coordenadas Cartesianas y esféricas no involucran explícitamente al tiempo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$H = T + U = \frac{p_\theta^2}{2mb^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mb^2 \text{Sen}^2 \theta} - mgb \text{Cos} \theta \tag{6.75}$$

donde se ha usado (6.73) y (6.74) para eliminar $\dot{\theta}$ y $\dot{\varphi}$.

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.8),

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\theta^2 \text{Cos} \theta}{mb^2 \text{Sen}^3 \theta} - mgb \text{Sen} \theta \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mb^2} \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mb^2 \text{Sen}^2 \theta} \end{aligned} \right\} \tag{6.76}$$

Como φ es cíclica, el momento p_φ referente al eje de simetría es constante.

Ejemplo 6.9

Obtenga las ecuaciones de Hamilton para una partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje x sometida a una fuerza $-Kx$ (K constante positiva).

Solución: La figura 6.3 ilustra lo descrito en el enunciado del problema.

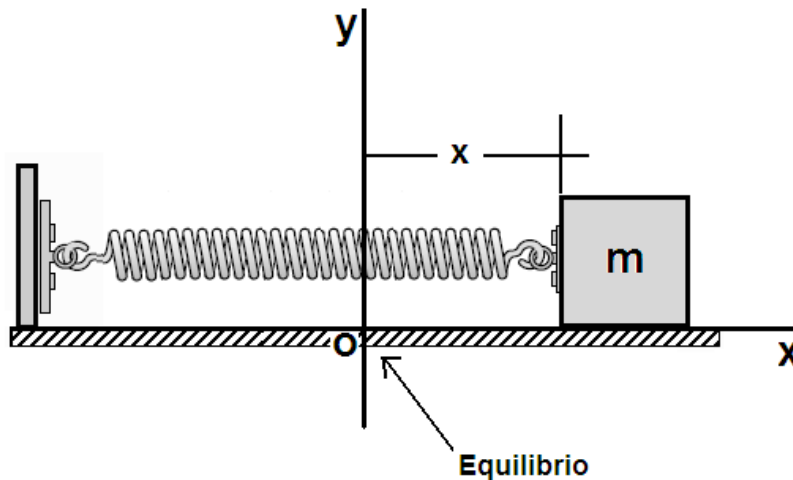


Figura (6.3): Partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje x sometida a una fuerza $-Kx$ (Ejemplo 6.9).

Se construye el Lagrangiano: La coordenada generalizada es x . La energía cinética (en coordenadas Cartesianas) es,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (6.77)$$

Por otro lado, la única fuerza que actúa sobre la partícula que oscila es $-Kx$ y si se define el potencial cero en el origen,

$$U = \frac{1}{2}Kx^2 \quad (6.78)$$

entonces,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2 \quad (6.79)$$

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: La coordenada generalizada es x y el momento generalizado (6.1) es,

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (6.80)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo y el tiempo no aparece en forma explícita, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del

sistema (6.27),

$$H = T + U = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2 \quad (6.81)$$

donde se ha usado (6.80) \dot{x} .

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.8),

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -Kx \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6.82)$$

Al sustituir la segunda de las ecuaciones (6.82) para p_x en la primera, resulta,

$$Kx = -\frac{d}{dt} (m\dot{x})$$

o,

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad (6.83)$$

con,

$$\omega_o^2 = \frac{K}{m}$$

que es la familiar ecuación de movimiento para el oscilador armónico simple.

Ejemplo 6.10

Obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton para una partícula de masa m que se mueve en un plano, inmersa en un campo con energía potencial $U = U(r)$ (campo central).

Solución: La figura 6.4 ilustra lo descrito en el enunciado del problema.

Se construye el Lagrangiano: La energía potencial es,

$$U = U(r) \quad (6.84)$$

y la energía cinética, en coordenadas polares, viene dada por,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \quad (6.85)$$

entonces,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (6.86)$$

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son r y φ , y los momentos generalizados (6.1) son,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (6.87)$$

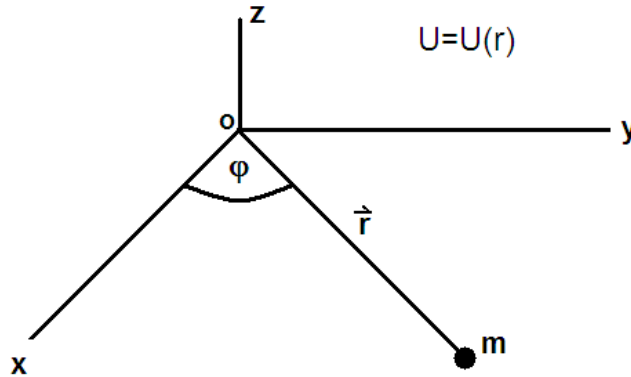


Figura (6.4): Partícula de masa m que se mueve en un plano, inmersa en un campo con energía potencial $U = U(r)$ (Ejemplo 6.10).

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \quad (6.88)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27), entonces,

$$H = T + U = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + U(r) \quad (6.89)$$

donde se ha usado (6.87) y (6.88) para eliminar \dot{r} y $\dot{\varphi}$.

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.8),

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\partial U(r)}{\partial r} \quad (6.90)$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad (6.91)$$

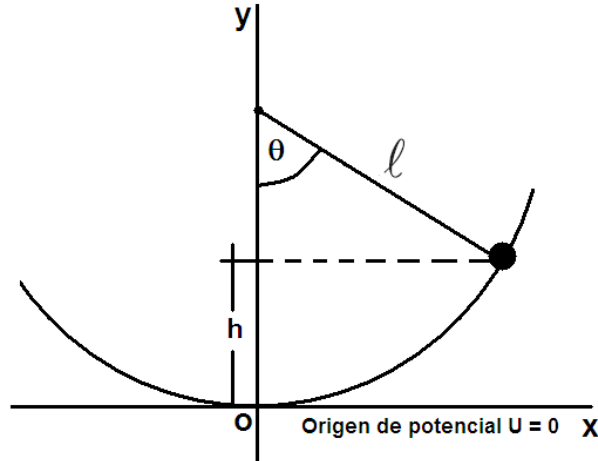
$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad (6.92)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \quad (6.93)$$

de las cuales se puede notar que φ es cíclica, indicando que el momento angular en un campo central es constante.

Ejemplo 6.11

Usar el método Hamiltoniano para encontrar la ecuación de movimiento para un péndulo simple de masa m y longitud ℓ .


 Figura (6.5): Péndulo simple de masa m y longitud ℓ (Ejemplo 6.11).

Solución: La figura 6.5 ilustra lo descrito en el enunciado del problema.

Se construye el Lagrangiano: La energía potencial es,

$$U = mgh = mg\ell(1 - \cos\theta) \quad (6.94)$$

y la energía cinética viene dada por,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \quad (6.95)$$

entonces,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1 - \cos\theta) \quad (6.96)$$

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenada generalizada es θ y el momento generalizado (6.1) es,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} \quad (6.97)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27) entonces,

$$H = T + U = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} + mg\ell(1 - \cos\theta) \quad (6.98)$$

donde se ha usado (6.97) para eliminar $\dot{\theta}$.

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.8),

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mg\ell \text{Sen } \theta \quad (6.99)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m\ell^2} \quad (6.100)$$

De la ecuación (6.100) se tiene que,

$$p_\theta = m\ell^2 \dot{\theta} \quad (6.101)$$

que al derivarla con respecto al tiempo,

$$\dot{p}_\theta = m\ell^2 \ddot{\theta} \quad (6.102)$$

Por último, al comparar (6.102) con (6.99) resulta,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \text{Sen } \theta = 0 \quad (6.103)$$

6.4. Ejemplos con ligaduras holónomas (forma explícita)

Ejemplo 6.12

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.12 usando el método de Hamilton.

Solución: De (5.130), la ligadura viene dada por,

$$f(x, y) = y + x \tan \theta - h = 0$$

Se construye el Lagrangiano: El Lagrangiano viene dado por (5.48),

$$L = T - U = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - mgy$$

en el cual no se ha eliminado la coordenada dependiente mediante el uso de la ligadura.

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son x y y ,

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6.104)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + mgy \end{aligned} \tag{6.105}$$

donde se ha usado (6.104) para eliminar \dot{x} y \dot{y} .

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.18) con $K = 1$ por sólo haber una ligadura,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = \lambda_1 \tan \theta \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} = -mg + \lambda_1 \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \end{aligned} \right\} \tag{6.106}$$

Al sustituir el segundo par de ecuaciones (6.106) en el primer par resulta,

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda_1 \tan \theta \\ m\ddot{y} &= -mg + \lambda_1 \end{aligned} \right\} \tag{6.107}$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (5.135) y (5.136), por lo tanto es de esperarse que al usar (6.14), el resultado sea el dado por (5.137) y (5.138).

Ejemplo 6.13

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.13 usando el método de Hamilton.

Solución: De (5.139), la ligadura viene dada por,

$$f(y_1, y_2) = y_1 + y_2 - \ell = 0$$

Se construye el Lagrangiano: A partir de (5.67) y (5.68) el Lagrangiano viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2}M_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{y}_2^2 + M_1gy_1 + M_2gy_2$$

en el cual no se ha eliminado la coordenada dependiente mediante el uso de la ligadura.

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son y_1 y y_2 ,

$$\left. \begin{aligned} p_{y_1} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = M_1 \dot{y}_1 \Rightarrow \dot{y}_1 = \frac{p_{y_1}}{M_1} \\ p_{y_2} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = M_2 \dot{y}_2 \Rightarrow \dot{y}_2 = \frac{p_{y_2}}{M_2} \end{aligned} \right\} \quad (6.108)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2} M_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{y}_2^2 - M_1 g y_1 - M_2 g y_2 \\ &= \frac{p_{y_1}^2}{2M_1} + \frac{p_{y_2}^2}{2M_2} - M_1 g y_1 - M_2 g y_2 \end{aligned} \quad (6.109)$$

donde se ha usado (6.108) para eliminar \dot{y}_1 y \dot{y}_2 .

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.18) con $K = 1$ por sólo haber una ligadura,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_{y_1} &= -\frac{\partial H}{\partial y_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = M_1 g + \lambda_1 \\ \dot{p}_{y_2} &= -\frac{\partial H}{\partial y_2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = M_2 g + \lambda_1 \\ \dot{y}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_{y_1}} = \frac{p_{y_1}}{M_1} \\ \dot{y}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_{y_2}} = \frac{p_{y_2}}{M_2} \end{aligned} \right\} \quad (6.110)$$

Al sustituir el segundo par de ecuaciones (6.110) en el primer par resulta,

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{y}_1 &= M_1 g + \lambda_1 \\ M_2 \ddot{y}_2 &= M_2 g + \lambda_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.111)$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (5.144) y (5.145), por lo tanto es de esperarse que al usar (6.14), el resultado sea el dado por (5.146).

Ejemplo 6.14

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.14 usando el método de Hamilton.

Solución: De (5.147), la ligadura viene dada por,

$$f(z, r) = z - cr^2 = 0$$

Se construye el Lagrangiano: A partir de (5.104) y (5.105) el Lagrangiano viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz$$

en el cual no se ha eliminado la coordenada dependiente mediante el uso de la ligadura.

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son r, φ y z ,

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6.112)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + mgz \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz \end{aligned} \quad (6.113)$$

donde se ha usado (6.112) para eliminar $\dot{r}, \dot{\varphi}$ y \dot{z} .

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.18) con $K = 1$ por sólo haber una ligadura,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - 2cr\lambda_1 \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = 0 \\ \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} = -mg + \lambda_1 \\ \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6.114)$$

Al sustituir el segundo trío de ecuaciones (6.114) en el primer trío resulta,

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 &= -2cr\lambda_1 \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} &= 0 \\ m\ddot{z} + mg &= \lambda_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.115)$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (5.154), (5.155) y (5.156), por lo tanto es de esperarse que al usar (6.14), el resultado sea el dado por (5.161), (5.162) y (5.163).

.....

Ejemplo 6.15

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.15 usando el método de Hamilton.

Solución: De (5.167), la ligadura viene dada por,

$$f(x, \theta) = x - R\theta$$

Se construye el Lagrangiano: A partir de (5.167) el Lagrangiano viene dado por,

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - Mg(l - x)\text{Sen } \phi$$

en el cual no se ha eliminado la coordenada dependiente mediante el uso de la ligadura.

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son x y θ ,

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{M} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{2p_\theta}{MR^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.116)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + Mg(l - x)\text{Sen } \phi \\ &= \frac{p_x^2}{2M} + \frac{p_\theta^2}{MR^2} + Mg(l - x)\text{Sen } \phi \end{aligned} \quad (6.117)$$

donde se ha usado (6.116) para eliminar \dot{x} y $\dot{\theta}$.

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.18) con $K = 1$ por sólo haber una ligadura,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = Mg\text{Sen } \phi + \lambda_1 \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -R\lambda_1 \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{M} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{2p_\theta}{MR^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.118)$$

Al sustituir el segundo par de ecuaciones (6.118) en el primer par resulta,

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} - Mg\text{Sen } \phi - \lambda_1 &= 0 \\ \frac{1}{2}MR\ddot{\theta} + \lambda_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.119)$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (5.172), por lo tanto es de esperarse que al usar (6.14), el resultado sea el dado por (5.178).

Ejemplo 6.16

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.16 usando el método de Hamilton.

Solución: De (5.180), la ligadura viene dada por,

$$f(\theta, \phi) = (R_2 - R_1)\theta - R_1\phi = 0$$

Se construye el Lagrangiano: A partir de (5.125) y (5.126) el Lagrangiano viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(R_2 - R_1)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mR_1^2\dot{\phi}^2 + mg(R_2 - R_1)\cos\theta$$

en el cual no se ha eliminado la coordenada dependiente mediante el uso de la ligadura.

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son θ y ϕ ,

$$\left. \begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(R_2 - R_1)^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m(R_2 - R_1)^2} \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2}mR_1^2\dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{2p_\phi}{mR_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.120)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}m(R_2 - R_1)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mR_1^2\dot{\phi}^2 - mg(R_2 - R_1)\cos\theta \\ &= \frac{p_\theta^2}{2m(R_2 - R_1)^2} + \frac{p_\phi^2}{mR_1^2} - mg(R_2 - R_1)\cos\theta \end{aligned} \quad (6.121)$$

donde se ha usado (6.120) para eliminar $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$.

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.18) con $K = 1$ por sólo haber una ligadura,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -mg(R_2 - R_1)\sin\theta + (R_2 - R_1)\lambda_1 \\ \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \phi} = -R_1\lambda_1 \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m(R_2 - R_1)^2} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{2p_\phi}{mR_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.122)$$

Al sustituir el segundo par de ecuaciones (6.122) en el primer par resulta,

$$\left. \begin{aligned} m(R_2 - R_1)\ddot{\theta} + mg \operatorname{Sen} \theta &= \lambda_1 \\ \frac{1}{2}mR_1\ddot{\phi} &= -\lambda_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.123)$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (5.185) y (5.186), por lo tanto es de esperarse que al usar (6.14), el resultado sea el dado por (5.188) y (5.189).

Ejemplo 6.17

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.17 usando el método de Hamilton.

Solución: De (5.190), la ligadura viene dada por,

$$f(r) = r - a = 0$$

Se construye el Lagrangiano: A partir de (5.191) el Lagrangiano viene dado por,

$$L = T - U = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - mgr \operatorname{Cos} \theta$$

en el cual no se ha eliminado la coordenada dependiente mediante el uso de la ligadura.

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son r y θ ,

$$\left. \begin{aligned} p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} &= \frac{p_r}{m} \\ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.124)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) + mgr \operatorname{Cos} \theta \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + mgr \operatorname{Cos} \theta \end{aligned} \quad (6.125)$$

donde se ha usado (6.124) para eliminar \dot{r} y $\dot{\theta}$.

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.18) con

$K = 1$ por sólo haber una ligadura,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - mg \cos \theta + \lambda_1 \\ &= \frac{p_\theta^2}{ma^3} - mg \cos \theta + \lambda_1 \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = mgr \sin \theta = mga \sin \theta \\ \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = 0 \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} = \frac{p_\theta}{ma^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.126)$$

Al sustituir el segundo par de ecuaciones (6.126) en el primer par resulta,

$$\left. \begin{aligned} -ma\ddot{\theta} + mg \cos \theta - \lambda_1 &= 0 \\ a\ddot{\theta} - g \sin \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.127)$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (5.195) y (5.196), por lo tanto es de esperarse que al usar (6.14), el resultado sea el dado por (5.202) y (5.203).

Ejemplo 6.18

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.18 usando el método de Hamilton.

Solución: De (5.207), la ligadura viene dada por,

$$f(x, y, t) = y - x \tan \theta - h(t) = 0$$

Se construye el Lagrangiano: A partir de (5.210) el Lagrangiano viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

en el cual no se ha eliminado la coordenada dependiente mediante el uso de la ligadura.

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son x y y ,

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6.128)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + mgy \end{aligned} \quad (6.129)$$

donde se ha usado (6.128) para eliminar \dot{x} y \dot{y} .

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.18) con $K = 1$ por sólo haber una ligadura,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\lambda_1 \tan \theta \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} = -mg + \lambda_1 \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6.130)$$

Al sustituir el segundo par de ecuaciones (6.130) en el primer par resulta,

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -\lambda_1 \tan \theta \\ m\ddot{y} + mg &= \lambda_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.131)$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (5.213) y (5.214), por lo tanto es de esperarse que al usar (6.14), el resultado sea el dado por (5.219) y (5.220).

6.5. Ejemplos con ligaduras semi-holónomas

Ejemplo 6.19

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.19 usando el método de Hamilton.

Solución:

Se construye el Lagrangiano: A partir de (5.166) el Lagrangiano viene dado por,

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - Mg(l-x)\text{Sen } \phi$$

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son x y θ ,

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{M} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{2p_\theta}{MR^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.132)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned}
 H &= T + U = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + Mg(l-x)\text{Sen } \phi \\
 &= \frac{p_x^2}{2M} + \frac{p_\theta^2}{MR^2} + Mg(l-x)\text{Sen } \phi
 \end{aligned}
 \tag{6.133}$$

donde se ha usado (6.132) para eliminar \dot{x} y $\dot{\theta}$.

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.24) con $K = 1$ por sólo haber una ligadura,

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \lambda_1 A_{1x} = Mg \text{Sen } \phi + \lambda_1 \\
 \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} + \lambda_1 A_{1\theta} = -R\lambda_1 \\
 \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{M} \\
 \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{2p_\theta}{MR^2}
 \end{aligned} \right\}
 \tag{6.134}$$

donde se han usado los coeficientes A_{li} dados por (5.224). Al sustituir el segundo par de ecuaciones (6.134) en el primer par resulta,

$$\left. \begin{aligned}
 M\ddot{x} &= Mg \text{Sen } \phi + \lambda_1 \\
 \frac{1}{2}MR\ddot{\theta} + \lambda_1 &= 0
 \end{aligned} \right\}
 \tag{6.135}$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (5.225) y (5.226), por lo tanto es de esperarse que al usar (6.21), el resultado para las fuerzas de ligadura generalizadas sea el dado por (5.228).

Ejemplo 6.20

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.20 usando el método de Hamilton.

Solución:

Se construye el Lagrangiano: A partir de (5.235) el Lagrangiano viene dado por,

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_\phi\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_\theta\dot{\theta}^2$$

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son x, y, ϕ y θ ,

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m} \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_\phi \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{I_\phi} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_\theta \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{I_\theta} \end{aligned} \right\} \quad (6.136)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_\phi \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_\theta \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2I_\phi} + \frac{p_\theta^2}{2I_\theta} \end{aligned} \quad (6.137)$$

donde se ha usado (6.136) para eliminar $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$.

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.24) con $K = 2$ por haber dos ligaduras,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \lambda_1 A_{1x} + \lambda_2 A_{2x} = \lambda_1 \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} + \lambda_1 A_{1y} + \lambda_2 A_{2y} = \lambda_2 \\ \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} + \lambda_1 A_{1\phi} + \lambda_2 A_{2\phi} = -\lambda_1 R \text{Sen } \theta + \lambda_2 R \text{Cos } \theta \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} + \lambda_1 A_{1\theta} + \lambda_2 A_{2\theta} = 0 \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{I_\phi} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{I_\theta} \end{aligned} \right\} \quad (6.138)$$

donde se han usado los coeficientes A_{li} dados por (5.233). Al sustituir el segundo grupo de cuatro ecuaciones (6.138) en el primer grupo de cuatro resulta,

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda_1 \\ m\ddot{y} &= \lambda_2 \\ I_\phi \ddot{\phi} &= -\lambda_1 R \text{Sen } \theta + \lambda_2 R \text{Cos } \theta \\ I_\theta \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.139)$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (5.236), por lo tanto es de esperarse que al usar (6.21), el resultado para las fuerzas de ligadura generalizadas sea el dado por (5.241).

Ejemplo 6.21

Encuentre las ecuaciones de Hamilton para el ejemplo 5.21.

Solución:

Se construye el Lagrangiano: A partir de (5.246) el Lagrangiano viene dado por,

$$L = T - U = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_\varphi\dot{\varphi}^2 + QEx + 2qEb \text{Cos } \varphi$$

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son x, y y φ ,

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{M} \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{M} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_\varphi\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{I_\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (6.140)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_\varphi\dot{\varphi}^2 - QEx - 2qEb \text{Cos } \varphi \\ &= \frac{p_x^2}{2M} + \frac{p_y^2}{2M} + \frac{p_\varphi^2}{2I_\varphi} - QEx - 2qEb \text{Cos } \varphi \end{aligned} \quad (6.141)$$

donde se ha usado (6.140) para eliminar \dot{x}, \dot{y} y $\dot{\varphi}$.

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.24) con $K = 1$ por sólo haber una ligadura,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \lambda_1 A_{1x} = QE + \lambda_1 \text{Sen } \varphi \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} + \lambda_1 A_{1y} = -\lambda_1 \text{Cos } \varphi \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} + \lambda_1 A_{1\varphi} = -2qEb \text{Sen } \varphi \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{M} \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{M} \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{I_\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (6.142)$$

donde se han usado los coeficientes A_{1i} dados por (5.244). Estas son las ecuaciones de Hamilton pedidas.

Es fácil verificar que al sustituir el segundo grupo de tres ecuaciones (6.142) en el primer grupo de tres resultan las tres ecuaciones de Lagrange (5.247).

Ejemplo 6.22

Encontrar las fuerzas generalizadas de ligadura para el ejemplo 5.22 usando el método de Hamilton.

