

**Teoría y problemas de
FISICA GENERAL
Nivel Preuniversitario
Volumen 1/4**



Autor: Walter Lauro Pérez Terrel

Editorial: VESTSELLER / Brasil

Título original:

FÍSICA GENERAL para estudiantes preuniversitarios.

Autor: **Walter Lauro PÉREZ TERREL**

Licenciado en Ciencias Físicas.

Universidad Nacional Mayor de San Marcos,

Decana de América, fundada el 12 de mayo de 1551. Lima, PERÚ.

Facultad de Ciencias Físicas.

Última experiencia laboral. Colegio de Alto Rendimiento. COAR
LORETO.

Ciudad de Iquitos. Loreto Perú.

2019

Carátula: fotografía de Albert Einstein, montando bicicleta.

Publicaciones:

Primera edición: 2021

Editorial **VESTSELLER** Brasil.

FISICA GENERAL

Autor: Lic. WALTER LAURO PÉREZ TERREL

- 1. Créditos. Dedicatoria. Prólogo del autor. Contenidos.**
VOLUMEN 1/4
- 2. INTRODUCCIÓN A LA FISICA.** Revisión matemática. Método Científico. Ecuaciones. Gráfica y funciones. Ecuación de la recta. Ecuación de la Parábola. Notación Científica. Teoría de errores. Incertidumbre relativa y absoluta.
- 3. ANALISIS DIMENSIONAL.** Sistema internacional de unidades. Principio de homogeneidad dimensional. Fórmulas dimensionales. Fórmulas empíricas.
- 4. ANALISIS VECTORIAL.** Vector. Operaciones con vectores. Método del paralelogramo. Método del polígono. Descomposición rectangular. Descomposición poligonal. Vectores unitarios cartesianos.
- 5. ELEMENTOS DEL MOVIMIENTO MECÁNICO.** Sistema de referencia. Medidas del movimiento. Vector posición. Desplazamiento. Intervalo de tiempo. Velocidad media.
- 6. MRU.** Movimiento rectilíneo uniforme. Velocidad constante. Ley de Kepler para el M.R.U.
- 7. MRUV.** Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Aceleración constante. Números de Galileo.
- 8. MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE VERTICAL. MCLV.** Aceleración de la gravedad. Números de Galileo.
- 9. GRAFICAS DEL MOVIMIENTO.** Posición versus tiempo. Velocidad versus tiempo. Aceleración versus tiempo.
- 10. MOVIMIENTO RELATIVO.** Velocidad y aceleración relativa. Principio de Relatividad según Galileo.
- 11. MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE PARABÓLICO.** Movimiento compuesto. Principio de Independencia de los movimientos según Galileo.
- 12. MCU.** Movimiento circunferencial uniforme. Velocidad angular constante.
- 13. MCUV.** Movimiento circunferencial uniformemente variado. Aceleración angular constante.
- 14. CINEMATICA DEL CUERPO RIGIDO.** Centro instantáneo de rotación. Velocidad angular de rotación. Velocidad de traslación.

- 15. ESTÁTICA I.** Equilibrio. Fuerza. Fuerza de gravedad. Tensión. Compresión. Fuerza elástica. Ley de Hooke. Fuerza de reacción normal. Leyes de Newton. Diagrama de cuerpo libre. Teorema de las tres fuerzas.
- 16. ESTÁTICA II.** Cuerpo rígido. Momento de una fuerza. Equilibrio de un cuerpo rígido. Centro de gravedad. Teorema de Varignon.
- 17. CENTRO DE GRAVEDAD.** Centro de masa, centro de gravedad, centroide.
- 18. DINÁMICA RECTILÍNEA.** Inercia. Masa. Movimiento rectilíneo y aceleración tangencial. Fuerza de inercia. Principio de D’Alambert. Método de Atwood para resolver problemas de dinámica rectilínea. Segunda ley de Newton.
- 19. DINÁMICA CIRCUNFERENCIAL.** Segunda ley de Newton para el movimiento circunferencial. Fuerza resultante centrípeta. Aceleración centrípeta.

VOLUMEN 2/4

- 20. TRABAJO.** Trabajo mecánico. Cantidad de trabajo hecho por una fuerza constante. Cantidad de trabajo hecho por la fuerza gravitatoria. Cantidad de trabajo neto.
- 21. POTENCIA.** Potencia mecánica. Potencia en función de la velocidad. Eficiencia o rendimiento.
- 22. ENERGÍA.** Formas de energía. Energía cinética. Energía potencial gravitatoria y elástica. Energía mecánica. Principio de conservación de la energía mecánica. Teorema de la energía cinética. Teorema del trabajo y la energía mecánica.
- 23. CANTIDAD DE MOVIMIENTO.** Cantidad de movimiento. Impulso. Teorema del impulso y la cantidad de movimiento. Principio de conservación de la cantidad de movimiento.
- 24. CHOQUES.** Colisiones. Coeficiente de restitución. Tipos de colisiones. Leyes de reflexión en las colisiones. Velocidad de rebote.
- 25. DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO.** Momento de inercia. Energía cinética de rotación. Aceleración angular.
- 26. GRAVITACIÓN.** Ley de gravitación universal. Variación de la intensidad del campo gravitatorio con la altura. Energía potencial de interacción gravitatoria. Movimiento planetario. Leyes de Kepler.
- 27. OSCILACIONES.** Movimiento armónico simple. Elementos del M.A.S. Energía mecánica. Acoplamiento de resortes. Péndulo simple. Periodo y frecuencia.
- 28. PENDULO SIMPLE.** Variación del periodo con respecto a la longitud de la cuerda.
- 29. ONDA MECÁNICA.** Elementos de una onda. Velocidad de una onda. Velocidad de una onda en una cuerda tensa.

30. ACUSTICA. Ondas Senoidales. Sonido. Intensidad del sonido. Nivel de intensidad del sonido.

31. EFECTO DOPPLER. Cambio de la frecuencia. Cambio de la longitud de onda.

32. HIDROSTÁTICA. Fluido. Densidad. Fuerza de gravedad y peso. Presión. Presión hidrostática. Principio fundamental de la hidrostática. Vasos comunicantes. Principio de Pascal. Prensa hidráulica. Presión atmosférica. Principio de Arquímedes. Empuje.

VOLUMEN 3/4

33. HIDRODINAMICA. Caudal. Ecuación de la continuidad. Teorema de Bernoulli.

34. TEMPERATURA. Temperatura relativa y absoluta. Escalas termométricas.

35. DILATACIÓN. Dilatación lineal. Dilatación superficial. Dilatación volumétrica. Cambio de la densidad con la temperatura. Coeficiente de dilatación.

36. CAMBIO DE TEMPERATURA. Calor. Capacidad calorífica. Calor específico. Cantidad de calor sensible. Calorímetro de mezclas. Equivalente mecánico del calor.

37. CAMBIO DE FASE. Cambio de fase. Calor latente. Cantidad de calor latente.

38. TRANSFERENCIA DE CALOR. Flujo calorífico.

39. GASES. Gas ideal. Temperatura. Presión del gas. Ecuación de estado de un gas ideal. Ecuación de procesos.

40. PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA. Energía interna del gas ideal. Primera ley de la termodinámica.

41. SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA. Máquina térmica. Ciclo de Carnot.

VOLUMEN 3/4

42. LEY DE COULOMB. Cuerpos electrizados. Carga eléctrica. Ley de Coulomb.

43. CAMPO ELÉCTRICO. Intensidad del campo eléctrico. Potencial eléctrico. Diferencia de potencial.

44. ENERGIA POTENCIAL ELECTRICA.

45. POTENCIAL ELECTRICO. Diferencia de potencial en campo eléctrico homogéneo.

46. ENERGIA DE POTENCIAL DE INTERACCION ELECTRICA.

47. EQUILIBRIO ELECTROSTATICO.

48. CAPACIDAD ELÉCTRICA. Condensador plano. Energía acumulada en el condensador.

49. ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES. Conexión serie y paralelo. Teorema de la trayectoria para condensadores.

50. CORRIENTE ELÉCTRICA. Intensidad de corriente eléctrica. Resistencia eléctrica. Ley de Poulliet. Resistividad eléctrica. Ley de Ohm.

51. ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS. Conexión serie y paralelo.

52. POTENCIA ELECTRICA. Fuerza electromotriz. Potencia eléctrica de una fuente eléctrica. Ley de Joule-Lenz.

53. CIRCUITOS ELECTRICOS. Teorema de la trayectoria. Circuitos eléctricos. Leyes de Kirchhoff.

54. MAGNETISMO. Magnetismo terrestre. Imán natural. Polos magnéticos. Intensidad del campo magnético. Campo magnético uniforme y homogéneo. Cupla. Flujo magnético.

55. ELECTROMAGNETISMO I. Efecto Oersted. Campo magnético. Intensidad del campo magnético. Ley Biot-Savart. Campo magnético generado por corrientes rectilíneas y curvilíneas.

56. ELECTROMAGNETISMO II. Acción de un campo magnético sobre una corriente eléctrica. Ley de Ampere. Acción y reacción entre dos corrientes paralelas. Movimiento de las partículas cargadas dentro de los campos eléctricos y magnéticos. Fuerza de Lorentz. Campo magnético creado por un solenoide.

57. ELECTROMAGNETISMO III. Inducción electromagnética. Ley de Faraday. Corriente inducida. Ley de Lenz. Corriente eléctrica alterna. Transformadores.

VOLUMEN 4/4

58. ÓPTICA. Espectro electromagnético. Luz. Rapidez de la luz en el vacío. Óptica geométrica. Índice de refracción. Leyes de reflexión y refracción de la luz. Ley de Snell. Fotometría.

59. ESPEJOS PLANOS. Formación de imágenes en espejos planos.

60. ESPEJOS ESFÉRICOS. Ecuación de los focos conjugados. Aumento. Formación de imágenes.

61. REFRACCION DE LA LUZ. Aplicación de la ley de Snell.

- 62. LENTES DELGADAS.** Lentes convergentes y divergentes. Ecuación de los focos conjugados. Aumento. Ecuación de los fabricantes de lentes. Formación de imágenes.
- 63. PRINCIPIO DE FERMAT.** El camino mas rápido.
- 64. CUERPO NEGRO.** Radiación del cuerpo negro.
- 65. TEORIA CUANTICA DE PLANCK.** Fotones. Ley de Stefan-Boltzmann
- 66. EFECTO FOTOELÉCTRICO.** Energía de las Ondas electromagnéticas. Fotoelectrones. Función trabajo.
- 67. RAYOS X.** Diferencia de potencia. Aceleración del electrón.
- 68. EFECTO COMPTON.** Longitud de onda de Compton.
- 69. OPTICA FISICA.** Interferencia, difracción, polarización.
- 70. TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD.** Aumento de la masa. Dilatación del tiempo. Contracción de la longitud. Relación entre la masa y la energía. Momentum lineal o cantidad de movimiento relativista. Energía cinética relativista.
- 71. BIBLIOGRAFÍA.**

DEDICATORIA

A, Laura Pérez Plaza.
A, Mónica Pérez Contreras.
A, Diego Pérez Contreras.
A, Alvarito.

PRÓLOGO DEL AUTOR

El presente libro está destinado a los alumnos y alumnas de educación secundaria, estudiantes preuniversitarios, a los jóvenes de institutos y de bachillerato internacional.

A fin de facilitar el manejo del compendio y facilitar su asimilación del material, al comienzo de cada capítulo figuran varios ejemplos de problemas típicos y se da solución detallada de los mismos. Esos ejemplos han sido elegidos de manera tal que el alumno al trabajar por su propia cuenta pueda superar todas las dificultades que le surjan en el proceso de la resolución de problemas sin recurrir a fuentes complementarias.

La cantidad de ejemplos y problemas, así como el grado de complejidad se han seleccionado con el objetivo de lograr una sólida asimilación del material. Los problemas cuantitativos se han elegido de tal manera que los alumnos puedan aclarar la esencia de las leyes físicas, precisar el ámbito de su aplicación, comprender y explicar el sentido de los fenómenos que tienen lugar en la naturaleza.

En cada capítulo se tratado en lo posible deducir fórmulas para calcular las cantidades físicas y en otras por inducción se han deducido teoremas y reglas prácticas. Todos los problemas propuestos han pasado un control de calidad y verificado su respuesta en los diferentes ciclos por diferentes estudiantes en los centros preuniversitarios.

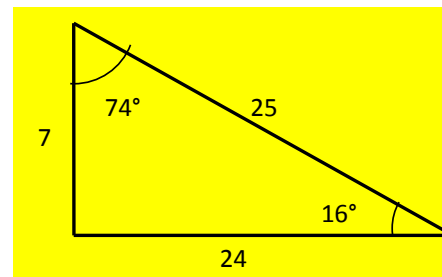
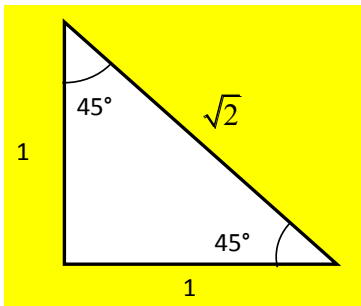
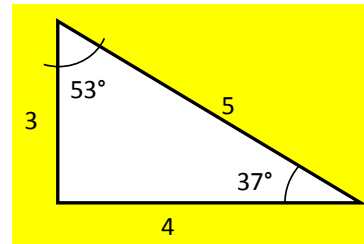
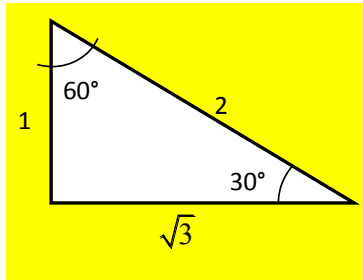
El presente texto es fruto de muchos años del trabajo en el aula del autor en los diferentes colegios, centros preuniversitarios y universidades.

Agradezco por la preferencia que han tenido, a los estudiantes y profesores peruanos, que desde la primera edición en 1990 han utilizado el texto titulado “*Física, teoría y problemas*”. Espero que este nuevo libro titulado “*Física General*” tenga la misma aceptación.

Lic. Mag. WALTER LAURO PÉREZ TERREL.

INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES



NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica tiene la siguiente forma: $N = a \cdot 10^b$

Dónde: $0 < a < 10$ y b pertenece a los números enteros.

Ejemplos:

1) Expresar en notación científica la siguiente cantidad: $N = 236,964 = 2,36964 \times 10^2$

Redondeando a la **centésima** tenemos: $N = 2,37 \times 10^2$

2) Expresar en notación científica la siguiente cantidad: $N = 0,00236964 = 2,36964 \times 10^{-3}$

Redondeando a la **centésima** tenemos: $N = 2,37 \times 10^{-3}$

EJERCICIOS:

1. Expresar en notación científica la siguiente cantidad: $N = 0,0764$
2. Expresar en notación científica la siguiente cantidad: $N = 0,00235$
3. Expresar en notación científica la siguiente cantidad: $N = 0,000864$
4. Expresar en notación científica la siguiente cantidad: $N = 0,0000435$
5. Expresar en notación científica la siguiente cantidad: $N = 0,000009264$
6. Expresar en notación científica la siguiente cantidad: $N = 23,47823$
7. Expresar en notación científica la siguiente cantidad: $N = 344,7823$
8. Expresar en notación científica la siguiente cantidad: $N = 5747,823$

9. Expresar en notación científica la siguiente cantidad: $N = 69478,23$
10. Expresar en notación científica la siguiente cantidad: $N = 834782,3$

CIFRAS SIGNIFICATIVAS.

En clase de física y química es frecuente que un alumno que está resolviendo un problema numérico pregunte por el número de decimales que debe escribir como resultado de una operación aritmética. También es frecuente que, ante la duda, presente un resultado final como $3,0112345 \cdot 10^{-6}$, es decir, escriba todos los decimales que la calculadora le ofrece. El principal objetivo que se plantea este artículo es recordar las reglas que permiten cumplir con una correcta utilización de las cifras significativas de un número cuando se realizan operaciones matemáticas, pero también, puestos a conocer dichas reglas, analizar la idoneidad de las mismas respecto de la propagación de errores. Finalmente, una vez cumplidos estos objetivos, se explican las estrategias a seguir, respecto de la utilización de cifras significativas, en la resolución de problemas de física o química.

Las cifras significativas son los dígitos de un número que consideramos no nulos.

1. Son significativos todos los dígitos distintos de cero. **Ejemplo:** **8723** tiene cuatro cifras significativas.
2. Los ceros situados entre cifras significativas son significativos. **Ejemplo:** **105** tiene tres cifras significativas.
3. Los ceros a la izquierda de la primera cifra significativa no lo son. **Ejemplo:** **0,005** tiene una (1) cifra significativa.
4. Para números mayores que 1, los ceros a la derecha de la coma son significativos. **Ejemplo:** **8,00** tiene tres cifras significativas.
5. Para números sin coma decimal, los ceros posteriores a la última cifra de cero pueden o no considerarse significativos. **Ejemplo:** $70 = 7 \times 10^1$ podríamos considerar una o dos cifras significativas. Esta ambigüedad se evita utilizando la notación científica: $7,0 \times 10^1$ tiene dos cifras significativas.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. **EJEMPLO 1:** En la fórmula, $H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ donde $g = 9,81$ y $t = 0,25$, ¿Cuántas cifras significativas tiene H?

RESOLUCIÓN

$$H = (0,5)(9,81)(0,25)^2 = 0,306562 \text{ tiene 6 cifras significativas.}$$

2. **EJEMPLO 2:** En la fórmula, $H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ donde $g = 9,8$ y $t = 0,2$, ¿Cuántas cifras significativas tiene H?

RESOLUCIÓN

$$H = (0,5)(9,8)(0,2)^2 = 0,196 \text{ tiene 3 cifras significativas.}$$

3. **EJEMPLO 3:** En la fórmula, $H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ donde $g = 9,8$ y $t = 0,25$, ¿Cuántas cifras significativas tiene H?

RESOLUCIÓN

$$H = (0,5)(9,8)(0,25)^2 = 0,30625 \text{ tiene 5 cifras significativas.}$$

CIFRAS SIGNIFICATIVAS Y TEORÍA DE ERRORES

1. **Notación científica.** Cuando escribimos o comparamos números muy grandes o muy pequeños es conveniente utilizar la **notación científica** (también conocida como «*forma estándar*»).

En la notación científica cada número se expresa en la forma $a \times 10^b$ donde a es un número, decimal mayor que 1 y menor que 10, y b es un número **entero** denominado **exponente**. Por ejemplo, en notación científica el número 434 se escribe $4,34 \times 10^2$; análogamente: 0,000316 se escribe $3,16 \times 10^{-4}$.

2. **Escribir en notación científica:**

- A) 67 259 372 =
B) 0,000 035 672 13 =
C) 6 982 751 412 =
D) 0,000 000 567 843 2 =

3. **Cifras significativas.**

Cuanto más precisa es una medida, mayor es el número de cifras significativas (dígitos) que pueden emplearse para representarla. Por ejemplo, una intensidad de corriente eléctrica expresada en la forma 4,20 A (a diferencia de 4,19 A o 4,21 A) sugiere una mayor precisión que la expresada en la forma 4,2 A.

Las **cifras significativas** son todos los dígitos de un dato que tienen significado, ya estén antes o después de la coma, incluyendo los ceros. Sin embargo, en ocasiones los ceros se utilizan sin más, lo que puede llevar a confusión. Por ejemplo, si nos dicen que el aeropuerto más cercano está a 100 km, puede que dudemos de si está aproximadamente a 100 km o «exactamente» a 100 km.

Es un buen ejemplo de por qué es útil la notación científica. Si empleamos la forma $1,00 \times 10^3 \text{ km}$ dejamos claro que hay exactamente tres cifras significativas. En cambio $1,0 \times 10^3 \text{ km}$ representa mucha menor precisión.

PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE

1. **¿Cuál es la cantidad de cifras significativas?**

- A) $1,24 \times 10^3 \text{ km}$
B) $1,5 \times 10^3 \text{ kg}$
C) $1,5870 \text{ m}$
D) $71,05 \text{ N}$

2. Utiliza la ecuación, $P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$ para determinar la potencia, P, de un motor eléctrico que levanta una carga de masa, m, de 1,5 kg, una altura, h, de 1,128 m en un tiempo, t, de 4,79 s. $\left(g = 9,81 \frac{m}{s^2}\right)$

RESOLUCION

$$P = \frac{(1,5)(9,81)(1,128)}{4,79} = 3,46524$$

Una calculadora mostraría en pantalla una respuesta de 3,4652..., pero esta respuesta sugiere una precisión muy alta que no se puede justificar a partir de los datos. El dato que contiene el menor número de cifras significativas es 1,5 kg, por tanto, la respuesta debe contener este mismo número de cifras significativas: $P = 3,5$ watts.

3. Utiliza la ecuación, $H = \frac{g \cdot t^2}{2}$ para determinar la altura, H, que desciende un cuerpo en caída libre desde el reposo, en un tiempo, t, de 1,25 s. $\left(g = 9,81 \frac{m}{s^2}\right)$
4. Utiliza la ecuación, $E = D \cdot g \cdot V$ para determinar el empuje, E, que experimenta un cuerpo sumergido totalmente un líquido de densidad, $D = 857,2 \frac{kg}{m^3}$ cuyo volumen total es $V = 0,257 m^3$. $\left(g = 9,81 \frac{m}{s^2}\right)$
5. Utiliza la ecuación, $P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$ para determinar la potencia, P, de un motor eléctrico que levanta una carga de masa $m = 23,5 kg$, una altura $h = 21,128 m$, en un tiempo $t = 44,25 s$. $\left(g = 9,81 \frac{m}{s^2}\right)$

6. Incertidumbre absoluta, relativa y en porcentaje Incertidumbre y datos experimentales.

La incertidumbre correspondiente a un dato experimental puede expresarse mediante una de estas tres formas.

- I. La **incertidumbre absoluta** de una medida es el intervalo, por encima y por debajo del valor dado, dentro del que esperamos que se encuentre cualquier medida repetida que hagamos. Por ejemplo, podemos expresar la masa de un bolígrafo en la forma $53,2 g \pm 0,1 g$; donde la incertidumbre es $\pm 0,1 g$.
- II. La **incertidumbre relativa** es el cociente entre la incertidumbre absoluta y el valor medido.
- III. El **porcentaje de incertidumbre** es la incertidumbre relativa expresada en porcentaje. La incertidumbre expresada en porcentaje suele ser la que proporciona mayor información. Lo deseable es que un experimento produzca resultados con incertidumbre menor del 5%, pero no siempre es posible.

7. **EJEMPLO:** La masa de una pieza de metal se expresa en la forma $346 \text{ g} \pm 2,0 \%$.

- a. ¿Cuál es la incertidumbre absoluta?
- b. ¿Cuál es el rango de valores esperado que puede tomar la masa?
- c. ¿Cuál es la incertidumbre relativa?

RESPUESTAS

- a. el 2% de 346g es : $\pm 7 \text{ g}$ (aproximando a gramos, *como* el dato inicial)
- b. entre 339 g y 353 g (con 3 cifras significativas)
- c. el 2% equivale a $\frac{1}{50}$

8. **EJEMPLO:** La aceleración de la gravedad se expresa en la forma $g = 9,81 \pm 2\% \text{ m.s}^{-2}$

- a. ¿Cuál es la incertidumbre absoluta?
- b. ¿Cuál es el rango de valores esperado que puede tomar la masa?
- c. ¿Cuál es la incertidumbre relativa?

RESPUESTAS

- a. el 2 % de $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ es: $\pm 0,20 \text{ m.s}^{-2}$ (aproximando, *como* el dato inicial)
- b. entre $9,61 \text{ m.s}^{-2}$ y $10,01 \text{ m.s}^{-2}$ (con 3 y 4 cifras significativas)
- c. el 2 % equivale a $\frac{1}{50}$

9. El peso de una pieza de metal se expresa en la forma $857 \text{ N} \pm 3,0 \%$.

- a. ¿Cuál es la incertidumbre absoluta?
- b. ¿Cuál es el rango de valores esperado que puede tomar el peso?
- c. ¿Cuál es la incertidumbre relativa?

RESPUESTAS

- a. el 3% de 857 N es: $\pm 25,7 \text{ N}$ (aproximando, *como* el dato inicial)
- b. entre $831,3 \text{ N}$ y $882,7 \text{ N}$ (con 4 cifras significativas)
- c. el 3 % equivale a $\frac{3}{100}$

10. El peso de una pieza de metal se expresa en la forma $654 \text{ N} \pm 3,0\%$.

- a. ¿Cuál es la incertidumbre absoluta?
- b. ¿Cuál es el rango de valores esperado que puede tomar el peso?
- c. ¿Cuál es la incertidumbre relativa?

11. **EJEMPLO:** Las medidas siguientes (en °C) corresponden a las lecturas de un experimento para medir la temperatura en la región Loreto: 33, 30, 29, 33, 32, 36 y 38. Estima los valores de la incertidumbre aleatoria (absoluta y en porcentaje) asociados al experimento.

RESPUESTA

La media aritmética de estas siete lecturas es 33 °C , expresarla con dos cifras significativas (33 °C), como los datos originales. La lectura que presenta la mayor diferencia con este valor medio es 38 °C , por tanto 5 °C es una posible estimación de la incertidumbre absoluta; en

porcentaje, la incertidumbre es: $\left(\frac{5}{33}\right) \cdot 100 \% = 15,15 \%$

Fíjate en que si los mismos datos se hubieran obtenido en el orden: 29, 30, 32, 33, 33, 36, 38, sería difícil de creer que las incertidumbres fueran aleatorias y sería necesario encontrar otra explicación para la variación de resultados.

- 12. EJEMPLO:** Las medidas siguientes (en cm) corresponden a las lecturas de un experimento para medir la altura del rebote de una pelota: 32, 29, 33, 32, 37 y 28. Estima los valores de la incertidumbre aleatoria (absoluta y en porcentaje) asociados al experimento.

RESPUESTA

La media aritmética de estas seis lecturas es 31,83 cm, pero sería más adecuado expresarla con dos cifras significativas (32 cm), como los datos originales. La lectura que presenta la mayor diferencia con este valor medio es 37 cm, por tanto 5 cm es una posible estimación de

la incertidumbre absoluta; en porcentaje, la incertidumbre es: $\left(\frac{5}{37}\right) \cdot 100\% = 14\%$

Fíjate en que si los mismos datos se hubieran obtenido en el orden: 28, 29, 32, 32, 33, 37, sería difícil de creer que las incertidumbres fueran aleatorias y sería necesario encontrar otra explicación para la variación de resultados.

- 13.** Las medidas siguientes (en cm) corresponden a las lecturas de un experimento para medir la altura de un grupo de niños: 131, 129, 133, 129, 136 y 128. Estima los valores de la incertidumbre aleatoria (absoluta y en porcentaje) asociados al experimento.

14. Reglas para estimar la incertidumbre en resultados calculados

- I. Para cantidades que proceden de adición o sustracción: sumar las incertidumbres absolutas.

$$\text{Si } y = a \pm b \text{ entonces } \Delta y = \Delta a + \Delta b$$

- II. Para cantidades que proceden de multiplicación o de división: sumar las incertidumbres relativas individuales o los porcentajes de incertidumbre individuales.

$$\text{Si } y = \frac{a \cdot b}{c} \text{ entonces } \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

- III. Para cantidades que proceden de elevar a una potencia, n , si: $y = a^n$

$$\text{entonces } \frac{\Delta y}{y} = \left| \frac{n \cdot \Delta a}{a} \right|$$

- 15.** Estimar la incertidumbre: $y = (23,2 \text{ g} \pm 0,1 \text{ g}) + (48,2 \text{ g} \pm 0,2 \text{ g}) + (98,5 \text{ g} \pm 0,4 \text{ g})$

RESOLUCIÓN

Para cantidades que proceden de adición o sustracción: sumar las incertidumbres absolutas.

$$\text{Si } y = a \pm b \pm c \text{ entonces } \Delta y = \Delta a + \Delta b + \Delta c$$

$$\text{Reemplazando: } \Delta y = 0,1 + 0,2 + 0,4 = 0,7$$

La incertidumbre absoluta es: $\Delta y = 0,7$

- 16.** Estimar la incertidumbre: $y = \frac{(23,4 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm})}{10,2 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}}$

RESOLUCIÓN

Para cantidades que proceden de multiplicación o de división: sumar las incertidumbres relativas individuales o los porcentajes de incertidumbre individuales.

$$\text{Si } y = \frac{a}{b} \text{ entonces } \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$\text{Reemplazando: } \frac{\Delta y}{y} = \frac{0,2}{23,4} + \frac{0,1}{10,2} = 0,02$$

$$\text{La incertidumbre relativa es: } \frac{\Delta y}{y} = 0,02 \text{ o } 2\%$$

$$17. \text{ Estimar la incertidumbre: } y = \frac{(23,4 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}) \cdot (48,8 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm})}{10,2 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}}$$

RESOLUCIÓN

Para cantidades que proceden de multiplicación o de división: sumar las incertidumbres relativas individuales o los porcentajes de incertidumbre individuales.

$$\text{Si } y = \frac{a \cdot b}{c} \text{ entonces } \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

$$\text{Reemplazando: } \frac{\Delta y}{y} = \frac{0,1}{23,4} + \frac{0,2}{48,8} + \frac{0,1}{10,2} = 0,02$$

$$\text{La incertidumbre relativa es: } \frac{\Delta y}{y} = 0,02 \text{ o } 2\%$$

18. Un estudiante de física aplica a la pelota una potente patada cuya fuerza media es “F”, en un intervalo pequeño de tiempo “t”.

$$F = 56,10 \pm 0,01 \text{ N} \quad y \quad t = 0,98 \pm 0,02 \text{ s}$$

¿Cuál sería el resultado del impulso $I = F \cdot t$, junto a su incertidumbre?

RESOLUCIÓN

$$\text{PRIMER PASO. } I = (56,10) \cdot (0,98) = 54,978 \approx 54,98$$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la incertidumbre absoluta.

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta t}{t} \Rightarrow \frac{\Delta I}{I} = \frac{0,01}{56,10} + \frac{0,02}{0,98} = 0,0205864$$

$$\frac{\Delta I}{54,98} = 0,0205864 \Rightarrow \Delta I = 1,131841 \approx 1,13$$

El impulso y la incertidumbre absoluta: $I = 54,98 \pm 1,13 \text{ N.s}$

19. En el laboratorio de mecánica clásica tenemos un carrito de masa “m” sometido a la acción de una fuerza “F”. $m = 0,711 \pm 0,002 \text{ kg}$ y $F = 9,85 \pm 0,045 \text{ N}$

¿Cuál es el resultado de la aceleración $a = \frac{F}{m}$, junto a la incertidumbre?

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Cálculo de la aceleración a partir de la segunda ley de Newton:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{9,85}{0,711} = 13,853727 \approx 13,854 \text{ m.s}^{-2} \text{ (como los datos iniciales)}$$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la incertidumbre absoluta.

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta m}{m} \Rightarrow \frac{\Delta a}{a} = \frac{0,045}{9,85} + \frac{0,002}{0,711} = 7,38146744 \bullet 10^{-3}$$

$$\frac{\Delta a}{13,854} = 7,38146744 \bullet 10^{-3} \Rightarrow \Delta a = 0,10226284$$

$$\Delta a = 0,10226284 \approx 0,102 \text{ (como los datos iniciales)}$$

La aceleración y la incertidumbre absoluta: $a = 13,854 \pm 0,102 \text{ m.s}^{-1}$

20. Para calcular la velocidad de un carrito sobre una pista horizontal sin rozamiento, un estudiante mide la distancia “d” que recorre y el tiempo empleado “t” y obtiene,
 $d = 5,10 \pm 0,01 \text{ m}$ y $t = 6,02 \pm 0,02 \text{ s}$

(a) ¿Cuál será su resultado para $v = \frac{d}{t}$, junto con su incertidumbre?

(b) Si mide la masa del carrito y obtiene $m = 0,711 \pm 0,002 \text{ kg}$, ¿Cuál debería ser su respuesta

para el impulso $p = m.v = \frac{m.d}{t}$ junto con su incertidumbre?

RESOLUCIÓN

$$(a) v = \frac{d}{t} = \frac{5,10}{6,02} = 0,847176 \approx 0,85 \text{ m.s}^{-1}$$

La incertidumbre relativa es:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta t}{t} \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{0,01}{5,10} + \frac{0,02}{6,02} = 5,2830 \bullet 10^{-3}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{0,01}{5,10} + \frac{0,02}{6,02} = 5,2830 \bullet 10^{-3}$$

La incertidumbre absoluta es:

$$\frac{\Delta v}{0,85} = 5,2830 \bullet 10^{-3} \Rightarrow \Delta v = 4,49055 \bullet 10^{-3}$$

$$\Delta v = 4,49055 \bullet 10^{-3} \approx 0,004491 \approx 0,005 \approx 0,01$$

La velocidad y la incertidumbre absoluta: $v = 0,85 \pm 0,01 \text{ m.s}^{-1}$

(b) Cálculo del Impulso:

$$p = \frac{m.d}{t} = \frac{(0,711) \bullet (5,10)}{6,02} = 0,602342 \approx 0,60 \text{ (como los datos iniciales)}$$

La incertidumbre relativa es:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta t}{t}$$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{0,002}{0,711} + \frac{0,01}{5,10} + \frac{0,02}{6,02} = 8,09598 \bullet 10^{-3}$$

La incertidumbre absoluta es:

$$\frac{\Delta p}{0,60} = 8,09598 \bullet 10^{-3} \Rightarrow \Delta p = 4,857588 \bullet 10^{-3}$$

$$\Delta p = 4,857588 \bullet 10^{-3} \approx 0,00485 \approx 0,005 \approx 0,01$$

El impulso y la incertidumbre absoluta: $p = 0,60 \pm 0,01 \text{ N.s}$

21. El periodo de oscilación es $T = 2,00 \pm 0,10 \text{ s}$. Calcular la frecuencia de oscilación.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Cálculo de la frecuencia de oscilación.

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{2,00} = 0,50 \text{ Hz}$$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la incertidumbre absoluta.

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta T}{T} \Rightarrow \frac{\Delta f}{0,50} = \frac{0,10}{2,00} \Rightarrow \Delta f = 0,025$$

$$\Delta f = 0,025 \approx 0,03 \text{ (como los datos iniciales)}$$

La frecuencia y la incertidumbre: $f = 0,50 \pm 0,03 \text{ Hz}$

22. Utiliza la ecuación, $H = 0,5 \cdot g \cdot t^2$ para determinar la altura, H, que desciende un cuerpo en caída libre desde el reposo, en un tiempo, t.

$$t = 0,50 \pm 0,03 \text{ s} \quad y \quad g = 9,81 \pm 0,02 \text{ m.s}^{-2}$$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Para cantidades que proceden de multiplicación o de división: sumar las incertidumbres relativas individuales o los porcentajes de incertidumbre individuales.

Si $y = a \cdot b^2$ entonces $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{2 \cdot \Delta b}{b}$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la altura.

$$H = 0,5 \cdot g \cdot t^2 = 0,5 \cdot (9,81) \cdot (0,50)^2 = 1,22625 \approx 1,23 \text{ m}$$

TERCER PASO. Cálculo de la incertidumbre absoluta.

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta t}{t}$$

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{0,02}{9,81} + \frac{0,03}{0,50} + \frac{0,03}{0,50} = 0,1220387$$

$$\frac{\Delta H}{1,23} = 0,1220387 \Rightarrow \Delta H = 0,1501076$$

$$\Delta H = 0,1501076 \approx 0,15$$

La altura y la incertidumbre absoluta:

$$H = 1,23 \pm 0,15 \text{ m}$$

23. Una esfera de $m = 20,0 \pm 0,1 \text{ kg}$ tiene rapidez de $v = 30,0 \pm 0,2 \text{ m.s}^{-1}$. Calcular la incertidumbre de la energía cinética utilizando la fórmula: $y = 0,5 \cdot m \cdot v^2$

RESOLUCIÓN

Para cantidades que proceden de multiplicación o de división: sumar las incertidumbres relativas individuales o los porcentajes de incertidumbre individuales.

Si $y = a \cdot b^2$ entonces $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{2 \cdot \Delta b}{b}$

Reemplazando: $\frac{\Delta y}{y} = \frac{0,1}{20,0} + \frac{0,2}{30,0} + \frac{0,2}{30,0} = 0,02$

La incertidumbre relativa es: $\frac{\Delta y}{y} = 0,02$ o 2 %

24. Estimar la incertidumbre: $y = (23,2 \text{ g} \pm 0,1 \text{ g})^2$

RESOLUCIÓN

Para cantidades que proceden de elevar a una potencia, n , si: $y = a^n$

$$\text{entonces } \frac{\Delta y}{y} = \left| \frac{n \cdot \Delta a}{a} \right|$$

$$\text{Reemplazando: } \frac{\Delta y}{y} = \left| \frac{2 \cdot (0,1)}{23,2} \right| = 8,6 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Expresado en porcentaje: } \frac{\Delta y}{y} = 0,0086 \text{ o } 0,86 \%$$

25. Estimar la incertidumbre: $y = (43,2 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm})^3$

RESOLUCIÓN

Para cantidades que proceden de elevar a una potencia, n , si: $y = a^n$

$$\text{entonces } \frac{\Delta y}{y} = \left| \frac{n \cdot \Delta a}{a} \right|$$

Reemplazando:

$$\frac{\Delta y}{y} = \left| \frac{3 \cdot (0,2)}{43,2} \right| = 0,01388 \approx 0,01 \text{ o } 1 \%$$

La incertidumbre expresada en porcentaje: $\varepsilon = 1 \%$

26. El radio de un círculo es $R = 10,0 \pm 0,5 \text{ m}$. Determinar la incertidumbre del área del círculo.

RESOLUCIÓN

$$\text{El área del círculo es, } A = \pi \cdot R^2 \text{ m}^2$$

$$\text{La incertidumbre es, } \varepsilon = 2 \cdot \left(\frac{\Delta R}{R} \right)$$

$$\text{Reemplazando: } \varepsilon = 2 \cdot \left(\frac{0,5}{10,0} \right) = 0,1$$

$$\text{Expresado en porcentaje: } \varepsilon = 10 \%$$

27. El radio de un círculo es $R = 10,00 \pm 0,25 \text{ m}$. Determinar la incertidumbre del área del círculo.

28. El radio de una esfera es $R = 10,0 \pm 0,5 \text{ m}$. Determinar la incertidumbre del volumen de la esfera.

RESOLUCIÓN

$$\text{El volumen de la esfera es, } V = \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 \text{ (m}^3\text{)}$$

$$\text{La incertidumbre es, } \varepsilon = 3 \cdot \left(\frac{\Delta R}{R} \right)$$

Reemplazando: $\varepsilon = 3 \cdot \left(\frac{0,5}{10,0} \right) = 0,15$

Expresado en porcentaje: $\varepsilon = 15 \%$

29. El radio de una esfera es $R = 10,00 \pm 0,25 \text{ m}$. Determinar la incertidumbre del volumen de la esfera.

30. Estimar la incertidumbre: $y = \sqrt{(43,2 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm})}$

RESOLUCIÓN

Para cantidades que proceden de elevar a una potencia, n , si: $y = a^n$

entonces $\frac{\Delta y}{y} = \left| \frac{n \cdot \Delta a}{a} \right|$

Reemplazando: $\frac{\Delta y}{y} = \left| \frac{(0,5) \cdot (0,2)}{43,2} \right| = 2,3 \cdot 10^{-3}$

31. Estimar la incertidumbre: $y = \sqrt{(44,5 \text{ cm} \pm 2,2 \text{ cm})}$

32. La medida de un ángulo θ , resulta ser $\theta = 34^\circ \pm 1^\circ$. ¿Cuál es la incertidumbre asociada a la inclinación (pendiente) de este ángulo?

RESOLUCION

$\tan 33^\circ = 0,649$

$\tan 34^\circ = 0,675$

$\tan 35^\circ = 0,700$

Mayor incertidumbre absoluta = $0,675 - 0,649 = 0,026$

Menor incertidumbre: $(0,700 - 0,675 = 0,025)$, que es menor que $0,026$

Por tanto, $\tan \theta = 0,67 \pm 0,03$ (utilizando el mismo número de cifras significativas que en los datos originales).

33. La medida de un ángulo θ , resulta ser $\theta = 45^\circ \pm 1^\circ$. ¿Cuál es la incertidumbre asociada a la inclinación (pendiente) de este ángulo?

$\tan 44^\circ = 0,966$; $\tan 45^\circ = 1,000$; $\tan 46^\circ = 1,036$

34. La medida de un ángulo θ , resulta ser $\theta = 75^\circ \pm 1^\circ$. ¿Cuál es la incertidumbre asociada a la inclinación (pendiente) de este ángulo?

$\tan 74^\circ = 3,487$; $\tan 75^\circ = 3,732$; $\tan 76^\circ = 4,011$

35. Se añade una cantidad de masa de $(346 \text{ g} \pm 2 \text{ g})$ a otra cantidad de masa de $(129 \text{ g} \pm 1 \text{ g})$

a ¿Cuál es la incertidumbre absoluta?

b ¿Cuál es el porcentaje de incertidumbre global?

36. La ecuación $h = \frac{a \cdot t^2}{2}$ se emplea para calcular el valor de la distancia h cuando

$a = (4,3 \pm 0,2) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y $t = (1,4 \pm 0,1) \text{ s}$

I. Calcula el valor de h .

- II. Calcula el porcentaje de incertidumbre de los datos del enunciado.
 III. Calcula el porcentaje de incertidumbre de la altura h.
 IV. Calcula la incertidumbre absoluta de la altura h.

37. La medida de una cierta magnitud resulta ser $(1,46 \pm 0,08)$, determine la máxima incertidumbre de, $\sqrt{1,46 \pm 0,08}$

38. Estimar la incertidumbre absoluta y relativa:

$$y = (23,23 \text{ g} \pm 0,12 \text{ g}) + (48,25 \text{ g} \pm 0,23 \text{ g}) + (98,45 \text{ g} \pm 0,14 \text{ g})$$

39. Estimar la incertidumbre absoluta y relativa: $y = \frac{(23,4 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}) \cdot (48,8 \text{ cm} \pm 0,3 \text{ cm})}{10,2 \text{ cm} \pm 0,4 \text{ cm}}$

40. Una esfera de $m = 20,0 \pm 0,1 \text{ kg}$ tiene rapidez de $v = 30,0 \pm 0,2 \text{ m.s}^{-1}$. Calcular la energía cinética y la incertidumbre de la energía cinética utilizando la fórmula: $E = 0,5.m.v^2$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Para cantidades que proceden de multiplicación o de división: sumar las incertidumbres relativas individuales o los porcentajes de incertidumbre individuales.

Si $y = a.b^2$ entonces $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{2 \cdot \Delta b}{b}$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la energía cinética.

$$E = 0,5.m.v^2 = 0,5.(20,0).(30,0)^2 = 9000,0 \text{ J}$$

TERCER PASO. Cálculo de la incertidumbre.

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{2 \cdot \Delta v}{v}$$

Reemplazando:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{0,1}{20,0} + \frac{0,2}{30,0} + \frac{0,2}{30,0} = 0,01833 \approx 0,02$$

$$\frac{\Delta E}{9000,0} = 0,02 \Rightarrow \Delta E = 180,0$$

La energía cinética y la incertidumbre:

$$E = 9000,0 \pm 180,0 \text{ J}$$

41. Utiliza la ecuación, $E = D.g.V$ para determinar el empuje, E, que experimenta un cuerpo sumergido totalmente un líquido de densidad, $D = 857,21 \pm 12,45 \text{ kg.m}^{-3}$ cuyo volumen total es $V = 0,257 \pm 0,02 \text{ m}^3$. Donde el valor de la aceleración de la gravedad es $g = 9,81 \pm 0,04 \text{ m.s}^{-2}$.

Determine el valor del empuje E y la incertidumbre absoluta.

42. Para calcular la velocidad de un carrito sobre una pista horizontal sin rozamiento, un estudiante mide la distancia "d" que recorre y el tiempo empleado "t" y obtiene,

$$d = 5,10 \pm 0,01 \text{ m} \quad y \quad t = 6,02 \pm 0,02 \text{ s}$$

- (a) ¿Cuál será su resultado para $v = \frac{d}{t}$, junto con su incertidumbre?
- (b) Si mide la masa del carrito y obtiene $m = 0,711 \pm 0,002 \text{ kg}$, ¿Cuál debería ser su respuesta para el impulso $p = m.v = \frac{m.d}{t}$ junto con su incertidumbre?

43. Incertidumbre.

«Todo conocimiento científico presenta un cierto grado de incertidumbre...»

Richard P. Feynman (1998), ¿Qué significa todo eso?: Reflexiones de un científico - ciudadano.

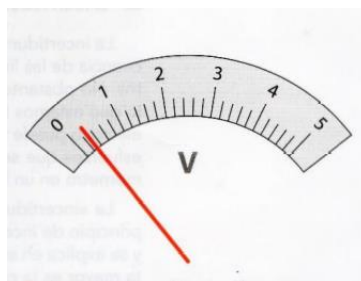
No solo son los experimentos los que presentan incertidumbre. Todo conocimiento científico la posee en un determinado grado, en el sentido de que los buenos científicos comprenden que aquello que damos por cierto hoy puede cambiar a la luz de nuevos descubrimientos o perspectivas. Y esta duda es fundamental para la verdadera naturaleza de la ciencia. En cualquier época, pasada o presente, el desarrollo de la ciencia se ha sustentado sobre un corpus de conocimiento consensuado por la comunidad científica, y los mayores avances provienen justamente de aquellos que cuestionan y ponen en duda la situación actual del conocimiento y el pensamiento científico.

44. Los **errores aleatorios** son inevitables, porque **las medidas exactas son imposibles**. Los valores obtenidos experimentalmente pueden ser mayores o menores que el valor correcto y se distribuyen de forma aleatoria a su alrededor.

Por regla general, los errores aleatorios son desconocidos e impredecibles. Su existencia se debe a múltiples razones, entre las que se encuentran:

- I. limitaciones de la escala o la pantalla que se esté utilizando.
- II. lecturas de la escala desde posiciones incorrectas.
- III. irregularidad en los tiempos de reacción de la persona que manipula un cronómetro.
- IV. dificultad para realizar observaciones que cambian rápidamente con el tiempo.

45. Errores sistemáticos.

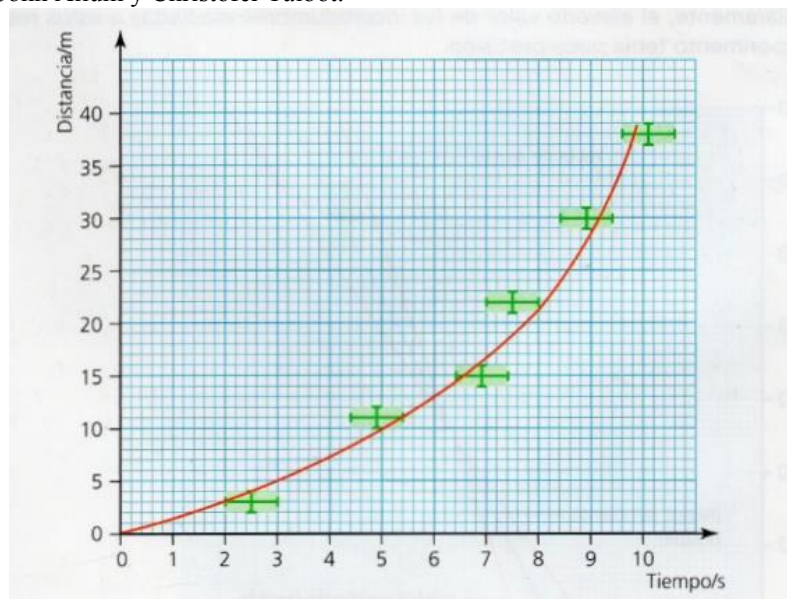


Un **error sistemático** se produce cuando algo funciona mal de manera repetida, ya sea *en* el instrumento de medida o en el método empleado. Una lectura que presenta un error sistemático siempre es o más alta o más baja que el valor correcto y siempre en la misma cantidad. Las causas más frecuentes de estos errores son instrumentos que tienen una escala incorrecta (mal **calibrada**), o instrumentos que tienen un valor inicial incorrecto, como por ejemplo un medidor que muestra en pantalla un determinado valor cuando la lectura debería ser cero. Este error se denomina **error de calibración de cero**, del que se muestra un ejemplo

en la **Figura**. Este voltímetro tiene un error de calibración de cero de $0,3\text{ V}$, por tanto, todas las lecturas se verán incrementadas por igual en $0,3\text{ V}$

Un termómetro que registra de forma incorrecta la temperatura de una habitación produce errores sistemáticos cuando se utiliza para medir otras temperaturas.

- 46. Representación gráfica de la incertidumbre.** Referencia. Libro de Física. IB diploma. Autores: John Allum y Christofer Talbot.



Los sistemas de representación gráfica se explican detalladamente en el apartado *Gráficos y análisis de datos* de la página web gratuita anexa.

El intervalo de incertidumbre aleatoria de una medida o de un resultado calculado puede representarse gráficamente mediante unas cruces que representan cada dato experimental o calculado (en lugar de un punto).

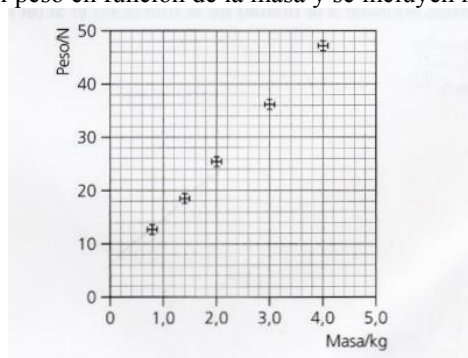
Barras de error

En la Figura se muestra un ejemplo, la gráfica posición del cuerpo (de la distancia) en función del tiempo para el movimiento de un tren. Sobre cada dato se dibuja una línea vertical y otra horizontal que representan la incertidumbre en las medidas de ambos ejes, respectivamente. En este ejemplo concreto, la incertidumbre en el tiempo es $\pm 0,5\text{ s}$ y la incertidumbre en la distancia es $\pm 1\text{ m}$. Estas líneas, que normalmente se representan con una pequeña línea perpendicular en el extremo, para indicarlo claramente, se denominan **barras de error** (tal vez sería mejor denominarlas barras de incertidumbre).

En la Figura, el área delimitada por cada barra de error se ha sombreado para destacarla. Cabe esperar que la curva de ajuste pase por alguno de los puntos de cada una de las áreas sombreadas.

En algunos experimentos, las barras de error son tan cortas e insignificantes que no se incluyen en la gráfica. Por ejemplo, la medida de una masa puede expresarse como $347,46 \pm 0,01\text{ g}$. La incertidumbre asociada a esta lectura sería demasiado pequeña para representarla en forma de barra de error sobre un gráfico. (Fíjate en que no cabe esperar barras de error para las funciones trigonométricas y logarítmicas).

47. Se ha medido en tres ocasiones el diámetro de un alambre con un instrumento que tiene un error de compensación de cero. Los resultados han sido respectivamente: 1,24 mm; 1,26 mm y 1,25 mm. El valor medio de estos resultados es:
- A. exacto, pero no preciso.
 - B. preciso, pero no exacto.
 - C. exacto y preciso.
 - D. inexacto e impreciso.
48. Se mide la intensidad de corriente que atraviesa un reóstato y resulta ser $2,00 \text{ A} \pm 0,02 \text{ A}$. ¿Cuál de las posibilidades siguientes identifica correctamente la incertidumbre absoluta y la incertidumbre en porcentaje de la corriente?
- A. incertidumbre absoluta $\pm 0,02 \text{ A}$ e incertidumbre en porcentaje $\pm 1\%$
 - B. incertidumbre absoluta $\pm 0,01 \text{ A}$ e incertidumbre en porcentaje $\pm 0,5\%$
 - C. incertidumbre absoluta $\pm 0,02 \text{ A}$ e incertidumbre en porcentaje $\pm 0,01\%$
 - D. incertidumbre absoluta $\pm 0,01 \text{ A}$ e incertidumbre en porcentaje $\pm 0,005\%$
49. ¿Cuál de los valores siguientes representa una estimación razonable de la magnitud de la masa de un avión de gran tamaño?
- A. 10^3 kg
 - B. 10^5 kg
 - C. 10^7 kg
 - D. 10^9 kg
50. ¿Cuál de las expresiones siguientes equivale a la unidad de la fuerza en el SI (el newton)?
- A. kg.m.s
 - B. kg.m.s^{-1}
 - C. kg.m.s^{-2}
 - D. $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$
51. Se miden de forma independiente las masas y los pesos de diferentes objetos. En el gráfico siguiente se representa el peso en función de la masa y se incluyen las barras de error.



- A. Los resultados experimentales sugieren que las medidas muestran un error sistemático significativo y un error aleatorio pequeño.

- B. las medidas muestran un error aleatorio y un error sistemático pequeño.
C. las medidas son precisas, pero no exactas
D. el peso de un objeto es proporcional a su masa.
52. Se mide la distancia recorrida por un coche en un determinado periodo de tiempo con una incertidumbre del 6%. Si la incertidumbre en la medida del tiempo es del 2%, ¿cuál es la incertidumbre en el cálculo de la velocidad del coche?
A. 3%
B. 4%
C. 8%
D. 12%
53. Estimar la incertidumbre relativa: $y = \frac{(23,4 \text{ cm} \pm 1,2 \text{ cm})}{10,2 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}}$
54. El radio de un círculo es $R = 12,0 \pm 0,5 \text{ m}$. Determinar la incertidumbre del área del círculo.
55. El radio de una esfera es $R = 10,0 \pm 0,4 \text{ m}$. Determinar la incertidumbre del volumen de la esfera.
56. Una esfera de $m = 20,0 \pm 0,2 \text{ kg}$ tiene rapidez de $v = 30,0 \pm 0,3 \text{ m.s}^{-1}$. Calcular la incertidumbre de la energía cinética utilizando la fórmula: $y = 0,5.m.v^2$
57. La longitud de un péndulo simple es $L = 20,0 \pm 0,2 \text{ m}$ y la aceleración de la gravedad es $g = 9,8 \pm 0,2 \text{ m.s}^{-2}$. Determinar la incertidumbre del periodo de oscilación $y = 2\pi.\sqrt{\frac{L}{g}}$
58. Un carro se desplaza en línea recta la distancia es $d = 20,0 \pm 0,2 \text{ m}$ el tiempo transcurrido es $t = 10,0 \pm 0,1 \text{ s}$. Determine la incertidumbre de la rapidez aplicando la fórmula $v = \frac{d}{t}$
59. Una esfera pequeña se lanza verticalmente hacia arriba con rapidez $v = 20,0 \pm 0,2 \text{ m.s}^{-1}$, y la aceleración de la gravedad es $g = 9,8 \pm 0,1 \text{ m.s}^{-2}$. Determine la incertidumbre de la altura máxima que alcanza la esfera utilizada la fórmula: $y = \frac{v^2}{2.g}$

60. EL METODO CIENTIFICO.

Rene Descartes en la Corte de la reina Cristina de Suecia, Pierre Louis Dumesnil – Wikipedia.

¿Qué es el método científico? Estos son sus cinco pasos Desde los primeros filósofos griegos hasta Descartes han sido muchos los sabios que han realizado valiosas aportaciones al método que impulsa la ciencia.



- 61.** El método científico es un conjunto de pasos ordenados que se emplean para adquirir nuevos conocimientos. Para poder ser calificado como científico debe basarse en el empirismo, en la medición y, además, debe estar sujeto a la razón.

La historia del método científico arranca en la prehistoria. El hombre primitivo, un ser curioso por naturaleza, descubrió a través del método del ensayo-error qué alimentos le convenía comer, cuándo y cómo debía seleccionarlos.

De una forma lenta pero inexorable dejó de ser un recolector de frutos y cazador de animales y se convirtió en pastor y agricultor; con la ayuda de la observación dejó de ser nómada para convertirse en sedentario.

Nuestros antepasados, amparados por la curiosidad, asociaron los movimientos de los cuerpos celestes con el tiempo y las estaciones. De esta forma, llegó un momento en el que podían predecir los cambios meteorológicos y cómo afectaban a su primitiva economía.

De esta forma, se puede afirmar que la *observación*, el primer paso del método científico, fue decisiva para que se llevara a cabo la revolución neolítica, la primera revolución radical de la humanidad.

- 62.** «Amor por la sabiduría»

Con el paso del tiempo se fueron dibujando las primeras civilizaciones bajo el amparo de las cuencas fluviales: Mesopotamia entre los ríos Tigris y Éufrates, Egipto vertebrado por el Nilo, la India bajo el paraguas de los ríos Indo y del Ganges, mientras

que fueron los ríos Huang Ho y Yangtze los responsables del nacimiento de la civilización china.

Más adelante, los griegos disfrutaron de una situación privilegiada y única en la historia de la humanidad. Fueron ellos los primeros en desarrollar un “amor por la sabiduría”, es decir, los primeros filósofos de la historia. De esta forma, nació lo que actualmente conocemos como una ciencia teórica racional.

En las colonias griegas de Asia Menor surgieron personajes de la talla de Tales de Mileto -el padre de la filosofía-, Anaximandro -el primero en trazar mapas astronómicos y geográficos-, o Heráclito y Empédocles, creadores de los fundamentos básicos de la teoría atómica del mundo.

A aquellos primeros sabios se añadirían más adelante Hipócrates, Demócrito y Aristóteles, entre todos ellos fueron moldeando las bases del método científico. El elemento común a estos primeros filósofos-científicos fue la *observación*.

63. De Galileo al «discurso del método»

A lo largo de la Edad Media los matemáticos, físicos y químicos del mundo islámico fueron realizando sus particulares contribuciones. Pero el siguiente gran paso lo dio en el siglo XVI Galileo Galilei, una de las figuras clave de la historia de la ciencia. Se puede afirmar que el científico italiano fue el primero en aplicar el método científico en sus estudios de cinemática y dinámica. Gracias a sus experimentos a la observación añadió la hipótesis y la experimentación. A partir de ese momento, se podrían desmontar muchos de los errores aristotélicos.

A Galileo le seguirían las contribuciones que realizó el inglés Francis Bacon, el creador de la inducción por eliminación. Sin embargo, no fue hasta el siglo XVII cuando Descartes, a través de su “Discurso del Método” (1637), definió las reglas del método científico por vez primera.

64. Los pasos del método científico

Ahora sabemos que el método científico tiene cinco pasos:
Observación: hace referencia a lo que queremos estudiar o comprender.
Hipótesis: se formula una idea que pueda explicar lo observado.
Experimentación: se llevan a cabo diferentes experimentos para comprobar o refutar una hipótesis.

Teoría: permite explicar la hipótesis más probable.

Conclusiones: se extraen de la teoría formulada.

El método científico lo utilizamos mucho más de lo que podríamos pensar a priori en nuestra vida. Así, por ejemplo, si observamos que un libro ha desaparecido de la estantería establecemos una hipótesis, es posible que se lo haya llevado alguien o bien que lo haya dejado en otro sitio sin darme cuenta.

A continuación, experimentamos, en este caso preguntaríamos a los que nos rodean si conocen el paradero actual del libro, finalmente, después de muchas respuestas improductivas, regresaríamos al coche (teoría) y allí lo encontraríamos. En este caso podríamos concluir que el libro no estaba en la estantería porque lo habíamos dejado olvidado en el coche.

Con un axioma podemos resumir más de veintidós siglos de historia de la ciencia: «donde no hay método, no hay ciencia».

Ejemplos de método científico

65. Contagio de Ántrax.

Robert Koch fue un médico alemán que vivió en la segunda mitad del siglo XIX y principios del XX.

Cuando hablamos de un científico, sus observaciones no son sólo del mundo que lo rodea sino también de los descubrimientos de otros científicos. Así, Koch parte en primer lugar de la demostración de Casimir Davaine de que el bacilo del carbunco (ántrax) se transmitía directamente entre las vacas.

Otra cosa que observó fueron inexplicables brotes de ántrax en lugares donde no había un individuo con ántrax.

Pregunta o problema: ¿Por qué hay contagio de ántrax cuando no hay un individuo que inicie el contagio?

Hipótesis: El bacilo o una parte de él sobrevive fuera de un huésped (ser vivo infectado).

Experimento: Muchas veces los científicos deben inventar sus propios métodos experimentales, en especial cuando se acercan a un área del conocimiento que aún no ha sido explorada. Koch desarrolló sus propios métodos para purificar el bacilo de las muestras de sangre y hacer cultivos del mismo.

Resultado de los descubrimientos: Los bacilos no pueden sobrevivir fuera de un huésped (hipótesis parcialmente refutada). Sin embargo, los bacilos crean endosporas que sí sobreviven fuera de un huésped y son capaces de provocar la enfermedad.

Las investigaciones de Koch tuvieron múltiples consecuencias en la comunidad científica. Por un lado, el descubrimiento de la supervivencia de agentes patógenos (que causan enfermedad) fuera de los organismos inició el protocolo de esterilización de instrumentos quirúrgicos y otros elementos hospitalarios.

Pero además sus métodos utilizados en la investigación del ántrax fueron posteriormente perfeccionados para el estudio de la tuberculosis y del cólera. Desarrollo para ello técnicas de tinción y purificación, y medios de crecimiento bacteriano como placas de agar y placa de Petri. Todos estos métodos aún hoy se continúan utilizando.

Conclusiones. A través de su trabajo basado en el método científico, llegó a las siguientes conclusiones, que hoy siguen vigentes y rigen toda investigación bacteriológica:

En caso de enfermedad, hay un microbio presente.

El microbio puede tomarse del huésped y desarrollarse independientemente (cultivo).

La enfermedad puede producirse introduciendo un cultivo puro del microbio en un huésped experimental saludable.

Se podrá identificar el mismo microbio en el huésped infectado.

66. Vacuna de la viruela

Edward Jenner fue un científico que vivió en Inglaterra entre el siglo XVII y XIX.

En esa época la viruela era una peligrosa enfermedad para los humanos, matando a un 30% de los infectados y dejando cicatrices en los sobrevivientes, o causándoles ceguera.

Sin embargo, la viruela en el ganado era leve y se podía contagiar de vaca a humano por las llagas ubicadas en las ubres de la vaca. Jenner descubrió que muchos trabajadores de las lecherías sostenían que si se habían contagiado de la viruela del ganado (que se curaba rápidamente) no se enfermarían de la viruela humana.

Observación: Creencia de la inmunidad obtenida a partir del contagio de la viruela del ganado. A partir de esta observación Jenner pasó al siguiente paso del método científico, sosteniendo la hipótesis de que esa creencia era cierta y elaborando los experimentos necesarios para comprobarla o refutarla.

Hipótesis: El contagio de la viruela del ganado da inmunidad a la viruela humana.

Experimento: Los experimentos que realizó Jenner no serían aceptados hoy en día, ya que fueron realizados en humanos. Aunque en ese momento no había otra forma de comprobar la hipótesis, de todas formas, experimentar con un niño hoy sería completamente inadmisibles. Jenner tomó material de la llaga de viruela vacuna de la mano de una lechera infectada y lo aplicó al brazo de un niño, hijo de su jardinero. El niño se enfermó durante varios días, pero luego se recuperó totalmente. Posteriormente Jenner tomó material de una llaga de viruela humana y la aplicó al brazo del mismo niño. Sin embargo, el niño no contrajo la enfermedad. Luego de esta primera prueba, Jenner repitió el experimento con otros humanos y luego publicó sus descubrimientos.

Conclusiones: hipótesis confirmada. Por lo tanto (método deductivo) infectar a una persona con viruela vacuna protege contra una infección de viruela humana. Posteriormente, la comunidad científica pudo repetir los experimentos de Jenner y obtuvieron los mismos resultados.

De esta manera se inventaron las primeras “vacunas”: aplicar una cepa más débil de un virus para inmunizar a la persona contra el virus más fuerte y dañino. Actualmente el mismo principio se utiliza para diversas enfermedades. El término “vacuna” proviene de esta primera forma de inmunización con un virus vacuno.

67. Tú puedes aplicar el método científico

El método científico es una forma de comprobar hipótesis. Para poder ser aplicado, es necesario poder realizar un experimento.

Por ejemplo, supongamos que siempre tienes mucho sueño durante tu clase de matemáticas.

Tu observación es: Sueño en clase de matemáticas.

Una hipótesis posible es: Tienes sueño en la clase de matemáticas porque no duermes lo suficiente la noche anterior.

Para realizar el experimento que compruebe o refute la hipótesis, es muy importante que no cambies nada en tu comportamiento, salvo las horas de sueño: debes desayunar lo mismo, sentarte en el mismo lugar de la clase, hablar con las mismas personas.

Experimento: La noche antes de la clase de matemáticas irás a dormir una hora antes de lo acostumbrado.

Si dejas de tener sueño durante la clase de matemáticas luego de realizar el experimento en repetidas ocasiones (no olvides la importancia de realizar el experimento varias veces) la hipótesis será confirmada.

Si continúas teniendo sueño, deberás desarrollar nuevas hipótesis.
Por ejemplo:

Hipótesis 1. Una hora de sueño no fue suficiente. Repetir el experimento aumentando dos horas de sueño.

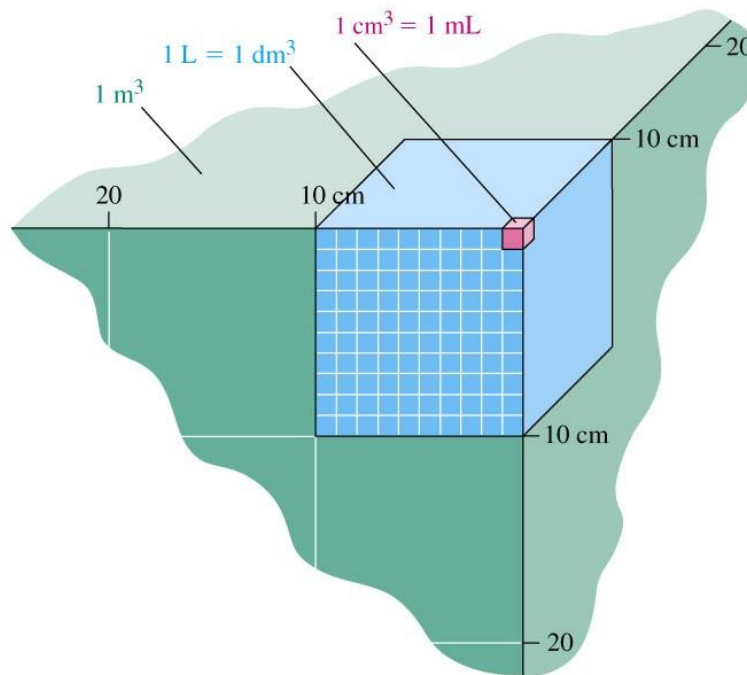
Hipótesis 2. Otro factor interviene en la sensación de sueño (temperatura, alimentos consumidos durante el día). Se diseñarán nuevos experimentos para evaluar la incidencia de otros factores.

Hipótesis 3. Es la matemática lo que te da sueño y por lo tanto no hay forma de evitarlo.

Como puede verse en este simple ejemplo, el método científico es exigente al momento de sacar conclusiones, en especial cuando nuestra primera hipótesis no es comprobada.

Fuente: <https://www.ejemplos.co/ejemplos-de-metodo-cientifico/#ixzz6WVuv5CIq>

DIMENSIONES



1. Magnitudes físicas y el sistema internacional

Las propiedades que caracterizan a los cuerpos o a los fenómenos naturales y que se pueden medir reciben el nombre de Magnitudes Físicas. Así por ejemplo tenemos la longitud, la masa, la velocidad, la temperatura, etc. Mientras que otras propiedades como el color, el sabor, la bondad, la belleza no son magnitudes físicas, ya que no se pueden medir.

Entre las magnitudes físicas hay algunas que son independientes de las demás y se denominan "Magnitudes fundamentales" como la masa, la longitud, el tiempo, etc. Así como también existen magnitudes físicas, que dependen de las fundamentales para ser expresadas, las cuales se denominan "Magnitudes derivadas", este es el caso de la velocidad, que se define mediante una relación entre la longitud y el tiempo.

2. CLASIFICACIÓN DE LAS MAGNITUDES.

Existen una gran cantidad de magnitudes, en forma general estas se clasifican de acuerdo a su origen y de acuerdo a su naturaleza.

I. **Por su origen:** magnitudes fundamentales y magnitudes derivadas.

II. **Por su naturaleza:** magnitudes escalares y magnitudes vectoriales.

3. EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

Es un conjunto de unidades de magnitudes fundamentales a partir del cual se debe expresar cualquier unidad de una magnitud derivada. Este fue un acuerdo común tomado por la mayor parte del mundo el 14 de octubre de 1960 en Francia.

Nombre	Dimensión	Unidad Básica	Símbolo
Longitud	L	metro	m
Masa	M	kilogramo	kg
Tiempo	T	segundo	s
Temperatura termodinámica	Θ	kelvin	K
Intensidad de corriente eléctrica	I	ampere	A
Intensidad luminosa	J	candela	cd
Cantidad de sustancia	N	mol	mol

4. FÓRMULA DIMENSIONAL

La fórmula dimensional de una magnitud dada, es una fórmula que muestra que operaciones de multiplicación o división hay que efectuar con las magnitudes físicas fundamentales para obtener la magnitud derivada.

Notación: sea X la magnitud física, entonces:

$[X]$: se lee fórmula dimensional de la magnitud física X. *Ejemplos:*

$$\text{Velocidad : } [V] = \frac{L}{T} = L.T^{-1}$$

$$\text{Aceleración : } [A] = \frac{L.T^{-1}}{T} = L.T^{-2}$$

5. MAGNITUDES FÍSICAS DERIVADAS. Se dice que una magnitud física es derivada, cuando se puede expresar en función de otras magnitudes fundamentales.

1. $[AREA] = [l \text{ arg o } x \text{ ancho}] = L.L = L^2 \text{ unidad : } m^2$
2. $[volumen] = [area \times altura] = L^2.L = L^3 \text{ unidad : } m^3$
3. $[Densidad] = \frac{[masa]}{[volumen]} = \frac{M}{L^3} = M.L^{-3} \text{ unidad : } kg.m^{-3}$
4. $[caudal] = \frac{[volumen]}{[tiempo]} = \frac{L^3}{T} = L^3.T^{-1} \text{ unidad : } m^3.s^{-1}$
5. $[velocidad] = \frac{[distancia]}{[tiempo]} = \frac{L}{T} = L.T^{-1} \text{ unidad : } m.s^{-1}$

6. $[aceleracion] = \frac{[velocidad]}{[tiempo]} = \frac{L.T^{-1}}{T} = L.T^{-2}$ *unidad : m.s⁻²*
7. $[fuerza] = [masa \times aceleracion] = M.L.T^{-2}$
unidad : 1kg.m.s⁻² = 1newton = 1 N
8. $[trabajo] = [fuerza \times distancia] = (M.L.T^{-2})L = M.L^2.T^{-2}$
unidad : 1kg.m².s⁻² = 1 joule = 1 J
9. $[potencia] = \frac{[trabajo]}{[tiempo]} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{T} = M.L^2.T^{-3}$
unidad : 1kg.m².s⁻³ = 1watt = 1 W
10. $[presion] = \frac{[fuerza]}{[area]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2} = M.L^{-1}.T^{-2}$
unidad : 1kg.m⁻¹.s⁻² = 1 pascal = 1 Pa
11. $[energia] = [presion \times volumen] = (M.L^{-1}.T^{-2})L^3 = M.L^2.T^{-2}$
unidad : 1kg.m².s⁻² = 1 joule = 1 J
12. $[energia] = [MASA \times (VELOCIDAD)^2] = M.(L.T^{-1})^2 = M.L^2.T^{-2}$
unidad : 1kg.m².s⁻² = 1 joule = 1 J
13. $[trabajo] = [energia] = [calor] = M.L^2.T^{-2}$
14. $[capacidad\ calorifica] = \frac{[calor]}{[temperatura]} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{\Theta} = M.L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}$ *unidad : 1kg.m².s⁻².K*
15. $[calor\ especifico] = \frac{[calor]}{[masa][temperatura]} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{M.\Theta} = L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}$
unidad : m².s⁻².K

6. DIMENSIÓN.

La **dimensión** indica las veces en que varía la **magnitud física fundamental** en una magnitud derivada.

$$[X] = L^a.M^b.T^c.\Theta^d.I^e.J^f.N^g$$

La fórmula dimensional está dada en función de siete magnitudes fundamentales. Así mismo los exponentes **a, b, c, d, e, f y g** se llaman **dimensiones**.

7. MAGNITUDES FÍSICAS DERIVADAS.

Son aquellas magnitudes que se expresan en función de las magnitudes físicas fundamentales.

8. REGLAS DIMENSIONALES

a) Si el valor numérico de la magnitud X es igual al producto (cociente) de los valores numéricos de las magnitudes A y B, entonces la dimensión de X será igual al producto (cociente) de las dimensiones A y B

$$X = A.B \Rightarrow [X] = [A].[B]$$

$$X = \frac{A}{B} \Rightarrow [X] = \frac{[A]}{[B]} = [A] \cdot [B]^{-1}$$

b) Si el valor numérico de la magnitud X es igual a la potencia “m” del valor numérico de la magnitud A, entonces la dimensión de X es igual a la potencia n/m de la dimensión de A.

$$X = A^{m/n} \Rightarrow [X] = [A]^{m/n}$$

$$X = \sqrt{A} \Rightarrow [X] = [\sqrt{A}] = \sqrt{[A]}$$

$$X = A^n \Rightarrow [X] = [A]^n = [A^n]$$

$$X = \frac{1}{A^n} \Rightarrow [X] = [A]^{-n} = [A^{-n}]$$

c) Si el valor numérico de la magnitud X es un coeficiente constante (número; ángulo en radianes; función trigonométrica, función logarítmica; etc.) que es independiente de la dimensión de las magnitudes (unidades) fundamentales, entonces la dimensión de X es nula, y X es denominada “adimensional”.

$$X = N \text{ (numero)} \Rightarrow [X] = 1$$

$$X = \text{Sen}\alpha \Rightarrow [X] = 1 \text{ y } [\alpha]$$

$$X = \text{Ln}8 \Rightarrow [X] = 1$$

$$X = \text{Cos}45^\circ \Rightarrow [X] = 1$$

$$X^m \Rightarrow [m] = 1$$

$$X = 2\pi \Rightarrow [X] = 1$$

$$X = \sqrt{2} \Rightarrow [X] = 1$$

$$X = \frac{1}{2} \Rightarrow [X] = 1$$

Los ángulos son números, los exponentes son números.

9. ECUACIONES DIMENSIONALES

Son aquellas ecuaciones que, expresadas en términos de magnitudes físicas, se verifican para un determinado conjunto de magnitudes o dimensiones.

$$[potencia] = [A][fuerza] = [B][energia]$$

Donde al resolver la ecuación obtenemos:

$$[A] = L.T^{-1} \quad \text{y} \quad [B] = T^{-1}$$

10. PRINCIPIO DE HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL.

En toda fórmula física que expresa la relación entre las diferentes magnitudes físicas, las dimensiones en el primer miembro y segundo miembro, deben ser iguales.

Sea la fórmula física:

$$A = B^n \Rightarrow [A] = [B]^n$$

En general, todos los términos de una fórmula física son dimensionalmente iguales:

$$A = B^n - \sqrt{C} \Rightarrow [A] = [B]^n = [\sqrt{C}]$$

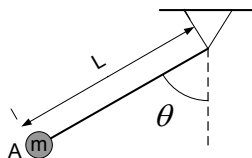
11. FINES Y OBJETIVOS DEL ANÁLISIS ADIMENSIONAL

- a) Expresar las magnitudes derivadas en función de las magnitudes fundamentales.
- b) Comprobar la veracidad de las fórmulas físicas mediante el principio de homogeneidad dimensional.
- c) Determinar fórmulas físicas empíricas a partir de datos experimentales en el laboratorio.

12. FÓRMULAS EMPÍRICAS

Son aquellas formulas físicas que se obtienen a partir de datos obtenidos en el laboratorio o de la vida cotidiana.

EJEMPLO: El periodo (T) de un péndulo simple depende de la longitud de la cuerda (l) y de la aceleración de la gravedad (g).



Resolución

PRIMER PASO. Escribimos el periodo T en función de la longitud de la cuerda y de la aceleración de la gravedad, donde x e y son las dimensiones que queremos determinar:

$$T = K l^x \cdot g^y \quad \dots\dots (1)$$

Aplicando el principio de homogeneidad dimensional tenemos:

$$[T] = [K][l]^x [g]^y$$

SEGUNDO PASO. Reemplazando la fórmula dimensional:

$$T = 1.(L)^x.(LT^{-2})^y$$

A bases iguales le corresponden exponentes iguales:

$$L^0 T^1 = L^x \cdot L^y \cdot T^{-2y}$$

$$L^0 T^1 = L^{x+y} \cdot T^{-2y}$$

$$L: 0 = x + y \quad \dots\dots (2)$$

$$T: 1 = -2y \quad \dots\dots (3)$$

Resolviendo las ecuaciones (2) y (3):

$$x = 1/2 \quad \text{e} \quad y = -1/2$$

TERCER PASO. Reemplazando en la ecuación (1) tenemos que:

$$T = K l^{1/2} \cdot g^{-1/2} \Rightarrow T = K \sqrt{\frac{l}{g}}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Respecto a la siguiente ecuación dimensionalmente correcta: $A = p + 0,5 \cdot x \cdot v^2$ donde “p” representa la presión y “v” la velocidad. Determine las unidades de la magnitud “x” en el sistema internacional.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Aplicamos el principio de homogeneidad dimensional:

$$[A] = [p] = [0,5] \cdot [x] \cdot [v^2] \Rightarrow [p] = [x] \cdot [v^2]$$

$$[x] = \frac{[p]}{[v^2]} \Rightarrow [x] = \frac{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}}{L^2 \cdot T^{-2}} = M \cdot L^{-3}$$

SEGUNDO PASO. Las unidades de “x” en el sistema internacional.

$$[x] = M \cdot L^{-3} \Rightarrow kg \cdot m^{-3}$$

2. La ecuación $V = A \cdot \text{Sen}(B \cdot t) + C \cdot t^{\text{Sen}30^\circ}$ es dimensionalmente homogénea, en donde V: velocidad y t: tiempo.

Determine la expresión dimensional de $A \cdot B \cdot C^{-1}$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Aplicamos el principio de homogeneidad dimensional:

$$[V] = [A] \cdot [\text{Sen}(B \cdot t)] = [C] \cdot [t^{0,5}]$$

$$[V] = [A] = [C] \cdot [t^{0,5}]$$

Igualemos los dos primeros términos: $[V] = [A] = L \cdot T^{-1} \dots (1)$

Igualemos los términos extremos:

$$[V] = [C] \cdot [t^{0,5}] \Rightarrow L \cdot T^{-1} = [C] \cdot T^{0,5}$$

Despejando: $[C] = L \cdot T^{-1,5} \dots (2)$

SEGUNDO PASO. Analizamos el ángulo. El ángulo es adimensional, el ángulo es un número.

$$[B \cdot t] = 1 \Rightarrow [B] \cdot T = 1 \Rightarrow [B] = T^{-1} \dots (3)$$

TERCER PASO. Reemplazamos (1), (2) y (3) en:

$$\frac{[A] \cdot [B]}{[C]} = \frac{(L \cdot T^{-1}) \cdot (T^{-1})}{L \cdot T^{-1,5}} = T^{-0,5}$$

Respuesta: $\frac{1}{\sqrt{T}}$

3. Respecto al sistema internacional de unidades se propone:

I. La candela es unidad de una cantidad física fundamental.

II. La cantidad de sustancia y la masa son la misma cantidad física fundamental.

III. El coulomb es unidad de una cantidad física fundamental.

A) VVV B) VVF C) VFF D) FVF E) FFF

RESOLUCIÓN

I. La candela es unidad de la intensidad luminosa y es una magnitud física fundamental.

PROPOSICIÓN VERDADERA.

II. La cantidad de sustancia se mide en número de moles y la masa se mide en kilogramos, son cantidades físicas diferentes.

PROPOSICIÓN FALSA.

III. El coulomb es unidad de cantidad de carga eléctrica y es una magnitud derivada en el sistema internacional de unidades.

PROPOSICIÓN FALSA.

4. De las siguientes cantidades físicas indique, ¿cuál no es considerada fundamental en el sistema internacional de unidades?

A) Temperatura B) Masa C) Tiempo D) Carga eléctrica
E) Intensidad luminosa.

RESOLUCIÓN

La carga eléctrica (q) es una magnitud física derivada.

$$[q] = [i] \cdot [t] = I \cdot T$$

Respuesta D.

5. Determine la fórmula dimensional de A en la siguiente fórmula física: $A = \frac{F \cdot T}{M \cdot V} - \sqrt{B}$ donde, F: fuerza; T: tiempo; M: masa; V: velocidad

RESOLUCIÓN

Aplicamos el principio de homogeneidad dimensional:

$$[A] = \left[\frac{F \cdot T}{M \cdot V} \right] = [\sqrt{B}]$$

Comparando los dos primeros términos:

$$[A] = \left[\frac{F \cdot T}{M \cdot V} \right] \Rightarrow [A] = \frac{[F] \cdot [T]}{[M] \cdot [V]}$$

Reemplazando:

$$[A] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot (T)}{(M) \cdot L \cdot T^{-1}} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-1}}{M \cdot L \cdot T^{-1}} = 1$$

Respuesta: Vemos que A representa una cantidad sin dimensiones, es decir es un número.

6. ¿Cuál es la lectura correcta de la siguiente cantidad de física $1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

A) kilogramo por metro sobre segundo.
B) kilogramo por metro por segundo.
C) kilogramo metro por segundo.
D) kilogramo metro segundo.
E) Ninguna anterior

Resolución

Norma del sistema internacional de unidades:

Sea A y B unidad de magnitudes físicas.

A.B: se lee, “AB”

$\frac{A}{B}$: se lee, “A por B”

$1\text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$, se lee, kilogramo metro por segundo.