Solución:

Se construye el Lagrangiano: A partir de (5.248) el Lagrangiano viene dado por,

$$L = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}I_\varphi\dot{\varphi}^2 + QEx + 2qEb \text{Cos } \varphi$$

Se buscan los momentos generalizados o conjugados: Las coordenadas generalizadas son s, x y φ ,

$$\left. \begin{aligned} p_s &= \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = M\dot{s} \Rightarrow \dot{s} = \frac{p_s}{M} \\ p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_\varphi\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{I_\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (6.143)$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema (6.27),

$$\begin{aligned} H &= T + U = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}I_\varphi\dot{\varphi}^2 - QEx - 2qEb \text{Cos } \varphi \\ &= \frac{p_s^2}{2M} + \frac{p_\varphi^2}{2I_\varphi} - QEx - 2qEb \text{Cos } \varphi \end{aligned} \quad (6.144)$$

donde se ha usado (6.143) para eliminar \dot{s}, \dot{x} , y $\dot{\varphi}$.

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de las ecuaciones canónicas (6.24) con $K = 1$ por haber sólo una ligadura,

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_s &= -\frac{\partial H}{\partial s} + \lambda_1 A_{1s} = \lambda_1 \text{Cos } \varphi \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \lambda_1 A_{1x} = QE - \lambda_1 \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} + \lambda_1 A_{1\varphi} = -2qEb \text{Sen } \varphi \\ \dot{s} &= \frac{\partial H}{\partial p_s} = \frac{p_s}{M} \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = 0 \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{I_\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (6.145)$$

donde se han usado los coeficientes A_{i1} dados por (5.252). Al sustituir el segundo grupo de tres ecuaciones (6.145) en el primer grupo de tres resulta,

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s} &= \lambda_1 \text{Cos } \varphi \\ 0 &= QE - \lambda_1 \\ I_\varphi\ddot{\varphi} &= -2qEb \text{Sen } \varphi \end{aligned} \right\} \quad (6.146)$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (5.254), por lo tanto es de esperarse que al usar (6.21), el resultado para las fuerzas de ligadura generalizadas sea el dado por (5.255).

6.6. Ecuaciones de Hamilton a partir del principio de Hamilton

El principio de Hamilton establece que,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (6.147)$$

pero el Lagrangiano L viene dado ahora, al usar (6.4), por,

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - H(q_i, p_i, t) \quad (6.148)$$

de manera que (6.147) queda escrita como,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \dot{q}_i p_i - H(q_i, p_i, t) \right] dt = 0$$

o,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt = 0 \quad (6.149)$$

El segundo término de (6.149) puede ser integrado por partes como sigue,

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \delta q_i dt = p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt \quad (6.150)$$

donde el primer término se anula puesto que las variaciones en los extremos se anulan $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, por lo tanto (6.149) se convierte en,

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt \quad (6.151)$$

y puesto que las variaciones δp_i y δq_i son independientes la una de la otra (porque a lo largo de un camino en el espacio de fase los caminos vecinos pueden tener diferentes coordenadas o/y diferentes momentos), resulta,

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

que son las ecuaciones de Hamilton.

6.7. Espacio de fase

En el formalismo Hamiltoniano, el estado del movimiento de un sistema mecánico con s grados de libertad en un tiempo definido t está completamente caracterizado mediante la especificación de s coordenadas generalizadas y s momentos $q_1, q_2, \dots, q_s; p_1, p_2, \dots, p_s$.

Se denomina *espacio de fase* al espacio Cartesiano de dimensión $2s$ cuyas coordenadas son las coordenadas generalizadas q_i y los momentos generalizados p_i .

El subespacio de dimensión s de las coordenadas q_i es el *espacio de configuración* y el subespacio de dimensión s de los momentos p_i es llamado *espacio de momento*. En el curso del movimiento de un sistema, el punto representativo describe una curva que es la denominada *trayectoria de fase* (ver figura 6.6).

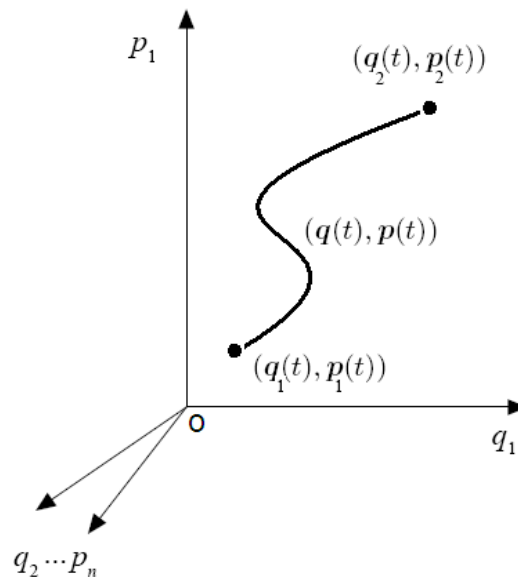


Figura (6.6): Trayectoria de fase en un espacio de fase.

Si el Hamiltoniano es conocido, entonces la trayectoria de fase completa puede ser calculada únicamente a partir de las coordenadas de un punto. Por lo tanto, a cada punto le pertenece sólo una trayectoria, y dos trayectorias diferentes no se intersectarán. En el espacio de fase un camino está dado en representación paramétrica mediante $q_i(t), p_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Debido a la singularidad de las soluciones de las ecuaciones de Hamilton, el sistema se desarrolla a partir de varias condiciones de

frontera a lo largo de varias trayectorias. Para sistemas conservativos, el punto representativo está confinado a una hipersuperficie de dimensión $2s - 1$ del espacio de fase mediante la condición $H(q_i, p_i) = E = \text{constante}$.

Ejemplo 6.23

Construir el diagrama de fase para la partícula del ejemplo 6.1.

Solución: La partícula tiene 2 grados de libertad (θ, z) , así el espacio de fase para este ejemplo es de 4 dimensiones θ, p_θ, z, p_z . Pero p_θ es constante, por lo tanto puede ser suprimido.

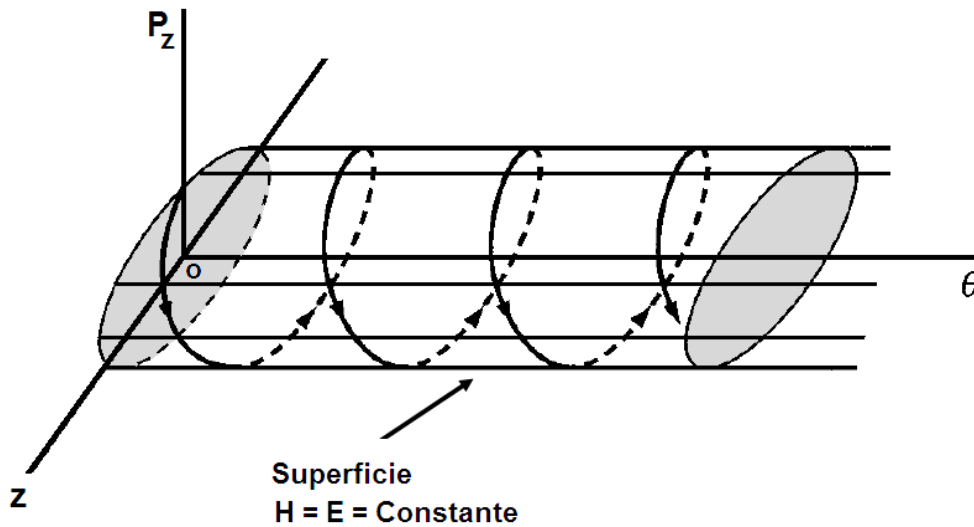


Figura (6.7): Diagrama de fase para una partícula de masa m obligada a moverse sobre la superficie de un cilindro (Ejemplo 6.23).

El Hamiltoniano viene dado por (6.41),

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}K(R^2 + z^2) = E$$

Véase la proyección del camino de fase sobre el plano $z - p_z$. Al hacer $p_\theta = 0$ en la ecuación anterior,

$$\frac{p_z^2}{2m(E - \frac{1}{2}KR^2)} + \frac{z^2}{\frac{2E}{K} - R^2} = 1 \tag{6.152}$$

y así la proyección del camino de fase sobre el plano $z - p_z$ para cualquier E es una elipse. Esto era de esperarse ya que el movimiento en la dirección z es armónico simple.

Por otro lado, debido a que $\dot{\theta} = \text{constante}$, el camino de fase debe representar un movimiento que se incrementa uniformemente con θ . Así, el camino de fase sobre cualquier superficie $H = E = \text{constante}$ es una espiral elíptica uniforme (ver figura 6.7).

Ejemplo 6.24

Construir el diagrama de fase para el péndulo simple del ejemplo 6.11.

Solución: El Hamiltoniano viene dado por (6.98),

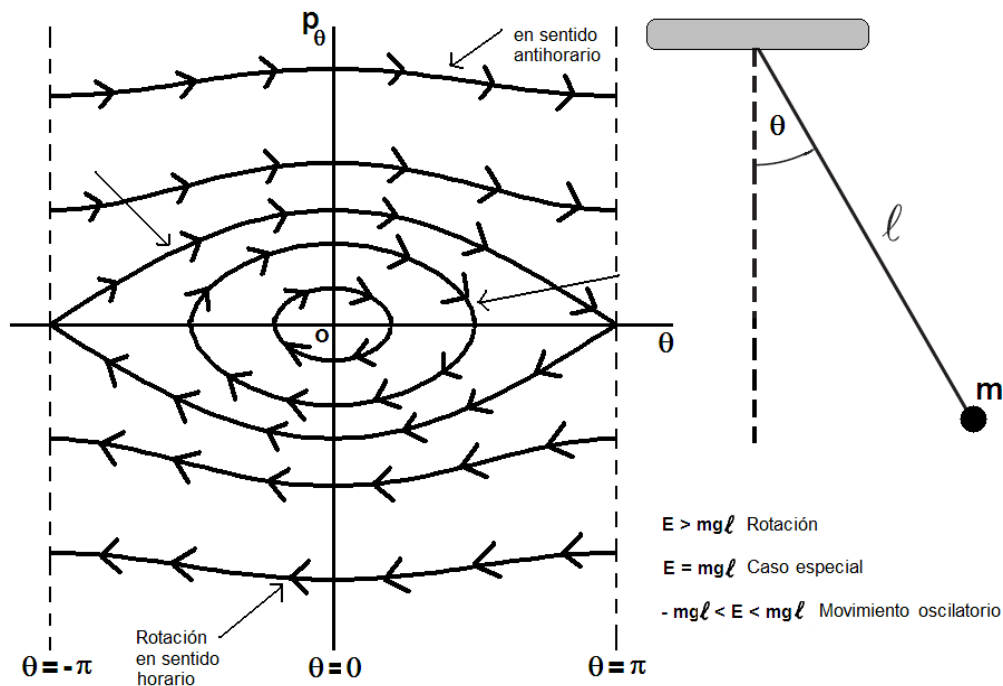


Figura (6.8): Diagrama de fase para el péndulo simple (Ejemplo 6.24).

$$H = T + U = \frac{p_{\theta}^2}{2m\ell^2} + mg\ell(1 - \cos\theta) = E$$

Ahora, a partir de aquí se puede obtener la ecuación para la trayectoria de fase $p_{\theta} = p_{\theta}(\theta)$,

$$p_{\theta} = \pm \sqrt{2m\ell^2 [E - mg\ell(1 - \cos\theta)]} \quad (6.153)$$

y así se obtiene un conjunto de curvas con la energía E como un parámetro. Estas curvas son mostradas en la figura 6.8.

Para θ y momento p_θ pequeños el péndulo oscila, apareciendo en el diagrama de fase como elipses. Para θ y momento p_θ grandes el péndulo da vueltas completas apareciendo como líneas que envuelven a las elipses. Separando los anteriores movimientos se encuentra el caso especial en el cual el péndulo comienza en la parte más alta, cae y regresa a la posición más alta.

Ejemplo 6.25

Construir el diagrama de fase para una partícula de masa m que se desliza bajo la acción de la gravedad y sin fricción sobre un alambre que tiene forma de parábola (ver figura 6.9).

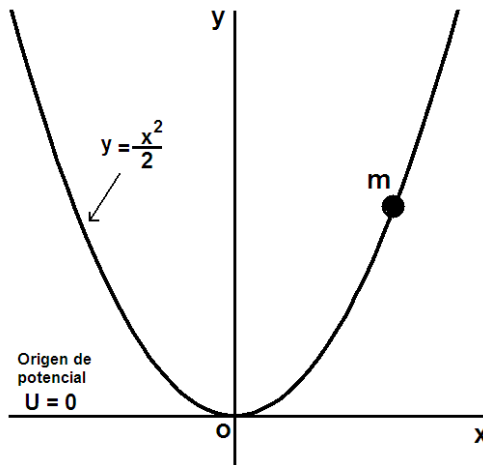


Figura (6.9): Partícula de masa m que se desliza bajo la acción de la gravedad y sin fricción sobre un alambre que tiene forma de parábola $y = \frac{x^2}{2}$ (Ejemplo 6.25).

Solución: Este sistema es conservativo y es fácil mostrar que el Hamiltoniano viene dado por,

$$H = T + U = \frac{p_x^2}{2m(1+x^2)} + \frac{1}{2}mgx^2 = E \tag{6.154}$$

Ahora, a partir de aquí se puede obtener la ecuación para la trayectoria de fase $p_x = p_x(x)$,

$$p_x = \pm \sqrt{m(1+x^2)(2E - mgx^2)} \tag{6.155}$$

y así se obtiene un conjunto de curvas con la energía E como un parámetro. Estas curvas son mostradas en la figura 6.10.

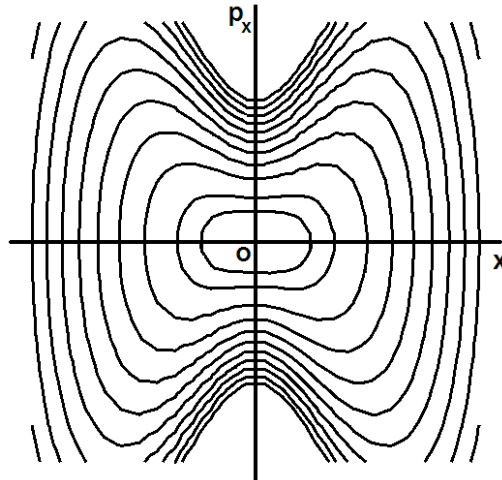


Figura (6.10): Diagrama de fase para la partícula de masa m que se mueve sobre un alambre en forma de parábola, para $m = 1$ y $g = 1$ (Ejemplo 6.25).

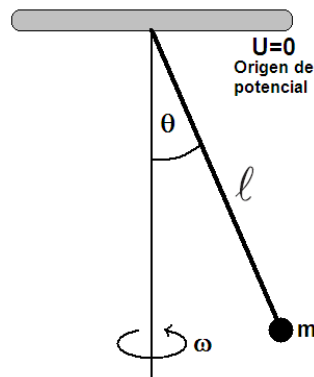


Figura (6.11): Péndulo cónico (Ejemplo 6.26).

Ejemplo 6.26

Construir el diagrama de fase para un péndulo cónico (ver figura 6.11).

Solución: Aquí el mecanismo externo de rotación realiza trabajo sobre el sistema para mantenerlo en rotación por lo tanto el sistema no es conservativo y para hallar el Hamiltoniano debe usarse la expresión general (6.4). Es fácil mostrar que el Hamiltoniano viene dado por,

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2 \text{Sen}^2 \theta - mgl \text{Cos} \theta \quad (6.156)$$

que no es igual a la energía total del sistema³, la cual viene dada por,

$$E = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2 \text{Sen}^2 \theta - mgl \text{Cos} \theta \quad (6.157)$$

³El Hamiltoniano es constante en el tiempo si el mecanismo de rotación mantiene ω constante.

Ahora, a partir de (6.156) se puede obtener la ecuación para la trayectoria de fase $p_\theta = p_\theta(\theta)$,

$$p_\theta = \pm m\ell \sqrt{\frac{2H}{m} + \ell^2 \omega^2 \text{Sen}^2 \theta + 2g\ell \text{Cos} \theta} \quad (6.158)$$

y así se obtiene un conjunto de curvas con el Hamiltoniano H como un parámetro. Estas curvas son mostradas en la figura 6.12. La figura 6.12(a) es para $\omega < \sqrt{g/\ell}$ y la 6.12(b) es para $\omega > \sqrt{g/\ell}$.

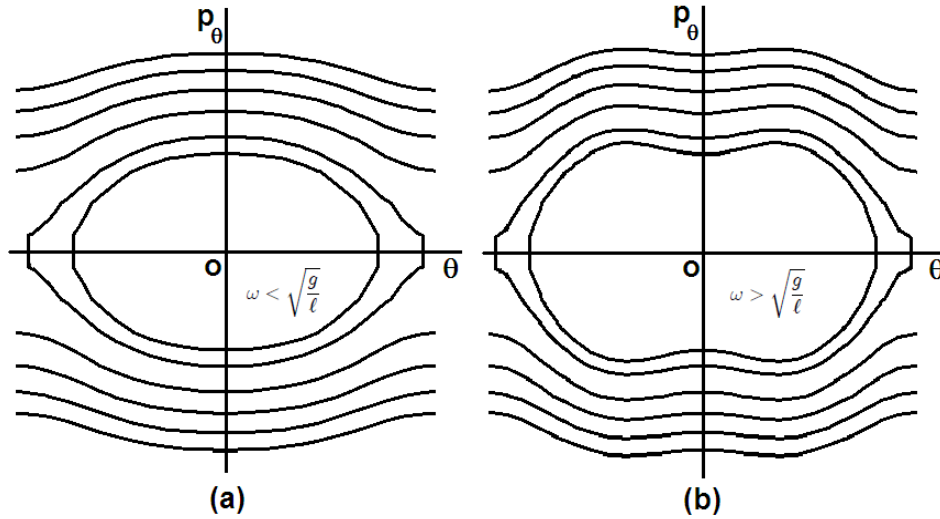


Figura (6.12): Diagrama de fase para el péndulo cónico (Ejemplo 6.26).

Ejemplo 6.27

Construir el diagrama de fase para el ejemplo 6.4.

Solución: Este sistema es conservativo y el Hamiltoniano, según (6.56), viene dado por,

$$H = E = \frac{p_y^2}{2(M_1 + M_2)} - M_1 g y - M_2 g (\ell - y)$$

Ahora, a partir de aquí se puede obtener la ecuación para la trayectoria de fase $p_y = p_y(y)$,

$$p_y = \pm \sqrt{2(M_1 + M_2)(E + M_1 g y + M_2 g (\ell - y))} \quad (6.159)$$

y así se obtiene un conjunto de curvas con la energía E como un parámetro. Estas curvas son mostradas en la figura 6.13.

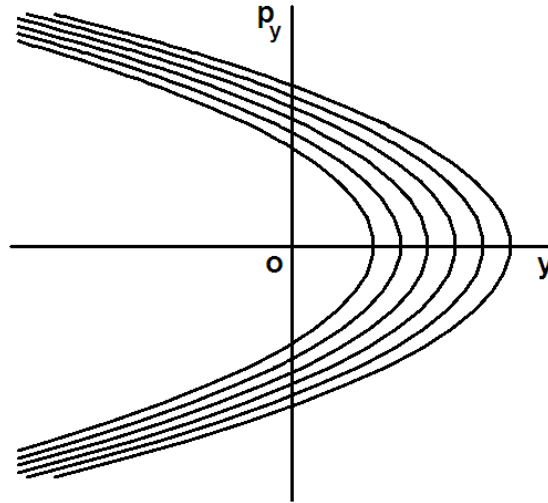


Figura (6.13): Diagrama de fase para el ejemplo 6.4 (Ejemplo 6.27).

6.8. Teorema de Liouville

El teorema de Liouville⁴ realmente pertenece a la Mecánica Estadística y es básico para su estudio, pero es de interés considerarlo aquí debido a que es una consecuencia directa de las ecuaciones de Hamilton. El teorema de Liouville es un teorema básico para la Mecánica de Sistemas tales que:

1. El número de grados de libertad es muy grande.
2. No se pueden determinar las $2s$ condiciones iniciales, por lo tanto tampoco el estado del sistema en sentido clásico. Solamente se conoce el Hamiltoniano del sistema, las condiciones de ligadura y, a lo sumo, siete de las $2s$ constantes de movimiento (las aditivas: E, \vec{L}, \vec{p}).
3. Respecto a las condiciones iniciales, o sea a las posibles trayectorias del espacio de fase, sólo se pueden hacer suposiciones estadísticas. En particular se puede asumir que todas las trayectorias de fase compatibles con las ligaduras y con los valores de las siete constantes aditivas son igualmente probables (distribución uniforme). En general, habrá una región del espacio de fase que es accesible al sistema y se

⁴Liouville se graduó en la École Polytechnique de París en 1827. Tras varios años como asistente en varias instituciones logró ser profesor en la École Polytechnique en el año 1838. Obtuvo la cátedra de Matemáticas en el Collège de France en 1850 y la de Mecánica en la Faculté des Sciences en 1857. Trabajó en una cantidad muy diversa de campos en matemáticas, incluyendo teoría de números, análisis complejo, topología diferencial, pero también en física matemática e incluso astronomía. Se le recuerda en particular por el teorema que lleva su nombre.

puede postular alguna distribución de probabilidades de las distintas trayectorias de fase dentro de la región accesible (las trayectorias externas a la región accesible tienen probabilidad cero).

Antes de enunciar y demostrar el teorema de Liouville, es importante definir *conjunto estadístico*, noción útil en los casos donde hay $2s - 7$ constantes de movimiento no determinadas.

Un *conjunto estadístico* consiste en un conjunto de sistemas iguales, queriéndose decir con esto, que tengan el mismo número de grados de libertad, la misma clase de partículas y de interacciones, las mismas ligaduras y los mismos valores de las constantes de movimiento aditivas.

De lo anterior, dos sistemas de un conjunto estadístico sólo pueden diferir por los valores de las $2s - 7$ constantes no aditivas. Se considera que el número de sistemas es muy grande, de modo que es una muestra estadísticamente representativa de la distribución de los valores de las $2s - 7$ constantes indeterminadas. En cada instante de tiempo, el estado de cada sistema del conjunto será representado por un punto en el espacio de fase, y su estado de movimiento por una trayectoria de fase. El conjunto estadístico de sistemas de s grados de libertad estará representado en cada instante por un "enjambre" de puntos en el espacio de fase. Como los sistemas del conjunto estadístico no interactúan, cada punto se mueve independientemente de los demás en el espacio de fase de $2s$ -dimensional.

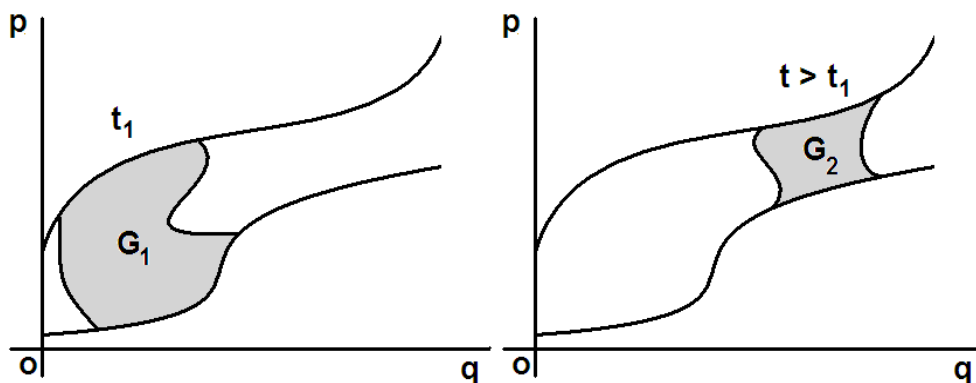


Figura (6.14): Evolución de una región en el espacio de fase.

Considérense ahora un gran número N de puntos independientes que son mecánicamente idénticos, excepto por las condiciones iniciales, y que son, por lo tanto, descritos por el mismo Hamiltoniano, es decir, un conjunto estadístico. Si en el tiempo t_1

todos los puntos están distribuidos sobre una región G_1 de un espacio de fase de dimensión $2s$ con volumen,

$$\Delta V = \Delta q_1 \dots \Delta q_s \Delta p_1 \dots \Delta p_s = \prod_{l=1}^s \Delta q_l \Delta p_l \quad (6.160)$$

se puede definir la densidad como,

$$\rho = \frac{\Delta N}{\Delta V} \quad (6.161)$$

Al transcurrir el movimiento, la región G_1 se transforma en la región G_2 de acuerdo con las ecuaciones de Hamilton (ver figura 6.14).

El teorema de Liouville establece que,

El volumen de una región arbitraria del espacio de fase es conservado si los puntos de su frontera se mueven de acuerdo a las ecuaciones canónicas.

o, en otras palabras,

En cada elemento de volumen del espacio de fase, la densidad de puntos representativos del conjunto estadístico permanece constante en el tiempo.

Demostración:

Para probarlo, se investiga el movimiento de un sistema de puntos a través de un elemento de volumen del espacio de fase. Considérense primero las componentes del flujo de puntos representativos a lo largo de las direcciones q_k y p_k . En la figura 6.15, el área $ABCD$ representa la proyección del elemento de volumen dV de dimensión $2s$ sobre el plano q_k, p_k .

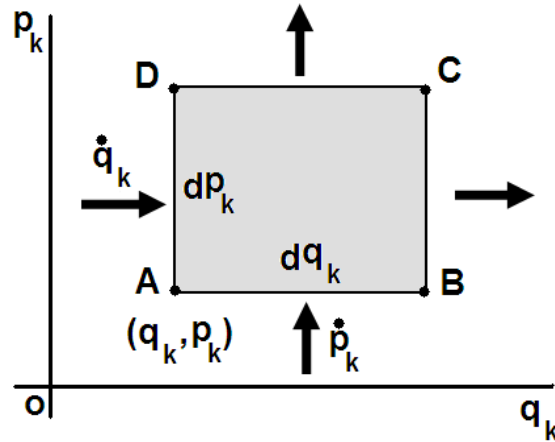
El flujo j de puntos representativos (número de puntos representativos por unidad de tiempo) que se mueven entrando a través de la "cara lateral" (con proyección AD sobre el plano q_k, p_k) es,

$$j_{AD}^{(\text{entrante})} = \rho \frac{dq_k}{dt} dp_k dV_k = \rho \dot{q}_k dp_k dV_k \quad (6.162)$$

con,

$$dV_k = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^s dq_l dp_l \quad (6.163)$$

es el restante elemento de volumen de dimensión $2s - 2$; $dp_k dV_k$ es la magnitud de la superficie lateral con proyección AD en el plano q_k, p_k .


 Figura (6.15): Proyección del elemento de volumen sobre el plano q_k, p_k .

De forma análoga, el flujo entrante en la dirección p_k (que entra por AB) es,

$$j_{AB}^{(\text{entrante})} = \rho \frac{dp_k}{dt} dq_k dV_k = \rho \dot{p}_k dq_k dV_k \quad (6.164)$$

de manera que el flujo entrante total de puntos representativos hacia adentro del área $dq_k dp_k$ es,

$$j^{(\text{entrante})} = j_{AD}^{(\text{entrante})} + j_{AB}^{(\text{entrante})} = \rho \left(\dot{q}_k dp_k + \dot{p}_k dq_k \right) dV_k \quad (6.165)$$

Para hallar los puntos que salen, se deben considerar los que se mueven dentro del elemento hacia las caras BC y CD . Esto se puede obtener de (6.165) mediante un desarrollo en series de Taylor alrededor de (q_k, p_k) , para hallar (6.165) $(q_k + dq_k, p_k + dp_k)$, de manera que el flujo total saliente de puntos representativos es (aproximadamente),

$$\begin{aligned} j^{(\text{saliente})} &= \left[\left(\rho \dot{q}_k \right) \Big|_{q_k + dq_k} dp_k + \left(\rho \dot{p}_k \right) \Big|_{p_k + dp_k} dq_k \right] dV_k \\ &= \underbrace{\left[\rho \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\rho \dot{q}_k \right) dq_k \right] dp_k dV_k}_{j_{BC}^{(\text{saliente})}} + \underbrace{\left[\rho \dot{p}_k + \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\rho \dot{p}_k \right) dp_k \right] dq_k dV_k}_{j_{CD}^{(\text{saliente})}} \end{aligned} \quad (6.166)$$

así el número de puntos representativos por unidad de tiempo que se atascan en el elemento de volumen es la diferencia entre las ecuaciones (6.165) y (6.166),

$$j^{(\text{entrante})} - j^{(\text{saliente})} = - \left[\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\rho \dot{q}_k \right) + \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\rho \dot{p}_k \right) \right] dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (6.167)$$

Sumando sobre todas las $k = 1, 2, \dots, s$ se obtiene el número de puntos representativos que se atascan en total. Esta cantidad corresponde, justamente, al cambio con

el tiempo (derivada temporal) de la densidad multiplicada por dV . Por lo tanto, se puede concluir que,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) \right] \quad (6.168)$$

que es una ecuación de continuidad de la forma⁵,

$$\text{div} \left(\rho \vec{r} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

donde la divergencia se refiere al espacio de fase de dimensión $2s$,

$$\nabla = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_k \frac{\partial}{\partial p_k}$$

Ahora bien, al desarrollar las derivadas en (6.168) y reordenar,

$$\sum_k \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \rho \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k + \rho \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6.169)$$

pero a partir de las ecuaciones de Hamilton (6.8),

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k}$$

si las segundas derivadas parciales de H son continuas. Entonces de (6.169),

$$\sum_k \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6.170)$$

que es justamente la derivada total de ρ con respecto al tiempo,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (6.171)$$

y, por lo tanto, $\rho = \text{constante}$. Esto establece que la densidad de puntos representativos en el espacio de fase correspondiente al movimiento de un sistema de partículas permanece constante durante el movimiento. Se debe resaltar que se pudo establecer la invariancia de la densidad sólo debido a que el problema fue formulado en el espacio de fase. No existe un teorema equivalente para el espacio de configuración estudiado en la sección 2.7. Así se puede usar la dinámica Hamiltoniana (en lugar de la Lagrangiana) para trabajar en Mecánica Estadística.

⁵Las ecuaciones de continuidad de este tipo aparecen a menudo en física de flujos (Hidrodinámica, Electrodinámica, Mecánica Cuántica). Estas ecuaciones siempre expresan una ley de conservación.

El teorema de Liouville es importante no sólo para agregados de partículas microscópicas, como en la Mecánica Estadística de los sistemas gaseosos y las propiedades de la concentración de partículas cargadas en los aceleradores de partículas, sino también en ciertos sistemas macroscópicos. Por ejemplo, en dinámica estelar, el problema se invierte y mediante el estudio de la función de distribución ρ de las estrellas en una galaxia, puede inferirse el potencial U del campo gravitacional galáctico.

Ejemplo 6.28

Mostrar que se cumple el teorema de Liouville para un conjunto de partículas de masa m en un campo gravitacional constante.

Solución: A partir de la energía se tiene que,

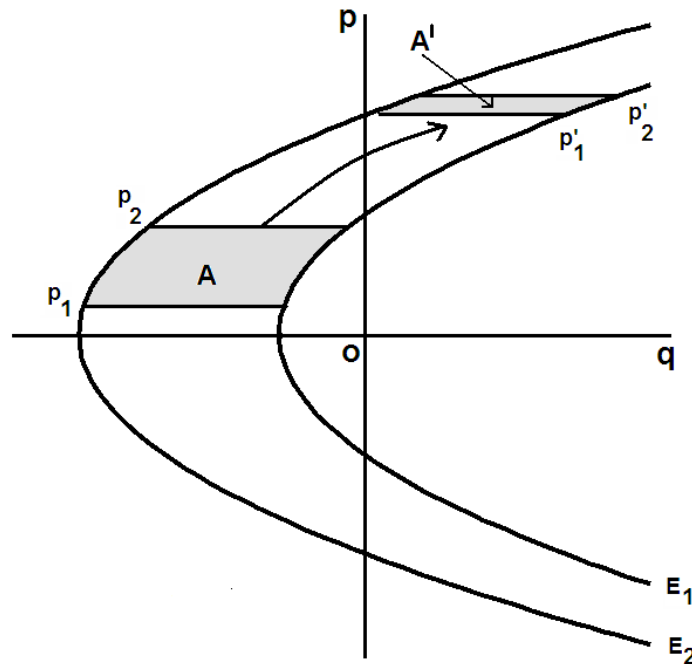


Figura (6.16): Diagrama de fase para un conjunto de partículas de masa m en un campo gravitacional constante (Ejemplo 6.258).

$$H = E = \frac{p^2}{2m} - mgq \tag{6.172}$$

La energía total de una partícula permanece constante. Las trayectorias de fase $p(q)$ son las parábolas dadas por,

$$p = \pm \sqrt{2m(E + mgq)} \tag{6.173}$$

con la energía E como parámetro. Considérense un número de partículas con momentos en $t = 0$ entre los límites $p_1 \leq p \leq p_2$ y energías entre $E_1 \leq E \leq E_2$. Ellas cubren el área A en el espacio de fase. Un tiempo t después las partículas cubren el área A' (ver figura 6.16). En este momento ellas tienen momento,

$$p' = p + mgt \tag{6.174}$$

de manera que A' es el área entre las parábolas limitadas por $p_1 + mgt \leq p' \leq p_2 + mgt$. Con,

$$q = \frac{1}{mg} \left(\frac{p^2}{2m} - E \right) \tag{6.175}$$

se pueden calcular las áreas A y A' como sigue,

$$A = \int_{p_1}^{p_2} \int_{\frac{1}{mg} \left(\frac{p_1^2}{2m} - E_1 \right)}^{\frac{1}{mg} \left(\frac{p_2^2}{2m} - E_2 \right)} dpdq = \frac{E_2 - E_1}{mg} (p_2 - p_1) \tag{6.176}$$

y de la misma forma,

$$A' = \frac{E_2 - E_1}{mg} (p'_2 - p'_1) = \frac{E_2 - E_1}{mg} (p_2 - p_1) \tag{6.177}$$

que es justo el enunciado del teorema de Liouville: $A = A'$, expresando que la densidad del sistema de partículas en el espacio de fase permanece constante.

6.9. Forma simpléctica de las Ecuaciones de Hamilton

Una elegante y poderosa herramienta para manipular las ecuaciones de Hamilton y expresiones asociadas lo constituye la *forma simpléctica*.⁶

Se llama forma simpléctica a aquella que utiliza el lenguaje matricial, que es muy útil debido a su carácter compacto y su potencia para operar con una buena cantidad de información de manera automática.

Esta notación permite escribir las ecuaciones de Hamilton en forma compacta. En efecto, para un sistema de s grados de libertad, se puede definir una matriz columna η con $2s$ elementos tales que,

$$\eta_i = q_i, \quad \eta_{i+s} = p_i \quad \text{con } i \leq s \tag{6.178}$$

⁶El término *simpléctico* viene del griego para "entrelazado", que es particularmente apropiado para las ecuaciones de Hamilton donde las \dot{q}_i están relacionadas con las derivadas con respecto a los p_i y los \dot{p}_i lo hacen de la misma forma con las derivadas negativas con respecto a las q_i . Este término fue introducido por primera vez en 1939 por H. Weyl en su libro *The Classical Groups*.

es decir,

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_i \\ \vdots \\ \eta_s \\ \eta_{1+s} \\ \vdots \\ \eta_{i+s} \\ \vdots \\ \eta_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_s \\ p_{1+s} \\ \vdots \\ p_{i+s} \\ \vdots \\ p_{2s} \end{bmatrix} \quad (6.179)$$

y, similarmente, la matriz columna $\partial H/\partial \eta$ tiene los elementos,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_{i+s} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{con } i \leq s \quad (6.180)$$

Finalmente, sea J una matriz cuadrada $2s \times 2s$ compuesta por cuatro matrices $s \times s$, la matriz nula $\mathbf{0}$ (matriz cuyos elementos son todos nulos) y la matriz identidad $\mathbf{1}$ (matriz unidad o matriz identidad usual), entonces⁷,

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.181)$$

con las siguientes propiedades:

1. Es ortogonal,

$$J^T = J^{-1} \quad (6.182)$$

2. Es antisimétrica,

$$J^T = -J \quad (6.183)$$

3. Su determinante es la unidad,

$$|J| = +1 \quad (6.184)$$

4. Se cumple que,

$$J^2 = JJ = -\mathbf{1} \quad (6.185)$$

⁷A esta matriz se le llama con frecuencia *matriz simpléctica*.

En base a todo lo anterior, las ecuaciones de Hamilton pueden ser escritas en forma compacta como,

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (6.186)$$

o,

$$\dot{\eta}_i = \sum_j \left(J_{ij} \frac{\partial H}{\partial \eta_j} \right) \quad (6.187)$$

de manera que,

$$J_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } (i > n \text{ y } j > n) \text{ o } (n \geq i \text{ y } n \geq j) \\ -1 & \text{si } (i > n \text{ y } j = i - n) \\ 1 & \text{si } (n \geq i \text{ y } j = i + n) \end{cases} \quad (6.188)$$

Para un sistema de dos grados de libertad,

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} \end{bmatrix} \quad (6.189)$$

6.10. El método de Routh

La formulación de la dinámica basada en las ecuaciones canónicas resulta especialmente sencilla para las coordenadas que son cíclicas. En efecto, las coordenadas en sí no aparecen en H ni en las ecuaciones, y los momentos correspondientes son constantes. Por tanto, las coordenadas cíclicas quedan totalmente "eliminadas" de la formulación, que en la práctica viene a tener 2 grados de libertad menos por cada coordenada cíclica. En cambio, en la formulación de Lagrange es preciso considerar las velocidades generalizadas correspondientes en el Lagrangiano L y en las ecuaciones, ya que las velocidades \dot{q}_i no tienen por qué ser constantes aunque las coordenadas sean cíclicas.

El método de Routh es un tratamiento mixto entre las formulaciones de Lagrange y Hamilton: Emplea las ecuaciones de Hamilton para las coordenadas cíclicas, y las ecuaciones de Lagrange para el resto de ellas (las no cíclicas).

Supóngase un sistema con k grados de libertad, de los cuales las l primeras coordenadas son cíclicas:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, j = 1, 2, \dots, l & \text{(cíclicas)} \\ \frac{\partial L}{\partial q_j} \neq 0, j = l + 1, l + 2, \dots, k & \text{(no cíclicas)} \end{cases} \quad (6.190)$$

Los momentos correspondientes a las coordenadas cíclicas serán constantes, por lo tanto,

$$p_j = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (6.191)$$

Se realiza ahora una transformación de Legendre sólo respecto de las coordenadas cíclicas, definiendo así la denominada función Routhiana o Routhiano,

$$R = \sum_{j=1}^l c_j \dot{q}_j - L \quad (6.192)$$

haciéndose notar que la sumatoria se realiza sólo para los l primeros índices y siendo la dependencia funcional de $R = R(q_{l+1}, \dots, q_k; \dot{q}_{l+1}, \dots, \dot{q}_k; c_1, \dots, c_l; t)$.

Por otro lado, a partir de (6.192), se cumple que (para las coordenadas no ignorables)⁸,

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{para } i = l + 1, \dots, k \quad (6.193)$$

expresando que, para las coordenadas no cíclicas, las derivadas parciales de R son iguales a las de L con signo contrario.

Ahora bien, al sustituir las derivadas parciales dadas en (6.193) en las ecuaciones de Lagrange (5.37),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

resulta,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad \text{con } i = l + 1, \dots, k \quad (6.194)$$

y, una vez integradas estas $k - l$ ecuaciones para obtener R como función de las constantes c_j y de t , se puede calcular el valor de las l coordenadas cíclicas a partir de las ecuaciones de Hamilton (6.8) para las coordenadas ignorables⁹,

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial R}{\partial c_j} \\ \dot{c}_j &= -\frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \end{aligned}, \quad \text{con } j = 1, \dots, l \quad (6.195)$$

⁸Obsérvese que en (6.192) el término con la sumatoria sólo involucra coordenadas ignorables ya que j sólo toma valores hasta l . Por lo anterior, las derivadas parciales de este término con respecto a las coordenadas no ignorables son nulas.

⁹Como la definición de R dada por (6.192) es análoga a la definición de H dada por (6.4), es obvio que se cumplen las ecuaciones de Hamilton (6.8) cambiando $H \rightarrow R$.

Ejemplo 6.29

Considérese el caso de una partícula de masa m que se mueve en un plano bajo la influencia de una fuerza $F(r)$ que se deriva del potencial $U(r) = -K/r^n$.

Solución: El Lagrangiano es,

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{K}{r^n} \quad (6.196)$$

Como se puede notar aquí la coordenada ignorable es θ , por lo tanto el Routhiano correspondiente (6.192) viene dado por,

$$R = c_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - \frac{K}{r^n}$$

donde $c_\varphi = p_\varphi$, o también,

$$R = c_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2}mr^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{K}{r^n}$$

y como por (5.269),

$$c_\varphi = p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}$$

entonces,

$$R = \frac{c_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{K}{r^n} \quad (6.197)$$

Aplicando ahora las ecuaciones de Lagrange (6.194) para la coordenada no cíclica radial r , se obtiene la ecuación de movimiento,

$$\ddot{r} - \frac{c_\varphi^2}{mr^3} + \frac{nK}{r^{n+1}} = 0 \quad (6.198)$$

.....

El procedimiento de Routh no proporciona física adicional al problema, pero hace su análisis más automático. En problemas complicados con sistemas de muchos grados de libertad, este procedimiento puede suministrar una considerable ventaja. Por lo tanto no es sorprendente que el procedimiento de Routh tenga gran utilidad en la solución directa de problemas relacionados con las aplicaciones a la ingeniería. Sin embargo, como se mencionó antes, el Routhiano es un híbrido estéril, que combina algunos rasgos de la dinámica Lagrangiana y Hamiltoniana. Para el desarrollo de muchos formalismos de la Mecánica Clásica, la formulación Hamiltoniana es más fructífera.

6.11. Dinámica Lagrangiana vs Hamiltoniana

Existen algunas diferencias entre el sistema de ecuaciones de Hamilton y el de ecuaciones de Lagrange:

1. Las ecuaciones de Lagrange son s ecuaciones y las de Hamilton son $2s$ ecuaciones.
2. las ecuaciones de Lagrange tienen s incógnitas $q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)$, en tanto que las ecuaciones de Hamilton tienen $2s$ incógnitas $q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_s(t)$.
3. las ecuaciones de Lagrange son de segundo orden en sus incógnitas, es decir, se necesita conocer dos condiciones iniciales por incógnita para fijar las constantes arbitrarias (posición y velocidad inicial, por ejemplo); las ecuaciones de Hamilton son de primer orden en sus incógnitas, es decir, se necesita conocer una condición inicial por incógnita para fijar las constantes arbitrarias (posición inicial, por ejemplo).

Además, las ecuaciones de Hamilton son tan sencillas en su formato que algunos autores las distinguen como más elegantes que las de Lagrange. Subyaciendo bajo los aspectos estéticos, puede decirse que la forma de las ecuaciones de Hamilton sugiere que los papeles de posición y momento pueden intercambiarse (esto quedará claro al estudiar las transformaciones canónicas en el capítulo siguiente) dejando la forma de las ecuaciones sin variación. De hecho, el conjunto de cambios de variables que pueden realizarse en las ecuaciones de Hamilton sin alterarlas, es decir la variedad de perspectivas desde las que se pueden contemplar y por tanto la cantidad de simetrías que se pueden utilizar es infinitamente más grande que en las ecuaciones de Lagrange y en esto radica su mayor potencia. Realmente el marco hamiltoniano es el más amplio bajo el que se pueden contemplar los sistemas que evolucionan satisfaciendo un principio variacional que en Mecánica se identifica con el principio de Hamilton.

La formulación de Hamilton es más potente que la de Lagrange según el criterio citado en el párrafo anterior y se emplea con preferencia cuando se trata de resolver cuestiones sobre la existencia de integrales primeras de un sistema, comportamientos estables, caóticos, etc. No obstante, para la resolución de problemas elementales de Mecánica, donde el objetivo sea la obtención del sistema de ecuaciones diferenciales, aporta frecuentemente un camino más largo que el Lagrangiano.

6.12. Problemas

1. Una partícula de masa m está obligada a moverse sobre la superficie interna de un cono liso. Ver figura 6.17, donde α es constante. La partícula está sometida a una fuerza gravitacional. Encuentre las ecuaciones de movimiento por el método de Hamilton.

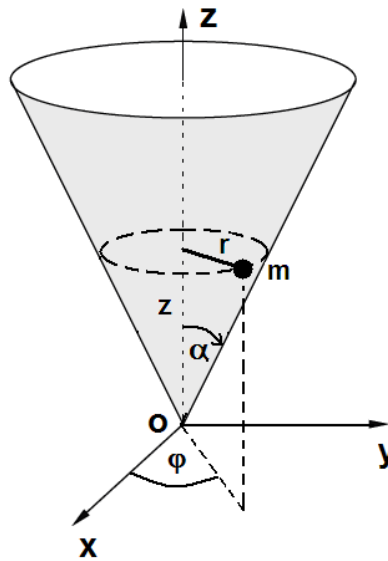


Figura (6.17): Partícula de masa m está obligada a moverse sobre la superficie interna de un cono liso (Problema 1).

2. (a) Encuentre la aceleración del sistema mostrado en la figura 6.18 por el método de Hamilton, (b) dibuje el diagrama de fase. Se desprecia el rozamiento y tamaño de la polea.
3. Una partícula de masa m se desplaza sobre un plano inclinado (ver figura 6.19). Encontrar las ecuaciones de movimiento por el método de Hamilton y la aceleración a lo largo del plano inclinado.
4. Una pequeña esfera se desliza sin rozamiento en un alambre liso doblado en forma de cicloide (ver figura 6.20) cuya ecuación es,

$$x = a(\theta - \text{Sen } \theta), \quad y = a(1 + \text{Cos } \theta)$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Mostrar, usando el método de Hamilton, que la ecuación de movimiento viene dada por,

$$(1 - \text{Cos } \theta) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \text{Sen } \theta \dot{\theta}^2 - \frac{g}{2a} \text{Sen } \theta = 0$$

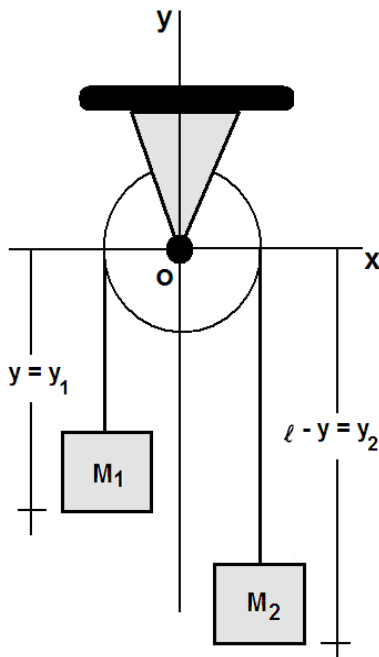


Figura (6.18): Máquina simple de Atwood (Problema 2).