Respuesta: C

7. La representación mediante símbolos de la unidad, *joule por kilogramo kelvin*, es:

- A) $J \cdot \text{kg} \cdot K$ B) $\frac{J}{\text{kg}} \cdot K$ C) $\frac{J}{K} \cdot \text{kg}$ D) $\frac{J}{\text{kg} \cdot K}$ E) $\frac{1}{J \cdot \text{kg} \cdot K}$

Resolución

Norma del sistema internacional de unidades:

Sea A y B unidad de magnitudes físicas.

A.B: se lee, “AB”

$\frac{A}{B}$: se lee, “A por B”

joule por kilogramo kelvin: $\frac{J}{\text{kg} \cdot K}$

Respuesta: D

8. Determine la fórmula dimensional de C en la siguiente fórmula física: $C = \frac{m \cdot v^{\text{Sec}60^\circ}}{F \cdot H}$

donde, m: masa; v: velocidad; F: fuerza; H: altura

Resolución

En el proceso el valor del exponente se respeta: $\text{Sec}60^\circ = 2$

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[C] = \frac{[m] \cdot [v]^2}{[F] \cdot [H]} = \frac{(M) \cdot (L.T^{-1})^2}{(M.L.T^{-2}) \cdot (L)} = 1$$

$$[C] = 1$$

Respuesta: C es una cantidad adimensional.

9. Determine la fórmula dimensional de H en la siguiente fórmula física: $H = \frac{D \cdot g \cdot h}{P}$

donde, D: densidad g: gravedad h: altura P: presión

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[H] = \frac{[D] \cdot [g] \cdot [h]}{[P]}$$

$$[H] = \frac{(M.L^{-3}) \cdot (L.T^{-2}) \cdot (L)}{M.L^{-1}.T^{-2}} = 1$$

Respuesta: H es una cantidad adimensional.

10. La expresión dimensional del producto de la masa por la velocidad es igual a la expresión dimensional de:

A) Energía multiplicada por el tiempo. B) Potencia multiplicada por el tiempo.
 C) Densidad multiplicada por la potencia. D) Fuerza multiplicada por la velocidad.
 E) Fuerza multiplicada por el tiempo.

Resolución

La masa por la velocidad es el módulo de la cantidad de movimiento o impulso.

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

El impulso se define como el producto de la fuerza por el tiempo.

$$[Impulso] = [fuerza] \cdot [tiempo]$$

Respuesta: E

11. En la ecuación $X = A \cdot \text{Sen}(Bt + \phi) + C \cdot t^2 + D$ es dimensionalmente homogénea, donde, X: distancia, t: tiempo.

Determine la fórmula dimensional de $\frac{A \cdot C}{B \cdot D}$

Resolución

PRIMER PASO. Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[X] = [A] \cdot [\text{Sen}(Bt + \phi)] = [C] \cdot [t]^2 = [D]$$

La fórmula dimensional de A es:

$$[X] = [A] \cdot [\text{Sen}(Bt + \phi)] \Rightarrow [A] = [X] = L$$

SEGUNDO PASO. La fórmula dimensional de B es:

$$\text{Sen}(Bt + \phi) \Rightarrow [Bt] = [\phi] = [\text{angulo}] = 1$$

$$[Bt] = 1 \Rightarrow [B] = T^{-1}$$

TERCER PASO. La fórmula dimensional de C es:

$$[X] = [Ct^2] \Rightarrow [C] = \frac{[X]}{[t^2]} = \frac{L}{T^2} = L \cdot T^{-2}$$

CUARTO PASO. La fórmula dimensional de D es: $[X] = [D] = L$

Reemplazando en:

$$\left[\frac{A \cdot C}{B \cdot D} \right] = \frac{[A][C]}{[B][D]} = \frac{(L)(L \cdot T^{-2})}{(T^{-1})(L)} = L \cdot T^{-1}$$

Respuesta: $\left[\frac{A \cdot C}{B \cdot D} \right] = L \cdot T^{-1}$

12. Si la siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea, determine la fórmula dimensional de "X": $X = \omega \cdot A \cdot \text{Cos}(\omega t + \delta)$,
 donde, A: longitud, t: tiempo.

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[\omega t] = [\delta] = [\text{angulo}] = 1$$

$$[\omega t] = 1 \Rightarrow [\omega] = T^{-1}$$

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[X] = [\omega] \cdot [A] \cdot [\cos(\omega t + \delta)]$$

$$[X] = (T^{-1}) \cdot (L) \cdot (1) = LT^{-1}$$

Respuesta: $[X] = LT^{-1}$

13. En la siguiente fórmula física: $W = k.m.C^x$, determine el valor de “x”, donde: k: número, W : trabajo, m : masa C : velocidad

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[W] = [k] \cdot [m] \cdot [C]^x$$

$$M.L^2.T^{-2} = 1.(M).(LT^{-1})^x$$

$$L^2.T^{-2} = L^x.T^{-x}$$

“A bases iguales le corresponden exponentes iguales”

$$x = 2$$

Respuesta: el valor de x es 2.

14. Determine el valor de “x” en la siguiente fórmula física: $T^x = K \left(\frac{d}{a} \right)$

donde, d: distancia a: aceleración T: tiempo K: número

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[T]^x = [K] \cdot \left[\frac{d}{a} \right]$$

$$T^x = (1) \cdot \frac{L}{L.T^{-2}} = T^2$$

“A bases iguales le corresponden exponentes iguales”

$$x = 2$$

Respuesta: el valor de x es 2.

15. El tiempo transcurrido “t” de caída libre depende de la altura “h” que descende y de la aceleración de la gravedad “g”. Sabiendo que: $t = \sqrt{2} \cdot h^a \cdot g^b$, determine $(a-b)$

Resolución

PRIMER PASO. Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[t] = [\sqrt{2}] \cdot [h]^a \cdot [g]^b$$

$$T = (1) \cdot (L)^a \cdot (LT^{-2})^b$$

$$L^0.T^1 = L^{a+b}.T^{-2b}$$

SEGUNDO PASO. “A bases iguales le corresponden exponentes iguales”

$$L: 0 = a + b \quad \dots (1)$$

$$T: 1 = -2b \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1): $a = +\frac{1}{2}$

Respuesta: $(a+b) = +1$

16. Conociendo la fórmula física para determinar la cantidad de calor “Q” que gana o pierde un cuerpo: $Q = m.Ce.\Delta T$, donde “m” es la masa, Ce representa el calor específico y ΔT es el cambio de la temperatura. Determine la fórmula dimensional del calor específico.

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$Ce = \frac{Q}{m.\Delta T} \Rightarrow [Ce] = \frac{[Q]}{[m].[\Delta T]}$$

$$[Ce] = \frac{M.L^2.T^{-2}}{(M).(\Theta)} = L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}$$

Respuesta: $[Ce] = L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}$

17. La intensidad de corriente eléctrica “i” se define como: $i = \frac{q}{\Delta t}$, donde “q” es la cantidad de carga eléctrica que atraviesa la sección recta de un conductor en un intervalo de tiempo Δt . Determine la fórmula dimensional de la carga eléctrica.

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$q = i.\Delta t \Rightarrow [q] = [i].[\Delta t]$$

Respuesta: $[q] = I.T$

18. La diferencia de potencial ΔV se define como la cantidad de trabajo W hecho por el agente externo por cada unidad de cantidad de carga eléctrica q . Si $\Delta V = \frac{W}{q}$, determine la fórmula dimensional del potencial eléctrico.

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[\Delta V] = \frac{[W]}{[q]} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{I.T}$$

$$[\Delta V] = \frac{[W]}{[q]} = M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$$

Respuesta: $[\Delta V] = M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$

19. La diferencia de potencial ΔV entre los extremos de una resistencia R es directamente proporcional a la intensidad de corriente eléctrica i que la atraviesa. Si $\Delta V = i.R$, determine la fórmula dimensional de la resistencia eléctrica.

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[R] = \frac{[\Delta V]}{[i]} = \frac{M.L^2.T^{-3}.I^{-1}}{I}$$

$$[R] = \frac{[\Delta V]}{[i]} = M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$$

Respuesta: $[R] = M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$

20. La capacidad eléctrica “C” de un cuerpo conductor se define como: $C = \frac{Q}{\Delta V}$ donde **Q** es la cantidad de carga que recibe el cuerpo y ΔV es el cambio de potencial eléctrico. Determine la fórmula dimensional de la capacidad eléctrica.

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[C] = \frac{[Q]}{[\Delta V]} = \frac{I.T}{M.L^2.T^{-3}.I^{-1}}$$

$$[C] = \frac{[Q]}{[\Delta V]} = M^{-1}.L^2.T^4.I^2$$

Respuesta: $[C] = M^{-1}.L^2.T^4.I^2$

21. La fuerza **F** que actúa sobre un alambre recto de largo **L**, por el cual circula una corriente eléctrica **i**, dentro de un campo magnético de intensidad **B** es: $F = i.L.B$ Determine la fórmula dimensional de la intensidad del campo magnético.

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$B = \frac{F}{i.L} \Rightarrow [B] = \frac{[F]}{[i].[L]}$$

$$[B] = \frac{M.L.T^{-2}}{I.L} = M.T^{-2}.I^{-1}$$

Respuesta: $[B] = M.T^{-2}.I^{-1}$

22. El flujo magnético ϕ se define como el producto de la intensidad del campo magnético **B**, por el área **A** y por el coseno del ángulo. $\phi = B.A.Cos\theta$

Determine la fórmula dimensional del flujo magnético.

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[\phi] = [B].[A].[Cos\theta]$$

$$[\phi] = (M.T^{-2}.I^{-1}).(L^2).(1)$$

Respuesta: $[\phi] = M.L^2.T^{-2}.I^{-1}$

23. Si la longitud final de una barra al dilatarse está dada por la fórmula: $L_f = L_0(1 + \alpha.\Delta T)$ donde L_0 es la longitud inicial de la barra, α representa el coeficiente de dilatación lineal y ΔT la variación de la temperatura. Determine la fórmula dimensional del coeficiente de dilatación lineal.

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[1] = [\alpha.\Delta T] = [numero] = 1$$

$$[\alpha].[\Delta T] = 1 \Rightarrow [\alpha].\Theta = 1$$

Respuesta: $[\alpha] = \Theta^{-1}$

24. El incremento de la entropía de un gas se calcula con la siguiente fórmula: $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$ donde ΔQ es la cantidad de calor absorbido por el gas a la temperatura absoluta T . Determine la fórmula dimensional de la entropía.

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[\Delta S] = \frac{[\Delta Q]}{[T]} \Rightarrow [\Delta S] = \frac{M.L^2.T^{-2}}{\Theta}$$

Respuesta: $[\Delta S] = M.L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}$

25. La energía cinética promedio de una molécula monoatómica de un gas se determina con la fórmula: $E = \frac{3}{2}K.T$ donde K representa a la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta. Determine la fórmula dimensional de K .

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[E] = \left[\frac{3}{2}\right][K].[T] \Rightarrow [K] = \frac{[E]}{[T]}$$

$$[K] = \frac{M.L^2.T^{-2}}{\Theta}$$

Respuesta: $[K] = M.L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}$

26. Se muestra la ecuación de estado termodinámico de un gas ideal: $P.V = n.R.T$ donde P es la presión, V el volumen, “ n ” cantidad de sustancia, R la constante universal de los gases y T la temperatura absoluta.

Resolución

Aplicación del principio de homogeneidad dimensional:

$$[P].[V] = [n].[R].[T]$$

$$(M.L^{-1}.T^{-2}).(L^3) = (N).[R].(\Theta)$$

$$[R] = \frac{(M.L^{-1}.T^{-2}).(L^3)}{N.\Theta}$$

Respuesta: $[R] = M.L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}.N^{-1}$

27. La posición de una partícula sobre el eje X está dada por: $x = k_1 + k_2T + \frac{1}{2}k_3T^2$

donde, x : distancia y T : tiempo. Determinar: $\left[\frac{k_3}{k_1.k_2}\right]$

Resolución

PRIMER PASO. Aplicamos el principio de homogeneidad dimensional:

$$[x] = [k]_1 = [k_2T] = \left[\frac{1}{2}k_3T^2\right] = L$$

Despejando tenemos: $[k_1] = L$

$$[k_2 T] = L \Rightarrow [k_2] = L.T^{-1}$$

SEGUNDO CASO. La fórmula dimensión de un número es igual a la unidad.

$$\left[\frac{1}{2} k_3 T^2 \right] = L \Rightarrow [k_3] = L.T^{-2}$$

$$\text{Finalmente: } \left[\frac{k_3}{k_1.k_2} \right] = \frac{L.T^{-2}}{(L).LT^{-1}} = L^{-1}.T^{-1}$$

28. La siguiente es una fórmula física correcta: $Q = K.A.\sqrt{2gh}$ donde; Q: caudal (m^3/s), A: área; g: aceleración de la gravedad, h: altura. Determinar la fórmula dimensional de K.

Resolución

PRIMER PASO. Fórmula dimensional del caudal, área, gravedad y altura:

$$[Q] = L^3.T^{-1}; [A] = L^2; [g] = L.T^{-2}; [h] = L$$

SEGUNDO PASO. Aplicamos el principio de homogeneidad dimensional:

$$[Q] = [K].[A].\sqrt{[2]}\sqrt{[g]}\sqrt{[h]}$$

$$L^3.T^{-1} = [K].L^2.\sqrt{1.L.T^{-2}.L}$$

$$L^3.T^{-1} = [K].L^2.(L.T^{-1})$$

Despejando: $[K] = 1$

Respuesta: K representa una cantidad sin dimensiones, es decir es un número.

29. En la ecuación $A \bullet B + B \bullet C + A \bullet C = P^2$, donde P representa a la presión, la fórmula dimensional del producto $[A \bullet B \bullet C]$ es:

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Aplicamos el principio de homogeneidad dimensional:

$$[AB] = [BC] = [AC] = [P^2]$$

Despejando tenemos que:

$$[AB] = [P^2] \quad \dots (1)$$

$$[BC] = [P^2] \quad \dots (2)$$

$$[AC] = [P^2] \quad \dots (3)$$

SEGUNDO PASO. Multiplicando miembro a miembro:

$$[A^2.B^2.C^2] = [P^6]$$

Sacando la raíz cuadrada a ambos miembros:

$$[A.B.C] = [P^3] = (M.L^{-1}.T^2)^3$$

Finalmente:

$$[A.B.C] = M^3.L^{-3}.T^6$$

30. Determine la fórmula dimensional de A en la siguiente fórmula física: $A = \frac{F.T}{M.V} - \sqrt{B}$ donde, F:

fuerza; T: tiempo; M: masa; V: velocidad

Resolución

PRIMER PASO. Aplicamos el principio de homogeneidad dimensional:

$$[A] = \left[\frac{F.T}{M.V} \right] = [\sqrt{B}]$$

SEGUNDO PASO. Comparando los dos primeros términos:

$$[A] = \left[\frac{F.T}{M.V} \right] \Rightarrow [A] = \frac{[F].[T]}{[M].[V]}$$

Reemplazando:

$$[A] = \frac{M.L.T^{-2}.(T)}{(M).L.T^{-1}} = \frac{M.L.T^{-1}}{M.L.T^{-1}} = 1$$

Respuesta: Vemos que A representa una cantidad sin dimensiones, es decir es un número.

31. Si la ecuación $V = \frac{t^3}{a} + \frac{b+h}{c}$ es dimensionalmente homogénea, en donde V = volumen, t = tiempo y h = altura, determine la fórmula dimensional de $\frac{a.c}{b}$.

Resolución

PRIMER PASO. Aplicamos el principio de homogeneidad dimensional:

$$[V] = \left[\frac{t^3}{a} \right] = \left[\frac{b+h}{c} \right]$$

$$\left[\frac{b+h}{c} \right] \Rightarrow [b+h] = [b] = [h] = L \quad \dots (1)$$

$$[V] = \left[\frac{t^3}{a} \right] \Rightarrow L^3 = \frac{T^3}{[a]}$$

$$\text{Despejando tenemos: } [a] = L^{-3}.T^3 \quad \dots (2)$$

$$\text{Analizando: } [V] = \left[\frac{b+h}{c} \right] \Rightarrow L^3 = \frac{L}{[c]}$$

$$\text{Despejando tenemos: } [c] = L^{-2} \quad \dots (3)$$

SEGUNDO PASO. Reemplazando (1), (2) y (3) calculamos

$$\therefore \left[\frac{a.c}{b} \right] = \frac{[a].[c]}{[b]} = \frac{(L^{-3}.T^3).L^{-2}}{L}$$

$$\text{Finalmente: } \left[\frac{a.c}{b} \right] = \frac{(L^{-3}.T^3).L^{-2}}{L} = L^{-6}.T^3$$

32. La velocidad V de propagación de una onda mecánica, en una cuerda tensa, depende del módulo de la tensión T en la cuerda y de la densidad lineal de masa δ (masa/ longitud). Determine la fórmula empírica para determinar la velocidad de propagación.

Resolución

PRIMER PASO. Escribimos la velocidad en función de la tensión (fuerza) T y la densidad lineal

$$\delta: V = K.T^x.\delta^y \quad \dots (*)$$

donde K representa una constante numérica, donde x e y son las dimensiones que queremos determinar.

$$[\delta] = \left[\frac{\text{masa}}{\text{longitud}} \right] = \frac{M}{L} = M.L^{-1}$$

Aplicando el principio de homogeneidad dimensional tenemos:

$$[V] = [K] \cdot [T]^x \cdot [\delta]^y$$

SEGUNDO PASO. Reemplazando la fórmula dimensional:

$$L.T^{-1} = 1.(M.L.T^{-2})^x.(M.L^{-1})^y$$

A bases iguales le corresponden exponentes iguales:

$$M^0.L.T^{-1} = (M^x.L^x.T^{-2x}).(M^y.L^{-1y})$$

$$M^0.L^1.T^{-1} = M^{x+y}.L^{x-y}.T^{-2x}$$

$$\text{Base M: } 0 = x + y \quad \dots (1)$$

$$\text{Base L: } 1 = x - y \quad \dots (2)$$

$$\text{Base T: } -1 = -2x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \dots (3)$$

$$\text{Reemplazando en (1): } 0 = x + y \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + y \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

TERCER PASO. Reemplazando en la ecuación inicial (*):

$$V = K.T^{1/2}.\delta^{-1/2}$$

$$\text{Finalmente obtenemos: } V = K.\sqrt{\frac{T}{\delta}}$$

Respuesta: La rapidez de la onda es directamente proporcional a la raíz cuadrada del módulo de la tensión en la cuerda.

33. La velocidad V el sonido en un gas depende de la presión P y de la densidad D del mismo gas. Determine la fórmula física para determinar la velocidad del sonido en cualquier gas.

Resolución

PRIMER PASO. Escribimos la velocidad V en función de la presión y de la densidad.

$$V = P^x.D^y \quad \dots (*)$$

Aplicando el principio de homogeneidad dimensional tenemos:

$$[V] = [P]^x.[D]^y$$

$$\text{SEGUNDO PASO. Reemplazando la fórmula dimensional: } L.T^{-1} = (M.L^{-1}.T^{-2})^x.(M.L^3)^y$$

$$\text{A bases iguales le corresponden exponentes iguales: } L.T^{-1} = (M^x.L^{-x}.T^{-2x}).(M^y.L^{3y})$$

$$M^0.L^1.T^{-1} = M^{x+y}.L^{-x+3y}.T^{-2x}$$

$$\text{Base M: } 0 = x + y \quad \dots (1)$$

$$\text{Base L: } 1 = -x + 3y \quad \dots (2)$$

$$\text{Base T: } -1 = -2x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \dots (3)$$

$$\text{Reemplazando en (1): } 0 = x + y \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + y \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

TERCER PASO. Reemplazando en la ecuación inicial (*):

$$V = P^{1/2}.V^{-1/2}$$

$$V = \sqrt{\frac{P}{D}}$$

Respuesta: La rapidez del sonido es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la presión.

PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE

1. Determinar las unidades de Q en el sistema internacional:

$$Q = (3a + 7 \text{ kg}) \cdot (5b - 9,81 \text{ m.s}^{-2})$$

Respuesta: *newtons*

2. Determinar la fórmula dimensional de A: $A = m.v$, donde “m” representa la masa y “v” la velocidad.

Respuesta: $M.L.T^{-1}$

3. Determinar la fórmula dimensional de B: $B = F.t$, donde “F” representa la fuerza y “t” el tiempo transcurrido.

Respuesta: $M.L.T^{-1}$

4. Determinar la fórmula dimensional de C:

$$C = \frac{3x + 10 \text{ litros}}{5y - 2 \text{ segundos}}$$

Respuesta: $L^3.T^{-1}$

5. Determinar las unidades de D en el sistema internacional:

$$D = (2x + 5 \text{ kg}) \cdot (4y + 3 \text{ m.s}^{-1})^2$$

Respuesta: *joules*

6. Determinar las unidades de E en el sistema internacional:

$$E = \frac{(2x + 5 \text{ kg}) \cdot (4w + 9,81 \text{ m.s}^{-2})}{6y - 0,4 \text{ m}^2}$$

Respuesta: *pascal*

7. Determinar la formula dimensional F: $F = \frac{(\text{velocidad}) \cdot (\text{fuerza})}{(\text{trabajo})}$

Respuesta: T^{-1}

8. Determinar la formula dimensional de G: $G = 6.m.v + 5.F.t$ donde “m” representa la mas, “v” velocidad, “F” fuerza y “t” es el tiempo.

Respuesta: $M.L.T^{-1}$

9. En la siguiente ecuación dimensional:

$$A.(Trabajo) = B.(Fuerza) + C.(velocidad)^2$$

Determine la fórmula dimensional de B.C

Respuesta: $M.L$

10. En la siguiente ecuación dimensional:

$$A.(Potencia) = B.(trabajo) + C.(fuerza)$$

Determine la fórmula dimensional de B.C

Respuesta: $L.T^{-2}$

11. Determine la fórmula dimensional de A en la siguiente fórmula física: $A = \frac{F.T}{M.V}$; donde, F: fuerza; T: tiempo; M: masa; V: velocidad
 A) L^{-2} B) T^0 C) T^2 D) $ML^{-2} T$ E) T^{-2}

12. Determine la fórmula dimensional de B en la siguiente fórmula física: $B = \frac{m.v^3}{F.A}$; donde, m: masa; v: velocidad; F: fuerza; A: área
 A) T^{-1} B) T^0 C) T^2 D) $ML^{-2} T$ E) T^{-2}

13. Determine la fórmula dimensional de C en la siguiente fórmula física: $C = \frac{m.v^{\sec 60^\circ}}{F.H}$
 donde, m: masa; v: velocidad; F: fuerza; H: altura
 A) ML^{-2} B) T^0 C) MT^2 D) $ML^{-2} T$ E) MT^{-2}

14. Determine la fórmula dimensional de D en la siguiente fórmula física: $D = \sqrt{2hg}.A$
 donde, h: altura; g: aceleración; A: área
 A) L^{-2} B) L^3T^{-1} C) LT^2 D) $ML^{-2} T$ E) LT^{-2}

15. Determine la fórmula dimensional de “E”, en la siguiente fórmula: $E = \sqrt{\frac{W}{m}}$
 donde, W: trabajo m: masa
 A) L^{-2} B) LT^{-1} C) LT^2 D) $ML^{-2} T$ E) LT^{-2}

16. La fuerza F de atracción entre dos masas es directamente proporcional al producto de las masas (m_1 y m_2) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia “d”, como indica la siguiente fórmula: $F = K \frac{m_1.m_2}{d^2}$. Determine la fórmula dimensional de la constante de gravitación K.
 A) $M^{-1}L^4T^{-2}$ B) $M^{-1}L^4T^{-1}$ C) $M^{-1}L^3T^{-2}$ D) $M^{-1}L^2T^{-2}$ E) $M^{-1}LT^{-2}$

17. Determine la fórmula dimensional de “Z”, en la siguiente fórmula: $Z = \sqrt{\frac{B+H}{v.t}}$
 donde, B: volumen t: tiempo v: velocidad
 A) L^{-2} B) LT^{-1} C) L D) $ML^{-2} T$ E) LT^{-2}

18. En la siguiente fórmula: $R = \frac{A+x}{y} + \sqrt{\frac{P+U}{x}}$; determine la fórmula dimensional de “R”
 donde, A: aceleración U: fuerza
 A) $\sqrt{M}$ B) $\sqrt{T}$ C) $\sqrt{L}$ D) $ML^{-2} T$ E) T^{-2}

19. Determine la fórmula dimensional de a.b.c en la siguiente fórmula física: $d = a + bt + \frac{ct^2}{2}$
 donde, d: distancia t: tiempo
 A) L^{-2} B) L^3T^{-3} C) LT^2 D) $L^{-2} T$ E) LT^{-3}

20. Determine la fórmula dimensional de A.B.C en la siguiente fórmula física:

$$\text{Sen}30^\circ = A + B.t + \sqrt{\frac{C}{t}} \quad \text{donde, } t: \text{ tiempo}$$

- A) L^{-2} **B) T^0** C) T^2 D) $ML^{-2}T$ E) T^{-2}

21. Determine la fórmula dimensional de H en la siguiente formula física: $H = \frac{D \cdot g \cdot h}{P}$

donde, D: densidad g: aceleración de la gravedad h: altura P: presión

- A) L^0** B) L C) L^2 D) ML^{-2} E) MLT^{-2}

22. Determine la fórmula dimensional de K en la siguiente fórmula física: $K = \frac{X \cdot V \cdot A}{E}$

donde; X: distancia, V: velocidad, A: aceleración E: energía

- A) $M^{-1}LT^{-1}$** B) LT^{-2} C) ML^2 D) ML^{-2} E) MLT^{-2}

23. La expresión dimensional del producto de la masa por la velocidad es igual a la expresión dimensional de:

- A) Energía multiplicada por el tiempo. B) Potencia multiplicada por el tiempo.
C) Densidad multiplicada por la potencia. D) Fuerza multiplicada por la velocidad.

E) Fuerza multiplicada por el tiempo.

24. Determine la fórmula dimensional de B, en la siguiente expresión que dimensionalmente homogénea: $B = \frac{T \cdot P \cdot \text{Cos}53^\circ}{\delta}$

donde: T = trabajo; P = presión; δ = densidad

- A) LT^{-1} B) ML^4T^{-4} C) ML^2T^{-3} D) MLT^{-1} E) $M^2L^2T^{-2}$

25. En la ecuación $X = A \cdot \text{Sen}(B.t + \phi) + C.t^2 + D$ es dimensionalmente homogénea, donde, X:

distancia, t: tiempo. Determine la fórmula dimensional de $\frac{A \cdot C}{B \cdot D}$

- A) L B) LT^{-1} C) LT^{-2} D) L^2T^{-1} E) L^2T^{-2}

26. La ecuación que permite calcular el gasto o caudal que circula por un orificio de un deposito es:

$$Q = C \cdot A \cdot \sqrt{2gh}, \quad \text{determine la fórmula dimensional de "C" siendo:}$$

g: aceleración de la gravedad; Q: caudal $\left(\frac{\text{litros}}{\text{segundo}}\right)$; A: área; h: altura

- A) L B) L^{-1} C) L^3T^{-1} D) L^3T E) 1

27. Si las ecuaciones mostradas son dimensionalmente correctas, determine la fórmula dimensional de "X": $A + B = C + D$ donde $A \cdot B = 6(kg \cdot m)^2$ y

$$2A + 3H = 4C + 5E + X \cdot F \quad \text{donde} \quad \frac{F}{C} = 4m.$$

- A) 1 B) L^2 C) L^{-1} D) L^{-2} E) ML

28. En la siguiente expresión física dimensionalmente correcta: $V = V_0 + at$, donde “V” se mide en m/s, “a” en m/s^2 y “t” en segundos. Entonces las unidades de $\frac{V_0}{a}$ son:

A) m B) m/s C) s D) m/s^2 E) s^{-1}

29. Si la siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea, determine la fórmula dimensional de “X”: $X = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \delta)$, donde, A: longitud, t: tiempo.

A) L B) LT^{-1} C) LT^{-2} D) L^2T^{-1} E) L^2T^{-2}

30. En un experimento de física, un cachimbo desea encontrar la velocidad del aire “V” que genera un ventilador mecánico, la cual depende de la fuerza “F” del aire, la potencia “P” desarrollada por la persona que acciona el ventilador y la fuerza de rozamiento “K”, encontrando la siguiente ecuación: $V = \alpha \cdot F \cdot P + B \cdot K$

Determine la fórmula dimensional $\frac{\alpha}{B^2}$

A) L^{-2}T^2 B) LT^{-1} C) LT^{-2} D) L^2T^{-1} E) L^3T^{-2}

31. En la siguiente fórmula física: $A = \text{Sen}(30^\circ + B \cdot t) + \text{Cos}(60^\circ + C)$, determine la fórmula dimensional de A.B.C, donde, t: tiempo

A) L^0 B) T C) T^2 D) ML^{-2} E) T^{-2}

32. En la siguiente ecuación dimensionalmente homogénea $y = A \cdot \text{Sen}\left(\frac{2\pi t}{J} + \frac{2\pi x}{K}\right)$, donde “A” es la amplitud (en metros), “t” es el tiempo (en segundos) y “x” es la posición (en metros).

Determine la fórmula dimensional de $\frac{y}{J \cdot K}$

A) T^0 B) TL^2 C) T^2 D) ML^{-2} E) T^{-1}

33. En cierto planeta la fuerza F de atracción entre dos masas es directamente proporcional al producto de las masas (m_1 y m_2) e inversamente proporcional al cubo de la distancia “d”, como indica la siguiente fórmula: $F = K \frac{m_1 m_2}{d^3}$. Determine la fórmula dimensional de la constante de gravitación K.

A) $\text{M}^{-1}\text{L}^4\text{T}^{-2}$ B) $\text{M}^{-1}\text{L}^4\text{T}^{-1}$ C) $\text{M}^{-1}\text{L}^3\text{T}^{-2}$ D) $\text{M}^{-1}\text{L}^2\text{T}^{-2}$ E) $\text{M}^{-1}\text{LT}^{-2}$

34. La fuerza F de repulsión, entre dos cargas eléctricas del mismo signo, es directamente proporcional al producto de las cargas (q_1 y q_2) en inversamente proporcional al cuadrado de la distancia “d”, como indica la siguiente fórmula: $F = K \frac{q_1 q_2}{d^2}$. Determine la fórmula dimensional de K.

A) I^{-2} B) $\text{ML}^3\text{T}^{-4}\text{I}^{-2}$ C) $\text{ML}^4\text{T}^{-4}\text{I}^{-2}$ D) $\text{ML}^3\text{T}^{-4}\text{I}^{-1}$ E) $\text{L}^3\text{T}^{-4}\text{I}^{-2}$

PROPIEDAD DE LOS EXPONENTES

35. En la siguiente formula física determine la medida del ángulo θ donde A y B representan a ciertas magnitudes físicas.

$$\sqrt[3]{A^8 - B^8 - C^8} = A \cdot B \cdot C^{\tan \theta}$$

- A) $ArTan\left(\frac{2}{3}\right)$ B) 37° C) 45° D) 53° E) N.A

36. Si $N = 5 \text{ m}^2$, S se mide en segundos, y A representa la aceleración, entonces la relación dimensionalmente correcta es:

- A) $A = \frac{N}{S}$ B) $A = N.S$ C) $A = \frac{\sqrt{N}}{S^2}$ D) $A = \frac{N}{S^2}$ E) $A = \sqrt{N}.S^2$

37. En la siguiente fórmula física: $W = m C^x$, determine el valor de “x”, donde:
W : trabajo, m : masa C : velocidad

- A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 1 D) 3 E) 0,25

38. Halla el valor de “x” en la siguiente fórmula física: $T^x = K.\left(\frac{d}{a}\right)$. Donde,

d: distancia a: aceleración T : tiempo K: número

- A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 1 D) 3 E) 0,2

39. En la siguiente formula física determine la medida del ángulo θ donde A y B representan a ciertas magnitudes físicas.

$$\sqrt[3]{A^4 - B^4} = A.B^{\tan\theta}$$

- A) 30° B) 37° C) 45° D) 53° E) ninguna anterior

FÓRMULAS EMPÍRICAS

40. La velocidad V de propagación de una onda mecánica, en una cuerda tensa, depende del módulo de la tensión T en la cuerda y de la densidad lineal de masa δ (masa/ longitud). Determine la fórmula empírica para determinar la velocidad de propagación.

- A) $\sqrt{\frac{T}{\delta}}$ B) $\delta^2 T^3$ C) $\delta\sqrt{T}$ D) $\sqrt{T\delta}$ E) Ninguna anterior

41. La altura máxima H que alcanza una partícula, depende de la rapidez de lanzamiento vertical V

y de la aceleración de la gravedad, y tiene la siguiente forma: $H = \frac{V^x \cdot g^y}{x}$. Determine (x+y)

- A) 0 B) 1 C) 2 D) +1/2 E) -1/2

42. La aceleración centrípeta “a” de una partícula, depende de la velocidad tangencial V y del radio de curvatura R de la trayectoria. Determine el exponente que afecta a R.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) -1 E) -2

43. La velocidad V del sonido en un gas depende de la presión P y de la densidad del mismo gas, y tiene la siguiente forma: $V = K.P^x.D^y$, donde K es una constante numérica. Determine la fórmula física para determinar la velocidad del sonido en cualquier gas.

- A) $K.D^2.P^3$ B) $K\sqrt{\frac{P}{D}}$ C) $K\sqrt{\frac{D}{P}}$ D) $K\sqrt{D.P}$ E) Ninguna anterior

44. El tiempo “t” de caída libre depende de la altura “h” que desciende y de la aceleración de la gravedad “g”. Sabiendo que: $t = \sqrt{2} h^x \cdot g^y$, determine (x – y).

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

45. La deformación de una viga de largo L, de área de la sección recta A y sometida a una fuerza de tracción F se expresa en la ecuación $\delta = \frac{F.L}{E.A}$ determinar la formula dimensional de E.

Respuesta: $M.L^{-1}.T^{-2}$

46. El periodo de oscilación “T” de un péndulo, depende del largo “L” de la cuerda y del valor de la aceleración de la gravedad “g”. $T = 2\pi.L^x.T^y$ determinar la expresión empírica del periodo de oscilación.

Respuesta: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

47. Sabiendo que la velocidad de propagación “V” de la onda en una cuerda tensa, depende de la fuerza de tensión “T” y de la densidad lineal de masa en la cuerda $\mu = \left(\frac{\text{masa}}{\text{longitud}} \right)$.

$V = F^a \cdot \mu^b$. Determinar la expresión empírica de la velocidad.

Respuesta. $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

48. La energía radiante “E” que emite un cuerpo de área “A” que se encuentra a una temperatura “T” en un intervalo de tiempo Δt . $E = \sigma.A.T^4.\Delta t$ donde, σ : constante universal de Stefan-

Boltzmann $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$

¿Cuál es la fórmula dimensional de σ ?

Respuesta: $[\sigma] = M.T^{-3}.\Theta^4$

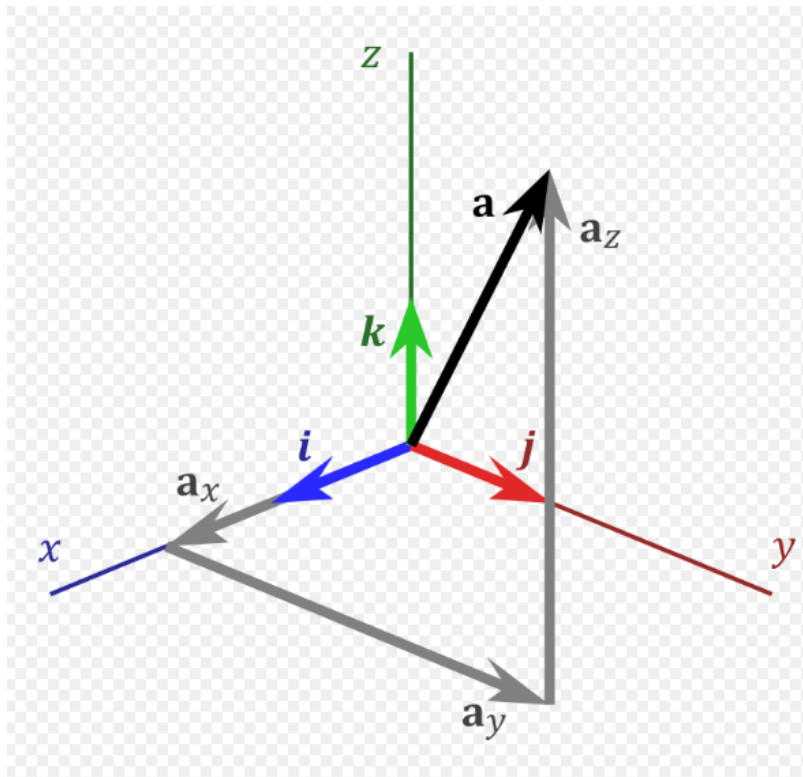
49. Se conoce la siguiente fórmula física, $P = m.v^2.\left(at - \frac{k}{S}\right)$ donde “m” representa la masa, “a” la aceleración, “t” el tiempo transcurrido, “S” el área. Determine la fórmula dimensional de “k”.

Respuesta. $L^3.T^{-1}$

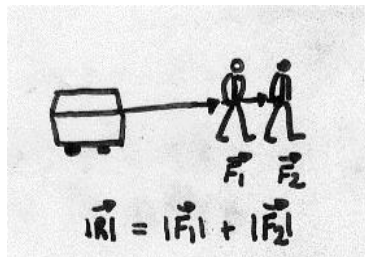
50. La intensidad del campo eléctrica a cierta distancia de una partícula electrizada depende de la fuerza eléctrica “F” por cada unidad de carga positiva “q” en un punto del espacio tridimensional. $E = \frac{F}{q}$. Determine la formula dimensional de “E”.

Respuesta. $M^1.L^1.T^{-3}.I^{-1}$

ANÁLISIS VECTORIAL



- 1. INTRODUCCIÓN.** Las magnitudes físicas pueden ser escalares o vectoriales. Las *magnitudes escalares* son aquellas que quedan bien establecidas conociendo solamente su valor y unidad. Ejemplos: el tiempo, la temperatura, la carga eléctrica, la longitud, la resistencia eléctrica, la tensión eléctrica, diferencia de potencial, la masa, el trabajo, la potencia, cantidad de calor, etc.
- 2. MAGNITUDES VECTORIALES.** Son aquellas magnitudes, que además de su valor y unidad requieren de una dirección para quedar perfectamente definida. Ejemplos: la posición, el desplazamiento, la velocidad, aceleración, fuerza, torque, fuerza, intensidad del campo eléctrico, intensidad del campo magnético, etc.
- 3. VECTOR.** Se representa mediante un segmento de recta orientado (flecha). En física sirve para representar a las magnitudes físicas vectoriales. Se representa por cualquier letra del alfabeto con una pequeña flecha en la parte superior.



Notación de los vectores: $\vec{A}$, $\vec{a}$, $\vec{\alpha}$,...

4. ELEMENTOS DEL VECTOR: el vector tiene dos elementos principales, el **módulo** y la **dirección**.

2.1) **MÓDULO:** Indica el valor de la magnitud vectorial. Ejemplo: 200 newtons.

Geoméricamente es el tamaño del vector.

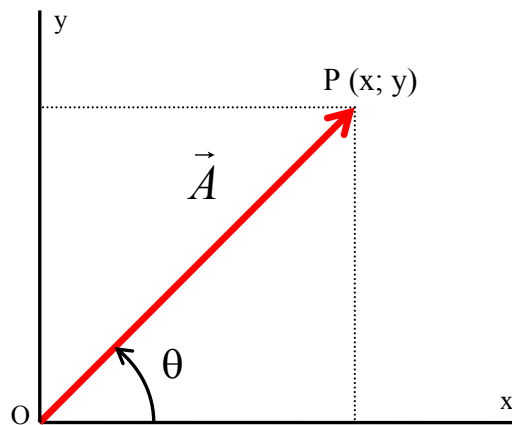
Notación del vector: $\vec{A} = \overrightarrow{OP} = (x; y)$,

O : *origen del vector*.

P : *extremo del vector*.

donde $A = |\vec{A}|$ representa al módulo del vector.

El módulo del vector se determina mediante el teorema de Pitágoras: $A = \sqrt{x^2 + y^2}$

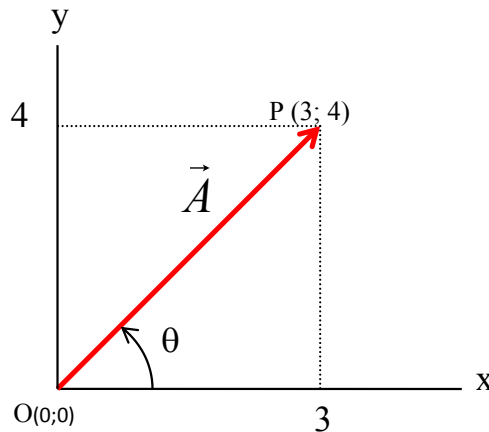


2.2) **DIRECCIÓN:** es la orientación que tiene el vector respecto al sistema de coordenadas cartesianas. En el plano se define mediante el **ángulo** que forma el vector con el eje "x" positivo.

El ángulo θ se mide en sentido antihorario. $\tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y}{x}$

Luego la medida del ángulo es: $\theta = \text{inversa, TAN, } \left(\frac{y}{x} \right)$

EJEMPLO 01: Se muestra un vector OP cuyo origen es $(0; 0)$ y el extremo $(3; 4)$. Determine el módulo y dirección del vector OP .



Resolución

El **módulo** del vector se determina aplicado el teorema de Pitágoras.

$$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Dirección. Cálculo del **ángulo** que forma el vector con el eje x. INV, TAN, $(4/3) =$

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{4}{3}$$

$$\theta = 53,13010235^\circ \cong 53^\circ$$

EJEMPLO 02: Se tiene un vector cuyo origen es $(2; 3)$ y el extremo $(8; 11)$. Determine el módulo y dirección del vector.

Resolución

Determinamos las componentes del vector, restando el punto extremo y el origen del vector:

Por definición: $OP = P - O = \vec{x}$

$$\vec{x} = (8; 11) - (2; 3) = (6; 8)$$

El módulo del vector se determina aplicado el teorema de Pitágoras.

$$|\vec{x}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

Cálculo del ángulo que forma el vector con el eje x. INV, TAN, $(4/3) =$

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{8}{6}$$

$$\theta = 53,13010235^\circ \cong 53^\circ$$

Respuesta: módulo 10 y dirección aproximadamente es 53° respecto del eje x positivo.

CLASIFICACIÓN DE LOS VECTORES: Se clasifican en vectores colineales, paralelos, opuestos, iguales, coplanares, concurrentes, etc.

3.1) **VECTORES COLINEALES:** Cuando todos ellos se encuentran contenidos en una misma línea recta o línea de acción.

3.2) **VECTORES PARALELOS:** Son aquellos que tienen sus líneas de acción respectivamente paralelos.

3.3) **VECTORES OPUESTOS:** Son aquellos dos vectores que tienen igual módulo, pero direcciones opuestas. La suma de dos vectores opuestos es nula.

3.4) **VECTORES IGUALES:** Dos vectores serán iguales cuando sus dos elementos principales son iguales, es decir tiene igual módulo e igual dirección.

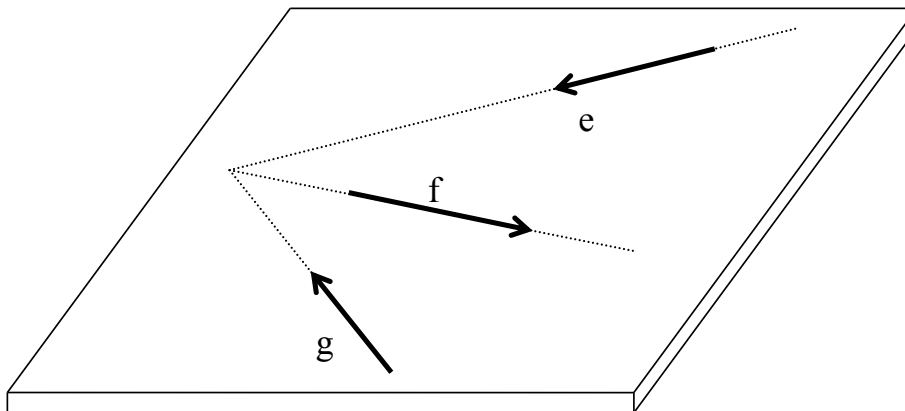
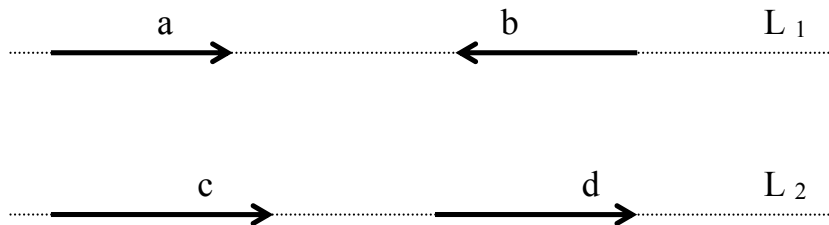
3.5) **VECTORES COPLANARES:** Dos o más vectores se denominan coplanares cuando todos ellos se encuentran contenidos en un mismo plano.

3.6) **VECTORES CONCURRENTES:** Dos o mas vectores se denominan concurrentes, cuando todos ellos tienen el mismo punto de aplicación o sus líneas de acción se intersecan en un mismo punto.

EJEMPLOS:

1) Los vectores **a** y **b** son *colineales*, porque están contenidos sobre una misma línea recta o línea de acción (L_1).

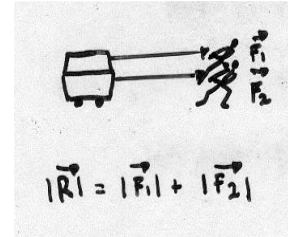
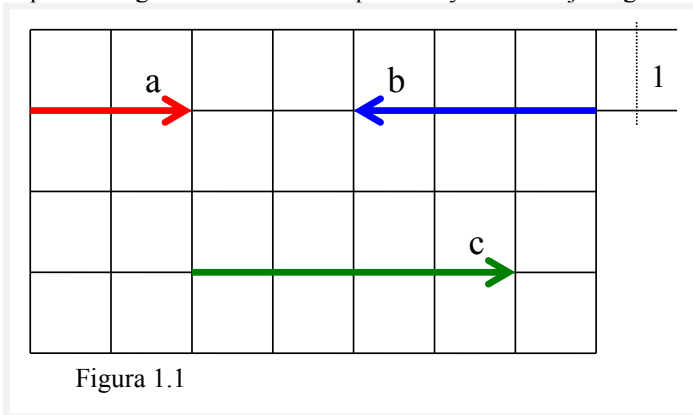
2) Sabiendo que L_1 y L_2 son paralelos. Los vectores **a** y **c** son *paralelos* porque están contenidos en rectas que son paralelas entre sí.



3) Los vectores **e**, **f** y **g** son *concurrentes* y *coplanares*

OPERACIONES CON VECTORES

1. ADICIÓN DE VECTORES PARALELOS Y COLINEALES: En este caso todos los vectores están contenidos en rectas paralelas o en la misma recta, entonces la dirección de los vectores se diferencia con el signo negativo (-) o el signo positivo (+). Hacia la derecha positivo y hacia la izquierda negativo. Hacia arriba positivo y hacia abajo negativo.



Los vectores son:

$$\vec{a} = +2$$

$$\vec{b} = -3$$

$$\vec{c} = +4$$

El vector resultante es: $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (+2) + (-3) + (+4) = +3$

Entonces el vector resultante tiene módulo 3 y dirección horizontal hacia la derecha.

2. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR: La cantidad escalar es todo número real, positivo o negativo, entero o fracción. Cuando se multiplica un escalar por un vector, el vector resultante es otro vector cuya dirección es el mismo del vector original si la cantidad escalar es positiva y tiene dirección opuesta si la cantidad escalar es negativa.

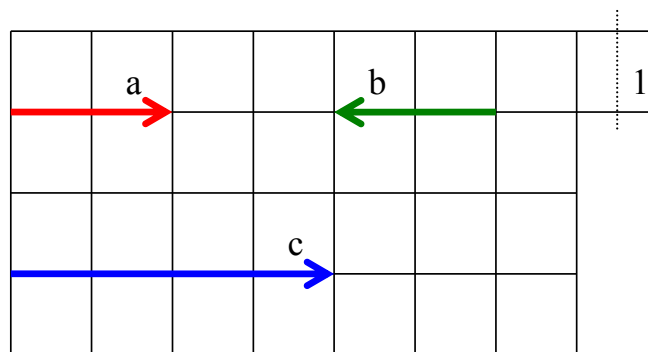


Figura 2.1

Observemos los siguientes vectores:

1) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son opuestos: $\vec{a} = -\vec{b}$

2) El vector $\vec{c}$ es de tamaño doble que $\vec{a}$ y tienen igual dirección: $\vec{c} = 2\vec{a}$

3) El vector $\vec{c}$ es de tamaño doble que $\vec{b}$ y tienen direcciones opuestas: $\vec{c} = -2\vec{b}$

En general dos vectores paralelos o colineales son linealmente independientes.

$$\vec{a} = K \vec{b}$$

Si $K > 0$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen igual dirección.

Si $K < 0$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen direcciones opuestas.

donde K pertenece a los números reales.

3. EXPRESIÓN DE UN VECTOR COMO PAR ORDENADO: En el plano cartesiano los vectores tienen dos componentes, entonces un vector se puede expresar como un par ordenado donde el origen del vector se encuentra en el origen de coordenadas.

EJEMPLO:

Se muestra tres vectores en un plano cartesiano. Determine el módulo del vector resultante.

RESOLUCIÓN

Expresamos cada vector como par ordenado:

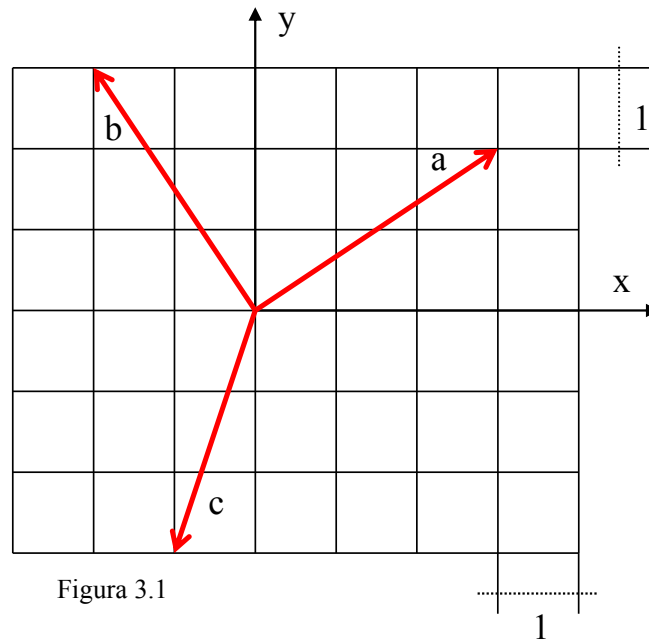


Figura 3.1

$$\vec{a} = (3; 2)$$

$$\vec{b} = (-2; 3)$$

$$\vec{c} = (-1; -3)$$

Ahora determinamos el vector resultante:

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (0; 2)$$

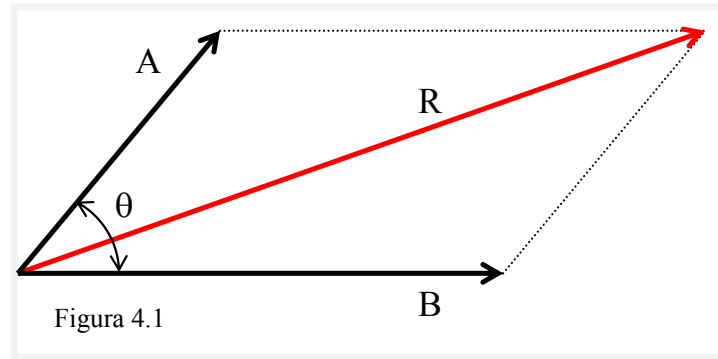
Entonces el **módulo** del vector resultante es: 2

Dirección: vertical hacia arriba.

4. MÉTODO DEL PARALELOGRAMO (para adicionar sólo dos vectores)

Si dos vectores A y B tienen el mismo origen, por el extremo de A se traza una paralela al vector B, y a la vez por el extremo de B se traza una paralela al vector A. El módulo del vector suma o resultante se obtiene trazando la diagonal del paralelogramo desde el origen de los vectores.

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$



$$R^2 = A^2 + B^2 + 2.A.B.\cos \theta$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2.A.B.\cos \theta}$$

R: es el módulo del vector resultante.

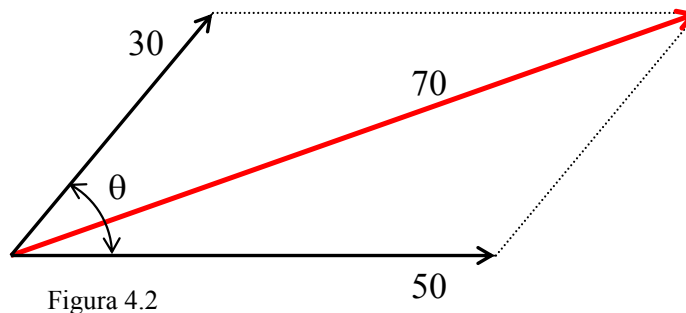
A y B: módulo o valor de los vectores sumandos.

θ : es la medida del ángulo entre los vectores A y B.

EJEMPLO 01: ¿Qué ángulo deben formar dos fuerzas de módulos 30 N y 50 N para que actúen sobre un cuerpo como una sola fuerza de módulo igual a 70 N?

RESOLUCIÓN

Aplicamos el método del paralelogramo:



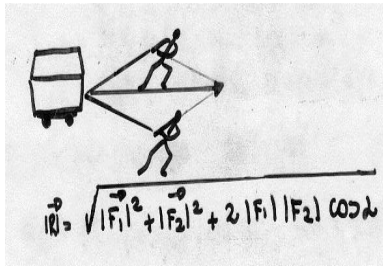
$$R^2 = A^2 + B^2 + 2.A.B.\cos \theta$$

$$(70)^2 = (30)^2 + (50)^2 + 2(30).(50).\cos \theta$$

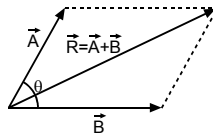
$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{ INV, COS, (1/2) =}$$

Resolviendo tenemos: $\theta = 60^\circ$

Respuesta: Deben formar las fuerzas un ángulo de 60° .



EJEMPLO 02. Se muestra un paralelogramo, donde el módulo de los vectores es: $A = 7$; $B = 8$ y $R = 13$. Determine la medida del ángulo θ .



- A) 30° B) 45° C) 37° D) 53° **E) 60°**

RESOLUCIÓN

Aplicamos el método del paralelogramo:

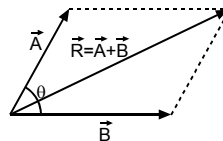
$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$$

$$(13)^2 = 7^2 + 8^2 + 2(7)(8) \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

Respuesta. La medida del ángulo entre los vectores es 60° .

EJEMPLO 03. Se muestra un paralelogramo, donde el módulo de los vectores es: $A = 7$; $B = 15$ y $R = 20$. Determine la medida del ángulo θ .



- A) 30° B) 45° C) 37° **D) 53°** E) 60°

RESOLUCIÓN

Aplicamos el método del paralelogramo.

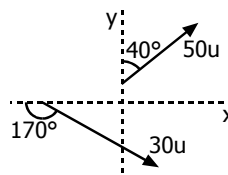
$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$$

$$(20)^2 = 7^2 + (15)^2 + 2(7)(15) \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta = 53^\circ$$

Respuesta. La medida del ángulo entre los vectores es 53° .

EJEMPLO 04. En la figura mostrada, determine el módulo del vector resultante.



- A) 20 **B) 70** C) 80 D) 100 E) 60

RESOLUCIÓN

Llevamos a los vectores a un origen común. El ángulo que forman los vectores es igual a: 60°

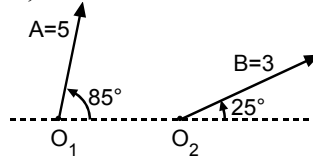
$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$$

$$(R)^2 = (50)^2 + (30)^2 + 2.(50).(30).Cos60^\circ$$

$$R = 70$$

Respuesta. El valor de la resultante es 70 unidades.

EJEMPLO 05. En la figura mostrada, determine el módulo del vector resultante.



- A) 14 **B) 7** C) 13 D) 12 E) 15

RESOLUCIÓN

Llevamos a los vectores a un origen común. El ángulo que forman los vectores es igual a la diferencia: $85^\circ - 25^\circ = 60^\circ$

Método del Paralelogramo: $R^2 = A^2 + B^2 + 2.A.B.Cos\theta$

$$(R)^2 = (5)^2 + (3)^2 + 2.(5).(3).Cos60^\circ$$

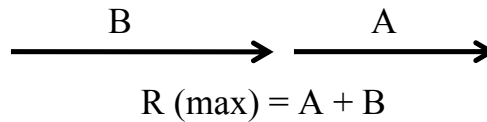
$$R = 7$$

Respuesta. El valor de la resultante es 7 unidades.

5. CASOS PARTICULARES

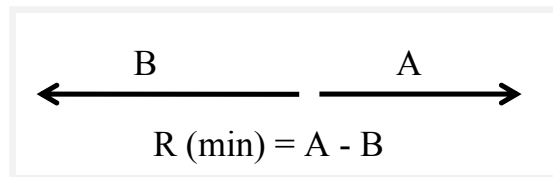
1) **RESULTANTE MÁXIMA:** La resultante de dos vectores es máxima cuando forman entre si un ángulo nulo, es decir tienen igual dirección, por consiguiente, tienen igual dirección.

$$|\vec{R}_{\max}| = |\vec{A} + \vec{B}|$$



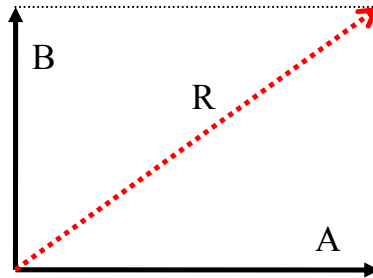
2) **RESULTANTE MÍNIMA:** La resultante de dos vectores es mínima cuando forman entre si un ángulo igual a 180° , por consiguiente, tienen direcciones opuestas.

$$|\vec{R}_{\min}| = |\vec{A} - \vec{B}|$$



3) **VECTORES ORTOGONALES:** Si los vectores forman entre si un ángulo recto, la resultante se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras.

$$|\vec{R}| = \sqrt{A^2 + B^2}$$



$$R^2 = A^2 + B^2$$

EJEMPLO 1: La resultante de dos vectores de modulo constante, varia al hacer girar uno de ellos. El mínimo módulo de la resultante es 2 y el máximo 14. Determine el módulo de la resultante cuando los vectores forman ángulo recto.

RESOLUCIÓN

La resultante mínima es: $A - B = 2$ (1)

La resultante máxima es: $A + B = 14$ (2)

Adicionando las ecuaciones (1) y (2): $2A = 16$

$A = 8$ y $B = 6$

Cuando forman ángulo recto, la resultante se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras:

$$R^2 = (A)^2 + (B)^2 \Rightarrow R = \sqrt{(A)^2 + (B)^2}$$

$$R^2 = (8)^2 + (6)^2 \Rightarrow R = 10$$

Respuesta: Cuando los vectores forman ángulo recto la resultante tiene módulo 10.

EJEMPLO 2: La resultante de dos vectores de modulo constante, varia al hacer girar uno de ellos. El mínimo módulo de la resultante es 7 y el máximo 17. Determine el módulo de la resultante cuando los vectores forman ángulo recto.

RESOLUCIÓN

La resultante mínima es: $A - B = 7$ (1)

La resultante máxima es: $A + B = 17$ (2)

Sumando las ecuaciones (1) y (2): $2A = 24$

$A = 12$ y $B = 5$

Cuando forman ángulo recto, la resultante se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras:

$$R^2 = (A)^2 + (B)^2 \Rightarrow R = \sqrt{(A)^2 + (B)^2}$$

$$R^2 = (12)^2 + (5)^2 \Rightarrow R = 13$$

Respuesta: Cuando los vectores forman ángulo recto la resultante tiene módulo 13 unidades.

6. DIFERENCIA DE DOS VECTORES

El vector diferencia $\vec{D}$ indica (señala) al vector minuendo $\vec{A}$. El módulo se obtiene aplicando la ley de Cosenos.

Adición de vectores: $\vec{B} + \vec{D} = \vec{A}$

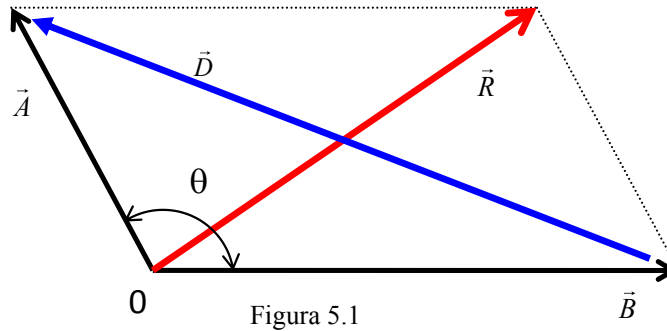


Figura 5.1

El vector diferencia es:

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

$$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

El módulo del vector diferencia:

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2A.B.Cos\theta}$$

OBSERVACIONES:

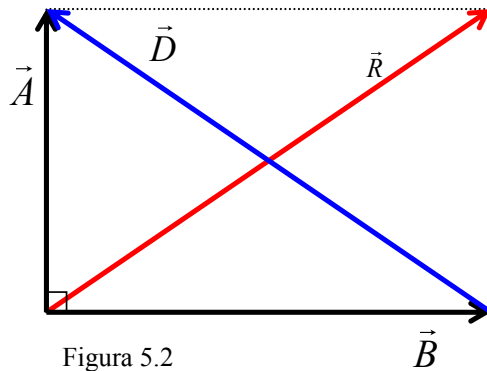
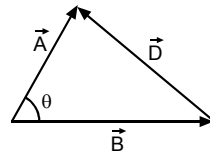


Figura 5.2

1. Si el ángulo θ es obtuso entonces el módulo de la suma es menor que el módulo de la diferencia.
2. Si el ángulo $\theta = 90^\circ$, entonces el módulo de la diferencia es igual al módulo de la suma.
3. El módulo de la resultante es máximo cuando forman entre si un ángulo nulo (0°).
4. El módulo de la resultante es mínimo cuando forman entre si un ángulo de 180° .

EJEMPLO 01: En la figura mostrada el módulo de los vectores es $A = 10$ y $B = 12$. Si la medida del ángulo es $\theta = 60^\circ$, determine le módulo del vector diferencia D .



- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) $\sqrt{124}$

RESOLUCIÓN

Ley de Cosenos: $D^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$

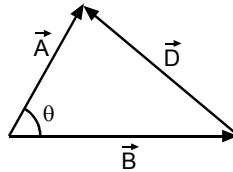
$$(D)^2 = (10)^2 + (12)^2 - 2(10)(12) \cos 60^\circ$$

$$(D)^2 = 100 + 144 - 2(10)(12) \left(\frac{1}{2} \right) = 124$$

$$D = \sqrt{124}$$

Respuesta: el valor del vector resultante es 11,14

EJEMPLO 02: En la figura mostrada el módulo de los vectores es $A = 5$ y $B = 8$. Si la medida del ángulo es $\theta = 37^\circ$, determine el módulo del vector diferencia.



- A) 10 B) $\sqrt{41}$ C) 12 D) 13 E) $\sqrt{124}$

RESOLUCIÓN

$$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

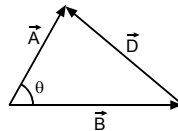
$$(D)^2 = (5)^2 + (8)^2 - 2(5)(8) \cos 37^\circ$$

$$(D)^2 = 25 + 64 - 2(5)(8) \left(\frac{3}{5} \right) = 41$$

$$D = \sqrt{41}$$

Respuesta: el valor del vector resultante es 6,4

EJEMPLO 03: En la figura mostrada el módulo de los vectores es $A = 5$ y $B = 5$. Si la medida del ángulo es $\theta = 120^\circ$, determine el módulo del vector diferencia D .



- A) 10 B) $\sqrt{41}$ C) 12 **D) $5\sqrt{3}$** E) $\sqrt{124}$

RESOLUCIÓN

$$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

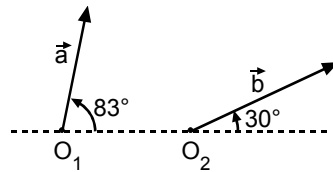
$$(D)^2 = (5)^2 + (5)^2 - 2.(5).(5).Cos120^\circ$$

$$(D)^2 = 25 + 25 - 2.(5).(5)\left(-\frac{1}{2}\right) = 25 \times 3$$

$$D = 5\sqrt{3}$$

Respuesta: el valor del vector diferencia es 8,66

EJEMPLO 04. En la figura mostrada el módulo de los vectores es $a = 5$ y $b = 6$. Determine el módulo del vector: $\mathbf{a} - \mathbf{b}$



A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) 4

RESOLUCIÓN

Ley de Cosenos: $D^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.Cos\theta$

La medida de ángulo se obtiene restando, $\theta = 83^\circ - 30^\circ = 53^\circ$

$$(D)^2 = (5)^2 + (6)^2 - 2.(5).(6).Cos53^\circ$$

$$(D)^2 = 25 + 36 - 2.(5).(6)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$D = \sqrt{25} = 5$$

Respuesta: el valor del vector resultante es 5.

7. RELACIÓN ENTRE VECTORES. Escribir un vector en función de otros. Veamos los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 01: Se muestra un paralelogramo (figura 5.3). Expresar el vector $\vec{x}$ en función de los vectores A y B.

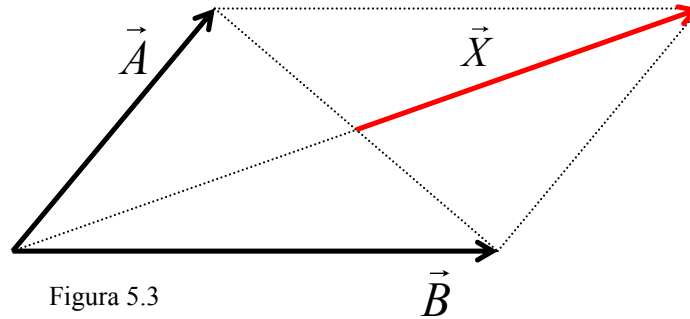


Figura 5.3

RESOLUCIÓN

La diagonal del paralelogramo representa a la resultante de sumar los vectores A y B.

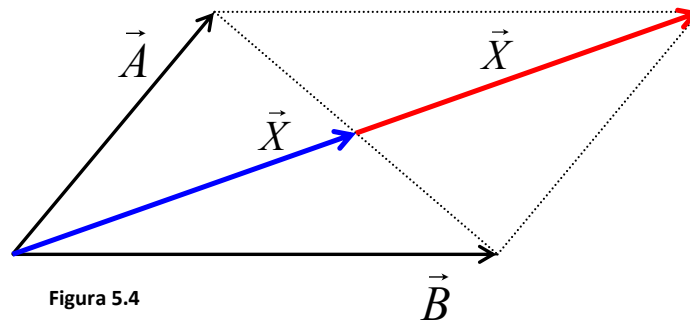


Figura 5.4

La diagonal representa la resultante de los vectores: $2\vec{X} = \vec{A} + \vec{B}$

Despejando tenemos que: $\vec{X} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$

EJEMPLOS 02: Se muestra un conjunto de vectores (figura 5.5). Sabiendo que $AB = BC$ y el módulo del vector $\vec{c}$ es 2 cm, determine el módulo del vector resultante.

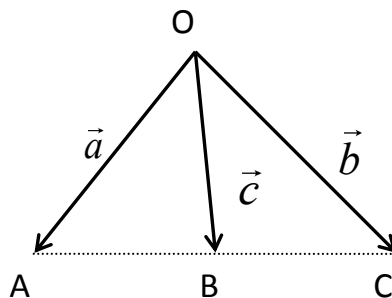


Figura 5.5

RESOLUCIÓN

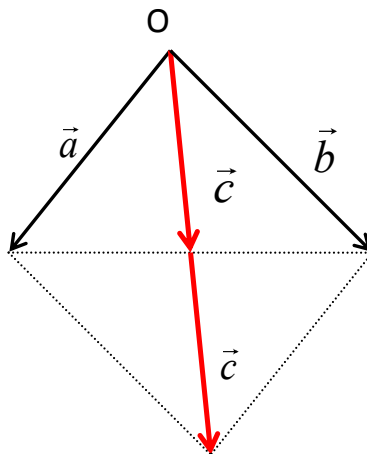


Figura 5.6

Completamos el paralelogramo (figura 5.6), donde OB es la mitad del vector resultante.

Observamos que: $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c} \dots (1)$

Nos piden: $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Ordenando convenientemente: $\vec{R} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \dots (2)$

Reemplazando (1) en (2): $\vec{R} = 3\vec{c}$

Respuesta. El módulo del vector resultante es: $R = 6 \text{ cm}$.

EJEMPLOS 03: Se muestra un conjunto de vectores (figura 5.7). Sabiendo que $AB = BC = CD = DE$ y el módulo del vector $\vec{c}$ es 1,0 cm, determine el módulo del vector resultante.

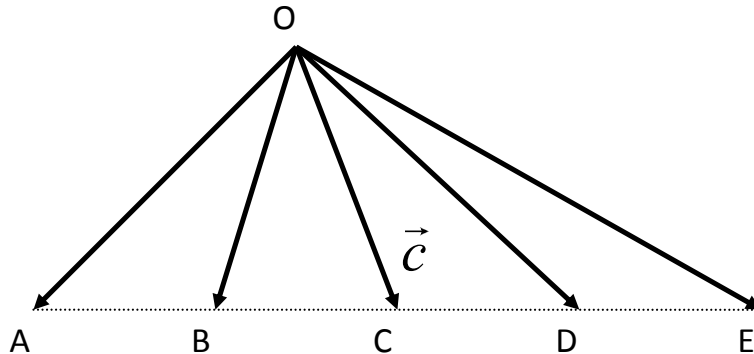


Figura 5.7

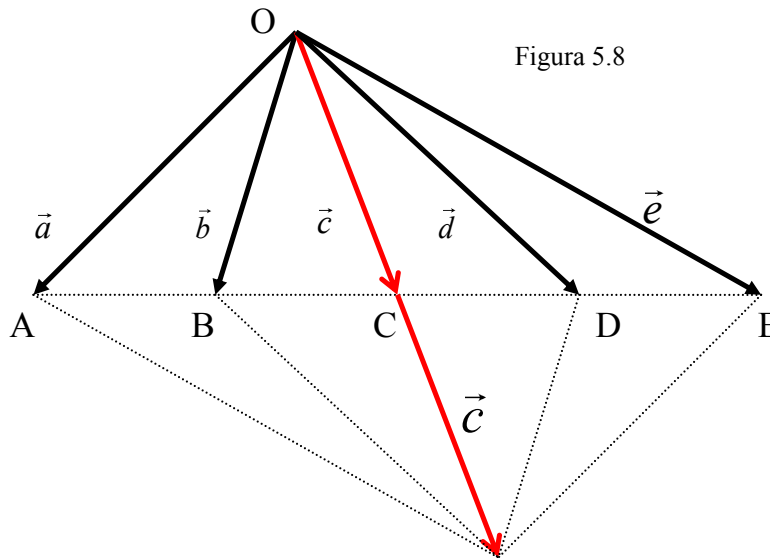
RESOLUCIÓN

Figura 5.8

Construimos el paralelogramo (figura 5.8). La resultante de cada par de vectores es la diagonal del paralelogramo.

Nos piden: $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$

Ordenando convenientemente: $\vec{R} = (\vec{a} + \vec{e}) + (\vec{b} + \vec{d}) + \vec{c}$ (1)

Pero se observa que: $(\vec{a} + \vec{e}) = (\vec{b} + \vec{d}) = 2\vec{c}$ (2)

Reemplazando (2) en (1): $\vec{R} = 5\vec{c}$

Respuesta. El módulo de la resultante es: $R = 5 \text{ cm}$.

8. MÉTODO DEL POLÍGONO. Suma de “n” vectores.

Consiste en construir un polígono con los vectores sumandos. Es necesario ordenar los vectores, uno continuación del otro, uniendo el extremo del primero con el origen del segundo, el extremo del segundo con el origen del tercero, así sucesivamente hasta el último vector.

Ejemplos:

1) Resultante de cinco vectores:

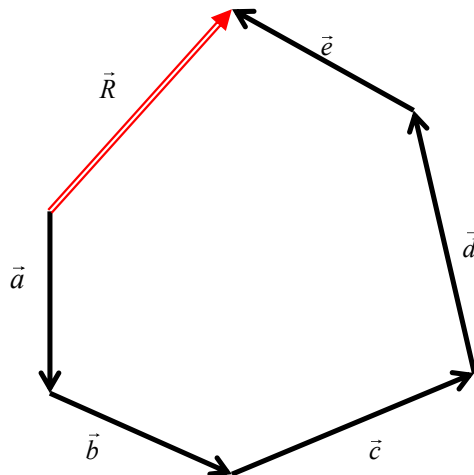


Figura 6.1

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$$

2) Resultante de cuatro vectores:

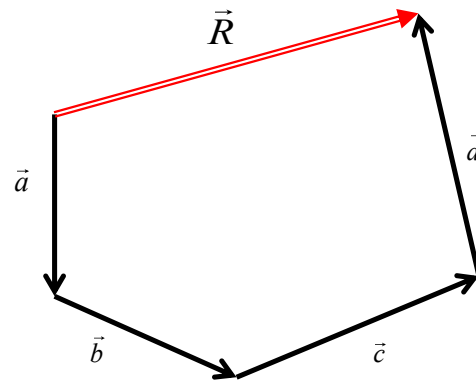


Figura 6.2

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

3) Resultante de tres vectores:

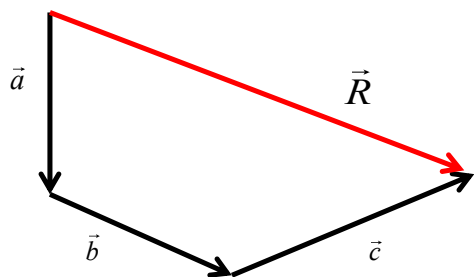


Figura 6.3

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

4) Resultante de dos vectores:

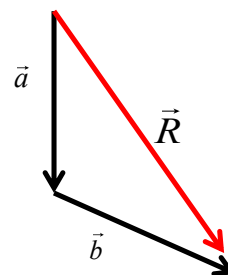
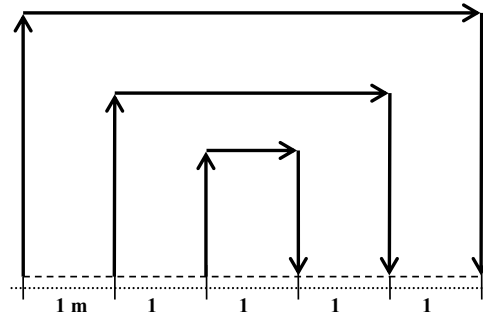


Figura 6.4

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$

EJEMPLO 1: Se muestra un conjunto de vectores. Determine el módulo del vector resultante.



- A) 10 B) 6 C) 11 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN

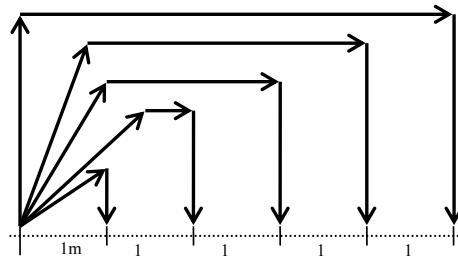
Aplicamos el método del polígono. Asociamos por tríos, y tenemos que:

$$R = (5) + (3) + (1) = 9$$

Respuesta: el módulo del vector resultante es 9 m, con dirección hacia la derecha.

EJEMPLO 2. Se muestra un conjunto de vectores. Determine el módulo del vector resultante.

- A) 10 **B) 15** C) 11 D) 8 E) ninguna anterior



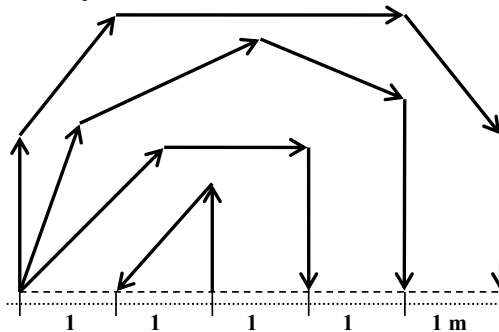
RESOLUCIÓN

Aplicamos el método del polígono. Asociamos mediante la envolvente, y tenemos que:

$$R = (1) + (2) + (3) + (4) + (5) = 15$$

Respuesta: el módulo del vector resultante es 15 m, con dirección hacia la derecha.

EJEMPLO 3. Se muestra un conjunto de vectores. Determine el módulo del vector resultante.



- A) 10 B) 6 **C) 11** D) 8 E) ninguna anterior

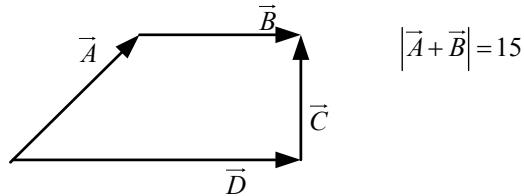
RESOLUCIÓN

Aplicamos el método del polígono. Asociamos mediante la envolvente, y tenemos que:

$$R = (-1) + (3) + (4) + (5) = 11$$

Respuesta: el módulo del vector resultante es 11 m, con dirección hacia la derecha.

EJEMPLO 4: Calcule el módulo de la resultante del sistema mostrado, $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$.



A) 45

B) 30

C) 25

D) 35

E) 50

RESOLUCIÓN

Propiedad asociativa de los vectores: $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{C} + \vec{D}| = 15$

$(\vec{A} + \vec{B})$ son paralelos $(\vec{C} + \vec{D})$

$$R = A + B + C + D = (A + B) + (C + D) = (15) + (15) = 30$$

$$R = 30$$

Respuesta: el vector resultante es 30 unidades.

9. POLÍGONO CERRADO Y ORDENADO

Si el polígono formado es ordenado y cerrado, entonces el módulo del vector resultante es nulo. El orden de los vectores puede ser en sentido horario o antihorario.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} = \vec{0}$$

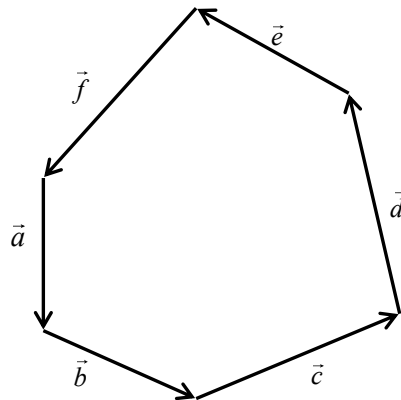
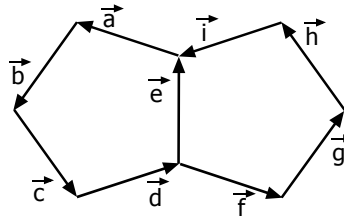


Figura 6.6

Es importante señalar la UNIÓN de la CABEZA de un vector con la COLA del siguiente vector.

EJEMPLO 1: En la figura mostrada determine el vector resultante.



A) $-\vec{e}$

B) $\vec{e}$

C) $2\vec{e}$

D) $3\vec{e}$

E) $\vec{0}$

RESOLUCIÓN

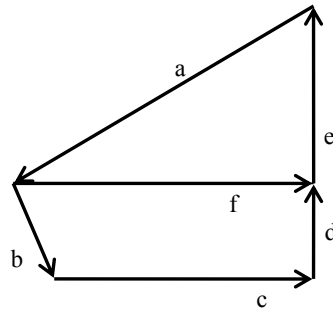
Los vectores periféricos adicionan un vector resultante nulo. Entonces el único vector que queda es $\vec{e}$.

$$R = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{h} + \vec{i}) + \vec{e}$$

$$R = (\vec{0}) + \vec{e} = \vec{e}$$

Respuesta: el vector resultante es $+\vec{e}$

EJEMPLO 2: En la figura mostrada determine el vector resultante.



A) $-\vec{f}$

B) $+\vec{f}$

C) $2\vec{f}$

D) $3\vec{f}$

E) $\vec{0}$

RESOLUCIÓN

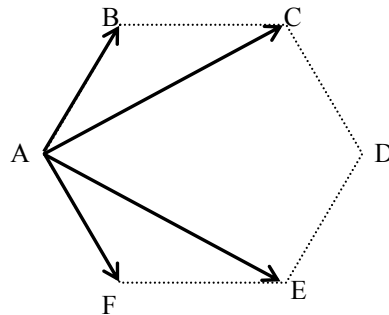
Los vectores periféricos adicionan un vector resultante nulo. Entonces el único vector que queda es $\vec{f}$.

$$R = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}) + \vec{f}$$

$$R = (\vec{0}) + \vec{f} = \vec{f}$$

Respuesta: el vector resultante es $+\vec{f}$

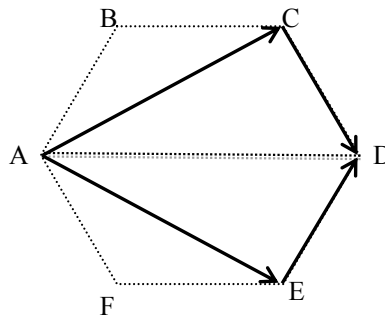
EJEMPLO 3: Se muestra un hexágono ABCDEF de lado 3 cm. Determine el módulo del vector resultante.



- A) 6 cm B) 3 cm **C) 12 cm** D) 9 cm E) ninguna anterior

RESOLUCIÓN

Trasladamos los vectores paralelamente.



$$R = AC + CD + AE + ED = (AC + CD) + (AE + ED)$$

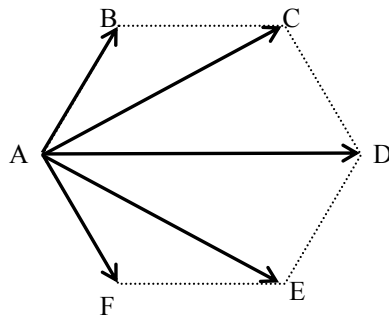
Pero:

$$(AC + CD) = (AE + ED) = AD = 6 \text{ cm}$$

$$R = (AC + CD) + (AE + ED) = 6 + 6 = 12 \text{ cm}$$

Respuesta: el valor del vector resultante es 12 cm.