5. Considérese el caso del movimiento de un proyectil de masa m bajo la acción de la gravedad en dos dimensiones (estudiado en Física I como lanzamiento de un proyectil con ángulo de elevación). Encontrar las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Muestre el sistema de referencia usado.
6. Obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton para el oscilador armónico unidimensional. Muestre el sistema de referencia usado.
7. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión bajo la influencia de una fuerza,

$$F(x, t) = \frac{k}{x^2} e^{-t/\tau}$$

donde k y τ son constantes positivas. Encuentre el Hamiltoniano ¿es igual a $T + U$? Compare el Hamiltoniano con la energía total, y discuta la conservación de la energía para el sistema. Muestre el sistema de referencia usado.

8. Considere el péndulo simple mostrado en la figura 6.21, el cual consiste de una masa m sujeta a una cuerda de longitud l . Después que el péndulo es puesto en movimiento, la longitud de la cuerda es acortada en una rata constante dada por,

$$\frac{dl}{dt} = -\alpha = \text{constante}$$

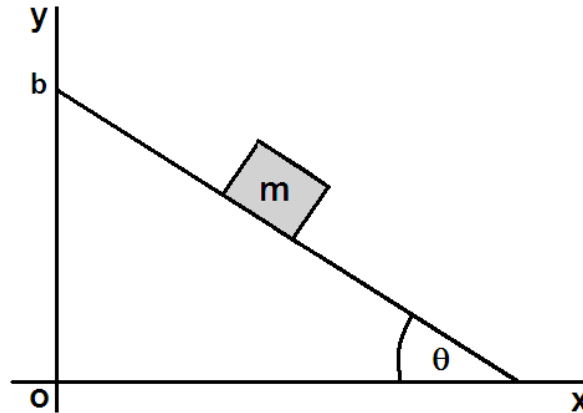


Figura (6.19): Partícula de masa m que se desliza sobre un plano inclinado (Problema 3).

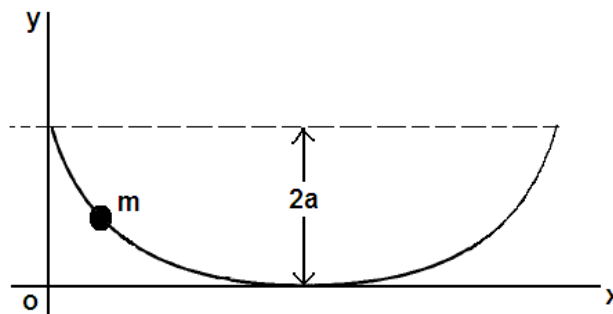


Figura (6.20): Pequeña esfera que se desliza, sin rozamiento, en un alambre liso doblado en forma de cicloide (Problema 4).

El punto de soporte permanece fijo. Encuentre el Hamiltoniano. Compare el Hamiltoniano con la energía total, y discuta la conservación de la energía para este sistema. Muestre el sistema de referencia usado.

9. Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de la gravedad a lo largo de la espiral $z = k\varphi$, $r = \text{constante}$ (ver figura 6.22), donde k es una constante y z es vertical. Obtener las ecuaciones de Hamilton. Muestre el sistema de referencia usado.

10. Una partícula de masa m es atraída a un centro de fuerza con una fuerza \vec{F} de magnitud,

$$F = k/r^2$$

Use coordenadas polares planas y encuentre las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Muestre el sistema de referencia usado.

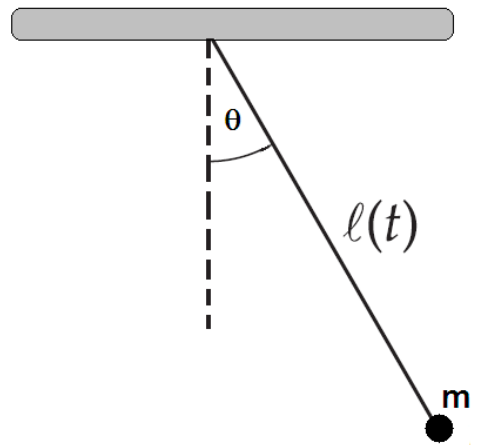


Figura (6.21): Péndulo simple cuya cuerda es de longitud variable (Problema 8).

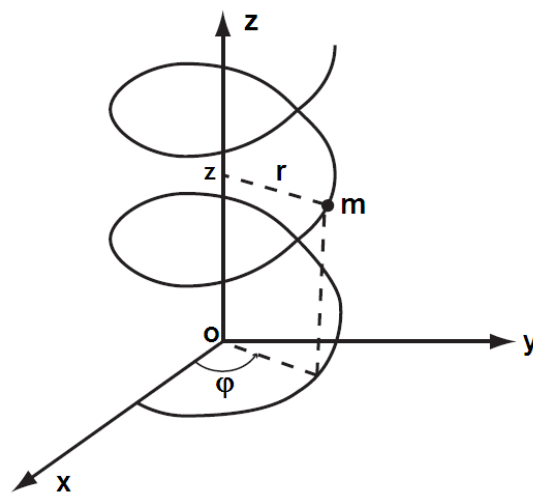


Figura (6.22): Partícula de masa m que se mueve, bajo la influencia de la gravedad, a lo largo de la espiral (Problema 9).

CAPÍTULO 7

Transformaciones canónicas

Contents

7.1. Definición	295
7.2. Ecuaciones de transformación canónicas	297
7.2.1. Caso 1: Función generatriz $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t)$	298
7.2.2. Caso 2: Función generatriz $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t)$	299
7.2.3. Caso 3: Función generatriz $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_3(p_i, \tilde{q}_i, t)$	300
7.2.4. Caso 4: Función generatriz $\mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_4(p_i, \tilde{p}_i, t)$	301
7.3. Invariante integral universal de Poincaré	309
7.4. Corchetes de Lagrange y Poisson	313
7.4.1. Corchetes de Lagrange	313
7.4.2. Corchetes de Poisson	314
7.4.3. Ecuaciones de Hamilton en corchetes de Poisson	320
7.5. Transformaciones canónicas infinitesimales	322
7.6. Forma simpléctica de las transformaciones canónicas	325
7.7. Problemas	327

7.1. Definición

La elección de las coordenadas generalizadas y de los correspondientes momentos canónicos, no es única. Es entonces de importancia contestar la siguiente

pregunta,

¿Es posible transformar las coordenadas y momentos de tal modo que se preserve la estructura de las ecuaciones de Hamilton?

La respuesta es SI, conduciendo a las llamadas *transformaciones canónicas*.

Una transformación canónica es una transformación de las coordenadas q_i y p_i del espacio de fase a unas nuevas coordenadas \tilde{q}_i y \tilde{p}_i , que preservan la estructura de las ecuaciones de Hamilton (6.8), con un nuevo Hamiltoniano $\tilde{H}(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t)$.

Por otro lado, se dirá que:

Una expresión cualquiera es un *invariante canónico* cuando no se modifica su estructura bajo una transformación canónica.

Se vio, en la sección 5.7, que las transformaciones puntuales no cambian la forma de las ecuaciones de Lagrange. Se quiere ver ahora qué tipo de transformaciones hace lo propio con las ecuaciones de Hamilton. Si de las variables (q_i, p_i) , en las que el Hamiltoniano es H , se cambia a las variables $(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i)$, en las que el Hamiltoniano pasa a ser \tilde{H} , la cuestión es cuáles transformaciones llevan a que en las nuevas variables las ecuaciones sean,

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}, \quad \dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i}$$

Este tipo de transformaciones permiten, en principio, disponer de un alto grado de flexibilidad en la selección de las variables que se utilizan para describir un sistema mecánico. Una selección adecuada de estas variables permite, en numerosos casos, simplificar el sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento y, en consecuencia, simplificar el problema de su integración (total o parcial).

La razón fundamental para definir una transformación canónica es para ver si es posible encontrar una transformación de variables en la que el Hamiltoniano sea cíclico en alguna de las variables, lo que implica que,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_i &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = 0 \longrightarrow \tilde{p}_i = \alpha_i = \text{constante} \\ \dot{\tilde{q}}_i &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} = v_i(t) \longrightarrow \tilde{q}_i = \int_{t_1}^{t_2} v_i(t) dt + \beta_i, \text{ con } \beta_i = \text{constante} \end{aligned}$$

o a ver si es posible encontrar cómo reducir el Hamiltoniano a una forma en que todas las coordenadas q_i sean cíclicas.

7.2. Ecuaciones de transformación canónicas

Para lograr lo dicho anteriormente, se habrá pues de ampliar el concepto de transformación de coordenadas para incluir la transformación simultánea de las coordenadas y momentos independientes¹ q_i, p_i a otro nuevo conjunto \tilde{q}_i, \tilde{p}_i , con las ecuaciones de transformación,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_i &= \tilde{q}_i(q_i, p_i, t) \\ \tilde{p}_i &= \tilde{p}_i(q_i, p_i, t) \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

así, las nuevas coordenadas quedarán definidas no sólo en función de las antiguas coordenadas, sino también de los antiguos momentos.

Si las \tilde{q}_i y \tilde{p}_i deben ser coordenadas canónicas, habrán de satisfacer un principio de Hamilton modificado, de la forma,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H}(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t) \right] dt = 0 \quad (7.2)$$

y, al mismo tiempo, las antiguas coordenadas satisfacen un principio análogo,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right] dt = 0 \quad (7.3)$$

Al restar (7.2) de (7.3), resulta,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - \tilde{L}) dt = 0 \quad (7.4)$$

pudiéndose cumplir si existe una función \mathcal{F} tal que,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathcal{F}}{dt} dt = \delta [\mathcal{F}(t_2) - \mathcal{F}(t_1)] = 0$$

es decir,

$$L - \tilde{L} = \frac{d\mathcal{F}}{dt} \quad (7.5)$$

donde la función arbitraria \mathcal{F} recibe el nombre de *función generatriz* de la transformación pues, como se verá, una vez conocida \mathcal{F} , las ecuaciones de transformación (7.1) quedan determinadas por completo. De lo anterior, se nota que los integrandos de (7.2) y (7.3) están ligados por la relación,

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} + \frac{d}{dt} \mathcal{F}$$

¹Recordemos que en la formulación hamiltoniana los momentos son también variables independientes, con idéntica categoría que las coordenadas generalizadas.

o,

$$d\mathcal{F} = \sum_i p_i dq_i - \sum_i \tilde{p}_i d\tilde{q}_i + (\tilde{H} - H) dt \quad (7.6)$$

de la cual se infiere la siguiente condición:

Para que una transformación, $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_i, p_i, t)$, $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q_i, p_i, t)$ sea canónica, la expresión $\sum_i p_i dq_i - \sum_i \tilde{p}_i d\tilde{q}_i$ debe ser una diferencial exacta.

Para efectuar la transformación entre los dos conjuntos de variables canónicas, \mathcal{F} ha de ser función tanto de las nuevas coordenadas como de las antiguas. Aparte del tiempo t , la función generatriz será función de $4n$ variables en total. Pero de estas, sólo $2n$ son independientes, ya que ambos conjuntos están relacionados por las $2n$ ecuaciones de transformación (7.1). La función generatriz puede, por tanto, expresarse de una de las siguientes cuatro formas, como función de las variables independientes,

$$\mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) \quad \mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t) \quad \mathcal{F}_3(p_i, \tilde{q}_i, t) \quad \mathcal{F}_4(p_i, \tilde{p}_i, t)$$

donde \mathcal{F}_2 , \mathcal{F}_3 y \mathcal{F}_4 se obtienen mediante una transformación de Legendre, de \mathcal{F}_1 como se verá más adelante.

Las características del problema indicarán cuál ha de elegirse. Así, por ejemplo, si se trata de una transformación puntual tal como la definida por $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_i, t)$, las q_i y las \tilde{q}_i no son independientes, por lo que habrán de excluirse las funciones generatrices de la forma \mathcal{F}_1 , pudiéndose utilizar cualquiera de las restantes.

7.2.1. Caso 1: Función generatriz $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t)$

Si la forma adecuada es la \mathcal{F}_1 , entonces de (7.6),

$$d\mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) = \sum_i p_i dq_i - \sum_i \tilde{p}_i d\tilde{q}_i + (\tilde{H} - H) dt \quad (7.7)$$

y, por otro lado, el diferencial total de \mathcal{F}_1 puede desarrollarse en la forma,

$$d\mathcal{F}_1 = \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \tilde{q}_i} d\tilde{q}_i + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} dt \quad (7.8)$$

Ahora, al comparar (7.8) con (7.7) resulta,

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) \quad (7.9)$$

$$\tilde{p}_i = -\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_i} \mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) \quad (7.10)$$

y,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) \quad (7.11)$$

Las n ecuaciones (7.9) son n relaciones entre p_i , q_i , \tilde{q}_i y t , que podrán resolverse para las n \tilde{q}_i en función de p_i , q_i , y t ; obteniéndose con ello la primera mitad de las ecuaciones de transformación (7.1). Una vez establecidas las relaciones entre \tilde{q}_i y (q_i, p_i, t) , las ecuaciones (7.10) proporcionan la mitad restante de las ecuaciones de transformación, dando los \tilde{p}_i en función de (q_i, p_i, t) . Para completar el proceso, la ecuación (7.11) da la relación entre el nuevo hamiltoniano \tilde{H} y el antiguo H .

7.2.2. Caso 2: Función generatriz $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t)$

Si las variables independientes de \mathcal{F} han de ser las q_i y \tilde{p}_i , la función generatriz será del tipo \mathcal{F}_2 .

A partir de (7.7) se tiene que,

$$d\mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) = \sum_i p_i dq_i - d\left(\sum_i \tilde{p}_i \tilde{q}_i\right) + \sum_i \tilde{q}_i d\tilde{p}_i + (\tilde{H} - H) dt$$

o,

$$d\left[\mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) + \sum_i \tilde{p}_i \tilde{q}_i\right] = \sum_i p_i dq_i + \sum_i \tilde{q}_i d\tilde{p}_i + (\tilde{H} - H) dt$$

donde el argumento del diferencial en el miembro izquierdo es $\mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t)$ obtenido mediante una transformación de Legendre, es decir,

$$\mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t) = \mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) + \sum_i \tilde{p}_i \tilde{q}_i$$

por lo tanto,

$$d\mathcal{F}_2 = \sum_i p_i dq_i + \sum_i \tilde{q}_i d\tilde{p}_i + (\tilde{H} - H) dt \quad (7.12)$$

y, por otro lado, el diferencial total de \mathcal{F}_2 puede desarrollarse en la forma,

$$d\mathcal{F}_2 = \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} d\tilde{p}_i + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} dt \quad (7.13)$$

Ahora, al comparar (7.13) con (7.12) resulta,

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t) \quad (7.14)$$

$$\tilde{q}_i = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_i} \mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t) \quad (7.15)$$

y,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t) \quad (7.16)$$

De las ecuaciones (7.14) se obtienen los \tilde{p}_i en función de las q_i , p_i y t , correspondiendo, por lo tanto, a la segunda mitad de las ecuaciones de transformación (7.1). La mitad restante de las ecuaciones de transformación se deduce a partir de (7.15).

7.2.3. Caso 3: Función generatriz $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_3(p_i, \tilde{q}_i, t)$

Si las variables independientes de \mathcal{F} han de ser las p_i y \tilde{q}_i la función generatriz será del tipo \mathcal{F}_3 . A partir de (7.7) se tiene que,

$$d\mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) = d\left(\sum_i p_i q_i\right) - \sum_i q_i dp_i - \sum_i \tilde{p}_i d\tilde{q}_i + (\tilde{H} - H) dt$$

o,

$$d\left[\mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) - \sum_i p_i q_i\right] = -\sum_i q_i dp_i - \sum_i \tilde{p}_i d\tilde{q}_i + (\tilde{H} - H) dt$$

donde el argumento del diferencial en el miembro izquierdo es $\mathcal{F}_3(p_i, \tilde{q}_i, t)$ obtenido mediante una transformación de Legendre, es decir,

$$\mathcal{F}_3(p_i, \tilde{q}_i, t) = \mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) - \sum_i p_i q_i$$

por lo tanto,

$$d\mathcal{F}_3 = -\sum_i q_i dp_i - \sum_i \tilde{p}_i d\tilde{q}_i + (\tilde{H} - H) dt \quad (7.17)$$

y, por otro lado, el diferencial total de \mathcal{F}_3 puede desarrollarse en la forma,

$$d\mathcal{F}_3 = \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \tilde{q}_i} d\tilde{q}_i + \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial t} dt \quad (7.18)$$

Ahora, al comparar (7.18) con (7.17) resulta,

$$q_i = -\frac{\partial}{\partial p_i} \mathcal{F}_3(p_i, \tilde{q}_i, t) \quad (7.19)$$

$$\tilde{p}_i = -\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_i} \mathcal{F}_3(p_i, \tilde{q}_i, t) \quad (7.20)$$

y,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_3(p_i, \tilde{q}_i, t) \quad (7.21)$$

Aquí, las ecuaciones (7.19) dan las \tilde{q}_i como funciones de las q_i , p_i y t , que corresponden a la primera mitad de las ecuaciones de transformación (7.1), y las (7.20) los \tilde{p}_i en función de las q_i , p_i y t proporcionando la mitad restante.

7.2.4. Caso 4: Función generatriz $\mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_4(p_i, \tilde{p}_i, t)$

Finalmente, si las variables independientes de \mathcal{F} han de ser las p_i y \tilde{p}_i la función generatriz será del tipo \mathcal{F}_4 .

A partir de (7.7) se tiene que,

$$d\mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) = d\left(\sum_i p_i q_i\right) - \sum_i q_i dp_i - \left[d\left(\sum_i \tilde{p}_i \tilde{q}_i\right) - \sum_i \tilde{q}_i d\tilde{p}_i \right] + (\tilde{H} - H) dt$$

o,

$$d\left[\mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) + \sum_i \tilde{p}_i \tilde{q}_i - \sum_i p_i q_i\right] = -\sum_i q_i dp_i + \sum_i \tilde{q}_i d\tilde{p}_i + (\tilde{H} - H) dt$$

donde el argumento del diferencial en el miembro izquierdo es $\mathcal{F}_4(p_i, \tilde{p}_i, t)$ obtenido mediante una transformación de Legendre, es decir,

$$\mathcal{F}_4(p_i, \tilde{p}_i, t) = \mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t) + \sum_i \tilde{p}_i \tilde{q}_i - \sum_i p_i q_i$$

por lo tanto,

$$d\mathcal{F}_4 = -\sum_i q_i dp_i + \sum_i \tilde{q}_i d\tilde{p}_i + (\tilde{H} - H) dt \quad (7.22)$$

y, por otro lado, el diferencial total de \mathcal{F}_4 puede desarrollarse en la forma,

$$d\mathcal{F}_4 = \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial \tilde{p}_i} d\tilde{p}_i + \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial t} dt \quad (7.23)$$

Ahora, al comparar (7.23) con (7.22) resulta,

$$q_i = -\frac{\partial}{\partial p_i} \mathcal{F}_4(p_i, \tilde{p}_i, t) \quad (7.24)$$

$$\tilde{q}_i = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_i} \mathcal{F}_4(p_i, \tilde{p}_i, t) \quad (7.25)$$

y,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_4(p_i, \tilde{p}_i, t) \quad (7.26)$$

Por último, las ecuaciones (7.24) dan los \tilde{p}_i como funciones de las q_i , p_i y t , proporcionando la segunda mitad de las ecuaciones de transformación (7.1) y las (7.25) determinan las \tilde{q}_i en función de las antiguas variables proporcionando así la mitad restante.

La siguiente tabla resume todo lo obtenido anteriormente,

Función generatriz	Ecuaciones de transformación
$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(q_i, \tilde{q}_i, t)$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i}, \tilde{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \tilde{q}_i}$
$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t)$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}, \tilde{q}_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \tilde{p}_i}$
$\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_3(p_i, \tilde{q}_i, t)$	$q_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial p_i}, \tilde{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \tilde{q}_i}$
$\mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_4(p_i, \tilde{p}_i, t)$	$q_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial p_i}, \tilde{q}_i = \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial \tilde{p}_i}$

Ejemplo 7.1

Considérese una función generatriz del segundo caso con la forma particular

$$\mathcal{F}_2 = \sum_i q_i \tilde{p}_i$$

Encuéntrense las transformaciones canónicas.

Solución: A partir de las ecuaciones (7.14), (7.14) y (7.14) resulta respectivamente,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_j q_j \tilde{p}_j \right) = \tilde{p}_i$$

$$\tilde{q}_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_i} \left(\sum_j q_j \tilde{p}_j \right) = q_i$$

y,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_j q_j \tilde{p}_j \right) = H$$

de aquí que,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_i &= q_i \\ \tilde{p}_i &= p_i \end{aligned} \right\}$$

$$\tilde{H} = H$$

de donde se observa que las coordenadas antiguas y nuevas son las mismas.

De lo anterior, se nota que \mathcal{F}_2 genera la *transformación identidad*, expresando que este tipo de transformación es canónica.

Ejemplo 7.2

Considérese una función generatriz del segundo caso con la forma más general

$$\mathcal{F}_2 = \sum_i f_i(q_i, t) \tilde{p}_i$$

donde las f_i son funciones arbitrarias. Encuéntrense las transformaciones canónicas.

Solución: A partir de las ecuaciones (7.14), (7.14) y (7.14) resulta respectivamente,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_j f_j(q_i, t) \tilde{p}_j \right) = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \tilde{p}_j$$

$$\tilde{q}_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_i} \left(\sum_j f_j(q_i, t) \tilde{p}_j \right) = f_i(q_i, t)$$

y,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_j f_j(q_i, t) \tilde{p}_j \right) = H + \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial t} \tilde{p}_j$$

de aquí que,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_i &= f_i(q_i, t) \\ \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \tilde{p}_j &= p_i \end{aligned} \right\}$$

$$\tilde{H} = H + \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial t} \tilde{p}_j$$

por lo tanto, con esta función generatriz las nuevas coordenadas \tilde{q}_i sólo dependen de las antiguas y del tiempo, pero no de los momentos antiguos.

La anterior transformación es un ejemplo de las transformaciones puntuales definidas por $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_i, t)$ y, como las f_i son totalmente arbitrarias, se puede concluir que todas las transformaciones puntuales son canónicas.

Ejemplo 7.3

Las transformaciones ortogonales son casos especiales de transformaciones puntuales con,

$$f_i = \tilde{q}_i = \sum_l \lambda_{il} q_l$$

donde los λ_{il} son los elementos de la matriz de transformación que cumplen con la condición de ortogonalidad,

$$\sum_l \lambda_{il} \lambda_{ml} = \delta_{im}$$

Encuéntrense las transformaciones canónicas.

Solución: En base al ejemplo anterior, se puede escribir la función generatriz como,

$$\mathcal{F}_2 = \sum_{i,l} \lambda_{il} q_l \tilde{p}_i$$

de manera que, a partir de las ecuaciones (7.14),

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{m,l} \lambda_{ml} q_l \tilde{p}_m \right) = \sum_{m,l} \lambda_{ml} \frac{\partial q_l}{\partial q_i} \tilde{p}_m = \sum_{m,l} \lambda_{ml} \delta_{li} \tilde{p}_m = \sum_m \lambda_{mi} \tilde{p}_m$$

de las cuales se puede despejar las \tilde{p}_m multiplicando por λ_{li} y sumando sobre i en ambos miembros,

$$\sum_i p_i \lambda_{li} = \sum_{i,m} \lambda_{mi} \lambda_{li} \tilde{p}_m = \sum_m \delta_{ml} \tilde{p}_m = \tilde{p}_l$$

y además, de las (7.14),

$$\tilde{q}_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_i} \left(\sum_{m,l} \lambda_{ml} q_l \tilde{p}_m \right) = \sum_{m,l} \lambda_{ml} q_l \frac{\partial \tilde{p}_m}{\partial \tilde{p}_i} = \sum_l \lambda_{il} q_l$$

Por último, de (7.14) resulta,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{m,l} \lambda_{ml} q_l \tilde{p}_m \right) = H$$

de aquí que,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_i &= \sum_l \lambda_{il} q_l \\ \tilde{p}_l &= \sum_i p_i \lambda_{li} \end{aligned} \right\}$$

$$\tilde{H} = H$$

de manera que los momentos también se transforman ortogonalmente, según cabía esperar a priori.

De todo lo anterior se puede decir que las transformaciones ortogonales son transformaciones canónicas.

Ejemplo 7.4

Considérese una función generatriz del primer caso, de la forma,

$$\mathcal{F}_1 = \sum_i q_i \tilde{q}_i$$

Encuéntrense las transformaciones canónicas.

Solución: A partir de las ecuaciones (7.9), (7.10) y (7.11) resulta respectivamente,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_l q_l \tilde{q}_l \right) = \tilde{q}_i$$

$$\tilde{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \tilde{q}_i} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_i} \left(\sum_l q_l \tilde{q}_l \right) = -q_i$$

y,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = H + \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_l q_l \tilde{q}_l \right) = H$$

de aquí que,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_i &= p_i \\ \tilde{p}_i &= -q_i \end{aligned} \right\}$$

$$\tilde{H} = H$$

Esta transformación permuta coordenadas y momentos, es una transformación de intercambio; las nuevas coordenadas son los antiguos momentos, mientras que los nuevos momentos son esencialmente las antiguas coordenadas, poniendo de manifiesto la independencia entre las coordenadas y momentos generalizados.

En efecto, se puede ver que esta transformación de intercambio es canónica a partir de las ecuaciones de Hamilton (6.8),

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\}$$

puesto que, al sustituir los p_i por q_i , las ecuaciones conservan su forma canónica sin más que cambiar las q_i por los $-p_i$.

Ejemplo 7.5

Demostrar que la transformación,

$$\tilde{p} = \frac{1}{2} (p^2 + q^2), \quad \tilde{q} = \tan^{-1} \left(\frac{q}{p} \right)$$

es canónica.

Solución: Una transformación es canónica si es capaz de mantener la forma de las ecuaciones de Hamilton. Pártase suponiendo que \tilde{p} y \tilde{q} son canónicas, por lo tanto,

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} \quad (7.27)$$

$$\dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \quad (7.28)$$

y al hallar todas las derivadas planteadas (teniendo presente que $\tilde{H} = H[q(\tilde{q}, \tilde{p}), p(\tilde{q}, \tilde{p})]$ por no haber dependencia explícita respecto al tiempo puesto que en las transformaciones dadas no lo hay) resulta,

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \dot{p} \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tilde{p}} \quad (7.30)$$

$$\dot{\tilde{p}} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \dot{p} \quad (7.31)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} = \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \tilde{q}} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tilde{q}} \quad (7.32)$$

Por otro lado, de las ecuaciones de transformación dadas,

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} = \frac{p}{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} = -\frac{q}{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} = q, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} = p \quad (7.33)$$

y, al hallar la derivada parcial de las ecuaciones de transformación respecto a \tilde{p} y \tilde{q} respectivamente,

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{p}} = 1 = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tilde{p}} = \underbrace{q \frac{\partial q}{\partial \tilde{p}} + p \frac{\partial p}{\partial \tilde{p}}}_{\text{Por (7.33)}} \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{p}} = 0 = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tilde{p}} = \underbrace{\frac{p}{p^2 + q^2} \frac{\partial q}{\partial \tilde{p}} - \frac{q}{p^2 + q^2} \frac{\partial p}{\partial \tilde{p}}}_{\text{Por (7.33)}} \quad (7.35)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{q}} = 0 = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \tilde{q}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tilde{q}} = \underbrace{q \frac{\partial q}{\partial \tilde{q}} + p \frac{\partial p}{\partial \tilde{q}}}_{\text{Por (7.33)}} \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{q}} = 1 = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \tilde{q}} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tilde{q}} = \underbrace{\frac{p}{p^2 + q^2} \frac{\partial q}{\partial \tilde{q}} - \frac{q}{p^2 + q^2} \frac{\partial p}{\partial \tilde{q}}}_{\text{Por (7.33)}} \quad (7.37)$$

de las cuales se obtiene,

$$\frac{\partial q}{\partial \tilde{q}} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial \tilde{q}} = -q, \quad \frac{\partial q}{\partial \tilde{p}} = \frac{q}{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial \tilde{p}} = \frac{p}{p^2 + q^2} \quad (7.38)$$

Ahora, al sustituir (7.33) y (7.38) en las ecuaciones (7.29) a (7.32), resulta,

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{p}{p^2 + q^2} \dot{q} + -\frac{q}{p^2 + q^2} \dot{p} \tag{7.39}$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = \frac{q}{p^2 + q^2} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{p}{p^2 + q^2} \frac{\partial H}{\partial p} \tag{7.40}$$

$$\dot{\tilde{p}} = q\dot{q} + p\dot{p} \tag{7.41}$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} = p \frac{\partial H}{\partial q} - q \frac{\partial H}{\partial p} \tag{7.42}$$

y finalmente, al sustituir las ecuaciones (7.39) a (7.40) en (7.27) y (7.28) donde corresponda, resulta,

$$p\dot{q} + -q\dot{p} = q \frac{\partial H}{\partial q} + p \frac{\partial H}{\partial p} \tag{7.43}$$

$$q\dot{q} + p\dot{p} = -p \frac{\partial H}{\partial q} + q \frac{\partial H}{\partial p} \tag{7.44}$$

de las cuales se obtiene,

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \right\} \tag{7.45}$$

Estas ecuaciones son correctas ya que de antemano se sabe que q y p son canónicas. Con esto queda mostrado que las transformaciones dadas son canónicas.

.....

Otra forma de mostrar que la transformación dada es canónica es verificando que

$$\sum_i p_i dq_i - \sum_i \tilde{p}_i d\tilde{q}_i$$

es una diferencial exacta. En efecto, para el anterior ejemplo se tiene que $i = 1$,

$$\begin{aligned} pdq - \tilde{p}d\tilde{q} &= pdq - \frac{1}{2} (p^2 + q^2) \left(\frac{pdq - qdp}{p^2 + q^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (pdq + qdp) = d \left(\frac{1}{2} pq \right) \end{aligned}$$

que es una diferencial exacta, por lo tanto la transformación es canónica.

.....

Ejemplo 7.6

Considerar la transformación canónica generada por la función generatriz del tipo del caso 1,

$$\mathcal{F}_1 = \frac{m}{2} \omega q^2 \cot \tilde{q}$$

en la resolución del oscilador armónico unidimensional. Aquí m es la masa de la partícula que oscila y $\omega = \sqrt{K/m}$ con K la constante recuperadora de la fuerza.

Solución: A partir de las ecuaciones (7.9), (7.10) y (7.11) resulta respectivamente,

$$p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{m}{2} \omega q^2 \cot \tilde{q} \right) = m \omega q \cot \tilde{q} \quad (7.46)$$

$$\tilde{p} = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \tilde{q}} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \left(\frac{m}{2} \omega q^2 \cot \tilde{q} \right) = \frac{m \omega q^2}{2 \text{Sen}^2 \tilde{q}} \quad (7.47)$$

y,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = H + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{2} \omega q^2 \cot \tilde{q} \right) = H \quad (7.48)$$

Las ecuaciones (7.46) y (7.47) permiten obtener \tilde{q} y \tilde{p} en función de q y p , pero para el presente propósito conviene más expresar las antiguas variables en función de las nuevas. Según (7.47), q está dada por,

$$q = \sqrt{\frac{2\tilde{p}}{m\omega}} \text{Sen } \tilde{q} \quad (7.49)$$

que sustituida en (7.46), proporciona,

$$p = \sqrt{2m\omega\tilde{p}} \text{Cos } \tilde{q} \quad (7.50)$$

Como la función generatriz \mathcal{F}_1 no depende explícitamente del tiempo, el valor del Hamiltoniano (ver (7.48)) no es afectado por la transformación y bastará con expresar H en función de las nuevas variables \tilde{q} y \tilde{p} mediante las ecuaciones (7.49) y (7.50). La energía potencial del oscilador viene dada por,

$$U = \frac{1}{2} K q^2$$

de manera que el Hamiltoniano tiene la forma,

$$H = T + U = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} K q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (7.51)$$

Ahora, al sustituir (7.49) y (7.50) en (7.51), se obtiene el Hamiltoniano en función de las nuevas variables,

$$H = \omega \tilde{p} \quad (7.52)$$

observándose que es cíclico en \tilde{q} implicando que el momento conjugado \tilde{p} es constante. En efecto, según (7.52),

$$\tilde{p} = \frac{E}{\omega}$$

La ecuación de movimiento para \tilde{q} ((6.8) para las nuevas variables) se reduce a la forma sencilla,

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}} = \omega$$

con la solución inmediata,

$$\tilde{q} = \omega t + \alpha$$

donde α es una constante de integración que puede ser determinada por las condiciones iniciales. Ahora bien, de (7.49) la solución para q es,

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \text{Sen}(\omega t + \alpha) \tag{7.53}$$

que es la conocida solución para el oscilador armónico.

.....

Lo más probable es que el procedimiento usado respecto al problema escogido parezca como "clavar una tachuela usando una mandarina". Sin embargo, suministra un ejemplo sencillo de cómo reducir el Hamiltoniano, mediante transformaciones canónicas, a una forma en que todas las coordenadas son cíclicas.

7.3. Invariante integral universal de Poincaré

Como ya se vio, las transformaciones canónicas se definen como aquellas que conservan la forma de las ecuaciones de Hamilton. Ahora se plantea la siguiente interrogante,

¿Existirán otras expresiones que sean invariantes respecto de las transformaciones canónicas además de las ecuaciones de Hamilton?

La respuesta es SI. Poincaré² halló un conjunto de ellas, llamadas *invariantes integrales*.

²Jules Henri Poincaré (Nancy, Francia, 29 de abril de 1854 – París, 17 de julio de 1912), generalmente conocido como Henri Poincaré, fue un prestigioso matemático, científico teórico y filósofo de la ciencia. Poincaré es descrito a menudo como el último «universalista» (después de Gauss) capaz de entender y contribuir en todos los ámbitos de la disciplina matemática. En 1894 descubrió el grupo fundamental de un espacio topológico.

Poincaré llamó "invariante integral" a cualquier integral asociada al espacio de fase que se mantuviera constante a lo largo del movimiento del sistema.

El teorema de Poincaré dice que:

La integral,

$$J_1 = \int_S \int \sum_i dq_i dp_i \quad (7.54)$$

es invariante un invariante canónico, indicando por S que las integrales se han de calcular sobre una superficie arbitraria bidimensional del espacio de fase.

Demostración:

Iníciase la demostración con la observación de que la posición de un punto en una superficie bidimensional queda completamente determinada por sólo dos parámetros. Sean u y v tales parámetros, apropiados a la superficie S , de modo que sobre ésta $q_i = q_i(u, v)$ y $p_i = p_i(u, v)$. Como se sabe del cálculo elemental, el elemento de área $dq_i dp_i$ se transforma en el elemento de área $dudv$ mediante el Jacobiano,

$$\frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial p_i}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial p_i}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (7.55)$$

de acuerdo con la relación,

$$dq_i dp_i = \frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (u, v)} dudv \quad (7.56)$$

Se quiere mostrar que J_1 es invariante bajo una transformación canónica, por lo tanto, una forma de hacerlo es partiendo de que el teorema es cierto. Así pues, la afirmación de que J_1 tiene el mismo valor para todas las coordenadas canónicas se puede escribir como,

$$\int_S \int \sum_i dq_i dp_i = \int_S \int \sum_j d\tilde{q}_j d\tilde{p}_j \quad (7.57)$$

que, en virtud de (7.56), puede expresarse como,

$$\int_S \int \sum_i \frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (u, v)} dudv = \int_S \int \sum_j \frac{\partial (\tilde{q}_j, \tilde{p}_j)}{\partial (u, v)} dudv \quad (7.58)$$

y como la región de integración es arbitraria, las integrales sólo serán iguales si los integrandos son idénticos, por lo tanto,

$$\sum_i \frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (u, v)} = \sum_j \frac{\partial (\tilde{q}_j, \tilde{p}_j)}{\partial (u, v)} \quad (7.59)$$

Como se puede ver, la demostración de la invariancia de J_1 se ha reducido a demostrar que la suma de los Jacobianos es invariante. Para demostrar esto, se partirá del primer miembro de (7.59) para llegar al segundo miembro de la misma.

Por conveniencia, se supondrá que la transformación canónica de las q_i, p_i a las \tilde{q}_i, \tilde{p}_i tiene como función generatriz \mathcal{F} una del tipo del caso 2 (ver sección 7.2.2), es decir, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t)$ (esta suposición no es limitante pues puede efectuarse la demostración usando otras funciones generatrices).

Los elementos de la segunda columna del determinante en el primer miembro de (7.59) (ver también (7.55)) se expresan entonces en función de las nuevas variables mediante la función generatriz. Según (7.14) se tiene que,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t)}{\partial q_i} \rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial \mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t)}{\partial q_i} \right] \\ \frac{\partial p_i}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\partial \mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t)}{\partial q_i} \right] \end{aligned} \quad (7.60)$$

donde las magnitudes entre corchetes son funciones sólo de u y v a través de las variables q_i y \tilde{p}_i , por lo que,

$$\frac{\partial p_i}{\partial u} = \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial \tilde{p}_l} \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial u} + \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial u} \quad (7.61)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial v} = \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial \tilde{p}_l} \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial v} + \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial v} \quad (7.62)$$

por lo que se puede escribir el primer miembro de (7.59) como,

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_i \left| \begin{array}{c} \frac{\partial q_i}{\partial u} \quad \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial \tilde{p}_l} \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial u} + \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} \quad \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial \tilde{p}_l} \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial v} + \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial v} \end{array} \right| \quad (7.63)$$

Ahora, en virtud de la regla del cálculo de determinantes (ver apéndice D) que dice,

Si los elementos de una fila (columna) de una matriz se pueden descomponer en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen iguales todas las filas (columnas) excepto dicha fila (columna) cuyos sumandos pasan, respectivamente, a cada uno de los determinantes.

entonces,

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_i \left| \begin{array}{c} \frac{\partial q_i}{\partial u} \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial \tilde{p}_l} \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial \tilde{p}_l} \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial v} \end{array} \right| + \sum_i \left| \begin{array}{c} \frac{\partial q_i}{\partial u} \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial v} \end{array} \right| \quad (7.64)$$

y en virtud de otra regla del cálculo de determinantes que dice,

Si los elementos de una fila (columna) de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

resulta,

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \underbrace{\sum_{i,l} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial \tilde{p}_l} \left| \begin{array}{c} \frac{\partial q_i}{\partial u} \quad \frac{\partial q_l}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} \quad \frac{\partial q_l}{\partial v} \end{array} \right|}_{\text{Antisimétrica al permutar los índices } i \text{ y } l} + \sum_{i,l} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial q_l} \left| \begin{array}{c} \frac{\partial q_i}{\partial u} \quad \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} \quad \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial v} \end{array} \right| \quad (7.65)$$

Los términos de la primera suma, como se puede notar por simple inspección, son antisimétricos al permutar i y l , pues al hacerlo se intercambian las columnas del determinante (si en una matriz cuadrada se permutan dos filas(columnas), su determinante cambia de signo). De esta manera, es fácil notar que toda la suma se anula! porque siempre cada término de la suma tendrá su contraparte de signo contrario, así el valor de la suma no queda afectado si se cambia $q_i \rightarrow \tilde{p}_i$ y $q_l \rightarrow \tilde{p}_l$ pues la suma seguirá siendo nula,

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_{i,l} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial \tilde{p}_i \partial \tilde{p}_l} \left| \begin{array}{c} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial u} \quad \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial v} \quad \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial v} \end{array} \right| + \sum_{i,l} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial q_l} \left| \begin{array}{c} \frac{\partial q_i}{\partial u} \quad \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} \quad \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial v} \end{array} \right| \quad (7.66)$$

Se revertirá ahora el proceso que permitió pasar de (7.63) a (7.66). Para hacer esto, se aplicarán las propiedades que se han usado de los determinantes, pero en sentido inverso en su orden de aplicación, pero ahora la suma se hará respecto i y no a l . Entonces, a partir de (7.66),

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_l \left| \begin{array}{c} \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial \tilde{p}_i \partial \tilde{p}_l} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial u} \quad \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial u} \\ \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial \tilde{p}_i \partial \tilde{p}_l} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial v} \quad \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial v} \end{array} \right| + \sum_l \left| \begin{array}{c} \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial q_i}{\partial u} \quad \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial u} \\ \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial q_i}{\partial v} \quad \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial v} \end{array} \right|$$

O,

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_l \left| \begin{array}{c} \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial \tilde{p}_i \partial \tilde{p}_l} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial u} + \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial q_i}{\partial u} \quad \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial u} \\ \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial \tilde{p}_i \partial \tilde{p}_l} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial v} + \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial q_i}{\partial v} \quad \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial v} \end{array} \right| \quad (7.67)$$

pero,

$$\sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial \tilde{p}_i \partial \tilde{p}_i} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial u} + \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial q_i \partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} \right) = \underbrace{\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial u}}_{\text{por (7.15)}} \quad (7.68)$$

por lo tanto, al sustituir (7.68) en (7.67) resulta,

$$\sum_i \frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (u, v)} = \sum_l \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \tilde{q}_l}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{q}_l}{\partial v} & \frac{\partial \tilde{p}_l}{\partial v} \end{array} \right| = \sum_l \frac{\partial (\tilde{q}_l, \tilde{p}_l)}{\partial (u, v)} \quad (7.69)$$

que es el segundo miembro de (7.59), demostrándose así el teorema de Poincaré.

De una forma análoga, pero aún más complicada, se demuestra que,

$$J_2 = \int \int_S \int \int \sum_{i,l} dq_i dp_i dq_l dp_l \quad (7.70)$$

es invariante respecto de una transformación canónica, donde S es una superficie arbitraria tetradimensional en el espacio de fase de $2s$ dimensiones.

Puede prolongarse esta cadena de invariantes integrales llegando finalmente a,

$$J_n = \int \cdots \int dq_1 \cdots dq_s dp_1 \cdots dp_s \quad (7.71)$$

donde la integral se halla extendida a una región arbitraria del espacio de fase.

La invariancia de J_n equivale a decir que el volumen en el espacio de fase es invariante respecto de las transformaciones canónicas.

7.4. Corchetes de Lagrange y Poisson

7.4.1. Corchetes de Lagrange

La condición de invariancia de la suma de los jacobianos (7.59) puede escribirse como,

$$\sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial u} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial v} - \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial u} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial v} \right) \quad (7.72)$$

Cada uno de los miembros de la anterior expresión define lo que se denomina *corchete de Lagrange* de u y v , representado por,

$$\{u, v\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) \quad (7.73)$$

de manera que, en virtud de (7.72), se puede decir que los corchetes de Lagrange son invariantes canónicos. Por lo tanto, es indiferente el conjunto de variables canónicas que se utilice para expresar los corchetes de Lagrange, por esta razón en adelante serán omitidos los subíndices q y p . Es fácil probar que se cumple la siguiente relación general,

$$\{u, v\} = -\{v, u\} \quad (7.74)$$

indicando que los corchetes de Lagrange son antisimétricos.

Recuérdese de la sección 7.3 que u y v son las coordenadas de una región bidimensional del espacio de fase, de manera que no hay ningún inconveniente en considerar como tal región el plano $q_i, q_j; p_i, p_j$ o q_i, p_j . Por lo tanto, se pueden verificar (por cálculo directo) los llamados *corchetes de Lagrange fundamentales*,

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad (7.75)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0 \quad (7.76)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (7.77)$$

recordándose que las q_i, p_i son tratadas como variables independientes en el formalismo Hamiltoniano. Estas expresiones son evidentemente válidas para todos los conjuntos de variables canónicas.

7.4.2. Corchetes de Poisson

Aún más que los corchetes de Lagrange, son los llamados *corchetes de Poisson*³, que son definidos por,

$$[u, v]_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) \quad (7.78)$$

verificándose, en analogía con (7.74), la identidad,

$$[u, v] = -[v, u] \quad (7.79)$$

indicando, al igual que los corchetes de Lagrange, que los corchetes de Lagrange son antisimétricos.