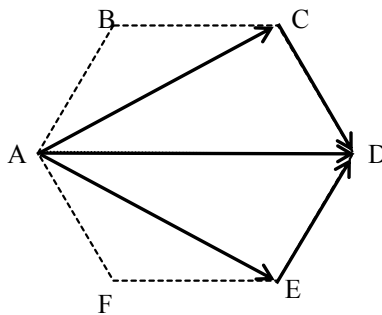
EJEMPLO 4: Se muestra un hexágono ABCDEF de lado 3 cm. Determine el módulo del vector resultante.



- A) 6 cm B) 3 cm C) 12 cm **D) 18 cm** E) ninguna anterior

RESOLUCIÓN

Trasladamos los vectores paralelamente.



$$R = AC + CD + AE + ED + AD = (AC + CD) + (AE + ED) + AD$$

Pero: $(AC + CD) = (AE + ED) = AD = 6 \text{ cm}$

$$R = (AC + CD) + (AE + ED) + AD = 6 + 6 + 6 = 18 \text{ cm}$$

Respuesta: el valor del vector resultante es 18 cm

EJEMPLOS 05: Se muestra un conjunto de vectores (figura 6.7). Sabiendo que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, $a = 6$ cm y $b = 8$ cm, determine el módulo del vector resultante.

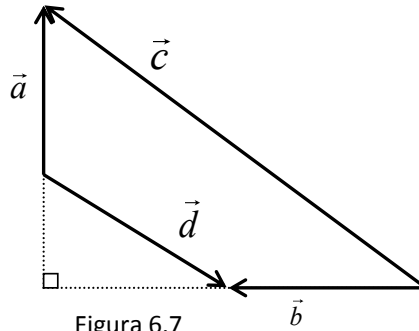


Figura 6.7

Resolución

Ordenamos los vectores formando un nuevo polígono cuyo módulo es nulo (figura 6.8).

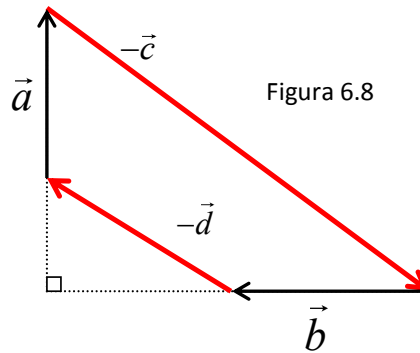


Figura 6.8

$$\vec{a} + (-\vec{c}) + \vec{b} + (-\vec{d}) = \vec{0}$$

Ordenando tenemos que: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$... (1)

Nos piden la resultante de: $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$... (2)

Reemplazando (1) en (2): $\vec{R} = 2(\vec{a} + \vec{b})$... (3)

La resultante de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es 10 cm:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \quad \dots (4)$$

Reemplazando (4) en (3): $|\vec{R}| = 2 \cdot |\vec{a} + \vec{b}| = 2 \cdot 10 = 20$

Respuesta. El valor de la resultante es 20 unidades.

10. RESULTANTE NULA Y LA LEY DE SENOS

Si la resultante de *tres vectores* coplanares y concurrentes es nula, entonces con dichos vectores se forma un triángulo. El módulo de cada vector es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto.

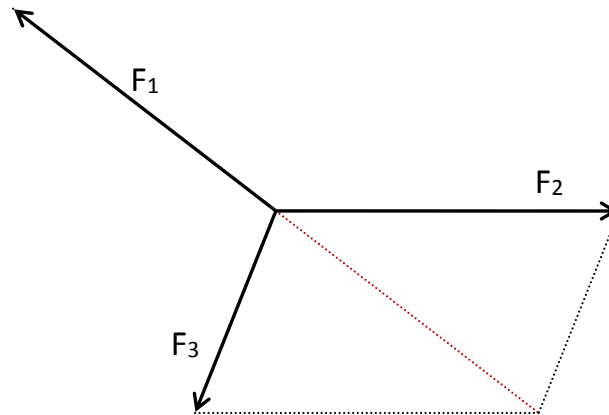


Figura 7.1

Se construye el polígono cerrado (triángulo)

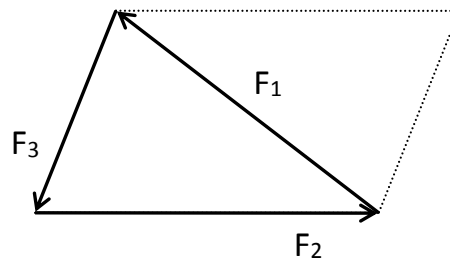


Figura 7.2

Los vectores F_1 , F_2 y F_3 se encuentran contenidos en un plano.

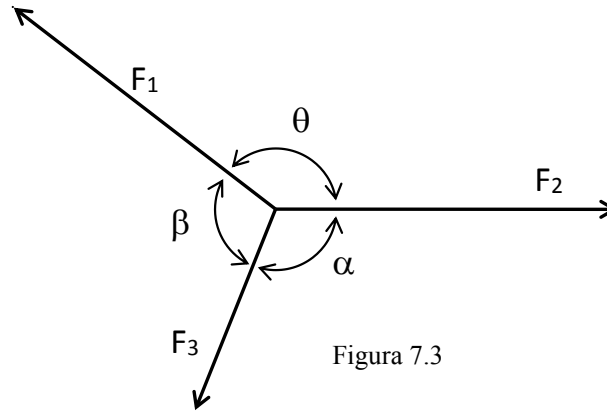


Figura 7.3

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

Aplicamos la ley de Senos al triángulo:

$$\frac{F_1}{\text{Sen}\alpha} = \frac{F_2}{\text{Sen}\beta} = \frac{F_3}{\text{Sen}\theta}$$

Casos especiales:

- a) Si los tres ángulos son iguales $\alpha = \beta = \theta = 120^\circ$, entonces el módulo de los tres vectores también será igual: $F_1 = F_2 = F_3$.
- b) Si dos de los ángulos son iguales (triángulo equilátero) entonces dos de los vectores tendrán el mismo módulo.

EJEMPLO 01: Se muestra tres vectores coplanares y concurrentes de módulos iguales que forman entre sí ángulos iguales.

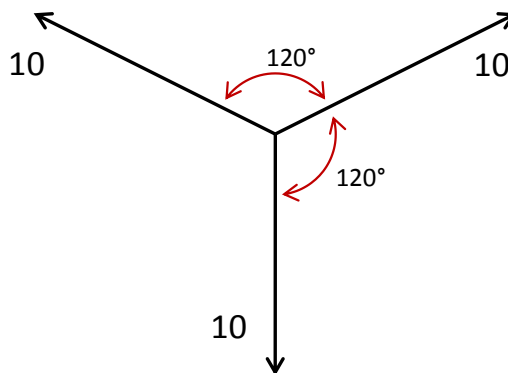


Figura 7.4

Resolución

Con los tres vectores se forma un triángulo equilátero. Por consiguiente, el módulo del vector resultante es cero: $R = 0$.

EJEMPLO 02: Se muestra tres vectores coplanares y concurrentes que forman entre si ángulos iguales.

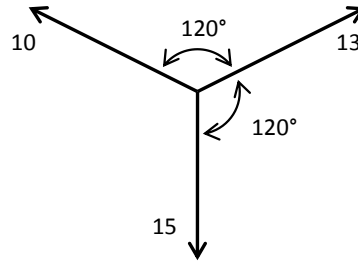


Figura 7.5

Resolución

Aplicamos la propiedad asociativa de los vectores. Con los tres vectores de módulo 10 unidades forman un triángulo equilátero, por consiguiente, el módulo del vector resultante es nulo. Entonces quedan dos vectores de módulos 3 y 5 unidades que forman entre si forman 120°.

El módulo de la resultante es:

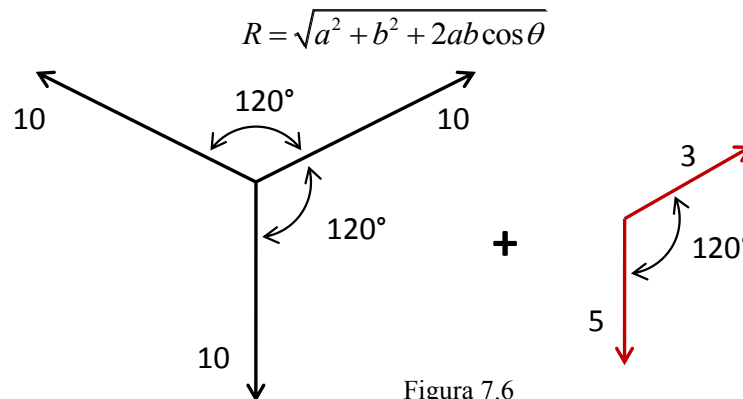


Figura 7.6

Adicionamos los vectores de módulos 3 y 5, que forman entre si un ángulo de 120°, reemplazando obtenemos:

$$R = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120^\circ} = \sqrt{19} = 4,36$$

Respuesta: El módulo de la resultante es 4,36.

11. MÉTODO DE LA DESCOMPOSICIÓN RECTANGULAR: En el plano cartesiano cualquier vector tiene dos componentes rectangulares.

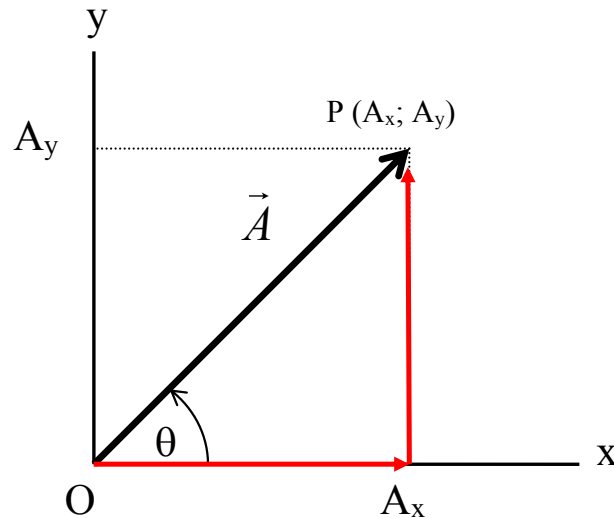


Figura 8.1

A_x : Componente de A en el eje X.

A_y : Componente de A en el eje Y.

De donde deducimos que:

$$A_x = A \cdot \cos \theta$$

$$A_y = A \cdot \sin \theta$$

Para determinar la resultante de un sistema de vectores por este método, se sigue los siguientes pasos:

1) Cada vector se descompone rectangularmente, respecto de un sistema de ejes coordenados arbitrariamente elegido.

2) Se determina la resultante en cada eje cartesiano.

$$R_x: \text{Resultante en el eje X. } R_x = \sum V_x$$

$$R_y: \text{Resultante en el eje Y. } R_y = \sum V_y$$

3) El vector resultante se determina aplicando el teorema de Pitágoras.

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$

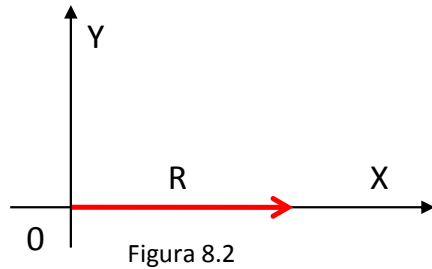
4) La dirección del vector resultante respecto del eje X se determina mediante la razón tangente:

$$\tan \phi = \frac{R_y}{R_x}$$

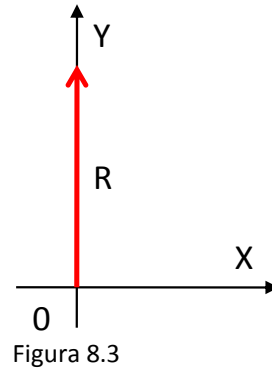
CASOS ESPECIALES:

1) Si la resultante de los vectores se encuentra en el eje “x” (figura 8.2), entonces la componente en el eje “y” es nula.

$$\sum V_{\text{eje } y} = 0$$

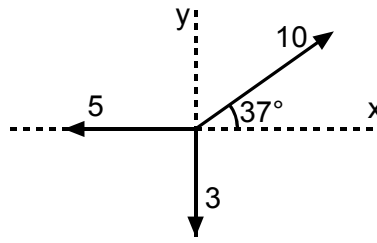


$$\sum V_{\text{eje } x} = 0$$



2) Si la resultante de los vectores se encuentra en el eje “y” (figura 8.3), entonces la componente en el eje “x” es nula.

EJEMPLO 01: En el sistema vectorial mostrado determine la dirección del vector resultante respecto del eje “x” positivo.



A) 30°

B) 45°

C) 37°

D) 53°

E) 60°

RESOLUCIÓN

$$R_x = 10 \cdot \cos 37^\circ - 5 = 2,99 \approx 3$$

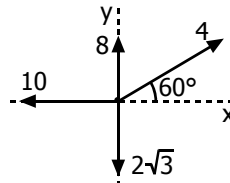
$$R_y = 10 \cdot \sin 37^\circ - 3 = 3,02 \approx 3$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{3,02}{2,99}$$

Calculo del ángulo usando calculadora: $\text{INV, TAN, } \left(\frac{3,02}{2,99} \right) =$

Respuesta: la medida del ángulo es $\theta = 45,28599985^\circ \approx 45^\circ$

EJEMPLO 2: En el sistema vectorial mostrado determine la dirección del vector resultante respecto del eje “x” positivo.



- A) 60° B) 45° **C) 135°** D) 120° E) N.A.

RESOLUCIÓN

$$R_x = 4 \cdot \cos 60^\circ - 10 = -8$$

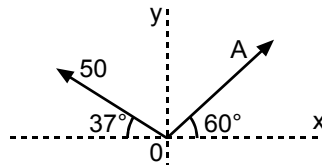
$$R_y = 4 \cdot \sin 60^\circ + 8 - 2\sqrt{3} = 8$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{8}{-8} = -1$$

Cálculo del ángulo usando calculadora: INV, TAN, (-1)

Respuesta: $\theta = -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$

EJEMPLO 3: En el sistema vectorial mostrado determine el módulo del vector A, tal que el vector resultante este contenido en el eje “y” positivo.



- A) 60 **B) 99,25** C) 80 D) 90 E) N.A

RESOLUCIÓN

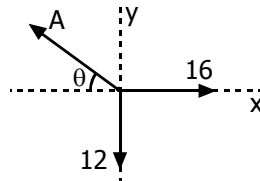
Si la resultante es vertical, entonces la componente en el eje X es nula.

$$R_x = A \cdot \cos 60^\circ - 50 \cdot \cos 37^\circ = 0$$

$$A = \frac{50 \cdot \cos 37^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{50 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 80$$

Respuesta. El valor de A es 80 unidades.

EJEMPLO 4: En el sistema vectorial mostrado la resultante es nula. Determine el módulo del vector A y la medida del ángulo θ .



- A) 20 y 30° B) 20 y 45° C) 20 y 37° D) 20 y 53° E) 48 y 60°

RESOLUCIÓN

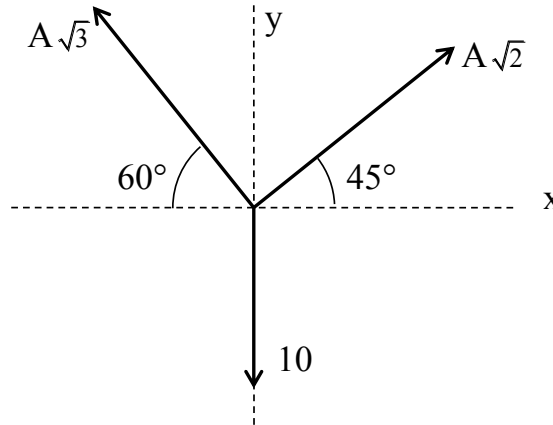
El valor del vector A tiene el mismo, del módulo del vector suma de los otros dos.

$$A = \sqrt{(12)^2 + (16)^2} = 20$$

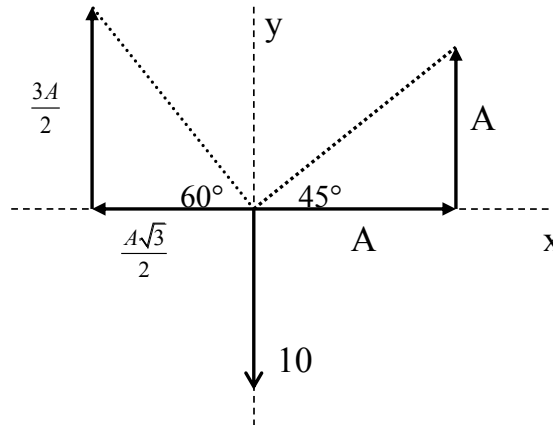
$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Respuesta: el módulo del vector A es 20 y $\theta \approx 37^\circ$

EJEMPLO 5: En la figura mostrada (ver figura), determinar el valor de A para que el vector resultante de los tres vectores indicados esté sobre el eje “x”.

**Resolución**

Se descompone cada uno de los vectores (figura 8.5), respecto del eje cartesiano.



De la condición del problema, la resultante en el eje vertical es nula.

$$A\sqrt{3} \cdot \text{Sen} 60^\circ + A\sqrt{2} \cdot \text{Sen} 45^\circ - 10 = 0$$

$$\frac{3A}{2} + A - 10 = 0$$

Respuesta. Resolviendo tenemos: $A = 4$

12. MÉTODO DE LA DESCOMPOSICIÓN POLIGONAL: En general un vector se puede descomponer en dos o más vectores, formando siempre un polígono cerrado.

EJEMPLO: La figura muestra un trapecio de vértices A, B, C y D. Sabiendo que M es punto medio del segmento AD, donde $AB = 4\text{ m}$ y $DC = 7\text{ m}$, determine el módulo del vector resultante.

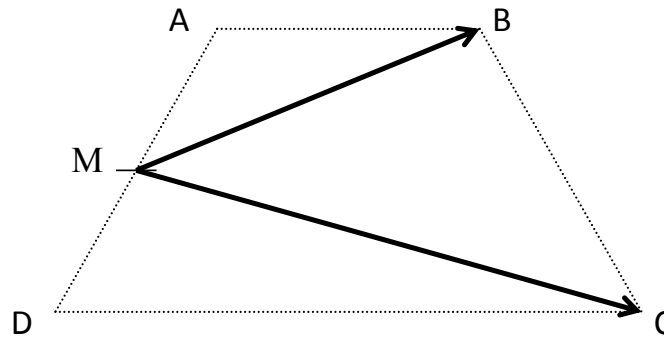


Figura 9.1

Resolución

Descomponemos poligonalmente los vectores $\overrightarrow{MB}$ y $\overrightarrow{MC}$. Las componentes $\overrightarrow{MA}$ y $\overrightarrow{MD}$ representan vectores opuestos, es decir se cancelan entre sí.

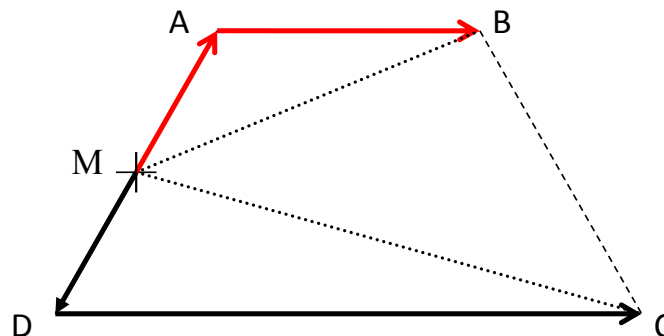


Figura 9.2

La resultante se obtiene adicionando los vectores paralelos de igual sentido $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$.

$$\vec{R} = \vec{AB} + \vec{DC} \Rightarrow R = 4 + 7 = 11$$

Respuesta. Por lo tanto, el módulo de la resultante es: 11

13. VECTORES UNITARIOS CARTESIANOS EN EL PLANO.

Son aquellos vectores que tienen como módulo la unidad de medida y las direcciones coinciden con los ejes cartesianos.

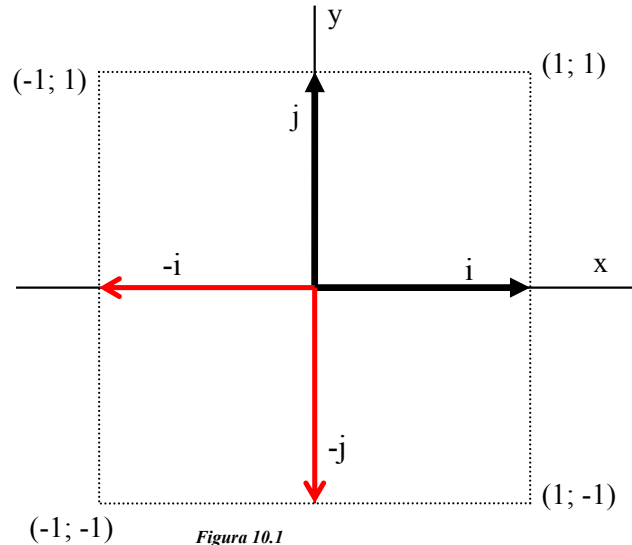


Figura 10.1

Los vectores cartesianos son:

i : tiene dirección del eje X positivo.

$-i$: tiene dirección del eje X negativo.

j : tiene dirección del eje Y positivo

$-j$: tiene dirección del eje Y negativo

El módulo es igual a la unidad de medida: $|i| = |-i| = |j| = |-j| = 1$

Representación de un vector en función de vectores unitarios: $\vec{a} = (a_x; a_y) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$

EJEMPLO 1: Sean los vectores: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

Calcule el módulo del vector: $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$

- A) 0 B) 1 C) 1 **D) 2** E) 3

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO: Producto de un escalar por un vector.

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} = (2;4) \quad \text{entonces: } 3\vec{a} = 6\hat{i} + 12\hat{j} = (6;12)$$

$$\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} = (3;5) \quad \text{entonces: } 2\vec{b} = 6\hat{i} + 10\hat{j} = (6;10)$$

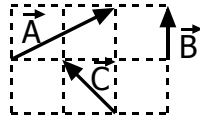
SEGUNDO PASO: diferencia de vectores.

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = (6\hat{i} + 12\hat{j}) - (6\hat{i} + 10\hat{j}) = (0\hat{i} + 2\hat{j}) = (0;2)$$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = (6\hat{i} + 12\hat{j}) - (6\hat{i} + 10\hat{j}) = (2\hat{j})$$

Respuesta: el resultado tiene módulo 2 y dirección vertical hacia arriba

EJEMPLO 2. Se muestra una cuadrícula donde el lado de cada cuadrado es la unidad, 1 u. Determine el módulo del vector resultante.



A) 2u

B) 3u

C) 4u

D) $\sqrt{10}$ uE) $\sqrt{30}$ u**RESOLUCIÓN**

Los vectores en función de los vectores unitarios son:

$$A = 2i + 1j$$

$$B = 0i + 1j$$

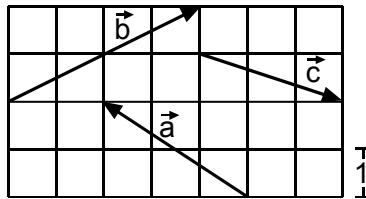
$$C = -1i + 1j$$

Adicionando tenemos que: $A + B + C = 1i + 3j = (1;3)$

El módulo del vector resultante es: $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

Respuesta: el valor de la resultante es $\sqrt{10}$

EJEMPLO 3: En el sistema vectorial mostrado, determine el módulo del vector resultante.



A) 0

B) 3

C) 5

D) 6

E) 7

RESOLUCIÓN

Los vectores en función de los vectores unitarios son:

$$\vec{a} = -3i + 2j$$

$$\vec{b} = 4i + 2j$$

$$\vec{c} = 3i - 1j$$

Adicionando tenemos que:

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 4i + 3j = (4;3)$$

El módulo del vector resultante es: $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$

Respuesta: el valor de la resultante es 5

EJEMPLO 4: Conociendo el vector: $\vec{A} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

Calcule el módulo del vector: $\frac{2\vec{A}}{5}$

A) 5

B) 4

C) 6

D) 12

E) 13

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO: Cálculo del módulo:

$$\vec{A} = 6\hat{i} + 8\hat{j} = (6; 8) \Rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

SEGUNDO PASO: Propiedades de los vectores:

$$\left| \frac{2\vec{A}}{5} \right| = \frac{2}{5} \cdot |\vec{A}| = \frac{2}{5} \cdot (10) = 4$$

Respuesta: el valor del vector $\frac{2\vec{A}}{5}$ es 4.

EJEMPLO 5. Dado el conjunto de vectores: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ $\mathbf{b} = -1\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $\mathbf{c} = -1\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

Calcule el módulo del vector: $\mathbf{R} = \mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$

A) 4 **B) 5** C) 6 D) 7 E) 13

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Por comodidad en el cálculo expresamos los vectores en función de pares ordenados.

$$\vec{a} = 2\hat{i} - 4\hat{j} = (2; -4)$$

$$\vec{b} = -1\hat{i} + 2\hat{j} = (-1; 2) \quad \text{Por } (-3): -3\vec{b} = +3\hat{i} + (-6)\hat{j} = (3; -6)$$

$$\vec{c} = -1\hat{i} + 3\hat{j} = (-1; 3) \quad \text{por } (2): 2\vec{c} = -2\hat{i} + 6\hat{j} = (-2; 6)$$

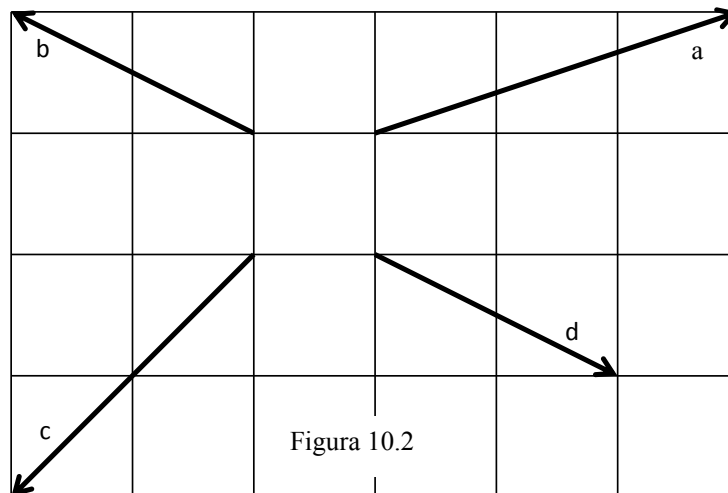
SEGUNDO PASO. Vector resultante:

$$\vec{R} = \vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c} = (3)\hat{i} + (-4)\hat{j} = (3; -4)$$

$$|\vec{R}| = |\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

Respuesta: el valor del vector es 5.

EJEMPLO 6: Se muestra un conjunto de vectores. Si cada cuadrado tiene como lado la unidad de medida, determine el vector resultante.



RESOLUCIÓN

Descomponemos cada uno de los vectores en función de los vectores unitarios cartesianos:

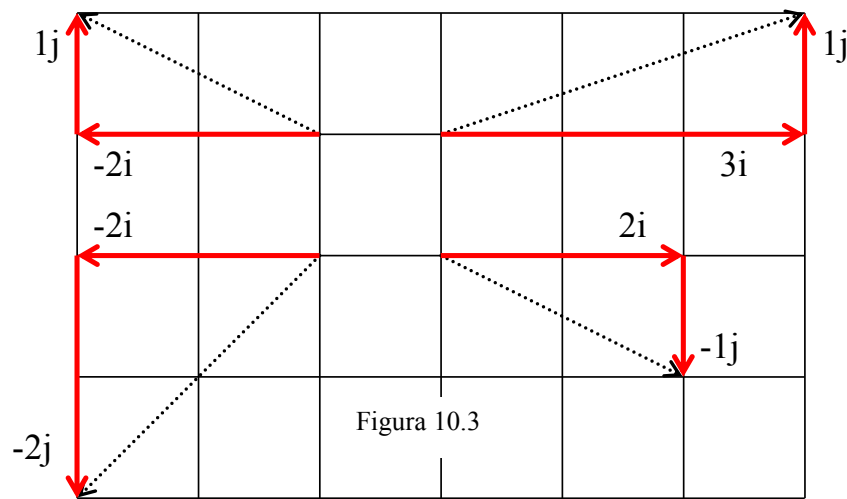


Figura 10.3

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 1\hat{j}$$

$$\vec{b} = -2\hat{i} + 1\hat{j}$$

$$\vec{c} = -2\hat{i} - 2\hat{j}$$

$$\vec{d} = +2\hat{i} - 1\hat{j}$$

Calculamos el vector resultante: $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

Respuesta: Finalmente: $\vec{R} = 1\hat{i} + 1\hat{j}$

14. VECTORES UNITARIOS CARTESIANOS EN EL ESPACIO.

En el espacio tridimensional el vector tiene tres componentes.

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

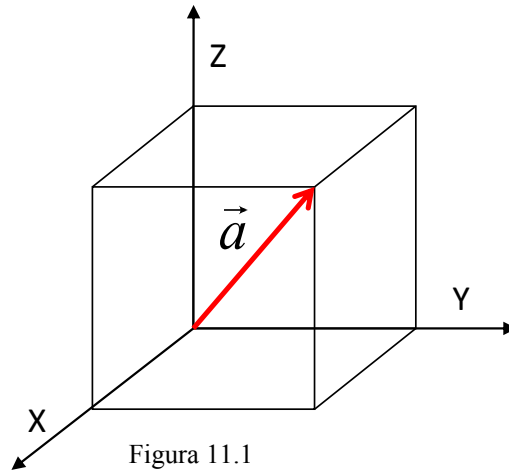


Figura 11.1

EJEMPLO 01: Se tiene un vector $\vec{a} = 3\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k}$. Determine el módulo del vector.

Resolución

Si graficamos el vector obtenemos un paralelepípedo, entonces el módulo del vector es igual al tamaño de la diagonal.

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (12)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 144 + 16}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{169} = 13$$

Respuesta: el módulo del vector es 13.

EJEMPLO 02: Se tiene un vector $\vec{a} = 12\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$. Determine el módulo del vector.

Resolución

Si graficamos el vector obtenemos un paralelepípedo, entonces el módulo del vector es igual al tamaño de la diagonal.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(12)^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{144 + 9 + 16}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{169} = 13$$

Respuesta: el módulo del vector es 13.

EJEMPLO 03: Se muestra un cubo de arista 1 cm. Determine el módulo del vector resultante.

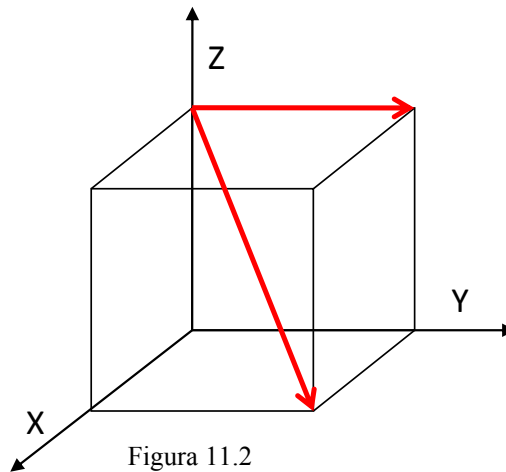


Figura 11.2

Resolución

PRIMER PASO. Hacemos la descomposición de cada vector respecto del sistema de ejes cartesianos.

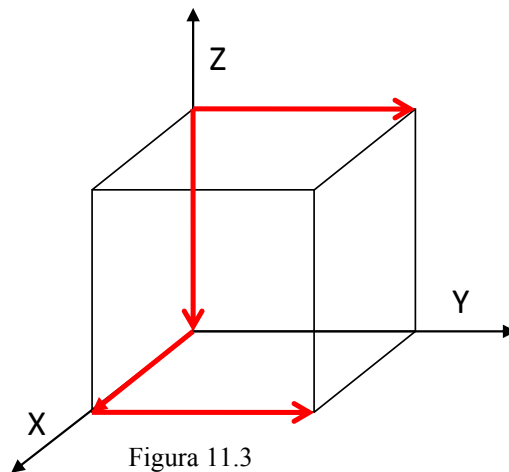


Figura 11.3

Eje X: $x = 1$

Eje Y: $y = 1 + 1 = 2$

Eje Z: $z = -1$

SEGUNDO PASO. Determinamos el módulo del vector resultante con la siguiente fórmula:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Respuesta. Reemplazando en la fórmula tenemos: $R = \sqrt{6}$

EJEMPLO 04: Se muestra un cubo de arista 1,0 cm (figura 11.4). Determine el módulo del vector resultante.

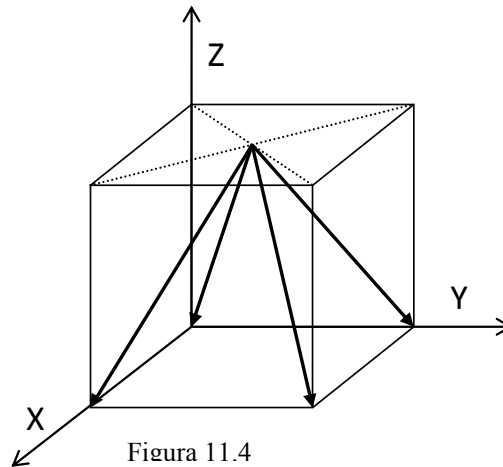


Figura 11.4

Resolución

PRIMER PASO. Hacemos la descomposición de cada vector respecto del sistema de ejes cartesianos (figura 11.5). Los vectores en la cara superior del cubo se cancelan, solo quedan componentes en el eje “Z”.

Eje X: $x = 0$

Eje Y: $y = 0$

Eje Z: $z = -4$

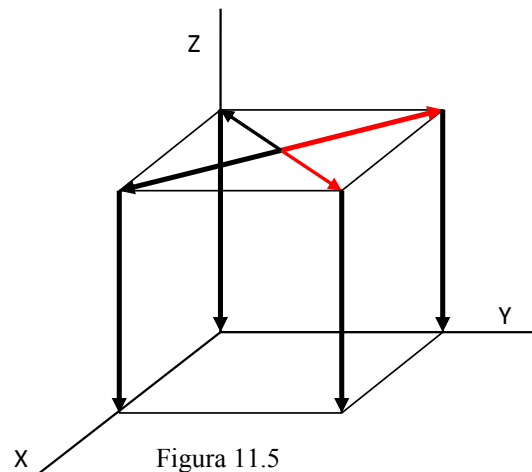


Figura 11.5

SEGUNDO PASO. Determinamos el módulo del vector resultante con la siguiente fórmula:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (-4)^2} = 4$$

Respuesta. Reemplazando en la fórmula tenemos: $R = 4$

15. VECTOR UNITARIO DIRECCIONAL. Cada vector tiene su vector unitario. Entonces se puede obtener un vector unitario en una dirección determinada, relacionado dos o más vectores.

$$\hat{u} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{VECTOR}{MODULO} \Leftrightarrow |\hat{u}| = \left| \frac{\vec{A}}{A} \right| = 1$$

Cada vector se puede expresar como del producto de su módulo por su correspondiente vector

$$\text{unitario: } \hat{u} = \frac{\vec{A}}{A} \Leftrightarrow \vec{A} = |\vec{A}| \hat{u}$$

EJEMPLO 01: Determine el vector unitario del vector: $\vec{A} = 6\hat{i} - 8\hat{j}$

Resolución

$$\hat{u} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{6\hat{i} - 8\hat{j}}{10}$$

Respuesta. el vector unitario es $\vec{u} = 0,6\hat{i} - 0,8\hat{j}$

EJEMPLO 02: Se muestra un cuadrado de vértices A, B, C y D; además un cuarto de circunferencia con centro en D. Determine el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

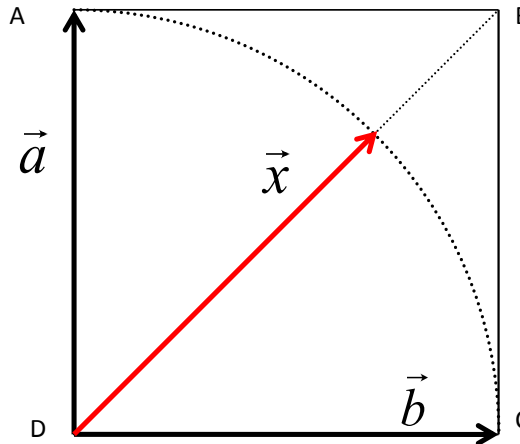


Figura 12.1

Resolución

PRIMER PASO. Consideremos un cuadrado de lado igual a la unidad de medida, por consiguiente, medida de la diagonal del cuadrado es: $\sqrt{2}$ unidades

SEGUNDO PASO. Observamos que el vector unitario $\hat{u}$ del vector $\vec{x}$ es el mismo que del vector $(\vec{a} + \vec{b})$.

$$\text{El vector unitario es: } \hat{u} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{\sqrt{2}}$$

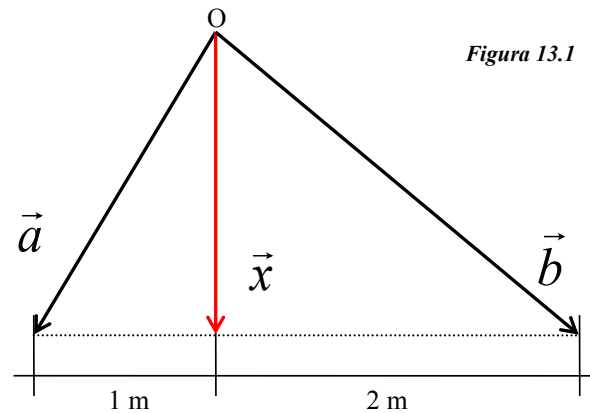
TERCER PASO. El vector $\vec{x}$ es igual al producto del módulo del vector $\vec{x}$ por su correspondiente vector unitario.

$\vec{x} = |\vec{x}| \hat{u}$, entonces tenemos que el tamaño del vector $\vec{x}$ es igual al radio del cuadrante cuya medida es la unidad.

Respuesta: Finalmente tenemos: $\vec{x} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{\sqrt{2}}$

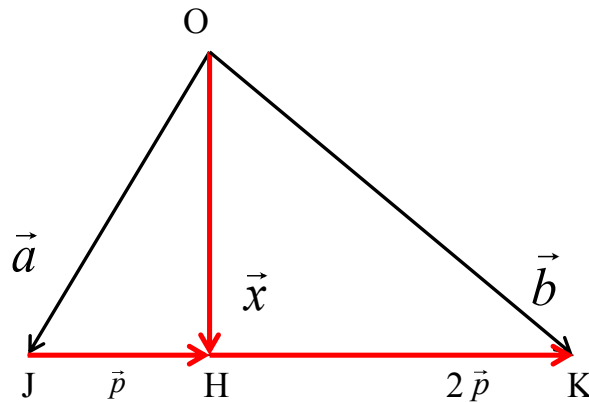
16. EXPRESIÓN DE UN VECTOR EN FUNCIÓN DE OTROS: para expresar un vector en función de otros es necesario construir polígonos cerrados y aplicar a estos las propiedades del método del polígono para adicionar dos o más vectores.

EJEMPLO 01: En la figura expresar el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Resolución

PRIMER PASO. Agregamos al grafico dos vectores cuyos módulos están en relación de 1 a 2.



SEGUNDO PASO. Adición y sustracción de vectores:

En el triángulo OJH: $\vec{x} = \vec{a} + \vec{p}$

Despejando: $\vec{x} - \vec{a} = \vec{p} \quad \dots(1)$

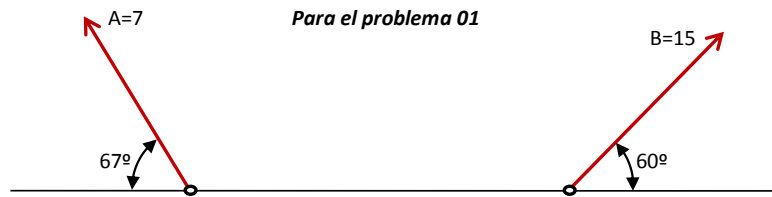
En el triángulo OHK: $\vec{x} + 2\vec{p} = \vec{b} \quad \dots(2)$

Reemplazando (1) en (2): $\vec{x} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$

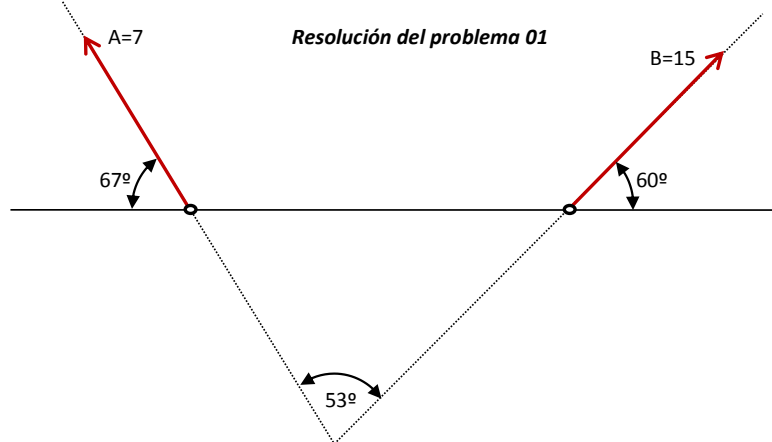
17. CONTINUARÁ.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TIPO EXAMEN DE ADMISIÓN.

1. Se muestra dos vectores de módulos 7 y 15 unidades, determine el módulo del vector resultante.

**RESOLUCIÓN**

PRIMER PASO. Prolongamos la línea de acción de los vectores. El ángulo que forman los vectores es igual a: $180^\circ - 67^\circ - 60^\circ = 53^\circ$



SEGUNDO PASO. Método del Paralelogramo:

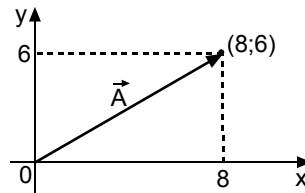
$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$$

$$(R)^2 = (7)^2 + (8)^2 + 2 \cdot (7) \cdot (8) \cdot \cos 60^\circ$$

Resolviendo: $\|\vec{R}\| = 20$

Respuesta. El valor de la resultante es 20 unidades.

2. En la figura mostrada determine el módulo y la dirección del vector A.



A) 10 y 37° con el eje X

D) 20 y 60° con el eje X

B) 10 y 53° con el eje X

E) 100 y 37° con el eje X

C) 10 y 45° con el eje X

RESOLUCIÓN

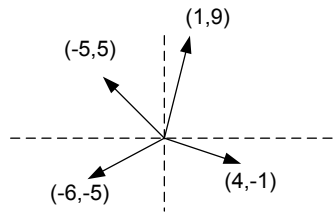
PRIMER PASO: Módulo, $\|\vec{A}\| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

SEGUNDO PASO: Se recomienda utilizar calculadora científica.

Dirección, INV, TAN, $\left(\frac{6}{8}\right)$

Respuesta. la medida del ángulo es $\theta = 36,86989765^\circ \cong 37^\circ$

3. Determine el módulo y la dirección del vector resultante.



- A) 8 B) 6 C) 12 D) 16 E) 10

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO: Vector resultante, $\vec{R} = (1;9) + (-5;5) + (-6;-5) + (4;-1) = (-6;8)$

SEGUNDO PASO: Módulo, $\|\vec{R}\| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$

TERCER PASO: Se recomienda utilizar calculadora científica.

INV, TAN, $\left(\frac{8}{-6}\right)$

Respuesta. la medida del ángulo es $\theta = 36,86989765^\circ \cong 37^\circ$

4. Determine el ángulo que forma el vector resultante con el eje X, si se tienen los vectores $\vec{A} = -5i + 4j$ y $\vec{B} = 9i - j$.

- A) 53° B) 60° C) 120° D) 90° E) 37°

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. vector resultante: $\vec{A} + \vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} = (4;3)$

módulo del vector resultante: $\|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

SEGUNDO PASO. dirección del vector resultante: INV, TAN, $\left(\frac{3}{4}\right)$

Respuesta. La medida del ángulo es $\theta = 36,86989765^\circ \cong 37^\circ$

5. Conociendo el vector: $\vec{A} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$

Calcule el módulo del vector: $\frac{2\vec{A}}{5}$

- A) 5 B) 4 C) 6 D) 12 E) 13

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO: Cálculo del módulo:

$$\vec{A} = 6\hat{i} + 8\hat{j} = (6;8)$$

Cálculo del módulo: $\|\vec{A}\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

SEGUNDO PASO: Propiedades de los vectores. El módulo es:

$$\left\|\frac{2\vec{A}}{5}\right\| = \frac{2}{5} \cdot \|\vec{A}\| = \frac{2}{5} \cdot (10) = 4$$

6. Conociendo el vector: $\vec{A} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

Calcule el módulo del vector: $\frac{-\vec{A}}{5}$

- A) 5 B) 4 C) 6 D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO:

Se puede expresar el vector como un par ordenado:

$$\vec{A} = 6\hat{i} - 8\hat{j} = (6; -8)$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$$

SEGUNDO PASO. El vector opuesto:

$$-\vec{A} = -6\hat{i} + 8\hat{j} = (-6; +8)$$

$$|-\vec{A}| = \sqrt{(-6)^2 + (+8)^2} = 10$$

TERCER PASO: Propiedades de los vectores.

$$\left| \frac{-\vec{A}}{5} \right| = \frac{1}{5} |-\vec{A}| = \frac{1}{5} \cdot (10) = 2$$

7. Sean los vectores: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

Halle el módulo del vector: $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$

- A) 0 B) 1 C) 1 D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO: Producto de un escalar por un vector.

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} = (2; 4) \quad 3\vec{a} = 6\hat{i} + 12\hat{j} = (6; 12)$$

$$\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} = (3; 5) \quad 2\vec{b} = 6\hat{i} + 10\hat{j} = (6; 10)$$

SEGUNDO PASO: diferencia de vectores.

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = (6\hat{i} + 12\hat{j}) - (6\hat{i} + 10\hat{j}) = (0\hat{i} + 2\hat{j}) = (0; 2)$$

Observación: El resultado tiene módulo 2 y dirección vertical hacia arriba

8. Dado el conjunto de vectores: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ $\mathbf{b} = -1\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $\mathbf{c} = -1\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

Halle el módulo del vector: $\mathbf{R} = \mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 13

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Aplicamos propiedades de los vectores:

$$\vec{a} = 2\hat{i} - 4\hat{j} = (2; -4)$$

$$\vec{b} = -1\hat{i} + 2\hat{j} = (-1; 2) \quad -3\vec{b} = +3\hat{i} + (-6)\hat{j} = (3; -6)$$

$$\vec{c} = -1\hat{i} + 3\hat{j} = (-1; 3) \quad 2\vec{c} = -2\hat{i} + 6\hat{j} = (-2; 6)$$

SEGUNDO PASO. Vector resultante:

$$\vec{R} = \vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c} = (3)\hat{i} + (-4)\hat{j} = (3; -4)$$

$$|\vec{R}| = |\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

Respuesta. El valor del vector resultante es 5.

9. Sean los vectores: $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ $\mathbf{c} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j}$ y

$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, donde el módulo de R es igual a 10 unidades y además es paralelo al eje “y” del sistema de coordenadas, hallar (m + n).

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) N.A

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Ordenamos los vectores datos:

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} = (3;4)$$

$$\vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j} = (-2;5)$$

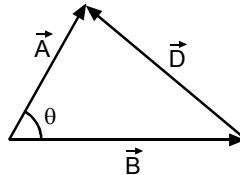
$$\vec{c} = m\hat{i} + n\hat{j} = (m;n)$$

SEGUNDO PASO. Vector resultante:

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (m+1)\hat{i} + (n+9)\hat{j} = (0;10)$$

No tiene componente en el eje X: $m+1=0 \Rightarrow m=-1$ El vector es paralelo al eje Y: $n+9=10 \Rightarrow n=+1$ **Respuesta:** $m+n=0$

10. En la figura mostrada el módulo de los vectores es $A = 10$ y $B = 12$. Si la medida del ángulo es $\theta = 60^\circ$, determine el módulo del vector diferencia D .



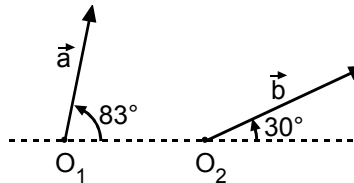
- A) 10 **B) 11,135** C) 12 D) 13 E) 14

RESOLUCIÓNLey de Cosenos: $D^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$

$$(D)^2 = (10)^2 + (12)^2 - 2(10)(12) \cos 60^\circ$$

Respuesta. El módulo es $\|\vec{D}\| = 2\sqrt{31} = 11,14$

11. En la figura mostrada el módulo de los vectores es $a = 5$ y $b = 6$. Determine el módulo del vector: $a - b$



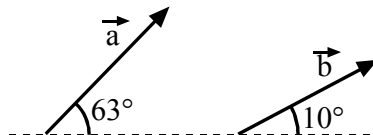
- A) 5** B) 6 C) 7 D) 8 E) 4

RESOLUCIÓNPRIMER PASO. El ángulo entre los vectores se consigue restando los ángulos: $\theta = 83^\circ - 30^\circ = 53^\circ$ SEGUNDO PASO. Ley de Cosenos: $D^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$

$$(D)^2 = (5)^2 + (6)^2 - 2(5)(6) \cos 53^\circ$$

Respuesta. $\|\vec{D}\| = 5$

12. En la figura mostrada el módulo de los vectores es $a = 5$ y $b = 3$. Determine el módulo del vector: $a - 2b$



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN

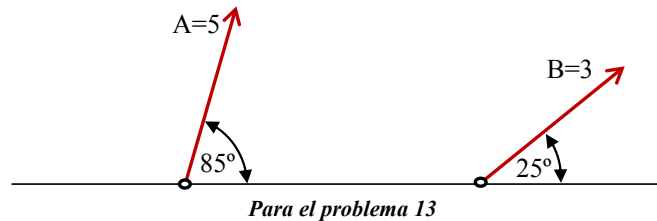
PRIMER PASO. El ángulo entre los vectores se consigue restando los ángulos: $\theta = 63^\circ - 10^\circ = 53^\circ$

SEGUNDO PASO. Ley de cosenos: $D^2 = a^2 + (2b)^2 - 2a(2b)\cos\theta$

$$(D)^2 = (5)^2 + (6)^2 - 2(5)(6)\cos 53^\circ$$

Respuesta: $\|\vec{D}\| = 5$

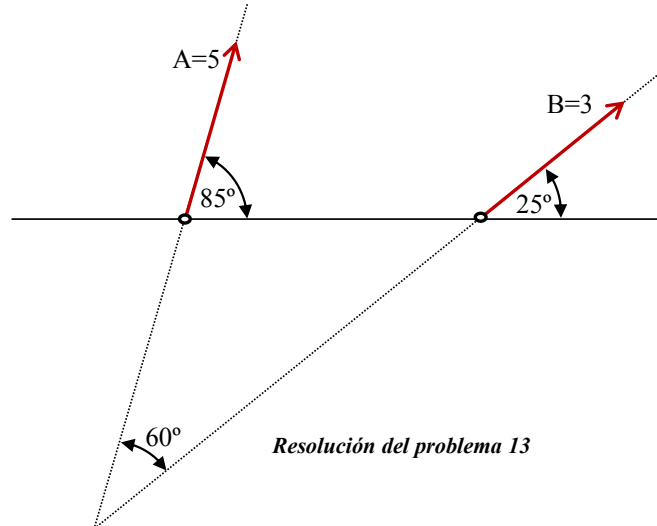
13. Se muestra dos vectores de módulos 3 y 5 unidades, determine el módulo del vector resultante.



A) 14 B) 7 C) 13 D) 12 E) 15

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Prolongamos la línea de acción de los vectores. El ángulo que forman los vectores es igual a la diferencia: $85^\circ - 25^\circ = 60^\circ$



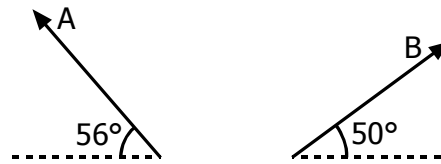
SEGUNDO PASO. Método del Paralelogramo: $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$$(R)^2 = (5)^2 + (3)^2 + 2(5)(3)\cos 60^\circ$$

Resolviendo: $\|\vec{R}\| = 7$

Respuesta. El valor de la resultante es 7 unidades.

14. En la figura mostrada el módulo de los vectores es $A = 50$ y $B = 14$. Determine el módulo del vector: $\mathbf{A - B}$.



- A) 24 **B) 48** C) 36 D) 64 E) 42

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. El ángulo entre los vectores se consigue restando los ángulos:

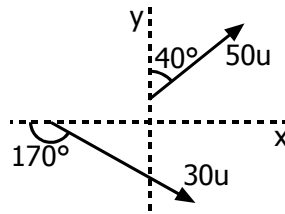
$$\theta = 180^\circ - 56^\circ - 50^\circ = 74^\circ$$

SEGUNDO PASO. Ley de cosenos. $D^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$

$$(D)^2 = (50)^2 + (14)^2 - 2(50)(14)\cos 74^\circ$$

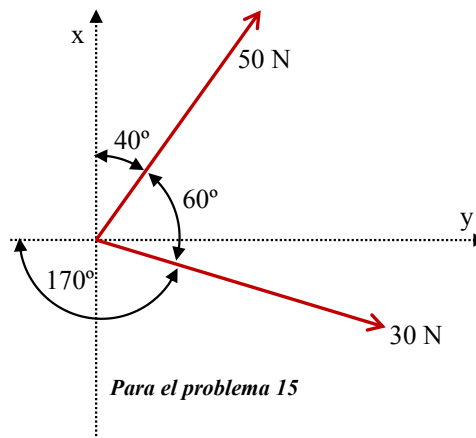
Respuesta: $\|\vec{D}\| = 48$

15. Se muestra dos vectores de módulos 30 y 50 unidades, determine el módulo del vector resultante.



- A) 20 **B) 70** C) 80 D) 100 E) 60

RESOLUCIÓN



PRIMER PASO. Llevamos a los vectores a un origen común. El ángulo que forman los vectores es igual a: 60°

SEGUNDO PASO. Aplicamos el método del paralelogramo.

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$$

$$(R)^2 = (50)^2 + (30)^2 + 2(50)(30)\cos 60^\circ$$

$$\|\vec{R}\| = 70$$

Respuesta. El valor de la resultante es 70 unidades.

16. ¿Qué ángulo deben formar dos fuerzas de módulos 27 N y 45 N para que actúen sobre un cuerpo como una sola fuerza de 63 N?

A) 30° B) 45° C) 37° D) 53° **E) 60°**

RESOLUCIÓN

Método del paralelogramo: $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$

Reemplazamos: $(63)^2 = (27)^2 + (45)^2 + 2(27)(45) \cos \theta$

Respuesta: $\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$

17. ¿Qué ángulo deben formar dos fuerzas de módulos 3 N y 5 N para que actúen sobre un cuerpo como una sola fuerza de 7 N?

A) 30° B) 45° C) 37° D) 53° **E) 60°**

RESOLUCIÓN

Método del paralelogramo: $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$

Reemplazamos: $(7)^2 = (3)^2 + (5)^2 + 2(3)(5) \cos \theta$

Respuesta: $\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$

18. ¿Qué ángulo deben formar dos fuerzas de módulos 6 N y 10 N para que actúen sobre un cuerpo como una sola fuerza de 14 N?

A) 30° B) 45° C) 37° D) 53° **E) 60°**

RESOLUCIÓN

Método del paralelogramo: $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$

Reemplazando: $(14)^2 = (6)^2 + (10)^2 + 2(6)(10) \cos \theta$

Respuesta: $\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$

19. ¿Qué ángulo deben formar dos fuerzas de módulos 9 N y 15 N para que actúen sobre un cuerpo como una sola fuerza de 21 N?

A) 30° B) 45° C) 37° D) 53° **E) 60°**

RESOLUCIÓN

Método del paralelogramo: $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$

Reemplazamos: $(21)^2 = (9)^2 + (15)^2 + 2(9)(15) \cos \theta$

Respuesta: $\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$

20. ¿Qué ángulo deben formar dos fuerzas de módulos 12 N y 20 N para que actúen sobre un cuerpo como una sola fuerza de 28 N?

A) 30° B) 45° C) 37° D) 53° **E) 60°**

RESOLUCIÓN

Método del paralelogramo: $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$

Reemplazando: $(28)^2 = (12)^2 + (20)^2 + 2(12)(20) \cos \theta$

Respuesta: $\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$

21. ¿Qué ángulo deben formar dos fuerzas de módulos 15 N y 20 N para que actúen sobre un cuerpo como una sola fuerza de 7 N?

A) 164°

B) 135°

C) 127°

D) 143°

E) 120°

RESOLUCIÓN

Método del paralelogramo: $R^2 = A^2 + B^2 + 2A.B.\cos\theta$

Reemplazando: $(7)^2 = (15)^2 + (20)^2 + 2.(15).(20).\cos\theta$

$$\cos\theta = -\frac{24}{25} \Rightarrow \theta \approx 164^\circ$$

Respuesta. La medida del ángulo es $\theta = 164^\circ$

22. El módulo de la resultante de dos vectores varía entre un valor mínimo de 2 unidades y un valor máximo de 14 unidades. Determine el módulo de la resultante cuando los vectores formen un ángulo de 90°.

A) 2

B) 11

C) 10

D) 12

E) 13

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Propiedades de los vectores.

Maxima: $a + b = 14 \dots (1)$

Minima: $a - b = 2 \dots (2)$

SEGUNDO PASO. Adicionando ambas ecuaciones:

$$a = 8 \text{ y } b = 6$$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

Respuesta. el valor de la resultante mide 10 unidades.

23. El módulo de la resultante de dos vectores varía entre un valor mínimo de 7 unidades y un valor máximo de 17 unidades. Determine el módulo de la resultante cuando los vectores formen un ángulo de 90°.

A) $\sqrt{128}$

B) 11

C) 10

D) 12

E) 13

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Propiedades de los vectores.

Maxima: $a + b = 17 \dots (1)$

Minima: $a - b = 7 \dots (2)$

SEGUNDO PASO. Adicionando las ecuaciones (1) y (2):

$$a = 12 \text{ y } b = 5$$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(12)^2 + 5^2} = 13$$

Respuesta: $\|\vec{R}\| = 13$

24. El módulo de la resultante de dos vectores varía entre un valor mínimo de 8 unidades y un valor máximo de 12 unidades. Determine el módulo de la resultante cuando los vectores formen un ángulo de 53°.

A) $\sqrt{128}$

B) 11,32

C) 10

D) 10,5

E) 9

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Propiedades de los vectores.

Maxima: $a + b = 12 \dots (1)$

Minima: $a - b = 8 \dots (2)$

SEGUNDO PASO. Adicionando las ecuaciones (1) y (2):

$$a=10 \text{ y } b=2$$

TERCER PASO. Aplicamos el método el paralelogramo.

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos \theta}$$

$$R = \sqrt{(10)^2 + 2^2 + 2.(10).(2).\cos 53^\circ} = 8\sqrt{2} = 11,31$$

Respuesta. El valor del vector resultante es 11,31 unidades.

25. El módulo de la resultante de dos vectores varía entre un valor mínimo de 2 unidades y un valor máximo de 8 unidades. Determine el módulo de la resultante cuando los vectores formen un ángulo de 60° .

A) 6 **B) 7** C) 5 D) 4 E) 3

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Propiedades de los vectores.

$$\text{Maxima: } a+b=8 \dots (1)$$

$$\text{Minima: } a-b=2 \dots (2)$$

SEGUNDO PASO. Adicionando las ecuaciones (1) y (2):

$$\text{Resolviendo: } a=5 \text{ y } b=3$$

TERCER PASO. Aplicamos el método el paralelogramo.

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos \theta}$$

$$R = \sqrt{(5)^2 + 3^2 + 2.(5).(3).\cos 60^\circ} = 7$$

Respuesta. El valor del vector resultante es 7 unidades.

26. El módulo de la resultante de dos vectores varía entre un valor mínimo de 4 unidades y un valor máximo de 16 unidades. Determine el módulo de la resultante cuando los vectores formen un ángulo de 60° .

A) 14 B) 7 C) 10 D) 12 E) 13

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Propiedades de los vectores.

$$\text{Maxima: } a+b=10 \dots (1)$$

$$\text{Minima: } a-b=6 \dots (2)$$

SEGUNDO PASO. Adicionando las ecuaciones (1) y (2):

$$\text{Resolviendo: } a=10 \text{ y } b=6$$

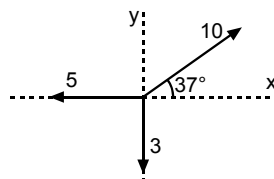
TERCER PASO. Aplicamos el método el paralelogramo.

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos \theta}$$

$$R = \sqrt{(10)^2 + 6^2 + 2.(10).(6).\cos 60^\circ} = 14$$

Respuesta. El valor del vector resultante es 14 unidades.

27. En el sistema vectorial mostrado determine la dirección del vector resultante respecto del eje "x" positivo.



- A) 30° **B) 45°** C) 37° D) 53° E) 60°

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Resultante en cada eje cartesiano.

$$R_x = 10 \cdot \cos 37^\circ - 5 = 2,99 \approx 3$$

$$R_y = 10 \cdot \sin 37^\circ - 3 = 3,02 \approx 3$$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la dirección del vector resultante.

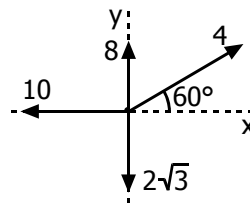
$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{3,02}{2,99} \approx 1$$

TERCER PASO. Cálculo del ángulo usando calculadora:

$$\text{INV, TAN, } \left(\frac{3,02}{2,99} \right) =$$

Respuesta: $\theta = 45,28599985^\circ \approx 45^\circ$

28. En el sistema vectorial mostrado determine la dirección del vector resultante respecto del eje "x" positivo.



- A) 60° B) 45° **C) 135°** D) 120° E) N.A.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Cálculo de la resultante en cada eje cartesiano.

$$R_x = 4 \cdot \cos 60^\circ - 10 = -8$$

$$R_y = 4 \cdot \sin 60^\circ + 8 - 2\sqrt{3} = 8$$

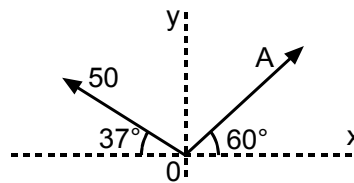
SEGUNDO PASO. Cálculo de la dirección del vector resultante.

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{8}{-8} = -1$$

Cálculo del ángulo usando calculadora: INV, TAN, (-1)

Respuesta. La medida del ángulo es $\theta = -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$

29. En el sistema vectorial mostrado determine el módulo del vector A, tal que el vector resultante este contenido en el eje "y" positivo. ¿Cuál es el valor de la resultante?



- A) 60 **B) 99** C) 80 D) 90 E) N.A

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Si la resultante es vertical, entonces la componente en el eje X es nula.

$$R_x = A \cdot \cos 60^\circ - 50 \cdot \cos 37^\circ = 0$$

$$\|\vec{A}\| = \frac{50 \cdot \cos 37^\circ}{\cos 60^\circ} \approx 80$$

El valor aproximado de A es 80 unidades.

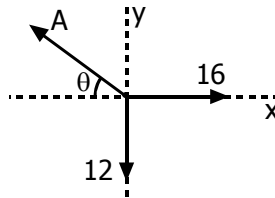
SEGUNDO PASO. Cálculo de la resultante vertical:

$$R_y = A \cdot \sin 60^\circ + 50 \cdot \sin 37^\circ$$

$$R_y = \left(\frac{50 \cdot \cos 37^\circ}{\cos 60^\circ} \right) \cdot \sin 60^\circ + 50 \cdot \sin 37^\circ = 99,25461516$$

Respuesta. el valor aproximado de la resultante es 99 unidades.

30. En el sistema vectorial mostrado la resultante es nula. Determine el módulo del vector A y la medida del ángulo θ .



- A) 20 y 30° B) 20 y 45° **C) 20 y 37°** D) 20 y 53° E) 48 y 60°

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Cuando los tres vectores forman un triángulo rectángulo.

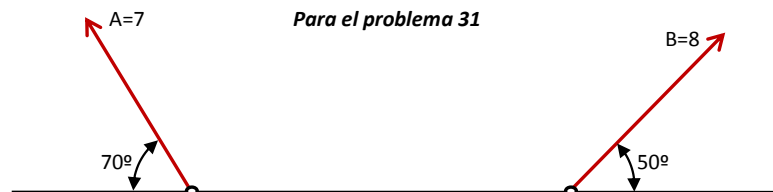
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(12)^2 + (16)^2} = 20$$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la medida del ángulo.

$$\tan \theta = \frac{C.op}{C.ad} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Respuesta: la medida del ángulo es $\theta \approx 37^\circ$

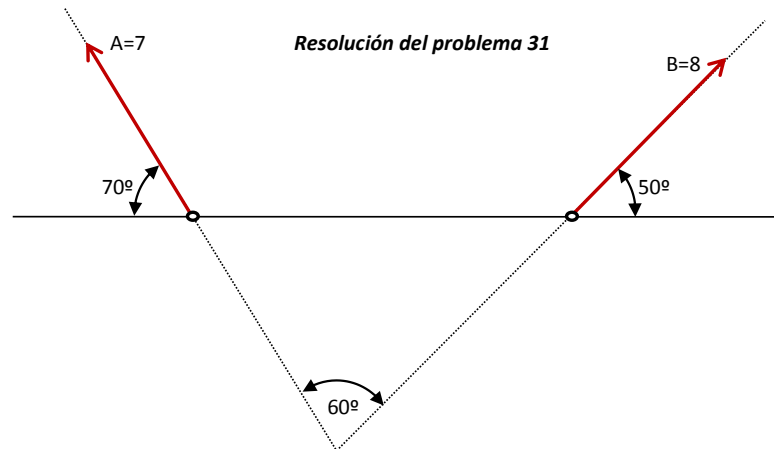
31. Se muestra dos vectores de módulos 7 y 8 unidades, determine el módulo del vector resultante.



Para el problema 31

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Prolongamos la línea de acción de los vectores. El ángulo que forman los vectores es igual a: $180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$



SEGUNDO PASO. Método del Paralelogramo:

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$$

$$(R)^2 = (7)^2 + (8)^2 + 2 \cdot (7) \cdot (8) \cdot \cos 60^\circ$$

Resolviendo: $\|\vec{R}\| = 13$

Respuesta. El valor de la resultante es 13 unidades.

32. Diego representa un vector como un par ordenado cuyo origen se encuentra en el origen de coordenadas: $\vec{A} = (6; 8)$. Determine el módulo y dirección de este vector.

A) 10 y 37° con el eje X B) 10 y 53° con el eje X C) 10 y 45° con el eje X
D) 20 y 60° con el eje X E) 100 y 37° con el eje X

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO: Cálculo del módulo: $\|\vec{A}\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

SEGUNDO PASO: Se recomienda utilizar calculadora científica.

Dirección, INV, TAN, $\left(\frac{8}{6}\right)$

$$\theta = 53,13010235^\circ \cong 53^\circ$$

Respuesta. la medida del ángulo es $\theta \approx 53^\circ$

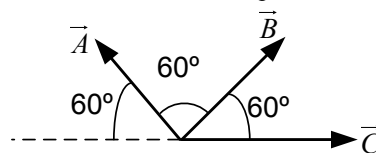
33. CONTINUARÁ.

PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE.

1. Pablo representa un vector como un par ordenado cuyo origen se encuentra en el origen de coordenadas: $\vec{A} = (7;24)$. Determine el módulo y dirección de este vector.
A) 10 y 37° con el eje X B) 10 y 53° con el eje X C) 25 y 16° con el eje X
D) 20 y 60° con el eje X E) 25 y 74° con el eje X
2. Sean los vectores: $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
Halle el módulo del vector: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
A) 14 B) 5 C) 13 D) 12 E) 15
3. Pedro representa un vector como un par ordenado cuyo origen se encuentra en el origen de coordenadas: $\vec{A} = (9;12)$. Determine el módulo y dirección de este vector.
A) 15 y 37° con el eje X B) 15 y 53° con el eje X C) 15 y 45° con el eje X
D) 15 y 60° con el eje X E) 100 y 37° con el eje X
4. Conociendo el vector: $\vec{A} = 9\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$
Halle el módulo del vector: $\frac{2\vec{A}}{5}$
A) 5 B) 4 C) 6 D) 12 E) 13
5. Conociendo el vector: $\vec{A} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
Halle el módulo del vector: $\frac{2\vec{A}}{5}$
A) 5 B) 4 C) 6 D) 2 E) 3
6. Sean los vectores: $\mathbf{a} = 4\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{j}$
¿Qué ángulo forman los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$?
A) 60° B) 180° C) 90° D) 60° E) 0°
7. Sean los vectores: $\mathbf{a} = 4\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i}$
¿Qué ángulo forman los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$?
A) 60° B) 180° C) 90° D) 60° E) 0°
8. Sean los vectores: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$
Halle el módulo del vector: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
A) 5 B) 1 C) 11 D) 12 E) 13
9. Sean los vectores: $\mathbf{a} = 15\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
Halle el módulo del vector: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
A) 25 B) 21 C) 11 D) 12 E) 13
10. Sean los vectores: $\mathbf{a} = 15\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$
Halle el módulo del vector: $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
A) 0 B) 1 C) 11 D) 12 E) 13

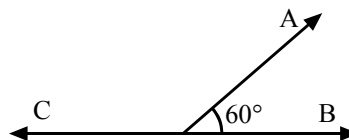
MÉTODO DEL PARALELOGRAMO

11. Determine el módulo de la resultante de dos vectores cuyos módulos son 15 y 7 unidades, si forman un ángulo de 53° .
A) 32 B) 28 C) 20 D) 40 E) 30
12. La resultante máxima de dos vectores mide 17 unidades y la mínima 7 unidades. Determine el módulo de la resultante cuando los vectores formen un ángulo de 90° entre sí.
A) 12 B) 17 C) 22 D) 13 E) 15
13. Un vector horizontal forma 143° con otro vector de 15 unidades. Determine el módulo de dicho vector de tal manera que su resultante sea mínima.
A) 12 B) 13 C) 22 D) 8 E) 18
14. Determine el ángulo que forman dos vectores, si ambos vectores y su resultante tienen el mismo módulo.
A) 120° B) 60° C) 90° D) 45° E) 127°
15. El módulo de la resultante de dos vectores varía entre un valor mínimo de 6 unidades y un valor máximo de 24 unidades. Determine el módulo de la resultante cuando los vectores formen un ángulo de 60° .
A) 14 B) 21 C) 20 D) 22 E) 23
16. La resultante máxima de dos vectores mide 10 unidades y su resultante mínima 2 unidades. Calcule el módulo de la resultante cuando los vectores formen un ángulo de 120° .
A) $3\sqrt{5}$ B) $5\sqrt{6}$ C) $\sqrt{11}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{7}$
17. Se tiene dos vectores de módulos $a = 5$ y $b = 12$, que forman entre si un ángulo de 90° . Determine el módulo del vector resultante:
A) 26 B) 14 C) 16 D) 13 E) 30
18. Determinar el módulo del vector resultante. Se tiene que $A = B = C = 6$.



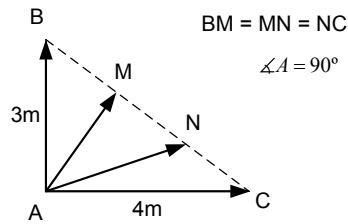
- A) 12 B) 15 C) 20 D) 8 E) 10

19. Se muestra tres vectores, donde $A = 5$, $B = 3$ y $C = 8$. Determine el módulo del vector resultante.

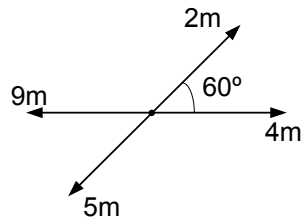


- A) 0 B) 5 C) 10 D) 12 E) N.A.

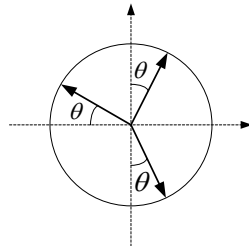
20. Hallar el módulo de la resultante de los vectores en metros.



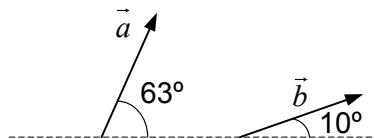
- A) 14 B) 10 C) 18 D) 15 E) 7
21. Dos vectores poseen módulos de 11 y 23 unidades, si el vector diferencia posee un módulo de 30 unidades, calcule el módulo del vector suma.
A) 40 B) 50 C) 30 D) 60 E) 20
22. Determine el módulo del vector resultante. La figura muestra los módulos de los vectores con origen común.



- A) 5m B) 6m C) 7m D) 8m E) 10m
23. Determine el valor del ángulo θ , para que la resultante de los vectores mostrados sea mínima.



- A) $35,5^\circ$ B) 45° C) 30° D) $22,5^\circ$ E) 60°
24. Dados los vectores con módulos $a = 5N$ y $b = 3N$, calcule el módulo de $\vec{a} - 2\vec{b}$.



- A) 7N B) 6N C) 12N D) 5N E) 10N

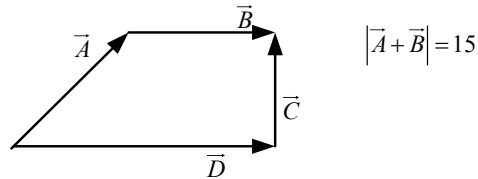
MÉTODO DEL POLÍGONO

25. Señale las afirmaciones correctas:

- a. La suma de dos vectores puede ser igual a la de otros cuatro vectores.
- b. Si dos pares de vectores dan la misma resultante entonces son idénticos.
- c. Un vector puede ser generado por la suma de infinitos pares de vectores.

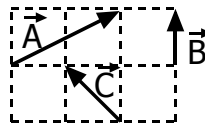
A) FFF B) FFV C) FVF D) VFV E) VVV

26. Calcule el módulo de la resultante del sistema mostrado.



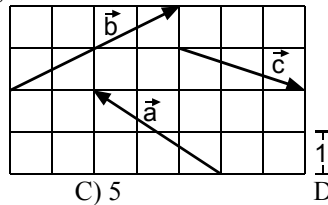
A) 45 B) 30 C) 25 D) 35 E) 50

27. Se muestra una cuadrícula donde el lado de cada cuadrado es $\sqrt{3}$ u. Determine el módulo del vector resultante.



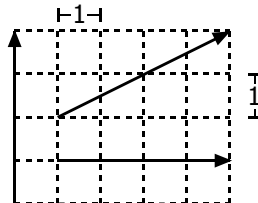
A) 2u B) 3u C) 4u D) 5u E) $\sqrt{30}$

28. En el sistema vectorial mostrado, determine el módulo del vector resultante.



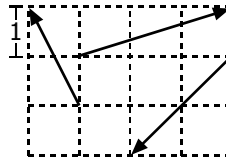
A) 0 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

29. En el sistema vectorial mostrado, determine el módulo del vector resultante.



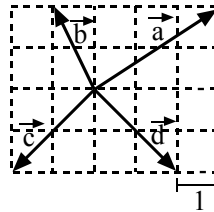
A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 10

30. En el sistema vectorial mostrado, determine el módulo del vector resultante.



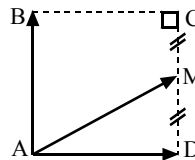
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 10

31. En el sistema vectorial mostrado, determine el módulo del vector resultante.



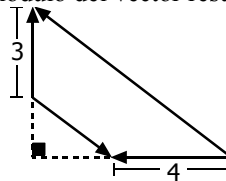
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) N.A.

32. De muestra un cuadrado de vértices A, B, C y D donde cada lado mide 2 cm. Si M es el punto medio de CD, determine el módulo del vector resultante.



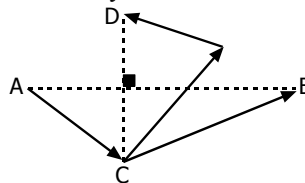
- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) N.A.

33. En la figura mostrada, determine el módulo del vector resultante.



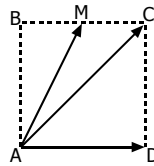
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 10 E) 0

34. Sabiendo que los segmentos miden $AB = 6$ y $CD = 8$. Determine el módulo del vector resultante.



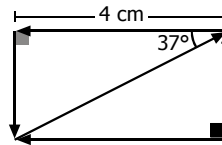
- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 0

35. La figura muestra un cuadrado de vértices ABCD de lado 2 cm. Si M es punto medio de BC, determine el módulo del vector resultante (en cm).



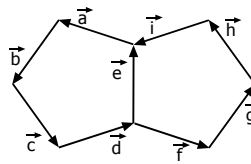
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

36. La figura muestra cinco vectores, donde se observa un rectángulo y una diagonal. Determine el módulo del vector resultante.



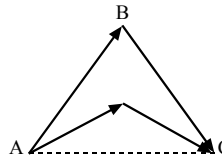
- A) 3 cm B) 4 cm C) 5 cm D) 10 cm E) 0

37. En la figura mostrada determine el vector resultante



- A) **e** B) -e C) 2e D) 3e E) N.A.

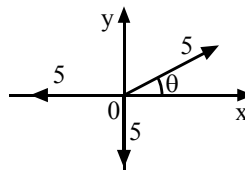
38. Se muestra cuatro vectores. Si $AB = BC = AC = 3$ cm, determine el módulo del vector resultante.



- A) 0 B) 3 cm C) 6 cm D) 9 cm E) N.A

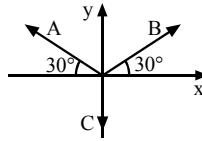
MÉTODO DE LA DESCOMPOSICIÓN RECTANGULAR

39. En el sistema vectorial mostrado determine la mitad del ángulo θ tal que el módulo del vector resultante sea mínimo.



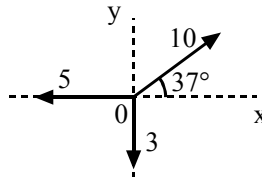
- A) 60° B) 45° C) 135° D) 120° E) N.A.

40. Determine el módulo del vector resultante sabiendo que: $A = B = 10$ y $C = 5$.



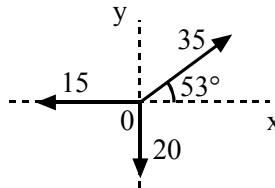
- A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 0

41. En la figura mostrada determine la dirección del vector resultante respecto del eje “x” positivo.



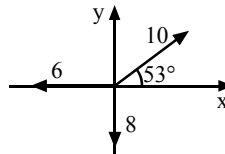
- A) 60° B) 45° C) 135° D) 120° E) N.A.

42. En la figura mostrada determine la dirección del vector resultante respecto del eje “x” positivo.



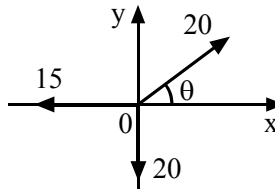
- A) 60° B) 45° C) 37° D) 53° E) N.A.

43. En la figura mostrada determine el módulo del vector resultante.



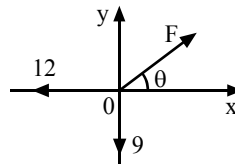
- A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 0

44. Determine la medida del ángulo θ , tal que, el vector resultante tiene dirección horizontal.



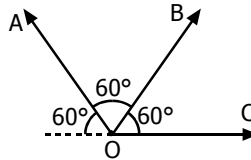
- A) 60° B) 45° C) 37° D) 53° E) 90°

45. Determine la medida del ángulo θ tal que, la resultante de los vectores sea nula.



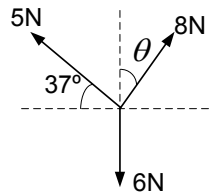
- A) 60° B) 45° C) 37° D) 53° E) 90°

46. La figura muestra tres vectores de módulos iguales, $A = B = C = 5$. Determine el módulo del vector resultante.



- A) 0 B) 5 C) 10 D) 15 E) N.A

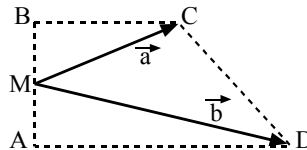
47. Si la resultante del conjunto de vectores mostrados se encuentra sobre el eje Y, determine el valor del ángulo θ .



- A) 45° B) 60° C) 53° D) 37° E) 30°

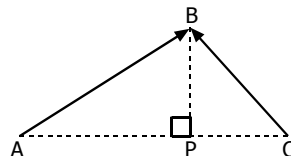
DESCOMPOSICIÓN POLIGONAL

48. Se muestra un trapecio de vértices A, B, C y D. Si M es punto medio de AB y además $BC = 5$ cm y $AD = 7$ cm determine el módulo del vector resultante.



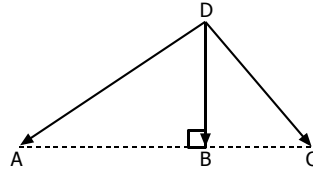
- A) 10 cm B) 12 cm C) 14 cm D) 16 cm E) 18 cm

49. Sabiendo que $AP = 12$, $PC = 4$ y $PB = 3$. Determine el módulo del vector resultante.



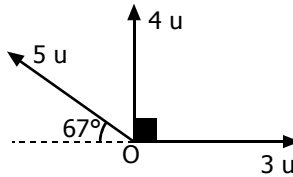
- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) N.A.

50. Sabiendo que $AB = 12$, $BC = 4$ y $PB = 2$. Determine el módulo del vector resultante.



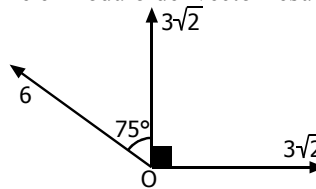
- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) N.A.

51. Se muestra tres vectores. Determine el módulo del vector resultante.



- A) 12 B) 2 C) 3 D) 8 E) N.A.

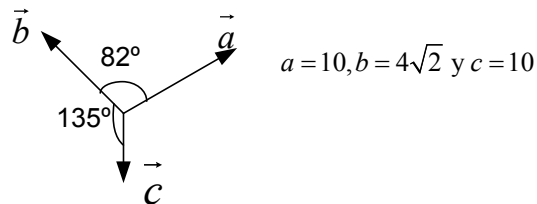
52. Se muestra tres vectores. Determine el módulo del vector resultante.



- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) N.A.

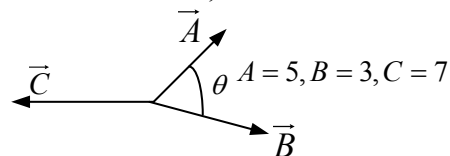
RESULTANTE CERO Y LEY DE SENOS

53. Determine el módulo de la resultante.



- A) 2 B) 3 C) $\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}$

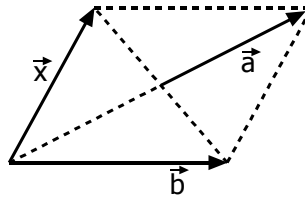
54. Si la resultante de los vectores es nula, determine la medida del ángulo θ .



- A) 45° B) 30° C) 90° D) 53° E) 60°

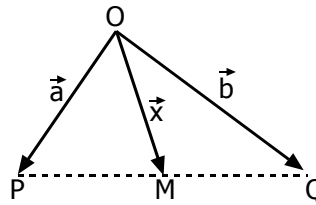
EXPRESIÓN DE UN VECTOR EN FUNCIÓN DE OTROS

55. La figura muestra un paralelogramo. Expresar el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



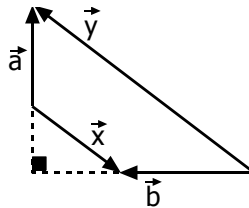
- A) $2\vec{a} - \vec{b}$ B) $\vec{a} + 2\vec{b}$ C) $3\vec{a} + 4\vec{b}$ D) $3\vec{a} + 2\vec{b}$ E) $2\vec{a} + 6\vec{b}$

56. La figura muestra un triángulo, donde M es el punto medio del segmento PQ. Expresar el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



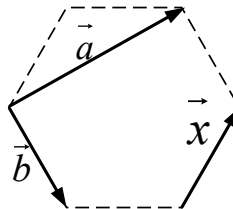
- A) $2\vec{a} - 3\vec{b}$ B) $0,5\vec{a} + 0,5\vec{b}$ C) $3\vec{a} + 4\vec{b}$ D) $3\vec{a} + 2\vec{b}$ E) $\vec{a} + \vec{b}$

57. Sabiendo que $\vec{a} = 4\vec{j}$ y $\vec{b} = -3\vec{i}$. Determine el módulo del vector resultante.



- A) 3 B) 4 C) 5 D) 10 E) 15

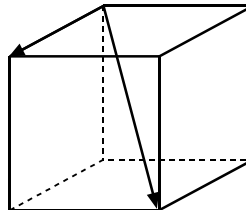
58. Determine una expresión para $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. El polígono es un hexágono regular.



- A) $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{4}$ B) $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ C) $\frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{4}$ D) $\frac{2\vec{a} + \vec{b}}{2}$ E) $\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$

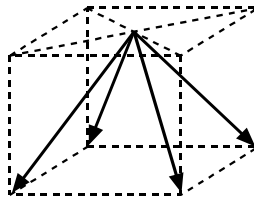
VECTORES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

59. Se muestra un cubo de arista 2 cm. Determine el módulo del vector resultante.



- A) 1 cm B) 2 cm C) 4 cm D) 6 cm E) N.A.

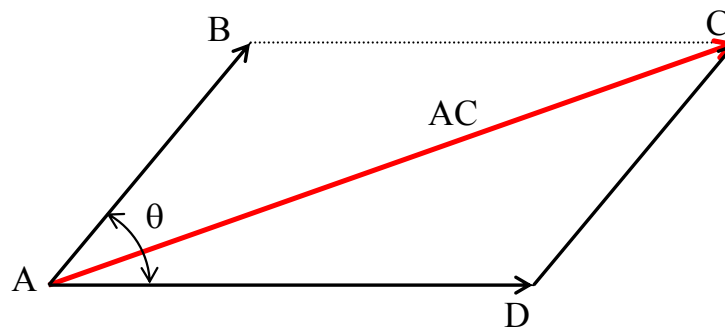
60. Se muestra un cubo de arista 2 cm. Determine el módulo del vector resultante.



- A) 8 cm B) 2 cm C) 4 cm D) 6 cm E) N.A.

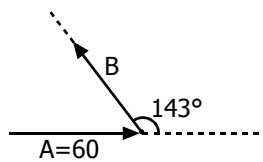
VECTORES UNITARIOS.

61. Sean los vectores: $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ $\vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$ $\vec{c} = m\hat{i} + n\hat{j} + p\hat{k}$
y $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, donde el módulo de $\vec{R}$ es igual a 10 unidades y además es paralelo al eje “z” del sistema de coordenadas, hallar (m + n).
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) N.A.
62. Sean los vectores: $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ $\vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j}$ $\vec{c} = m\hat{i} + n\hat{j}$ y $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$,
donde el módulo de $\vec{R}$ es igual a 10 unidades y además es paralelo al eje “y” del sistema de coordenadas, hallar (m + n).
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) N.A.
63. El vector resultante de los vectores **A** y **B** es $\vec{R} = 10\hat{i} + 11\hat{j}$. Si los vectores unitarios de **A** y **B** son $\hat{a} = 0,8\hat{i} + 0,6\hat{j}$ y $\hat{b} = 0,6\hat{i} + 0,8\hat{j}$ respectivamente. Determine el vector **A**.
A) $4\hat{i} + 3\hat{j}$ B) $8\hat{i} + 6\hat{j}$ C) $3\hat{i} + 4\hat{j}$ D) $6\hat{i} + 8\hat{j}$ E) $12\hat{i} + 16\hat{j}$
64. Se tiene el paralelogramo ABCD. Determine (x + y + z) si:
 $\overrightarrow{AB} = 3\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ $\overrightarrow{AC} = x\hat{i} + 2\hat{k}$ $\overrightarrow{AD} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$



- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Ninguna anterior

65. La figura muestra dos vectores un de módulo 60 unidades y el otro de módulo variable. Determine la resultante mínima que se puede conseguir.



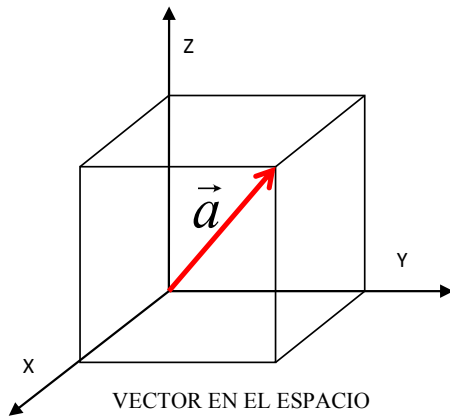
- A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 60

66. CONTINUARÁ.

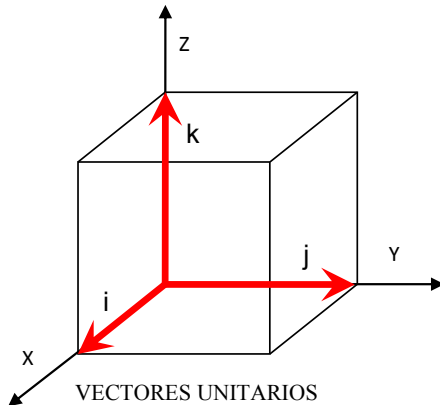
ANÁLISIS VECTORIAL EN TRES DIMENSIONES

(Segunda Parte)

1. VECTOR. Se representa mediante un segmento de recta orientado. En física sirve para representar a las magnitudes físicas vectoriales. Se representa por cualquier letra del alfabeto con una pequeña flecha en la parte superior. Todo vector tiene dos elementos fundamentales: el módulo y la dirección. El módulo representa el tamaño o valor de la cantidad vectorial. La dirección representa la orientación del vector respecto del sistema coordenado cartesiano u otro sistema coordenado.



2. VECTORES UNITARIOS CARTESIANOS EN EL ESPACIO. El vector unitario es aquel que tiene como módulo o tamaño la unidad de medida. Los vectores cartesianos son:



$\hat{i}$: tiene dirección del eje X positivo.

$-\hat{i}$: tiene dirección del eje X negativo.

$\hat{j}$: tiene dirección del eje Y positivo

$-\hat{j}$: tiene dirección del eje Y negativo

$\hat{k}$: tiene dirección del eje Z positivo.

$-\hat{k}$: tiene dirección del eje Z negativo.

El módulo de cada vector unitario es igual a la unidad de medida:

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

Los tres vectores unitarios son mutuamente perpendiculares:

$$\hat{i} \perp \hat{j} \perp \hat{k}$$

En el espacio tridimensional el vector $\vec{a}$ tiene tres componentes:

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

EJEMPLO 01: Se tiene un vector $\vec{a} = 3\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k}$. Determine el módulo del vector.

Resolución

Si graficamos el vector obtenemos un paralelepípedo, entonces el módulo del vector es igual al tamaño de la diagonal.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (12)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 144 + 16}$$

$$|\vec{a}| = 13$$

Respuesta: el módulo del vector es 13.

3. VECTOR UNITARIO DIRECCIONAL. Cada vector tiene su respectivo vector unitario. El vector unitario es paralelo a su respectivo vector de origen.

$$\hat{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Rightarrow \vec{a} = |\vec{a}| \hat{u}$$

En general se puede obtener un vector unitario en una dirección determinada, relacionado dos o más vectores.

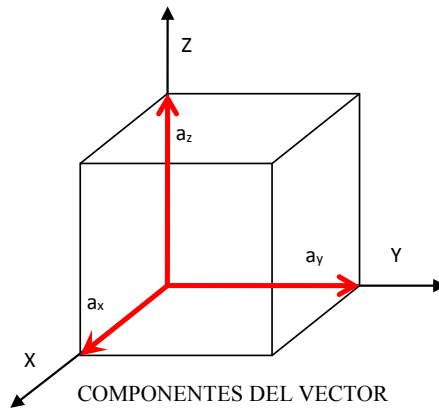
EJEMPLO 02: Determine el vector unitario del vector: $A = 3i + 4j + 12k$

Resolución

El vector unitario se define como: $\hat{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{3i + 4j + 12k}{13}$

El vector unitario es: $\hat{u} = \frac{3}{13}i + \frac{4}{13}j + \frac{12}{13}k$

4. COSENOS DIRECTORES. Son las componentes del vector unitario en el sistema coordenado



cartesiano.

En el sistema cartesiano tridimensional vector $\vec{a}$ tiene tres componentes rectangulares:

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

Designamos con α, β y θ los ángulos que el vector $\vec{a}$ hace con los ejes cartesianos X, Y y Z, respectivamente.

Tenemos tres componentes:

$$a_x = a \cos \alpha, \quad a_y = a \cos \beta, \quad a_z = a \cos \theta \quad \dots(1)$$

Cálculo del módulo del vector:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad \dots(2)$$

reemplazando (1) en (2) tenemos: $(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$

Entonces el vector unitario de $\vec{a}$ es: $\hat{u} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \theta)$

EJEMPLO 03: Calcular los cosenos directores del vector $\vec{A} = 12\vec{i} - 15\vec{j} - 16\vec{k}$.

RESOLUCIÓN

Cálculo del módulo del vector: $|\vec{A}| = \sqrt{(12)^2 + (-15)^2 + (-16)^2} = \sqrt{144 + 225 + 256} = 25$

$$\hat{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{12\vec{i} - 15\vec{j} - 16\vec{k}}{25} = 0,48\vec{i} - 0,6\vec{j} - 0,64\vec{k} \quad \text{y} \quad \hat{u} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \theta)$$

Comparando tenemos que: $\cos \alpha = 0,48$, $\cos \beta = -0,6$, $\cos \theta = -0,64$

5. PRODUCTO ESCALAR. Dado los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, su producto escalar o interno se representa por $\vec{A} \bullet \vec{B}$, y se define como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo θ que forman, esto es:

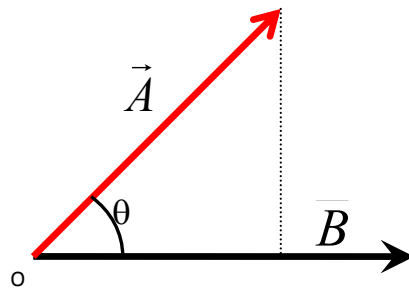
$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta = |\vec{B}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos \theta,$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi$

Debemos enfatizar que $\vec{A} \bullet \vec{B}$ es un número real, (positivo, negativo o nulo), y no un vector.

Dado los vectores: $\vec{A} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$ y $\vec{B} = b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + b_3 \cdot \vec{k}$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$



PRODUCTO ESCALAR

6. PROPIEDADES:

Se cumple la propiedad conmutativa: $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$

Propiedad Distributiva: $\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \vec{C}$

Vectores paralelos: $\vec{i} \bullet \vec{i} = \vec{j} \bullet \vec{j} = \vec{k} \bullet \vec{k} = 1$

Vectores ortogonales: $\vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{j} \bullet \vec{k} = \vec{i} \bullet \vec{k} = 0$

$$\vec{A} \bullet \vec{A} = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 \quad \text{y} \quad \vec{B} \bullet \vec{B} = (b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2$$

Cuadrado del módulo: $\vec{A} \bullet \vec{A} = |\vec{A}|^2$

Si $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$ y ninguno de los vectores es nulo, ambos son mutuamente perpendiculares.

EJEMPLO 04: Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre si un ángulo de 120° .

Sabiendo que $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 4$. Calcular: $\vec{a} \bullet \vec{b}$

RESOLUCIÓN

De la definición: $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta = 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = -6$

EJEMPLO 05: ¿Para qué valores de “m” los vectores $\vec{a} = m \cdot \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{b} = 1\vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ son perpendiculares entre sí?

RESOLUCIÓN

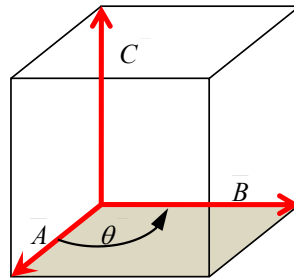
De la definición: $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$ y $\vec{b} = b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + b_3 \cdot \vec{k}$
 $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

De la condición: Si $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ y ninguno de los vectores es nulo, ambos son mutuamente perpendiculares.

Entonces: $(m) \cdot (1) + (-3) \cdot (2) + (2) \cdot (-m) = 0$
 Resolviendo: $m = -6$

7. PRODUCTO VECTORIAL. Dado los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, su producto vectorial o externo se representa por otro vector $\vec{C}$, que se denota como $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. Su módulo se define como el producto de sus módulos por el seno del ángulo θ que forman entre sí, esto es:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \text{Sen} \theta, \text{ donde } 0 \leq \theta \leq \pi$$



PRODUCTO VECTORIAL

Debemos enfatizar que $\vec{C}$ es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Regla de la mano Derecha: los dedos giran desde la dirección del vector A hacia la dirección del vector B y el dedo pulgar coincide con el vector C. En la figura el ángulo θ gira en el sentido desde A hacia B.

PROPIEDADES

I. Si $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$, entonces los vectores tienen la misma dirección o son paralelos.

II. Anti conmutativo: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

III. Propiedad Distributiva: $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

IV. Vectores paralelos: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$

V. Vectores ortogonales: $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

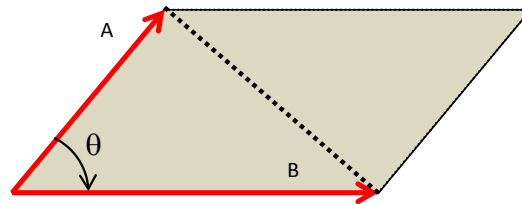
VI. Dado los vectores:

$\vec{A} = a_1 \cdot \mathbf{i} + a_2 \cdot \mathbf{j} + a_3 \cdot \mathbf{k}$ y $\vec{B} = b_1 \cdot \mathbf{i} + b_2 \cdot \mathbf{j} + b_3 \cdot \mathbf{k}$ entonces se cumple que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

El área del paralelogramo formado por los vectores concurrentes $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es:

$$\text{Área del paralelogramo} = |\vec{A} \times \vec{B}|$$



ÁREA DEL PARALELOGRAMO

El área de la región triangular formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{2}$$

EJEMPLO 06: Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre si un ángulo de 30° . Sabiendo que $|\vec{a}| = 6$ y $|\vec{b}| = 5$.

Calcular: $|\vec{a} \times \vec{b}|$

RESOLUCIÓN

De la definición: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{Sen} \theta = 6 \cdot 5 \cdot \text{Sen} 30^\circ = 15$

EJEMPLO 07: Dado los vectores $\vec{A} = 3\mathbf{i} - 1\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\vec{B} = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$ determinar las componentes vectoriales de: $\vec{A} \times \vec{B}$

RESOLUCIÓN

De la definición del producto vectorial entre dos vectores:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = i \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 5 \hat{i} + 1 \hat{j} + 7 \hat{k}$$

EJEMPLO 08: Se conocen los vértices de un triángulo: A (0; 0; 0), B (3; 0; 0) y C (0; 4; 0), calcular el área de la región definida por el triángulo de vértices A, B y C.

RESOLUCIÓN

Sean los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ donde $\vec{AB} = (3; 0; 0)$ y $\vec{AC} = (0; 4; 0)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \hat{i} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \hat{j} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \hat{k} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = 12 \hat{k}$$

El valor o módulo es: $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 12$

$$\text{Area del triángulo} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Respuesta: el área de la región triangular es 6 unidades cuadradas.

EJEMPLO 09: Se conocen los vértices de un triángulo: A (2; -1; 2), B (1; 2; -1) y C (3; 2; 1), determinar las componentes vectoriales de: $\vec{AB} \times \vec{BC}$

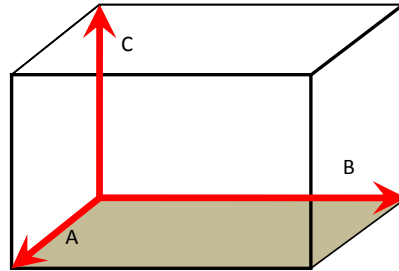
RESOLUCIÓN

Determinamos las componentes de cada vector: $\vec{AB} = (-1; 3; -3)$ y $\vec{BC} = (2; 0; 2)$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \hat{i} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \hat{j} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \hat{k} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = 6 \hat{i} - 4 \hat{j} - 6 \hat{k}$$

8. TRIPLE PRODUCTO ESCALAR. Por medio del productos escalar y vectorial de tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ se forma: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$



VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES:

I. El producto triple escalar es un número real: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \text{número real}$

II. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

III. El valor del “triple producto escalar” representa el volumen de un paralelepípedo de aristas $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

EJEMPLO 09: Se conocen los vértices A (4; 0; 0), B (0; 5; 0), C (0; 0; 3) y D (0; 0; 0) calcular el volumen del sólido de vértices A, B, C y D.

RESOLUCIÓN

Sean los vectores $\vec{DA} = (4; 0; 0)$, $\vec{DB} = (0; 5; 0)$, $\vec{DC} = (0; 0; 3)$

El valor del “triple producto escalar” representa el volumen de un paralelepípedo de aristas $\vec{DA}$, $\vec{DB}$ y $\vec{DC}$.

$$\begin{aligned} \vec{DA} \cdot (\vec{DB} \times \vec{DC}) &= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 4 \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 60 \end{aligned}$$

Respuesta: el volumen del solido es 60 unidades cúbicas.

EJEMPLO 10: Se dan los vectores $\vec{a} = 1\hat{i} - 1\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 1\hat{k}$ y $\vec{c} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$.

Determinar: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

RESOLUCIÓN

De la definición del producto vectorial entre dos vectores:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \hat{i} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \hat{j} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \hat{k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -7\hat{i} + 7\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\text{Cálculo de: } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (-7; 7; 0) \cdot (3; 2; 5) = -7$$

9. TRIPLE PRODUCTO. Por medio de productos vectoriales de tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ se pueden formar productos como:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}), (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} \text{ o } (\vec{C} \times \vec{B}) \times \vec{A},$$

en todos estos casos el resultado es otro vector.

PROPIEDADES:

I. No se puede asociar: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$

II. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

III. $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$

EJEMPLO 11: Sean los vectores $\vec{A} = (4; 0; 0)$, $\vec{B} = (0; 5; 0)$, $\vec{C} = (0; 1; 3)$, determine

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ y $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ ¿se obtiene el mismo resultado?

RESOLUCIÓN

Primer caso: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \hat{i} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \hat{j} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \hat{k} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 15\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\text{Cálculo de } \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (4; 0; 0) \times (15; 0; 0)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{0}$$

Segundo caso: $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$

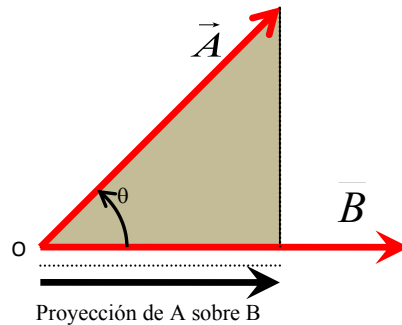
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \hat{i} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} - \hat{j} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \hat{k} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + 20 \hat{k}$$

Cálculo de $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (0; 0; 20) \times (0; 1; 3)$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = -20 \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k} = -20 \hat{i}$$

Es importante hacer notar que: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$

10. PROYECCIÓN DE UN VECTOR. La proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$, es otro vector paralelo al vector $\vec{B}$ que se denota del siguiente modo:



$$\text{Proyec}_{\vec{B}} \vec{A} = \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} \right) \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

Al módulo de la proyección del vector A sobre el vector se le denomina **Componente del vector A** sobre el vector B.

$$\text{Comp}_{\vec{B}} \vec{A} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|}$$

$$\text{Proyec}_{\vec{B}} \vec{A} = \left(\text{Comp}_{\vec{B}} \vec{A} \right) \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \quad \text{Proyec}_{\vec{B}} \vec{A} = \left(\text{Comp}_{\vec{B}} \vec{A} \right) \hat{u}_B$$

EJEMPLO 11: Determina las componentes rectangulares del vector $\vec{m}$, sabiendo que es perpendicular a los vectores $\vec{F}_1 = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 1\hat{k}$ y $\vec{F}_2 = 1\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ además satisface a la condición: $\vec{m} \cdot (1\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}) = 10$

RESOLUCIÓN

$$\text{Sea } \vec{m} = q(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) \quad \text{pero} \quad \vec{F}_1 \times \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = -7\hat{i} - 5\hat{j} - 1\hat{k} = (-7; -5; -1)$$

$$\text{la condición: } \vec{m} \cdot (1\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}) = 10$$

$$\text{la condición: } q(-7; -5; -1) \cdot (1; 2; -7) = 10$$

Resolviendo la ecuación tenemos que: $q = -1$

$$\text{Respuesta: } \vec{m} = (-1)(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) = 7\hat{i} + 5\hat{j} + 1\hat{k}$$

$$\text{Proyec}_{\hat{x}} \vec{m} = 7\hat{i},$$

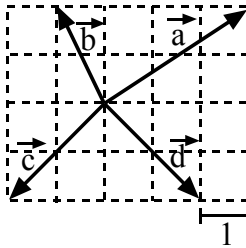
$$\text{Proyec}_{\hat{y}} \vec{m} = 5\hat{j},$$

$$\text{Proyec}_{\hat{z}} \vec{m} = 1\hat{k}$$

PROBLEMAS RESUELTOS DE VECTORES

1. En el sistema vectorial mostrado, determine el valor de la siguiente operación: $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d})$

¿Qué ángulo forman $(\vec{a} - \vec{b})$ y $(\vec{c} + \vec{d})$?



RESOLUCIÓN

Los vectores son: $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{b} = -1\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{c} = -2\hat{i} - 2\hat{j}$, $\vec{d} = 2\hat{i} - 2\hat{j}$

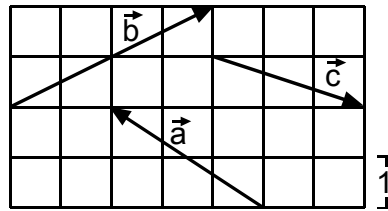
Cálculo de: $(\vec{a} - \vec{b}) = 4\hat{i} + 0\hat{j}$ y $(\vec{c} + \vec{d}) = 0\hat{i} - 4\hat{j}$

Piden: $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = (4; 0) \cdot (0; -4) = 0$

Respuesta: $(\vec{a} - \vec{b})$ y $(\vec{c} + \vec{d})$ forman un ángulo recto.

2. En el sistema vectorial mostrado, determine el valor de la siguiente operación: $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$

¿Qué ángulo forman $(\vec{a} - \vec{b})$ y $(\vec{a} + \vec{c})$?



RESOLUCIÓN

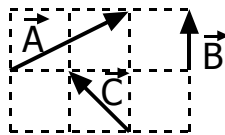
Los vectores son: $\vec{a} = -3\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{b} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{c} = 3\hat{i} - 1\hat{j}$

Cálculo de: $(\vec{a} - \vec{b}) = -7\hat{i} + 0\hat{j}$ y $(\vec{a} + \vec{c}) = 0\hat{i} + 1\hat{j}$

Piden: $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = (-7; 0) \cdot (0; 1) = 0$

Respuesta: $(\vec{a} - \vec{b})$ y $(\vec{a} + \vec{c})$ forman un ángulo recto.

3. Se muestra un conjunto de vectores. Sabiendo que $\vec{A} = m\vec{B} + n\vec{C}$, donde m y n son números reales. Determine (m + n)



A) 1

B) 2

C) 3

D) -1

E) 0

RESOLUCIÓN

Los vectores son: $\vec{A} = 2\hat{i} + 1\hat{j}$, $\vec{B} = 0\hat{i} + 1\hat{j}$, $\vec{C} = -1\hat{i} + 1\hat{j}$

Reemplazamos en la relación: $\vec{A} = m\vec{B} + n\vec{C}$, entonces $(2; 1) = m(0; 1) + n(-1; 1)$

$(2; 1) = (-n; m+n)$ comparando las coordenadas cartesianas tenemos que: $n = -2$ y $1 = m+n$ resolviendo $m = 3$

Respuesta: $(m+n) = 1$

4. Verificar que los cuatro puntos $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$ y $D(3; -5; 3)$ son los vértices de un trapecio.

RESOLUCIÓN

Para formar vectores a partir de dos puntos en el espacio: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

entonces: $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (-2; -1; -2)$, $\overrightarrow{CD} = (4; -6; 6)$, $\overrightarrow{DA} = (0; -4; 1)$

Comparando las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; -3)$ y $\overrightarrow{CD} = (4; -6; 6)$

$$K = -\frac{1}{2} \text{ entonces } \overrightarrow{AB} = K\overrightarrow{CD}$$

Entonces, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son paralelos, por consiguiente ABCD es un trapecio.

5. ¿Para qué valores de α y β los vectores $\vec{a} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + \beta\hat{k}$ y $\vec{b} = \alpha\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ son colineales?

RESOLUCIÓN

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sus componentes en los ejes cartesianos serán proporcionales: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = K$

Reemplazando tenemos que: $\frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2} = K$

Resolviendo se tiene que: $\alpha = 4$ y $\beta = -1$

6. Calcular el módulo del vector: $\vec{A} = 6i + 3j - 2k$

resolución

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad |\vec{A}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = 7$$

7. Calcular el módulo del vector: $\vec{W} = 4i - 3j + 12k$

8. Dado los puntos $A = (3; -1; 2)$ y $B = (-1; 2; 1)$ determinar los vectores: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ respectivamente.

resolución

$$\overrightarrow{AB} = B - A = -4\hat{i} + 3\hat{j} - 1\hat{k} = (-4; 3; -1)$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B = +4\hat{i} - 3\hat{j} + 1\hat{k} = (4; -3; 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \text{ son vectores opuestos}$$

9. Dado los puntos $P = (-3; 2; 1)$ y $Q = (1; -2; -1)$ determinar los vectores: $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ respectivamente.

10. Determinar el punto N, con que coincide el extremo del vector $\vec{A} = -4i + 3j + 2k$ sabiendo que el origen coincide con el punto M de coordenadas $(1; 2; -3)$.

RESOLUCIÓN

$$N = M + MN \Rightarrow N = M + \vec{A}$$

$$\vec{A} = -4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k} = (-4; 3; 2)$$

$$N = (1; 2; -3) + (-4; 3; 2) \Rightarrow N = (-3; 5; -1)$$

11. Determinar el punto P, con que coincide el extremo del vector $\vec{C} = 4i - 3j + 5k$ sabiendo que el origen coincide con el punto Q de coordenadas $(2; -1; 3)$.

12. Se dan los vectores $\vec{A} = 4i - 2j + 6k$ y $\vec{B} = -2i + 4j$. Determinar la proyección del vector $\frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$ sobre los ejes coordenados cartesianos.

RESOLUCIÓN

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k} = (4; -2; 6)$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 0\hat{k} = (-2; 4; 0)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k} = (2; 2; 6)$$

$$\frac{\vec{A} + \vec{B}}{2} = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}}{2} = \left(\frac{2}{2}; \frac{2}{2}; \frac{6}{2}\right)$$

$$\frac{\vec{A} + \vec{B}}{2} = 1\hat{i} + 1\hat{j} + 3\hat{k} = (1; 1; 3)$$

13. Dado el módulo de vector $|\vec{A}| = 2$ y los ángulos que forman con los ejes coordenados cartesianos x, y, z respectivamente $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ y $\theta = 120^\circ$. Determinar la proyección del vector $\vec{A}$ sobre los ejes coordenados.

RESOLUCIÓN

Cosenos directores: $\vec{A} = |\vec{A}| \cdot (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \theta)$

$$\vec{A} = 2 \cdot (\cos 45^\circ; \cos 60^\circ; \cos 120^\circ)$$

$$\vec{A} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \quad \vec{A} = (\sqrt{2}; 1; -1) \quad \vec{A} = \sqrt{2}\hat{i} + 1\hat{j} - 1\hat{k}$$

14. Dado el módulo de vector $|\vec{A}| = 10$ y los ángulos que forman con los ejes coordenados cartesianos x, y, z respectivamente $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$ y $\theta = 60^\circ$. Determinar la proyección del vector $\vec{A}$ sobre los ejes coordenados.

RESOLUCIÓN

Cosenos directores: $\vec{A} = |\vec{A}| \cdot (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \theta)$

$$\vec{A} = 10 \cdot (\cos 90^\circ; \cos 150^\circ; \cos 60^\circ)$$

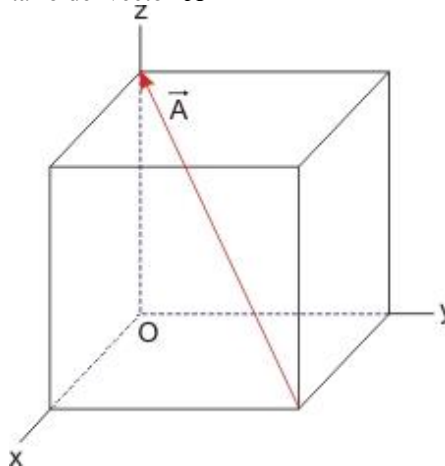
$$\vec{A} = 10 \cdot \left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad \vec{A} = (0; -5\sqrt{3}; 5) \quad \vec{A} = 0\hat{i} - 5\sqrt{3}\hat{j} + 5\hat{k}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN TRES DIMENSIONES

PROBLEMA 1.

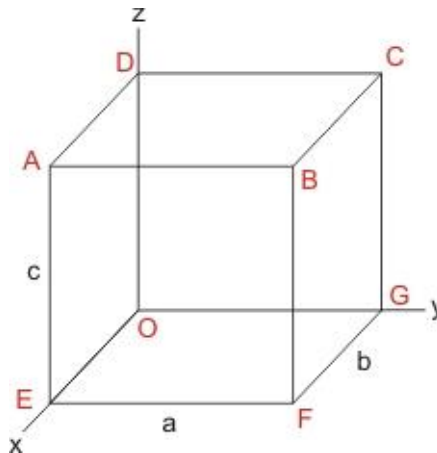
Se muestra un cubo de lado 5,0 *unidades* limitado por un sistema cartesiano tridimensional.

Determinar el vector unitario del vector $\vec{A}$



RESOLUCIÓN

1) Determinamos los puntos F y D, sabiendo que $a = b = c = 5,0$. Tenemos que $F(5;5;0)$ y $D(0;0;5)$



Definición del vector, $\vec{A} = \overrightarrow{FD} = D - F = (-5; -5; 5)$

$$\vec{A} = -5\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k} \Rightarrow |\vec{A}| = 5\sqrt{3}$$

Definición del vector unitario:

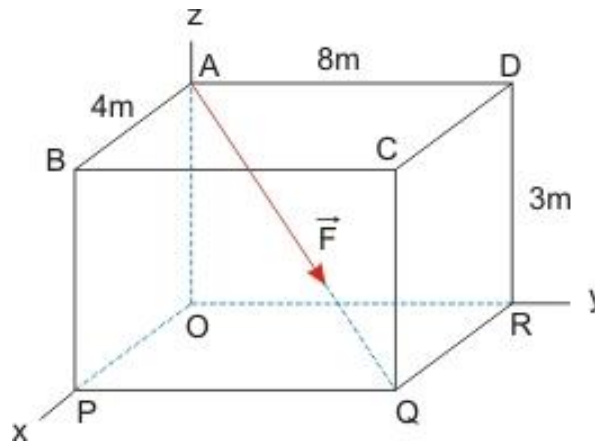
$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{-5\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}}{5\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{k}$$

$$\hat{u}_A = -\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{k}$$

PROBLEMA 2.

Se muestra un paralelepípedo rectangular limitado por un sistema cartesiano tridimensional. El módulo del vector $\vec{F}$ es 94,4 newtons. Determinar:

- [1] El vector unitario del vector $\vec{F}$
 [2] La expresión del vector $\vec{F}$ en función de los vectores unitarios cartesianos.

**RESOLUCIÓN**

- [1] Determinamos los puntos A y Q, A(0;0;3) y Q(4;8;0)

definimos el vector, $\overrightarrow{AQ} = Q - A = (4;8;-3) = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

$$\overrightarrow{AQ} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \Rightarrow |\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{89} = 9,44$$

Cálculo del vector unitario, colineal con los vectores, $\overrightarrow{AQ}$ y $\vec{F}$

$$\hat{u}_F = \frac{\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AQ}|} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = \frac{4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{\sqrt{89}}$$

- [2] Cualquier vector se puede expresar en función de su módulo y su respectivo vector unitario.

$$\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \hat{u}_F = (94,4) \cdot \left(\frac{4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{\sqrt{89}} \right)$$

$$\vec{F} = 94,4 \cdot \left(\frac{4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{9,44} \right) = 40\mathbf{i} + 80\mathbf{j} - 30\mathbf{k}$$

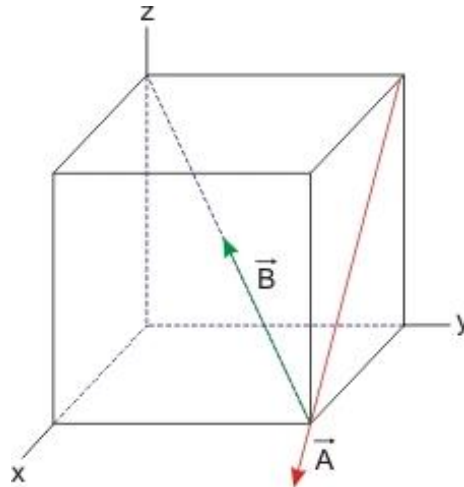
$$\vec{F} = 40\hat{i} + 80\hat{j} - 30\hat{k}$$

PROBLEMA 3.

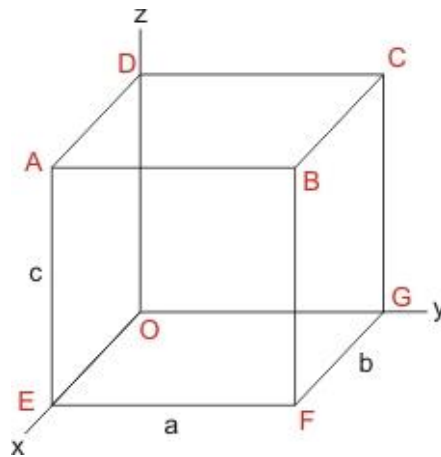
Se muestra un cubo de lado 2,0 unidades limitado por un sistema cartesiano tridimensional.

Sabiendo que el módulo de los vectores es $|\vec{A}| = 60 \text{ newtons}$ y $|\vec{B}| = 30 \text{ newtons}$. Determine:

- a) El vector unitario del vector $\vec{A}$
 b) El vector unitario del vector $\vec{B}$
 c) Determinar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

**RESOLUCIÓN**

1) Determinamos los puntos C y F, sabiendo que $a = b = c = 2,0$. Tenemos que $C(0;2;2)$ y $F(2;2;0)$



El vector unitario del vector $\vec{A}$ es el mismo del vector $\overrightarrow{CF}$, donde $\overrightarrow{CF} = F - C = (2;0;-2)$

$$\overrightarrow{CF} = 2i + 0j - 2k$$

$$\hat{u}_A = \frac{\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{CF}|} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$$\hat{u}_A = \frac{2i + 0j - 2k}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}i + 0j - \frac{\sqrt{2}}{2}k$$

Cálculo del vector: $\vec{A} = |\vec{A}| \hat{u}_A = (60) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + 0j - \frac{\sqrt{2}}{2}k \right)$

$$\vec{A} = 30\sqrt{2}i - 30\sqrt{2}k$$

2) Determinamos los puntos D y F, sabiendo que $a = b = c = 2,0$. Tenemos que $D(0;0;2)$ y $F(2;2;0)$

El vector unitario del vector $\vec{B}$ es el mismo del vector $\overrightarrow{FD}$, donde $\overrightarrow{FD} = D - F = (-2; -2; 2)$
 $\overrightarrow{FD} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$$\hat{u}_B = \frac{\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FD}|} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

$$\hat{u}_B = \frac{-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{k}$$

Cálculo del vector: $\vec{B} = |\vec{B}| \cdot \hat{u}_B = (30) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{k} \right)$

$$\vec{B} = -10\sqrt{3}\mathbf{i} - 10\sqrt{3}\mathbf{j} + 10\sqrt{3}\mathbf{k}$$

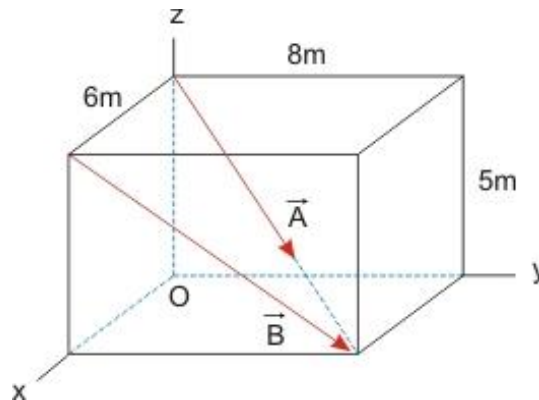
PROBLEMA 4.

Se muestra un paralelepípedo rectangular limitado por un sistema cartesiano tridimensional.

Sabiendo que $|\vec{A}| = 2,5\sqrt{5}$ metros

Determine:

- El vector unitario del vector $\vec{A}$
- El vector unitario del vector $\vec{B}$
- La proyección del vector $\vec{A}$ sobre los ejes cartesianos.



RESOLUCIÓN

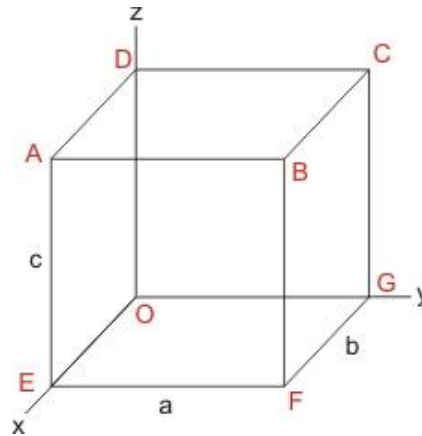
(1) Determinamos los puntos D y F, sabiendo que $a = 8\text{m}$; $b = 6\text{m}$; $c = 5\text{m}$. Tenemos que $D(0;0;5)$ y $F(6;8;0)$

El vector unitario del vector $\vec{A}$ es el mismo del vector $\overrightarrow{DF}$, donde $\overrightarrow{DF} = F - D = (6; 8; -5)$

$$\overrightarrow{DF} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Cálculo del módulo, $|\overrightarrow{DF}| = \sqrt{6^2 + 8^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{5} = 11,18$

$$\hat{u}_A = \frac{\overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{DF}|} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$



$$\hat{u}_A = \frac{6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}}{5\sqrt{5}}$$

Cálculo del vector: $\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \hat{u}_A = (2,5\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}}{5\sqrt{5}} \right)$

$$\vec{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2,5\mathbf{k}$$

(2) Determinamos los puntos A y F, sabiendo que $a = 8\text{ m}$; $b = 6\text{ m}$; $c = 5\text{ m}$. Tenemos que $A(6;0;5)$ y $F(6;8;0)$

El vector unitario del vector $\vec{B}$ es el mismo del vector $\overrightarrow{AF}$, donde $\overrightarrow{AF} = F - A = (0;8;-5)$

$\overrightarrow{AF} = 0\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y el módulo es, $|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{0^2 + 8^2 + (-5)^2} = \sqrt{89} = 9,4$

$$\hat{u}_B = \frac{\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AF}|} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

$$\hat{u}_B = \frac{0\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{89}} = 0,85\hat{\mathbf{j}} - 0,53\hat{\mathbf{k}}$$

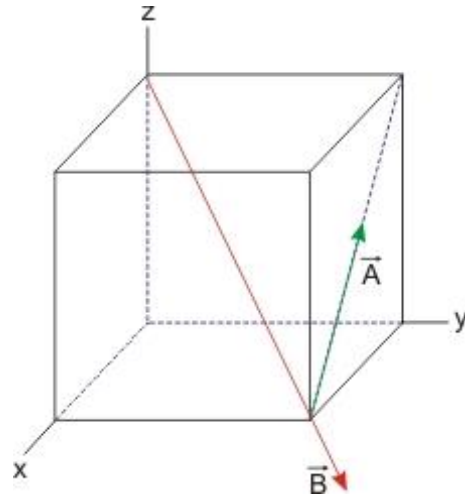
$$\hat{u}_B = 0,85\hat{\mathbf{j}} - 0,53\hat{\mathbf{k}}$$

PROBLEMA 5.

Se muestra un cubo de lado $2,0$ unidades limitado por un sistema cartesiano tridimensional.

Sabiendo que el módulo de los vectores es $|\vec{A}| = 30\text{ newtons}$ y $|\vec{B}| = 60\text{ newtons}$. Determine:

- El vector unitario del vector $\vec{A}$
- El vector unitario del vector $\vec{B}$
- Determinar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

**RESOLUCIÓN**

1) Determinamos los puntos C y F, sabiendo que $a = b = c = 2,0$

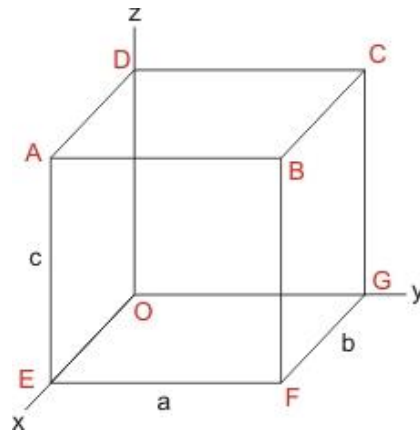
Tenemos que C(0;2;2) y F(2;2;0)

El vector unitario del vector $\vec{A}$ es el mismo del vector $\vec{FC}$, donde

$$\vec{FC} = C - F = (-2; 0; 2) = -2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\vec{FC} = -2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\hat{u}_A = \frac{\vec{FC}}{|\vec{FC}|} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$



$$\hat{u}_A = \frac{-2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$$

Cálculo del vector:

$$\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \hat{u}_A = (30) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k} \right)$$

$$\vec{A} = -15\sqrt{2}\mathbf{i} + 15\sqrt{2}\mathbf{k}$$

2) Determinamos los puntos D y F, sabiendo que $a = b = c = 2,0$. Tenemos que $D(0;0;2)$ y $F(2;2;0)$

El vector unitario del vector $\vec{B}$ es el mismo del vector $\overrightarrow{DF}$, donde $\overrightarrow{DF} = F - D = (2;2;-2)$
 $\overrightarrow{DF} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

$$\hat{u}_B = \frac{\overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{DF}|} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

$$\hat{u}_B = \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{k}$$

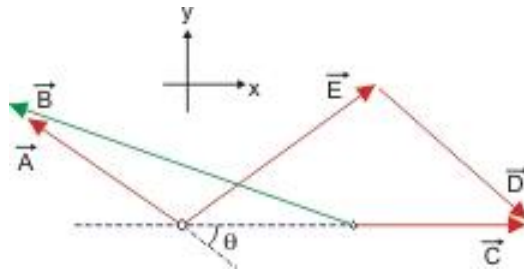
Cálculo del vector: $\vec{B} = |\vec{B}| \cdot \hat{u}_B = (60) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{k} \right)$
 $\vec{B} = 20\sqrt{3}\mathbf{i} + 20\sqrt{3}\mathbf{j} - 20\sqrt{3}\mathbf{k}$

PROBLEMA 6.

Se muestra un polígono vectorial cerrado, donde, $|\vec{A}| = 15$ y $\vec{C} = 12\hat{\mathbf{i}}$ además sabemos que,

$\text{Sen}\theta = \frac{3}{5}$ Determine:

- $\vec{B} + \vec{D} + \vec{E}$
- $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$
- $\vec{A} \cdot \vec{C}$



RESOLUCIÓN

[1] Construimos el polígono cerrado y ordenado: $\vec{A} + (-\vec{B}) + \vec{C} + (-\vec{D}) + (-\vec{E}) = \vec{0}$

Si el polígono formado por los vectores es cerrado y ordenado, entonces el vector resultante es nulo.

$$\vec{A} + \vec{C} = \vec{B} + \vec{D} + \vec{E}$$

Donde, $\vec{A} = -12\hat{\mathbf{i}} + 9\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{C} = 12\hat{\mathbf{i}}$

$$\vec{B} + \vec{D} + \vec{E} = \vec{A} + \vec{C} = (-12\mathbf{i} + 9\mathbf{j}) + (12\mathbf{i}) = 9\mathbf{j}$$

[2] Cálculo del vector resultante: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$

$$\vec{R} = (\vec{A} + \vec{C}) + (\vec{B} + \vec{D} + \vec{E}) = 2(\vec{A} + \vec{C})$$

$$\vec{R} = 2(\vec{A} + \vec{C}) = 2(9\hat{\mathbf{j}}) = 18\hat{\mathbf{j}}$$

[3] Cálculo del producto escalar: $\vec{A} \cdot \vec{C}$

$$\vec{A} = -12\hat{\mathbf{i}} + 9\hat{\mathbf{j}} \text{ y } \vec{C} = 12\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{A} \bullet \vec{C} = (-12) \cdot (12) + (9) \cdot (0) = -144$$

$$\vec{A} \bullet \vec{C} = -144$$

Además sabemos que: $|\vec{A}| = 15$ y $|\vec{C}| = 12$

Definición del producto escalar: $\vec{A} \bullet \vec{C} = |\vec{A}| \cdot |\vec{C}| \cdot \cos \phi$

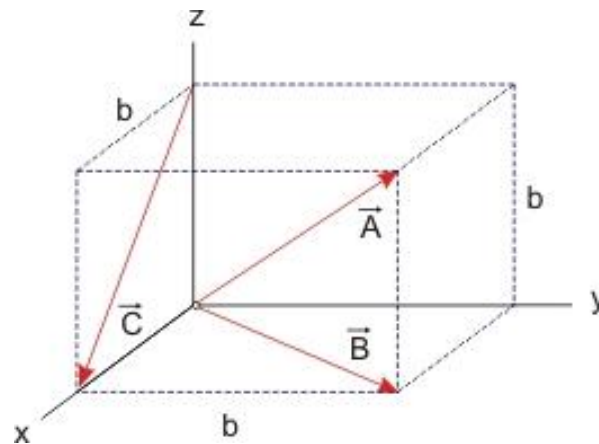
$$-144 = (15) \cdot (12) \cdot \cos \phi$$

$$\cos \phi = -\frac{12}{15} \Rightarrow \phi = 143^\circ$$

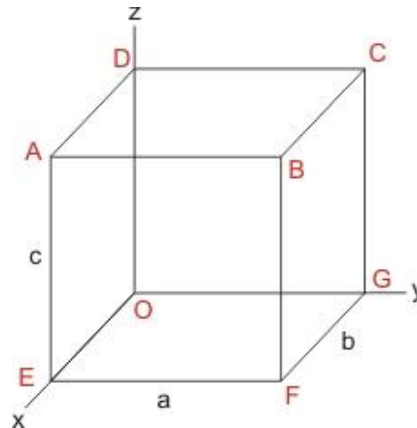
PROBLEMA 7.

Se muestra un cubo de lado $b = 2,0$ limitado por un sistema cartesiano tridimensional. Determinar:

- [1] La expresión de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en función de los vectores unitarios cartesianos.
- [2] El ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (aplicando producto escalar).
- [3] Un vector unitario perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$



RESOLUCIÓN



[1] Determinamos los puntos O y B, sabiendo que $a = b = c = 2,0$. Tenemos que $O(0;0;0)$ y $B(2;2;2)$

Expresión del vector $\vec{A} = \overrightarrow{OB} = B - O = (2;2;2) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

[2] Determinamos los puntos O y F, sabiendo que $a = b = c = 2,0$. Tenemos que $O(0;0;0)$ y $F(2;2;0)$

Expresión del vector $\vec{B} = \overrightarrow{OF} = F - O = (2;2;0) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$

[3] Determinamos los puntos D y E, sabiendo que $a = b = c = 2,0$. Tenemos que $D(0;0;2)$ y $E(2;0;0)$

Expresión del vector $\vec{C} = \overrightarrow{DE} = E - D = (2;0;-2) = 2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

[4] Determinamos: $\vec{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \Rightarrow |\vec{A}| = 4\sqrt{3}$ y $\vec{B} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \Rightarrow |\vec{B}| = 2\sqrt{2}$

Cálculo del producto escalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2).(2) + (2).(2) + (2).(0) = 8$$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = 8$$

Definición del producto escalar: $\vec{A} \cdot \vec{C} = |\vec{A}| \cdot |\vec{C}| \cdot \cos\phi$

$$8 = (2\sqrt{3}).(2\sqrt{2}).\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\cos\phi = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \phi = 35,3^\circ$$

[5] Cálculo del producto vectorial: $\vec{A} \times \vec{C} = \vec{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\vec{W} = \mathbf{i} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\vec{W} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \Rightarrow |\vec{W}| = 4\sqrt{2}$$

[6] Determinamos el vector unitario, perpendicular a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$\hat{u}_w = \frac{\vec{W}}{|\vec{W}|} = \frac{-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$$

$$\hat{u}_w = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{j}}$$

PROBLEMA 8.

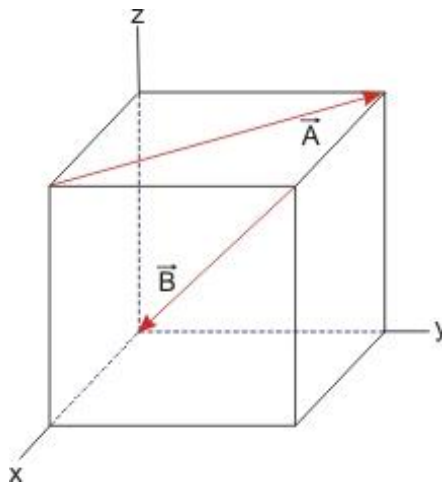
Se muestra un cubo de lado $b = 2,0$ limitado por un sistema cartesiano tridimensional. Determinar:

a) Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en función de sus componentes cartesianas.

b) El vector unitario de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

b) $\vec{A} \cdot \vec{B}$

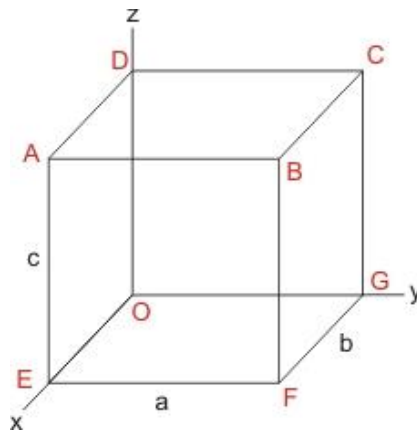
c) El ángulo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

**RESOLUCIÓN**

[1] Determinamos los puntos A y C, sabiendo que $a = b = c = 2,0$. Tenemos que $A(2;0;2)$ y $C(0;2;2)$

Definición del vector, $\vec{A} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-2; 2; 0)$

$$\vec{A} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{A}| = 2\sqrt{2}$$



Calculo del vector unitario, $\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{-2\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$

[2] Determinamos los puntos B y O, sabiendo que $a = b = c = 2,0$. Tenemos que $B(2;2;2)$ y $O(0;0;0)$

Definición del vector, $\vec{B} = \overrightarrow{BO} = O - B = (-2; -2; -2) = -2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$$\vec{B} = -2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k} \Rightarrow |\vec{B}| = 2\sqrt{3}$$

Calculo del vector unitario, $\hat{u}_B = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{j} - \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{k}$

[3] Determinamos el producto escalar de los vectores,

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = (-2)(-2) + (2)(-2) + (0)(-2) = 0$$

De la definición del producto escalar sabemos que,

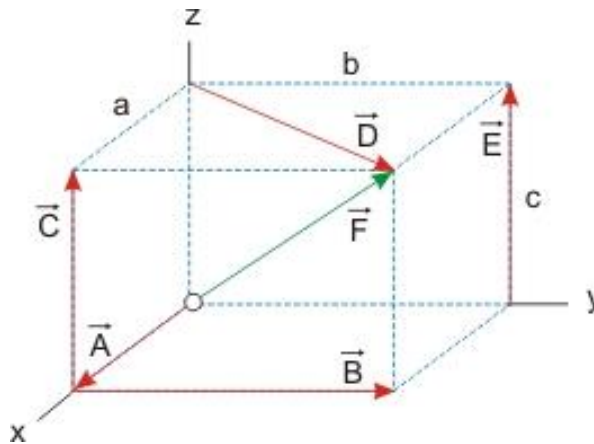
$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta$$

$$0 = (2\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{3}) \cdot \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

PROBLEMA 9.

Se muestra un paralelepípedo de lado $a = 3$, $b = 12$ y $c = 4$ limitado por un sistema cartesiano tridimensional. Determinar:



a) La expresión de cada vector en función de sus componentes cartesianas.

b) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} + \vec{F}$

c) $2\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C} - 2\vec{D} + 3\vec{E} - \vec{F}$

RESOLUCIÓN

[1] Determinamos los vectores sabiendo que $a = 3$, $b = 12$ y $c = 4$:

$$\vec{A} = (3; 0; 0) = 3\hat{i}$$

$$\vec{B} = (0; 12; 0) = 12\hat{j}$$

$$\vec{C} = (0; 0; 4) = 4\hat{k}$$

$$\vec{D} = (3; 12; 0) = 3\hat{i} + 12\hat{j}$$

$$\vec{E} = (0; 0; 4) = 4\hat{k}$$

$$\vec{F} = (3; 12; 4) = 3\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k}$$

[2] Determinamos el vector resultante,

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} + \vec{F} = (9; 36; 12)$$

$$\vec{R} = 9\hat{i} + 36\hat{j} + 12\hat{k}$$

[3] Cálculo del módulo del vector resultante,

$$|\vec{R}| = \sqrt{(9)^2 + (36)^2 + (12)^2} = 39$$

$$\hat{u}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{9\hat{i} + 36\hat{j} + 12\hat{k}}{39}$$

Cálculo del vector unitario,

$$\hat{u}_R = \left(\frac{3}{13}\right)\hat{i} + \left(\frac{12}{13}\right)\hat{j} + \left(\frac{4}{13}\right)\hat{k}$$

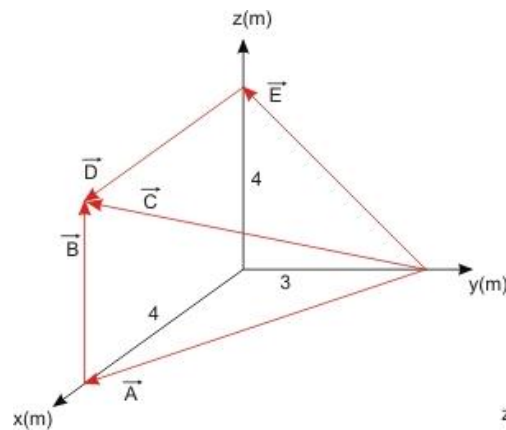
[4] Combinación lineal de vectores,

$$\begin{aligned} 2\vec{A} &= (2)(3; 0; 0) = (6; 0; 0) = 6\hat{i} \\ -\vec{B} &= (-1)(0; 12; 0) = (0; -12; 0) = -12\hat{j} \\ 3\vec{C} &= 3(0; 0; 4) = (0; 0; 12) = 12\hat{k} \\ -2\vec{D} &= (-2)(3; 12; 0) = (-6; -24; 0) = -6\hat{i} - 24\hat{j} \\ 3\vec{E} &= (3)(0; 0; 4) = (0; 0; 12) = 12\hat{k} \\ -\vec{F} &= (-1)(3; 12; 4) = (-3; -12; -4) = -3\hat{i} - 12\hat{j} - 4\hat{k} \\ \vec{S} &= 2\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C} - 2\vec{D} + 3\vec{E} - \vec{F} = (-3; -48; 20) \\ \vec{S} &= -3\hat{i} - 48\hat{j} + 20\hat{k} \end{aligned}$$

PROBLEMA 10.

Se muestra un sólido limitado por un sistema cartesiano tridimensional. Determinar:

- La expresión de cada vector en función de sus componentes cartesianas.
- $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$
- $(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \cdot (\vec{D} + \vec{E})$
- $(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \times (\vec{D} + \vec{E})$



RESOLUCIÓN

[1] Determinamos los vectores sabiendo:

$$\vec{A} = (4; -3; 0) = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{B} = (0; 0; 4) = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{C} = (4; -3; 4) = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{D} = (4; 0; 0) = 4\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{E} = (0; -3; 4) = 0\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

[2] Determinamos el vector resultante,

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} = (12; -9; 12)$$

$$\vec{R} = 12\hat{i} - 9\hat{j} + 12\hat{k}$$

[3] Determinamos el producto escalar,

$$(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) = (8; -6; 8) = 8\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k}$$

$$(\vec{D} + \vec{E}) = (4; -3; 4) = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \cdot (\vec{D} + \vec{E}) = (8)(4) + (-6)(-3) + (8)(4) = 82$$

$$(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \cdot (\vec{D} + \vec{E})$$

[3] Determinamos el producto vectorial,

$$(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) = 8\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k}$$

$$(\vec{D} + \vec{E}) = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{W} = (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \times (\vec{D} + \vec{E})$$

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 8 & -6 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{W} = \hat{i} \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} - \hat{j} \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \hat{k} \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{W} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{0}$$

Conclusión: $(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$ y $(\vec{D} + \vec{E})$ son paralelos.

PROBLEMA 11.

Se muestra un cubo de lado 2,0 limitado por un sistema cartesiano tridimensional. Determinar:

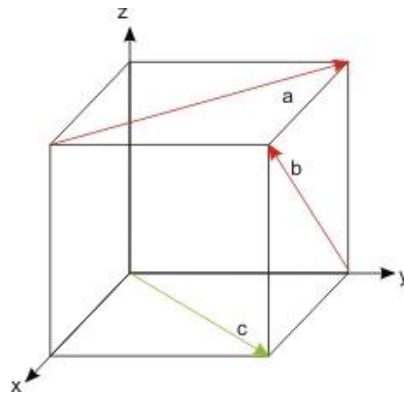
a) Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ en función de sus componentes cartesianas.

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

b) El ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

c) El ángulo que forman los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$

c) El ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$

**RESOLUCIÓN**

[1] Determinamos los vectores:

$$\vec{a} = (-2; 2; 0) = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{b} = (2; 0; 2) = 2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{c} = (2; 2; 0) = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$$

[2] Calculamos el producto escalar,

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = -4$$

$$\vec{b} \bullet \vec{c} = +4$$

$$\vec{a} \bullet \vec{c} = 0$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{c} + \vec{a} \bullet \vec{c} = (-4) + (4) + (0) = 0$$

[3] Calculamos el módulo de los vectores,

$$\vec{a} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{a}| = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{b} = 2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k} \Rightarrow |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{c} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{c}| = 2\sqrt{2}$$

[4] Cálculo del ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$;

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$-4 = (2\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{2}) \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = 120^\circ$$

[5] Cálculo del ángulo entre los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$;

$$\vec{b} \bullet \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \beta$$

$$4 = (2\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{2}) \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = +\frac{1}{2}$$

$$\beta = 60^\circ$$

[6] Cálculo del ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$; $\vec{a} \bullet \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \delta$

$$0 = (2\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{2}) \cdot \cos \delta \Rightarrow \cos \delta = 0$$

$$\delta = 90^\circ$$

PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE.

1. Calcular los cosenos directores del vector $\vec{A}=12i-15j-16k$.
2. Calcular los cosenos directores del vector $\vec{P}=3i-4j-12k$.
3. ¿Puede formar un vector con los ejes coordenados los ángulos siguientes $\alpha=45^\circ$, $\beta=135^\circ$ y $\theta=60^\circ$?
4. ¿Puede formar un vector con los ejes coordenados los ángulos siguientes $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$ y $\theta=120^\circ$?
5. ¿Puede formar un vector con los ejes coordenados los ángulos siguientes $\alpha=90^\circ$, $\beta=150^\circ$ y $\theta=60^\circ$?
6. Un vector forma con los ejes OX, y OZ los ángulos $\alpha=120^\circ$ y $\theta=45^\circ$ respectivamente, ¿qué ángulo forma el vector con el eje OY?
7. Un vector forma con los ejes OX, y OY los ángulos $\alpha=45^\circ$ y $\beta=135^\circ$ respectivamente, ¿qué ángulo forma el vector con el eje OZ?
8. Un vector forma con los ejes OY, y OZ los ángulos $\beta=150^\circ$ y $\theta=60^\circ$ respectivamente, ¿qué ángulo forma el vector con el eje OX?
9. Determinar las coordenadas del punto M, si su radio vector forma con los ejes coordenados ángulos iguales y su módulo es igual a 3 unidades. ¿Qué ángulo forma el radio vector con los ejes coordenados cartesianos?
10. Calcular el vector unitario del vector $\vec{T}=-4i+3j+12k$
11. Calcular el vector unitario del vector $\vec{a}=6i-2j-3k$
12. Calcular el vector unitario del vector $\vec{G}=-4i+3j$
13. Determinar el vector unitario perpendicular al vector $\vec{E}=6i+8j$
14. Se tiene un cuadrado de vértices A, B C y D; y área 25 unidades cuadradas. Si conocemos el vértice A (10; 20) y el lado AB es paralelo al vector $3i+4j$. Determinar la posición de los vértices B, C y D.
15. Se tiene un cuadrado de vértices A, B C y D; y área 100 unidades cuadradas. Si conocemos el vértice A (20; 10) y el lado AB es paralelo al vector $4i+3j$. Determinar la posición de los vértices B, C y D.
16. Si los módulos de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ son 18 y 14 unidades y sus cosenos directores con los ejes X, Y y Z son $\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}$ y $\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$ respectivamente. Determinar el resultado de: $\frac{\vec{P}+\vec{Q}}{2}$
17. Dado $|\vec{A}|=13$, $|\vec{B}|=19$ y $|\vec{A}+\vec{B}|=24$ Calcular: $|\vec{A}-\vec{B}|$
18. Sabiendo que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman entre sí un ángulo de 120° y además $|\vec{A}|=3$, $|\vec{B}|=5$ Determinar: $|\vec{A}-\vec{B}|$

19. ¿Para qué valores de “p” y “q” los vectores $\vec{A} = -2i + 3j + pk$ y $\vec{B} = qi - 6j + 2k$ son colineales?
20. ¿Para qué valores de “r” y “s” los vectores $\vec{A} = ri + 12j + 3k$ y $\vec{B} = 8i + sj + 2k$ son paralelos?
21. Los siguientes vectores $\vec{W} = 15i - 12j + 9k$ y $\vec{P} = 5i + 4j + 3k$ ¿son colineales?
22. Los siguientes vectores $\vec{E} = 15i - 12j + 9k$ y $\vec{T} = 5i - 4j + 3k$ ¿son paralelos?
23. Se conocen los vértices de un cuadrilátero: A (4; 9), B (9; 9), C (9; 6) y D (2; 6). ¿Es un trapecio?
24. Se conocen los vértices de un cuadrilátero: A (3; -1; 2), B (1; 2; -1), C (-1; 1; -3) y D (3; -5; 3). ¿Es un trapecio?
25. Dado los puntos A (-15; -10), B (5; -7,8), C (2; 2; -7) y D (5; -4; 2). ¿ $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son colineales?
26. El vector $\vec{T}$ de módulo 75 tiene dirección opuesta al vector $\vec{a} = 16i - 15j + 12k$. Determinar las proyecciones del vector $\vec{T}$ en el sistema coordenado cartesiano.
27. Dado los vectores en el plano $\vec{p} = 2i - 3j$ y $\vec{q} = 1i + 2j$. Expresar el vector $\vec{A} = 9i + 4j$ en función de los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$.
28. Dado los vectores en el plano $\vec{p} = 3i - 2j$ y $\vec{q} = -2i + 1j$. Expresar el vector $\vec{A} = 7i - 4j$ en función de los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$.
29. Dado los vectores en el plano $\vec{p} = 3i - 2j$ y $\vec{q} = 7i - 4j$. Expresar el vector $\vec{A} = -2i + 1j$ en función de los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$.
30. Dado los vectores en el plano $\vec{p} = 7i - 4j$ y $\vec{q} = -2i + 1j$. Expresar el vector $\vec{A} = 3i - 2j$ en función de los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$.
31. Se dan los vectores $\vec{a} = 3i - 1j$, $\vec{b} = 1i - 2j$ y $\vec{c} = -1i + 7j$. Determinar la descomposición del vector $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ en base de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
32. Se dan los vectores $\vec{a} = 6i - 2j$, $\vec{b} = 1i - 5j$ y $\vec{c} = -1i + 7j$. Determinar la descomposición del vector $\vec{p} = \frac{\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}{2}$ en base de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
33. Se conocen los vértices de un cuadrilátero: A (1; -2), B (2; 1), C (3; 2) y D (-2; 3). Determinar la descomposición del vector $\overline{AD}$ tomado como base los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
34. Se conocen los vértices de un cuadrilátero: A (1; -2), B (2; 1), C (3; 2) y D (-2; 3). Determinar la descomposición del vector $\overline{BD}$ tomado como base los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
35. Se conocen los vértices de un cuadrilátero: A (1; -2), B (2; 1), C (3; 2) y D (-2; 3). Determinar la descomposición del vector $\overline{CD}$ tomado como base los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
36. Se conocen los vértices de un cuadrilátero: A (1; -2), B (2; 1), C (3; 2) y D (-2; 3). Determinar la descomposición del vector $\overline{AD} + \overline{BC} + \overline{CD}$ tomado como base los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
37. Se dan los vectores $\vec{p} = 3i - 2j$, $\vec{q} = -1i + 1j$ y $\vec{r} = 2i + 1j$. Determinar la descomposición del vector $\vec{c} = 11i - 6j$ en base de los vectores $\vec{p}$, $\vec{q}$ y $\vec{r}$.

38. Se dan los vectores $\vec{p}=3\vec{i}-2\vec{j}+1\vec{k}$, $\vec{q}=-1\vec{i}+1\vec{j}-2\vec{k}$ y $\vec{r}=2\vec{i}+1\vec{j}-3\vec{k}$. Determinar la descomposición del vector $\vec{c}=11\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k}$ en base de los vectores $\vec{p}; \vec{q}$ y $\vec{r}$.
39. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre si un ángulo de 120° . Sabiendo que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=4$. Calcular:
 $\vec{a} \bullet \vec{b}$
40. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre si un ángulo de 120° . Sabiendo que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=4$. Calcular:
 $(\vec{a})^2$
41. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre si un ángulo de 120° . Sabiendo que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=4$. Calcular:
 $(\vec{a}+\vec{b})^2$
42. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre si un ángulo de 120° . Sabiendo que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=4$. Calcular:
 $(\vec{a}-\vec{b})^2$
43. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre si un ángulo de 120° . Sabiendo que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=4$. Calcular:
 $(3\vec{a}-2\vec{b}) \bullet (\vec{a}+2\vec{b})$
44. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre si un ángulo de 120° . Sabiendo que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=4$. Calcular:
 $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$
45. Conociendo los vectores $\vec{a}=1\vec{j}$, $\vec{b}=1\vec{i}+2\vec{j}$ y $\vec{c}=3\vec{i}$. Determinar: $E = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}}{|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|}$
46. Conociendo los vectores $\vec{a}=3\vec{i}+1\vec{j}$, $\vec{b}=1\vec{i}+2\vec{j}$ y $\vec{c}=-4\vec{i}+2\vec{j}$. Determinar:
 $K = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}}{|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|}$
47. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares entre si, además el vector $\vec{c}$ forma con cada uno de ellos un ángulo de 60° . Sabiendo que: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ y $|\vec{c}|=8$ calcular: $(3\vec{a}-2\vec{b}) \bullet (\vec{b}+3\vec{c})$
48. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares entre si, además el vector $\vec{c}$ forma con cada uno de ellos un ángulo de 60° . Sabiendo que: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ y $|\vec{c}|=8$ calcular: $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$
49. Cada par de vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ forman entre si un ángulo de 60° . Sabiendo que $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$ y $|\vec{c}|=6$ Determina el módulo de $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.
50. Para que valores de “m” los vectores $\vec{a}=m\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ y $\vec{b}=1\vec{i}+2\vec{j}-m\vec{k}$ son perpendiculares entre sí.
51. Para que valores de “p” los vectores $\vec{a}=12\vec{i}-p\vec{j}+2\vec{k}$ y $\vec{b}=1\vec{i}+2\vec{j}-p\vec{k}$ son perpendiculares entre sí.
52. Sabiendo que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=5$ determinar para que valor de “q” los vectores $(\vec{a}+q\vec{b})$ y $(\vec{a}-q\vec{b})$ son perpendiculares entre sí.

53. Sabiendo que $|\vec{a}|=4$ y $|\vec{b}|=2$ determinar para que valor de “q” los vectores $(\vec{a} + q\vec{b})$ y $(\vec{a} - q\vec{b})$ son perpendiculares entre sí.
54. ¿Qué condición deben satisfacer los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para que $(\vec{a} + \vec{b})$ y $(\vec{a} - \vec{b})$ sean perpendiculares entre sí?
55. Demostrar que el vector $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a} \bullet \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \bullet \vec{b})$ es perpendicular con el vector $\vec{a}$.
56. Se conocen los vértices de un cuadrilátero: A (1; -2; 2), B (1; 4; 0), C (-4; 1; 1) y D (-5; -5; 3). Demostrar que las diagonales AC y BD son perpendiculares entre sí.
57. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman 30° entre sí. Sabiendo que: $|\vec{a}|=\sqrt{3}$ y $|\vec{b}|=1$ Determine la medida del ángulo que forman entre si los vectores $(\vec{a} + \vec{b})$ y $(\vec{a} - \vec{b})$
58. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman 120° entre sí. Sabiendo que: $|\vec{a}|=5$ y $|\vec{b}|=5$ Determine la medida del ángulo que forman entre si los vectores $(\vec{a} + \vec{b})$ y $(\vec{a} - \vec{b})$
59. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman 60° entre sí. Sabiendo que: $|\vec{a}|=5$ y $|\vec{b}|=3$ Determina la medida del ángulo que forman entre si los vectores $(\vec{a} + \vec{b})$ y $(\vec{a} - \vec{b})$
60. Calcular la medida del ángulo obtuso formado por las medianas trazadas desde los vértices de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles.
61. Calcular la medida del ángulo obtuso formado por las medianas trazadas desde los vértices de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyos lados son directamente proporcionales a los números 3, 4 y 5.
62. Calcular la medida del ángulo obtuso formado por las medianas trazadas desde los vértices de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyos lados son directamente proporcionales a los números 5, 12 y 13.
63. Calcular la componente del vector $\vec{A}=5\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$ sobre el eje del vector $\vec{B}=2\vec{i}-1\vec{j}+2\vec{k}$
64. Calcularla proyección del vector $\vec{A}=10\vec{i}+5\vec{j}$ sobre el eje del vector $\vec{B}=3\vec{i}+4\vec{j}$
65. Se conocen los vértices de un triángulo: A (-1; -2; 4), B (-4; -2; 0) y C (3; -2; 1). Calcular la medida del ángulo interno del vértice C.
66. Se conocen los vértices de un triángulo: A (-1; -2; 4), B (-4; -2; 0) y C (3; -2; 1). Calcular la medida del ángulo interno del vértice B.
67. Se conocen los vértices de un triángulo: A (-1; -2; 4), B (-4; -2; 0) y C (3; -2; 1). Calcular la medida del ángulo interno del vértice A.
68. El vector de módulo $|\vec{a}|=50$ es colineal con el vector $\vec{b}=6\vec{i}-8\vec{j}-7,5\vec{k}$ y forma un ángulo agudo con el eje OZ. Determine las componentes cartesianas del vector $\vec{a}$.
69. Determine las componentes cartesianas del vector $\vec{a}$ sabiendo que es colineal con el vector $\vec{b}=2\vec{i}+1\vec{j}-1\vec{k}$ y satisface la condición $\vec{a} \bullet \vec{b}=3$.
70. Determinar el vector $\vec{m}$, si se sabe que es perpendicular con los vectores: $\vec{A}=2\vec{i}+3\vec{j}-1\vec{k}$ y $\vec{B}=1\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ además satisface a la condición: $\vec{m} \bullet (1\vec{i}-1\vec{j}+1\vec{k})=-6$

71. Se dan los vectores $\vec{A}=3i-1j+5k$ y $\vec{B}=1i+2j-3k$. Determinar el vector $\vec{X}$ que es perpendicular al eje OZ y satisface a las condiciones: $\vec{X} \bullet \vec{A}=9$ y $\vec{X} \bullet \vec{B}=-4$
72. Se dan los vectores $\vec{A}=2i-1j+3k$, $\vec{B}=1i-3j+2k$ y $\vec{C}=3i+2j-3k$. Determinar el vector $\vec{X}$ que satisface a las condiciones: $\vec{X} \bullet \vec{A}=-5$, $\vec{X} \bullet \vec{B}=-11$ y $\vec{X} \bullet \vec{C}=20$
73. Determinar las componentes del vector $\vec{S}=4i-3j+2k$ sobre el eje $\vec{L}$ que forma con los ejes cartesianos ángulos agudos iguales.
74. Dado los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ se cumple que: $\vec{A}=4i+3j+4k$ y $\vec{B}=2i+2j-1k$ además se sabe que $\vec{C}$ es paralelo a $\vec{B}$ y el vector $\vec{D}$ es ortogonal con $\vec{B}$. Si $\vec{A}=\vec{C}+\vec{D}$ determinar las expresiones vectoriales de $\vec{C}$ y $\vec{D}$.
75. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre si un ángulo de 30° . Sabiendo que $|\vec{a}|=6$ y $|\vec{b}|=5$. Calcular: $|\vec{a} \times \vec{b}|$
76. Sabiendo que $|\vec{a}|=10$ y $|\vec{b}|=2$, además $\vec{a} \bullet \vec{b}=12$. Calcular: $|\vec{a} \times \vec{b}|$
77. Sabiendo que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=26$, además $|\vec{a} \times \vec{b}|=72$. Calcular: $\vec{a} \bullet \vec{b}$
78. Sabiendo que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=4$, además $\vec{a} \bullet \vec{b}=0$. Calcular: $|\vec{a} + \vec{b}| \times |\vec{a} - \vec{b}|$
79. Sabiendo que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=4$, además $\vec{a} \bullet \vec{b}=0$. Calcular: $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$
80. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman 120° entre sí. Sabiendo que: $|\vec{a}|=1$ y $|\vec{b}|=2$. Calcular: $(\vec{a} \times \vec{b})^2$
81. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman 120° entre sí. Sabiendo que: $|\vec{a}|=1$ y $|\vec{b}|=2$. Calcular: $|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})|^2$
82. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman 120° entre sí. Sabiendo que: $|\vec{a}|=1$ y $|\vec{b}|=2$. Calcular: $|\vec{a} + 3\vec{b}| \times |3\vec{a} - 2\vec{b}|^2$
83. Dado los vectores $\vec{A}=3i-1j-2k$ y $\vec{B}=1i+2j-1k$ determinar las componentes vectoriales de: $\vec{a} \times \vec{b}$
84. Dado los vectores $\vec{A}=3i-1j-2k$ y $\vec{B}=1i+2j-1k$ determinar las componentes vectoriales de: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$
85. Dado los vectores $\vec{A}=3i-1j-2k$ y $\vec{B}=1i+2j-1k$ determinar las componentes vectoriales de: $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$
86. Dado los vectores $\vec{A}=3i-1j-2k$ y $\vec{B}=1i+2j-1k$ determinar las componentes vectoriales de: $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})$
87. Se conocen los vértices de un cuadrilátero: A (2; -1; 2), B (1; 2; -1) y C (3; 2; 1), determinar las componentes vectoriales de: $\vec{AB} \times \vec{BC}$

88. Se conocen los vértices de un triángulo: A (2; -1; 2), B (1; 2; -1) y C (3; 2; 1), determinar las componentes vectoriales de: $(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{CB}$
89. Se conocen los vértices de un triángulo: A (1; 2), B (7; 6) y C (9; 2), calcular la longitud de la altura bajada desde el vértice B al lado AC.
90. Se conocen los vértices de un triángulo: A (1; -1; 2), B (5; -6; 2) y C (1; 3; -1), calcular la longitud de la altura bajada desde el vértice B al lado AC.
91. La fuerza $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ está aplicada al punto A (2; -1; -2). Determinar el torque $\vec{\tau}$ de esta fuerza respecto del origen de coordenadas. Sabiendo que $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ donde $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ es el vector posición.
92. La fuerza $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ está aplicada al punto A (4; -2; 3). Determinar el torque $\vec{\tau}$ de esta fuerza respecto del punto B (3; 2; -1). Sabiendo que $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ donde $\vec{r} = \overrightarrow{BA}$ es el vector posición.
93. La fuerza $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ está aplicada al punto A (2; -1; 1). Determinar el torque $\vec{\tau}$ de esta fuerza respecto del origen de coordenadas. Sabiendo que $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ donde $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ es el vector posición.
94. Dado los vectores $\vec{A} = 2\vec{i} - 1\vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{B} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, determinar los cosenos directores de $\vec{A} \times \vec{B}$
95. Se dan las fuerzas $\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 1\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{F}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 1\vec{k}$ y $\vec{F}_3 = -4\vec{i} + 1\vec{j} + 3\vec{k}$, determinar los cosenos directores de $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)$
96. Se dan las fuerzas $\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 1\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{F}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 1\vec{k}$ y $\vec{F}_3 = -4\vec{i} + 1\vec{j} + 3\vec{k}$, determinar los cosenos directores de $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \times \vec{F}_3$
97. Se dan las fuerzas $\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 1\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{F}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 1\vec{k}$ y $\vec{F}_3 = -4\vec{i} + 1\vec{j} + 3\vec{k}$, determinar los cosenos directores de $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \times (\vec{F}_3 - \vec{F}_2)$
98. Las fuerzas $\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 1\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{F}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 1\vec{k}$ y $\vec{F}_3 = -4\vec{i} + 1\vec{j} + 3\vec{k}$ están aplicadas en el punto A (2; -1; -2). Determinar el torque que produce la fuerza resultante respecto del origen de coordenadas.
99. Las fuerzas $\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 1\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{F}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 1\vec{k}$ y $\vec{F}_3 = -4\vec{i} + 1\vec{j} + 3\vec{k}$ están aplicadas en el punto A (-1; 4; -2). Determinar el torque que produce la fuerza resultante respecto del punto B (2; 3; -1).
100. Se conocen los vértices de un triángulo: A (1; 2; 0), B (3; 0; -3) y C (5; 2; 6). Calcular el área de la región triangular.
101. El vector $\vec{F}_3$ de módulo 26 es perpendicular a los vectores $\vec{F}_1 = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ y $\vec{F}_2 = 1\vec{j} + 3\vec{k}$, además forma con el eje OY un ángulo obtuso. Determinar las componentes rectangulares de $\vec{F}_3$.
102. El vector $\vec{F}_3$ de módulo 39 es perpendicular a los vectores $\vec{F}_1 = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ y $\vec{F}_2 = 1\vec{j} + 3\vec{k}$, además forma con el eje OY un ángulo agudo. Determinar las componentes rectangulares de $\vec{F}_3$.

103. El vector $\vec{m}$ de módulo 51 es perpendicular al eje OZ y al vector $\vec{Q}=8\vec{i}-15\vec{j}+3\vec{k}$ y, además forma con el eje OX un ángulo agudo. Determinar las componentes rectangulares de $\vec{m}$.
104. Determina las componentes rectangulares del vector $\vec{m}$, sabiendo que es perpendicular a los vectores $\vec{F}_1=2\vec{i}-3\vec{j}+1\vec{k}$ y $\vec{F}_2=1\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ además satisface a la condición: $\vec{m} \bullet (1\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$
105. Se dan los vectores $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+1\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+1\vec{j}+2\vec{k}$ y $\vec{c}=1\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, calcular: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
106. Se dan los vectores $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+1\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+1\vec{j}+2\vec{k}$ y $\vec{c}=1\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, calcular: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$
107. Se dan los vectores $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+1\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+1\vec{j}+2\vec{k}$ y $\vec{c}=1\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, calcular: $\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c})$
108. Se dan los vectores $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{j}+1\vec{k}$, $\vec{b}=1\vec{i}+1\vec{k}$ y $\vec{c}=1\vec{i}+1\vec{j}-4\vec{k}$. Determinar el vector unitario $\hat{u}$ contenido en el plano formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ además que sea perpendicular al vector $\vec{c}$.
109. Se dan los vectores $\vec{a}=2\vec{i}$, $\vec{b}=4\vec{k}$ y $\vec{c}=3\vec{j}$. Determinar: $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$
110. Se dan los vectores $\vec{a}=3\vec{i}$, $\vec{b}=-4\vec{j}$ y $\vec{c}=2\vec{k}$. Determinar: $(\vec{c} \times \vec{b}) \bullet \vec{a}$
111. Se dan los vectores $\vec{a}=-5\vec{i}$, $\vec{b}=3\vec{j}$ y $\vec{c}=-4\vec{k}$. Determinar: $(\vec{a} \times \vec{c}) \bullet \vec{b}$
112. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre si un ángulo de 30° además $|\vec{a}|=6$ y $|\vec{b}|=3$ Sabiendo que el vector $\vec{c}$ de módulo 3 es perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$, calcular: $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$
113. Se dan los vectores $\vec{a}=1\vec{i}-1\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+2\vec{j}+1\vec{k}$ y $\vec{c}=3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$. Determinar: $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$
114. Se dan los vectores $\vec{a}=1\vec{i}-1\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+2\vec{j}+1\vec{k}$ y $\vec{c}=3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$. Determinar: $(\vec{c} \times \vec{b}) \bullet \vec{a}$
115. Se dan los vectores $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-1\vec{k}$, $\vec{b}=1\vec{i}-1\vec{j}+3\vec{k}$ y $\vec{c}=1\vec{i}+9\vec{j}-11\vec{k}$. ¿Son coplanares los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$?
116. Se dan los vectores $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+1\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+1\vec{j}+2\vec{k}$ y $\vec{c}=3\vec{i}-1\vec{j}-2\vec{k}$. ¿Son coplanares los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$?
117. Se dan los vectores $\vec{a}=2\vec{i}-1\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=1\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ y $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}$. ¿Son coplanares los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$?
118. Se conocen los cuatro puntos: A (1; -2; 2), B (1; 4; 0), C (-4; 1; 1) y D (-5; -5; 3). ¿Son coplanares estos cuatro puntos?

119. Se conocen los cuatro puntos: A (1; 2; -1), B (0; 1; 5), C (-1; 2; 1) y D (2; 1; 3). ¿Son coplanares estos cuatro puntos?
120. Determinar el volumen de un tetraedro cuyos vértices están en los puntos A (2; -1; 1), B (5; 5; 4), C (3; 2; -1) y D (4; 1; 3).
121. Se tiene un tetraedro cuyos vértices son A (2; 3; 1), B (4; 1; -2), C (6; 3; 7) y D (-5; -4; 8). Calcular la longitud de la altura bajada desde el vértice D al plano ABC.
122. El volumen de un tetraedro es 5 unidades cúbicas, tres de sus vértices están en los puntos:
123. A (2; 1; -1), B (3; 0; 1), C (2; -1; 3). Determinar las coordenadas cartesianas del cuarto vértice, D, si se sabe que está contenida en el eje OY.
124. Determinar el volumen en unidades cúbicas del paralelepípedo construido sobre los vectores concurrentes $\vec{a}=8\vec{i}$, $\vec{b}=2\vec{i}+8\vec{j}$ y $\vec{c}=1\vec{i}+1\vec{j}+8\vec{k}$
125. Determinar el volumen en unidades cúbicas del paralelepípedo construido sobre los vectores concurrentes $\vec{a}=4\vec{i}$, $\vec{b}=4\vec{j}$ y $\vec{c}=m\vec{j}+4\vec{k}$, donde “m” es un número real.
126. Se tiene un plano P cuya ecuación es: $\sqrt{2}x + 2y - \sqrt{3}z - 20 = 0$. Determine el vector unitario perpendicular al plano.
127. Se tiene un plano P cuya ecuación es: $3x + 4y + 12z - 20 = 0$. Determine el vector unitario perpendicular al plano.
128. Descomponer el vector $\vec{a}=10\vec{i}+10\vec{j}+4\vec{k}$ en dos componentes rectangulares en las direcciones perpendicular y paralela al plano P cuya ecuación es: $6x + 3y + 2z - 11 = 0$.
129. Una fuerza $\vec{F}=20\vec{i}+10\vec{j}-30\vec{k}$ (en newtons) actúa sobre un bloque que logra desplazarlo desde la posición A (2; 3; -4) hasta B (6; 4; -1). Determine la cantidad de trabajo que realiza la fuerza sobre el bloque cuando se desplaza desde A hasta B. El trabajo se calcula multiplicado escalarmente la fuerza por el desplazamiento: $W_{A \rightarrow B}^F = \vec{F} \bullet \vec{d}_{AB}$
130. Las coordenadas están expresadas en metros y el trabajo se mide en joules (J).
131. Una fuerza $\vec{F}=50\vec{i}-20\vec{j}+30\vec{k}$ (en newtons) actúa sobre un bloque que logra desplazarlo desde la posición A (2; 0; -4) hasta B (6; 4; 0). Determine la cantidad de trabajo que realiza la fuerza sobre el bloque cuando se desplaza desde A hasta B. Las coordenadas están expresadas en metros y el trabajo se mide en joules (J).

CINEMÁTICA

ELEMENTOS DEL MOVIMIENTO MECÁNICO



1. CONCEPTO

Es una parte de la Mecánica, que tiene por finalidad describir matemáticamente todos los tipos posibles de movimiento mecánico sin relacionarlo con las causas que determinan cada tipo concreto de movimiento.

La *cinemática* estudia las propiedades geométricas del movimiento, independientemente de las fuerzas aplicadas y de la masa de la partícula.

2. MOVIMIENTO

En general es una propiedad fundamental de la materia asociada a ella y que se manifiesta a través de cambios, transformaciones y desarrollo.

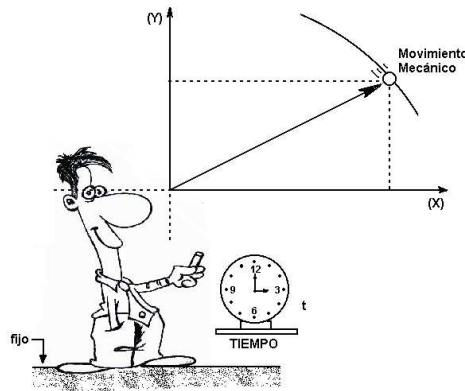
Los cuerpos macroscópicos poseen internamente múltiples movimientos moleculares tales como: Movimiento Térmico, Movimiento Biológico, Movimiento Electrónico, etc. Externamente los cuerpos macroscópicos con el tiempo experimentan *transformaciones*, cambios en cantidad y calidad, esta realidad objetiva es precisamente la materia en movimiento.

El movimiento mecánico es el *movimiento más simple de la materia*, es decir el cambio de posición.

El movimiento mecánico es el *cambio de posición* respecto de un sistema de referencia. De otro modo, el movimiento mecánico es relativo.

3. MOVIMIENTO MECÁNICO

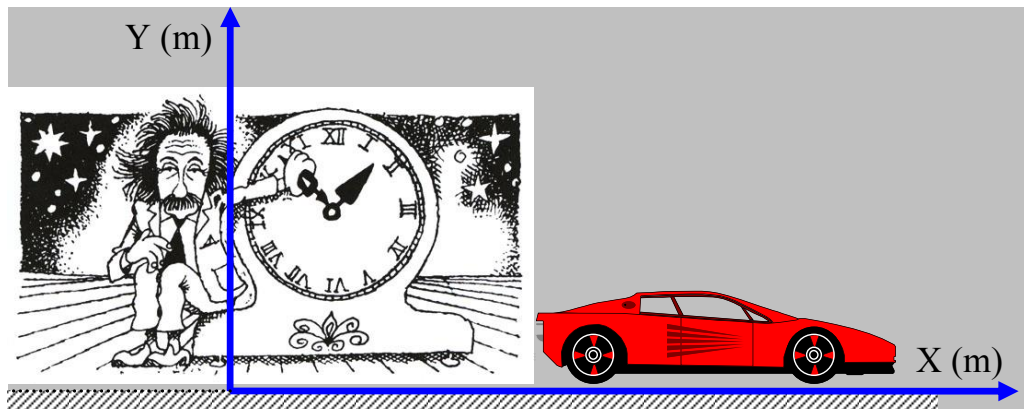
Es aquel *cambio de posición* que realiza o experimenta un cuerpo con respecto a un sistema de referencia. La visual del observador se considera en el origen de coordenadas y que la tierra no se mueve.



4. SISTEMA DE REFERENCIA

Es aquel lugar del espacio en donde en forma real o imaginario se sitúa un observador para analizar un fenómeno.

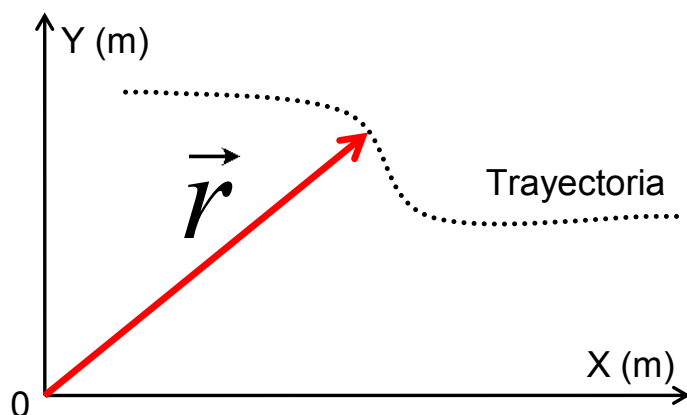
Sobre un cuerpo en el espacio se fija rigurosamente un sistema coordenado (cartesiano, cilíndrico, polar, etc.), lugar en el cual se instala un reloj (sistema horario) y se ubica un observador en forma real o imaginaria, quien estudiará el fenómeno (movimiento mecánico) en el espacio y en el tiempo. A este *conjunto* se le denomina sistema de referencia.



5. ELEMENTOS DEL MOVIMIENTO MECÁNICO

5.1) Móvil. - Es el cuerpo o partícula que realiza un movimiento mecánico o que puede moverse.

5.2) Trayectoria. - Es la línea recta o curva que describe el móvil al desplazarse. si la trayectoria es curvilínea, el recorrido es mayor que la distancia. En cambio, si la trayectoria es rectilínea, entonces el recorrido es igual a la distancia.

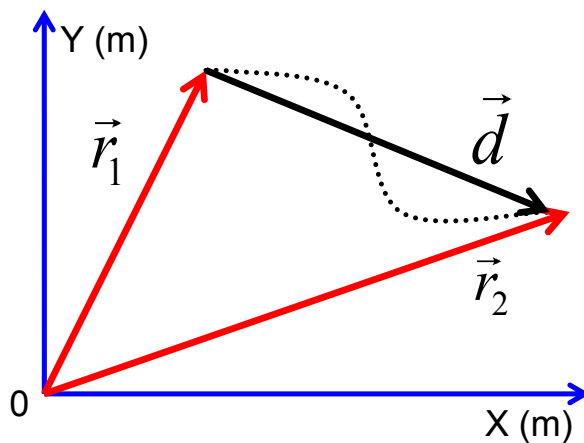


5.3) Vector Posición ($\vec{r}$). - Es aquel vector utilizado por el observador con el fin de ubicar en el espacio y en el tiempo, al móvil. Este vector se traza desde la visual del observador (origen de coordenadas) al móvil en un cierto instante.

5.4) Recorrido (e). - Es la medida de la longitud de la trayectoria entre dos puntos considerados. Es una magnitud física escalar.

5.5) Desplazamiento ($\vec{d}$). - Es una magnitud física vectorial, que sirve para expresar el cambio de posición efectivo entre dos puntos efectuado por un móvil.

De la figura:



Adición de vectores: $\vec{r}_1 + \vec{d} = \vec{r}_2$

Desplazamiento: $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

El desplazamiento se define como el cambio de posición: $\vec{d} = \Delta \vec{r}$

5.6) Distancia (d). - Es el módulo del vector desplazamiento. Es la medida del segmento que une el punto inicial con el punto final del movimiento.

5.7) Tiempo: Es una forma real de existencia de la materia, que se encuentra asociada a su movimiento y espacio ocupado.

El Tiempo en Mecánica sirve para medir la duración de un fenómeno físico y su ubicación respectiva.

El Tiempo para un evento físico definido previamente se puede clasificar en:

- **Intervalo de Tiempo (Δt).**- Denominado también tiempo transcurrido, es aquel que sirve para medir la duración de un evento físico.

- **Instante de Tiempo ($\Delta t \rightarrow 0$).**- Es aquel intervalo de tiempo pequeñísimo que nos permitirá ubicar la tendencia de ocurrencia de un fenómeno físico y su ubicación principalmente en el espacio.

6. VELOCIDAD MEDIA. La velocidad media se define como, la rapidez del cambio de posición,

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta X}{\Delta t} \Rightarrow \vec{V}_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

⟨1⟩ La velocidad media y el desplazamiento tienen siempre la misma dirección, son colineales y tienen el mismo sentido.

⟨2⟩ La velocidad media es independiente de la trayectoria.

⟨3⟩ La unidad de medida es, $\frac{m}{s}$, $\frac{km}{h}$, $\frac{cm}{s}$

7. RAPIDEZ MEDIA. La rapidez media se define como,

$$R_m = \frac{e}{\Delta t}$$

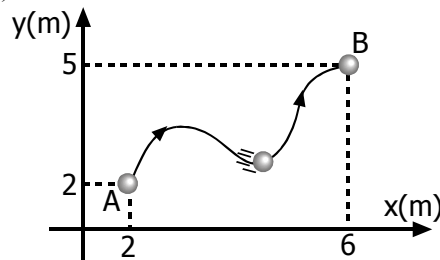
⟨1⟩ La rapidez media es una cantidad escalar.

⟨2⟩ La rapidez media depende del recorrido o longitud de la trayectoria.

⟨3⟩ La unidad de medida es, $\frac{m}{s}$, $\frac{km}{h}$, $\frac{cm}{s}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Una mosca sigue la trayectoria mostrada, desde A hasta B. Determine el desplazamiento y la distancia entre A y B (en m).

**Resolución**

PRIMER PASO. Desplazamiento:

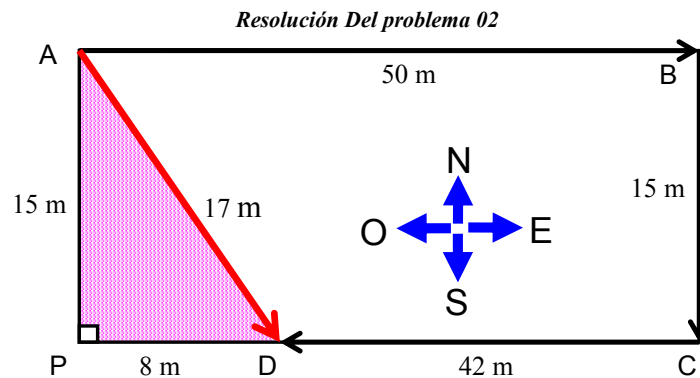
$$\vec{d}_{AB} = B - A = (6; 5) - (2; 2) = (4; 3) = 4\hat{i} + 3\hat{j}$$

SEGUNDO PASO. La distancia es el módulo del desplazamiento (vector):

$$\|\vec{d}_{AB}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ m}$$

Respuesta. el valor del desplazamiento 5 metros.

2. En el mapa de un tesoro, indica que se debe iniciar la búsqueda desde un gran árbol, dirigiéndose 50 m al **Este**, luego 15 m al **Sur** y finalmente 42 m al **Oeste**. Determine cuánto se debe recorrer y el módulo del desplazamiento entre el árbol y el tesoro.

RESOLUCIÓN

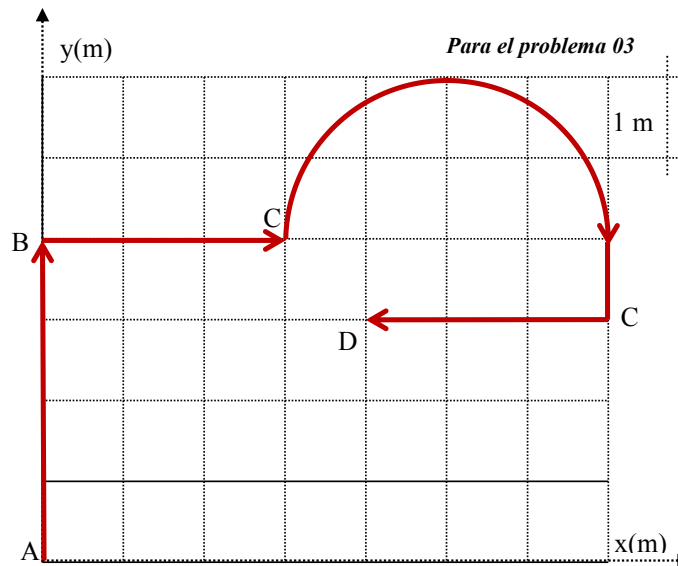
El árbol se encuentra en la posición A y el tesoro en D. Grafiquemos el desplazamiento:

Recorrido: $e = 50 \text{ m} + 15 \text{ m} + 42 \text{ m} = 107 \text{ m}$

Distancia: Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $\triangle APD$, $d = 17 \text{ m}$

Respuesta. El recorrido es mayor que la distancia.

3. Se muestra un plano cartesiano donde el tamaño de la cuadrícula es 1 m. Un móvil sigue la trayectoria mostrada, si en el instante $t = 0\text{ s}$ se encuentra en el punto A y en el instante $t = 10\text{ s}$ se encuentra en la posición D. Determine (en m/s) la velocidad media para todo el recorrido.



- A) $0,4\ i - 0,3\ j$ B) $0,4\ i + 0,3\ j$ C) $4\ i + 0,3\ j$
 D) $0,4\ i + 3\ j$ E) $4\ i + 3\ j$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. El desplazamiento se define como el cambio de posición en el espacio,

$$d = D - A = \overline{AD} = 4\ i + 3\ j$$

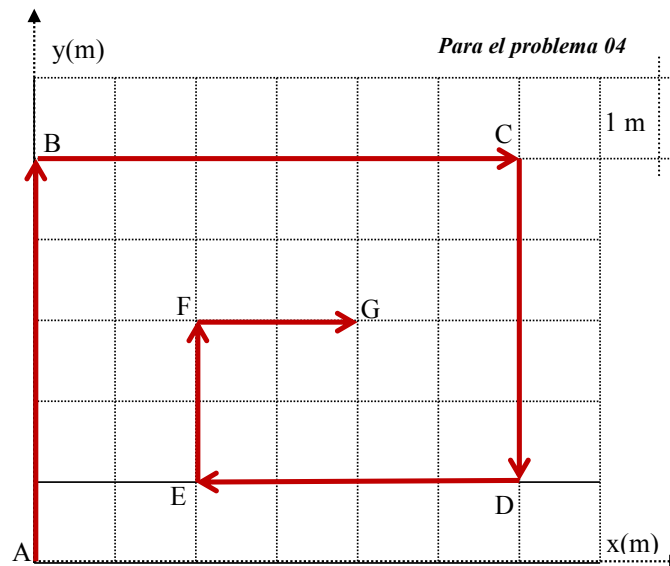
El desplazamiento es independiente de la trayectoria.

SEGUNDO PASO. La velocidad media se define como, la rapidez del cambio de

posición, $V_m = \frac{d}{\Delta t}$ $V_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{4\ i + 3\ j}{10} = 0,4\ i + 0,3\ j \left(\frac{m}{s} \right)$

Respuesta: La velocidad media es $0,4\ i + 0,3\ j \left(\frac{m}{s} \right)$

4. Se muestra un plano cartesiano donde el tamaño de la cuadrícula es 1 m. Un móvil sigue la trayectoria mostrada, si en el instante $t = 0\text{ s}$ se encuentra en el punto A y en el instante $t = 10\text{ s}$ se encuentra en la posición G. Determine (en m/s) la velocidad media para todo el recorrido.



- A) $0,4\ i - 0,3\ j$ B) $0,4\ i + 0,3\ j$ C) $4\ i + 0,3\ j$
 D) $0,4\ i + 3\ j$ E) $4\ i + 3\ j$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. El desplazamiento se define como el cambio de posición en el espacio,

$$d = G - A = AG = 4\ i + 3\ j\ (m)$$

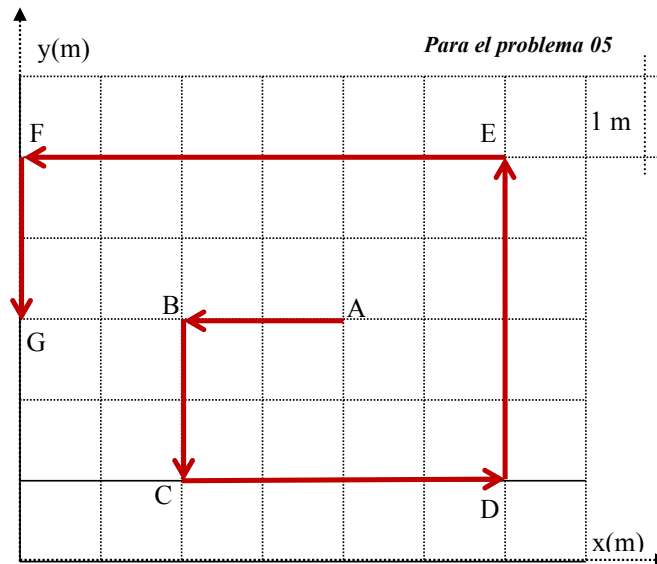
El desplazamiento es independiente de la trayectoria.

SEGUNDO PASO. La velocidad media se define como, la rapidez del cambio de posición,

$$V_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{4\ i + 3\ j}{10} = 0,4\ i + 0,3\ j\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

Respuesta: La velocidad media es $0,4\ i + 0,3\ j\ \left(\frac{m}{s}\right)$

5. Se muestra un plano cartesiano donde el tamaño de la cuadrícula es 1 m. Un móvil sigue la trayectoria mostrada, si en el instante $t = 0\text{ s}$ se encuentra en el punto A y en el instante $t = 10\text{ s}$ se encuentra en la posición G. Determine (en m/s) la rapidez media para todo el recorrido.



- A) 1 B) 1,5 **C) 2** D) 2,5 E) 3

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. El recorrido se define como el largo de la trayectoria (camino):

$$e = BA + BC + CD + DE + EF + FG = 2 + 2 + 4 + 4 + 6 + 2 = 20\text{ m}$$

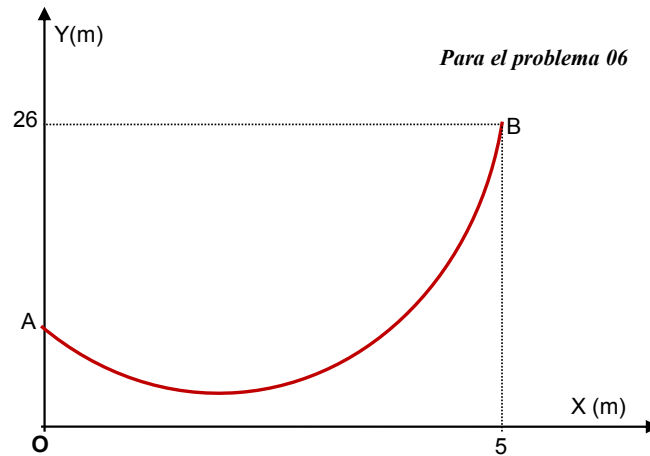
El recorrido depende de la forma de la trayectoria.

SEGUNDO PASO. La rapidez media se define como la relación entre el recorrido y el tiempo empleado.

$$R_m = \frac{e}{\Delta t} = \frac{20\text{ m}}{10\text{ s}} = 2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

Respuesta: La rapidez media es $2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$

6. Determinar la velocidad media de la partícula entre los puntos A y B, sabiendo que demora en recorrer la trayectoria curva un intervalo de 5 segundos. La trayectoria se define mediante la función: $y = x^2 + 1$



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Identificamos la posición de los puntos A y B.

$$\vec{R}_A = (0; 1) = 0.i + 1.j$$

$$\vec{R}_B = (5; 26) = 5.i + 26.j$$

SEGUNDO PASO. Cálculo del desplazamiento entre A y B.

$$\vec{d} = \vec{R}_B - \vec{R}_A = (5; 25) = 5.i + 25.j$$

TERCER PASO: Cálculo de la velocidad media.

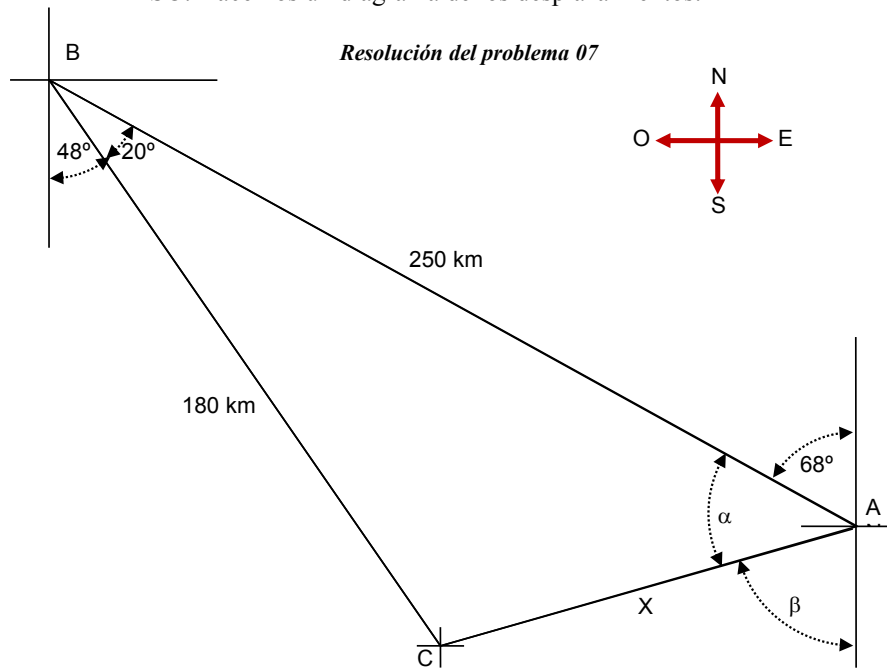
$$\vec{V}_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{5.i + 25.j}{5} = 1.i + 5.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

Respuesta: la velocidad media es $1.i + 5.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$

7. Aterrizaje de emergencia: Un avión sale del aeropuerto de Lima y vuela 250 km en una dirección norte 68° al oeste; luego cambia el rumbo y vuela 180 km en dirección sur 48° al este, para efectuar inmediatamente un aterrizaje de emergencia en un potrero.
- a. ¿En qué dirección y qué distancia deberá volar una cuadrilla de rescate enviada por el aeropuerto para llegar directamente al avión averiado?
- b. Si la cuadrilla puede viajar a 80 millas/hora, indicar en cuanto tiempo la cuadrilla llegará al lugar del rescate (expresar la respuesta en minutos aproximadamente)

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama de los desplazamientos:



SEGUNDO PASO. En el triángulo ABC aplicamos la ley de cosenos.

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (BC) \cdot \cos 20^\circ$$

$$(AC)^2 = (250)^2 + (180)^2 - 2 \cdot (250) \cdot (180) \cdot \cos 20^\circ$$

Resolviendo: $(AC) = 101,625 \text{ km}$

TERCER PASO. En el triángulo ABC aplicamos la ley de senos.

$$\frac{BC}{\text{Sen} \alpha} = \frac{AC}{\text{Sen} 20^\circ} \Rightarrow \frac{180}{\text{Sen} \alpha} = \frac{101,625}{\text{Sen} 20^\circ} \Rightarrow \text{Sen} \alpha = 0,61$$

Resolviendo: $\alpha = 37,6^\circ$ y $\beta = 74,4^\circ$

Respuesta: Deben ir al rescate en la dirección S $74,4^\circ$ O

CUARTO PASO. Una milla por hora equivale a 1,609 km por hora

$$V = \frac{80 \text{ millas}}{h} = 80 \left(\frac{1,6 \text{ km}}{h} \right) = 128 \frac{\text{km}}{h}$$

Cálculo del tiempo transcurrido.

$$t = \frac{d}{V} \Rightarrow t = \frac{101,625 \text{ km}}{128 \frac{\text{km}}{h}} = 0,79 \text{ h} = 47,64 \text{ min}$$

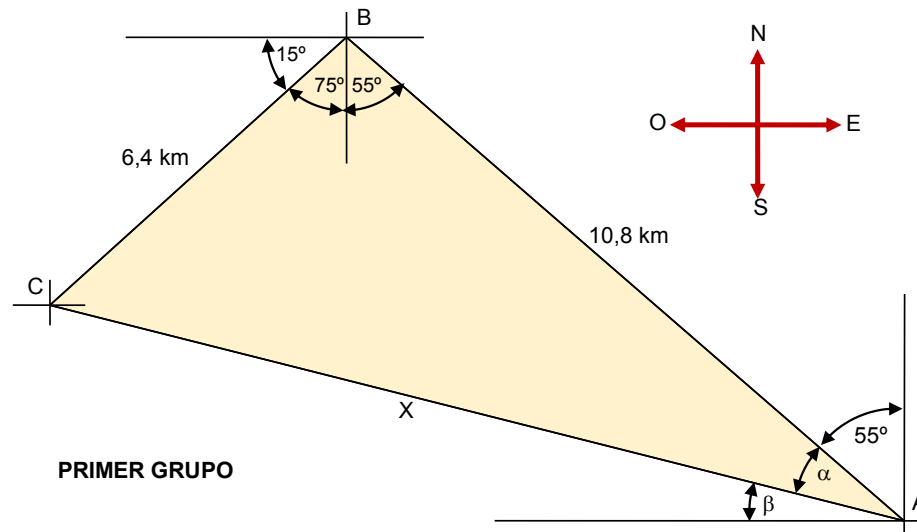
Respuesta: el rescate demora en llegar 47,64 minutos.

8. En un concurso de “La Búsqueda del Tesoro”, participan dos grupos que parten del mismo punto. Cada grupo realiza un recorrido diferente. El grupo (1) se dirige en dirección norte 55° al oeste (N 55° O) con una rapidez de 6 m/s y se movilizan durante 30 minutos luego de lo cual avanza 4 millas en dirección oeste 15° al sur (O 15° S). El grupo (2) recorre 4,8 millas en dirección sur 45° al este (S 45° E) y luego recorre en dirección sur 55° al este (S 55° E) con una rapidez de 8 m/s y se movilizan durante 40 minutos.

- ¿A qué distancia en kilómetros se encuentran los grupos (1) y (2) del punto de partida?
- ¿Qué distancia separa a los grupos (1) y (2)?
- Desde la ubicación del grupo (1) se envía un dron hacia el grupo (2) que puede desplazarse con una rapidez de 10 m/s, calcular el tiempo que le llevará llegar al grupo (2) considerando que este se desplaza con una trayectoria rectilínea.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Desplazamiento del primer grupo.



SEGUNDO PASO. Cálculo de la distancia entre los puntos A y B.

$$d_{AB} = V \cdot t \Rightarrow d_{AB} = \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot (30 \cdot 60 \text{ s}) = 10800 \text{ m} = 10,8 \text{ km}$$

TERCER PASO. Cálculo de la distancia entre los puntos B y C.

$$d_{BC} = (4 \text{ millas}) \cdot \left(\frac{1,6 \text{ km}}{1 \text{ milla}}\right) = 6,4 \text{ km}$$

CUARTO CASO. Cálculo de la medida del segmento AC. Aplicamos la ley de cosenos.

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (BC) \cdot \cos 130^\circ$$

$$(AC)^2 = (10,8)^2 + (6,4)^2 - 2 \cdot (10,8) \cdot (6,4) \cdot \cos 130^\circ$$

La medida del segmento AC es, $X = 15,70 \text{ km}$

QUINTO PASO. Cálculo de la medida del ángulo BAC. Aplicación de la ley de senos:

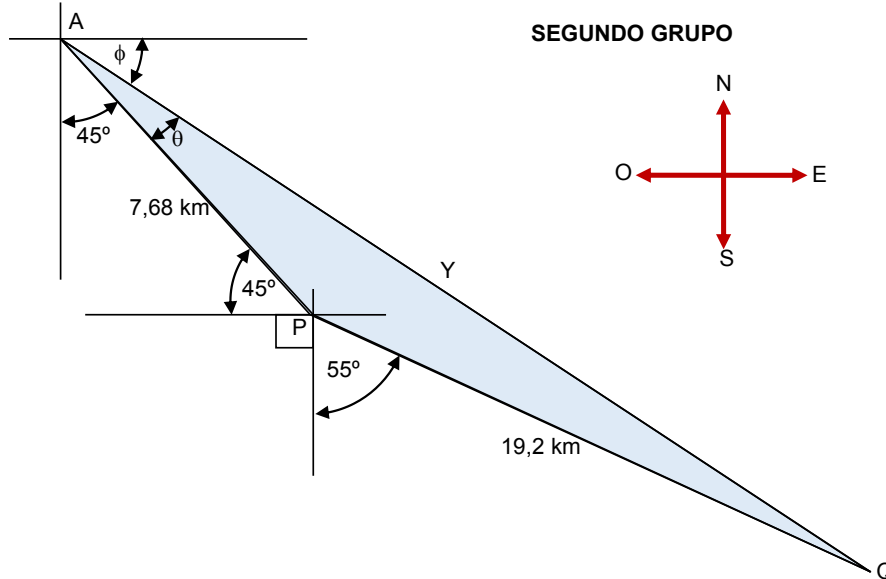
$$\frac{\text{Sen} \alpha}{6,4} = \frac{\text{Sen} 130^\circ}{15,7} \Rightarrow \text{Sen} \alpha = 0,31 \Rightarrow \alpha = 18,1^\circ$$

SEXTO PASO. Cálculo de la medida del ángulo β .

$$\beta + \alpha + 55^\circ = 90^\circ \Rightarrow \beta + 18,1^\circ + 55^\circ = 90^\circ \Rightarrow \beta = 16,9^\circ$$

Rumbo del primer grupo: O $16,9^\circ$ N

SEPTIMO PASO. Desplazamiento del segundo grupo.



OCTAVO PASO. Cálculo de la distancia entre los puntos A y P.

$$d_{AP} = (4,8 \text{ millas}) \cdot \left(\frac{1,6 \text{ km}}{1 \text{ milla}} \right) = 7,68 \text{ km}$$

NOVENO PASO. Cálculo de la distancia entre los puntos P y Q.

$$d_{PQ} = V \cdot t \Rightarrow d_{PQ} = \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \cdot (40 \cdot 60 \text{ s}) = 19200 \text{ m} = 19,2 \text{ km}$$

DECIMO CASO. Cálculo de la medida del segmento AQ. Aplicamos la ley de cosenos.

Cálculo de la medida del ángulo APQ:

$$\Omega = 360^\circ - 90^\circ - 55^\circ - 45^\circ = 170^\circ \Rightarrow \angle APQ = 170^\circ$$

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 - 2 \cdot (AP) \cdot (PQ) \cdot \cos 170^\circ$$

$$(AQ)^2 = (7,68)^2 + (19,2)^2 - 2 \cdot (7,68) \cdot (19,2) \cdot \cos 170^\circ$$

La medida del segmento AQ es, $Y = 26,80 \text{ km}$

DECIMO PRIMERO PASO. Cálculo de la medida del ángulo PAQ. Aplicación de la ley de senos:

$$\frac{\text{Sen} \theta}{19,2} = \frac{\text{Sen} 170^\circ}{26,8} \Rightarrow \text{Sen} \theta = 0,12 \Rightarrow \alpha = 6,89^\circ$$

DECIMO SEGUNDO PASO. Cálculo de la medida del ángulo ϕ .

$$\phi + \theta + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow \phi + 6,89^\circ + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow \phi = 38,11^\circ$$

Rumbo del segundo grupo: E $38,11^\circ$ S

DECIMO TERCER PASO. ¿Qué distancia separa a los grupos (1) y (2)?

Cálculo de la medida del ángulo CAQ:

$$\angle CAQ = \beta + 90^\circ + (90^\circ - \phi) = 180^\circ + \beta - \phi$$

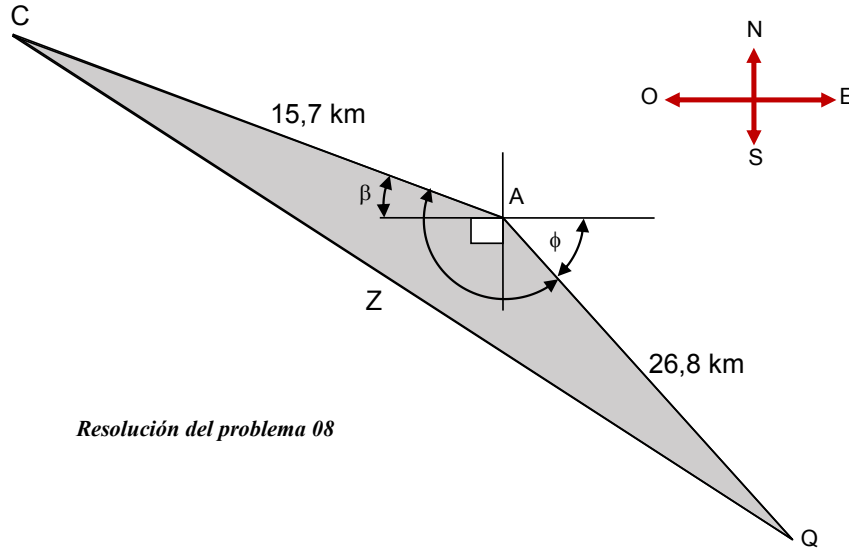
$$\angle CAQ = 180^\circ + 16,9^\circ - 38,11^\circ = 158,79^\circ$$

Calculo de segmento CQ aplicando la ley de cosenos:

$$(CQ)^2 = (AC)^2 + (AQ)^2 - 2 \cdot (AC) \cdot (AQ) \cdot \cos 158,79^\circ$$

$$(CQ)^2 = (15,7)^2 + (26,8)^2 - 2 \cdot (15,7) \cdot (26,8) \cdot \cos 158,79^\circ$$

La medida del segmento CQ es: $Z = 41,82 \text{ km}$



Resolución del problema 08

DECIMO CUARTO PASO. Desde la ubicación del grupo (1) se envía un dron hacia el grupo (2) que puede desplazarse con una rapidez de 10 m/s , calcular el tiempo que le llevará llegar al grupo (2) considerando que este se desplaza con una trayectoria rectilínea.

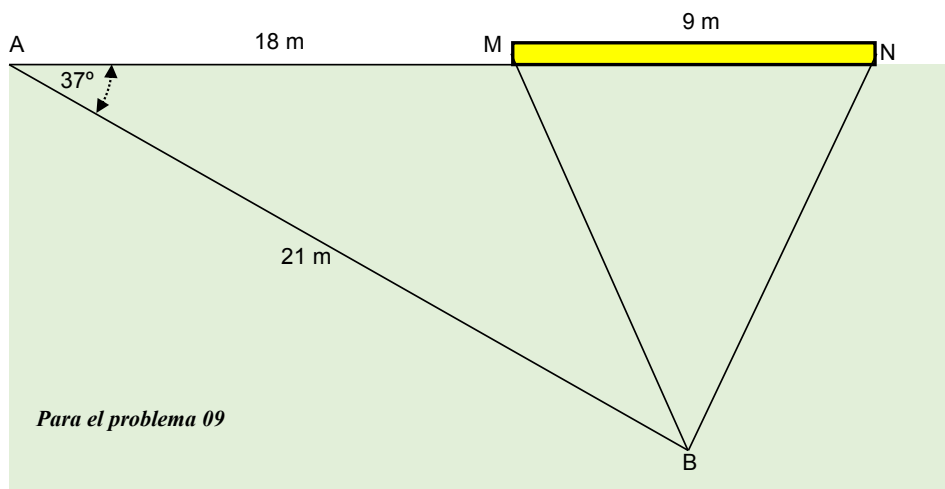
Cálculo del tiempo empleado:

$$t = \frac{d_{CQ}}{V} \Rightarrow t = \frac{41,82 \text{ km}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{41,82 \cdot 1000 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 4182 \text{ s}$$

$$t = (4182 \text{ s}) \cdot \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) = 1,16 \text{ h}$$

Respuesta: el dron demora en llegar 1,16 horas.

9. Se muestra la jugada estratégica de Perú frente a su similar de Argentina. En esta jugada la pelota se mueve al ras del piso. Se sabe que: $AB = 21$ m. Los puntos M y N indican la ubicación de los parantes del arco y el punto A la ubicación de la esquina de la cancha de fútbol. La jugada comienza con la pelota en A; y esta pelota sigue las trayectorias AB, BN. En este problema considerar la pelota como puntual (un elemento sin dimensiones).
- El jugador ubicado en B es capaz de realizar un disparo con el balón con una rapidez de 80 km/h. Determinar el tiempo que le llevará al balón en recorrer la distancia BN.
 - Realizar igual operación esta vez asumiendo que dispara hacia M.



RESOLUCION

PRIMER PASO. En el triángulo ABN aplicamos la ley de cosenos.

$$(BN)^2 = (AB)^2 + (AN)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (AN) \cdot \cos 37^\circ$$

$$(BN)^2 = (AB)^2 + (AN)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (AN) \cdot \cos 37^\circ$$

Resolviendo: $BN = 16,26$ km

SEGUNDO PASO. En el triángulo ABM aplicamos la ley de cosenos.

$$(BM)^2 = (AB)^2 + (AM)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (AM) \cdot \cos 37^\circ$$

$$(BM)^2 = (21)^2 + (18)^2 - 2 \cdot (21) \cdot (18) \cdot \cos 37^\circ$$

Resolviendo: $BM = 12,70$ km

TERCER PASO. Cálculo del tiempo que demora en el trayecto BN

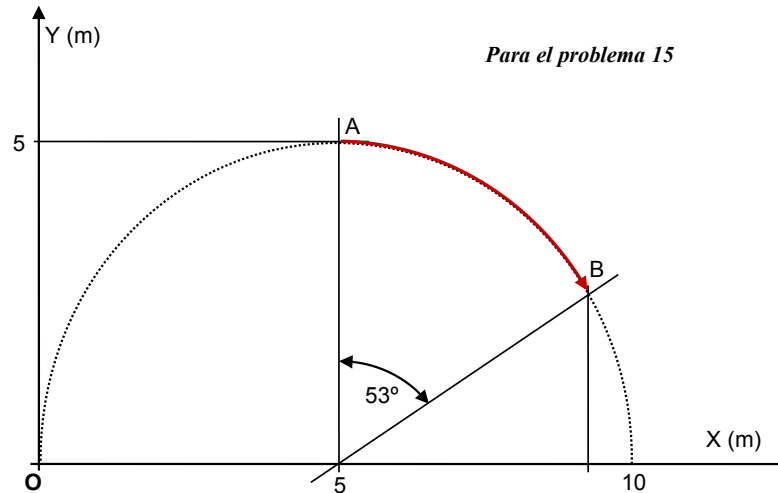
$$V = \frac{80 \text{ km}}{h} = 80 \left(\frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \right) = 22,22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t_{BM} = \frac{d_{BM}}{V} = \frac{12,70 \text{ m}}{22,22 \text{ m.s}^{-1}} = 0,57 \text{ s}$$

$$t_{BN} = \frac{d_{BN}}{V} = \frac{16,26 \text{ m}}{22,22 \text{ m.s}^{-1}} = 0,73 \text{ s}$$

Respuesta: los tiempos empleados son 0,73 s y 0,57 s.

10. Determinar la velocidad media de la partícula entre A y B, sabiendo que demora en recorrer el arco AB un intervalo de 2 segundos.



RESOLUCION

PRIMER PASO. Identificamos la posición de los puntos A y B.

$$\vec{R}_A = (5; 5) = 5i + 5j$$

$$\vec{R}_B = (9; 3) = 9i + 3j$$

SEGUNDO PASO. Cálculo del desplazamiento entre A y B.

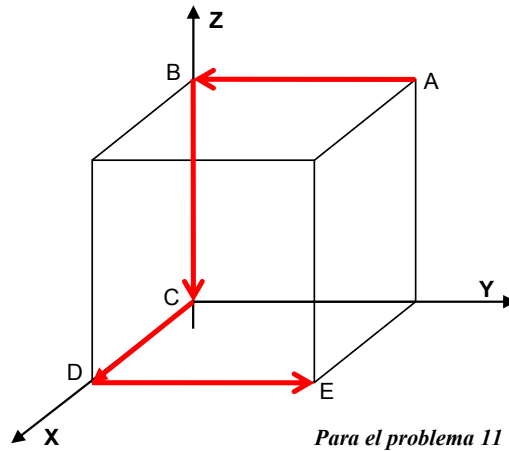
$$\vec{d} = \vec{R}_B - \vec{R}_A = (4; -2) = 4i - 2j$$

TERCER PASO: Cálculo de la velocidad media.

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{4i - 2j}{2} = 2i - 1j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

Respuesta: la velocidad media es $2i - 1j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$

11. Se muestra un cubo con 10 m de arista, donde una partícula sigue la trayectoria $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ empleando 10 segundos. Determine su velocidad media y su rapidez media (en m/s)



RESOLUCIÓN

PRIMERA FORMA: El desplazamiento es,

en el eje x : $CD = +10 i$,

en el eje y : $AB + DE = -10 j + 10 j = 0 j$,

en el eje z : $DC = -10 k$

$$\vec{d} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$$

$$\vec{d} = 10 i + (-10 + 10) j + (-10) k \text{ (m)}$$

Simplificando, $\vec{d} = 10 i + 0 j - 10 k \text{ (m)}$

SEGUNDA FORMA: El desplazamiento se define como el cambio de posición,

$$\vec{d} = E - A = AE = 10 i + 0 j - 10 k \text{ (m)}$$

El recorrido es la longitud de la trayectoria,

$$e = AB + BC + CD + DE = 40 \text{ m}$$

La velocidad media se define como, la rapidez del cambio de posición,

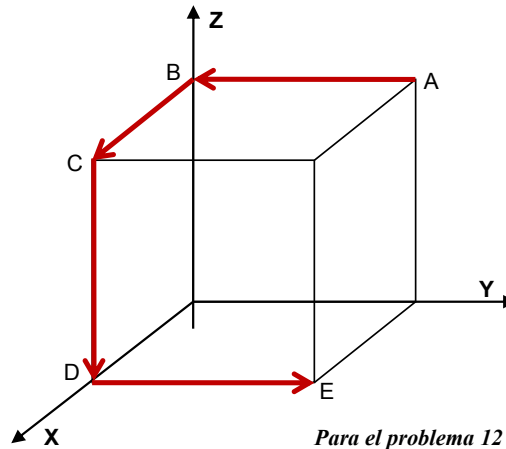
$$V_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{10 i + 0 j - 10 k}{10} = 1 i + 0 j - 1 k \left(\frac{m}{s} \right)$$

La rapidez media se define como,

$$R_m = \frac{e}{\Delta t} = \frac{40 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 4 \left(\frac{m}{s} \right)$$

Respuesta: $V_m = 1 i + 0 j - 1 k \left(\frac{m}{s} \right)$ y $R_m = 4 \left(\frac{m}{s} \right)$

12. Se muestra un cubo con 10 m de arista, donde una partícula sigue la trayectoria $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ empleando 10 segundos. Determine su velocidad media y su rapidez media (en m/s)



Para el problema 12

RESOLUCIÓN

PRIMERA FORMA: El desplazamiento es,

en el eje x : $BC = +10 i$,

en el eje y : $AB + DE = -10 j + 10 j = 0 j$,

en el eje z : $CD = -10 k$

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} \\ \vec{d} &= 10 i + (-10 + 10) j + (-10) k \text{ (m)}\end{aligned}$$

Simplificando, $\vec{d} = 10 i + 0 j - 10 k \text{ (m)}$

SEGUNDA FORMA: El desplazamiento se define como el cambio de posición,

$$\vec{d} = E - A = \vec{AE} = 10 i + 0 j - 10 k \text{ (m)}$$

El recorrido es la longitud de la trayectoria,

$$e = AB + BC + CD + DE = 40 \text{ m}$$

La velocidad media se define como, la rapidez del cambio de posición,

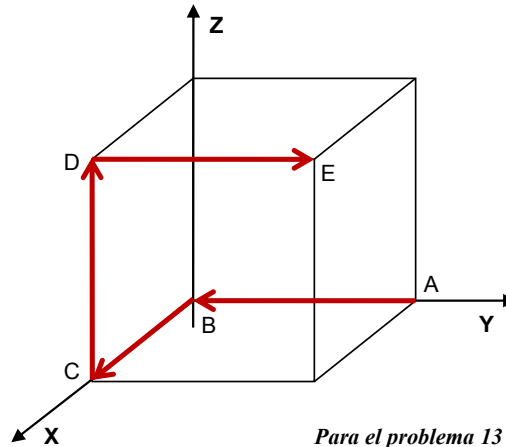
$$V_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{10 i + 0 j - 10 k}{10} = 1 i + 0 j - 1 k \left(\frac{m}{s} \right)$$

La rapidez media se define como,

$$R_m = \frac{e}{\Delta t} = \frac{40 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 4 \left(\frac{m}{s} \right)$$

Respuesta: $V_m = 1 i + 0 j - 1 k \left(\frac{m}{s} \right)$ y $R_m = 4 \left(\frac{m}{s} \right)$

13. Se muestra un cubo con 10 m de arista, donde una partícula sigue la trayectoria $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ empleando 10 segundos. Determine su velocidad media y su rapidez media (en m/s)



Para el problema 13

RESOLUCIÓN

PRIMERA FORMA: El desplazamiento es,

en el eje x : $BC = +10 i$,

en el eje y : $AB + DE = -10 j + 10 j = 0 j$,

en el eje z : $CD = +10 k$

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} \\ \vec{d} &= 10 i + (-10 + 10) j + 10 k \text{ (m)}\end{aligned}$$

Simplificando, $\vec{d} = 10 i + 0 j + 10 k \text{ (m)}$

SEGUNDA FORMA: El desplazamiento se define como el cambio de posición,

$$\vec{d} = E - A = \vec{AE} = 10 i + 0 j + 10 k \text{ (m)}$$

El recorrido es la longitud de la trayectoria,

$$e = AB + BC + CD + DE = 40 \text{ m}$$

La velocidad media se define como, la rapidez del cambio de posición,

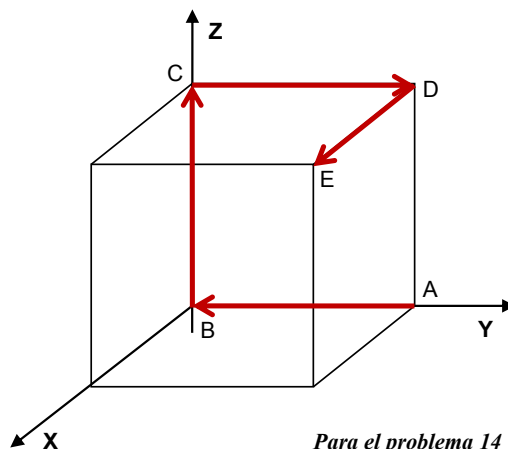
$$V_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{10 i + 0 j + 10 k}{10} = 1 i + 0 j + 1 k \left(\frac{m}{s} \right)$$

La rapidez media se define como,

$$R_m = \frac{e}{\Delta t} = \frac{40 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 4 \left(\frac{m}{s} \right)$$

Respuesta: $V_m = 1 i + 0 j + 1 k \left(\frac{m}{s} \right)$ y $R_m = 4 \left(\frac{m}{s} \right)$

14. Se muestra un cubo con 10 m de arista, donde una partícula sigue la trayectoria $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ empleando 10 segundos. Determine su velocidad media y su rapidez media (en m/s)



Para el problema 14

RESOLUCIÓN

PRIMERA FORMA: El desplazamiento es,

en el eje x : $DE = +10 i$,

en el eje y : $AB + CD = -10 j + 10 j = 0 j$,

en el eje z : $BC = +10 k$

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} \\ \vec{d} &= 10 i + (-10 + 10) j + 10 k \text{ (m)}\end{aligned}$$

Simplificando, $\vec{d} = 10 i + 0 j + 10 k \text{ (m)}$

SEGUNDA FORMA: El desplazamiento se define como el cambio de posición,

$$\vec{d} = E - A = \vec{AE} = 10 i + 0 j + 10 k \text{ (m)}$$

El recorrido es la longitud de la trayectoria,

$$e = AB + BC + CD + DE = 40 \text{ m}$$

La velocidad media se define como, la rapidez del cambio de posición,

$$V_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{10 i + 0 j + 10 k}{10} = 1 i + 0 j + 1 k \left(\frac{m}{s} \right)$$

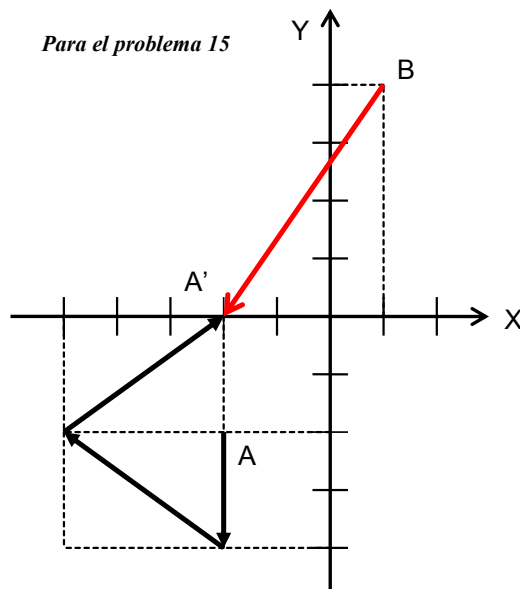
La rapidez media se define como,

$$R_m = \frac{e}{\Delta t} = \frac{40 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 4 \left(\frac{m}{s} \right)$$

Respuesta: $V_m = 1 i + 0 j + 1 k \left(\frac{m}{s} \right)$ y $R_m = 4 \left(\frac{m}{s} \right)$

15. Victoria ubicada inicialmente en el punto A (-2; -2) realizó los siguientes desplazamientos sucesivos: $-2 \mathbf{j}$ (LATERAL); $-3 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j}$ (ZIG); $3 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j}$ (ZAG) respectivamente. Jacky con un balón está ubicada en el punto B (1; 4). ¿Qué tan lejos debe lanzar el balón para entregar a Victoria? ¿en qué dirección? (los desplazamientos se miden en metros)

Resolución



PRIMER PASO. Inicialmente Victoria se encuentra en A y finalmente en A'.

Cálculo de la posición final de Victoria:

$$\text{Inicial : } A = (-2; -2)$$

$$\text{Lateral : } d_1 = (0; -2)$$

$$\text{Zig : } d_2 = (-3; 2)$$

$$\text{Zag : } d_3 = (3; 2)$$

$$\text{Final : } A' = A + d_1 + d_2 + d_3 = (-2; 0)$$

SEGUNDO PASO. Cálculo del desplazamiento desde B hasta A':

$$\vec{d}_{AB} = A' - B = (-2; 0) - (1; 4) = (-3; -4)$$

TERCER PASO. Cálculo de la distancia entre Victoria y Jacky:

$$\|\vec{d}_{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \text{ m}$$

Respuesta. la distancia es el módulo del vector desplazamiento.

MEDIDAS DE MOVIMIENTO RESPECTO DEL TIEMPO

1. MEDIDAS DEL MOVIMIENTO

El movimiento mecánico se puede expresar en función a la rapidez de cambio de posición en el tiempo, a través de la **velocidad** y la **aceleración**, y también en función a la naturaleza de las transformaciones y considerando la masa del cuerpo el movimiento se mide en base al concepto de ENERGÍA y cantidad de movimiento, que estudiaremos más adelante.

2. VELOCIDAD

Es una magnitud física vectorial que nos expresa la rapidez con la cual un móvil cambia o tiene de a cambiar de posición en un intervalo de tiempo como **Velocidad Media** y en función a un instante de tiempo como **Velocidad Instantánea**.

3. VELOCIDAD MEDIA (V_m)

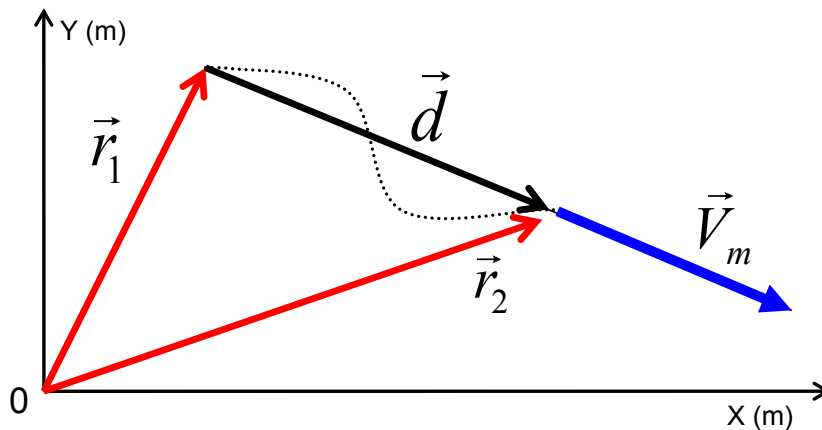
Es aquella magnitud física vectorial que expresa la rapidez de cambio de posición de un móvil, evaluada en un intervalo de tiempo. la velocidad media $\vec{V}_m$ es colineal y del mismo sentido que el desplazamiento.

La velocidad media se evalúa entre dos puntos de la trayectoria. Matemáticamente se expresa así:

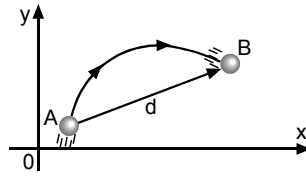
$$\vec{V}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \quad \text{La velocidad media es independiente de la trayectoria.}$$

Para un movimiento unidimensional en el eje X se expresa así:

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_F - X_0}{\Delta t}$$



EJEMPLO: Una mosca sigue la trayectoria mostrada, desde A = (2 m; 2 m) hasta B = (5 m; 6 m) en 0,02 segundo. Determine la velocidad media de la mosca (en m/s).



Resolución

PRIMER PASO. Cálculo del desplazamiento entre A y B:

$$\vec{d}_{AB} = B - A = (5 ; 6) - (2 ; 2) = (3 ; 4)$$

$$\vec{d}_{AB} = 3\hat{i} + 4\hat{j} \text{ (m)}$$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la velocidad media:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{d}_{AB}}{\Delta t} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j}}{0,02} = 150\hat{i} + 200\hat{j} \text{ (m/s)}$$

$$\|\vec{V}_m\| = \sqrt{(150)^2 + (200)^2} = 250 \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

Respuesta. El valor de la velocidad media es 250 m/s.

4. VELOCIDAD INSTANTÁNEA (V)

Es aquella magnitud física que expresa la rapidez probable de cambio de posición que tiende a poseer o posee un móvil en un instante de tiempo. Matemáticamente la **velocidad instantánea** viene a ser el límite de la **velocidad media** cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

Se define como:

$$\vec{V}_{\text{instantanea}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_m$$

Con el uso del cálculo diferencial, la **velocidad instantánea** se expresa así:

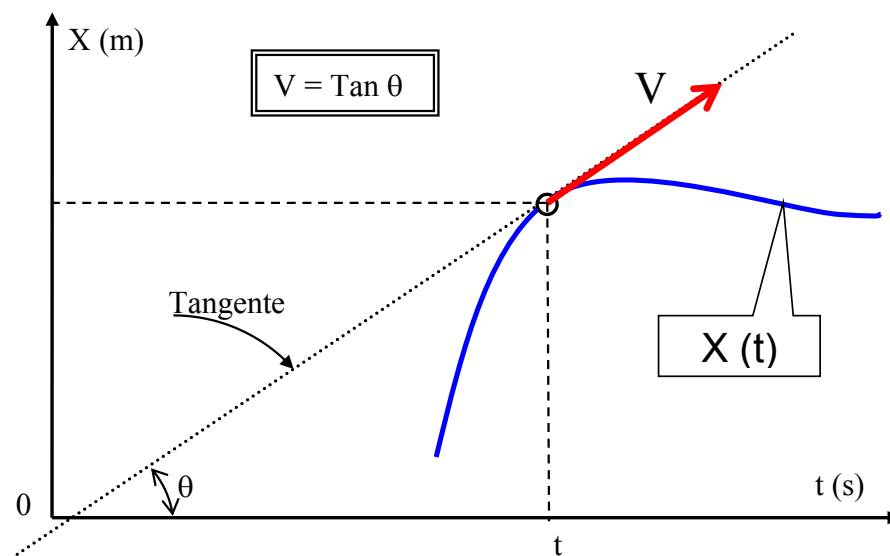
$$V = \frac{dr}{dt} \quad \text{Se lee } \textit{derivada} \text{ de la posición respecto del tiempo.}$$

Para un movimiento unidimensional en el eje X.

$$V = \frac{dX}{dt}, \text{ se lee } \textit{derivada} \text{ de la posición en el eje X respecto del tiempo.}$$

Donde X es un polinomio cuya **variable** es el tiempo.

Unidades de la velocidad: cm/s; m/s; km/h



La velocidad instantánea se representa mediante un vector tangente a la curva.

EJEMPLO 01: Una partícula se mueve en el eje X según la siguiente ley:

$$X(t) = 5 + 2t - 3t^2 \text{ m donde "t" está en expresado en segundos.}$$

Determinar la velocidad media en el intervalo $t \in [0; 2] \text{ s}$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Cálculo de la posición en $t = 0 \text{ s}$

$$X(0) = 5 + 2 \cdot (0) - 3 \cdot (0)^2 = 5 \text{ m}$$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la posición en $t = 2 \text{ s}$

$$X(2) = 5 + 2 \cdot (2) - 3 \cdot (2)^2 = -3 \text{ m}$$

TERCER PASO. Cálculo de la velocidad media:

$$V_m = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{V}_m = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} = \frac{(-3) - (5)}{(2) - (0)} = \frac{-8}{2} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Respuesta: la velocidad media es $4(-i) \text{ m.s}^{-1}$

EJEMPLO 02: Una partícula se mueve en el eje X según la siguiente ley:

$$X(t) = 3 - 2t + 3t^2 \text{ m donde "t" está en expresado en segundos.}$$

Determinar la velocidad media en el intervalo $t \in [0; 2] \text{ s}$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Cálculo de la posición en $t = 0 \text{ s}$

$$X(0) = 3 - 2 \cdot (0) + 3 \cdot (0)^2 = 3 \text{ m}$$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la posición en $t = 2 \text{ s}$

$$X(2) = 3 - 2 \cdot (2) + 3 \cdot (2)^2 = +11 \text{ m}$$

TERCER PASO. Cálculo de la velocidad media:

$$V_m = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

$$\bar{V}_m = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} = \frac{(11) - (3)}{(2) - (0)} = \frac{8}{2} = +4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Respuesta: la velocidad media es $4i \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$

EJEMPLO 03: Una partícula se mueve en el eje X según la siguiente ley:

$$X(t) = 5 + 2t - 3t^2 \text{ m donde "t" está en expresado en segundos.}$$

Determinar la velocidad en el instante $t = 3 \text{ s}$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. La velocidad instantánea se define como la derivada de la posición respecto del tiempo.

$$V(t) = \frac{dX}{dt} = 0 + 2 - 3 \cdot (2 \cdot t) \text{ m.s}^{-1}$$

$$V(t) = 2 - 6t \text{ m.s}^{-1}$$

SEGUNDO PASO. La velocidad en el instante $t = 3 \text{ s}$ es:

$$V(3) = 2 - 6 \cdot (3) = -16 \text{ m.s}^{-1}$$

Respuesta. La velocidad es $16(-i) \text{ m.s}^{-1}$

EJEMPLO 04: Una partícula se mueve en el eje X según la siguiente ley:

$$X(t) = 3 + 2t - 5t^2 \text{ m donde "t" está en expresado en segundos.}$$

Determinar la velocidad en el instante $t = 2 \text{ s}$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. La velocidad instantánea se define como la derivada de la posición respecto del tiempo.

$$V(t) = \frac{dX}{dt} = 0 + 2 - 5 \cdot (2 \cdot t) \text{ m.s}^{-1}$$

$$V(t) = 2 - 10t \text{ m.s}^{-1}$$

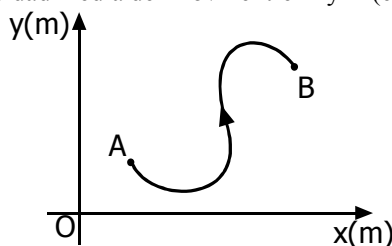
SEGUNDO PASO. La velocidad en el instante $t = 2 \text{ s}$ es:

$$V(2) = 2 - 10 \cdot (2) = -18 \text{ m.s}^{-1}$$

Respuesta. La velocidad es $18(-i) \text{ m.s}^{-1}$

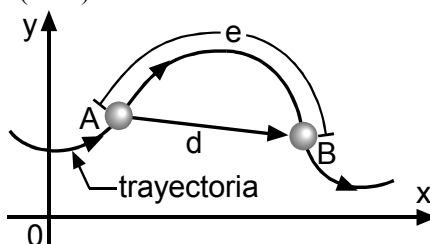
PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE
ELEMENTOS DEL MOVIMIENTO MECÁNICO

1. Un móvil al ir de la posición A (2 m; 4 m) hasta el punto B (6 m; 6 m) emplea un tiempo de 2 segundos. Determinar la velocidad media del móvil entre A y B (en m/s).



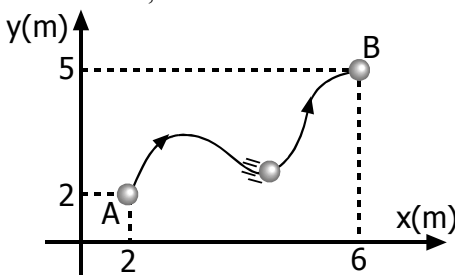
- A) $1\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ B) $1\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ C) $2\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$ D) $2\mathbf{i} - 1\mathbf{j}$ E) $-2\mathbf{i}$

2. Una cucaracha sigue la trayectoria mostrada, desde A = (2 m; 3 m) hasta B = (5 m; 6 m). Determine el desplazamiento (en m).



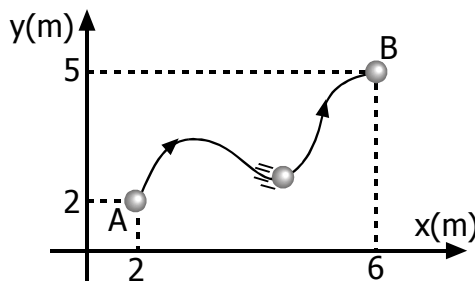
- A) $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ B) $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ C) $6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ D) $4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ E) $4\mathbf{i}$

3. Una mosca sigue la trayectoria mostrada, desde A hasta B. Determine el desplazamiento (en m).



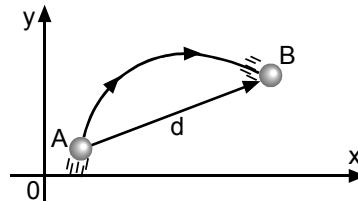
- A) $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ B) $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ C) $6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ D) $4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ E) $4\mathbf{i}$

4. Un ratón sigue la trayectoria mostrada, desde A hasta B en 10 segundos. Determine la velocidad media del ratón.



- A) $0,4 \mathbf{i} + 0,3 \mathbf{j}$ B) $0,2 \mathbf{i} + 0,4 \mathbf{j}$ C) $0,6 \mathbf{i} + 0,4 \mathbf{j}$
 D) $0,4 \mathbf{i} + 0,6 \mathbf{j}$ E) $0,4 \mathbf{i}$

5. Una mosca sigue la trayectoria mostrada, desde A = (2 m; 2 m) hasta B = (5 m; 6 m) en 0,02 segundo. Determine la velocidad media de la mosca (en m/s).



- A) $150 \mathbf{i} + 200 \mathbf{j}$ B) $15 \mathbf{i} + 20 \mathbf{j}$ C) $60 \mathbf{i} + 40 \mathbf{j}$
 D) $40 \mathbf{i} + 60 \mathbf{j}$ E) $40 \mathbf{i} + 20 \mathbf{j}$

6. Una partícula tiene una velocidad de $3 \mathbf{j}$ (m/s) durante 3 segundos. Luego en los siguientes 4 segundos su desplazamiento es $-3 \mathbf{j}$ (m) y en los últimos 3 segundos su velocidad es de $-2 \mathbf{j}$ (m/s). Determina la velocidad media (en m/s) durante todo el movimiento de la partícula.

- A) $0 \mathbf{j}$ B) $2 \mathbf{j}$ C) $-2 \mathbf{j}$ D) $4 \mathbf{j}$ E) $-4 \mathbf{j}$

7. Los móviles W y P parten de los puntos (-2; -2) y (7; 1) con velocidades $2 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}$ (m/s) y $-2,5 \mathbf{i} + 1,5 \mathbf{j}$ (m/s) respectivamente. Determine la posición de encuentro (en m)

- A) $4 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}$ B) $2 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j}$ C) $6 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j}$ D) $4 \mathbf{i} + 6 \mathbf{j}$ E) $4 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j}$

8. Una partícula se desplaza desde una posición A hasta la posición B, siendo su desplazamiento $\Delta \vec{r} = (3 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j})$ m. Si el módulo de la velocidad media entre las posiciones A y B es 10 m/s. Determine la velocidad media (en m/s) entre A y B.

- A) $3 \mathbf{i} + 5 \mathbf{j}$ B) $2 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j}$ C) $3 \mathbf{i} + 8 \mathbf{j}$ D) $3 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j}$ E) $6 \mathbf{i} + 8 \mathbf{j}$

9. Un cazador sale de su cabaña con dirección hacia el Norte desplazándose 4 km, luego cambia de dirección hacia el Este caminando 3 km más. Determine el módulo del vector desplazamiento (en km):

- A) 0 B) 2 C) 5 D) 7 E) 8

10. Un cazador sale de su cabaña con dirección hacia el Este desplazándose 10 km, luego cambia de dirección hacia el Norte caminando 8 km más, finalmente cambia de dirección hacia el Oeste recorriendo 4 km más. Determine el módulo del vector desplazamiento (en km):

- A) 0 B) 2 C) 5 D) 7 E) 8

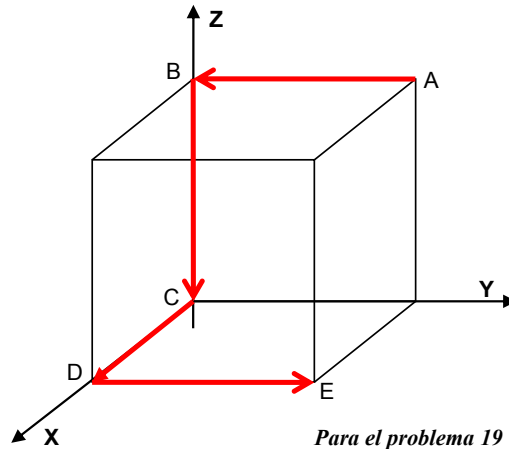
11. Un cazador de osos sale por la mañana de su cabaña con dirección hacia el Oeste caminando 10 km, luego cambia de dirección hacia el Norte caminando 10 km, finalmente cambia de dirección hacia el Sur para seguir caminando llegando al atardecer a su cabaña llevando un oso. ¿De qué color es el oso?

- A) negro B) pardo C) plomo D) blanco E) marrón

12. Los móviles A y B se están moviendo sobre una misma recta con velocidades constante uno al encuentro del otro, si en $t = 0$ s se encuentran en los puntos (2; 10) m y (62; 90) m respectivamente, siendo la rapidez del móvil A igual a 4 m/s, determine la rapidez de B (en m/s), si tardan 10 segundos en encontrarse.

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

13. Dos móviles (1) y (2) parten simultáneamente de los puntos (0; 0) y (6; 0) respectivamente y se desplazan con velocidad constante, en móvil (1) tiene una velocidad de $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ (m/s) y choca con (2) en el punto (4; 6) m, determine la velocidad de (2) en m/s.
A) $-\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ B) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ C) $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ D) $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ E) $-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
14. Una partícula se mueve en el eje X según la siguiente ley:
 $X(t) = 5 + 2t - 3t^2$ m donde “t” está en expresado en segundos.
Determinar la velocidad media en el intervalo $t \in [0; 2]$ s
Respuesta: la velocidad media es $4(-\mathbf{i}) \text{ m.s}^{-1}$
15. Una partícula se mueve en el eje X según la siguiente ley:
 $X(t) = 3 - 2t + 3t^2$ m donde “t” está en expresado en segundos.
16. Determinar la velocidad media en el intervalo $t \in [0; 2]$ s
Respuesta: la velocidad media es $4\mathbf{i} (\text{m.s}^{-1})$
17. Una partícula se mueve en el eje X según la siguiente ley:
 $X(t) = 5 + 2t - 3t^2$ m donde “t” está en expresado en segundos.
Determinar la velocidad en el instante $t = 3$ s
Respuesta. La velocidad es $16(-\mathbf{i})\text{m.s}^{-1}$
18. Una partícula se mueve en el eje X según la siguiente ley:
 $X(t) = 3 + 2t - 5t^2$ m donde “t” está en expresado en segundos.
Determinar la velocidad en el instante $t = 2$ s
Respuesta. La velocidad es $18(-\mathbf{i})\text{m.s}^{-1}$
19. Dos móviles A y B se desplazan sobre el eje “x” de manera que sus posiciones respecto de un observador fijo al eje “x” están expresados por $X_A = 100 + 15t$ y $X_B = 400 - 35t$ respectivamente, donde “t” esta expresado en segundos y X en metros. Considerando que parten simultáneamente, determine el vector posición del móvil A (en m) en el instante en que se encuentra con el móvil B.
A) $190\mathbf{i}$ B) $220\mathbf{i}$ C) $240\mathbf{i}$ D) $280\mathbf{i}$ E) $320\mathbf{i}$
20. Se muestra un cubo con 10 m de arista, donde una partícula sigue la trayectoria $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ empleando 10 segundos. Determine su velocidad media y su rapidez media (en m/s)



A) $V_m = 1\,i + 10\,j + 1\,k \left(\frac{m}{s}\right)$ y $R_m = 4 \left(\frac{m}{s}\right)$

B) $V_m = 1\,i + 0\,j + 1\,k \left(\frac{m}{s}\right)$ y $R_m = 4 \left(\frac{m}{s}\right)$

C) $V_m = 1\,i + 10\,j + 1\,k \left(\frac{m}{s}\right)$ y $R_m = 40 \left(\frac{m}{s}\right)$

D) $V_m = 1\,i - 10\,j + 1\,k \left(\frac{m}{s}\right)$ y $R_m = 40 \left(\frac{m}{s}\right)$

E) $V_m = 10\,i + 10\,j + 10\,k \left(\frac{m}{s}\right)$ y $R_m = 4 \left(\frac{m}{s}\right)$

21. Respecto de los elementos del movimiento mecánico. Marcar falso (F) o verdadero (V) según corresponde.

I. La velocidad media en un intervalo de tiempo $(t_1; t_2)$ se define como, $V_m = \frac{V_1 + V_2}{2}$

II. La rapidez media es igual la magnitud de la velocidad media.

III. El desplazamiento es el recorrido que experimenta el móvil.

A) VVV

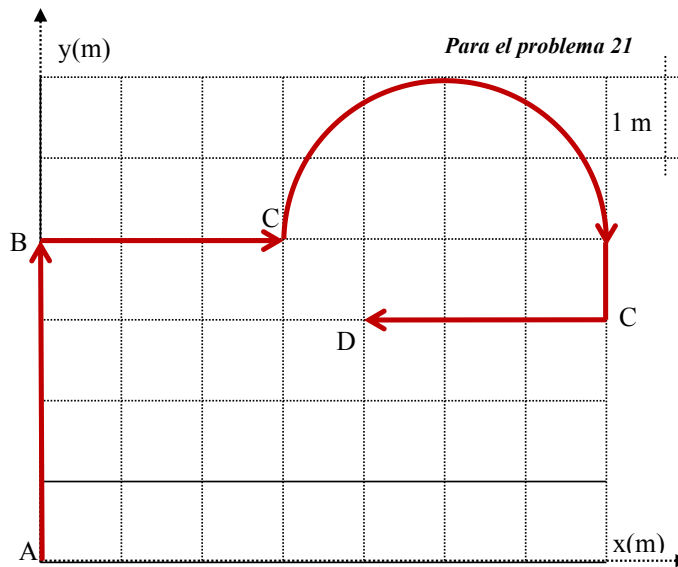
B) VVF

C) FVV

D) VFV

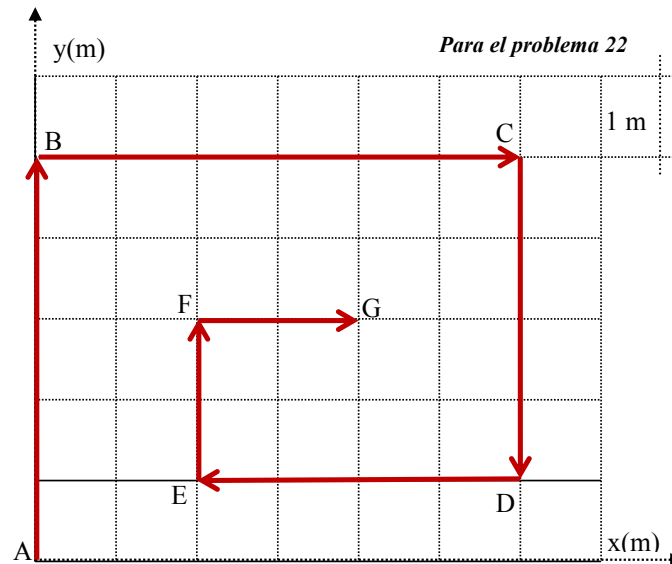
E) FFF

22. Se muestra un plano cartesiano donde el tamaño de la cuadrícula es 1 m. Un móvil sigue la trayectoria mostrada, si en el instante $t = 0s$ se encuentra en el punto A y en el instante $t = 10s$ se encuentra en la posición D. Determine (en m/s) la velocidad media para todo el recorrido.



- A) $0,4\ i - 0,3\ j$ B) $0,4\ i + 0,3\ j$ C) $4\ i + 0,3\ j$
D) $0,4\ i + 3\ j$ E) $4\ i + 3\ j$

23. Se muestra un plano cartesiano donde el tamaño de la cuadrícula es 1 m. Un móvil sigue la trayectoria mostrada, si en el instante $t = 0s$ se encuentra en el punto A y en el instante $t = 10s$ se encuentra en la posición G. Determine (en m/s) la velocidad media para todo el recorrido.



A) $0,4\ i - 0,3\ j$

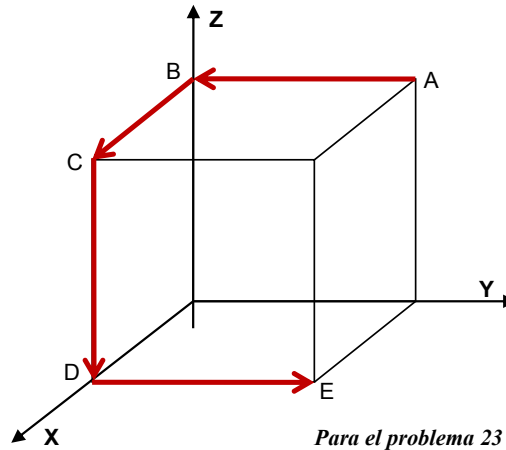
B) $0,4\ i + 0,3\ j$

C) $4\ i + 0,3\ j$

D) $0,4\ i + 3\ j$

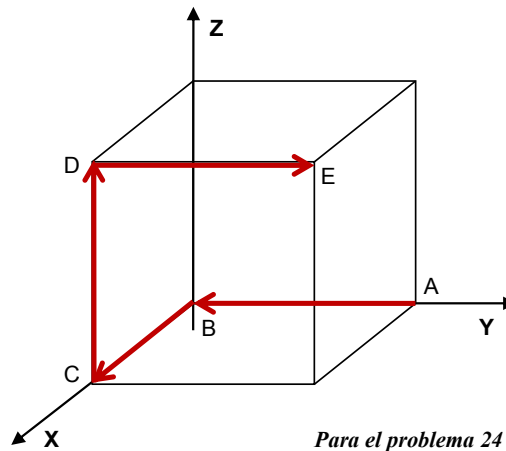
E) $4\ i + 3\ j$

24. Se muestra un cubo con $10\ m$ de arista, donde una partícula sigue la trayectoria $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ empleando 10 segundos. Determine su velocidad media y su rapidez media (en m/s)



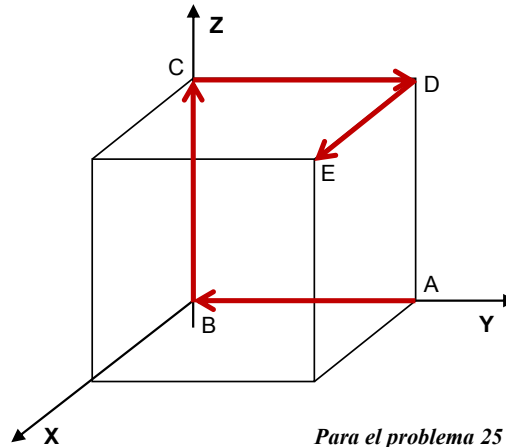
25. Respuesta: $V_m = 1\ i + 0\ j - 1\ k \left(\frac{m}{s} \right)$ y $R_m = 4 \left(\frac{m}{s} \right)$

26. Se muestra un cubo con $10\ m$ de arista, donde una partícula sigue la trayectoria $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ empleando 10 segundos. Determine su velocidad media y su rapidez media (en m/s)



Respuesta: $V_m = 1\ i + 0\ j + 1\ k \left(\frac{m}{s} \right)$ y $R_m = 4 \left(\frac{m}{s} \right)$

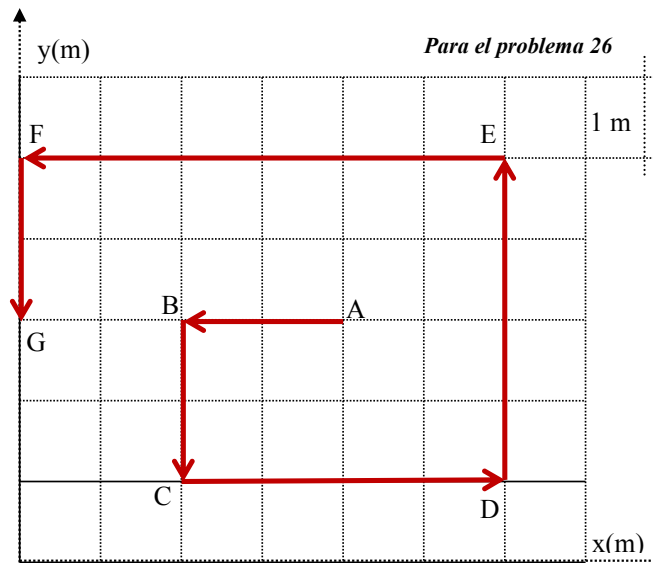
27. Se muestra un cubo con 10 m de arista, donde una partícula sigue la trayectoria $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ empleando 10 segundos. Determine su velocidad media y su rapidez media (en m/s)



Para el problema 25

Respuesta: $V_m = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k} \left(\frac{m}{s} \right)$ y $R_m = 4 \left(\frac{m}{s} \right)$

28. Se muestra un plano cartesiano donde el tamaño de la cuadrícula es 1 m. Un móvil sigue la trayectoria mostrada, si en el instante $t = 0s$ se encuentra en el punto A y en el instante $t = 10s$ se encuentra en la posición G. Determine (en m/s) la rapidez media para todo el recorrido.