Al igual que con los corchetes de Lagrange, u y v son las coordenadas de una región bidimensional del espacio de fase, de manera al considerar como tal región

³Siméon Denis Poisson (Pithiviers, Francia, 21 de junio de 1781-Sceaux, Francia, 25 de abril de 1840), fue un físico y matemático francés al que se le conoce por sus diferentes trabajos en el campo de la electricidad, también hizo publicaciones sobre la geometría diferencial y la teoría de probabilidades.

el plano $q_i, q_j; p_i, p_j$ o q_i, p_j , se pueden verificar (por cálculo directo) los llamados *corchetes de Poisson fundamentales*,

$$[q_i, q_j] = 0 \quad (7.80)$$

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (7.81)$$

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij} \quad (7.82)$$

En base a las expresiones (7.73) y (7.78) es de esperarse que exista una estrecha relación entre los corchetes de Lagrange y de Poisson. En efecto, si se consideran únicamente como expresiones matemáticas, prescindiendo de cualquier significado físico, puede demostrarse el siguiente teorema,

Si $u_l, l = 1, \dots, 2s$ es un conjunto de $2s$ funciones independientes, tales que cada u es función de las $2s$ variables $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$, se cumple que,

$$\sum_l^{2s} \{u_l, u_i\} [u_l, u_j] = \delta_{ij} \quad (7.83)$$

La demostración de este teorema no es en realidad difícil, pero si es algo laboriosa:

Demostración:

$$\begin{aligned} \sum_l^{2s} \{u_l, u_i\} [u_l, u_j] &= \sum_l^{2s} \left[\underbrace{\sum_k^s \left(\frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} - \frac{\partial p_k}{\partial u_l} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \right) \sum_m^s \left(\frac{\partial u_l}{\partial q_m} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} - \frac{\partial u_l}{\partial p_m} \frac{\partial u_j}{\partial q_m} \right)}_{\text{Por (7.73) y (7.78)}} \right] \\ &= \sum_l^{2s} \sum_{k,m}^s \left[\left(\frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} - \frac{\partial p_k}{\partial u_l} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \right) \left(\frac{\partial u_l}{\partial q_m} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} - \frac{\partial u_l}{\partial p_m} \frac{\partial u_j}{\partial q_m} \right) \right] \\ &= \underbrace{\sum_l^{2s} \sum_{k,m}^s \frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_l}{\partial q_m} \frac{\partial u_j}{\partial p_m}}_{\text{Término 1}} - \underbrace{\sum_l^{2s} \sum_{k,m}^s \frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_l}{\partial p_m} \frac{\partial u_j}{\partial q_m}}_{\text{Término 2}} \\ &\quad - \underbrace{\sum_l^{2s} \sum_{k,m}^s \frac{\partial p_k}{\partial u_l} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_l}{\partial q_m} \frac{\partial u_j}{\partial p_m}}_{\text{Término 3}} + \underbrace{\sum_l^{2s} \sum_{k,m}^s \frac{\partial p_k}{\partial u_l} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_l}{\partial p_m} \frac{\partial u_j}{\partial q_m}}_{\text{Término 4}} \quad (7.84) \end{aligned}$$

Primero se simplificarán cada uno de los términos indicados.

Término 1:

$$\text{Término 1} = \sum_l^{2s} \sum_{k,m}^s \frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_l}{\partial q_m} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} = \sum_{k,m}^s \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} \sum_l^{2s} \frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial q_m}$$

pero, es fácil ver que,

$$\sum_l^{2s} \frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial q_m} = \frac{\partial q_k}{\partial q_m} = \delta_{km}$$

entonces,

$$\text{Término 1} = \sum_{k,m}^s \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} \delta_{km} = \sum_k^s \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial p_k} \quad (7.85)$$

Término 2:

$$\text{Término 2} = \sum_l^{2s} \sum_{k,m}^s \frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_l}{\partial p_m} \frac{\partial u_j}{\partial q_m} = \sum_{k,m}^s \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial q_m} \sum_l^{2s} \frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial p_m}$$

pero,

$$\sum_l^{2s} \frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial p_m} = \frac{\partial q_k}{\partial p_m} = 0$$

recordándose que en el formalismo Hamiltoniano las q_i y los p_i son variables totalmente independientes. Entonces,

$$\text{Término 2} = 0 \quad (7.86)$$

Término 3: Procediendo de forma análoga que con el término 1,

$$\text{Término 3} = \sum_k^s \frac{\partial u_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \quad (7.87)$$

Término 4: Procediendo de forma análoga que con el término 2,

$$\text{Término 4} = 0 \quad (7.88)$$

Ahora, al sustituir los resultados (7.85) al (7.88) en (7.84), resulta,

$$\sum_l^{2s} \{u_l, u_i\} [u_l, u_j] = \sum_k^s \left(\frac{\partial u_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} + \frac{\partial u_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \right) = \frac{\partial u_j}{\partial u_i} = \delta_{ij}$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

La demostración anterior es independiente del particular sistema coordinado q_i , p_i elegido; cualquier otro sistema de $2s$ coordenadas independientes \tilde{q}_i y \tilde{p}_i hubiese servido de la misma forma. Por tal razón, (7.83) es invariante respecto a todas las transformaciones de coordenadas, sean o no canónicas.

Por lo anteriormente expuesto, este teorema permite calcular ciertos corchetes de Poisson sin necesidad de utilizar un sistema coordenado particular. Si se eligen como funciones u_l el conjunto de $2s$ funciones $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$, entonces:

1. Al hacer que las u_i sean las p_i y las u_j las q_j , (7.83) puede ser escrita como,

$$\underbrace{\sum_l^s \{q_l, p_i\} [q_l, q_j]}_{\text{cuando las } u_l \text{ son las } q_l} + \underbrace{\sum_l^s \{p_l, p_i\} [p_l, q_j]}_{\text{cuando las } u_l \text{ son los } p_l} = \delta_{ij}$$

que en virtud de (7.76) y (7.77) (teniendo presente (7.74)) se obtiene (7.80).

2. Al hacer que las u_i sean las q_i y las u_j los p_j , (7.83) puede ser escrita como,

$$\underbrace{\sum_l^s \{q_l, q_i\} [q_l, p_j]}_{\text{cuando las } u_l \text{ son las } q_l} + \underbrace{\sum_l^s \{p_l, q_i\} [p_l, p_j]}_{\text{cuando las } u_l \text{ son los } p_l} = \delta_{ij}$$

que en virtud de (7.75) y (7.77) (teniendo presente (7.74)) se obtiene (7.81).

3. Por último, al hacer que las u_i sean las q_i y las u_j las q_j , (7.83) puede ser escrita como,

$$\underbrace{\sum_l^s \{q_l, q_i\} [q_l, q_j]}_{\text{cuando las } u_l \text{ son las } q_l} + \underbrace{\sum_l^s \{p_l, q_i\} [p_l, q_j]}_{\text{cuando las } u_l \text{ son los } p_l} = \delta_{ij}$$

que en virtud de (7.75) y (7.77) (teniendo presente (7.74)) se obtiene (7.82).

De lo anterior, debido a la naturaleza del teorema expresado por (7.83), queda claro que los corchetes fundamentales de Poisson no dependen del conjunto particular de variables canónicas escogidas en su deducción, demostrándose así que son invariantes canónicos.

Sólo queda por mostrar que el valor de cualquier corchete de Poisson es independiente del sistema coordenado en que esté expresado. Para mostrarlo, se empleará la ya mostrada independencia de los corchetes de Poisson fundamentales. Si $F = F(q_i, p_i, t)$ y $G = G(q_i, p_i, t)$ son dos funciones arbitrarias, su corchete de Poisson respecto del sistema q, p es,

$$[F, G]_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \tag{7.89}$$

y, respecto del sistema \tilde{q}, \tilde{p} (que es una transformación canónica del sistema q, p),

$$[F, G]_{\tilde{q}, \tilde{p}} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}_i} \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_i} - \frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_i} \frac{\partial G}{\partial \tilde{q}_i} \right) \quad (7.90)$$

ahora, considerando q_i y p_i como funciones del conjunto de variables transformadas \tilde{q}_j, \tilde{p}_j , se quiere mostrar que,

$$[F, G]_{q,p} = [F, G]_{\tilde{q}, \tilde{p}} \quad (7.91)$$

En efecto, se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial p_i} &= \sum_j \frac{\partial G}{\partial \tilde{q}_j} \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} + \sum_j \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_j} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial p_i} \\ \frac{\partial G}{\partial q_i} &= \sum_j \frac{\partial G}{\partial \tilde{q}_j} \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_j} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_i} \end{aligned}$$

por lo tanto la expresión (7.89) se puede escribir como,

$$[F, G]_{q,p} = \sum_{i,j} \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \left(\frac{\partial G}{\partial \tilde{q}_j} \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_j} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_i} \left(\frac{\partial G}{\partial \tilde{q}_j} \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i} + \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_j} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_i} \right) \right]$$

que, reagrupando adecuadamente los términos, se convierte en,

$$[F, G]_{q,p} = \sum_j \left(\frac{\partial G}{\partial \tilde{q}_j} [F, \tilde{q}_j]_{q,p} + \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_j} [F, \tilde{p}_j]_{q,p} \right) \quad (7.92)$$

Esta misma expresión sirve para calcular los corchetes de Poisson que aparecen entre paréntesis. En efecto, si se sustituye F por \tilde{q}_j , y se reemplaza G por F , (7.92) se convierte en,

$$[\tilde{q}_j, F]_{q,p} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial \tilde{q}_i} [\tilde{q}_j, \tilde{q}_i] + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_i} [\tilde{q}_j, \tilde{p}_i]$$

donde se han omitido los subíndices en los corchetes del segundo miembro, por que son precisamente los fundamentales y ya se ha mostrado que estos son invariantes. Como consecuencia de (7.80) y (7.82), la expresión (7.92) se reduce a,

$$[\tilde{q}_j, F]_{q,p} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_i} \delta_{ji}$$

o, en virtud de (7.79),

$$[F, \tilde{q}_j] = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_j} \quad (7.93)$$

que es un resultado canónicamente invariante.

De forma análoga, si se sustituye F por \tilde{p}_j , y se reemplaza G por F , (7.92) se convierte en,

$$[\tilde{p}_j, F]_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}_i} [\tilde{p}_j, \tilde{q}_i] + \frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_i} [\tilde{p}_j, \tilde{p}_i] \right)$$

Como consecuencia de (7.81) y (7.82), la expresión (7.92) se reduce a,

$$[\tilde{p}_j, F]_{q,p} = - \sum_i \frac{\partial F}{\partial \tilde{q}_i} \delta_{ij}$$

o, en virtud de (7.79),

$$[F, \tilde{p}_j] = \frac{\partial F}{\partial \tilde{q}_j} \tag{7.94}$$

Por último, al sustituir (7.93) y (7.94) en (7.92),

$$[F, G]_{q,p} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}_j} \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_j} - \frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_j} \frac{\partial G}{\partial \tilde{q}_j} \right) = [F, G]_{\tilde{q}, \tilde{p}}$$

que demuestra el planteamiento inicial expresado por (7.91).

De todo lo anterior se puede decir que los corchetes de Poisson son invariantes ante transformaciones canónicas o *invariantes canónicos*, por lo que los subíndices pueden ser omitidos.

De lo anterior y de (7.80) a (7.82) también se puede concluir que:

Si se cumple que,

$$[\tilde{q}_i, \tilde{q}_j]_{q,p} = 0 \quad [\tilde{p}_i, \tilde{p}_j]_{q,p} = 0 \quad [\tilde{q}_i, \tilde{p}_j]_{q,p} = \delta_{ij} \tag{7.95}$$

entonces la transformación que pasa del sistema q, p al sistema \tilde{q}, \tilde{p} es canónica.

Ejemplo 7.7

Resolver el ejemplo 7.5 pero ahora desde el punto de vista de las expresiones (7.95).

Solución: Para este caso $i = j = 1$, entonces las expresiones (7.95) quedan escritas como,

$$[\tilde{q}, \tilde{q}]_{q,p} = 0 \quad [\tilde{p}, \tilde{p}]_{q,p} = 0 \quad [\tilde{q}, \tilde{p}]_{q,p} = 1 \tag{7.96}$$

entonces, a partir de la definición de un corchete de Poisson dada por (7.78), las dos primeras se cumplen de forma obvia,

$$[\tilde{q}, \tilde{q}]_{q,p} = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} - \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} = 0 \quad (7.97)$$

$$[\tilde{p}, \tilde{p}]_{q,p} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} = 0 \quad (7.98)$$

y la tercera,

$$[\tilde{q}, \tilde{p}]_{q,p} = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} - \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \quad (7.99)$$

pero,

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} = \frac{p}{p^2+q^2} \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} = p \quad \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} = -\frac{q}{p^2+q^2} \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} = q$$

entonces, al sustituir estos resultados en (7.99) resulta,

$$[\tilde{q}, \tilde{p}]_{q,p} = \frac{p^2}{p^2+q^2} + \frac{q^2}{p^2+q^2} = 1$$

lo cual demuestra que la transformación dada es canónica. En fin, sólo hay que probar la tercera de las expresiones (7.95), ya que las dos primeras son independientes de la forma explícita de la transformación.

.....

Las siguientes son algunas propiedades de los corchetes de Poisson,

1. $[u, u] = 0$.
2. $[u, \alpha] = 0$, donde α es una magnitud que no depende explícitamente de q y/o p .
3. Regla de Leibniz: $\begin{cases} [u, vw] = [u, v]w + v[u, w] \\ [uv, w] = [v, w]u + v[u, w] \end{cases}$.
4. Linealidad: $\begin{cases} [\alpha u, v] = \alpha [u, v] \\ [u + v, w] = [u, w] + [v, w] \end{cases}$, donde α es una magnitud que no depende explícitamente de q y/o p .
5. $\frac{\partial}{\partial t} [u, v] = [\frac{\partial u}{\partial t}, v] + [u, \frac{\partial v}{\partial t}]$
6. Identidad de Jacobi (ver apéndice E), $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$.

Las propiedades 1 hasta la 5 se pueden demostrar fácilmente a partir de la definición de corchete de Poisson (7.78). La 6 puede verificarse directamente por fuerza bruta, pero el cálculo es brutalmente extenso.

7.4.3. Ecuaciones de Hamilton en corchetes de Poisson

Si la función F de (7.93) y (7.94) es el Hamiltoniano, entonces se puede escribir que,

$$[q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (7.100)$$

$$[p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \quad (7.101)$$

que son las ecuaciones canónicas del movimiento o ecuaciones de Hamilton escritas en función de los corchetes de Poisson. Esto pone en evidencia la gran simetría de esta formulación.

Las anteriores expresiones son un caso especial de una expresión general que da la derivada total respecto al tiempo de una función $u(q_i, p_i, t)$. En efecto,

$$\frac{du}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial u}{\partial t}$$

y si se expresan \dot{q}_i y \dot{p}_i en función del Hamiltoniano usando las ecuaciones de Hamilton (6.8)

$$\frac{du}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial t}$$

O,

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.102)$$

y se observa que, evidentemente, las expresiones (7.100) y (7.101) se deducen de esta relación si se hace u igual a q_i y p_i , respectivamente.

Por otro lado, igualando u al Hamiltoniano se obtiene otro resultado conocido, pues según la propiedad 1 de los corchetes de Poisson mencionada en la sección 7.4.2 se tiene que,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

que es idéntica a la expresión (6.10).

Para sistemas en los cuales t no aparece explícitamente en las magnitudes de interés, la derivada total respecto al tiempo se reduce al corchete de Poisson con H . En efecto, si u es una de esas magnitudes de interés, entonces a partir de (7.102),

$$\frac{du}{dt} = [u, H], \text{ si } t \text{ no aparece explícitamente.} \quad (7.103)$$

Por lo tanto, de (7.103) se puede concluir que todas las funciones u cuyo corchete de Poisson con H se anule serán constantes de movimiento y, recíprocamente, los corchetes de las constantes de movimiento con H se anulan. Esto constituye, por lo tanto, un procedimiento general para buscar e identificar las constantes de movimiento del sistema.

La identidad de Jacobi permite, conocidas dos constantes de movimiento, hallar una tercera. Este resultado es conocido como *teorema de Jacobi-Poisson* y establece que,

Si u y v son dos constantes conocidas cualesquiera de movimiento que no dependen explícitamente del tiempo, entonces $[u, v]$ es también una constante de movimiento.

Demostración:

La demostración es sencilla y se basa en la identidad de Jacobi. En efecto, al hacer $w = H$ en la identidad de Jacobi,

$$[u, [v, H]] + [v, [H, u]] + [H, [u, v]] = 0$$

pero,

$$[v, H] = 0 \quad \text{y} \quad [H, u] = 0$$

puesto que los corchetes de una constante de movimiento con H se anulan, quedando,

$$[u, 0] + [v, 0] + [H, [u, v]] = 0$$

y por la segunda propiedad de los corchetes de Poisson,

$$[u, 0] = 0 \quad \text{y} \quad [v, 0] = 0$$

resultando por último,

$$[H, [u, v]] = 0 \tag{7.104}$$

entonces $[u, v]$ es una constante de movimiento, es decir, el corchete de Poisson de dos constantes de movimiento es también una constante de movimiento; ya que todas las funciones (en este caso $[u, v]$) cuyo corchete de Poisson con H se anule serán constantes de movimiento.

Debe entenderse, sin embargo, que la nueva constante de movimiento que se pueda hallar por este procedimiento, bien puede ser idénticamente nula, o conducir a una constante o función de constantes ya conocidas.

7.5. Transformaciones canónicas infinitesimales

Comiécese definiendo lo que es una *transformación canónica infinitesimal*.

Se denomina transformación canónica infinitesimal a aquella transformación canónica que difiere infinitesimalmente de la transformación identidad, es decir, una transformación en la que las nuevas variables sólo se diferencian de las antiguas en un infinitésimo.

En base a lo anteriormente expuesto, se pueden escribir las ecuaciones de transformación como,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_i &= q_i + \delta q_i \\ \tilde{p}_i &= p_i + \delta p_i \end{aligned} \right\} \quad (7.105)$$

cuidándose de tener presente que δq_i y δp_i no representan desplazamientos virtuales, sino sencillamente cambios infinitesimales de las coordenadas y los momentos.

Es evidente pensar que la función generatriz de la transformación sólo diferirá en un infinitésimo de la correspondiente a la identidad, dada por $\mathcal{F}_2 = \sum_i q_i \tilde{p}_i$ estudiada en el ejemplo 6.1. Por lo tanto, la función generatriz podrá escribirse, para el presente caso, como,

$$\mathcal{F}_2 = \sum_i q_i \tilde{p}_i + \epsilon \Omega(q_l, p_l) \quad (7.106)$$

donde ϵ es cierto parámetro infinitesimal de la transformación que permite controlar el valor absoluto de $\delta q_i = |\tilde{q}_i - q_i|$ y $\delta p_i = |\tilde{p}_i - p_i|$ y hacerlo tan pequeño como se desee si las funciones $\Omega(q_l, p_l)$ están acotadas en el rango de interés. En adelante, serán considerados sólo términos hasta el primer orden en ϵ .

Las ecuaciones de transformación se hallan a partir de (7.14) y (7.15),

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_m q_m \tilde{p}_m + \epsilon \Omega(q_l, p_l) \right) = \tilde{p}_i + \epsilon \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}$$

o,

$$\tilde{p}_i = p_i - \epsilon \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}$$

$$\tilde{q}_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_i} \left(\sum_m q_m \tilde{p}_m + \epsilon \Omega(q_l, p_l) \right) = q_i + \epsilon \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{p}_i}$$

cuyo segundo miembro es una mezcla entre las antiguas y nuevas variables. Se quiere dejarlo de tal forma que sólo aparezcan las antiguas, lo cual se logra observando que

el segundo miembro es ya de primer orden en ϵ y los \tilde{p}_i sólo difieren en un infinitésimo de los p_i , entonces es correcto reemplazar $\tilde{p}_i \rightarrow p_i$ en la derivada, quedando,

$$\tilde{q}_i = q_i + \epsilon \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}$$

considerándose ahora Ω únicamente como función de las q_i y p_i . Y además de (7.16),

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = H + \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_m q_m \tilde{p}_m + \epsilon \Omega(q_l, p_l) \right) = H \quad (7.107)$$

de manera que el Hamiltoniano no sufre cambios bajo esta transformación. Por lo tanto, las transformaciones infinitesimales buscadas vendrán dadas por,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_i &= q_i + \epsilon \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \\ \tilde{p}_i &= p_i - \epsilon \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \quad (7.108)$$

y aunque, rigurosamente hablando, el calificativo de función generatriz es sólo reservado para \mathcal{F} , también suele designarse Ω de esta forma.

En virtud de (7.105), las expresiones (7.108) pueden ser escritas como,

$$\left. \begin{aligned} \delta q_i &= \epsilon \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} \\ \delta p_i &= -\epsilon \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \quad (7.109)$$

Una interesante aplicación de las expresiones (7.109) se tiene cuando se considera una transformación canónica infinitesimal en la que $\Omega(q_i, p_i) = H(q_i, p_i)$, siendo ϵ un pequeño intervalo de tiempo dt . En este caso, a partir de (7.109) se tiene,

$$\delta p_i = -\epsilon \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt = \dot{p}_i dt = dp_i \quad (7.110)$$

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt = \dot{q}_i dt = dq_i \quad (7.111)$$

donde se han usado las expresiones (7.19). Con esto se ha mostrado que el Hamiltoniano es el *generador infinitesimal* para la evolución dinámica en el tiempo.

Las expresiones (7.110) y (7.111) proporcionan los valores de las q_i y los p_i en el instante $t + dt$, conocidos los que tienen en el instante t , permitiendo describir el movimiento del sistema en un intervalo dt mediante una transformación canónica infinitesimal generada por el Hamiltoniano. Por consiguiente, el movimiento del sistema en un intervalo finito, comprendido entre t_o y t , vendrá representado por una sucesión de transformaciones canónicas infinitesimales. Como el resultado de dos transformaciones canónicas aplicadas sucesivamente equivale a una sola transformación

canónica, podrán obtenerse los valores de las q_i y los p_i en cualquier instante t , a partir de sus valores iniciales, mediante una transformación canónica que sea función continua del tiempo. De acuerdo con este punto de vista, el movimiento de un sistema mecánico corresponde a una evolución continua de una transformación canónica.

Por otro lado, considerando el cambio que experimenta cierta función $u(q_i, p_i)$ como resultado de una transformación canónica infinitesimal, aparece un resultado entre dicha transformación y los corchetes de Poisson. En efecto, el cambio de dicha función como resultado de una transformación canónica infinitesimal es,

$$\delta u(q_i, p_i) = u(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i) - u(q_i, p_i)$$

pero si se consideran sólo infinitésimos de primer orden, entonces un desarrollo en serie de Taylor demuestra que la diferencia es,

$$\delta u = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

y al usar (7.110) y (7.111) resulta,

$$\delta u = \epsilon \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \right)$$

o, en virtud de la definición de los corchetes de Poisson (7.78),

$$\delta u = \epsilon [u, \Omega] \tag{7.112}$$

por lo tanto, en consecuencia, si se hace $u = H$, el cambio del Hamiltoniano como resultado de una transformación canónica infinitesimal es,

$$\delta H = \epsilon [H, \Omega] \tag{7.113}$$

Anteriormente se encontró que si una función $\Omega(q_i, p_i)$ es una constante de movimiento, su corchete de Poisson con H se anula. La expresión (7.113) dice que tal constante engendra una transformación canónica infinitesimal que no altera el valor del Hamiltoniano, es decir:

Las constantes de movimiento son las funciones generatrices de aquellas transformaciones canónicas infinitesimales que dejan invariante el Hamiltoniano.

7.6. Forma simpléctica de las transformaciones canónicas

Además de que por la existencia de una función generatriz y por la invarianza de los corchetes de Lagrange y Poisson se han caracterizado las transformaciones canónicas, se desarrolló en esta sección otra condición necesaria y suficiente que garantiza el que una transformación sea canónica.

También se pueden ver transformaciones que dejan invariantes a las ecuaciones de Hamilton (transformaciones canónicas) desde el punto de vista estudiado en la sección 6.9. La transformación del sistema q, p al sistema \tilde{q}, \tilde{p} puede escribirse ahora como,

$$\tilde{\eta}_i = \tilde{\eta}_i(\eta_i), \text{ con } i = 1, \dots, 2s \quad (7.114)$$

donde $\eta_i = q_i, \eta_{i+s} = p_i$ y $\tilde{\eta}_i = \tilde{q}_i, \tilde{\eta}_{i+s} = \tilde{p}_i$ con $i \leq s$. Entonces,

$$\frac{d\tilde{\eta}_i}{dt} = \dot{\tilde{\eta}}_i = \frac{\partial \tilde{\eta}_i}{\partial \eta_l} \frac{d\eta_l}{dt} = \frac{\partial \tilde{\eta}_i}{\partial \eta_l} \dot{\eta}_l \quad (7.115)$$

y al usar (6.186) resulta,

$$\dot{\tilde{\eta}}_i = \frac{\partial \tilde{\eta}_i}{\partial \eta_l} J_{lk} \frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \frac{\partial \tilde{\eta}_i}{\partial \eta_l} J_{lk} \frac{\partial H}{\partial \tilde{\eta}_j} \frac{\partial \tilde{\eta}_j}{\partial \eta_k} \quad (7.116)$$

o matricialmente,

$$\dot{\tilde{\eta}} = (\mathcal{J} \mathcal{J}^T) \frac{\partial H}{\partial \tilde{\eta}} \quad (7.117)$$

donde $\mathcal{J}_{ij} = \frac{\partial \tilde{\eta}_i}{\partial \eta_j}$ es el Jacobiano de la transformación. Ahora bien, si la transformación realizada es canónica, significa que la expresión (7.117) debe ser igual en forma a la (6.186), por lo tanto debe cumplirse que,

$$\mathcal{J} \mathcal{J}^T = J \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\eta}_i}{\partial \eta_l} J_{lk} \frac{\partial \tilde{\eta}_j}{\partial \eta_k} = J_{ij} \quad (7.118)$$

donde se dice que J es simpléctico.

Un cambio de variables con un Jacobiano \mathcal{J} simpléctico, es decir, que cumple con (7.118), se dice que es una transformación canónica.

Ejemplo 7.8

Resolver el ejemplo 7.5 pero ahora desde el punto de vista de las expresiones (7.118).

Solución: Se debe mostrar que $\mathcal{J} \mathcal{J}^T = J$. La transformación dada representa un sistema de un grado de libertad, por lo tanto, el Jacobiano viene dado por,

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{11} & \mathcal{J}_{12} \\ \mathcal{J}_{21} & \mathcal{J}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (7.119)$$

pero como,

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} = \frac{p}{p^2+q^2} \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} = p \quad \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} = -\frac{q}{p^2+q^2} \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} = q$$

entonces,

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & -\frac{q}{p^2+q^2} \\ q & p \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & q \\ -\frac{q}{p^2+q^2} & p \end{bmatrix} \quad (7.120)$$

Por otro lado, de la definición de J (6.181), para esta caso particular se puede escribir,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.121)$$

por lo tanto,

$$\mathcal{J}J\mathcal{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & -\frac{q}{p^2+q^2} \\ q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & q \\ -\frac{q}{p^2+q^2} & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = J$$

de aquí que la transformación sea canónica.

Ejemplo 7.9

Supóngase que se tiene la transformación $q_i \rightarrow \tilde{q}_i(q_j)$. Encontrar la forma de la transformación $p_i \rightarrow \tilde{p}_i(q_j, p_j)$ que mantiene invariantes las ecuaciones de Hamilton.

Solución: El Jacobiano viene dado por,

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{11} & \mathcal{J}_{12} \\ \mathcal{J}_{21} & \mathcal{J}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} & 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} \end{bmatrix}$$

Ahora, la condición para que la transformación dada sea canónica es que $\mathcal{J}J\mathcal{J}^T = J$, por lo tanto,

$$\mathcal{J}J\mathcal{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} & 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_j} \\ 0 & \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

de aquí que,

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} \\ -\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} = 1$$

entonces,

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_i} p_j$$

7.7. Problemas

1. Demostrar, por cálculo directo y por corchetes de Poisson, que la transformación,

$$\tilde{q} = \log \left(\frac{1}{q} \text{Sen } p \right), \quad \tilde{p} = q \cot p$$

es canónica.

2. Las ecuaciones de transformación entre dos sistemas coordenados son,

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= \log (1 + q^{1/2} \text{Cos } p) \\ \tilde{p} &= 2 (1 + q^{1/2} \text{Cos } p) q^{1/2} \text{Sen } p \end{aligned}$$

(a) Demuéstrese directamente a partir de estas ecuaciones de transformación que \tilde{q} y \tilde{p} son variables canónicas si lo son q y p . (b) Pruébese que la función que engendra esta transformación es,

$$\mathcal{F}_3 = - (e^{\tilde{q}} - 1)^2 \tan p$$

3. Para qué valores de α y β representan las ecuaciones,

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= q^\alpha \text{Cos } (\beta p) \\ \tilde{p} &= q^\alpha \text{Sen } (\beta p) \end{aligned}$$

una transformación canónica? ¿Cuál es la forma de la función generatriz \mathcal{F}_3 en este caso?.

4. Mostrar directamente que para un sistema de un grado de libertad, la transformación,

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= \tan^{-1} \left(\frac{\alpha q}{p} \right) \\ \tilde{p} &= \frac{\alpha q^2}{2} \left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2} \right) \end{aligned}$$

es canónica, donde α es una constante arbitraria de dimensiones adecuadas. Use el método simpléctico.

5. Muestre las siguientes propiedades de los corchetes de Poisson: Las siguientes son algunas propiedades de los corchetes de Poisson,

a) $[u, u] = 0$.

b) $[u, \alpha] = 0$, donde α es una magnitud que no depende explícitamente de q y/o p .

c) Regla de Leibniz:

$$\begin{cases} [u, vw] = [u, v]w + v[u, w] \\ [uv, w] = [v, w]u + v[u, w] \end{cases}$$

d) Linealidad:

$$\begin{cases} [\alpha u, v] = \alpha [u, v] \\ [u + v, w] = [u, w] + [v, w]. \end{cases}$$

donde α es una magnitud que no depende explícitamente de q y/o p .

e) $\frac{\partial}{\partial t} [u, v] = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v \right] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t} \right]$

6. Mostrar que el corchete de Poisson de las componentes x y y del momento angular es igual al valor de su componente z con signo negativo,

$$[L_x, L_y] = -L_z$$

CAPÍTULO 8

Teoría de Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi¹ es una ecuación diferencial en derivadas parciales usada en Mecánica Clásica y Mecánica Relativista que permite encontrar las ecuaciones de evolución temporal o de "movimiento".

La ecuación de Hamilton-Jacobi permite una formulación alternativa a la Mecánica Lagrangiana y la Mecánica Hamiltoniana (y por tanto a la Mecánica Newtoniana, basada en el intento de integración directa de las ecuaciones de movimiento). El empleo de la ecuación de Hamilton-Jacobi resulta ventajoso cuando se conoce alguna integral primera de movimiento.

Además la formulación basada en la ecuación de Hamilton-Jacobi es la única formulación de la Mecánica en la que el movimiento de una partícula y el de una onda se describen en los mismos términos. Es por esto que ecuación de Hamilton-Jacobi constituye una meta largamente perseguida de la física teórica, desde Johann Bernoulli en el siglo XVIII buscó una analogía entre la propagación de ondas y partículas. Esta razón fue la que llevo a Schrödinger a buscar una ecuación para la "Mecánica Ondulatoria." Mecánica Cuántica generalizando la ecuación de Hamilton-Jacobi (en lugar de usar los otros enfoques alternativos de la Mecánica Clásica). Incluso la primera ecuación para Mecánica Cuántica Relativista, la ecuación de Klein-Gordon, se basó en la ecuación de Hamilton-Jacobi relativista en lugar de otros enfoques alternativos.

¹Carl Gustav Jacobi (1804-1851), matemático alemán, uno de los fundadores de la teoría de las funciones elípticas. Nació en Potsdam y estudió en la Universidad de Berlín. Fue profesor de matemáticas en la Universidad de Königsberg (hoy Kaliningrado, Rusia) desde 1827 hasta 1842. Hizo grandes aportaciones a la teoría de números y al estudio de los determinantes, estableciendo la teoría de los determinantes funcionales, que se llamaron jacobianos. También investigó las ecuaciones diferenciales.

Como se dijo antes, las ecuaciones de Lagrange para un sistema descrito por s (grados de libertad) coordenadas generalizadas son s ecuaciones de segundo orden de derivadas respecto del tiempo. El mismo sistema puede ser estudiado de acuerdo a Hamilton con $2s$ ecuaciones de primer orden de derivadas respecto del tiempo. Existe una notable alternativa, la descripción de Hamilton-Jacobi, que se reduce a una única ecuación en derivadas parciales.

La teoría de las transformaciones canónicas estudiada en el capítulo anterior conduce directamente al resultado más importante de la teoría de sistemas dinámicos, la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Contents

8.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi	332
8.2. Solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi	335
8.2.1. Para sistemas con H independiente del tiempo	335
8.2.2. Para sistemas con H independiente del tiempo y alguna coordenada cíclica	336
8.2.3. Para sistemas con H independiente del tiempo y coordenadas no cíclicas	336
8.3. Ejemplos de aplicación de la ecuación de Hamilton-Jacobi	338
8.4. Variables acción-ángulo en sistemas con un grado de libertad	338

8.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Considérese un sistema holónomo que obedece las ecuaciones canónicas de Hamilton,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, s \quad (8.1)$$

donde $s = 3N - k$ es, como ya se sabe, el número de grados de libertad del sistema mecánico holónomo a estudiar. Se tratará ahora de determinar una transformación canónica de manera que en el sistema Hamiltoniano transformado,

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}, \quad \dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, s \quad (8.2)$$

la función \tilde{H} sea cero,

$$\tilde{H} = 0 \quad (8.3)$$

de modo que, a partir de (8.2),

$$\dot{\tilde{q}}_i = 0, \quad \dot{\tilde{p}}_i = 0 \quad (8.4)$$

de forma que el sistema (8.4) se pueda integrar directamente resultando,

$$\tilde{q}_i = \alpha_i, \quad \tilde{p}_i = \beta_i \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, s \quad (8.5)$$

donde α_i y β_i son $2s$ constantes arbitrarias.

Con la finalidad de llevar a cabo la transformación de coordenadas, se necesita una función generatriz. Por razones históricas (Jacobi hizo esta elección) se adopta, entre las cuatro posibles tipos, la función $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, \tilde{p}_i, t) = S(q_i, \tilde{p}_i, t)$ que ya se estudió en el capítulo anterior (sección 7.2.2), la cual es conocida como la *función de acción de Hamilton*. Conocidas ya las transformaciones, se pueden expresar todas las q_i y p_i como funciones del tiempo t de las $2s$ constantes arbitrarias α_i, β_i , es decir, se pueden encontrar completamente las ecuaciones de movimiento finales de un sistema holónomo dado (todas las soluciones del sistema (8.1)).

Para la función generatriz que se ha elegido, como ya se sabe, se cumplen las ecuaciones (7.14) a (7.16). Ahora bien, al aplicar el requerimiento (8.3) a la expresión (7.16) se obtiene,

$$\frac{\partial}{\partial t} S(q_i, \tilde{p}_i, t) + H(q_i, p_i, t) = 0$$

o también, en virtud de (7.14) y (8.5),

$$\frac{\partial}{\partial t} S(q_j, \beta_j, t) + H \left[q_i, \frac{\partial}{\partial q_i} S(q_j, \beta_j, t), t \right] = 0 \quad (8.6)$$

que es la denominada *ecuación diferencial de Hamilton-Jacobi*. Mediante esta ecuación diferencial se puede determinar la función generatriz S . Es de hacer notar que esta ecuación es una ecuación diferencial parcial no lineal de primer orden con $s + 1$ variables q_i, t . La no linealidad es debida a que H depende cuadráticamente de los momentos que entran como derivadas de la función de acción de Hamilton S con respecto a las coordenadas de posición q_i . Aquí aparecen sólo primeras derivadas con respecto a las q_i y el tiempo t .

¿Qué se ha ganado con la ecuación de Hamilton-Jacobi?. Pues ahora el doble problema de encontrar las ecuaciones de movimiento y luego integrar ese sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que es finalmente lo que está en el fondo de cualquier otra construcción formal de la dinámica (como la de Lagrange y la de Hamilton por ejemplo), aquí se reduce a un único problema de encontrar la solución de una única ecuación en derivadas parciales.

Para determinar la función de acción de Hamilton S , se tiene que integrar la ecuación diferencial (8.6) $s + 1$ veces (cada derivada $\partial S/\partial q_i, \partial S/\partial t$ requiere de una integración), obteniéndose así $s + 1$ constantes de integración. Pero como S aparece sólo

como una derivada en dicha ecuación diferencial, significa que puede ser encontrada pero con una constante de integración a sumada a ella, es decir, $S = S' + a$; por lo cual una de las $s + 1$ constantes de integración debe ser una constante aditiva a S . Esto no es, sin embargo, esencial para la transformación. Así se obtiene como solución,

$$S = S(q_j, \beta_j, t) \quad (8.7)$$

En virtud de (7.14), (7.15) y en analogía a (8.5), las nuevas coordenadas \tilde{q}_i y \tilde{p}_i vendrán dadas por,

$$\tilde{p}_i = \beta_i, \quad \tilde{q}_i = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial}{\partial \beta_i} S(q_j, \beta_j, t) = \alpha_i \quad (8.8)$$

Para resolver un problema por este método se siguen los pasos siguientes:

1. Se encuentra una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi (8.6); esto es, una solución que contenga s constantes de integración β_i ; $S(q_i, \beta_i, t)$.

2. Se encuentran las variables q_i y p_i , las cuales resultan de las transformaciones (7.14) y (7.15) como sigue:

a) A partir de,

$$\alpha_i = \frac{\partial}{\partial \beta_i} S(q_j, \beta_j, t) \quad (8.9)$$

se obtienen las

$$q_i, \tilde{q}_i = q_i(\alpha_j, \beta_j, t) \quad (8.10)$$

b) y al introducirlas en,

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} S(q_j, \tilde{p}_j, t) = p_i(q_j, \beta_j, t) \quad (8.11)$$

producen finalmente los p_i ,

$$p_i = p_i(\alpha_j, \beta_j, t) \quad (8.12)$$

Como las $q_i(\alpha_j, \beta_j, t)$ y los $p_i(\alpha_j, \beta_j, t)$ son ya funciones conocidas del tiempo t y de las constantes de integración α_j, β_j , entonces se tiene la solución dinámica completa del problema del sistema de partículas caracterizado por el Hamiltoniano $H(q_i, p_i, t)$, ya que se encuentran las s coordenadas generalizadas como funciones explícitas del tiempo y de las $2s$ constantes de integración que permiten ajustar condiciones iniciales genéricas.

8.2. Solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi

Para cumplir con el paso 1 de la sección anterior, se debe resolver por completo la ecuación de Hamilton-Jacobi (8.6). No existen métodos generales para obtener soluciones completas de dicha ecuación; sin embargo, existen casos importantes en los que es posible obtener una solución completa de ésta mediante el método de separación de variables. El método de separación de variables de la ecuación de Hamilton-Jacobi representa una forma general (y a menudo la única factible) de resolverlas.

8.2.1. Para sistemas con H independiente del tiempo

En el caso de un sistema autónomo, H no depende explícitamente del tiempo ($\partial H/\partial t = 0$), entonces (8.6) puede escribirse como,

$$\frac{\partial}{\partial t} S(q_j, \beta_j, t) + H \left[q_i, \frac{\partial}{\partial q_i} S(q_j, \beta_j, t) \right] = 0 \quad (8.13)$$

En este caso el tiempo puede ser separado de forma inmediata si se escoge para S una solución de la forma,

$$S(q_i, \beta_i, t) = S_o(q_i, \beta_i) + T(t) \quad (8.14)$$

es decir, la suma de una función $S_o(q_i, \beta_i)$ que depende sólo de q_i y β_i y es la llamada *acción reducida* y otra función T que depende sólo del tiempo t . Al sustituir (8.14) en la ecuación (8.13) se encuentra que,

$$H \left[q_i, \frac{\partial}{\partial q_i} S_o(q_i, \beta_i) \right] = -\frac{dT(t)}{dt} \quad (8.15)$$

donde se puede observar que el miembro izquierdo no depende explícitamente de t , mientras que el miembro derecho sólo depende de t , por lo tanto ambos miembros deben ser igual a una constante que será denotada por γ . Entonces de (8.15),

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\gamma \quad (8.16)$$

$$H \left[q_i, \frac{\partial}{\partial q_i} S_o(q_i, \beta_i) \right] = \gamma \quad (8.17)$$

La segunda de estas expresiones se denomina *ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo*. La constante γ es el valor constante del Hamiltoniano, que en casos comunes es la energía total E del sistema. Es conveniente algunas veces tomar

γ como una de las s constantes β_i y en otros casos un conjunto $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ sin incluir γ es más conveniente; entonces γ es alguna función de éstas, $\gamma = \gamma(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = \gamma(\beta_i)$. La expresión para la dependencia del tiempo (8.16) puede ser integrada trivialmente, de manera que una solución completa a la ecuación de Hamilton-Jacobi (8.13) tiene la forma,

$$S(q_i, \beta_i, t) = S_o(q_i, \beta_i) - \gamma(\beta_i)t \quad (8.18)$$

Cuando se tenga una solución completa de (8.17), el sistema Hamiltoniano derivado de H puede ser considerado como resuelto. En efecto, en el "nuevo" espacio de fase (α_i, β_i) el sistema es trivial y se tiene que,

$$\dot{\beta}_i = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial \gamma(\beta_j)}{\partial \alpha_i} \longrightarrow \beta_i = \beta_i(0) \quad (8.19)$$

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial H}{\partial \beta_i} = \frac{\partial \gamma(\beta_j)}{\partial \beta_i} = \eta_i(\beta) \longrightarrow \alpha_i = \eta_i t + \alpha_i(0) \quad (8.20)$$

Por supuesto, excepto en casos excepcionales, el problema de encontrar una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi es, al menos, tan difícil como el problema de resolver el sistema original de ecuaciones diferenciales ordinarias.

8.2.2. Para sistemas con H independiente del tiempo y alguna coordenada cíclica

Si H no depende de alguna coordenada (coordenada cíclica), por ejemplo q_ℓ , entonces se puede plantear,

$$S(q_i, \beta_i, t) = S'(q_{i \neq \ell}, \beta_i, t) + \beta_\ell q_\ell \quad (8.21)$$

entonces, al sustituir (8.21) en (8.13) queda todavía la ecuación,

$$H \left[q_{i \neq \ell}, \frac{\partial}{\partial q_{i \neq \ell}} S'(q_{i \neq \ell}, \beta_i, t) \right] + \frac{\partial}{\partial t} S'(q_{i \neq \ell}, \beta_i, t) = 0 \quad (8.22)$$

con una variable menos, la q_ℓ .

8.2.3. Para sistemas con H independiente del tiempo y coordenadas no cíclicas

Para lograr la separación de las variables de posición (para coordenadas no cíclicas) la idea es proponer que la acción reducida sea de la forma,

$$S_o(q_i, \beta_i) = \sum_i S_i(q_i, \beta_i) = S_1(q_1, \beta_1) + \dots + S_s(q_s, \beta_s) \quad (8.23)$$

lo que significa que la función de acción de Hamilton se divide en una suma de funciones parciales S_i , cada una dependiente sólo de un par de variables. Ahora, al sustituir (8.23) en (8.18) y el resultado de esto en (8.13) (o equivalentemente sustituir (8.23) en (8.17)), la ecuación de Hamilton-Jacobi se transforma en,

$$H \left[q_1, \dots, q_s; \frac{\partial}{\partial q_1} S_1(q_1, \beta_1), \dots, \frac{\partial}{\partial q_s} S_s(q_s, \beta_s) \right] = \gamma(\beta_1, \dots, \beta_s)$$

o también,

$$H \left[q_i, \frac{\partial}{\partial q_i} S_i(q_i, \beta_i) \right] = \gamma(\beta_i) \quad (8.24)$$

Bien, ahora para asegurar que esta ecuación diferencial también se separa en s ecuaciones diferenciales para los $S_i(q_i, \beta_i)$, el Hamiltoniano H debe obedecer ciertas condiciones. Por ejemplo, si H tiene la forma,

$$H(q_i, \beta_i) = \sum_i H_i(q_i, \beta_i) = H_1(q_1, \beta_1) + \dots + H_s(q_s, \beta_s) \quad (8.25)$$

la separación es verdaderamente posible. Un Hamiltoniano de esta forma describe un sistema de grados de libertad independientes; es decir, en (8.25) no hay términos de interacción, por ejemplo de la forma $H(q_i, \beta_i, q_j, \beta_j)$, que describe una interacción entre el i -ésimo y el j -ésimo grado de libertad.

En virtud de (8.25) la ecuación diferencial (8.24) se puede escribir como,

$$H_1 \left[q_1, \frac{\partial}{\partial q_1} S_1(q_1, \beta_1) \right] + \dots + H_s \left[q_s, \frac{\partial}{\partial q_s} S_s(q_s, \beta_s) \right] = \gamma(\beta_i)$$

o también,

$$\sum_i H_i \left[q_i, \frac{\partial}{\partial q_i} S_i(q_i, \beta_i) \right] = \gamma(\beta_i) \quad (8.26)$$

Esta ecuación diferencial puede ser satisfecha haciendo separadamente cada término H_i igual a una constante μ_i como sigue,

$$H_i \left[q_i, \frac{\partial}{\partial q_i} S_i(q_i, \beta_i) \right] = \mu_i, \dots, H_s \left[q_s, \frac{\partial}{\partial q_s} S_s(q_s, \beta_s) \right] = \mu_s \quad (8.27)$$

donde,

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s = \sum_i \mu_i = \gamma \quad (8.28)$$

existiendo así s constantes de integración μ_i en total.