Para el problema 26

- A) 1 B) 1,5 **C) 2** D) 2,5 E) 3

29. Victoria ubicada inicialmente en el punto A (-2; 2) realizó los siguientes desplazamientos sucesivos: $-2\mathbf{j}$ (LATERAL); $-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (ZIG); $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (ZAG) respectivamente. Jacky con un

balón está ubicada en el punto B (4; 2). ¿Qué tan lejos debe lanzar el balón para entregar a Victoria? ¿en qué dirección? (los desplazamientos se miden en metros)

- A) 5 m B) 6 m C) 7 m D) 4 m E) N.A.

30. En el mapa de un tesoro, indica que se debe iniciar la búsqueda desde un gran árbol, dirigiéndose 50 m al **Este**, luego 15 m al **Sur** y finalmente 42 m al **Oeste**. Determine cuánto se debe recorrer y el módulo del desplazamiento entre el árbol y el tesoro.

- A) 107 m y 42 m B) 92 m y 50 m C) 107 m y 15 m
D) 107 m y 17 m E) 50 m y 25 m

31. Álvaro ubicado inicialmente en el punto A (-2; 2) realizó los siguientes desplazamientos sucesivos: $-2\mathbf{i}$ (LATERAL); $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ (ZIG); $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (ZAG) respectivamente. Joel con un balón está ubicado en el punto B (1; -2). ¿Qué tan lejos debe lanzar el balón para entregar a Álvaro? ¿en qué dirección? (los desplazamientos se miden en metros)

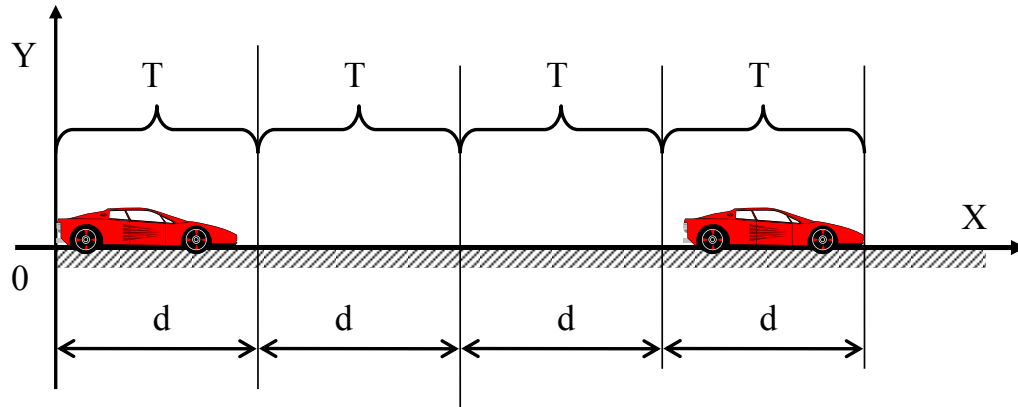
- A) 5 m B) 6 m C) 7 m D) 4 m E) N.A.

32. CONTINUARÁ.

M.R.U.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

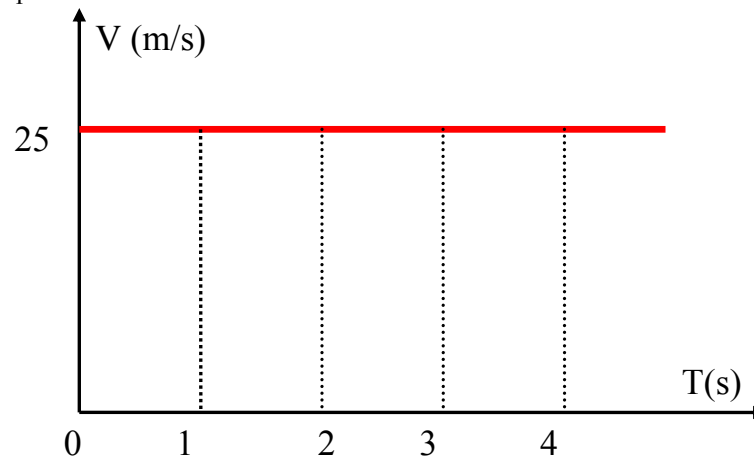
1. **CONCEPTO:** El móvil describe una trayectoria rectilínea, avanzando distancias iguales en intervalos de tiempos iguales. El cuerpo se mueve con *velocidad constante* (módulo y dirección).



El movimiento rectilíneo uniforme, es el movimiento más simple de la materia.

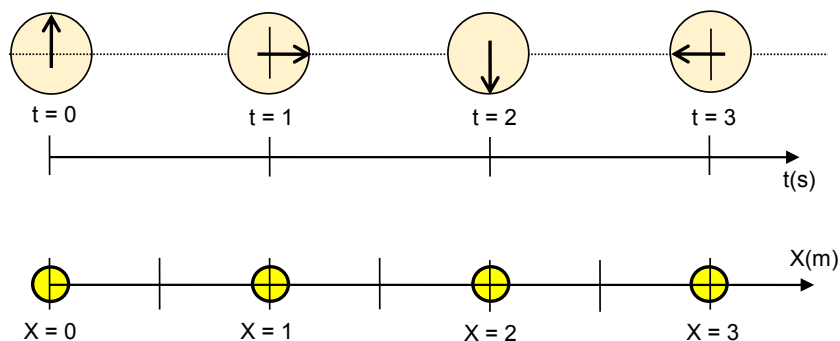
2. **VELOCIDAD CONSTANTE**

La partícula se mueve con velocidad constante en módulo y dirección. Es decir la trayectoria es rectilínea siempre.



El móvil recorre 25 metros en cada segundo, equivalente a 90 km/h. El área bajo la recta representa el cambio de posición.

3. CARACTERÍSTICAS DE LA VELOCIDAD EN EL M.R.U.



GOTA 1. La velocidad instantánea es constante.

GOTA 2. La velocidad media es constante.

GOTA 3. La velocidad instantánea es igual a la velocidad media.

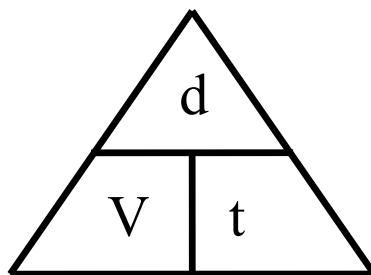
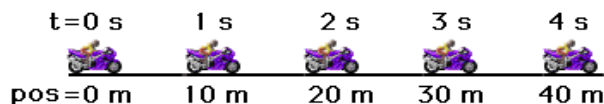
GOTA 4. La **velocidad** es una cantidad física vectorial, es decir tiene módulo y dirección.

GOTA 5. La **rapidez** es el módulo de la velocidad.

Cálculo de la rapidez:
$$V = \frac{d}{t}$$

Cálculo de la distancia:
$$d = V \cdot t$$

Cálculo del tiempo transcurrido:
$$t = \frac{d}{V}$$



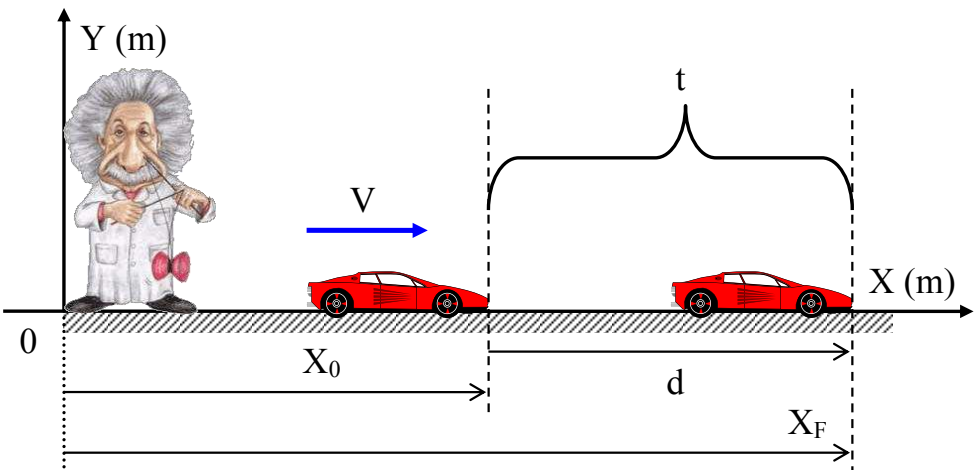
Unidades: d : metros ; t : segundos ; V : m/s

4. ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO (M.R.U.)

La posición final de la partícula es igual a la adición de la posición inicial más el desplazamiento.

$$x_F = x_0 + V \cdot t$$

El signo positivo o negativo representan la dirección de la cantidad vectorial. De otro modo, se reemplaza en la ecuación en signo de cada cantidad física vectorial.

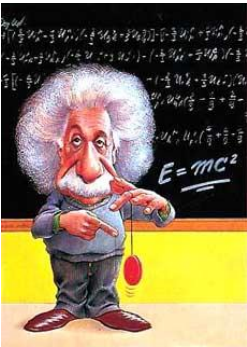


$\bar{x}_f$: Posición final $\bar{x}_0$: Posición inicial
 $\bar{V}$: Velocidad t: tiempo transcurrido

5. EQUIVALENCIA

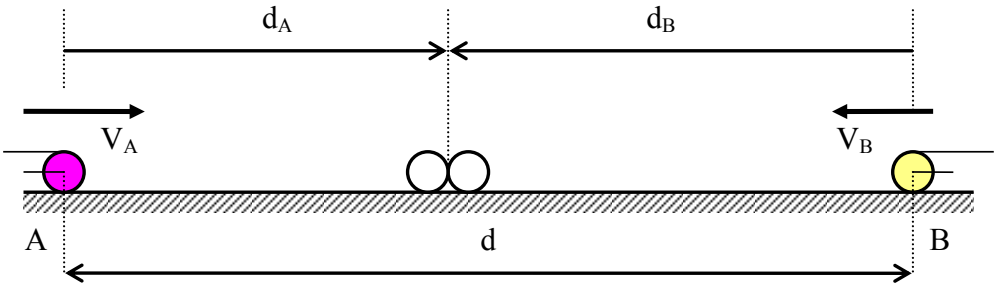
Un kilómetro equivale a mil metros. Una hora equivale a 3 600 segundos. Una hora equivale a 60 minutos. Un minuto equivale a 60 segundos.

a	9 km/h = 2,5 m/s
b	18 km/h = 5 m/s
c	36 km/h = 10 m/s
d	54 km/h = 15 m/s
e	72 km/h = 20 m/s
f	90 km/h = 25 m/s
g	108 km/h = 30 m/s
h	144 km/h = 40 m/s
i	1 hora = 3 600 s
j	1 km = 1 000 m



6. TIEMPO DE ENCUENTRO

Dos cuerpo A y B se encuentran separados una distancia d, salen al encuentro simultáneamente con rapidez constante en direcciones opuestas.



$$d = d_A + d_B \Rightarrow d = V_A \cdot T + V_B \cdot T$$

$$T_{\text{encuentro}} = \frac{d}{V_A + V_B}$$

EJEMPLO 01: Dos móviles A y B se encuentran separados inicialmente 120 metros, salen simultáneamente al encuentro con rapidez de 20 m/s y 10 m/s respectivamente. ¿Cuánto tiempo demoran encontrarse en un mismo punto?

Resolución.

Los móviles A y B van al encuentro sobre una misma trayectoria. La distancia de separación inicial es 120 metros. Aplicamos la regla práctica.

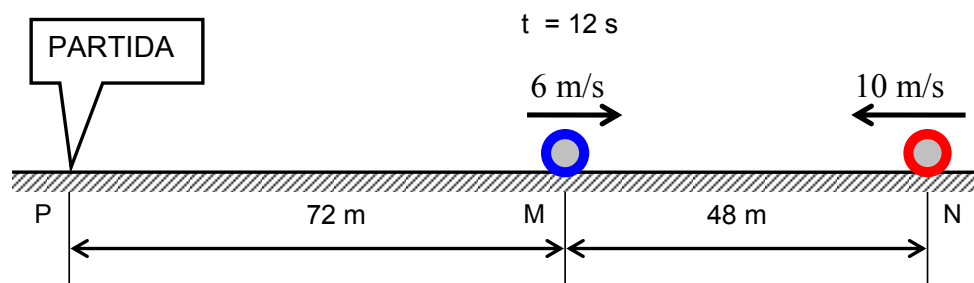
$$T_{\text{encuentro}} = \frac{d}{V_A + V_B} \Rightarrow T_e = \frac{120}{20 + 10} = 4 \text{ s}$$

Respuesta: Los móviles A y b se encuentran después de 4 segundos.

EJEMPLO 02: Dos móviles A y B participan de una competencia de ida y vuelta, en una pista de 120 m de largo. Si parten simultáneamente con rapidez de 6 m/s y 10 m/s respectivamente, ¿después de cuánto tiempo vuelven a encontrarse?

Resolución

En 12 segundos el móvil B (de mayor rapidez) llega al extremo recorriendo 120 m y el otro (A) recorre 72 m en el mismo intervalo de tiempo. Después el tiempo de encuentro es 3 segundos.



Cálculo del tiempo de encuentro:

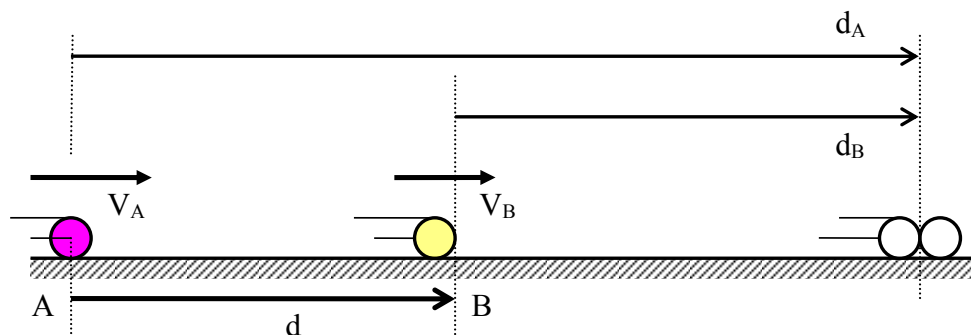
$$T_e = \frac{d}{V_A + V_B} = \frac{48 \text{ m}}{6 \text{ m/s} + 10 \text{ m/s}} = 3 \text{ s}$$

El tiempo total transcurrido es: $12 \text{ s} + 3 \text{ s} = 15 \text{ segundos}$.

Respuesta: Después de 15 segundos los móviles A y B vuelven a encontrarse.

7. TIEMPO DE ALCANCE

Dos cuerpos A y B se encuentran separados una distancia d , salen simultáneamente en la misma dirección con rapidez constante.



$$d + d_B = d_A \Rightarrow d = V_A \cdot T - V_B \cdot T$$

$$T_{alcance} = \frac{d}{V_A - V_B}$$

EJEMPLO 01: Dos móviles A y B se encuentran separados inicialmente 120 metros, salen simultáneamente en la misma dirección con rapidez de 40 m/s y 10 m/s respectivamente. ¿Cuánto tiempo demora el más veloz en alcanzar al más lento?

Resolución

El móvil A con rapidez de 40 m/s es más veloz que el móvil B. La distancia de separación inicial es 100 metros. Aplicamos la regla práctica.

$$T_{alcance} = \frac{d}{V_A - V_B} \Rightarrow T_a = \frac{120}{40 - 10} = 4 \text{ s}$$

Respuesta: El móvil alcanza al móvil B en 4 segundos.

8. TIEMPO DE CRUCE EN DIRECCIONES OPUESTAS

Dos cuerpos rígidos A y B de largo apreciable como ocurre con los trenes, camiones, puentes, túneles, automóviles. Los cuerpos se mueven en direcciones opuestas.



$$T_{cruce} = \frac{d_A + d_B}{V_A + V_B}$$

EJEMPLO 01: Un camión de 40 m de largo, marcha a 72 km/h por una carretera paralela a la vía del tren. ¿Cuánto tiempo invertirá el camión cruzarse íntegramente con un tren de 260 metros de largo que marcha a 36 km/h en dirección opuesta?

Resolución

Transformando tenemos que el camión de 40 m tiene rapidez de 20 m/s y el tren de 260 m de largo con rapidez de 10 m/s. El tiempo que demora en cruzarse el camión con el tren es:

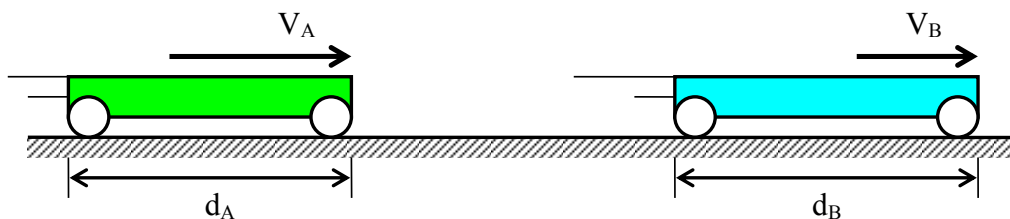
$$T = \frac{L_{camion} + L_{tren}}{V_{camion} + V_{tren}}$$

$$\text{Reemplazando tenemos: } T = \frac{40 \text{ m} + 260 \text{ m}}{20 \text{ m/s} + 10 \text{ m/s}} = \frac{300 \text{ m}}{30 \text{ m/s}} = 10 \text{ segundos}$$

Respuesta: El tiempo que demora en cruzarse el camión con el tren es 10 segundos.

9. TIEMPO DE CRUCE EN DIRECCIONES IGUALES

Dos cuerpos rígidos A y B de largo apreciable como ocurre con los trenes, camiones, puentes, túneles, automóviles. Los cuerpos se mueven en direcciones iguales



$$T_{cruce} = \frac{d_A + d_B}{V_A - V_B}$$

EJEMPLO 01: Un camión de 40 m de largo, marcha a 72 km/h por una carretera paralela a la vía del tren. ¿Cuánto tiempo invertirá el camión en pasar íntegramente a un tren de 260 metros de largo que marcha a 36 km/h en la misma dirección?

Resolución

Transformando tenemos que el camión de 40 m tiene rapidez de 20 m/s y el tren de 260 m de largo con rapidez de 10 m/s. El tiempo que demora en adelantar el camión al tren es:

$$T = \frac{L_{camion} + L_{tren}}{V_{camion} - V_{tren}}$$

$$\text{Reemplazando tenemos: } T = \frac{40 \text{ m} + 260 \text{ m}}{20 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}} = \frac{300 \text{ m}}{10 \text{ m/s}} = 30 \text{ segundos}$$

Respuesta: El tiempo que demora en adelantar el camión al tren es 30 segundos.

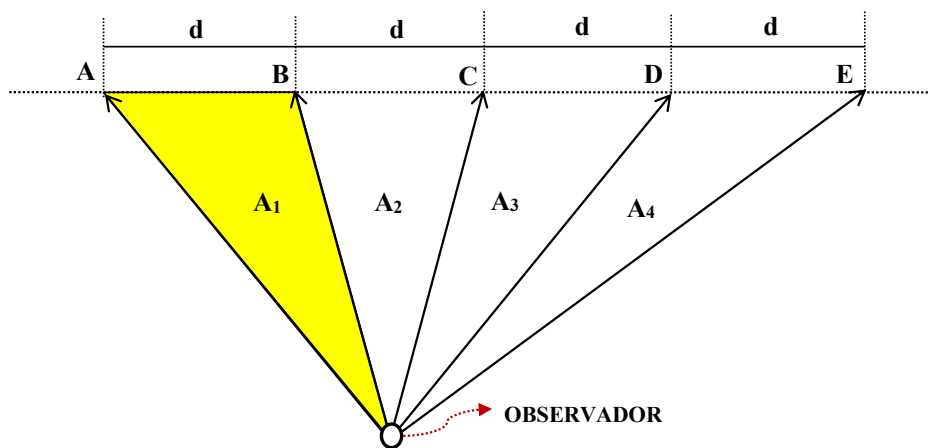
10. LEY DE KEPLER PARA EL M.R.U.

Toda partícula que tiene movimiento rectilíneo uniforme, recorre distancias iguales en tiempos iguales. “*El vector posición describe áreas iguales en tiempos iguales*”.

Distancias: $AB = BC = CD = DE$

Tiempos: $t_{AB} = t_{BC} = t_{CD} = t_{DE}$

Áreas: $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$



LEY DE KEPLER PARA EL M.R.U

11. SONIDO Y ECO.

GOTA 1. El eco es un fenómeno acústico.

GOTA 2. El sonido en una onda mecánica.

GOTA 3. El sonido necesita para propagarse un medio diferente al vacío.

GOTA 4. En el aire se propaga con una rapidez promedio de 340 m/s.

GOTA 5. El eco se produce cuando el observador percibe el mismo sonido por segunda vez debido al rebote de la onda sonora en algún obstáculo (montaña, cerro, pared, muro, etc.).

GOTA 6. La rapidez del sonido en el aire seco a 0 °C es de unos 330 m/s.

GOTA 7. La presencia de vapor de agua en el aire incrementa ligeramente dicha rapidez.

GOTA 8. Un aumento de la temperatura del aire también aumenta la rapidez del sonido.

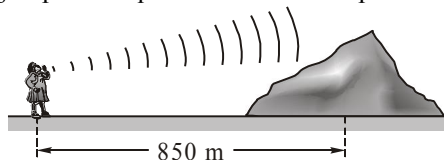
GOTA 9. La rapidez del sonido en aire aumenta en 0,6 m/s por cada grado centígrado.

GOTA 10. La **rapidez** del sonido en un material dado no depende de la densidad material, sino de su **elasticidad**. El acero es un material elástico. Los átomos de un material elástico están relativamente juntos. El sonido se propaga unas quince veces más a prisa en el acero que en el aire, y unas cuatro veces más a prisa en agua que en el aire.

GOTA 11. La ecuación muestra la variación de la rapidez del sonido en el aire debido al cambio de la temperatura en grados Celsius.

$$V_{(T)} = (330 + 0,6.T) \frac{m}{s} \Leftrightarrow T > 0 \text{ } ^\circ C$$

EJEMPLO: Un hombre que se encuentra frente a una montaña emite un grito. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, ¿después de qué intervalo de tiempo escuchará el eco?



Resolución

Eco es aquel fenómeno en el cual el sonido percibe el hombre por segunda vez, esto ocurre cuando el sonido (onda sonora) se refleja debido a un obstáculo (montaña).

Cálculo del tiempo que demora el sonido en llegar a la montaña:

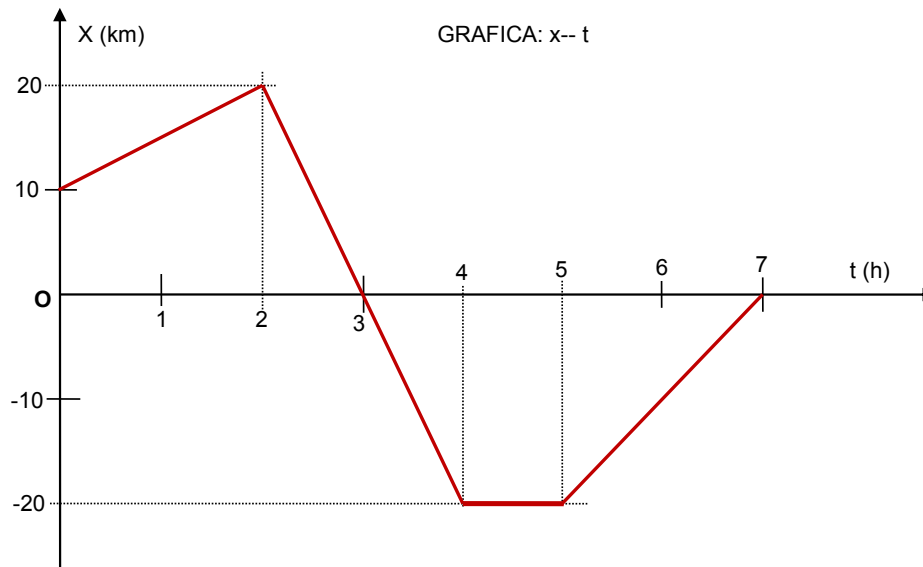
$$t = \frac{d}{V_{\text{SONIDO}}} = \frac{850 \text{ m}}{340 \text{ m/s}} = 2,5 \text{ s}$$

Entonces el sonido invierte 5,0 segundos en ir y regresar de la montaña.

Respuesta: El eco se escucha luego de 5 segundos.

12. GRAFICA: POSICION VERSUS TIEMPO.

Se muestra la variación de la posición de la partícula que se desplaza en línea recta en el eje X.



Entonces podemos afirmar que:

a) La posición inicial de la partícula es, $t = 0 \text{ h} \Rightarrow X_0 = 10 \text{ km}$

b) En la segunda hora alcanza su máximo alejamiento, para $t = 2 \text{ h} \Rightarrow X = 20 \text{ km}$

c) la velocidad media en las dos primeras horas es,

$$V = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} = \frac{20 - 10}{2 - 0} = 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

d) En la tercera hora el móvil invierte el sentido de su movimiento, llegando al origen de coordenadas, $t = 3 \text{ h} \Rightarrow X = 0 \text{ km}$

e) En la cuarta hora el móvil se desplaza en el eje “-X” alejándose del origen de coordenadas llegando a la posición, $t = 4 \text{ h} \Rightarrow X = -20 \text{ km}$

f) Cálculo de la velocidad media en el intervalo de tiempo, $t_1 = 2 \text{ h}$ y $t_2 = 4 \text{ h}$

$$V = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} = \frac{(-20) - (20)}{4 - 2} = -20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

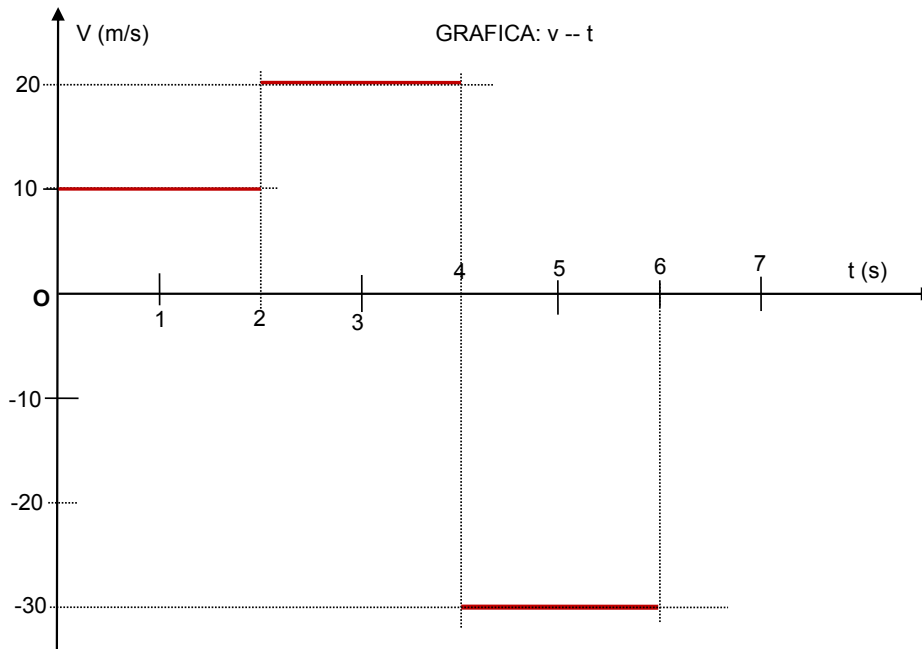
El signo negativo (-) significa que el móvil se mueve en el sentido “-X”.

g) En la quinta hora la partícula está en reposo, $t_1 = 4 \text{ h}$ y $t_2 = 5 \text{ h}$

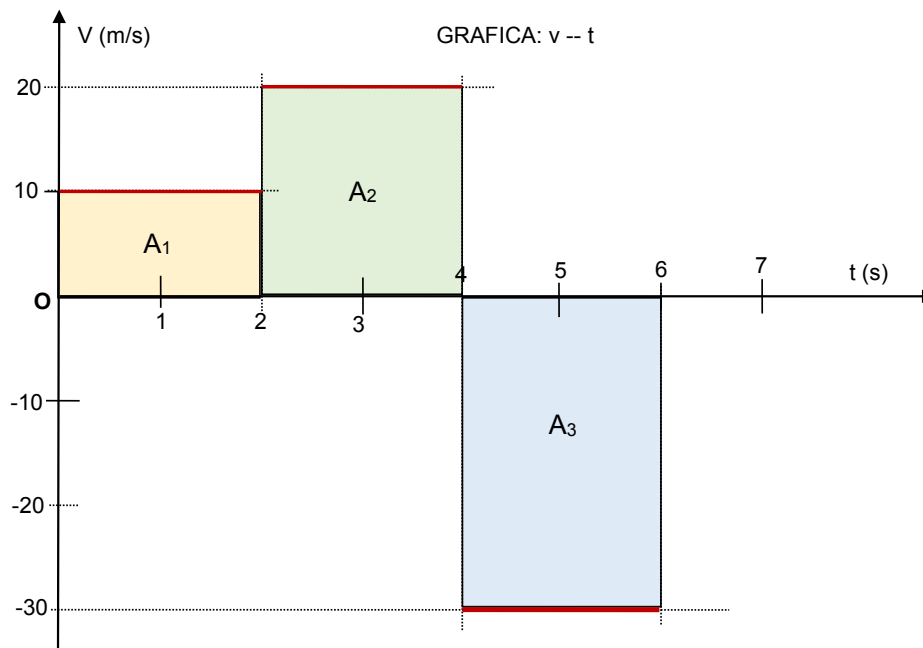
h) En el intervalo $t_1 = 5 \text{ h}$ y $t_2 = 7 \text{ h}$ el móvil cambia en sentido de su movimiento dirigiéndose al origen de coordenadas, $t = 7 \text{ h} \Rightarrow X = 0 \text{ km}$

13. GRÁFICA: VELOCIDAD VERSUS TIEMPO.

Una partícula inicia su movimiento en la posición $X=5$ m, con velocidad que varía como se muestra. Entonces podemos afirmar que:



a) La partícula inicia su movimiento con, $t = 0 \text{ s} \Rightarrow V_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$



b) El área bajo el segmento de recta es igual a la distancia que avanza, en general representa el cambio de posición. En los primeros dos segundos recorre 20 metros.

$$d_1 = A_1 = b \bullet h \Rightarrow d_1 = (2s) \cdot \left(10 \frac{m}{s}\right) = +20 m$$

c) En el Intervalo $t_1 = 2s$ y $t_2 = 4s$ recorre: $d_2 = A_2 = b \bullet h \Rightarrow d_1 = (2s) \cdot \left(20 \frac{m}{s}\right) = +40 m$

d) Si, $X_0 = 5m$, determinar la posición de la partícula en el instante $t = 4s$ es,

$$X_F = X_0 + d_1 + d_2 = 5 + 20 + 40 = +65 m$$

e) La partícula inicia su movimiento en $t = 0s \Rightarrow V_0 = 10 m.s^{-1}$, después de 2 segundos aumenta su velocidad a 20 m/s, siempre en el sentido del eje (+X) positivo. En el instante

$t = 4s$ el móvil invierte el sentido del movimiento siguiendo el sentido (-X), con velocidad de 30 m/s. En la gráfica, el signo negativo de la velocidad significa que se mueve en el sentido (-X)

f) En el Intervalo $t_1 = 4s$ y $t_2 = 6s$ la partícula recorre:

$$d_3 = A_3 = b \bullet h \Rightarrow d_1 = (2s) \cdot \left(-30 \frac{m}{s}\right) = -60 m$$

el signo negativo significa que, el móvil se desplaza en el sentido (-X).

g) Si, $X_0 = 5m$, determinar la posición de la partícula en el instante $t = 6s$ es,

$$X_F = X_0 + d_1 + d_2 + d_3 = 5 + 20 + 40 + (-60) = +5 m$$

Significa que el móvil regresa a su posición inicial.

h) En general la sumatoria de áreas considerando el signo de las áreas, es igual al desplazamiento. Es decir, cada área representa el cambio de posición de la partícula en un intervalo de tiempo,

$$\bar{d} = A_1 + A_2 + A_3 = 20 + 40 + (-60) = +0 m$$

i) En general la sumatoria de áreas sin considerar el signo de las áreas, es igual al recorrido. Es decir, cada área representa el cambio de posición de la partícula en un intervalo de tiempo,

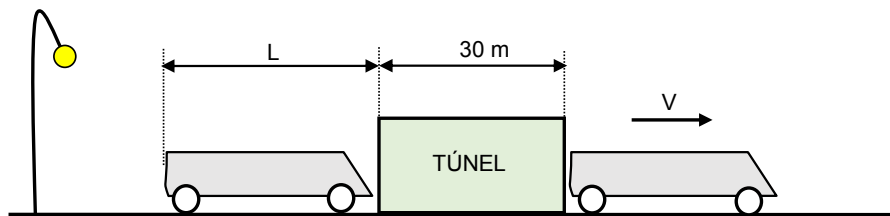
$$e = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 20 + 40 + (+60) = +120 m$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Determinar el largo de un ómnibus, sabiendo que tarda 4 segundos en pasar delante de un poste y 10 segundos por delante de un túnel de 30 metros de largo.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Cada punto del ómnibus experimenta un desplazamiento de $(L+30m)$ para que el ómnibus atraviese completamente el túnel.



SEGUNDO PASO. El ómnibus se mueve con velocidad constante, por consiguiente:

$$V = \frac{d}{t} \Rightarrow V = \frac{L}{4} = \frac{L+30}{10} \Rightarrow L = 20m$$

Respuesta: el largo del ómnibus es 20 metros.

2. Un tren de 200 m de largo se mueve en línea recta con rapidez constante. Si demora en pasar frente al poste 8 segundos y en atravesar el túnel 24 segundos. Determine el largo del túnel.



A) 400 m B) 300 m C) 200 m D) 100 m E) 50 m

Resolución

La rapidez es constante: $V = \frac{L_{TREN}}{T_1} = \frac{L_{TREN} + L_{TUNEL}}{T_2}$

Reemplazando los datos: $\frac{200}{8} = \frac{200 + L_{TUNEL}}{24}$

Resolviendo tenemos: $L_{TUNEL} = 400 m$

Respuesta: el largo del túnel es 400 m.

3. Un automóvil durante la primera mitad del tiempo que estuvo en movimiento llevó la velocidad de 80 km/h y durante la segunda mitad la velocidad es 20 km/h, en línea recta. ¿Cuál fue la velocidad media de este móvil en todo este tiempo?

RESOLUCION

PRIMER PASO. Consideramos las distancias d_1 y d_2 que se desplazan en un intervalo de tiempo "t". $d_1 = V_1 \cdot t$ y $d_2 = V_2 \cdot t$

SEGUNDO PASO. La velocidad media en un tiempo transcurrido $(2.t)$ será:

$$V_m = \frac{d_1 + d_2}{t + t} = \frac{V_1 \cdot t + V_2 \cdot t}{2t} = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

TERCER CASO: Reemplazamos los datos.

$$V_m = \frac{80 + 20}{2} = 50 \frac{km}{h}$$

Respuesta. La velocidad media es 50 km/h.

4. En una carrera de regularidad se quiere saber la velocidad media que todo al recorrer una distancia "X". El camino se dividió en tres tramos iguales, recorriendo cada tramo con velocidades de valor V ; $5V$ y $6V$ respectivamente.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Consideramos las distancias d_1 ; d_2 y d_3 que se desplazan en un intervalo de tiempo "t". $d_1 = V_1 \cdot t$; $d_2 = V_2 \cdot t$ y $d_3 = V_3$

SEGUNDO PASO. La velocidad media en un tiempo transcurrido $(2.t)$ será:

$$V_m = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{t + t + t} = \frac{V_1 \cdot t + V_2 \cdot t + V_3 \cdot t}{3t} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}$$

TERCER CASO: Reemplazamos los datos.

$$V_m = \frac{V + 5V + 6V}{3} = 4V$$

Respuesta. La velocidad media es $4V$

5. Un móvil que va a 15 km/h llega a su destino después de un tiempo "T". Si va a 10 km/h se demora 2 horas más. ¿A qué velocidad tiene que ir para llegar después de un tiempo $(T+1)$?

RESOLUCION

PRIMER PASO. El largo del camino es el mismo en los tres casos.

$$d = v \cdot t \Rightarrow d = (15) \cdot (T) = (10) \cdot (T + 2)$$

Resolviendo: $T = 4h$

SEGUNDO PASO. Entonces el largo del camino es:

$$d = v \cdot t \Rightarrow d = (15) \cdot (4) = 60 km$$

TERCER PASO. En el tercer caso,

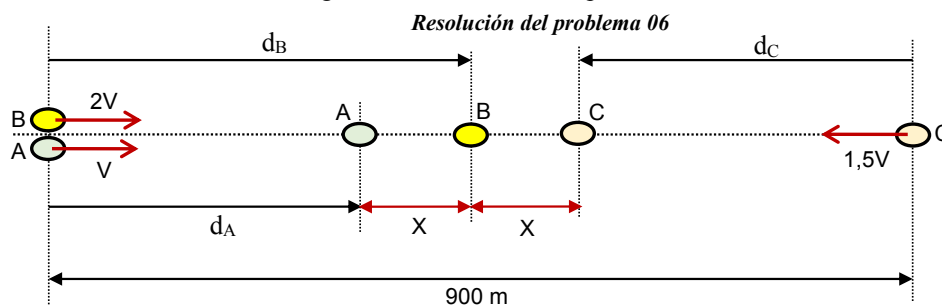
$$V = \frac{d}{T+1} = \frac{60 km}{(4+1)h} = 12 \frac{km}{h}$$

Respuesta: el valor de la velocidad es 12 km/h

6. Dos móviles A y B parten simultáneamente de un punto común con velocidades V y $2V$, a 900 metros parte en móvil C en el mismo instante con una velocidad $1,5V$. Si transcurridos 10 segundos B equidista de A y C. ¿Cuál es la velocidad del móvil A?

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos un gráfico mostrando el desplazamiento de los tres móviles.



SEGUNDO PASO. Ecuaciones de segmentos de recta:

$$X + d_A = d_B \Rightarrow X = d_B - d_A \quad \dots (1)$$

$$d_B + X + d_C = 900 \quad \dots (2)$$

TERCER PASO. Resolviendo, (1) reemplazamos en (2):

$$2.d_B + d_C - d_A = 900$$

$$2.(2V.t) + (1,5V.t) - (V.t) = 900 \Rightarrow 4,5V.t = 900$$

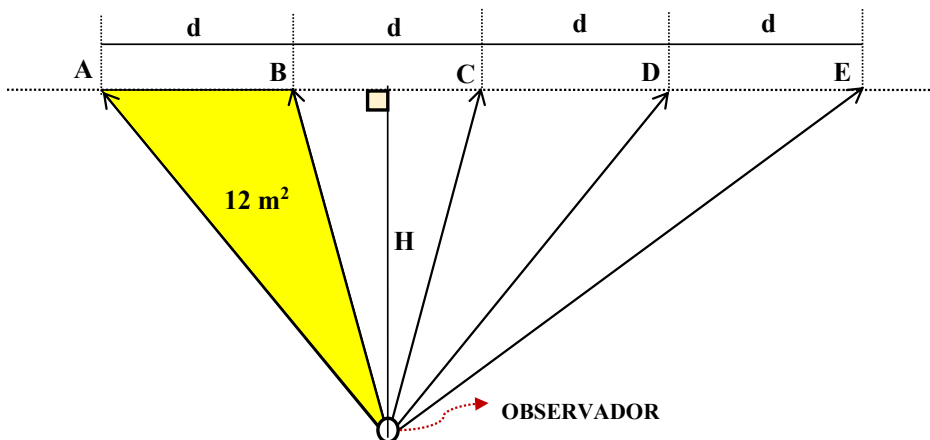
$$4,5V.(10) = 900 \Rightarrow V = 20 \text{ m.s}^{-1}$$

Respuesta: La velocidad del móvil A es 20 m/s.

7. Una partícula se mueve con M.R.U en un plano x-y, con velocidad de 4 m/s. Sabiendo que el vector posición describe un área de 12 m^2 en cada segundo. Determinar la distancia mínima que se acerca al origen de coordenadas.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Toda partícula que tiene movimiento rectilíneo uniforme, recorre distancias iguales en tiempos iguales. “El vector posición describe áreas iguales en tiempos iguales”.



SEGUNDO PASO. La partícula recorre 4 m en cada segundo. El área que describe el vector posición, en cada segundo será:

$$Area = \frac{b.H}{2} \Rightarrow 12 = \frac{(4).H}{2} \Rightarrow H = 6 \text{ m}$$

Respuesta: la distancia mínima al origen de coordenada es 6 metros.

8. Un automóvil se dirige de una ciudad “A” a otra ciudad “B”, la mitad de su camino recorre con velocidad de 30 km/h y la otra mitad a 70 km/h en línea recta. Determinar la velocidad media del móvil entre A y B.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Sea, **M** el punto medio de del segmento AB, $AM = MB = L$

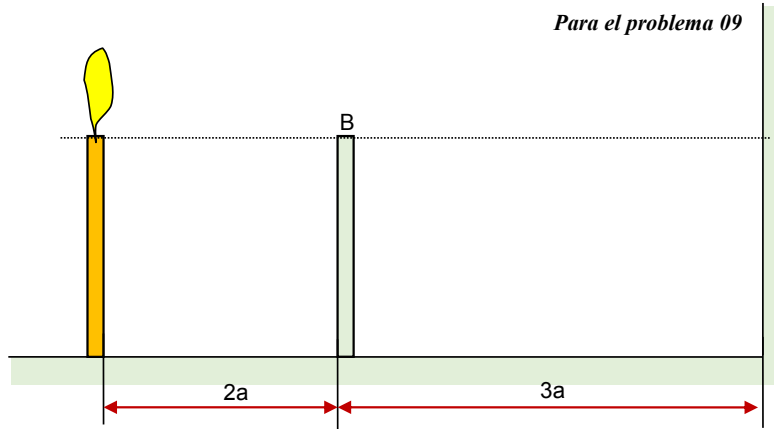
SEGUNDO PASO. La velocidad media es,

$$V_m = \frac{d_{TOTAL}}{t_{TOTAL}} = \frac{L + L}{t_1 + t_2} = \frac{2L}{\frac{L}{V_1} + \frac{L}{V_2}}$$

$$V_m = \frac{2.V_1.V_2}{V_1 + V_2} \Rightarrow V_m = \frac{2.(30).(70)}{30 + 70} = 42 \frac{km}{h}$$

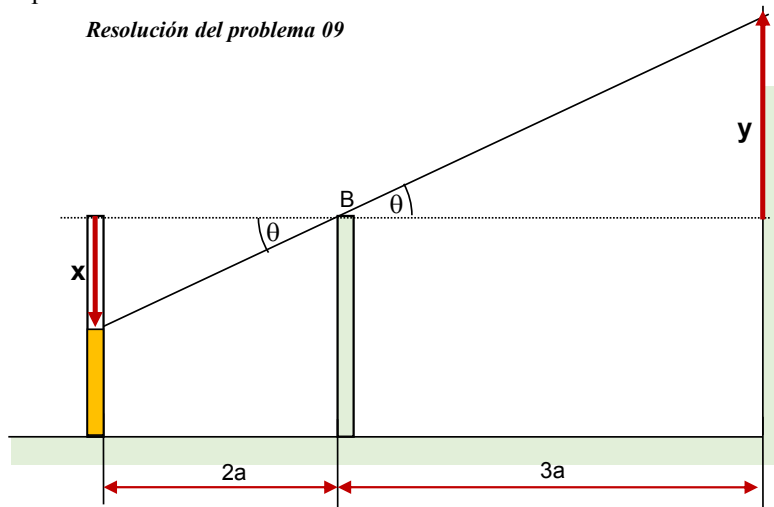
Respuesta: la velocidad media es 42 km/h.

9. La vela se consume uniformemente a la velocidad de 0,8 cm/s. ¿Con qué velocidad se desplaza el extremo de la sombra que se proyecta en la pared vertical debido al obstáculo B?



RESOLUCION

PRIMER PASO. Analizando el desplazamiento del extremo de la vela y el extremo de la sombra que se proyecta en la pared, donde “x” es el desplazamiento de la vela, “y” es el desplazamiento de la sombra en la pared.



SEGUNDO PASO. De la semejanza de triángulos, en la figura tenemos:

$$\frac{x}{2a} = \frac{y}{3a} \Rightarrow y = \left(\frac{3}{2}\right).x$$

dividiendo ente el tiempo transcurrido:

$$\frac{y}{\Delta t} = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{x}{\Delta t} \Rightarrow V_{SOMBRA} = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot V_{VELA}$$

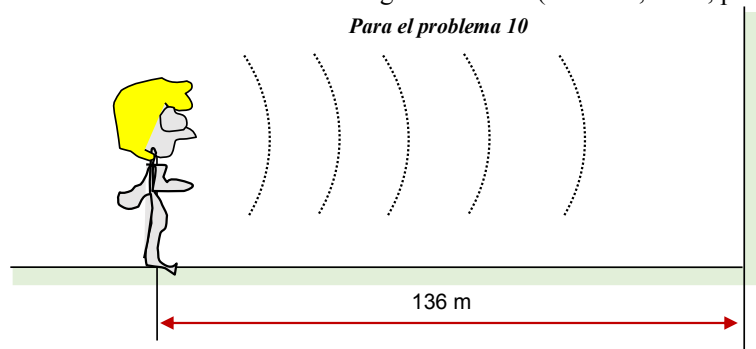
$$V_{SOMBRA} = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(0,8 \frac{cm}{s}\right) = 1,2 \frac{cm}{s}$$

Respuesta: La velocidad del extremo de la sombra es 1,2 cm/s.

10. Un niño situado a 136 m de una pared, emite un sonido hacia ella. La velocidad del sonido en el aire es 340 m/s. ¿Qué tiempo después escucha el eco?

RESOLUCION

PRIMER PASO. El eco es un fenómeno acústico. El sonido es una onda mecánica. El sonido necesita para propagarse un medio diferente al vacío. En el aire se propaga con una rapidez promedio de 340 m/s. El eco se produce cuando el observador percibe el mismo sonido por segunda vez por al rebote de la onda sonora en algún obstáculo (montaña, cerro, pared, muro, etc.).



SEGUNDO PASO. El sonido demora en llegar a la pared un tiempo $(t/2)$ y en regresar el mismo tiempo, recorriendo un camino total de 272 m.

$$d = V_{SONIDO} \cdot t \Rightarrow 272 m = (340 m.s^{-1}) \cdot t \Rightarrow t = 0,8 s$$

Respuesta: después de 0,8 segundo escucha el eco.

11. Un ciclista se dirige de una ciudad A hacia otra ciudad B en línea recta, dividiendo su trayectoria en tres partes iguales. El primer tercio de su camino lo recorre con rapidez de 60 km/h, el segundo tercio con 30 km/h y el último tercio con 20 km/h. Determinar la velocidad media del ciclista entre A y B.

PRIMER PASO. Sea, **M** y **N** los puntos intermedios del segmento AB, $AM = MN = NB = L$

SEGUNDO PASO. La velocidad media es,

$$V_m = \frac{d_{TOTAL}}{t_{TOTAL}} = \frac{L + L + L}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{3L}{\frac{L}{V_1} + \frac{L}{V_2} + \frac{L}{V_3}}$$

$$V_m = \frac{3}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3}} = \frac{3}{\frac{1}{60} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20}} = 30 \frac{km}{h}$$

Respuesta: la velocidad media es 30 km/h.

12. En una carrera de regularidad se quiere saber la velocidad media que se tuvo al recorrer una distancia de 50 km. El camino se dividió en dos tramos iguales, recorriendo cada tramo con velocidades iguales **3V** y **6V** respectivamente.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Sea, **M** el punto medio de del segmento AB, $AM = MB = L$

SEGUNDO PASO. La velocidad media es,

$$V_m = \frac{d_{TOTAL}}{t_{TOTAL}} = \frac{L + L}{t_1 + t_2} = \frac{2L}{\frac{L}{V_1} + \frac{L}{V_2}}$$

$$V_m = \frac{2.V_1.V_2}{V_1 + V_2} \Rightarrow V_m = \frac{2.(3V).(6V)}{3V + 6V} = 4V$$

Respuesta: la velocidad media es **4V**.

- 13.** Un auto viaja desde una ciudad **A** hasta otra **B** distante 2 km empleando 50 segundos. En uno de los viajes (de A hacia B) después de 20 segundos de haber iniciado su movimiento sufre un desperfecto que lo obliga a detenerse 15 segundos. ¿Cuál debe ser el módulo de la velocidad con que debe continuar el viaje para que llegue a B sin retraso?

RESOLUCION

PRIMER PASO. Cálculo de la velocidad normal del móvil.

$$V = \frac{d}{t} = \frac{2000m}{50s} = 40m.s^{-1}$$

SEGUNDO PASO. La distancia que avanza en 20 segundos es,

$$d_1 = V.t_1 = (40m.s^{-1}).(20s) = 800m$$

TERCER PASO. La distancia que le falta recorrer, 1200 metros, lo tendrá que hacer en 15 segundos, para llegar al punto B sin retraso.

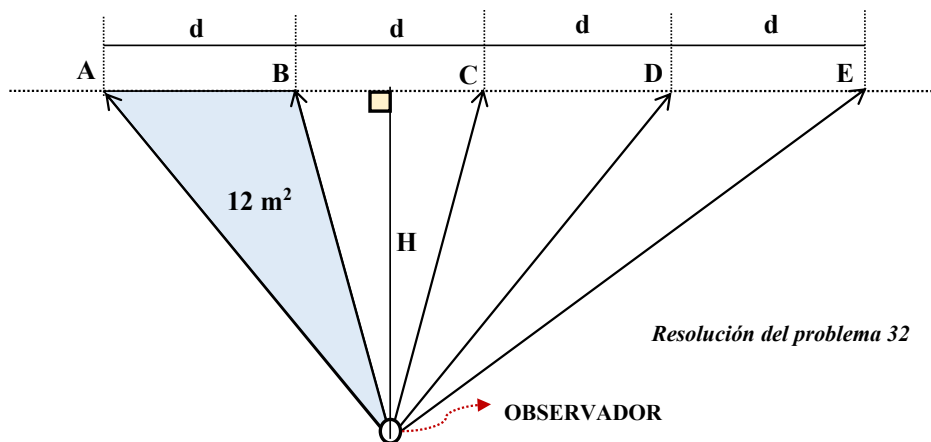
$$U = \frac{d_2}{t_2} = \frac{1200m}{15s} = 80m.s^{-1}$$

Respuesta: el auto continúa su viaje con velocidad de 80 m/s, duplicando su velocidad normal.

- 14.** Una partícula se mueve con M.R.U en un plano x-y, con velocidad de 3 m/s. Sabiendo que el vector posición describe un área de 6 m² en cada segundo. Determinar la distancia mínima que se acerca al origen de coordenadas.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Toda partícula que tiene movimiento rectilíneo uniforme, recorre distancias iguales en tiempos iguales. Ley de Kepler: “El vector posición describe áreas iguales en tiempos iguales”.



SEGUNDO PASO. La partícula recorre 3 m en cada segundo. El área que describe el vector posición, en cada segundo será:

$$Area = \frac{b.H}{2} \Rightarrow 6 = \frac{(3).H}{2} \Rightarrow H = 4m$$

Respuesta: la distancia mínima al origen de coordenada es 4 metros.

15. Si un móvil se mueve con una velocidad constante de 5 m/s y en el instante $t = 3s$ se halla en la posición $X = 25m$. Calcular su posición inicial ($t = 0s$)

RESOLUCION

PRIMER PASO. La posición de una partícula en el M.R.U está definido del siguiente modo:

$$X_F = X_0 + V.t$$

SEGUNDO PASO. Reemplazamos los datos para $t = 3s$:

$$25 = X_0 + (5).(3) \Rightarrow X_0 = 10m$$

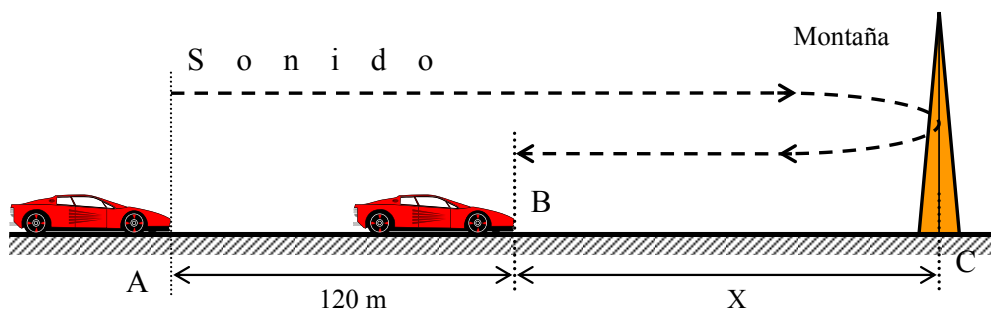
Respuesta: la posición inicial es $X_0 = 10m$

16. Un automóvil se mueve con velocidad constante de 54 km/h en línea recta dirigiéndose a una montaña, en cierto instante el chofer toca la bocina y 8 segundos después percibe el eco. La velocidad del sonido en el aire es 340 m/s. Calcular la distancia de separación entre al auto y la montaña, en el instante que el chofer tocó la bocina.

RESOLUCION

PRIMER PASO. El eco es un fenómeno acústico. El sonido en una onda mecánica. El sonido necesita para propagarse un medio diferente al vacío. En el aire se propaga con una rapidez promedio de 340 m/s. El eco se produce cuando el observador percibe el mismo sonido por segunda vez debido al rebote de la onda sonora en algún obstáculo (montaña, cerro, pared, muro, etc.).

SEGUNDOM PASO. En 8 segundos el automóvil con rapidez de 15 m/s avanza 120 metros, en el mismo tiempo el sonido saliendo de A va hacia la montaña y regresa hasta el punto B, la nueva posición del auto.



Para el auto (M.R.U.) desde A hasta B: $d = V.T$

Reemplazando los datos: $d_{AUTO} = (15m.s^{-1}).(8s) = 120m$

Para el sonido (M.R.U.): $e_{SONIDO} = V_{SONIDO}.T \Rightarrow (120 + X) + X = (340).(8)$

Resolviendo: $X = 1300m$

Respuesta: El chofer escucha el eco cuando el auto se encuentra a 1420 m de la montaña.

17. La velocidad del sonido en el aire es 340 m/s y la velocidad del sonido en el agua es 1250 m/s. ¿A qué distancia de la orilla y sobre la superficie del agua, estalla una bomba? Si la diferencia del tiempo empleado entre el sonido transmitido por el agua y por el aire es 45,5 segundos.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Sea “L” la distancia entre la orilla y el punto donde estalla la bomba. El tiempo transcurrido será:

$$t = \frac{d}{v} \Rightarrow t_{AIRE} = \frac{L}{340} \quad y \quad t_{AGUA} = \frac{L}{1250}$$

SEGUNDO PASO. De la condición del problema, la diferencia de tiempos es 45,5 segundos.

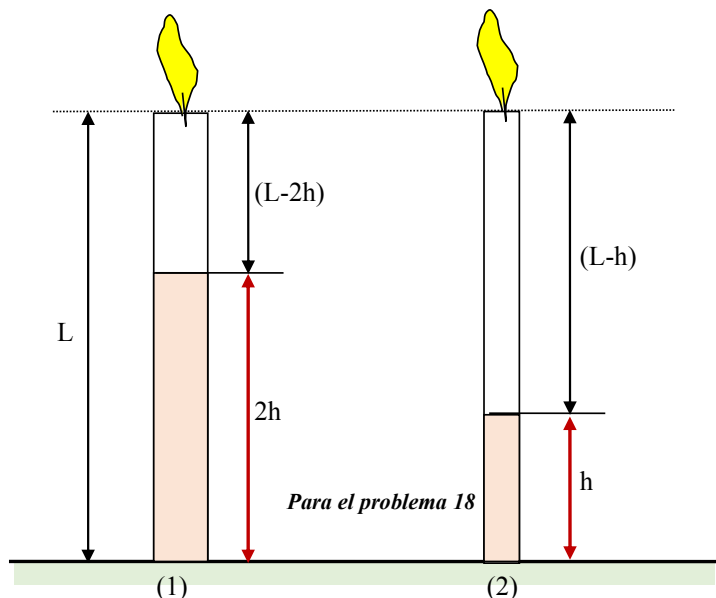
$$t_{AIRE} - t_{AGUA} = 45,5$$

$$\frac{L}{340} - \frac{L}{1250} = 45,5 \Rightarrow L = 21250m$$

Respuesta. La distancia entre la orilla y el punto de explosión de la bomba es 21,250 km.

18. Se tienen dos velas iguales (1) y (2) de tamaños iguales, las cuates tienen una duración de $T_1 = 4 \text{ horas}$ y $T_2 = 3 \text{ horas}$, emitiendo energía luminosa. Si las velas empiezan a emitir luz al mismo instante, ¿Después de cuánto tiempo el tamaño de uno es el doble que el otro?

RESOLUCION



PRIMER PASO. Consideremos las velas de longitud inicial “L”. La velocidad de consumo de las velas es:

$$V_1 = \frac{L}{T_1} = \frac{L}{4} \quad y \quad V_2 = \frac{L}{T_2} = \frac{L}{3} \quad \dots (1)$$

SEGUNDO PASO. Después de un tiempo “T”, consideremos las alturas “2h” y “h”.

$$d = v.t \Rightarrow \text{Vela [1]}: (L - 2h) = \left(\frac{L}{4}\right).T \quad \dots (2)$$

$$d = v \cdot t \Rightarrow \text{Vela [2]: } (L - h) = \left(\frac{L}{3}\right) \cdot T \quad \dots (3)$$

Dividiendo (2) entre (3):

$$\frac{(L - 2h)}{(L - h)} = \frac{3}{4} \Rightarrow h = \frac{L}{5}$$

Reemplazando en (3): $T = 2,4 \text{ horas}$

Respuesta. Ocurre después de 2,4 horas.

19. Un camino se puede recorrer en 16 horas con cierta velocidad en km/h y se puede recorrer en 6 horas menos aumentando su rapidez en 6 km/h. ¿Cuál es el largo del camino?

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Sea V la velocidad del móvil. El largo del camino es el mismo.

$$d = v \cdot t \Rightarrow d = (V_1) \cdot (t_1) = (V_2) \cdot (t_2)$$

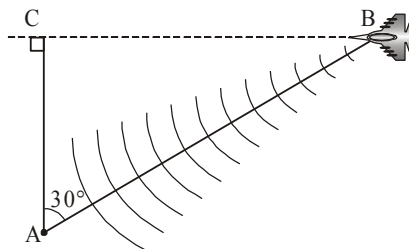
$$d = (V) \cdot (16) = (V + 6) \cdot (16 - 6) \Rightarrow V = 10 \frac{km}{h}$$

SEGUNDO PASO. El largo del camino será:

$$d = (V) \cdot (16) \Rightarrow d = \left(10 \frac{km}{h}\right) \cdot (16h) = 160 km$$

Respuesta: el largo del camino es 160 kilómetros.

20. El ruido del motor del avión emitido en la posición B es escuchado por un hombre en A cuando el avión pasa por C con velocidad constante. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, determine la rapidez del avión (en m/s).



Resolución

En el triángulo ACB recto en C, el avión recorre $BC=L$ metros mientras que el sonido recorre $AB=2L$ metros en el mismo intervalo de tiempo, por consiguiente, la rapidez del avión es la mitad de la rapidez de sonido.

$$t = \frac{L_{\text{sonido}}}{V_{\text{sonido}}} = \frac{L_{\text{avion}}}{V_{\text{avion}}}$$

Reemplazando los valores: $\frac{2L}{340} = \frac{L}{V_{\text{avion}}}$

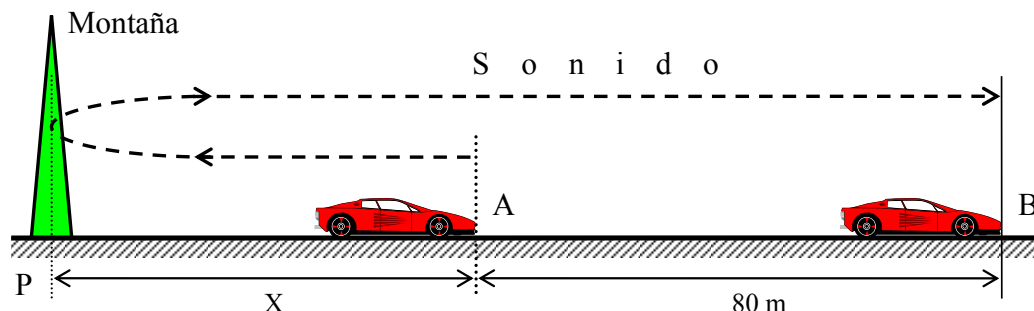
Resolviendo obtenemos que: $V_{\text{avion}} = 170 \text{ m/s}$

Respuesta: La rapidez del avión es 170 m/s.

21. Un auto que tiene M.R.U., se mueve alejándose de una montaña con rapidez constante de 20 m/s, en cierto instante de la montaña el chofer toca la bocina y escucha el eco luego de 4 segundos. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, ¿A qué distancia de la montaña tocó la bocina?

Resolución

En 4 segundos el automóvil con rapidez de 20 m/s avanza 80 metros, en el mismo tiempo el sonido saliendo de A va hacia la montaña en P y regresa hasta el punto B, la nueva posición del auto.



Para el auto (M.R.U.) desde A hasta B: $d = V \cdot T$

Reemplazando los datos: $d_{\text{AUTO}} = 20 \cdot 4 = 80 \text{ m}$

Para el sonido (M.R.U.): $e_{\text{SONIDO}} = V_{\text{SONIDO}} \cdot T \Rightarrow X + (X + 80) = 340 \cdot 4$

Resolviendo: $X = 640 \text{ m}$

Respuesta: El chofer tocó la bocina cuando el auto se encontraba a 640 de la montaña.

22. Una persona debe llegar a un determinado lugar a las 12 horas y observa que caminando a razón de 3 km/h llega 5 horas después y caminando a 6 km/h llega 5 horas antes. ¿Con qué velocidad debe caminar para llegar a las 12:00 horas?

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. El largo del camino es el mismo en los tres casos. Sea T el tiempo que invierte para llegar a su destino.

$$d = v \cdot t \Rightarrow d = (3) \cdot (T + 5) = (6) \cdot (T - 5)$$

Resolviendo: $T = 15 \text{ h}$

SEGUNDO PASO. Entonces el largo del camino es:

$$d = v \cdot t \Rightarrow d = (3) \cdot (15 + 5) = 60 \text{ km}$$

TERCER PASO. Cálculo de la velocidad:

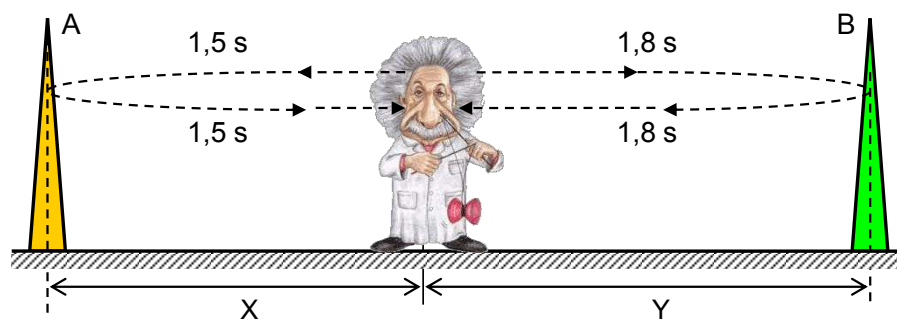
$$V = \frac{d}{T} = \frac{60 \text{ km}}{15 \text{ h}} = 4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Respuesta: el valor de la velocidad es 4 km/h

23. Una persona ubicada entre dos montañas, en cierto instante emite un grito y percibe el primer eco a los 3,0 segundos y a los 3,6 segundos correspondiente a la otra montaña. Sabiendo que la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, determinar la distancia entre las montañas.

Resolución

Teniendo en cuenta el fenómeno del ECO, deducimos el sonido demora en llegar a la montaña A 1,5 segundos y 1,8 segundos a la montaña B.



Montaña A: $d = V_{\text{SONIDO}} \cdot T \Rightarrow X = 340 \times 1,5 = 510 \text{ m}$

Montaña B: $d = V_{\text{SONIDO}} \cdot T \Rightarrow Y = 340 \times 1,8 = 612 \text{ m}$

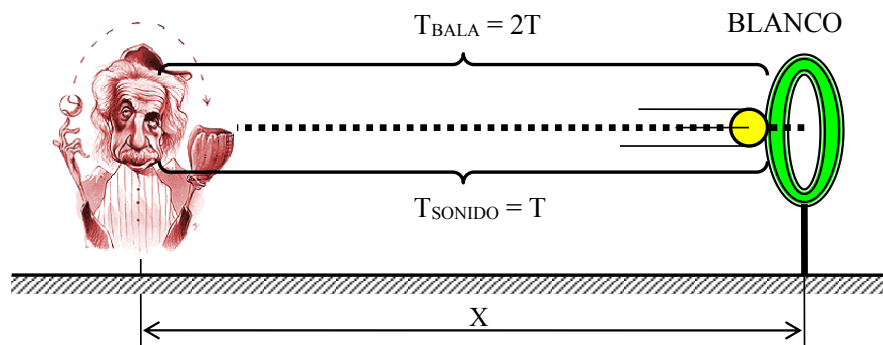
La distancia entre las montañas es: $D = (X + Y) = 1\,122 \text{ m}$

Respuesta: La distancia de separación entre las montañas es 1,122 km.

24. Un hombre dispara una bala en dirección horizontal con rapidez 170 m/s, contra un blanco y escucha el impacto luego de 3 segundos. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, ¿A qué distancia del hombre se encuentra el blanco?

Resolución

El tiempo transcurrido para el observador es igual a la suma del tiempo empleado por el proyectil en llegar al blanco, más el tiempo que demora el sonido en propagarse desde el blanco hasta la posición fija del observador. La velocidad de la bala es la mitad de la velocidad del sonido, por consiguiente, la relación de los tiempos está en relación inversa. La misma distancia la bala recorre el doble de tiempo que el sonido.



Veamos la ecuación temporal: $T_{\text{BALA}} + T_{\text{SONIDO}} = 3 \text{ s} \Rightarrow 2T + T = 3$

Resolviendo la ecuación: $T = 1,0 \text{ segundo}$.

La distancia de separación es: $X = V_{\text{SONIDO}} \cdot T \Rightarrow X = 340 \cdot 1,0 = 340 \text{ m}$

Respuesta: El hombre y el blanco están separados 340 m.

25. Dos autos que parten simultáneamente de una ciudad A en dirección a la ciudad B, con rapidez de 50 km/h y 60 km/h. Si llegan a la ciudad B con un intervalo de 20 minutos, ¿cuál es la distancia entre las ciudades A y B?

Resolución

La distancia que recorren ambos móviles son iguales, entonces la velocidad y el tiempo empleado son inversamente proporcionales.

$$d_1 = d_2 \Rightarrow V_1.T_1 = V_2.T_2$$

Sabemos que 20 minutos es un tercio de hora.

$$\text{Reemplazando tenemos que: } 50.T = 60.\left[T - \frac{1}{3}\right]$$

Resolviendo: $T = 2$ horas

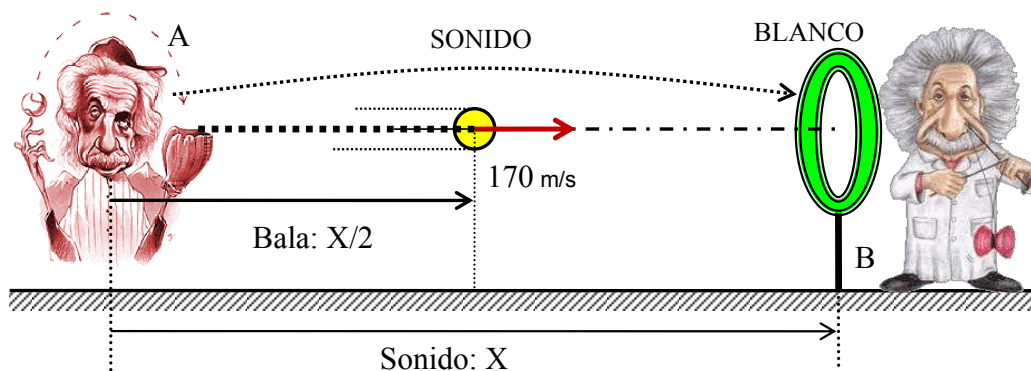
$$\text{La distancia entre A y B es: } d_{AB} = \left(50 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right).(2 \text{ h}) = 100 \text{ km}$$

Respuesta: La distancia entre las ciudades A y B es 100 km.

26. Dos personas A y B están separadas una distancia X. En cierto instante la persona A dispara una bala horizontalmente con rapidez de 170 m/s, en dirección del blanco que se encuentra junto a la persona B. Sabiendo que B escucha el disparo y 3,0 segundos después percibe el impacto con el blanco. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, determine el valor de X en metros.

Resolución

La velocidad del proyectil es la mitad de la velocidad del sonido, por consiguiente, cuando el sonido llega a B junto al blanco, el proyectil habrá recorrido la mitad de X. Entonces en 3,0 segundos recorre la otra mitad de X.



$$\text{Para el proyectil: } d = V_{BALA}.T \Rightarrow \frac{X}{2} = (170).(3)$$

Resolviendo: $X = 1\,020$ metros.

Respuesta: Las personas A y B están separados 1 020 metros.

27. Una persona sale del punto A en un auto a una velocidad de 12 km/h, llega al punto B y desea regresar caminando a 4 km/h (siguiendo el mismo camino). Si todo el recorrido demoró 6 horas, ¿durante cuánto tiempo estuvo caminado?

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. El largo del camino es el mismo.

$$d = v \cdot t \Rightarrow d = (V_1).(t_1) = (V_2).(t_2)$$

$$d = (12).(t_1) = (4).(t_2) \Rightarrow t_2 = 3.t_1 \dots (1)$$

SEGUNDO PASO. El tiempo total transcurrido es,

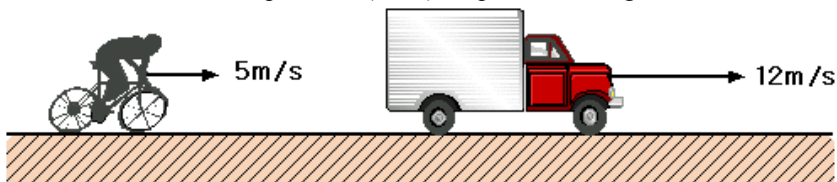
$$t_1 + t_2 = 6 \text{ h} \quad \dots (2)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2):

$$t_1 = 1,5 \text{ h} \quad \text{y} \quad t_2 = 4,5 \text{ h}$$

Respuesta. Estuvo caminando 4,5 horas.

28. Se muestra un ciclista y un camión se mueven con velocidad constante. Si inicialmente están juntos, determine la distancia de separación (en m) después de 20 segundos



Resolución

En cada segundo el camión avanza 12 m y el ciclista 5 m, por consiguiente, en cada segundo se separan en $12 - 5 = 7 \text{ m}$. La separación luego de 20 segundos será: 7 veces $20 = 140 \text{ m}$.

$$d = V_{\text{relativa}} \cdot t = (12 - 5) \cdot (20) = 140 \text{ m}$$

Respuesta: En 20 segundos se separan en 140 metros.

29. Un piloto de MIG-29 prepara su nave para cumplir una misión aérea, después de 20 minutos en el aire logra recorrer 24 km en 0,5 minuto. Determine el valor de la velocidad en este tramo (en m/s):

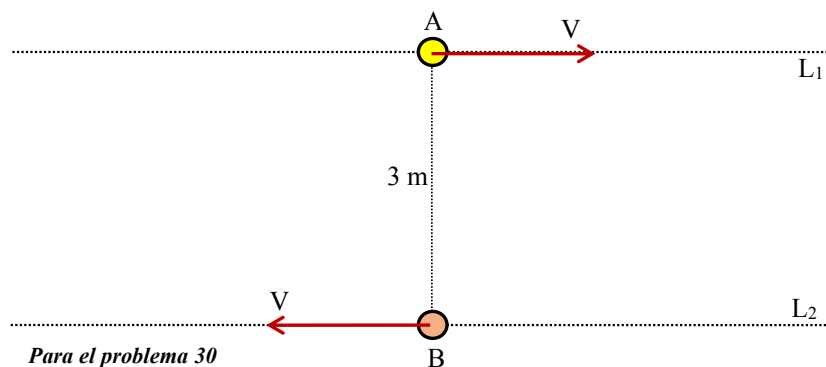
Resolución

Después de 20 minutos el avión alcanza un movimiento uniforme, recorriendo 24 000 metros en 30 segundos. La rapidez en este último tramo es:

$$V = \frac{d}{t} = \frac{24\,000 \text{ m}}{30 \text{ s}} = 800 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Respuesta: la rapidez en último tramo es 800 m/s

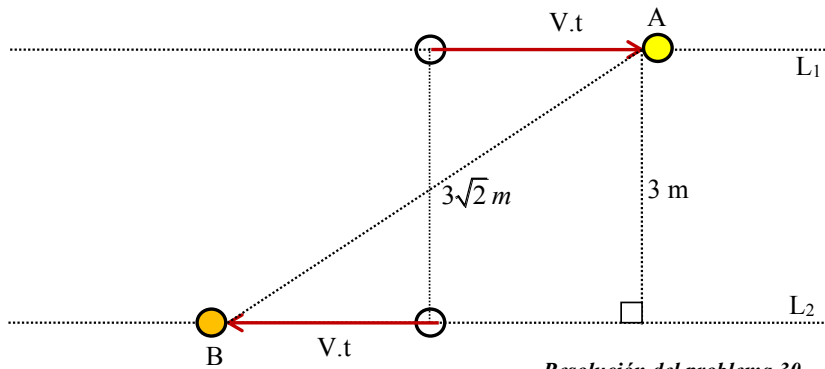
30. Dos móviles A y B se mueven en sentidos contrarios sobre rectas paralelas L_1 y L_2 separados entre sí una distancia de 3 m. Si después de 1,5 segundos del instante que se muestra, la distancia de separación entre móviles es $3\sqrt{2} \text{ m}$. Cada uno de los móviles se mueven con la misma rapidez. ¿Después de que tiempo la distancia de separación es 5 metros?



RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama donde se muestra el desplazamiento de las partículas A y B.

$$\text{Horizontal} : 2.V.t = 3 \Rightarrow t = 1,5s \Rightarrow V = 1 \text{ m.s}^{-1}$$



Resolución del problema 30

SEGUNDO PASO. La distancia de separación será 5 m, cuando la suma de sus desplazamientos en la horizontal sea 4 metros.

$$\text{Horizontal} : 2.V.t_1 = 4 \Rightarrow 2.(1).t_1 = 4 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

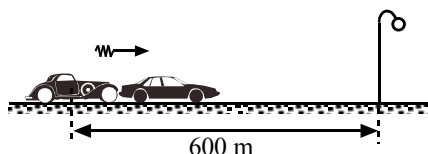
Respuesta: después de 2 segundos.

PROBLEMAS PROPUESTOS DE MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

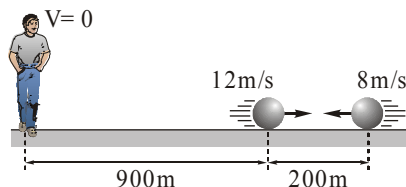
1. Un piloto de MIG-29 prepara su nave para cumplir una misión aérea, después de 20 minutos en el aire logra recorrer 24 km en 0,5 minuto. Determine el valor de la velocidad en este tramo (en m/s):
A) 8 B) 80 C) 800 D) 160 E) N.A.
2. Una persona conduce su auto con M.R.U. a razón de 60 km/h, se le baja una llanta y emplea 20 minutos en cambiarla, si le faltan 120 km para llegar a su destino, entonces la rapidez constante (en km/h) que debe emplear para llegar a su destino en el tiempo predeterminado es:
A) 65 B) 72 C) 80 D) 96 E) 100
3. Un tren de 200 m de largo se mueve en línea recta con rapidez constante. Si demora en pasar frente al poste 8 s y en atravesar el túnel 24 s. Determine el largo del túnel.



- A) 100 m B) 200 m C) 400 m D) 500 m E) 600 m
4. Dos móviles A y B salen del mismo punto con rapidez constante de 20 m/s y 40 m/s. ¿Después de cuántos segundos equidistan del poste?

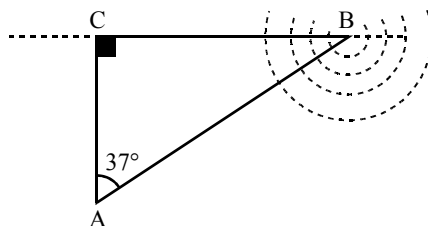


- A) 10 s B) 15 s C) 20 s D) 25 s E) 30 s
5. Se muestra dos esferas en movimiento. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s. A partir del instante mostrado, ¿después de qué intervalo de tiempo el hombre escuchará el sonido del choque entre las esferas?



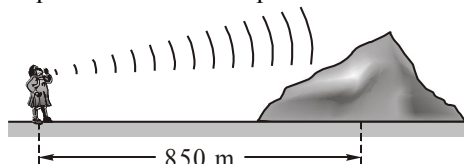
- A) 10 s B) 3 s C) 13 s D) 14 s E) 16 s
6. Una lancha patrullera de vigilancia está a 60 km de otra de la que se sospecha lleva contrabando. La primera inicia su persecución a 50 km/h, la otra lancha que estaba parada se percata, 20 minutos después, de que van en su busca y emprende la huida en la misma dirección y sentido de su perseguidora con velocidad de 30 km/h. ¿Qué distancia avanza la lancha hasta el instante de ser alcanzada por la lancha patrullera?
A) 100 m B) 125 m C) 150 m D) 180 m E) ninguna anterior

7. El ruido del motor del avión emito en la posición B escucha un hombre en A cuando el avión pasa por C con velocidad constante. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, determine la rapidez del avión (en m/s).



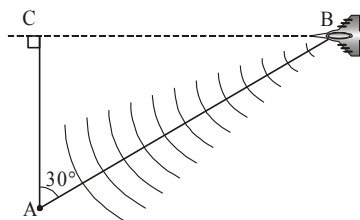
- A) 204,6 B) 220 C) 240 D) 260 E) 280

8. Un hombre que se encuentra frente a una montaña emite un grito. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, ¿después de qué intervalo de tiempo escuchará el eco?



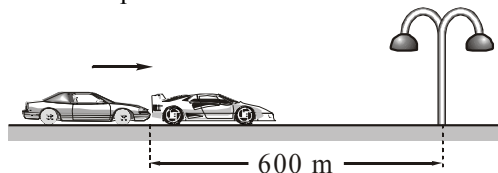
- A) 5 s B) 2,5 s C) 3 s D) 4 s E) 6 s

9. El ruido del motor del avión emito en la posición B escucha un hombre en A cuando el avión pasa por C con velocidad constante. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, determine la rapidez del avión (en m/s).



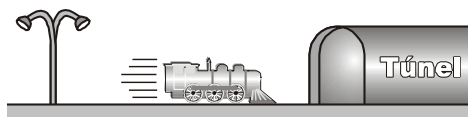
- A) 170 B) 220 C) 240 D) 260 E) 280

10. Dos móviles A y B salen del mismo punto con rapidez constante de 70 m/s y 50 m/s. ¿Después de cuántos segundos equidistan del poste?



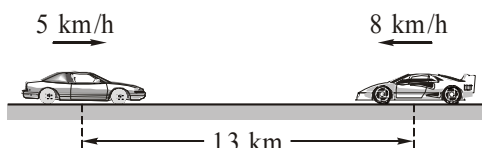
- A) 10 s B) 15 s C) 20 s D) 25 s E) 30 s

11. Un tren de 150 m de largo se mueve en línea recta con rapidez constante. Si demora en pasar frente al poste 5 s y en atravesar el túnel 25 s. Determine el largo del túnel.



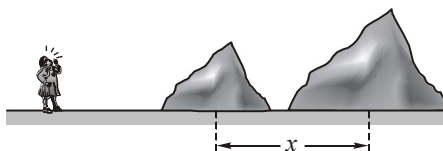
- A) 100 m B) 200 m C) 400 m D) 500 m E) 600 m

12. Se muestra la posición inicial de los móviles que tienen velocidad constante. ¿Qué distancia estarán se parados después de 3 horas?



- A) 13 km B) 26 km C) 15 km D) 39 km E) 6,5 km

13. Un hombre se encuentra frente a dos montañas, en cierto instante emite un grito y después de 2 segundos escucha el primer eco y el otro, correspondiente a la otra montaña, en 5 segundos. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, determine la distancia de separación entre las montañas.



- A) 100 m B) 210 m C) 410 m D) 510 m E) 850 m

14. Dos móviles están separados por una distancia de 2 300 metros. Si se desplazan al encuentro con rapidez de 60 m/s y 40 m/s respectivamente. ¿Al cabo de qué intervalo de tiempo estarán separados 1 300 m por primera vez?