Debido a que el término del Hamiltoniano relacionado con la energía cinética involucra el momento $p_i = \partial S_i / \partial q_i$ en forma cuadrática, las ecuaciones diferenciales

(8.28) son de primer orden y segundo grado. Como solución se obtienen las s funciones de acción,

$$S_i = S_i(q_i, \mu_i) \tag{8.29}$$

que, aparte de depender de las constantes de separación μ_i , depende sólo de la coordenada q_i . En virtud de (7.14), (8.29) conduce inmediatamente al momento conjugado $p_i = \partial S_i / \partial q_i$ a la coordenada q_i . El punto esencial (ver (8.26)) es que el par coordenado (q_i, p_i) no está acoplado a otras coordenadas $(q_{j \neq i}, p_{j \neq i})$, de forma que el movimiento en estas coordenadas puede ser considerado completamente independiente de cada uno de los otros.

8.3. Ejemplos de aplicación de la ecuación de Hamilton-Jacobi

8.4. Variables acción-ángulo en sistemas con un grado de libertad

.....

Ejemplo 8.

Resolver el oscilador armónico simple por el método de Hamilton-Jacobi.

Solución: Una transformación es canónica si es capaz de mantener la forma de las ecuaciones de Hamilton.

.....

APÉNDICE A

Teorema de Euler

Se define una función homogénea de grado p en n variables cuando ella cumple,

$$f(\lambda y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_n) = \lambda^p f(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (\text{A.1})$$

siendo $\lambda \neq 0$. Si se deriva con respecto a λ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\lambda y_i)}{\partial \lambda} &= p\lambda^{p-1} f(y_i) \\ \sum_j \left[\frac{\partial f(\lambda y_i)}{\partial \lambda y_j} \frac{\partial \lambda y_j}{\partial \lambda} \right] &= p\lambda^{p-1} f(y_i) \\ \sum_j \left[y_j \frac{\partial f(\lambda y_i)}{\partial \lambda y_j} \right] &= p\lambda^{p-1} f(y_i) \end{aligned}$$

ahora, si $\lambda = 1$ entonces,

$$\sum_j \left[y_j \frac{\partial f(y_i)}{\partial y_j} \right] = p f(y_i) \quad (\text{A.2})$$

APÉNDICE B

Funciones monótonas y continuidad

Definición 1 (Funciones monótonas) Una función $y = f(x)$ para la cual un incremento en el valor de x resulta siempre en un incremento en el valor de y , esto es, para la cual $f(x) < f(x')$ siempre que $x < x'$, se denomina función monótona creciente; si, por otra parte, un incremento en el valor de x implica siempre un decremento en el valor de y , la función se denomina función monótona decreciente. Tales funciones son representadas gráficamente por curvas que siempre ascienden o bien siempre descienden conforme x recorre el intervalo de definición hacia valores crecientes. Una función monótona transforma siempre valores distintos de x en diferentes y ; esto es, la transformación es biunívoca o 1 – 1.

Definición 2 (Definición $\varepsilon - \delta$ de límite de una función) Se dice que el límite de la función f en el punto x_0 es ℓ si,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad (\text{B.1})$$

Definición 3 (Definición de continuidad de una función en un punto) Una función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua en el punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si se verifican las tres condiciones siguientes:

1. f está definida en x_0 , es decir, $x_0 \in \text{dom} f$.
2. Existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. En particular, obsérvese que x_0 ha de ser punto de acumulación de $\text{dom} f$.

3. El $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

que se puede resumir escribiendo,

$$f \text{ es continua en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (\text{B.2})$$

Definición 4 (Definición de continuidad en un intervalo abierto) Se dice que una función f es continua en un intervalo abierto si y sólo si es continua en cada número del intervalo abierto.

Definición 5 (Definición de continuidad por la derecha) Se dice que una función f es continua por la derecha en el número a si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f(a)$ existe;
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe;
3. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Definición 6 (Definición de continuidad por la izquierda) Se dice que una función f es continua por la izquierda en el número a si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f(a)$ existe;
2. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existe;
3. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Definición 7 (Definición de continuidad en un intervalo cerrado) Se dice que una función f , cuyo dominio contiene al intervalo cerrado $[a, b]$, es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b) , así como continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b .

Teorema 1 (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ entonces,

1. Existe al menos un punto x_1 del intervalo $[a, b]$ donde f alcanza su valor mínimo, es decir: $f(x_1) \leq f(x) \forall x \in [a, b]$.
2. Existe al menos un punto x_2 del intervalo $[a, b]$ donde f alcanza su valor máximo, es decir: $f(x_2) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$.

En resumen,

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\text{B.3})$$

APÉNDICE C

Lema fundamental del cálculo de variaciones

Ahora bien, teniendo presente lo anterior, se pasará a enunciar y demostrar el *lema fundamental del cálculo de variaciones*¹:

Lema 2 (Lema fundamental del cálculo de variaciones) Si para cada función continua $\eta(x)$ se tiene,

$$\int_a^b f(x) \eta(x) dx = 0$$

siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces,

$$f(x) = 0$$

en dicho segmento.

Demostración. La afirmación del lema y su demostración no varían si a la función $\eta(x)$ se le imponen las siguientes limitaciones: $\eta(a) = \eta(b) = 0$; $\eta(x)$ tiene derivadas continuas hasta orden p , $|\eta^{(s)}(x)| < \varepsilon$ ($s = 0, 1, \dots, q$; $q \leq p$). Ahora bien, suponiendo que en el punto $x = \bar{x}$ contenido en el intervalo $[a, b]$, sea $f(x) \neq 0$, se llega a una contradicción. En efecto, de la continuidad de la función $f(x)$ se deduce que si $f(\bar{x}) \neq 0$, entonces $f(x)$ conserva su signo en cierto entorno $[\bar{a}, \bar{b}]$ del punto \bar{x} . Pero entonces, tomando una función $\eta(x)$ que también conserve su signo en este entorno y sea igual a cero fuera del mismo (ver figura C.1), se obtiene,

$$\int_a^b f(x) \eta(x) dx = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} f(x) \eta(x) dx \neq 0 \quad (\text{C.1})$$

¹Ver (15) págs. 302-303.

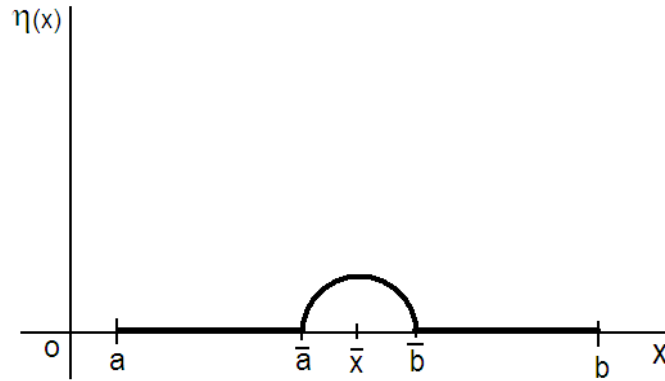


Figura (C.1): Función arbitraria $\eta(x)$.

ya que el producto $f(x)\eta(x)$ conserva su signo en el intervalo $[\bar{a}, \bar{b}]$ y se anula fuera del mismo. De este modo, se ha llegado a una contradicción, por lo tanto, $f(x) = 0$, con lo cual queda demostrado el lema. ■

APÉNDICE D

Propiedades de los determinantes

El proceso para calcular un determinante de orden superior a 3 es muy largo y engorroso. En general el determinante de orden " n " sería el resultado de sumar todos los posibles productos de " n " elementos, uno de cada fila y de cada columna, afectado del signo $+$ o $-$ según si el número de inversiones es par o impar. Así pues, para simplificar dicho cálculo se aplican las siguientes propiedades:

1. El determinante de una matriz es igual al determinante de la matriz traspuesta. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{D.1})$$

2. Si los elementos de una fila/columna de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número. Por ejemplo, si se multiplica la segunda fila por k ,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{D.2})$$

y si se multiplica la segunda columna por k ,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & ka_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & ka_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{D.3})$$

3. Si los elementos de una fila/columna de una matriz se pueden descomponer en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen iguales todas las filas/columnas excepto dicha fila/columna cuyos sumandos pasan, respectivamente, a cada uno de los determinantes. Por ejemplo, si se descomponen los elementos de la segunda columna,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{D.4})$$

y si se descomponen los elementos de la segunda fila,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{D.5})$$

4. El determinante de un producto de dos matrices cuadradas coincide con el pro-

ducto de los determinantes de ambas matrices:

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \right| \\
 = & \left| \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right| \tag{D.6}
 \end{aligned}$$

5. Si en una matriz cuadrada se permutan dos filas/columnas (consecutivas), su determinante cambia de signo. Por ejemplo, si se intercambian las dos primeras filas,

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{cccc} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \tag{D.7}$$

y si se intercambian las dos primeras columnas,

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{cccc} a_{12} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \tag{D.8}$$

6. Si los elementos de una fila/columna de una matriz cuadrada son combinación lineal de las filas/columnas restantes, es decir son el resultado de sumar los elementos de otras filas/columnas multiplicadas por números reales, su determinante es cero.
7. Si a los elementos de una fila/columna de una matriz cuadrada se le suma una combinación lineal de otras filas/columnas, su determinante no varía.
8. Si una matriz cuadrada tiene dos filas/columnas iguales, entonces su determinante es nulo.
9. Si todos los elementos de una fila/columna de una matriz cuadrada son cero, el determinante de dicha matriz es cero. (ya que en el desarrollo de un determinante, aparece un factor de cada fila y de cada columna, y por tanto, en cada término aparecerá un cero como factor).

10. Todo determinante de una matriz cuadrada se puede convertir en otro del mismo valor que el dado, tal que todos los elementos de una fila/columna, previamente elegida, sean cero excepto uno de ellos.

APÉNDICE E

Identidad de Jacobi

A continuación se presentan dos formas de verificar la identidad de Jacobi.

E.1. Por transformaciones canónicas infinitesimales

En 2000, en su artículo “Short Proof of Jacobi’s Identity for Poisson Brackets”, Nivaldo A. Lemos (35), presentó una prueba de la identidad de Jacobi de una forma realmente sencilla a partir de las transformaciones canónicas infinitesimales, la cual es presentada a continuación:

Si $A(q_i, p_i)$ y $B(q_i, p_i)$ son dos variables dinámicas cualesquiera y además una transformación canónica infinitesimal generada por $C(q_i, p_i)$, entonces a partir de (7.112) con $u = [A, B]$ se puede escribir,

$$\delta [A, B] = \epsilon [[A, B], C] \quad (\text{E.1})$$

Por otro lado, debido a que el corchete de Poisson $[A, B]$ no depende de las variables canónicas escogidas para su cálculo (como se mostró en la sección 7.4.2), su cambio se debe sólo a las variaciones de A y B , por lo tanto al usar la propiedad 5,

$$\delta [A, B] = [\delta A, B] + [A, \delta B] \quad (\text{E.2})$$

Por otro lado, al usar nuevamente (7.112),

$$\delta [A, B] = \epsilon [[A, C], B] + \epsilon [A, [B, C]] \quad (\text{E.3})$$

Ahora bien, comparando (E.3) con (E.1) y haciendo algunos arreglos,

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (\text{E.4})$$

E.2. Por cálculo directo

Se quiere mostrar que la expresión,

$$\text{Jacobi} = [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] \quad (\text{E.5})$$

es nula, donde $A(q_i, p_i)$, $B(q_i, p_i)$ y $C(q_i, p_i)$ son tres variables dinámicas cualesquiera. En efecto, al desarrollar el último término usando (7.78),

$$\begin{aligned} [C, [A, B]] &= \left[C, \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \right] = \underbrace{\sum_i \left(\left[C, \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right] - \left[C, \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right] \right)}_{\text{Por la propiedad 4 (linealidad)}} \\ &= \left(\underbrace{\sum_i \frac{\partial B}{\partial p_i} \left[C, \frac{\partial A}{\partial q_i} \right]}_{\text{Término 1}} + \underbrace{\sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \left[C, \frac{\partial B}{\partial p_i} \right]}_{\text{Término 2}} \right)_{\text{Por propiedad 3 (regla de Leibniz)}} \\ &\quad - \left(\underbrace{\sum_i \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[C, \frac{\partial A}{\partial p_i} \right]}_{\text{Término 3}} - \underbrace{\sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[C, \frac{\partial B}{\partial q_i} \right]}_{\text{Término 4}} \right)_{\text{Por propiedad 3 (regla de Leibniz)}} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

pero, por propiedad 5,

$$\begin{aligned}
 \text{Término 1} &= \sum_i \frac{\partial B}{\partial p_i} \left[C, \frac{\partial A}{\partial q_i} \right] = \sum_i \left\{ \frac{\partial B}{\partial p_i} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} [C, A] - \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, A \right] \right) \right\} \\
 &= \sum_i \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} [C, A] - \sum_i \frac{\partial B}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, A \right] \\
 \text{Término 2} &= \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \left[C, \frac{\partial B}{\partial p_i} \right] = \sum_i \left\{ \frac{\partial A}{\partial q_i} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} [C, B] - \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, B \right] \right) \right\} \\
 &= \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} [C, B] - \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, B \right] \\
 \text{Término 3} &= - \sum_i \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[C, \frac{\partial A}{\partial p_i} \right] = - \sum_i \left\{ \frac{\partial B}{\partial q_i} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} [C, A] - \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, A \right] \right) \right\} \\
 &= - \sum_i \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} [C, A] + \sum_i \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, A \right] \\
 \text{Término 4} &= - \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[C, \frac{\partial B}{\partial q_i} \right] = - \sum_i \left\{ \frac{\partial A}{\partial p_i} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} [C, B] - \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, B \right] \right) \right\} \\
 &= - \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} [C, B] + \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, B \right]
 \end{aligned}$$

y si se suman,

$$\begin{aligned}
 \text{Término 1} + \text{Término 3} &= \underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} [C, A] \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} [C, A] \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)}_{=-[B, [C, A]] \text{ por (7.78) y propiedad (7.79)}} \\
 &\quad + \sum_i \left(- \frac{\partial B}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, A \right] + \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, A \right] \right) \\
 &= -[B, [C, A]] + \sum_i \left(- \frac{\partial B}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, A \right] + \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, A \right] \right) \quad (\text{E.7})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Término 2} + \text{Término 4} &= \underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} [C, B] - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} [C, B] \right)}_{=-[A, [B, C]] \text{ por (7.78) y propiedad (7.79)}} \\
 &\quad + \sum_i \left(- \frac{\partial A}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, B \right] + \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, B \right] \right) \\
 &= -[A, [B, C]] + \sum_i \left(- \frac{\partial A}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, B \right] + \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, B \right] \right) \quad (\text{E.8})
 \end{aligned}$$

entonces, al sustituir (E.7) y (E.8) en (E.6), y el resultado de esto en (E.5), queda,

$$\text{Jacobi} = \sum_i \left(- \frac{\partial B}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, A \right] + \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, A \right] - \frac{\partial A}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, B \right] + \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, B \right] \right) \quad (\text{E.9})$$

pero, por (7.78),

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial B}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, A \right] &= -\frac{\partial B}{\partial p_i} \sum_j \left(\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial A}{\partial q_j} \right) \\
 &= \sum_j \left(-\frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_j} + \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial A}{\partial q_j} \right) \quad (E.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, A \right] &= \frac{\partial B}{\partial q_i} \sum_j \left(\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial A}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_j} \right) \\
 &= \sum_j \left(\frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial A}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_j} \right) \quad (E.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial A}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, B \right] &= -\frac{\partial A}{\partial q_i} \sum_j \left(\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right) \\
 &= \sum_j \left(-\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right) \quad (E.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, B \right] &= \frac{\partial A}{\partial p_i} \sum_j \left(\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right) \\
 &= \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right) \quad (E.13)
 \end{aligned}$$

Entonces, por último, al sustituir (E.10) a (E.13) en (E.9), resulta,

$$J = 0$$

demostrándose así la identidad de Jacobi.

BIBLIOGRAFÍA

- (1) Alonso M. y Finn E. **Física**. Volumen 1: Mecánica. Fondo Educativo Interamericano S.A., 1970.
- (2) Apostol T. M. **Calculus**. Volume 1, 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- (3) Arnold V. **Metodi matematici della meccanica classica**. Editori Riuniti. Edizioni Mir, 1979.
- (4) Baumann G. **Mathematica for Theoretical Physics**. 2nd ed. Springer Science+Business Media, Inc., 2005.
- (5) Benettin G., Henrard J. & Kuksin S. **Hamiltonian Dynamics Theory and Applications**. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
- (6) Brizard A. J. **Introduction to Lagrangian and Hamiltonian mechanics**. Department of Chemistry and Physics, Saint Michael's College, Colchester, VT 05439, 2004.
- (7) Cabannes H. **Curso de Mecánica General**, 2da edición, Montaner y Simon, S.A., Barcelona, 1967.
- (8) Calkin M. G. **Lagrangian and Hamiltonian Mechanics**, First ed. World Scientific, 1996.
- (9) Callen H. B. **Thermodynamics and introduction to thermostatistics**. 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc., 1985.
- (10) Chow T. L. **Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction**. Cambridge University Press (Virtual Publishing), 2003.

-
- (11) Davis J. O. **Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics**, First ed. Oxford University Press, 2005.
- (12) Desloge E. A. **Classical Mechanics**. Volume 1. John Wiley & Sons, Inc., 1982.
- (13) Dewar R. L. **Classical Mechanics**. Department of Theoretical Physics, Research School of Physical Sciences & Engineering, The Australian National University, Canberra ACT 0200, Australia. Version 1.51, 2001.
- (14) Di Bartolo, C. **Mecánica Clásica**. Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar, Venezuela, 2004.
- (15) Elsgoltz L. **Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional**. Editorial Mir, Moscú, 1969.
- (16) Fasano A. & Marmi S. **Classical Mechanics**, First ed. Oxford University Press, 2006.
- (17) Flannery M. R. **The enigma of nonholonomic constraints**. American Journal of Physics – March 2005 – Volume 73, Issue 3, pp. 265-272.
- (18) Fowles G. **Analytical Mechanics**, 3rd ed, Holt, Rinehard and Winston, 1971.
- (19) Gantmacher F. **Lectures in Analytical Mechanics**, First ed. MIR publishers Moscow, 1970.
- (20) Gatland I. R. **Nonholonomic constraints: A test case**. American Journal of Physics – July 2004 – Volume 72, Issue 7, pp. 941-942.
- (21) Goicolea J. M. **Curso de Mecánica**. 2da ed, Volumen 1, Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de caminos, canales y puertos. <http://www.opencontent.org/openpub/>, 2001.
- (22) Goldstein H. **Classical Mechanics**, 2da ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980.
- (23) Goldstein H., Poole Ch. & Safko J. **Classical Mechanics**, 3rd ed. Addison-Wesley, 2000.
- (24) Gregory R. D. **Classical Mechanics**, First ed. Cambridge University Press, 2006.
- (25) Greiner W. **Classical Mechanics Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics**. Springer-Verlag New York, Inc., 2003.

-
- (26) Greiner W., Neise L. & Stöcker H. **Thermodynamics and statistical mechanics**. Springer-Verlag New York, Inc., 1997.
- (27) Hand L. & Finch J. **Analytical Mechanics**, First ed. Cambridge University Press, 1988.
- (28) Houser W. **Introducción a los Principios de Mecánica**. 1era ed. Unión tipografía editorial Hispano-Americana, 1959.
- (29) Ivanov S. **Theoretical and Quantum Mechanics**. Springer, 2006.
- (30) Kibble T. & Berkshire F. **Classical Mechanics**, 5th ed. Imperial College Press, London, 2004.
- (31) Kotkin G. L. y Serbo V. G. **Problemas de Mecánica Clásica**, Editorial Mir, Moscú, 1980.
- (32) Krasnov M. L., Makarenko G. I. y Kiseliyov A. I. **Cálculo Variacional**, Editorial Mir, Moscú, 1992.
- (33) Lanczos C. **The Variational Principles of Mechanics**. Mathematical Expositions, No. 4. University of Toronto Press, Toronto, 1952.
- (34) Landau L. D. & Lifshitz. **Mechanics**, 3rd ed, Vol. 1. Butterworth-Heinemann, 2000.
- (35) Lemos N. **Short Proof of Jacobi's Identity for Poisson Brackets**. American Journal of Physics – January 2000 – Volume 68, Issue 1, pp. 88-88.
- (36) Lewis A. D. **Lagrangian Mechanics, Dynamics, and Control**. Math 439 Course Notes.
- (37) Mahecha J. **Mecánica clásica avanzada**. Editorial Universidad de Antioquia, Colombia, 1987.
- (38) Malik, R. P. **Jacobi Identity for Poisson Brackets: A Concise Proof**. Phys. Teach. 45 10-11, 2003.
- (39) Masujima M. **Applied Mathematical Methods in Theoretical Physics**. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2005.
- (40) Microsoft [®] Encarta [®] 2007. © 1993-2006 Microsoft Corporation.
- (41) Murray R. S. **Mecánica Teórica**, McGraw-Hill, 1976.
- (42) Norwood J. **Intermediate Classical Mechanics**, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1979.

-
- (43) Oller J. A. **Mecánica Teórica**. Departamento de Física, Universidad de Murcia, E-30071 Murcia.
- (44) Ray J. R. **Nonholonomic constraints**. American Journal of Physics – 1966 – Volume 34, pp. 406-408.
- (45) Ray J. R. **Erratum: Nonholonomic constraints**. American Journal of Physics – 1966 – Volume 34, pp. 1202-1203.
- (46) Riley K. F., Hobson M. P. & Bence S. J. **Mathematical Methods for Physics and Engineering**, 3rd ed. Cambridge University Press, 2006.
- (47) Rosu H. C. **Classical Mechanics**. Los Alamos Electronic Archives: physics/9909035. arXiv:physics/9909035 v1 19 Sep 1999.
- (48) Ruggieri G. **Mecánica**. Universidad Nacional Abierta, Caracas Venezuela, 1994.
- (49) Spivak M. **Cálculo infinitesimal**. 2da ed. Editorial Reverté, S.A., 1996.
- (50) Strauch D. **Classical Mechanics, an introduction**, First ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- (51) Symon K. R. **Mechanics**, 3rd ed. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1971.
- (52) Tatum J. B. **Classical Mechanics**.
- (53) Thornton S. & Marion J. **Classical Dynamics of particles and systems**, 5th ed. Thomson Brooks/cole, 2004.
- (54) Tong D. **Classical Dynamics**. University of Cambridge Part II Mathematical Tripos. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Centre for Mathematical Sciences, Wilberforce Road, Cambridge, CB3 0BA, UK. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/dt281/>, 2004.
- (55) Valdivia J. A. **Mecánica analítica**. Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, <http://fisica.ciencias.uchile.cl/alejo/clases/>
- (56) Valencia L. R. **Mecánica Clásica**. Departamento de Física, Universidad Santiago de Chile, 2000.
- (57) Van Brunt B. **The calculus of variations**. Editorial Board (North America) Springer, 2004.

- (58) Weinstock R. **Calculus of variations With Applications to Physics and Engineering.** Dover publications, Inc., 1974.
- (59) Wells D. A. **Dinámica de Lagrange.** Libros McGraw-Hill de México S.A., 1972.
- (60) Zia, R. K. P., Redish E. F. & McKay S.R. **Making Sense of the Legendre Transform.** American Journal of Physics 77, 614 2009.