- a) 12 s b) 8 s c) 10 s d) 15 s e) 13 s

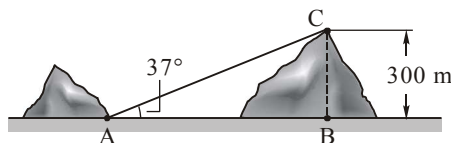
15. Un tren demora 8 segundos en pasar delante de un semáforo y el triple de tiempo en cruzar un puente de 400 m de largo. ¿Cuál es su longitud?

- a) 200 m b) 180 m c) 160 m d) 280 m e) 400 m

16. La rapidez de un bote de ida es 20 km/h; cuando va de regreso (contra la corriente), logra una rapidez de 15 km/h. Hallar el recorrido si va de Iquitos a Nauta; sabiendo que además de ida demora 5 horas menos que de regreso.

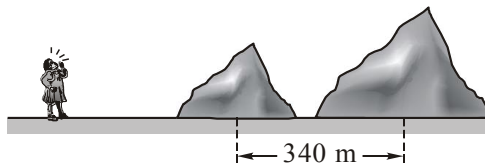
- A) 500 km B) 150 km C) 225 km D) 300 km E) N.A.

17. Se produce una explosión en la posición A. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, determine la diferencia de intervalos de tiempo que demoran en llegar la repercusión a los puntos C y B.



- A) 0,5 s B) 2,5 s C) 0,3 s D) 0,4 s E) 0,6 s

18. Un auto que tiene M.R.U. posee velocidad 90 km/h , ¿qué distancia recorre en 25 segundos?
A) 625 m B) 630 m C) 675 m D) 695 m E) 900 m
19. Dos móviles están separados 550 m, sobre el eje X, si inician su movimiento simultáneamente velocidades 5 m/s y -7 m/s . ¿Qué tiempo transcurren para que estén separados 170 m por segunda vez?
A) 75 s B) 60 s C) 75 s D) 95 s E) 90 s
20. Un bus que tiene M.R.U. pasa por delante de un semáforo en 4 segundos y por delante de una estación de 16 m de largo en 10 segundos. Determine la rapidez del bus.
A) 6 m/s B) 5 m/s C) 4 m/s D) 3 m/s E) 2 m/s
21. Un auto que tiene M.R.U. recorre 200 m en " t " segundos y 1,6 km en $(2t + 24)$ segundos. Determinar la rapidez del móvil.
A) 60 m/s B) 50 m/s C) 40 m/s D) 30 m/s E) 20 m/s
22. Un hombre se encuentra frente a dos montañas, en cierto instante emite un grito. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, determine la diferencia de los intervalos de tiempo en escuchar los ecos.



- A) 1 s B) 1,5 s C) 2 s D) 2,5 s E) 3 s
23. Dos autos que parten simultáneamente de una ciudad A en dirección a la ciudad B, con rapidez de 50 km/h y 60 km/h. Si llegan a la ciudad B con un intervalo de 20 minutos, ¿cuál es la distancia entre las ciudades A y B?
A) 20 km B) 40 km C) 60 km D) 80 km E) 100 km
24. Un camión de 40 m de largo, marcha a 72 km/h por una carretera paralela a la vía del tren. ¿Cuánto tiempo invertirá el camión en pasar íntegramente a un tren de 260 metros de largo que marcha a 36 km/h en la misma dirección?
A) 10 s B) 20 s C) 25 s D) 30 s E) 40 s
25. Dos móviles A y B participan de una competencia de ida y vuelta, en una pista de 120 m de largo. Si parten simultáneamente con rapidez de 6 m/s y 10 m/s, ¿después de cuánto tiempo vuelven a encontrarse?
A) 10 s B) 12 s C) 13 s D) 14 s E) 15 s

26. Se golpea una barra de hierro de longitud L y el sonido llega al otro extremo tanto por el aire como por la barra, con una diferencia de 7 segundos, ¿cuántos segundos aproximadamente tarda el sonido en llegar por la barra de hierro?
Considere la rapidez del sonido en el aire 340 m/s y en el hierro 5179 m/s .
A) 0,5 s B) 1 s C) 1,5 s D) 2 s E) 2,5 s
27. Una persona se encuentra frente a una pared, hace un disparo y después de 2 s escucha el impacto; pero si hubiera estado a 102 m más cerca de la pared, ¿después de qué tiempo escucharía el impacto? Considere la rapidez del proyectil 85 m/s y del sonido 340 m/s .
A) 0,2 s B) 0,5 s C) 10,4 s D) 0,8 s E) 0,9 s
28. Un tren de 50 m de largo viaja con velocidad de 20 m/s y se dispone a cruzar un puente, en preciso instante en que una persona dentro de éste empieza a caminar con velocidad de $1,0 \text{ m/s}$ respecto del tren, desde el extremo posterior llegando al otro extremo justo cuando el tren cruza todo el puente. ¿Cuánto mide el largo del tren?
A) 450 m B) 900 m C) 500 m D) 950 m E) 800 m
29. Dos trenes parten de Lima a Chorrillos con un intervalo de 10 minutos y con velocidades constantes de 30 km/h . En una vía paralela y hacia Lima viene otro tren que se cruza con los dos primero en un intervalo de 4 minutos. ¿Qué rapidez constante tiene el tren que viene de Chorrillos a Lima?
A) 20 km/h B) 30 km/h C) 35 km/h D) 45 km/h E) 60 km/h
30. Juan Diego está bajo una tormenta, en cierto instante ve un relámpago y 5 segundos después oye el trueno. ¿A qué distancia cayó el rayo?
Rapidez del sonido en el aire = 330 m/s
A) 1 450 m B) 1 900 m C) 1 500 m D) 1 650 m E) 1 800 m
31. Un auto se desplaza con M.R.U. en forma paralela a un muro extenso. Si en el instante en que dista 150 m del muro toca la bocina percibiendo el eco 1 segundo después. Determine la rapidez de auto. Rapidez del sonido en el aire = 340 m/s
A) 160 m/s B) 200 m/s C) 80 m/s D) 120 m/s E) 60 m/s
32. Una columna de soldados de 33,5 m de longitud marcha con M.R.U. a paso ligero en dirección a una pared. Cuando el primer soldado emite una orden, percibe el eco 0,1 segundos antes que el último soldado. Determinar la rapidez de la columna. Rapidez del sonido en el aire = 330 m/s
A) 1,5 m/s B) 2 m/s C) 2,5 m/s D) 4 m/s E) 5 m/s
33. Dos lanchas a motor se desplazan con M.R.U. en un lago tranquilo por trayectorias rectilíneas perpendiculares entre si. Si en “ t ” segundos se cruzan rozándose y la suma de sus recorridos es 320 m, determine la distancia de separación al inicio. Sus rapidez son 15 m/s y 8 m/s .
A) 150 m/s B) 1 200 m/s C) 170 m/s D) 280 m/s E) 360 m/s

34. Un móvil se traslada de una localidad a otra separada 20 km siguiendo una trayectoria rectilínea, si en el camino de ida posee una rapidez constante de 40 km/h y en el de regreso una rapidez constante de 50 km/h, determine la velocidad promedio en todo el recorrido.
A) 44, 4 km/h B) 50, 5 km/h C) 30 km/h D) 25 km/h E) 36, 8 km/h
35. Determinar el intervalo de tiempo en el cual un auto que se mueve a lo largo de un trayecto recto recorre una distancia de 550 km, si su rapidez es constante e igual a 1000 m/s.
A) 450s B) 385s C) 550s D) 400s E) 200s
36. Determinar el recorrido máximo de un avión, si este tiene un tanque de combustible de 160 litros y su consumo (gasto) es de 40 litros/hora. El avión sigue una trayectoria rectilínea y su rapidez es de 240 km/h.
A) 960 km B) 834 km C) 1020 km D) 980 km E) 885 km
37. Determine el intervalo de tiempo que le lleva a un tren de 200 m de longitud atravesar completamente un túnel de 1600 m de largo. El tren se mueve sobre una vía recta y viaja con rapidez de 15 m/s.
A) 120 s B) 150s C) 80s D) 110s E) 100s
38. Un tren y un auto viajan por vías rectas paralelas en el mismo sentido, el auto viaja con una velocidad de 100 km/h y el tren con velocidad de 60 km/h. Si la longitud del tren es de 400 m, determine el intervalo de tiempo que le lleva al auto rebasar al tren.
A) 40s B) 50s C) 70s D) 45s E) 36s
39. Dos trenes que se mueven en vías paralelas y sentidos opuestos viajan con velocidades de 36 km/h y 54 km/h. Un pasajero del tren más lento (que mantiene su posición en todo momento), percibe que el otro tren pasa completamente en 6 s. Determine el largo del tren más rápido.
A) 120m B) 125m C) 180m D) 150m E) 130m
40. Una persona se mueve en trayectoria recta hacia una pared con una rapidez de 5 m/s, en ese instante emite un grito y luego de recorrer 10 m hacia la pared, escucha el eco. Si la rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s, determine la distancia que lo separaba inicialmente de la pared.
A) 485m B) 280m C) 345m D) 420m E) 350m
41. Un corredor viaja entre dos puntos en línea recta, si su rapidez es de 12 km/h llega a destino a la hora T y si su rapidez es de 18 km/h llega una hora antes. Determine la rapidez que tiene cuando llega una hora después en km/h.
A) 12 B) 18 C) 9 D) 10 E) 8
42. Una persona toma un taxi que viaja a 36 km/h hasta cierto punto, luego para regresar al punto de partida decide caminar con una rapidez de 4 km/h. Si el trayecto siempre fue recto, determine el tiempo que camina si en total tardó 10 horas en regresar al punto de partida.
A) 6h B) 9h C) 12h D) 10h E) 7h

43. Dos autos parten simultáneamente de una ciudad A hacia otra B, con velocidades de 50 y 60 km/h. Determine la distancia que separa estas dos ciudades si el más rápido llega con 20 min de ventaja sobre el más lento.
A) 200 km B) 150 km C) 180 km D) 120 km E) 100 km
44. Una partícula que tiene M.R.U el vector posición describe un área de 16 m^2 en cada segundo respecto del origen de coordenadas. Determine la distancia mínima ente la partícula y el origen de coordenadas durante el movimiento.
A) 2 m B) 4 m C) 6 m D) 8 m E) 10 m
45. Nos encontramos en una batalla naval, en un buque situado entre el enemigo y los acantilados de la costa. A los 3 segundos de ver el fogonazo oímos el disparo del cañón, y a los 11 segundos del fogonazo percibimos el eco. Calcular la distancia a que están de nosotros el enemigo y la costa. Rapidez del sonido en el aire es 340 m/s.
A) 1 420 m; 231 m B) 264,8 m; 102 m C) 1 360 m; 217,6 m
D) 1 020 m; 1 360 m E) 1 360 m; 1 020 m
46. Un hombre se encuentra a 3,4 km de una montaña, en cierto instante grita. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, ¿después de cuántos segundos escucha el eco?
A) 10 B) 20 C) 30 D) 5 E) 50
47. Un auto que viaja con M.R.U. a razón de 180 km/h en dirección un gran muro vertical, cuando la distancia de separación es 1,7 km el chofer toca la bocina. Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s, ¿después de cuantos segundos escuchara el eco proveniente del muro?
A) 10,6 B) 13,6 C) 8,7 D) 16,6 E) 2,6
48. Sabiendo que la estrella α -Centauro (la más próxima a nosotros después del Sol) se encuentra de la Tierra a $4,04 \times 10^{16}$ km, calcular el intervalo de tiempo que tarda la luz de α -Centauro en llegar a la Tierra. La rapidez de la luz en el vacío = 300 000 km/s.
A) $2,35 \times 10^8$ s B) $1,35 \times 10^8$ s C) $2,35 \times 10^6$ s D) $1,35 \times 10^3$ s E) $1,35 \times 10^9$ s
49. Un tren con M.R.U. pasa por delante de un poste de luz en 10 s y atraviesa íntegramente un túnel en 15 s. ¿En cuánto tiempo (en s) el tren cruzará otro túnel si el tamaño de este fuera el triple del primer túnel?
A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

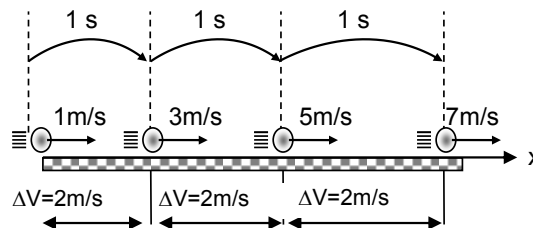
M.R.U.V



MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

1. CONCEPTO:

Es aquel movimiento donde el móvil describe una línea recta y además en intervalos de tiempo iguales los cambios de velocidad son iguales y las distancias recorridas son diferentes.



GOTA 1. Tiene aceleración constante, diferente de cero.

GOTA 2. Los cambios de velocidad son iguales en tiempos iguales.

GOTA 3. La trayectoria o camino de la partícula es una línea recta.

GOTA 4. El móvil recorre distancias diferentes en tiempos iguales.

GOTA 5. La aceleración centrípeta es nula.

GOTA 6. Su trayectoria tiene radio de curvatura infinita.

2. ACCELERACIÓN LINEAL O TANGENCIAL.

La aceleración lineal mide la rapidez de cambio de la velocidad en módulo.

En el M.R.U.V. la aceleración lineal es constante y diferente de cero, es decir no cambia la dirección ni el módulo de la aceleración.

Unidad de la aceleración en el S.I.: m/s^2 o m.s^{-2}

$$a = \frac{\Delta V}{t} \quad \dots (1)$$

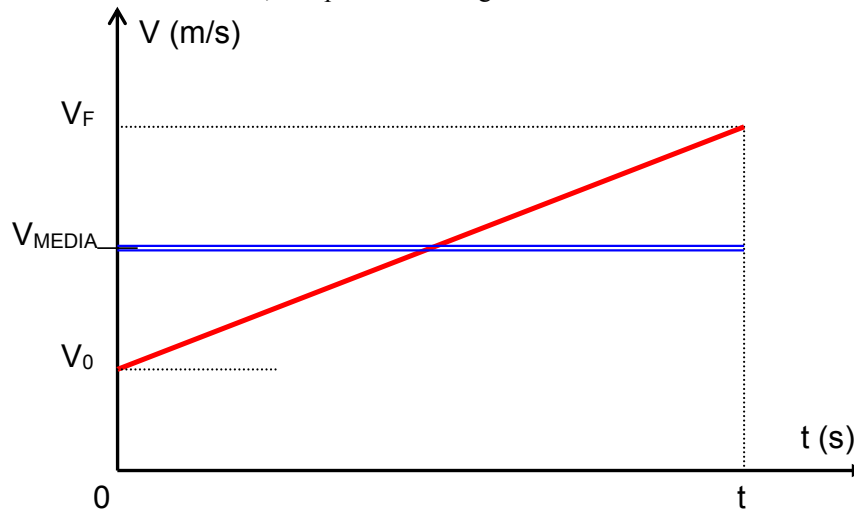
$$a = \frac{V_F - V_0}{t} \quad \dots (2)$$

$$V_F = V_0 + a.t \quad \dots (3)$$

3. VELOCIDAD MEDIA EN EL M.R.U.V.

Dado que **la velocidad varía linealmente**, la velocidad media es igual a la semisuma de las velocidades inicial y final en cierto intervalo de tiempo.

La **velocidad media**, es una velocidad constante en intervalo de tiempo “t” donde el móvil recorre una distancia “d”, cumpliéndose la siguiente ecuación:



$$d = V_m \cdot t \quad \dots (4)$$

$$d = \frac{(V_0 + V_F)}{2} \cdot t \quad \dots (5)$$

Reemplazando (3) en (5):

$$d = \frac{(V_0 + V_F)}{2} \cdot t \Rightarrow d = \frac{(V_0 + V_0 + a.t)}{2} \cdot t$$

$$\text{Obtenemos: } d = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a.t^2 \quad \dots (6)$$

$$\text{De (2): } V_F - V_0 = a.t \quad \dots (7)$$

$$\text{De (5): } V_F + V_0 = \frac{2d}{t} \quad \dots (8)$$

$$\text{Multiplicado miembro a miembro (7) y (8): } V_F^2 - V_0^2 = 2ad$$

$$\text{Despejando tenemos que: } V_F^2 = V_0^2 + 2ad \quad \dots (9)$$

$$\text{De (3): } V_F = V_0 + a.t \quad \dots (10)$$

Reemplazando (10) en (9)

$$d = \frac{(V_0 + V_F)}{2} \cdot t \Rightarrow d = \frac{(V_0 + a.t + V_0)}{2} \cdot t$$

Obtenemos: $d = V_F \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$

4. RESUMEN DE ECUACIONES DEL MOVIMIENTO.

Cuando aumenta la velocidad Acelera	Cuando disminuye la velocidad Desacelera
1) $d = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$	1) $d = V_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$
2) $d = V_F \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$	2) $d = V_F \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$
3) $V_F = V_0 + a \cdot t$	3) $V_F = V_0 - a \cdot t$
4) $V_F^2 = V_0^2 + 2a \cdot d$	4) $V_F^2 = V_0^2 - 2a \cdot d$
5) $d = \frac{(V_0 + V_F)}{2} \cdot t$	5) $d = \frac{(V_0 - V_F)}{2} \cdot t$

PROBLEMA 01: Un móvil que tiene M.R.U.V. inicia su movimiento, desde el reposo, tal que su rapidez aumenta a razón de 10 m/s cada 5 segundos. ¿Qué distancia recorre en el primer minuto de su movimiento?

Resolución

PRIMER PASO. Nos dan como dato la variación de la velocidad en cada intervalo de tiempo. Cálculo del módulo de la aceleración:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{10 \text{ m/s}}{5 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}^2$$

SEGUNDO PASO. La velocidad inicial es nula. El intervalo de tiempo es 60 segundos. Aplicamos la fórmula para determinar la distancia.

$$d = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Reemplazando los datos tenemos que:

$$d = 0 \times 60 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (60)^2 = 3600 \text{ m}$$

Respuesta: en un minuto recorre 3,6 km.

PROBLEMA 02: Un automóvil que tiene M.R.U.V. disminuye su rapidez a razón de 4 m/s cada 2 segundos. ¿Cuántos metros recorrió en el último segundo de su movimiento?

Resolución

PRIMER PASO. Cálculo del módulo de la desaceleración:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{4 \text{ m/s}}{2 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}^2$$

SEGUNDO PASO. En el último segundo, la velocidad final es nula. Aplicamos la fórmula en función de la velocidad final.

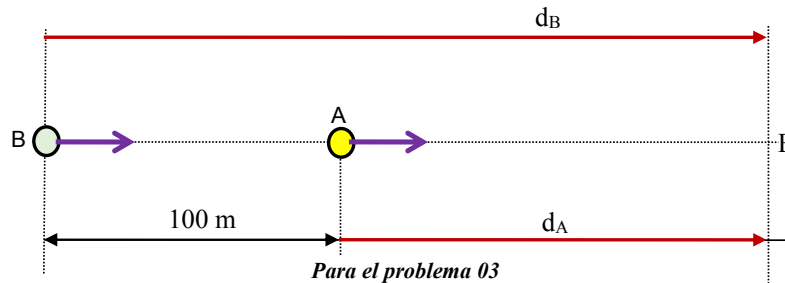
$$d = V_F \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow d = 0 \times 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1)^2 = 1 \text{ m}$$

Respuesta: en el último segundo recorre un metro.

EJEMPLO 03. Dos autos A y B están separados 100 m uno delante del otro, parten del reposo en el mismo sentido y en el mismo instante, el primero (A) con aceleración de 5 m/s^2 y el segundo (B) con aceleración de 7 m/s^2 . ¿Al cabo de cuánto tiempo el segundo alcanza al primero?

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama de los desplazamientos.



SEGUNDO PASO. Suponiendo que B alcanza al móvil A en el punto E.

$$d_B - d_A = 100 \Rightarrow \frac{a_B \cdot t^2}{2} - \frac{a_A \cdot t^2}{2} = 100$$

$$\frac{(a_B - a_A) \cdot t^2}{2} = 100 \Rightarrow \frac{(7 - 5) \cdot t^2}{2} = 100 \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

Respuesta: El móvil B alcanza al móvil A después de 10 segundos.

5. SIGNOS DE LA ACELERACIÓN

Si la velocidad aumenta en módulo decimos que el movimiento es **acelerado**, en cambio si la velocidad disminuye en módulo decimos que el movimiento es **desacelerado**.

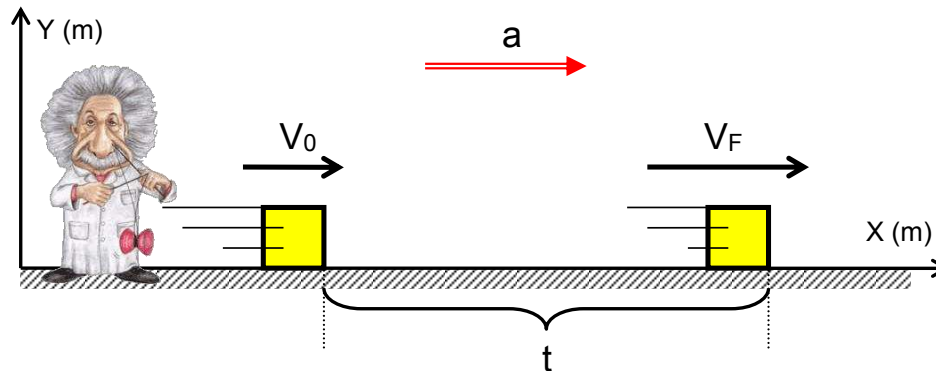
$$V_F = V_0 \pm a t$$

V_0 : velocidad inicial

V_F : velocidad final

(+) : Movimiento acelerado

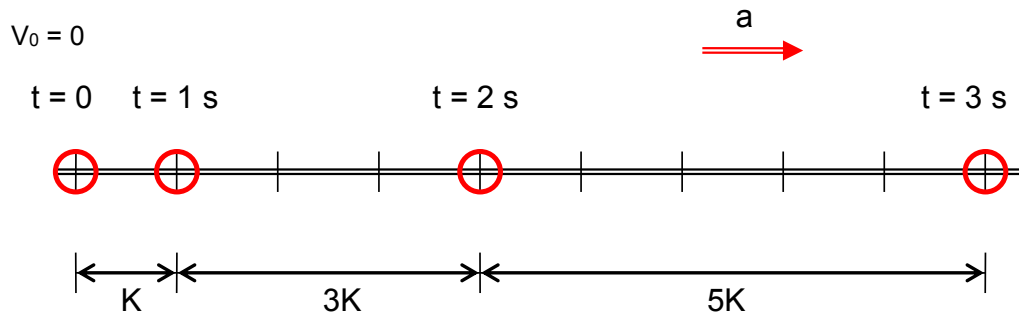
(-) : Movimiento desacelerado



En el movimiento **acelerado** la aceleración y la velocidad tienen la misma dirección. En cambio, si el movimiento es **desacelerado** la aceleración tiene dirección opuesta (sentido opuesto) a la velocidad.

6. NÚMEROS DE GALILEO GALILEI.

Galileo Galilei nació el 15 de febrero de 1564 en Pisa, Italia. El inicio el método científico experimental. Isaac Newton utilizó una de las descripciones matemáticas de Galileo, “la ley de la Inercia”, como fundación para su primera ley del movimiento. Galileo falleció en 1642, el año de nacimiento de Isaac Newton.



Analicemos el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, cuando tiene velocidad inicial diferente de cero.

$$d = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Para. $t = n$ $d_1 = V_0 n + \frac{1}{2} a n^2$

Para. $t = n-1$ $d_2 = V_0 (n-1) + \frac{1}{2} a (n-1)^2$

Restando: $d_n = d_1 - d_2$

Obtenemos que: $d_n = V_0 + \frac{1}{2} a (2n-1)$

7. CASO PARTICULAR.

Si la partícula inicia su movimiento desde el **reposo**, con M.R.U.V., entonces el móvil recorre en cada segundo distancias directamente proporcionales a números los impares.

Cuando $V_0 = 0$

$$d_n = \frac{1}{2} a (2n-1) \Rightarrow d_n = K (2n-1)$$

Donde el valor de K es la mitad del valor de la aceleración. $K = \frac{a}{2}$

EJEMPLO: Un móvil que tiene M.R.U.V. inicia su movimiento, desde el reposo, con aceleración 5 m/s^2 . Determinar la distancia que recorre en el quinto segundo de su movimiento.

Resolución

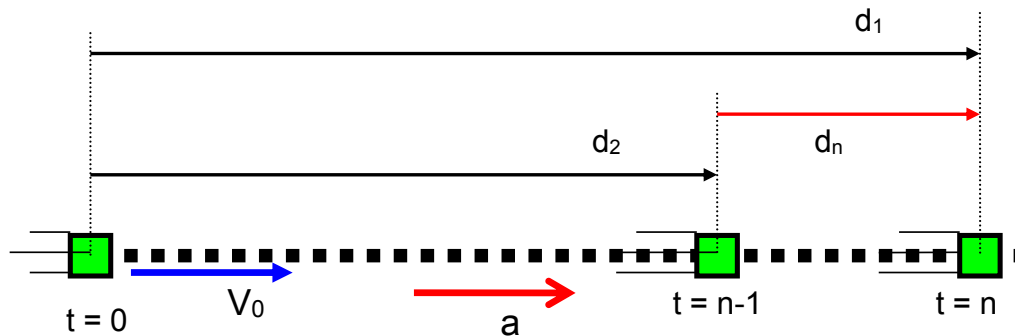
La velocidad inicial es nula. Quinto segundo, entonces $n = 5$. Aplicamos la fórmula práctica.

$$d_n = \frac{1}{2} a (2n-1) \Rightarrow d_n = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 22,5 \text{ m}$$

Respuesta: El móvil recorre 22,5 metros en el quinto segundo.

8. DESPLAZAMIENTO EN EL ENÉSIMO SEGUNDO

Analicemos el caso, cuando el cuerpo acelera. El n -ésimo segundo está comprendido entre los instantes $t = n-1$ y $t = n$. Entonces la distancia que recorre en el n -ésimo segundo se determina restando, las distancias que recorre el móvil en los primeros n segundos y en los $(n-1)$ segundos.



$$d = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Para. $t = n$: $d_1 = V_0 \cdot n + \frac{1}{2} a \cdot n^2$

Para. $t = n-1$: $d_2 = V_0 \cdot (n-1) + \frac{1}{2} a \cdot (n-1)^2$

Restando: $d_n = d_1 - d_2$

Obtenemos que: $d_n = V_0 + \frac{1}{2} a \cdot (2n-1)$

9. CASOS PARTICULARES

a) Cuando el cuerpo acelera desde el reposo ($V_0 = 0$), se cumple que: $d_n = \frac{1}{2} a \cdot (2n-1)$

b) Cuando el cuerpo desacelera: $d_n = V_0 - \frac{1}{2} a \cdot (2n-1)$

* Si d_n es positivo el cuerpo se aleja del punto de lanzamiento.

* Si d_n es negativo el cuerpo se aleja del punto de lanzamiento en la dirección opuesta.

* Si d_n es cero el cuerpo regresa al punto inicial.

EJEMPLO: Un móvil que tiene M.R.U.V. inicia su movimiento con velocidad $V_0 = 8 \text{ i (m/s)}$ y aceleración $5 \text{ i (m/s}^2\text{)}$. Determinar la distancia que recorre en el quinto segundo de su movimiento.

Resolución

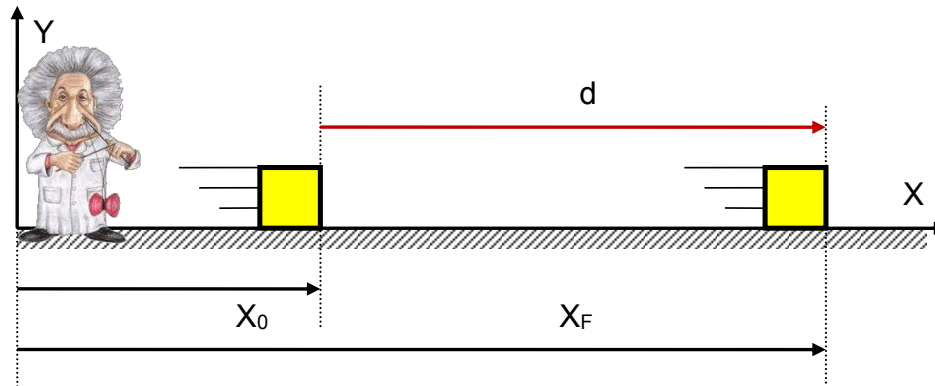
La rapidez inicial es 8 m/s. Quinto segundo, entonces $n = 5$. Es un M.R.U.V. acelerado. Aplicamos la fórmula práctica.

$$d_n = V_0 + \frac{1}{2} a \cdot (2n-1) \Rightarrow d_n = 8 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 30,5 \text{ m}$$

Respuesta: El móvil recorre 30,5 metros en el quinto segundo.

10. POSICIÓN DE LA PARTÍCULA EN EL EJE X

Analizamos el movimiento de la partícula con aceleración constante, sobre el eje X, respecto de un sistema de referencia.



Cambio de posición: $d = X_F - X_0$... (1)

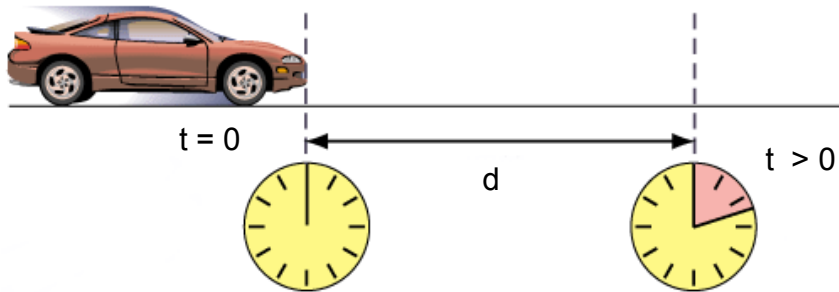
La posición final: $X_F = X_0 + d$... (2)

Para el M.R.U.V.: $d = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$... (3)

Reemplazando (3) en (2) tenemos

$$: X_F = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$X_F = \frac{X_0 t^0}{0!} + \frac{V_0 t^1}{1!} + \frac{a t^2}{2!}$$



EJEMPLO 01: Un cuerpo tiene la siguiente ley del movimiento: $X(t) = 3 + 4t + t^2$, donde t se mide en segundos y X se mide en metros. Determine la distancia que recorre entre los instantes $t = 2$ s y $t = 5$ s.

Resolución

Determinamos previamente la posición en el instante $t = 2$ s

$$X(t) = 3 + 4t + t^2 \Rightarrow X(2) = 3 + 4 \cdot 2 + 2^2 = 15 \text{ m}$$

Determinamos ahora la posición en el instante $t = 5$ s

$$X(t) = 3 + 4t + t^2 \Rightarrow X(5) = 3 + 4 \cdot 5 + 5^2 = 48 \text{ m}$$

La distancia que recorre el cuerpo se obtiene mediante la diferencia:

$$d = 48 - 15 = 33 \text{ m}$$

Respuesta: El cuerpo recorre 33 metros en el intervalo $2 \text{ s} < t < 5 \text{ s}$.

11. MOVIMIENTO RECTILÍNEO CON ACELERACIÓN VARIABLE

Si el móvil tiene movimiento con aceleración que varía linealmente, entonces definimos una nueva medida del movimiento, denominada CELERIDAD (c), que mide la rapidez de cambio de aceleración en módulo.

$$c = \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{a_F - a_0}{t - 0}$$

Despejando tenemos que, la aceleración final es:

$$a_F = a_0 + c.t$$

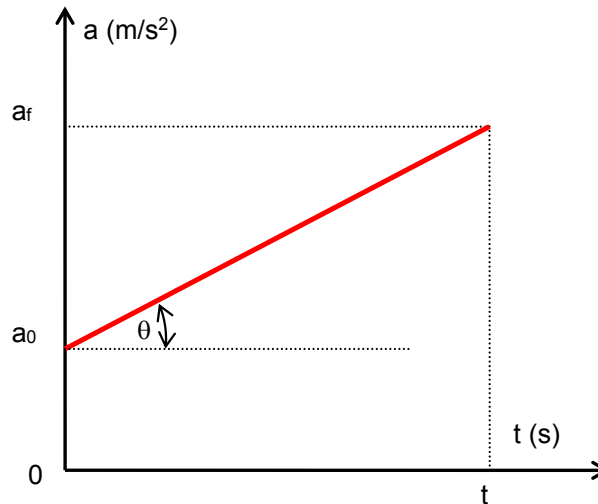
La velocidad final es:

$$V_F = V_0 + a_0.t + \frac{c.t^2}{2}$$

La posición final en el eje X es:

$$X_F = X_0 + V_0.t + \frac{a_0.t^2}{2} + \frac{c.t^3}{6}$$

$$X_F = \frac{X_0.t^0}{0!} + \frac{V_0.t^1}{1!} + \frac{a_0.t^2}{2!} + \frac{c.t^3}{3!}$$

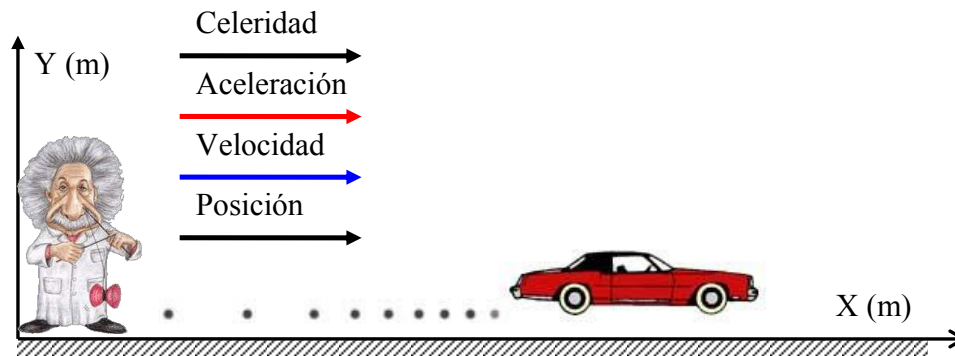


En la gráfica la razón tangente nos da el valor de la **celeridad**:

$$c = \text{Tg}\theta = \frac{a_F - a_0}{t}$$

Ahora podemos generalizar el movimiento rectilíneo:

$$X_F = \frac{X_0.t^0}{0!} + \frac{V_0.t^1}{1!} + \frac{a_0.t^2}{2!} + \frac{c.t^3}{3!} + \dots + \frac{Z.t^n}{n!}$$



Donde, Z es la última medida del movimiento de módulo constante.

- 12. TIEMPO DE ENCUENTRO:** cuando dos móviles A y B se encuentran separados una distancia “d”, van al encuentro saliendo del reposo simultáneamente. El tiempo de encuentro es:

$$T_{\text{encuentro}} = \sqrt{\frac{2.d}{a_A + a_B}}$$

- 13. TIEMPO DE ALCANCE:** cuando dos móviles A y B se encuentran separados una distancia “d”, A va al alcance de B, saliendo del reposo simultáneamente. El tiempo de alcance es:

$$T_{\text{alcance}} = \sqrt{\frac{2.d}{a_A - a_B}}$$

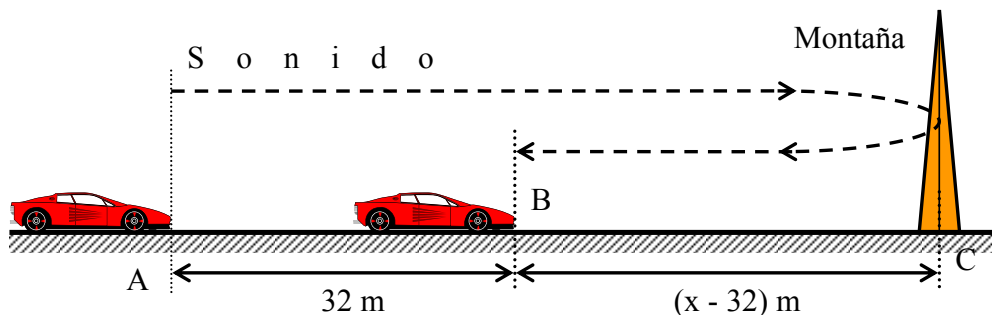
- 14. SONIDO Y ECO.** El eco es un fenómeno acústico. El sonido necesita para propagarse un medio diferente al vacío. En el aire desarrolla una rapidez promedio de 340 m/s. El eco se produce cuando el observador percibe el mismo sonido por segunda vez debido al rebote de la onda sonora en algún obstáculo (montaña, cerro, pared, muro, etc.).

EJEMPLO. Un automóvil que parte del reposo se mueve con M.R.U.V. con aceleración de módulo constante de 1 m/s^2 , en dirección a una montaña. Al partir el chofer toca la bocina y cuando ha recorrido 32 metros escucha el eco. Determinar la distancia de separación inicial entre el auto y la montaña. Rapidez del sonido en el aire 340 m/s.

A) 340 m B) 936 m C) 1176 m D) 1276 m E) 1376 m

Resolución

El intervalo de tiempo empleado por el auto en recorrer 32 m, es el mismo tiempo que emplea la onda sonora en ir desde el punto A hasta la montaña y regresar a la nueva posición del auto en B.



Para el auto (M.R.U.V.): $d = V_0 t + \frac{a.t^2}{2}$

Reemplazando los datos: $32 = 0_0 t + \frac{1.t^2}{2} \Rightarrow 64 = t^2$

Resolviendo: $t = 8$ segundos

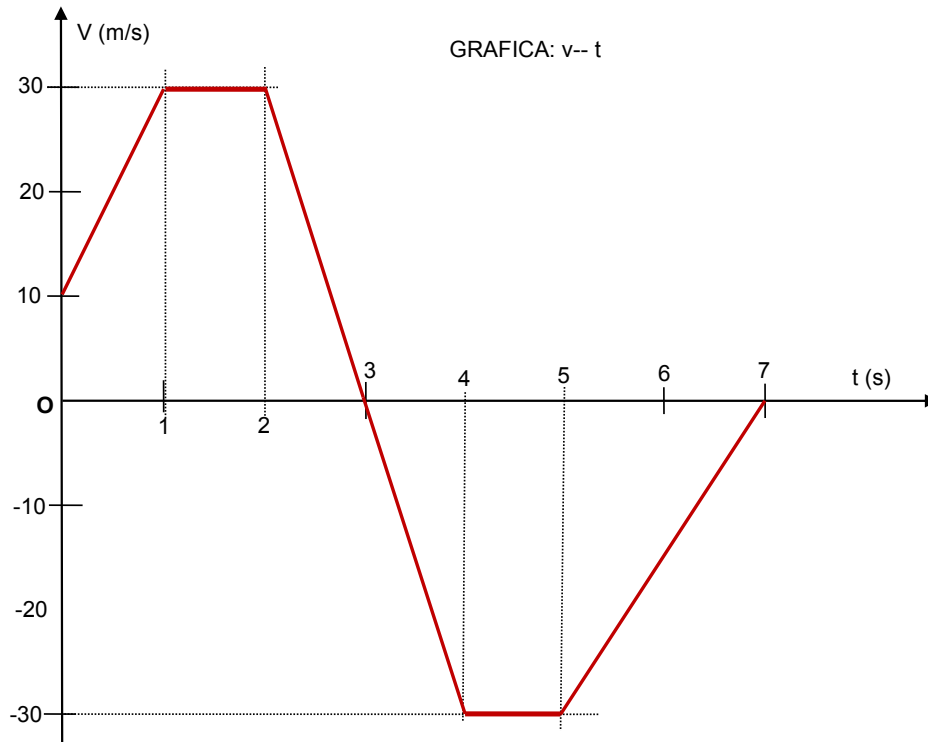
Para el sonido (M.R.U.): $e_{\text{SONIDO}} = V_{\text{SONIDO}} \cdot T \Rightarrow X + (X - 32) = 340 \cdot 8$

Resolviendo: $X = 1\,376 \text{ m}$

Respuesta: la distancia de separación inicial entre el auto y la montaña es 1,376 km.

15. GRAFICA: VELOCIDAD VERSUS TIEMPO.

Se muestra la variación de la velocidad de la partícula que se mueve en el eje X. Si el móvil inicia ($t=0$) su movimiento en la posición ($X=0$) con sentido del eje (+X) hacia la derecha.



Entonces podemos afirmar que:

A) El móvil inicia su movimiento con velocidad, $t=0 \Rightarrow V=10\text{ m.s}^{-1}$

B) En el primer segundo acelera, aumentando su velocidad,

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_F - V_0}{t_F - t_0} \Rightarrow a = \frac{30 - 10}{1 - 0} = 20\text{ m.s}^{-2}$$

C) En el segundo segundo mantiene su velocidad constante de 30 m/s, por consiguiente, su velocidad es nula.

D) En el tercer segundo, su velocidad disminuye (movimiento retardado) de 30 m/s a 0 m/s.

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_F - V_0}{t_F - t_0} \Rightarrow a = \frac{0 - 30}{3 - 2} = -30\text{ m.s}^{-2}$$

E) En el cuarto segundo la velocidad es negativa (el móvil cambió el sentido de su movimiento) la aceleración tiene dirección del eje (-X);

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_F - V_0}{t_F - t_0} \Rightarrow a = \frac{(-30) - 0}{4 - 3} = -30\text{ m.s}^{-2}$$

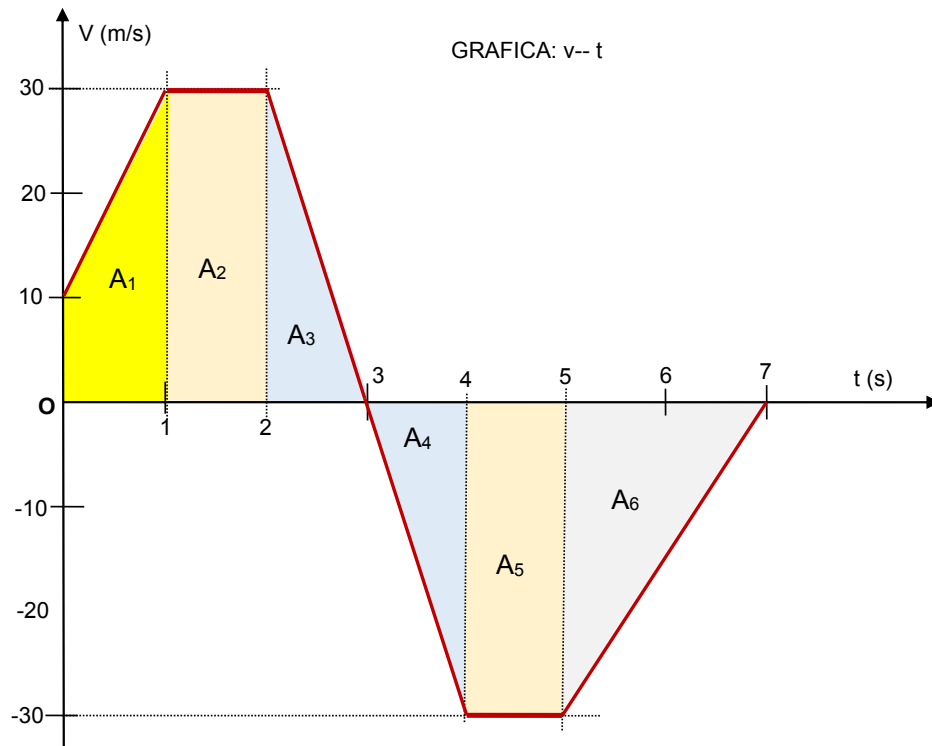
F) En el quinto segundo de su movimiento mantiene su velocidad constante -30 m/s, por consiguiente, su aceleración es nula.

G) En los dos últimos segundos de su movimiento la velocidad negativa disminuye en módulo de -30 m/s a 0 m/s, entonces la aceleración es,

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_F - V_0}{t_F - t_0} \Rightarrow a = \frac{(0) - (-30)}{7 - 5} = +15\text{ m.s}^{-2}$$

H) En el primer segundo avanza hacia la derecha, desplazamiento positivo, cuyo valor es igual al área del trapecio,

$$A_1 = \frac{(b+B) \cdot h}{2} = \frac{(10+30) \cdot (1)}{2} = 20m$$



I) En el segundo avanza hacia la derecha, desplazamiento positivo, cuyo valor es igual al área del rectángulo,

$$A_2 = b \cdot h = (1) \cdot (30) = 30m$$

J) En el tercer segundo avanza hacia la derecha, desplazamiento positivo, cuyo valor es igual al área del triángulo rectángulo,

$$A_3 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(1) \cdot (30)}{2} = 15m$$

K) En el cuarto segundo avanza hacia la izquierda, desplazamiento negativo, cuyo valor es igual al área del triángulo rectángulo,

$$A_4 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(1) \cdot (-30)}{2} = -15m$$

L) En el quinto segundo avanza hacia la izquierda, desplazamiento negativo, cuyo valor es igual al área del rectángulo,

$$A_5 = b \cdot h = (1) \cdot (-30) = -30m$$

M) En el intervalo de tiempo $t_1 = 5s$ y $t_2 = 7s$ avanza hacia la izquierda, desplazamiento negativo, cuyo valor es igual al área del triángulo rectángulo,

$$A_6 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(2) \cdot (-30)}{2} = -30 m$$

N) En el intervalo de tiempo $t_1 = 0 s$ y $t_2 = 7 s$ el desplazamiento de la partícula, es igual a la suma de áreas considerando el signo:

$$\vec{d} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$$

$$\vec{d} = (20) + (30) + (15) + (-15) + (-30) + (-30) = -10 m$$

O) En el intervalo de tiempo $t_1 = 0 s$ y $t_2 = 7 s$ el recorrido de la partícula, es igual a la suma de áreas sin considerar el signo:

$$e = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6|$$

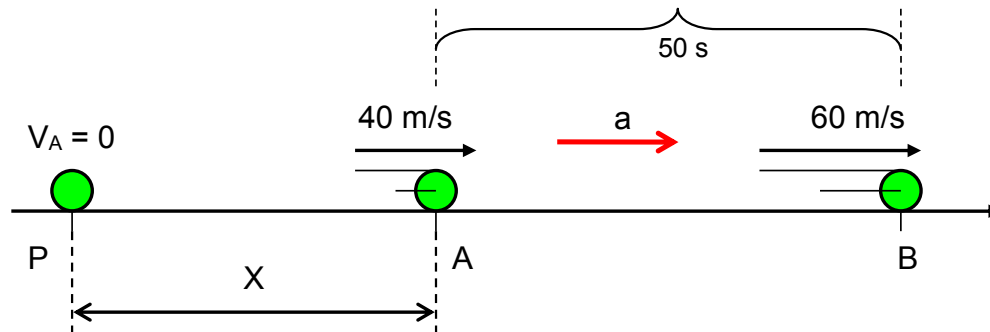
$$e = (20) + (30) + (15) + (15) + (30) + (30) = 140 m$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Un móvil que tiene M.R.U.V. se mueve en el eje X, pasa por el punto A con velocidad 40 i (m/s), pero 50 segundos después su velocidad es 60 i (m/s). Sabiendo que el móvil parte del reposo en el punto P, ¿qué distancia recorre desde el punto de partida hasta el punto A?

Resolución

PRIMER PASO. Realizamos un diagrama para poder ordenar la información del fenómeno en estudio.



SEGUNDO PASO. Cálculo de la aceleración en el tramo AB:

$$a = \frac{V_F - V_0}{t} \Rightarrow a = \frac{60 - 40}{50} = 0,4 \text{ m.s}^{-2}$$

TERCER PASO. En el tramo PA aplicamos: $V_F^2 = V_0^2 + 2.a.d \Rightarrow (40)^2 = (0)^2 + 2.(0,4).X$

Resolviendo: $X = 2\,000 \text{ m}$.

Respuesta: recorre 2 km entre el punto de partida y el punto A.

2. Un automóvil se mueve con velocidad de 30 i m/s, cuando cambia la luz de Verde a Roja de un semáforo ubicado a 150 m de él. Si el tiempo de reacción del conductor es 0,5 segundo y el auto desacelera con -5 i m/s² tan pronto el conductor aplica los frenos. ¿A qué distancia del semáforo se detiene?

Resolución

PRIMER PASO. El automóvil tiene M.R.U. durante 0,5 segundo, recorriendo 15 metros.

SEGUNDO PASO. Luego desarrolla M.R.U.V. desacelerado, con velocidad inicial 30 i m/s, hasta detenerse, es decir la velocidad final es nula.

$$V_F^2 = V_0^2 - 2a.d \Rightarrow 0^2 = (30)^2 - 2(5).d$$

Resolviendo: $d = 90 \text{ m}$

TERCER PASO. La distancia total que recorre el móvil hasta detenerse es la adición:

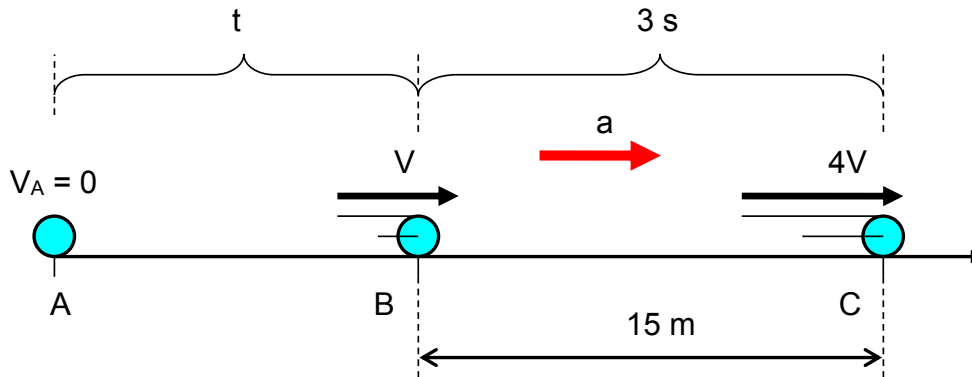
$$15 + 90 = 105 \text{ m.}$$

$$X = 150 \text{ m} - 105 \text{ m} = 45 \text{ m.}$$

Respuesta: el automóvil se detiene a 45 metros del semáforo.

3. Un cuerpo parte del reposo con M.R.U.V., si al transcurrir “t” segundos posee una rapidez “V” y luego de recorrer 15 m en 3 s su rapidez es “4V”. Determinar “t”.

Resolución



PRIMER PASO. Realizamos un diagrama para poder ordenar la información del fenómeno en estudio.

En el tramo BC aplicamos: $d = \frac{(V_0 + V_F)}{2} \cdot t$

Reemplazando los datos: $15 = \frac{(V + 4V)}{2} \cdot 3 \Rightarrow V = 2 \text{ m.s}^{-1}$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la aceleración: $a = \frac{V_F - V_0}{t} \Rightarrow a = \frac{8 - 2}{3} = 2 \text{ m.s}^{-2}$

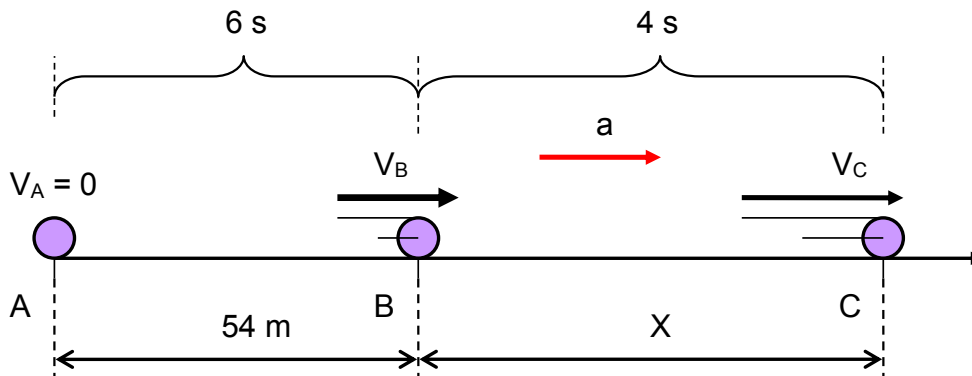
En el tramo AB aplicamos: $V_F = V_0 + a \cdot t \Rightarrow 2 = 0 + 2 \cdot t$

Resolviendo: $t = 1$ segundo.

Respuesta: el tiempo transcurrido es $t = 1$ s.

4. Un móvil parte del reposo con M.R.U.V, y avanza 54 m en los 6 primeros segundos. ¿Cuántos metros avanza en los 4 segundos siguientes?

Resolución



PRIMER PASO. Realizamos un diagrama para poder ordenar la información del fenómeno en estudio.

En el tramo AB aplicamos: $d = \frac{(V_0 + V_F)}{2} \cdot t$

Reemplazando los datos: $54 = \frac{(0 + V_B)}{2} \cdot 6 \Rightarrow V_B = 18 \text{ m.s}^{-1}$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la aceleración:

$$a = \frac{V_F - V_0}{t} \Rightarrow a = \frac{18 - 0}{6} = 3 \text{ m.s}^{-2}$$

TERCER PASO. En el tramo BC aplicamos:

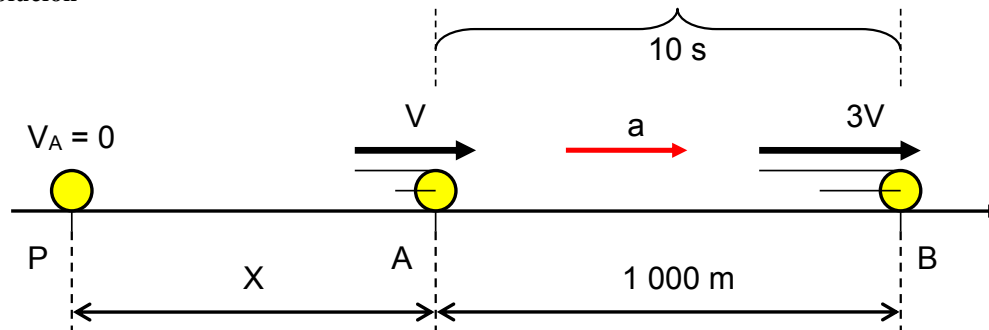
$$d = V_0 t + \frac{a t^2}{2} \Rightarrow X = 18(4) + \frac{(3) \cdot (4)^2}{2}$$

Resolviendo: $X = 96 \text{ m}$.

Respuesta: recorre 96 metros en los 4 siguientes segundos.

5. Un auto parte del reposo desde el punto P con M.R.U.V. y recorre entre los puntos A y B de su trayectoria la distancia de 1 km durante 10 segundos, si al pasar por el punto B su rapidez es el triple de la que tuvo en el punto A. Determine la distancia que recorre entre el punto de partida y el punto A.

Resolución



PRIMER PASO. Realizamos un diagrama para poder ordenar la información del fenómeno en estudio.

En el tramo AB aplicamos: $d = \frac{(V_0 + V_F)}{2} \cdot t$

Reemplazando los datos: $1000 = \frac{(V + 3V)}{2} \cdot 10 \Rightarrow V = 50 \text{ m.s}^{-1}$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la aceleración: $a = \frac{V_F - V_0}{t} \Rightarrow a = \frac{150 - 50}{10} = 10 \text{ m.s}^{-2}$

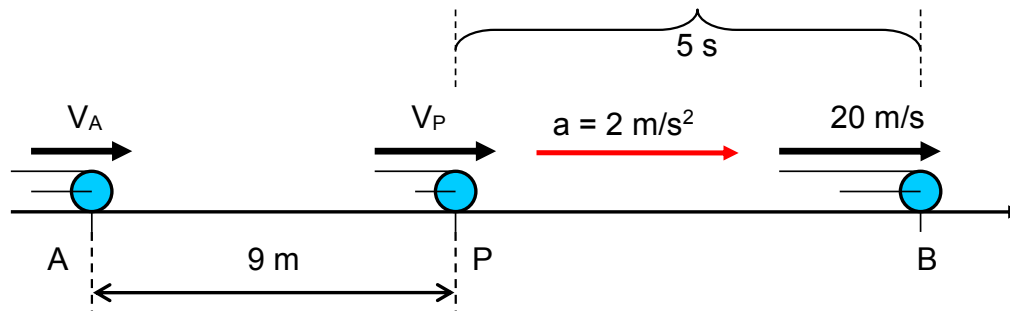
TERCER PASO. En el tramo PA aplicamos: $V_F^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot d \Rightarrow (50)^2 = (0)^2 + 2 \cdot (10) \cdot X$

Resolviendo: $X = 125 \text{ m}$.

Respuesta: recorre 125 metros entre el punto de partida y el punto A.

6. Un automóvil que tiene M.R.U.V. se mueve en el eje X con aceleración $2 \text{ i (m/s}^2\text{)}$, después de 5 segundos de pasar por un punto "P" posee una velocidad 20 i (m/s) . ¿Qué velocidad tenía el auto cuando le faltaban 9 m para llegar al punto P?

Resolución



PRIMER PASO. Realizamos un diagrama para poder ordenar la información del fenómeno en estudio.

SEGUNDO PASO. En el tramo PB aplicamos: $V_F = V_0 + a.t \Rightarrow 20 = V_P + 2.(5)$

Resolviendo: $V_P = 10 \text{ m.s}^{-1}$

TERCER PASO. En el tramo AP aplicamos: $V_F^2 = V_0^2 + 2.a.d \Rightarrow (10)^2 = (V_A)^2 + 2.(2).9$

Resolviendo: $V_A = 8 \text{ m.s}^{-1}$

Respuesta: A 9 metros antes de llegar al punto P su rapidez es 8 m/s.

7. Un ciclista que tiene M.R.U.V. inicia su movimiento con velocidad 2 i (m/s), después de 2 segundos recorre 12 m. ¿Qué distancia recorre el ciclista en el tercer segundo?

Resolución

PRIMER PASO. Aplicamos la ecuación: $d = V_0.t + \frac{a.t^2}{2} \Rightarrow 12 = 2(2) + \frac{(a).(2)^2}{2}$

Resolviendo, la aceleración tiene módulo: $a = 4 \text{ m.s}^{-2}$

Aplicamos la ecuación para determinar la distancia que recorre en el n -ésimo segundo:

SEGUNDO PASO. Tercer segundo: $n=3$.

$$d_n = V_0 + \frac{a.(2n-1)}{2} \Rightarrow d_n = 2 + \frac{4.(2 \times 3 - 1)}{2} = 12 \text{ m}$$

Respuesta: en el tercer segundo recorre 12 metros.

8. Con una velocidad de 10 i m/s el chofer de un automóvil observa el semáforo cuando cambia la luz de Verde a Rojo, reacciona después de 0,2 segundo y aplica los frenos generando una desaceleración de -20 i m/s^2 . ¿Qué distancia recorrió el auto hasta detenerse desde el momento que el chofer observó la luz roja?

Resolución

PRIMER PASO. El automóvil tiene M.R.U. durante 0,2 segundo, recorriendo 2,0 metros.

SEGUNDO PASO. Luego desarrolla M.R.U.V. desacelerado, con velocidad inicial 10 i m/s, hasta detenerse, es decir la velocidad final es nula.

$$V_F^2 = V_0^2 - 2a.d \Rightarrow 0^2 = 10^2 - 2(20).d$$

Resolviendo: $d = 2,5 \text{ m}$

TERCER PASO. La distancia total que recorre el móvil hasta detenerse es la adición: $2,0 + 2,5 = 4,5 \text{ m}$.

Respuesta: La distancia total que recorre el móvil es 4,5 m.

9. Una lancha patrullera de vigilancia está a 60 km de otra de la que se sospecha lleva contrabando. La primera inicia su persecución a 50 km/h, la otra lancha que estaba parada se percata, 20 minutos después, de que van en su busca y emprende la huida en la misma dirección y sentido de su perseguidora con velocidad de 30 km/h. ¿Qué distancia avanza la lancha hasta el instante de ser alcanzada por la lancha patrullera?

A) 100 m **B) 125 m** C) 150 m D) 180 m E) ninguna anterior

10. Determinar la velocidad media entre $t_1 = 1s$ y $t_2 = 2s$ de un móvil que se desplaza en línea recta con la siguiente ley de movimiento: $X(t) = 7.t^2 + 2.t - 2$ donde “X” se mide en metros y “t” en segundos.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Cálculo de la posición en el instante $t = 1s$

$$X(1) = 7.(1)^2 + 2.(1) - 2 = 7m$$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la posición en el instante $t = 2s$

$$X(2) = 7.(2)^2 + 2.(2) - 2 = 30m$$

TERCER PASO. Cálculo de la velocidad media en el intervalo de tiempo $t_1 = 1s$ y $t_2 = 2s$

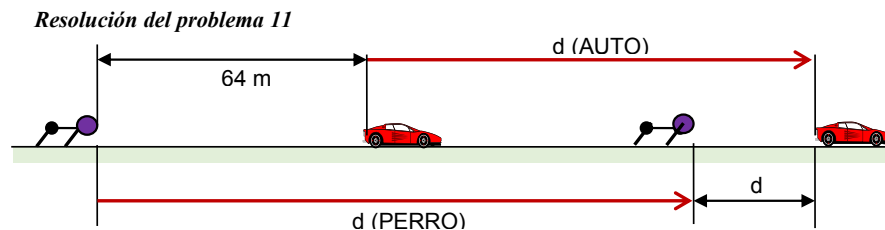
$$\vec{V}_m = \frac{V_F - V_0}{t_1 - t_2} = \frac{30 - 7}{2 - 1} = 23 (i) m.s^{-1}$$

Respuesta: la velocidad media es $23 (i) m.s^{-1}$

11. Un perro corre detrás de un automóvil con rapidez de 6 m/s, cuando se encuentra a 64 m de él sale el auto del reposo con aceleración de $0,5 m/s^2$. ¿Lo alcanza? Si no lo alcanza determinar la distancia mínima que el perro se acercó al automóvil.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama donde se muestra la posición inicial y la posición final de los móviles.



SEGUNDO PASO. Suponemos que no lo alcanza, donde “d” es la distancia mínima que el perro se acerca al auto.

$$d = d_{AUTO} + 64 - d_{PERRO}$$

$$\text{Reemplazamos: } d = \left(\frac{a.t^2}{2} \right) + 64 - (V.t) \Rightarrow d = \left(\frac{t^2}{4} \right) + 64 - (6.t)$$

$$\text{Completando cuadrados: } d = \left(\frac{t}{2} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{t}{2} \right) \cdot 6 + 36 + 28$$

$$d = \left(\frac{t}{2} - 6 \right)^2 + 28 \Rightarrow \text{si, } t = 12 \text{ s} \Rightarrow d_{\min} = 28 \text{ m}$$

TERCER PASO. Minimizando la función. El valor mínimo de número elevado al cuadrado es cero.

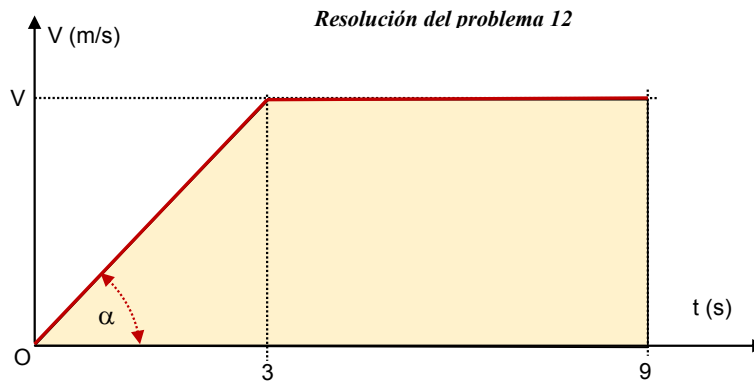
$$d = \left(\frac{t}{2} - 6 \right)^2 + 28 \Rightarrow \text{si, } t = 12 \text{ s} \Rightarrow d_{\min} = 28 \text{ m}$$

Respuesta: No lo alcanza. La distancia mínima que se acerca es 28 metros.

12. Un automóvil parte del reposo y recorre una trayectoria recta de 270 m. Durante los tres primeros segundos tiene aceleración constante, luego con la velocidad adquirida hace nula la aceleración del móvil durante 6 segundos más, con lo cual completa el recorrido. Calcula el valor de la aceleración durante el primer segundo.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Construimos la gráfica velocidad versus tiempo.



SEGUNDO PASO. El área del trapecio es igual a la distancia que se desplazó el móvil:

$$Area = \frac{(b + B) \cdot h}{2} \Rightarrow 270 = \frac{(6 + 9) \cdot V}{2} \Rightarrow V = 36 \text{ m.s}^{-1}$$

TERCER PASO. La pendiente de la recta nos da la aceleración:

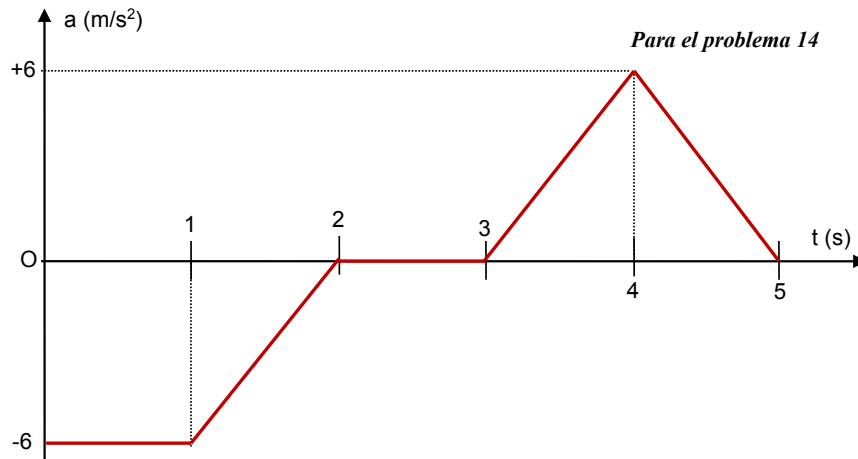
$$a = \tan \alpha = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{V}{3} = \frac{36}{3} = 12 \text{ m.s}^{-2}$$

Respuesta: la aceleración es 12 m.s^{-2}

13. Un policía de tránsito ve que un automóvil se le aproxima a una velocidad no permitida de 100 km/h. En el instante que pasa frente a él, monta en la moto y sale en su persecución. La moto después de acelerar 10 segundos alcanza la velocidad tope de 120 km/h. ¿Cuánto ha tardado el policía en alcanzar al automóvil?

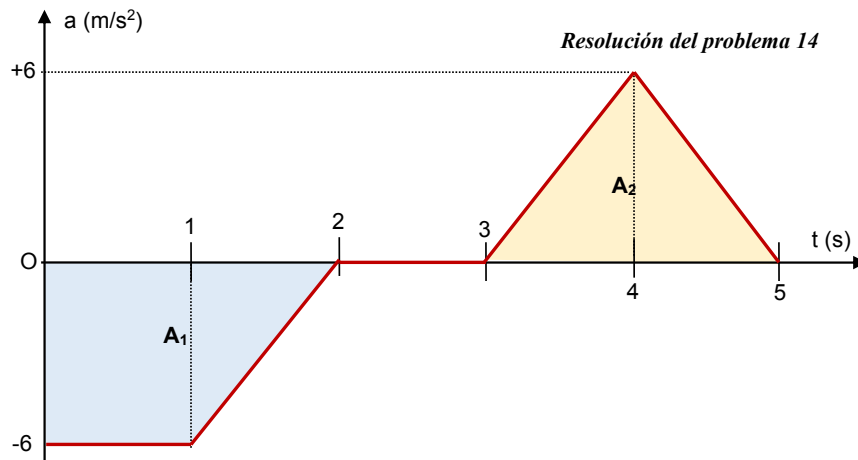
A) 10 s B) 20 s **C) 30 s** D) 40 s E) ninguna

14. Se muestra la gráfica aceleración versus tiempo (a-t) de una partícula que inicia su movimiento ($t=0$) con velocidad $V_0 = 9 \text{ m.s}^{-1}$ en el eje X. Determine la velocidad en el instante $t = 5 \text{ s}$



RESOLUCION

PRIMER PASO. en el diagrama aceleración versus tiempo (a-t), el área bajo la curva nos da el valor del cambio de la velocidad en un intervalo de tiempo.



SEGUNDO PASO. La velocidad en el intervalo $t_1 = 0 \text{ s}$ y $t_2 = 2 \text{ s}$ disminuye en el valor del área del trapecio:

$$A_1 = \frac{(b+B) \cdot h}{2} = \frac{(1+2) \cdot (-6)}{2} = -9 \text{ m.s}^{-1}$$

La velocidad en el instante $t = 3 \text{ s}$ es: $V_F = V_0 + A_1 \Rightarrow V_F = 9 + (-9) = 0 \text{ m.s}^{-1}$

TERCER PASO. La velocidad en el intervalo $t_1 = 2 \text{ s}$ y $t_2 = 3 \text{ s}$ se mantiene constante, el área bajo la curva es nula.

CUARTO PASO. La velocidad en el intervalo $t_1 = 3 \text{ s}$ y $t_2 = 5 \text{ s}$ aumenta el valor de velocidad en el valor del área del triángulo:

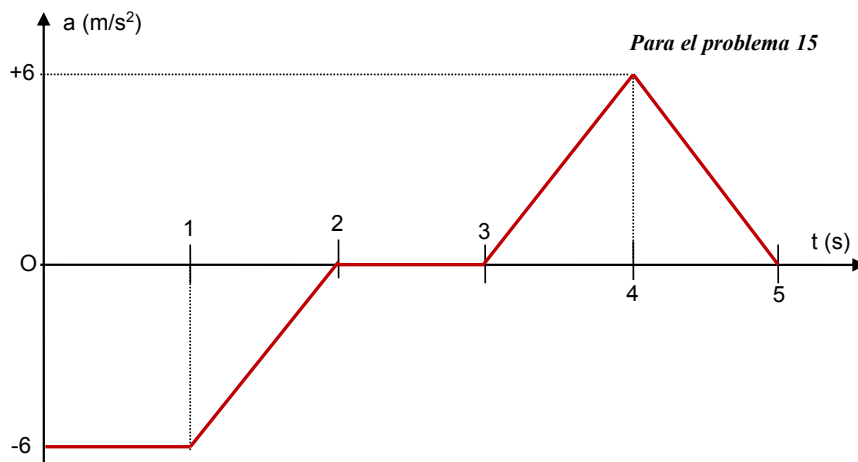
$$A_2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(2) \cdot (6)}{2} = +6 \text{ m.s}^{-1}$$

QUINTO PASO. La velocidad en el instante $t = 5s$ es:

$$V_F = V_0 + A_1 + A_2 \Rightarrow V_F = 9 + (-9) + (6) = 6 \text{ m.s}^{-1}$$

Respuesta: la velocidad en el instante $t = 5s$ es 6 m.s^{-1}

15. Se muestra la gráfica aceleración versus tiempo (a-t) de una partícula que inicia su movimiento ($t=0$) con velocidad $V_0 = 9 \text{ m.s}^{-1}$ en el eje X.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- I) En el instante $t = 2s$ la velocidad del móvil es nula.
- II) En el intervalo de tiempo $t_1 = 2s$ y $t_2 = 3s$ el móvil se encuentra en reposo.
- III) En el instante $t = 4s$ la velocidad del móvil es $V = 3 \text{ m.s}^{-1}$
- IV) En el instante $t = 5s$ la velocidad del móvil es $V = 6 \text{ m.s}^{-1}$

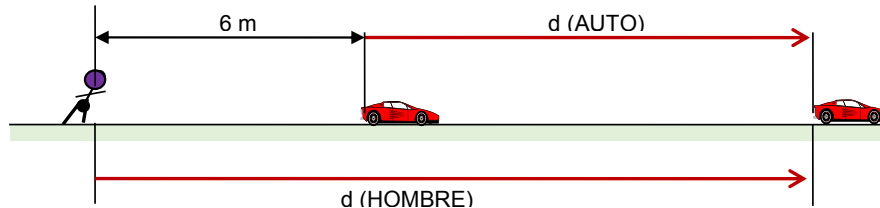
A) Solo I B) Solo II C) Solo III D) Solo I, II y IV E) Todas son verdaderas

16. Un hombre se mueve con velocidad constante de 5 m/s detrás un automóvil que se encuentra en reposo, pero cuando esta a 6 m, el automóvil parte con aceleración constante de 2 m/s². ¿Logra alcanzar? ¿En cuánto tiempo alcanza al automóvil?

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama donde se muestra las posiciones inicial y final de los móviles.

Resolución del problema 16



SEGUNDO PASO. Supongamos que el hombre alcanza al automóvil en un punto de la recta.

$$d_{\text{HOMBRE}} = d_{\text{MICROBUS}} + 6 \Rightarrow V \cdot t = \frac{a \cdot t^2}{2} + 6$$

$$\text{Reemplazamos: } 5 \cdot t = \frac{(2) \cdot t^2}{2} + 6 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$$

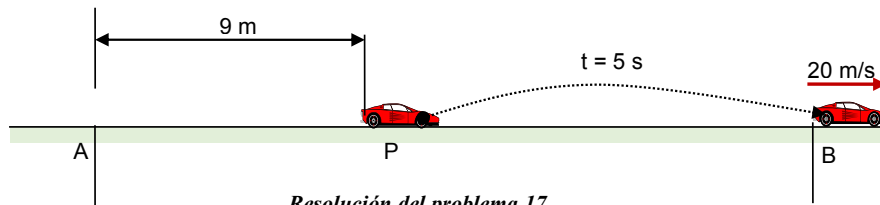
$$\text{Resolviendo: } t = 2 \text{ s y } t = 3 \text{ s}$$

TERCER PASO. Interpretación de los resultados. El hombre alcanza al automóvil en el instante $t = 2 \text{ s}$, y lo adelanta, pero el instante $t = 3 \text{ s}$ el automóvil alcanza al hombre.

17. Un automóvil corre en una pista horizontal con aceleración constante de 2 m/s², después de 5 segundos de pasar por el punto "P", posee velocidad de 72 km/h. ¿Qué velocidad tenía el automóvil cuando le faltaban 9 m para llegar al punto P?

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama donde se muestra las posiciones inicial y final de los móviles.



Resolución del problema 17

SEGUNDO PASO. Aplicamos las leyes del M.R.U.V en el tramo PB.

$$V_F = V_0 + a \cdot t \Rightarrow 20 = V_P + (2) \cdot (5) \Rightarrow V_P = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

TERCER PASO. Aplicamos las leyes del M.R.U.V en el tramo AP.

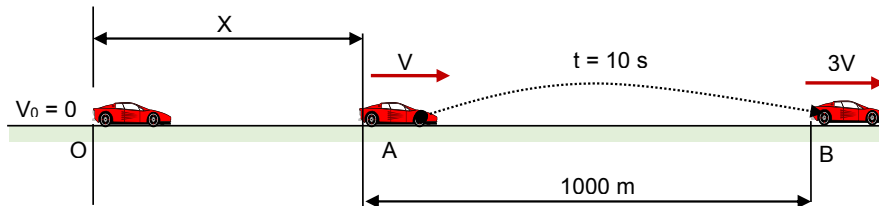
$$(V_F)^2 = (V_0)^2 + 2a \cdot d \Rightarrow (10)^2 = (V_A)^2 + 2(2) \cdot (9)$$

Respuesta. La velocidad en el punto A es: $V_A = 8 \text{ m.s}^{-1}$

18. Un auto parte del reposo con MRUV y recorre entre los puntos A y B de su trayectoria la distancia de 1 km durante 10 segundos, si al pasar por el punto B su velocidad es el triple de la que tuvo en A. Calcular la distancia que recorrió entre el punto de partida y el punto A.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama donde se muestra las posiciones inicial y final de los móviles.



Resolución del problema 18

SEGUNDO PASO. Aplicamos las leyes del M.R.U.V en el tramo AB.

$$d = \frac{(V_0 + V_F) \cdot t}{2} \Rightarrow 1000 = \frac{(V + 3V) \cdot (10)}{2} \Rightarrow V = 50 \text{ m.s}^{-1}$$

TERCER PASO. Cálculo de la aceleración en el tramo AB.

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_F - V_0}{t} = \frac{2V}{t} \Rightarrow a = \frac{2(50)}{10} = 10 \text{ m.s}^{-2}$$

CUARTO PASO. Aplicamos las leyes del M.R.U.V en el tramo OA.

$$(V_F)^2 = (V_0)^2 + 2a \cdot d \Rightarrow (50)^2 = (0)^2 + 2(10) \cdot (X)$$

Respuesta. La distancia que recorrió es: $X = 125 \text{ m}$

19. Un móvil parte del reposo y se mueve con M.R.U.V sobre el eje X. Si transcurrido un tiempo “t” posee una velocidad V y luego de recorrer 15 m en 3 segundos su rapidez es 4V. Calcular el intervalo de tiempo “t”.

A) 1 s

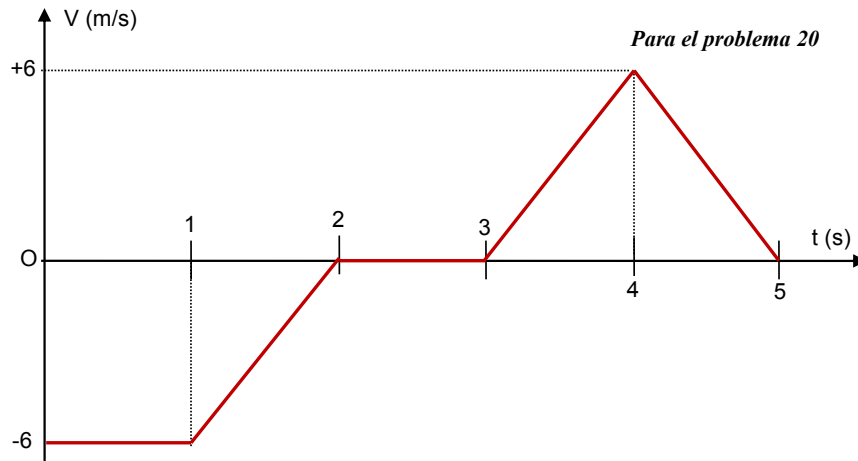
B) 1,5

C) 2,5

D) 3,5

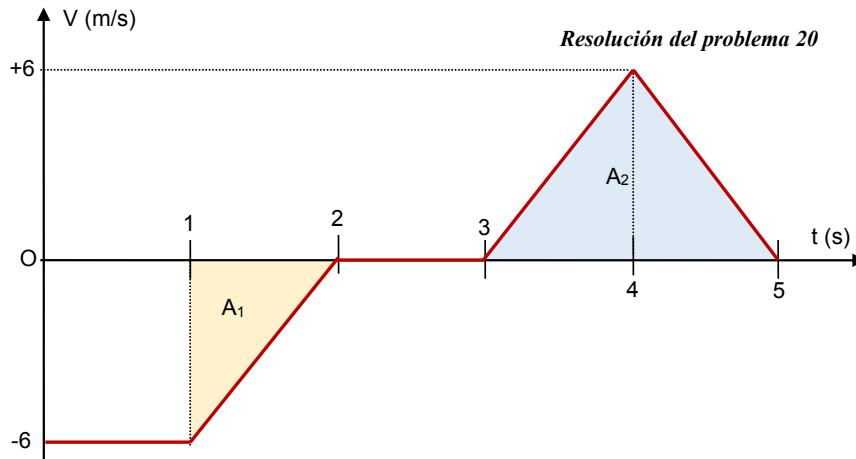
E) ninguna

20. Se muestra la variación de la velocidad con respecto al tiempo. Determinar la velocidad media en el intervalo $t_1 = 1s$ y $t_2 = 5s$



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. En el diagrama velocidad versus tiempo, el área bajo la curva nos da el valor del cambio de posición o desplazamiento.



SEGUNDO PASO. En el intervalo $t_1 = 1s$ y $t_2 = 2s$ el desplazamiento es negativo, el desplazamiento es hacia la izquierda:

$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(1) \cdot (-6)}{2} = -3 \text{ m}$$

TERCER PASO. En el intervalo $t_1 = 2s$ y $t_2 = 3s$ el desplazamiento es nulo. El área es nula.

CUARTO PASO. En el intervalo $t_1 = 3s$ y $t_2 = 5s$ el desplazamiento es positivo, el desplazamiento es hacia la derecha:

$$A_2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(2) \cdot (6)}{2} = +6 \text{ m}$$

QUINTO PASO. CUARTO PASO. En el intervalo $t_1 = 1s$ y $t_2 = 5s$ el desplazamiento es la adición de áreas considerando el signo:

$$\vec{d} = A_1 + A_2 = (-3) + (6) = +3m$$

SEXTO PASO. la velocidad media en el intervalo $t_1 = 1s$ y $t_2 = 5s$ es:

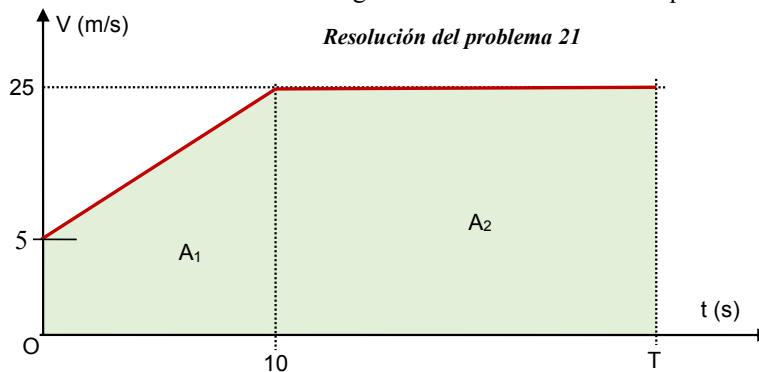
$$\bar{V}_m = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{A_1 + A_2}{\Delta t} = \frac{(-3) + (6)}{5 - 1} = +\frac{3}{4} m.s^{-1}$$

Respuesta: la velocidad media es $0,75(i) m.s^{-1}$

21. Un móvil inicia su movimiento rectilíneo con velocidad de 5 m/s y viaja con aceleración constante de 2 m/s² durante 10 segundos, al final de los cuales continua el trayecto con velocidad constante. Se pide determinar el intervalo de tiempo en qué habrá recorrido 1 km desde el inicio del movimiento.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Construimos la gráfica velocidad versus tiempo.



SEGUNDO PASO. Para $t = 10s$ la velocidad del móvil es 25 m/s.

$$V_F = V_0 + a.t \Rightarrow V_F = 5 + (2).(10) = 25 m.s^{-1}$$

TERCER PASO. La distancia total es la suma de áreas:

$$d = A_1 + A_2 \Rightarrow d = \frac{(b+B).(h)}{2} + b.H$$

$$1000 = \frac{(5+25).(10)}{2} + (T-10).(25) \Rightarrow T = 44s$$

Respuesta. El tiempo transcurrido es 44 segundos.

22. Un muchacho con su bicicleta se encuentra a 32 m de una motocicleta en cual arranca y sale del reposo con aceleración constante de 1,0 m/s². Determinar la mínima velocidad constante a la cual debe manejar su bicicleta, tal que pueda alcanzar al motociclista.

Resolución

La distancia que recorre la bicicleta, es igual a la suma de la distancia que recorre la motocicleta más 32 metros.

$$d_{CICLISTA} = d_{MOTOCICLETA} + 32$$

$$\text{Reemplazando variables: } V.T = \left(V_0.T + \frac{1}{2}.a.T^2 \right) + 32$$

$$\text{Reemplazando los datos: } V.T = \left(0.T + \frac{1}{2}.1.T^2 \right) + 32$$

$$V.T = \frac{1}{2}.T^2 + 32 \Rightarrow \frac{1}{2}.T^2 - V.T + 32 = 0$$

Fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Comparando tenemos: } T = \frac{V \pm \sqrt{(-V)^2 - 4.\frac{1}{2}.32}}{2.(\frac{1}{2})}$$

Analizando es discriminante, la solución es límite es: $(-V)^2 - 4.\frac{1}{2}.32 = 0$

Resolviendo: $V = 8 \text{ m/s}$.

Respuesta: El ciclista logra alcanzar al motociclista si la rapidez mínima es 8 m/s.

23. Un motociclista se encuentra en reposo y hacia el corre un perro con velocidad constante 8 m/s, en el instante que se encuentra a 32 metros, el motociclista sale con M.R.U.V. moviéndose en la misma dirección y sentido que el perro. Determinar el módulo de la aceleración máxima (en m/s^2) que debe tener el motociclista con la condición que el perro lo pueda alcanzar.

Resolución

La distancia que recorre el perro, es igual a la suma de la distancia que recorre la motocicleta más 32 metros.

$$d_{\text{PERRO}} = d_{\text{MOTOCICLETA}} + 32$$

$$\text{Reemplazando variables: } V.T = \left(V_0.T + \frac{1}{2}.a.T^2 \right) + 32$$

$$\text{Reemplazando los datos: } 8.T = \left(0.T + \frac{1}{2}.a.T^2 \right) + 32$$

$$8.T = \frac{1}{2}.a.T^2 + 32 \Rightarrow \frac{1}{2}.a.T^2 - 8.T + 32 = 0$$

Fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Comparando tenemos: } T = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.a.32}}{2.(\frac{1}{2})}$$

Analizando es discriminante, la solución es límite es: $(-8)^2 - 4.(\frac{1}{2}a).32 = 0$

Resolviendo: $a = 1,0 \text{ m/s}^2$.

Respuesta: El perro alcanza, si la aceleración del motociclista es menor o igual a $1,0 \text{ m/s}^2$.

24. Wall dispone de un minuto para pasearse en una moto recorriendo un tramo sobre el eje X, desde A hasta B y luego de regreso desde B hasta A. ¿Qué distancia máxima podrá alejarse con velocidad constante de 20 m/s?, si debe regresar de B hacia A desde el reposo con aceleración de -8 m/s^2 .

Resolución

El tramo AB (ida) recorre con M.R.U. En cambio, el tramo BA (regreso) con M.R.U.V, acelerado. Igualando las distancias, obtenemos la siguiente ecuación.

$$d_{AB}(M.R.U.) = d_{BA}(M.R.U.V.)$$

$$V.t_1 = V_0.t_2 + \frac{1}{2}.a.t_2^2 \Rightarrow 20.T = 0 + \frac{1}{2}.8.(60 - T)^2$$

$$20.T = 4(60 - T)^2 \Rightarrow 5.T = (60 - T)^2$$

Resolviendo la ecuación: $T = 45 \text{ segundos}$.

Cálculo de la distancia: $d_{AB} = 20.45 = 900 \text{ m}$

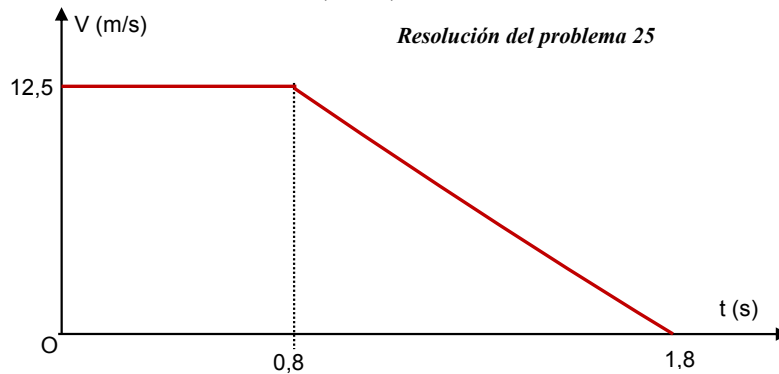
Respuesta: La distancia entre A y B es 900 metros.

25. Un automóvil se está moviendo con velocidad de 45 km/s cuando la luz roja del semáforo se enciende en una intersección. Si el tiempo de reacción del conductor es 0,8 segundos y el auto desacelera a razón de $12,5 \text{ m/s}^2$ tan pronto el conductor aplica los frenos. Calcular la distancia que recorre el auto desde el instante en que el conductor percibe la luz roja hasta que el automóvil se detiene.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Tiempo de reacción: es el intervalo entre el tiempo en que el conductor percibe la luz roja y el tiempo que aplica los frenos. Este valor depende del estado de salud de las personas, si se consume alcohol o drogar el valor puede aumentar.

SEGUNDO PASO. Construimos la gráfica velocidad versus tiempo. El automóvil se está moviendo con velocidad de $12,5 \text{ m/s}$, transformando 45 km/h .



TERCER PASO. El automóvil se detiene después de 1 segundo de aplicar los frenos.

$$V_F = V_0 + a.t \Rightarrow 0 = 12,5 - (12,5).(t) \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

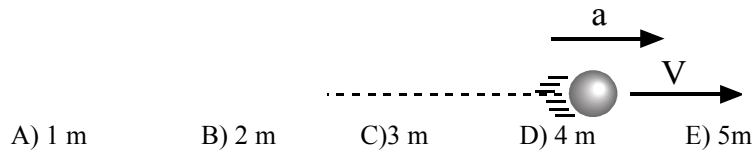
CUARTO PASO. La distancia que recorre el automóvil es igual al área bajo la curva, el área del trapecio:

$$d = \frac{(b + B).(h)}{2} = \frac{(0,8 + 1,8).(12,5)}{2} = 16,25 \text{ m}$$

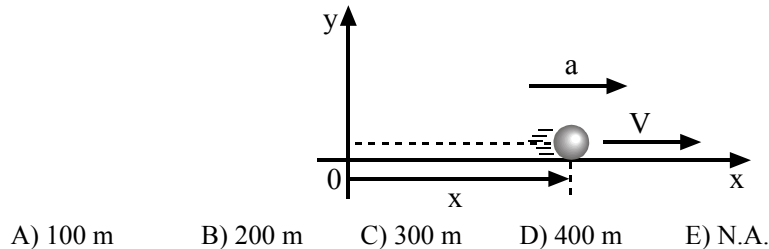
Respuesta. La distancia total que avanza es 16,25 metros.

PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE

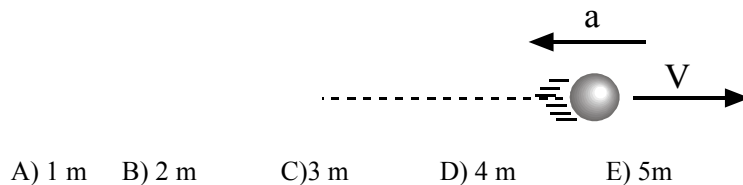
1. Un automóvil que tiene M.R.U.V. aumenta su rapidez a razón de 40 m/s cada 10 s. ¿Cuántos metros recorrió en el primer segundo de su movimiento?



2. Un móvil que tiene M.R.U.V. inicia su movimiento en $x = 40 \text{ m}$ ($t = 0 \text{ s}$), con velocidad de 6 i (m/s) y aceleración 4 i (m/s^2). Determine la distancia que avanza en los primeros 10 segundos.



3. Un automóvil que tiene M.R.U.V. disminuye su rapidez a razón de 4 m/s cada 2 segundos. ¿Cuántos metros recorrió en el último segundo de su movimiento?



4. Un cuerpo parte del reposo M.R.U.V. si al transcurrir “t” segundos posee una rapidez “V” y luego de recorrer 15 m en 3 s su rapidez es “4V”. Hallar “t”.

A) 1 s B) 2 s C) 3 s D) 4 s E) 5 s

5. Un cuerpo parte del reposo M.R.U.V. y avanza 54 m en los 6 primeros segundos. ¿Cuántos metros avanza en los 4 segundos siguientes?

A) 81 m B) 92 m C) 73 m D) 96 m E) 85 m

6. Dos autos separados 100 m sobre el eje X parten del reposo en el mismo instante y en la misma dirección, el primero con aceleración 5 i (m/s^2) y el otro con aceleración 7 i (m/s^2). ¿Al cabo de cuánto tiempo el más veloz alcanza al más lento? El primero está a la derecha y el segundo a la izquierda del origen de coordenadas.

A) 10 s B) 20 s C) 30 s D) 8 s E) 5 s

7. Un auto parte del reposo con M.R.U.V. y recorre entre los puntos A y B de su trayectoria la distancia de 1 km durante 10 s, si al pasar por el punto B su rapidez es el triple de la que tuvo en el punto A. Determine la distancia que recorre entre el punto de partida y el punto A.

A) 80 m B) 92 m C) 100 m D) 96 m E) 125 m

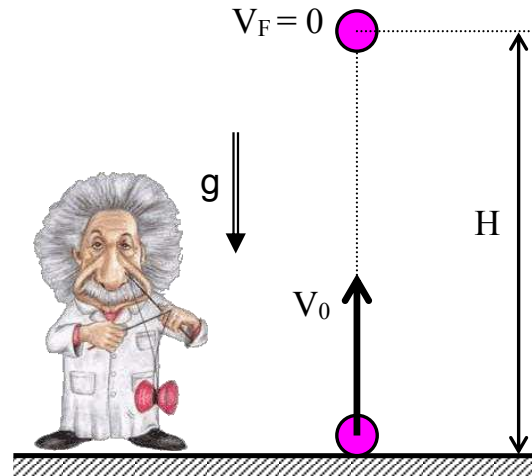
8. Un móvil que tiene M.R.U.V. se mueve en el eje X, pasa por el punto A con velocidad 40 i (m/s), pero 50 segundos después su velocidad es 60 i (m/s). Sabiendo que el móvil parte del reposo, ¿qué distancia recorre desde el punto de partida hasta el punto A?
A) 1 km B) 2 km C) 3 km D) 4 km E) 5 km
9. Un automóvil que tiene M.R.U.V. se mueve en el eje X con aceleración 2 i (m/s), después de 5 s de pasar por un punto "P" posee una velocidad 20 i (m/s). ¿Qué velocidad tenía el auto cuando le faltaban 9 m para llegar al punto P?
A) 5 i (m/s) B) 2 i (m/s) C) 3 i (m/s) D) 4 i (m/s) E) 8 i (m/s)
10. Un ciclista que tiene M.R.U.V. inicia su movimiento con velocidad 2 i (m/s), después de 2 segundos recorre 12 m. ¿Qué distancia recorre el ciclista en el tercer segundo?
A) 8 m B) 9 m C) 30 m D) 12 m E) 24 m
11. Un móvil que tiene M.R.U.V. inicia su movimiento, desde el reposo, con aceleración 5 i (m/s²). Determinar la distancia que recorre en el quinto segundo de su movimiento.
A) 22,5 m B) 25,5 m C) 30 m D) 50 m E) 24 m
12. Un móvil que tiene M.R.U.V. inicia su movimiento, desde el reposo, tal que su rapidez aumenta a razón de 10 m/s cada 5 segundos. ¿Qué distancia recorre en el primer minuto de su movimiento?
A) 1,6 km B) 2,6 km C) 3,6 km D) 4,6 km E) 1,9 km
13. Una partícula parte del reposo con M.R.U.V. y en los 5 primeros segundos recorre 32 m. ¿Qué distancia recorre en los 5 s siguientes?
A) 88 m B) 89 m C) 90 m D) 96 m E) 99 m
14. Un móvil que tiene M.R.U.V. duplica su rapidez luego de recorrer 18 metros en 4 segundos. Halle el módulo de la aceleración.
A) $0,65 \text{ m/s}^2$ B) $0,75 \text{ m/s}^2$ C) $0,85 \text{ m/s}^2$ D) $0,95 \text{ m/s}^2$ E) $0,5 \text{ m/s}^2$
15. Una bala impacta frontalmente a un bloque de madera con velocidad 120 i m/s, penetrando con M.R.U.V. durante 0,05 segundo hasta detenerse. Halla la distancia que penetró la bala.
A) 8 m B) 9 m C) 3 m D) 6 m E) 7 m
16. Dos móviles A y B están separados 36 metros sobre el eje "X", el de atrás parte con aceleración 4 i m/s² y el adelante con 2 i m/s², ambos salen del reposo simultáneamente con M.R.U.V. ¿Qué tiempo tardó el móvil de atrás para alcanzar al otro?
A) 1 s B) 2 s C) 6 s D) 8 s E) 5 s
17. Wall dispone de un minuto para pasearse en una moto recorriendo un tramo sobre el eje X, desde A hasta B. ¿Qué distancia máxima podrá alejarse con velocidad constante de 20 i m/s?, si debe regresar de B hacia A desde el reposo con aceleración de módulo 8 m/s^2 .
A) 800 m B) 900 m C) 300 m D) 600 m E) 700 m
18. Un automóvil que tiene M.R.U.V. disminuye su rapidez a razón de 4 m/s cada 2 s. ¿Cuántos metros recorrió en el último segundo de su movimiento?
A) 1 m B) 2 m C) 3 m D) 4 m E) 5 m

19. Un cuerpo parte del reposo M.R.U.V, si al transcurrir “t” segundos posee una rapidez “V” y luego de recorrer 15 m en 3 s su rapidez es “4V”. Hallar “t”.
A) 1 s B) 2 s C) 3 s D) 4 s E) 5 s
20. Un cuerpo parte del reposo M.R.U.V, y avanza 54 m en los 6 primeros segundos. ¿Cuántos metros avanza en los 4 segundos siguientes?
A) 81 m B) 92 m C) 73 m D) 96 m E) 85m
21. Dos autos separados 100 m sobre el eje X parten del reposo en el mismo instante y en la misma dirección, el primero con aceleración $5 \text{ i (m/s}^2\text{)}$ y el otro con aceleración $7 \text{ i (m/s}^2\text{)}$. ¿Al cabo de cuánto tiempo el más veloz alcanza al más lento? El primero está a la derecha y el segundo a la izquierda del origen de coordenadas.
A) 10 s B) 20 s C) 30 s D) 8 s E) 5 s
22. Un auto parte del reposo con M.R.U.V. y recorre entre dos puntos de su trayectoria la distancia de 1 km durante 10 s, si al pasar por el punto B su rapidez es el triple de la que tuvo en el punto A. Halla la distancia que recorre entre el punto de partida y el punto A.
A) 80 m B) 92 m C) 100 m D) 96 m E) 125m
23. Un móvil que tiene M.R.U.V. se mueve en el eje X, pasa por el punto A con velocidad 40 i (m/s) , pero 50 segundos después su velocidad es 60 i (m/s) . Sabiendo que el móvil parte del reposo, ¿qué distancia recorre desde el punto de partida hasta el punto A?
A) 1 km B) 2 km C) 3 km D) 4 km E) 5 km
24. Un automóvil que tiene M.R.U.V, se mueve en el eje X con aceleración 2 i (m/s) , después de 5 s de pasar por un punto “P” posee una velocidad 20 i (m/s) . ¿Qué velocidad tenía el auto cuando le faltaban 9 m para llegar al punto P?
A) 5 i (m/s) B) 2 i (m/s) C) 3 i (m/s) D) 4 i (m/s) E) 8 i (m/s)
25. Un ciclista que tiene M.R.U.V. inicia su movimiento con velocidad 2 i (m/s) , después de 2 segundos recorre 12 m. ¿Qué distancia recorre el ciclista en el tercer segundo?
A) 8 m B) 9 m C) 30 m D) 12 m E) 24 m
26. Un móvil que tiene M.R.U.V. inicia su movimiento, desde el reposo, con aceleración $5 \text{ i (m/s}^2\text{)}$. Determinar la distancia que recorre en el quinto segundo de su movimiento
A) 18 m B) 29 m C) 30 m D) 12 m E) 24 m
27. Un móvil que tiene M.R.U.V. inicia su movimiento, desde el reposo, tal que su rapidez aumenta a razón de 10 m/s cada 5 segundos. ¿Qué distancia recorre en el primer minuto de su movimiento?
A) 1,6 km B) 2,6 km C) 3,6 km D) 4,6 km E) 1,9 km
28. Una partícula parte del reposo con M.R.U.V y en los 5 primeros segundos recorre 32 m. ¿Qué distancia recorre en los 5 s siguientes?
A) 88 m B) 89 m C) 90 m D) 96 m E) 99 m
29. Un móvil que tiene M.R.U.V. duplica su rapidez luego de recorrer 18 metros en 4 segundos. Halle el módulo de la aceleración.
A) $0,65 \text{ m/s}^2$ B) $0,75 \text{ m/s}^2$ C) $0,85 \text{ m/s}^2$ D) $0,95 \text{ m/s}^2$ E) $0,5 \text{ m/s}^2$

30. Una bala impacta frontalmente a un bloque de madera con velocidad 120 i m/s , penetrando con M.R.U.V. durante $0,05$ segundo hasta detenerse. Halla la distancia que penetró la bala.
A) 8 m B) 9 m C) 3 m D) 6 m E) 7 m
31. Dos móviles A y B están separados 36 metros sobre el eje "X", el de atrás parte con aceleración 4 i m/s^2 y el adelante con 2 i m/s^2 , ambos salen del reposo simultáneamente con M.R.U.V. ¿Qué tiempo tardó el móvil de atrás para alcanzar al otro?
A) 1 s B) 2 s C) 6 s D) 8 s E) 5 s
32. **Un automóvil se mueve con velocidad de 30 i m/s , cuando cambia la luz de Verde a Roja de un semáforo ubicado a 150 m de él. Si el tiempo de reacción del conductor es $0,5$ segundo y el auto desacelera con -5 i m/s^2 tan pronto el conductor aplica los frenos. ¿A qué distancia del semáforo se detiene?
A) 35 m B) 40 m C) 45 m D) 20 m E) 5 m
33. Un móvil que tiene M.R.U.V. pasa por dos puntos A y B de su trayectoria que distan entre si 500 m . Cuando recorre el tramo AB invierte 10 s y su rapidez se triplica. ¿Qué rapidez tenía cuando le faltaban 40 m para llegar al punto A?
A) 15 m/s B) 20 m/m C) 5 m/s D) 10 m/s E) 30 m/s
34. Un auto que tiene M.R.U.V. sale del reposo recorriendo 18 m en los 3 primeros segundos. ¿Qué distancia recorre el quinto segundo de su movimiento?
A) 15 m B) 18 m C) 20 m D) 23 m E) 25 m
35. *Un motociclista se encuentra en reposo y hacia el corre un perro con velocidad constante 8 i m/s , en el instante que se encuentra a 32 metros, el motociclista sale con M.R.U.V. moviéndose en la misma dirección y sentido que el perro. Hallar el módulo de la aceleración máxima que debe tener el motociclista con la condición que el perro lo pueda alcanzar.
A) 1 m/s^2 B) 2 m/s^2 C) 3 m/s^2 D) 4 m/s^2 E) 5 m/s^2
36. Un auto se mueve con velocidad constante de 20 i m/s sobre el eje "X", en un determinado instante a 100 metros del auto se encuentra un motociclista que sale del reposo con M.R.U.V y aceleración 2 i m/s^2 . ¿Logrará el auto pasar al motociclista?
A) Si logra pasarlo. B) No lo consigue. C) Ni siquiera logra alcanzarlo.
D) Lo alcanza, pero no logra pasarlo. E) Falta mayor información para decidir.
37. Un tren de pasajeros se mueve con velocidad de 30 i m/s sobre el eje "X" cuando es frenado con M.R.U.V. desacelerando con $-1,2 \text{ i m/s}^2$, en el instante que se encuentra a 180 m de un tren de carga que se mueve en la misma dirección con velocidad constante de 9 i m/s . ¿Se produce el choque?
A) El tren de pasajeros logra detenerse instante antes del choque.
B) No se produce el choque. C) Si existe el choque.
D) El choque es elástico. E) Falta mayor información para decidir.
38. Un ómnibus se encuentra en reposo y hacia él corre un pasajero con velocidad constante de 6 i m/s , en el instante que se encuentra a 25 metros, el ómnibus sale con M.R.U.V. y aceleración constante de $1,0 \text{ i m/s}^2$. ¿El pasajero logra alcanzar al ómnibus?, ¿después de cuánto tiempo? Si no lo alcanza, ¿qué distancia mínima logra acercarse al ómnibus?
A) Lo alcanza en 6 segundos. B) No lo alcanza, acercándose como mínimo 9 m .
C) Lo alcanza en $7,2$ segundos. D) No lo alcanza, acercándose como mínimo 7 m .
E) Falta mayor información para decidir.

39. **Con una velocidad de 10 m/s el chofer de un automóvil observa el semáforo cuando cambia la luz de Verde a Rojo, reacciona después de $0,2 \text{ s}$ y aplica los frenos generando una desaceleración de -20 m/s^2 . ¿Qué distancia recorrió el auto hasta detenerse desde el momento que el chofer observó la luz roja?
- A) $4,5 \text{ m}$ B) 5 m C) $7,5 \text{ m}$ D) 8 m E) 10 m
40. Un automóvil que tiene M.R.U.V. logra duplicar su rapidez después de recorrer 100 m . ¿Qué distancia adicional debe recorrer el móvil para que su rapidez vuelva a duplicarse?
- A) 100 m B) 200 m C) 300 m D) 400 m E) 500 m
41. Un policía de tránsito parte con velocidad constante de 4 m/s para evitar el choque entre autos que parten del reposo, sobre el eje horizontal, con aceleración de 3 m/s^2 y -5 m/s^2 y separados 100 m . Si el policía se encontraba a $154,5 \text{ m}$ atrás del auto de menor aceleración, ¿al cabo de que tiempo el policía escuchará el choque?
Rapidez del sonido en el aire = 340 m/s
- A) 10 s B) 5 s C) $5,5 \text{ s}$ D) $6,5 \text{ s}$ E) $7,5 \text{ s}$
42. Una lancha que se encuentra a 20 m al Norte de un embarcadero, parte del reposo en dirección $S 53^\circ E$ con M.R.U.V. y aceleración de módulo $0,15 \text{ m/s}^2$. Determinar para qué tiempo, medido desde el punto de partida, la distancia entre la lancha y el embarcadero es mínima.
- A) 40 s B) 30 s C) 45 s D) 50 s E) 38 s
43. *Un muchacho con su bicicleta se encuentra a 32 m de una motocicleta en cual arranca y sale con aceleración constante de 1 m/s^2 . Determinar la mínima velocidad constante a la cual debe manejar su bicicleta, tal que pueda alcanzar al motociclista.
- A) 8 m/s B) 7 m/s C) 6 m/s D) 9 m/s E) 10 m/s
44. Un móvil que tiene M.R.U.V. pasa por dos puntos A y B de su trayectoria que distan entre sí 500 m . Cuando recorre el tramo AB invierte 10 s y su rapidez se triplica. ¿Qué rapidez tenía cuando le faltaban 40 m para llegar al punto A?
- A) 15 m/s B) 20 m/s C) 5 m/s D) 10 m/s E) 30 m/s
45. Un auto que tiene M.R.U.V. sale del reposo recorriendo 18 m en los 3 primeros segundos. ¿Qué distancia recorre el quinto segundo de su movimiento?
- A) 15 m B) 18 m C) 20 m D) 23 m E) 25 m
46. Un automóvil que tiene M.R.U.V. logra duplicar su rapidez después de recorrer 100 m . ¿Qué distancia adicional debe recorrer el móvil para que su rapidez vuelva a duplicarse?
- A) 100 m B) 200 m C) 300 m D) 400 m E) 500 m
47. Una lancha que se encuentra a 20 m al Norte de un embarcadero, parte del reposo en dirección $S 53^\circ E$ con M.R.U.V. y aceleración de módulo $0,15 \text{ m/s}^2$. Determinar para qué tiempo, medido desde el punto de partida, la distancia entre la lancha y el embarcadero es mínima.
- A) 40 s B) 30 s C) 45 s D) 50 s E) 38 s
48. Un auto inicia su movimiento en una pista rectilínea con aceleración constante; si durante el cuarto segundo de su movimiento recorre 12 m más que en el primer segundo. Calcule el módulo de su aceleración. (en m/s^2)
- A) 3 B) 4 C) 5 D) $3,5$ E) $5,5$

CAÍDA LIBRE VERTICAL



1. CONCEPTO. Es aquel tipo de movimiento rectilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.) cuya trayectoria es una línea recta vertical y que se debe a la presencia del campo de gravedad. La única fuerza que actúa sobre el cuerpo es su propio peso, ya que no considera la resistencia del aire. Este tipo de movimiento se obtiene, cuando un cuerpo es lanzado hacia arriba, hacia abajo, o simplemente es soltado. En las ecuaciones cinemáticas no se considera la masa ni la fuerza resultante. La cinemática en general estudia las propiedades geométricas del movimiento.



2. GALILEO GALILEI (1564 - 1642) gran físico y astrónomo italiano que por primera vez empleó el método experimental de investigación en la ciencia. Galileo introdujo el concepto de inercia; estableció la relatividad del movimiento; estudio las leyes de caída de los cuerpos y del movimiento de estos por un plano inclinado; las leyes del movimiento, al lanzar un objeto formando cierto ángulo con el horizonte; aplicó el péndulo simple para la medida del tiempo.

CONSIDERACIONES DEL MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE

GOTA 1. No se considera la resistencia del aire.

GOTA 2. La altura máxima alcanzada es suficientemente pequeña como para despreciar la variación de la aceleración de la gravedad.

GOTA 3. La velocidad máxima alcanzada por el cuerpo es suficientemente pequeña para despreciar la resistencia del aire.

GOTA 4. La altura alcanzada es suficientemente pequeña para considerar un campo gravitatorio homogéneo y uniforme.

GOTA 5. El valor o módulo de la aceleración de la gravedad es: $g = 9,8 \frac{m}{s^2} = 9,8 \frac{N}{kg}$

3. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE VERTICAL

Analíticamente el movimiento de caída libre es un caso especial del M.R.U.V., donde la distancia se reemplaza por la altura y la aceleración lineal por la aceleración de la gravedad.

Cuando BAJA

$$1) h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$2) h = V_F t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$3) V_F = V_0 + g t$$

$$4) V_F^2 = V_0^2 + 2 g h$$

$$5) h = \frac{(V_0 + V_F)}{2} t$$

Cuando SUBE

$$1) h = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$2) h = V_F t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$3) V_F = V_0 - g t$$

$$4) V_F^2 = V_0^2 - 2 g h$$

$$5) h = \frac{(V_0 + V_F)}{2} t$$

4. TIEMPO DE VUELO

Consideremos un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba. Cuando el cuerpo alcanza la altura máxima su velocidad es nula.

De la ecuación:

$$V_F = V_0 - g \cdot t$$

reemplazando los datos:

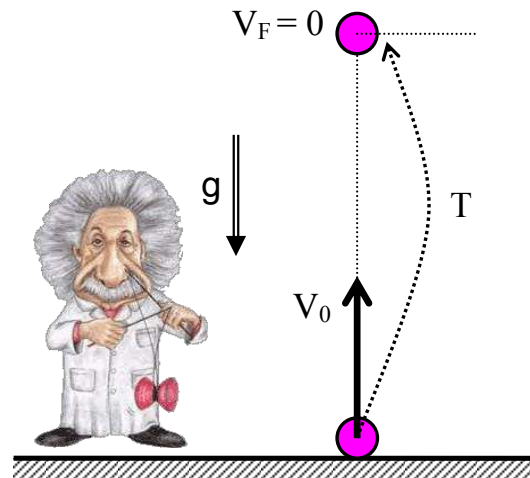
$$0 = V_0 - g \cdot T$$

Despejando:

$$T = \frac{V_0}{g}$$

$$\text{Tiempo de subida: } t_{\text{SUBIDA}} = \frac{V_0}{g} = T$$

$$\text{Tiempo de vuelo: } t_{\text{VUELO}} = \frac{2 \cdot V_0}{g} = 2T$$



EJEMPLO 01: Desde el piso es lanzado verticalmente hacia arriba un cuerpo con una rapidez de 50 m/s. Determine el tiempo de vuelo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

Aplicando la fórmula práctica:

$$t_{\text{VUELO}} = \frac{2 \cdot V_0}{g} \Rightarrow T_{\text{VUELO}} = \frac{2(50)}{10} = 10 \text{ s}$$

Respuesta: el tiempo que demora en regresar al punto de lanzamiento es 10 segundos.

EJEMPLO 02: Desde el piso es lanzado verticalmente hacia arriba un cuerpo luego de 8 segundos regresa al punto de lanzamiento. Determine la rapidez de lanzamiento. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

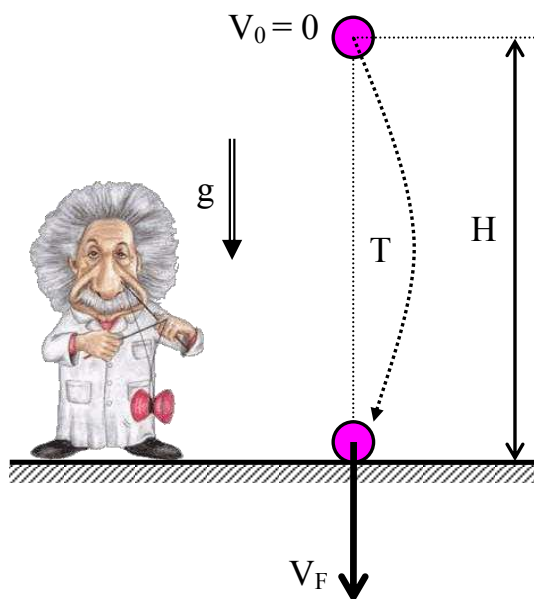
$$\text{Aplicando la fórmula práctica: } t_{\text{VUELO}} = \frac{2 \cdot V_0}{g} \Rightarrow 8 = \frac{2(V_0)}{10}$$

$$\text{Resolviendo: } V_0 = 40 \text{ m/s}$$

Respuesta: La rapidez de lanzamiento es 40 m/s.

5. EL INTERVALO DE TIEMPO DEPENDE DE LA ALTURA

Todos los cuerpos que se dejan caer simultáneamente con la misma velocidad inicial cero desde una altura, utilizan el mismo intervalo de tiempo para llegar al suelo.



$$h = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$H = 0 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot T^2$$

el intervalo de tiempo de caída es:

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}$$

EJEMPLO 01: Desde una altura de 80 metros se abandona (velocidad nula) una esfera de hierro. Determine el intervalo de tiempo que demora en llegar al piso. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

Aplicando la regla práctica:

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2 \cdot (80)}{10}} = \sqrt{16} = 4 \text{ s}$$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 4 segundos.

EJEMPLO 02: Desde una altura de 45 metros se deja caer (velocidad nula) una piedra. Determine el intervalo de tiempo que demora en llegar al piso. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

Aplicando la regla práctica:

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2 \cdot (45)}{10}} = \sqrt{9} = 3 \text{ s}$$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 3 segundos.

6. ALTURA MÁXIMA

Un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba alcanza su altura máxima cuando su velocidad final en el punto más alto es igual a cero.

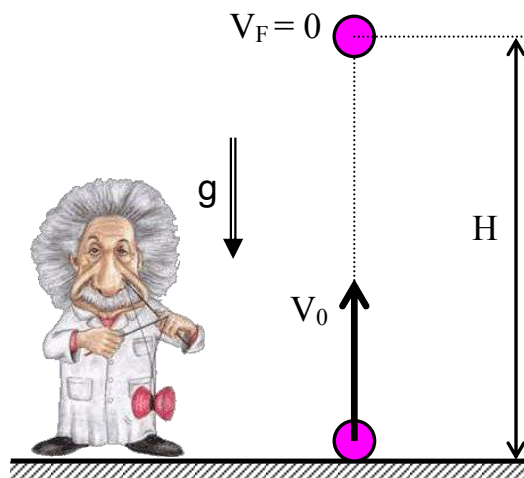
Aplicando la ecuación:

$$V_F^2 = V_0^2 - 2g.h$$

Reemplazando los datos:

$$0 = V_0^2 - 2g.H$$

$$H = \frac{V_0^2}{2g}$$



EJEMPLO 01: Desde el piso es lanzado verticalmente hacia arriba un cuerpo con una rapidez de 50 m/s. Determine la altura máxima que alcanza el cuerpo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

Reemplazando en la formula práctica:

$$H = \frac{V_0^2}{2g} \Rightarrow H = \frac{(50)^2}{2 \cdot (10)} = 125 \text{ m}$$

Respuesta: La altura máxima es 125 metros.

EJEMPLO 02: En la tierra, un objeto lanzado verticalmente hacia arriba con cierta rapidez alcanza una altura máxima “H”, determine la altura máxima que alcanza en la Luna, si la aceleración de la gravedad es la sexta parte de la terrestre y la rapidez de lanzamiento la misma. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

Reemplazando en la fórmula práctica:

En la **Tierra**: $H = \frac{V_0^2}{2g}$

En la **Luna**: $H_1 = \frac{V_0^2}{2\left(\frac{g}{6}\right)} = 6\left(\frac{V_0^2}{2g}\right) = 6.H$

Respuesta: La altura máxima que alcanza en la Luna es 6H.

7. NÚMEROS DE GALILEO

Si abandonamos un cuerpo de cierta altura, entonces la altura que recorre en cada segundo es directamente proporcional a los números impares.

Primer segundo	1K = 5 m
Segundo segundo	3K = 15 m
Tercer segundo	5K = 25 m
Cuarto segundo	7K = 35 m
Quinto segundo	9K = 45 m
Sexto segundo	11K = 55 m
Sétimo segundo	13K = 65 m
Octavo segundo	15K = 75 m

$$h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Para. $t = n$

$$h_1 = V_0 n + \frac{1}{2} g n^2$$

Para. $t = n-1$

$$h_2 = V_0 (n-1) + \frac{1}{2} g (n-1)^2$$

Restando:

$$h_n = h_1 - h_2$$

Obtenemos que:

$$h_n = V_0 + \frac{1}{2} g (2n-1)$$

CASO PARTICULAR

Cuando $V_0 = 0$

$$h_n = \frac{1}{2} g (2n-1)$$

$$h_n = K (2n-1)$$

Donde el valor de K es la mitad del valor de la aceleración.

$$K = \frac{g}{2} = 5$$

Considerando: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

En el primer segundo recorre 5 metros.

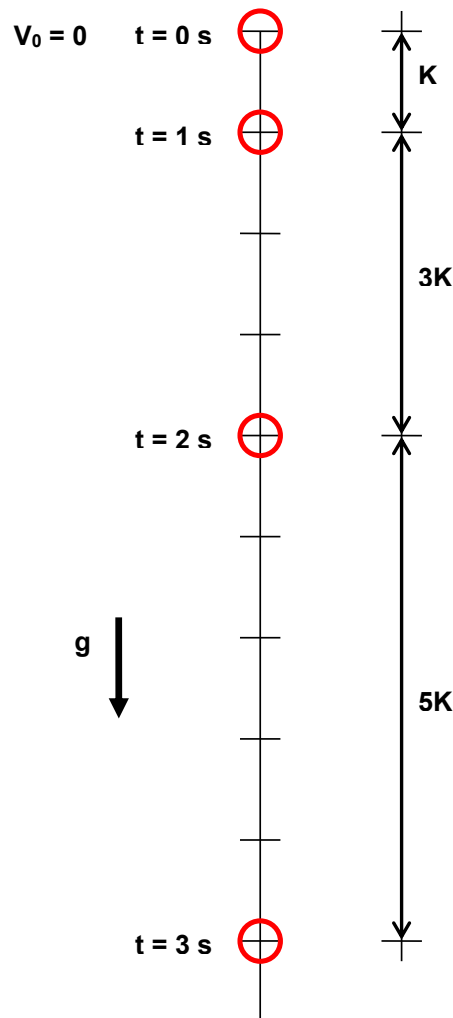
En el segundo segundo recorre 15 metros.

En el tercer segundo recorre 25 metros.

En el cuarto segundo recorre 35 metros.

En el quinto segundo recorre 45 metros.

En el enésimo segundo recorre $5(2n-1)$ metros.



8. CUANDO EL CUERPO ASCIENDE (DESACELERA)

Analicemos el movimiento de subida respecto de un sistema de referencia.

Ecuaciones:

$$1) h = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

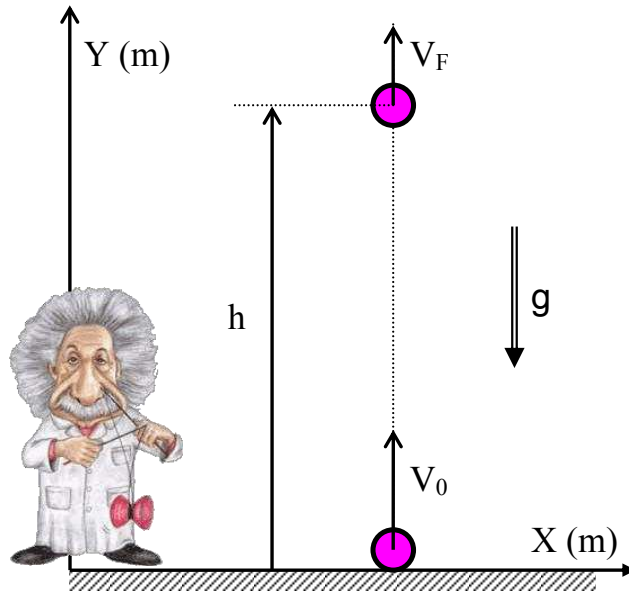
$$2) h = V_F t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$3) V_F = V_0 - g t$$

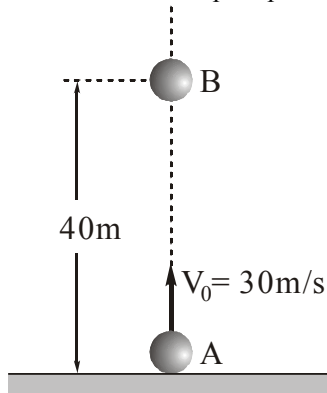
$$4) V_F^2 = V_0^2 - 2 g h$$

$$5) h = \frac{(V_0 + V_F)}{2} t$$

$$6) h_n = V_0 - \frac{1}{2} g (2n - 1)$$



EJEMPLO 01: Se muestra el lanzamiento vertical de una esfera en el punto A con rapidez $V_0 = 30 \text{ m/s}$. Determinar la rapidez de la esfera cuando pasa por el punto B. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

**Resolución**

Aplicamos la siguiente ecuación del movimiento:

$$V_F^2 = V_0^2 - 2 g h$$

$$V_B^2 = (30)^2 - 2(10).(40)$$

$$V_B^2 = 100 \Rightarrow V_B = 10 \text{ m/s}$$

Respuesta: La rapidez de la esfera en B es 10 m/s.

9. CUANDO EL CUERPO DESCIENDE (ACELERA)

Analicemos el movimiento de bajada respecto de un sistema de referencia.

Ecuaciones:

$$1) h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

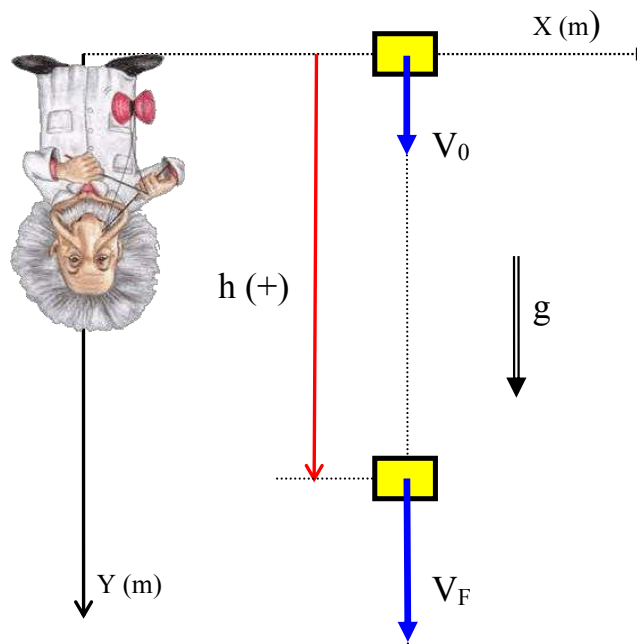
$$2) h = V_F t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$3) V_F = V_0 + g t$$

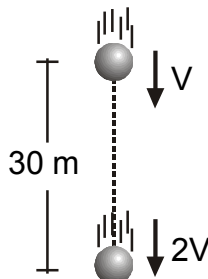
$$4) V_F^2 = V_0^2 + 2 g h$$

$$5) h = \frac{(V_0 + V_F)}{2} t$$

$$6) h_n = V_0 + \frac{1}{2} g (2n-1)$$



EJEMPLO 01: En cierto planeta una partícula en caída libre duplica su rapidez luego de recorrer 30 m en 2 segundos. Determine la aceleración de la gravedad (en m/s^2).

**Resolución**

PRIMER PASO. Cálculo de la rapidez V:

$$h = \frac{(V_0 + V_F)}{2} t \Rightarrow 30 = \frac{(V + 2V)}{2} \cdot (2)$$

Resolviendo: $V = 10 \text{ m/s}$

SEGUNDO PASO. Cálculo del módulo de la aceleración de la gravedad:

$$g = \frac{V_B - V_A}{t} = \frac{20 - 10}{2} = 5 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: el módulo de la aceleración de la gravedad en este planeta es 5 m/s^2 .

10. TIEMPO DE ALCANCE

Cuando dos partículas son lanzadas simultáneamente, en la misma dirección, de diferentes posiciones, en una misma línea vertical; el tiempo de alcance es:

Del grafico tenemos la siguiente ecuación:

$$H_A - H_B = H$$

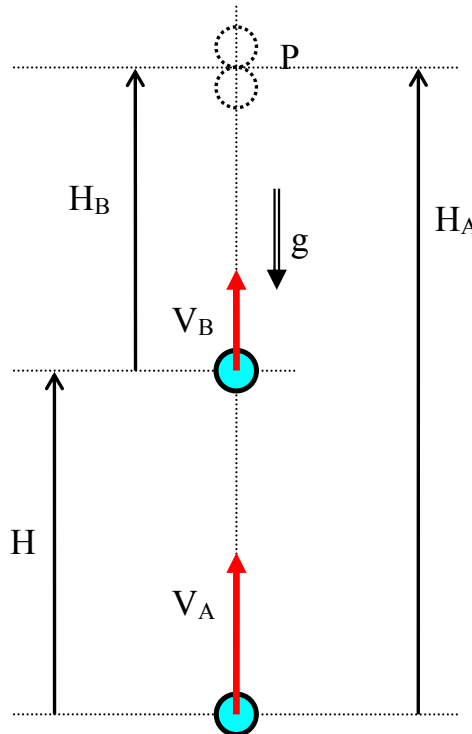
$$(V_A \cdot T - \frac{1}{2} g T^2) - (V_B \cdot T - \frac{1}{2} g T^2) = H$$

simplificando tenemos:

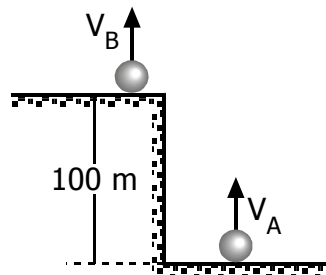
$$V_A \cdot T - V_B \cdot T = H$$

despejando obtenemos:

$$T_{alcance} = \frac{H}{V_A - V_B}$$



EJEMPLO 01: Se muestra el lanzamiento vertical de dos esferas simultáneamente con rapidez de $V_A = 80 \text{ m/s}$ y $V_B = 30 \text{ m/s}$. ¿Después de cuántos segundos las esferas se encuentran a la misma altura? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

**Resolución**

Los móviles están separados inicialmente 100 metros en la vertical. Aplicando la fórmula práctica:

$$T_{alcance} = \frac{H}{V_A - V_B} \Rightarrow T_{alcance} = \frac{100}{80 - 30} = 2 \text{ s}$$

Respuesta: Las esferas estarán a la misma altura después de 2 segundos.

11. TIEMPO DE ENCUENTRO

Cuando dos partículas son lanzadas, simultáneamente, en direcciones opuestas, de diferentes posiciones en una misma línea vertical; el tiempo de encuentro es:

Del grafico tenemos la siguiente ecuación:

$$H_A + H_B = H$$

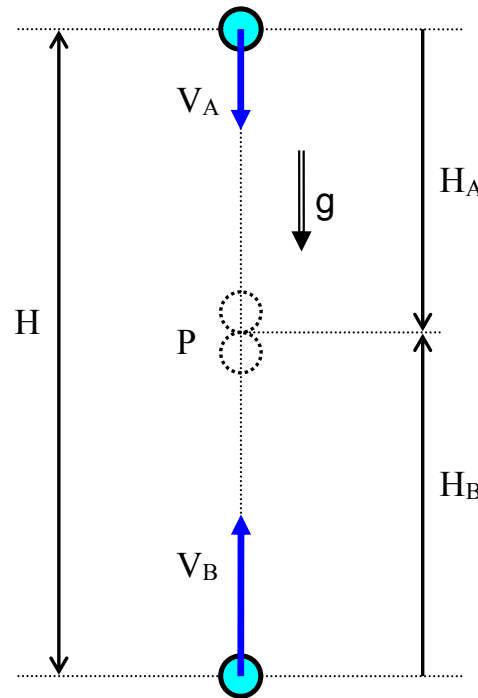
$$(V_A \cdot T + \frac{1}{2} g T^2) + (V_B \cdot T - \frac{1}{2} g T^2) = H$$

simplificando tenemos:

$$V_A \cdot T + V_B \cdot T = H$$

despejando obtenemos:

$$T_{\text{encuentro}} = \frac{H}{V_A + V_B}$$



EJEMPLO 01: Dos objetos que se encuentran en el mismo vertical separados una distancia vertical de 200 m, si uno de ellos se suelta libremente mientras el otro es lanzado hacia arriba con una rapidez de 40 m/s. Determinar el intervalo de tiempo que demoran en encontrarse.

Resolución

Los móviles están separados inicialmente 200 metros en la vertical. Aplicando la fórmula práctica:

$$T_{\text{encuentro}} = \frac{H}{V_A + V_B} \Rightarrow T_{\text{encuentro}} = \frac{200}{0 + 40} = 5 \text{ s}$$

Respuesta: La s esferas estarán a la misma altura después de 5 segundos.

EJEMPLO 02: Dos objetos que se encuentran en el mismo vertical separados una distancia vertical de 160 m, si uno de ellos se lanza hacia abajo con rapidez de 5 m/s mientras que el otro es lanzado hacia arriba con una rapidez de 35 m/s. Determinar el intervalo de tiempo que demoran en encontrarse.

Resolución

Los móviles están separados inicialmente 160 metros en la vertical. Aplicando la fórmula práctica:

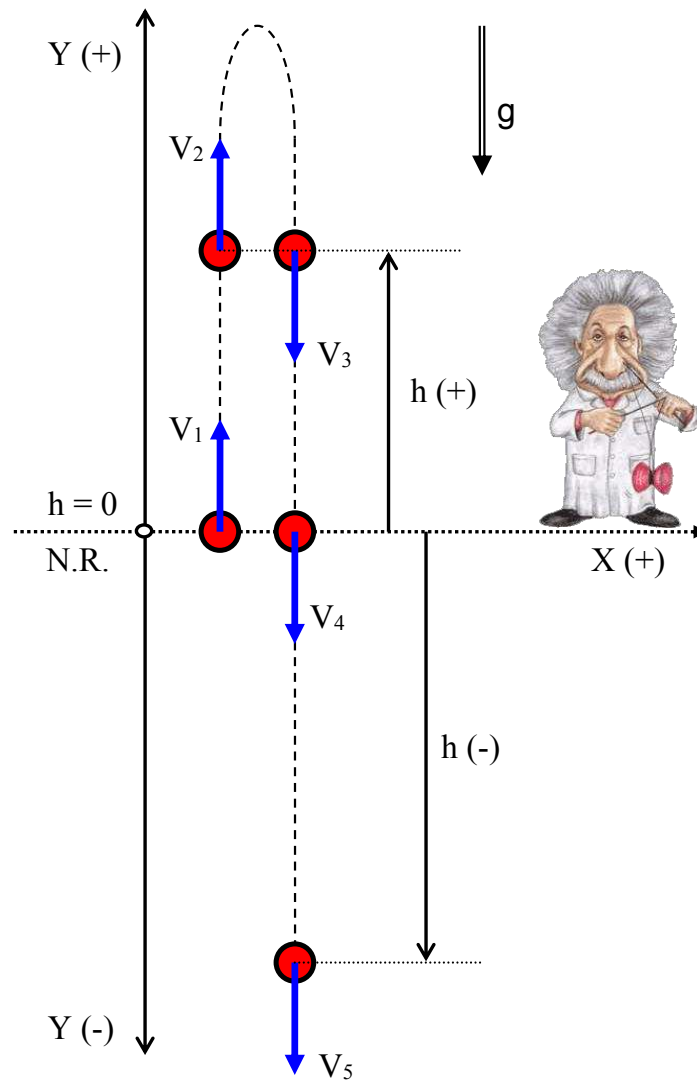
$$T_{\text{encuentro}} = \frac{H}{V_A + V_B} \Rightarrow T_{\text{encuentro}} = \frac{160}{5 + 35} = 4 \text{ s}$$

Respuesta: La s esferas estarán a la misma altura después de 5 segundos.

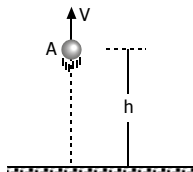
12. LA ALTURA ES DESPLAZAMIENTO VERTICAL

Si lanzamos un cuerpo verticalmente hacia arriba respecto de un sistema de referencia. Ahora analizamos el movimiento de cuerpo en caída libre en forma **vectorial**, es decir considerando los signos. Entonces la altura tendrá signos positivo o negativo:

- (1) Si la altura tiene **signo positivo** significa que el cuerpo se encuentra sobre el nivel de referencia, subiendo o bajando.
- (2) Si la altura tiene **signo negativo** significa que el cuerpo se encuentra debajo de la línea de referencia descendiendo.
- (3) Si la altura es **cero** significa que el cuerpo ha regresado o está pasando en ese instante por el nivel de referencia (N.R.).



EJEMPLO 01: Se muestra el lanzamiento de una partícula, con rapidez $V = 20$ m/s desde una altura $h = 300$ m. ¿Después de cuántos segundos llegará a la superficie terrestre? ($g = 10$ m/s²)



Resolución

El desplazamiento de la piedra finalmente es 300 metros vertical hacia abajo (signo negativo). Aplicamos la ecuación del movimiento que relaciona la posición y el tiempo:

$$h = V_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Reemplazando tenemos: $-300 = 20 \cdot t - \frac{1}{2}(10) \cdot t^2$

Resolviendo la ecuación: $-60 = 4 \cdot t - t^2 \Rightarrow t = 10$ s

Respuesta: La partícula llegará al piso después de 10 segundos.

EJEMPLO 02: Desde un globo a 75 m sobre el suelo, que asciende verticalmente con rapidez de 10 m/s, se suelta un saco de lastre, determine el intervalo de tiempo que le toma llegar al suelo. ($g = 10$ m/s²)

Resolución

La velocidad inicial del saco es 10 m/s hacia arriba (por inercia) respecto de nuestro observador ubicado en la Tierra. Aplicamos la ecuación del movimiento que relaciona la posición y el tiempo:

$$h = V_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Reemplazando tenemos: $-75 = 10 \cdot t - \frac{1}{2}(10) \cdot t^2$

Resolviendo la ecuación: $-15 = 2 \cdot t - t^2 \Rightarrow t = 5$ s

Respuesta: La partícula llegará al piso después de 5 segundos.

EJEMPLO 03: Un globo se encuentra subiendo con velocidad de 5 j (m/s) y en el instante que se encuentra a 360 m del piso, desde el globo se deja caer una piedra. ¿Qué tiempo tarda la piedra en llegar a la superficie terrestre? ($g = 10$ m/s²)

Resolución

La velocidad inicial de la piedra es 5 m/s hacia arriba (por inercia) respecto de nuestro observador ubicado en la Tierra. Aplicamos la ecuación del movimiento que relaciona la posición y el tiempo:

$$h = V_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Reemplazando tenemos: $-360 = 5 \cdot t - \frac{1}{2}(10) \cdot t^2$

Resolviendo la ecuación: $-72 = t - t^2 \Rightarrow t = 9$ s

Respuesta: La partícula llegará al piso después de 9 segundos.

EJEMPLO 04: Una esfera pequeña se lanza desde la azotea de un edificio con velocidad 40 j (m/s), tardando en llegar al piso 10 s. ¿Cuál es la altura del edificio? ($g = 10$ m/s²)

Resolución

Fijamos nuestro sistema de referencia en la azotea del edificio. El cuerpo es lanzado verticalmente a arriba. Aplicamos la ecuación del movimiento que relaciona posición y tiempo:

$$h = V_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Remplazando tenemos: $H = 40 \cdot (10) - \frac{1}{2} (10) \cdot (10)^2 = -100 \text{ m}$

El signo negativo significa que el cuerpo finalmente se desplaza verticalmente hacia abajo cuyo módulo es la altura del edificio.

Respuesta: La altura del edificio es 100 metros.

EJEMPLO 05: Desde la azotea de un edificio de 60 m de altura, se lanza un cuerpo con velocidad 10 j m/s. ¿A qué altura del piso se hallará el cuerpo al cabo de 4 segundos del lanzamiento? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

Fijamos nuestro sistema de referencia en la azotea del edificio. El cuerpo es lanzado verticalmente a arriba. Aplicamos la ecuación del movimiento que relaciona posición y tiempo:

$$h = V_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Remplazando tenemos: $H = 10 \cdot (4) - \frac{1}{2} (10) \cdot (4)^2 = -40 \text{ m}$

El signo negativo significa que el cuerpo finalmente se desplaza verticalmente hacia abajo respecto de la azotea. Entonces, respecto del piso la distancia es: $60 \text{ m} - 40 \text{ m}$.

Respuesta: Después de 4 segundos el cuerpo se encuentra a 20 metros respecto del piso.

EJEMPLO 06: De lo alto de una torre de 80 m de altura se lanza una piedra con velocidad de 30 j m/s. ¿Después de cuántos segundos impactará la piedra con el piso? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

Fijamos nuestro sistema de referencia en la parte superior de la torre. El cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba. Aplicamos la ecuación del movimiento que relaciona la posición y el tiempo:

$$h = V_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Remplazando tenemos: $-80 = 30t - \frac{1}{2} (10) \cdot t^2$

Resolviendo la ecuación:

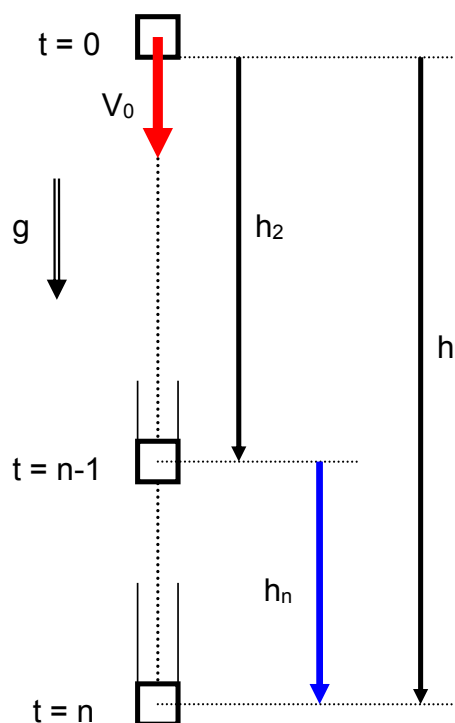
$$-16 = 6t - t^2 \Rightarrow t = 8 \text{ s}$$

Respuesta: La piedra llegará al piso después de 8 segundos.

13. DISTANCIA QUE RECORRE EN EL ENÉSIMO SEGUNDO

Analicemos el caso, cuando el cuerpo es lanzado verticalmente hacia abajo. El enésimo segundo está comprendido entre los instantes $t = n-1$ y $t = n$. Entonces la distancia que recorre en el enésimo segundo se determina restando las distancias que recorre el móvil en los primeros n segundos y en los $(n-1)$ segundos.

$$h = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$$



Para. $t = n$

$$h_1 = V_0 \cdot n + \frac{1}{2} g \cdot n^2$$

Para. $t = n-1$

$$h_2 = V_0 \cdot (n-1) + \frac{1}{2} g \cdot (n-1)^2$$

Restando:

$$h_n = h_1 - h_2$$

Obtenemos que:

$$h_n = V_0 + \frac{1}{2} g \cdot (2n-1)$$

CASOS PARTICULARES

a) Cuando el cuerpo es abandonado, soltado o dejado caer ($V_0 = 0$), se cumple que:

$$h_n = \frac{1}{2} g \cdot (2n-1)$$

b) Cuando el cuerpo es lanzado verticalmente hacia ARRIBA, el cuerpo inicia su movimiento en contra del campo de gravedad, es decir desacelera.

$$h_n = V_0 - \frac{1}{2} g \cdot (2n-1)$$

* Si h_n es positivo el cuerpo se desplaza verticalmente hacia arriba.

* Si h_n es negativo el cuerpo se desplaza verticalmente hacia abajo.

* Si h_n es cero el cuerpo regresa al punto inicial.

EJEMPLO 01: Un cuerpo se deja caer desde lo alto de una torre, ¿qué distancia recorre en el tercer segundo de su movimiento? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

El cuerpo sale del reposo ($V_0 = 0$).

Aplicamos la regla práctica. En el tercer segundo, entonces $n = 3$.

$$h_n = \frac{1}{2} g \cdot (2n-1) \Rightarrow h_n = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (2 \cdot 3 - 1) = 25 \text{ m}$$

Respuesta: el cuerpo se desplaza 25 metros, vertical hacia abajo.

EJEMPLO 02 Un cuerpo se lanza desde lo alto de una torre con velocidad 5 j (m/s), ¿qué distancia recorre en el tercer segundo de su movimiento? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

El cuerpo es lanzado verticalmente hacia ARRIBA con rapidez de 5 m/s. En el tercer segundo, entonces $n = 3$.

$$h_n = V_0 - \frac{1}{2} g \cdot (2n-1)$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$h_n = 5 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (2 \cdot 3 - 1) = -20 \text{ m}$$

Respuesta: el cuerpo se desplaza 20 metros, vertical hacia abajo.

EJEMPLO 03 Un cuerpo se lanza desde lo alto de una torre con velocidad 25 j (m/s), ¿qué distancia recorre en el tercer segundo de su movimiento? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

El cuerpo es lanzado verticalmente hacia ARRIBA con rapidez de 25 m/s. En el tercer segundo, entonces $n = 3$.

$$h_n = V_0 - \frac{1}{2} g \cdot (2n - 1)$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$h_n = 25 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (2 \cdot 3 - 1) = 25 - 25 = 0 \text{ m}$$

Respuesta: en el tercer segundo no experimenta desplazamiento.

EJEMPLO 04 Una moneda se lanza con velocidad -5 j (m/s) en caída libre. ¿Qué altura recorre la moneda en el quinto segundo de su movimiento? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

El cuerpo es lanzado verticalmente hacia ABAJO con rapidez de 5 m/s. En el quinto segundo, entonces $n = 5$.

$$h_n = V_0 + \frac{1}{2} g \cdot (2n - 1)$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$h_n = 5 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 50 \text{ m}$$

Respuesta: el cuerpo se desplaza 50 metros, vertical hacia abajo.

14. CAMPO GRAVITACIONAL

No sólo la Tierra atrae a los cuerpos, también el Sol, la Luna y todo astro. Se entiende por “gravedad” a la región de espacio que rodea a un astro gracias al cual atrae a los cuerpos. Todos los planetas (Tierra) y satélites (Luna) generan a su alrededor un campo de gravedad.

$$g_{\text{Luna}} = \frac{g_{\text{Tierra}}}{6}$$

15. CAMBIO DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD

La intensidad de la gravedad no es el mismo para todos los lugares de la Tierra, depende de la altura sobre el nivel del Mar y de la latitud.

El movimiento de caída libre plantea la misma aceleración para todos los cuerpos cualquiera que sea su masa, a esta aceleración se le llama aceleración de la gravedad normal, cuyo valor es 45° de latitud es:

$$g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

* En los polos: $g = 9,83 \text{ m/s}^2$ (Máxima)

* En el Ecuador: $g = 9,78 \text{ m/s}^2$ (Mínima)

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TIPO EXAMEN DE ADMISIÓN.

1. Un cuerpo es lanzado con velocidad 60 j (m/s). ¿A qué distancia del nivel de lanzamiento se encuentra el cuerpo después de 4 segundos? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

Analizando deducimos que el tiempo que demora en alcanzar la altura máxima es 6 segundos, entonces después de 4 segundos el cuerpo lanzado sigue en ascenso.

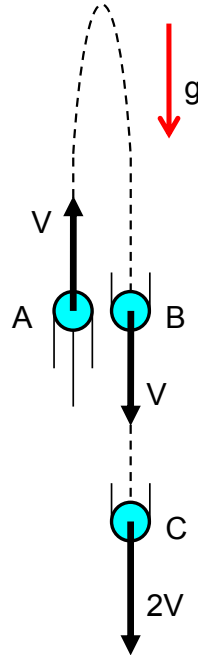
Aplicamos la ecuación:
$$h = V_0 t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$h = 60 \cdot (4) - \frac{(10) \cdot (4)^2}{2} = 160 \text{ m}$$

Respuesta: se encuentra a 160 m del piso después de 4 segundos.

2. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio, si luego de 6 s su rapidez se duplica, determinar la velocidad de lanzamiento. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución



Para el problema 02

Analizando deducimos que el cuerpo duplica su rapidez en el movimiento de regreso a la Tierra (se encuentra descendiendo en C).

Aplicamos la ecuación:

$$V_F = V_0 - g \cdot t$$

$$(-2V) = V - 10 \cdot (6) \Rightarrow V = 20 \text{ m.s}^{-1}$$

Respuesta: la velocidad de lanzamiento es, 20 m/s vertical hacia arriba.

3. De lo alto de una Torre, un cuerpo es lanzado con velocidad 20 j (m/s). ¿A qué distancia del nivel de lanzamiento se encuentra el cuerpo después de 8 segundos? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

Analizando deducimos que el tiempo que demora en alcanzar la altura máxima es 2 segundos, entonces después de 8 segundos el cuerpo lanzado se encuentra descendiendo.

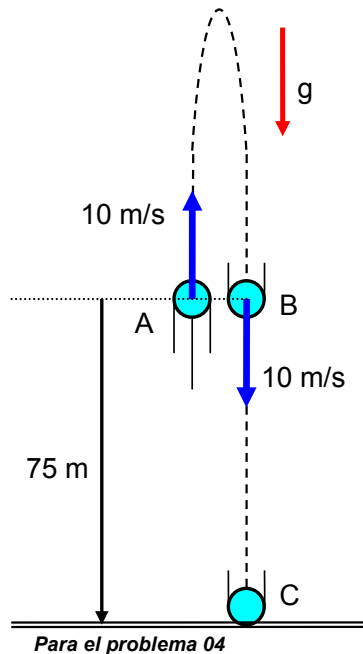
Aplicamos la ecuación: $h = V_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$

$$h = 20 \cdot (8) - \frac{(10) \cdot (8)^2}{2} = -160 \text{ m}$$

Respuesta: se encuentra a 160 m debajo del punto de lanzamiento después de 8 segundos.

4. Un globo aerostático sube con velocidad 10 j (m/s) y cuando se encuentra a una altura de 75 m respecto del suelo desde el globo se deja caer una piedra. ¿Qué tiempo demora la piedra en llegar al suelo? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución



PRIMER PASO. Fijamos nuestro sistema de referencia en la Tierra, entonces observamos que la velocidad inicial de la piedra es 10 j (m/s). El cuerpo asciende, alcanza su altura máxima y luego regresa a la Tierra.

SEGUNDO PASO. Aplicamos la ecuación: $h = V_0 t - \frac{g t^2}{2}$

$$-75 = 10 \cdot (T) - \frac{(10) \cdot (T)^2}{2} \Rightarrow 5T^2 - 10T - 75 = 0$$

TERCER PASO. Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$T^2 - 2T - 15 = 0 \Rightarrow T = 5 \text{ s}$$

Respuesta: la piedra llega a la superficie terrestre después de 5 segundos.

5. Un cuerpo se suelta desde 80 m de altura respecto del piso. ¿Qué velocidad tendrá 35 m antes de impactar con el piso? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

PRIMER PASO. Sabiendo que la velocidad inicial es nula, aplicamos los números de Galileo:

$$80 = 5 + 15 + 25 + 35$$

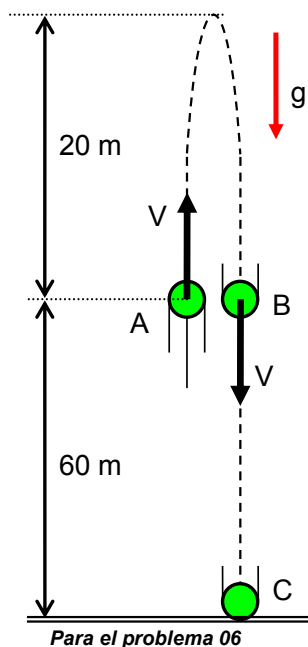
El número de términos de la suma coincide con la cantidad de segundos.

SEGUNDO PASO. Por consiguiente, demora el cuerpo 4 segundos en llegar al piso. Después de 3 segundos se encontrará a 35 metros del piso, en ese instante su velocidad será 30 m/s vertical hacia abajo.

Respuesta: la velocidad que tiene es 30 j (m/s).

6. Desde el piso se lanza verticalmente hacia arriba un proyectil y cuando le falta 2 segundos para alcanzar la altura máxima se encuentra a 60 m del piso. ¿Cuál fue la velocidad de lanzamiento? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución



PRIMER PASO. Sabiendo que la velocidad final es nula, cuando alcanza la altura máxima; aplicamos los números de Galileo:

$$20 = 5 + 15$$

El número de términos de la suma coincide con la cantidad de segundos. En los dos últimos segundos antes de alcanzar la altura máxima recorre 20 m. Entonces la altura máxima que sube es $60 \text{ m} + 20 \text{ m} = 80 \text{ m}$.

SEGUNDO PASO. Por consiguiente, en el descenso demora el cuerpo 4 segundos en llegar al piso.

$$80 = 5 + 15 + 25 + 35$$

La rapidez con que llega al piso será 40 m/s. La rapidez de lanzamiento hacia arriba y la rapidez con que regresa al piso son iguales.

Respuesta: la velocidad de lanzamiento es 40 j (m/s) .

7. Diego suelta un objeto y observa que durante el penúltimo segundo de su movimiento recorrió 25 m. ¿Con qué velocidad impacto en el piso? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN

Sabiendo que la velocidad inicial es nula, aplicamos los números de Galileo:

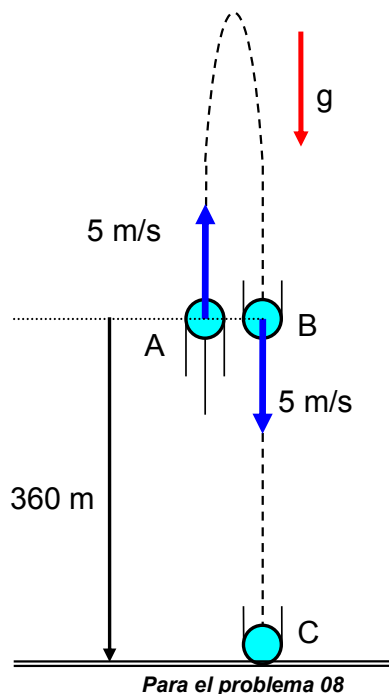
$$80 = 5 + 15 + 25 + 35$$

En el penúltimo segundo recorre 25 m y en el último recorre 35 m. El número de términos de la adición coincide con la cantidad de segundos. Por consiguiente, demora el cuerpo 4 segundos en llegar al piso.

Después de 4 segundos su velocidad será 30 m/s vertical hacia abajo.

Respuesta: la velocidad que tiene es 40 $\hat{j}$ (m/s).

8. Un globo se encuentra subiendo con velocidad de 5 $\hat{j}$ (m/s) y en el instante que se encuentra a 360 m del piso, desde el globo se deja caer una piedra. ¿Qué tiempo tarda la piedra en llegar a la superficie terrestre? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Resolución

PRIMER PASO. Fijamos nuestro sistema de referencia en la Tierra, entonces observamos que la velocidad inicial de la piedra es 5 $\hat{j}$ (m/s). El cuerpo asciende, alcanza su altura máxima y luego regresa a la Tierra.

SEGUNDO PASO. Aplicamos la ecuación: $h = V_0 t - \frac{g t^2}{2}$

$$-360 = 5 \cdot (T) - \frac{(10) \cdot (T)^2}{2} \Rightarrow 5T^2 - 5T - 360 = 0$$

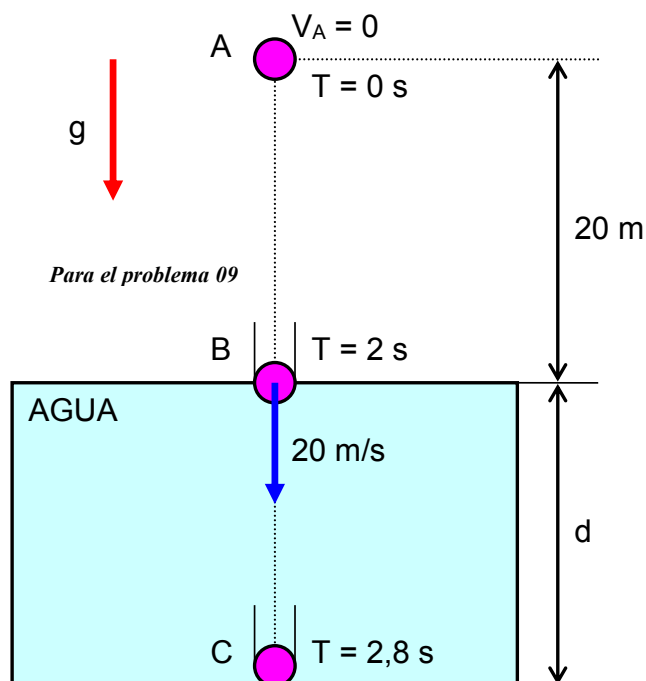
TERCER PASO. Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$T^2 - T - 72 = 0 \Rightarrow T = 9 \text{ s}$$

Respuesta: la piedra llega a la superficie terrestre después de 9 segundos.

9. Desde una altura de 20 m respecto de la superficie de un lago, se suelta una esfera pequeña, el cual tarda 2,8 s en llegar hasta el fondo. Si cuando ingresa al agua mantiene su velocidad constante, determinar la profundidad del lago. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución



PRIMER PASO. Sabiendo que la velocidad inicial es nula, aplicamos los números de Galileo:

$$20 = 5 + 15$$

En 2 segundos llega a la superficie del lago, entonces deducimos que se mueve con velocidad constante un intervalo de 0,8 segundo en el interior del agua. La esfera ingresa al agua con rapidez de 20 m/s.

SEGUNDO PASO. Aplicamos la ecuación del M.R.U.:

$$d = V \cdot T$$

$$d = (20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})(0,8 \text{ s}) = 16 \text{ m}$$

Respuesta: la profundidad del lago es 16 metros.

10. Un cuerpo se deja caer desde lo alto de una torre, ¿qué distancia recorre en el tercer segundo de su movimiento? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

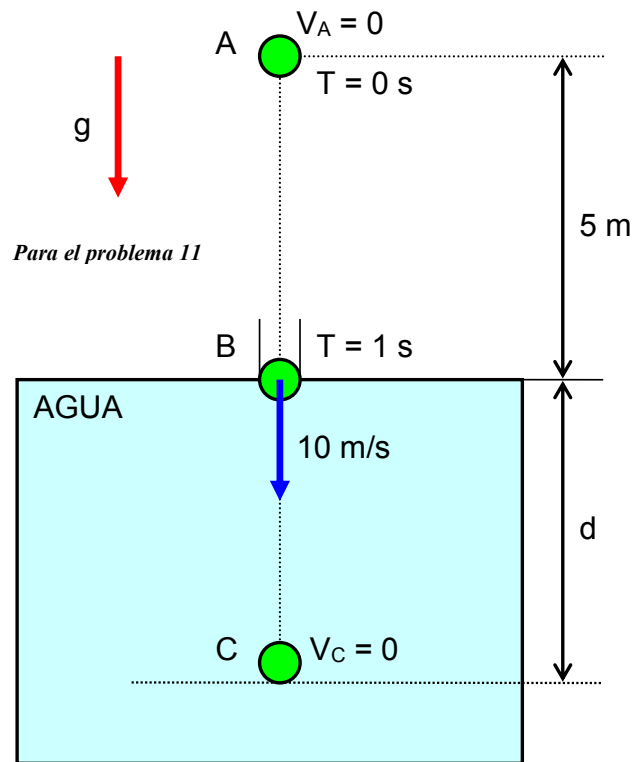
El cuerpo sale del reposo ($V_0 = 0$). Aplicamos la regla práctica. En el tercer segundo, entonces $n = 3$.

$$h_n = \frac{1}{2} g \cdot (2n - 1) \Rightarrow h_n = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (2 \cdot 3 - 1) = 25 \text{ m}$$

Respuesta: el cuerpo se desplaza 25 metros, vertical hacia abajo.

11. Desde 5 m de altura sobre el nivel de un lago, se suelta una esfera pequeña. ¿Hasta qué profundidad máxima llegará la esfera?, si la desaceleración que experimenta dentro del agua es $-8 \text{ j (m/s}^2\text{)}$. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución



PRIMER PASO. Sabiendo que la velocidad inicial es nula, aplicamos los números de Galileo: recorre 5m en el primer segundo de su movimiento.

En 1 segundo llega a la superficie del lago. La esfera ingresa al agua con rapidez de 10 m/s.

SEGUNDO PASO. Aplicamos la ecuación del M.R.U.V. en el tramo BC:

$$V_F^2 = V_0^2 - 2a.d$$

Reemplazamos los datos:

$$(0)^2 = (10)^2 - 2(8).d$$

Resolviendo la ecuación tenemos: $d = 6,25$ m

Respuesta: la máxima profundidad que alcanza en el lago es 6,25 metros.

12. Un cuerpo se lanza desde lo alto de una torre con velocidad 5 j (m/s), ¿qué distancia recorre en el tercer segundo de su movimiento? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

El cuerpo es lanzado verticalmente hacia *arriba* con rapidez de 5 m/s. En el tercer segundo, entonces $n = 3$.

$$h_n = V_0 - \frac{1}{2} g.(2n-1)$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$h_n = 5 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (2 \cdot 3 - 1) = -20 \text{ m}$$

Respuesta: el cuerpo se desplaza 20 metros, vertical hacia abajo.

13. Un cuerpo se lanza desde lo alto de una torre con velocidad 25 j (m/s) , ¿qué distancia recorre en el tercer segundo de su movimiento? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

El cuerpo es lanzado verticalmente hacia ARRIBA con rapidez de 25 m/s . En el tercer segundo, entonces $n = 3$.

$$h_n = V_0 - \frac{1}{2} g \cdot (2n - 1)$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$h_n = 25 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (2 \cdot 3 - 1) = 25 - 25 = 0 \text{ m}$$

Respuesta: en el tercer segundo no experimenta desplazamiento.

14. Una moneda se lanza con velocidad -5 j (m/s) en caída libre. ¿Qué altura recorre la moneda en el quinto segundo de su movimiento? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

El cuerpo es lanzado verticalmente hacia ABAJO con rapidez de 5 m/s . En el quinto segundo, entonces $n = 5$.

$$h_n = V_0 + \frac{1}{2} g \cdot (2n - 1)$$

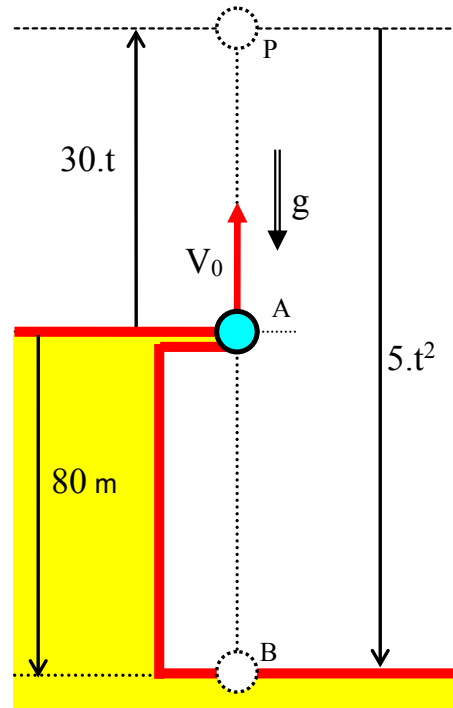
Reemplazando los datos tenemos:

$$h_n = 5 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 50 \text{ m}$$

Respuesta: el cuerpo se desplaza 50 metros, vertical hacia abajo.

MÉTODO VECTORIAL. El desplazamiento, la atura, velocidad y aceleración son cantidades vectoriales. En cada resolución buscaremos una ecuación vectorial.

- Desde una altura de 80 m se dispara una partícula verticalmente hacia arriba con velocidad de 30 m/s. Determinar el tiempo que transcurre hasta llegar al suelo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos.

El M.R.U en el tramo AP y caída libre en el tramo PB.

Tramo AB: El desplazamiento vertical hacia abajo, la distancia que desciende la partícula (altura). La altura siempre fue, y es ciertamente un vector desplazamiento.

Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 30.t$

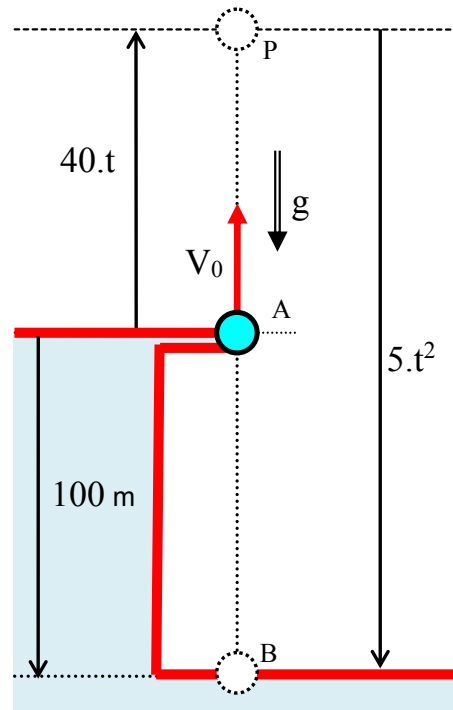
Tramo PB: El desplazamiento vertical, con caída libre: $PB = \frac{1}{2}g.t^2 = 5.t^2$

Ecuación de desplazamientos: $AB = AP + PB \Rightarrow -80 = 30.t - 5.t^2$

Resolviendo la ecuación: $(t+2)(t-8)=0 \Rightarrow t=8 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 8 segundos.

2. Desde una altura de 100 m se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 40 m/s. Determinar el tiempo que transcurre hasta llegar al suelo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos.

El M.R.U en el tramo AP y caída libre en el tramo PB.

Tramo AB: El desplazamiento vertical hacia abajo, la distancia que desciende la partícula (altura). La altura siempre fue, y es ciertamente un vector desplazamiento.

Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 40.t$

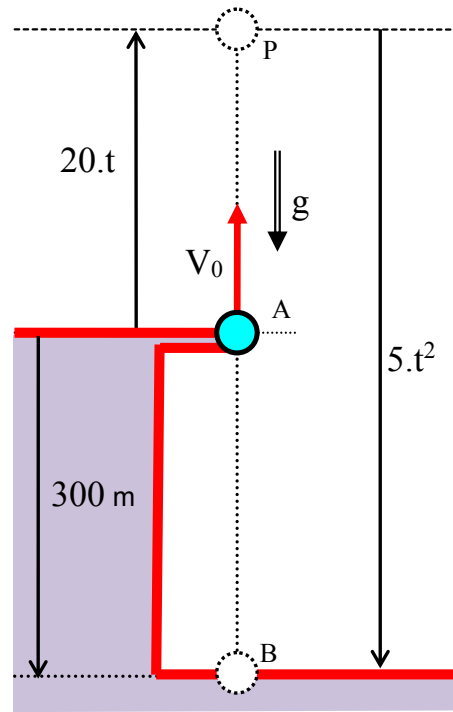
Tramo PB: El desplazamiento vertical, con caída libre: $PB = \frac{1}{2}g.t^2 = 5.t^2$

Ecuación de desplazamientos: $AB = AP + PB \Rightarrow -100 = 40.t - 5.t^2$

Resolviendo la ecuación: $(t+2)(t-10)=0 \Rightarrow t=10 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 10 segundos.

3. Desde una altura de 300 m se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 20 m/s. Determinar el tiempo que transcurre hasta llegar al suelo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos.

El M.R.U en el tramo AP y caída libre en el tramo PB.

Tramo AB: El desplazamiento vertical hacia abajo, la distancia que desciende la partícula (altura). La altura siempre fue, y es ciertamente un vector desplazamiento.

Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 20.t$

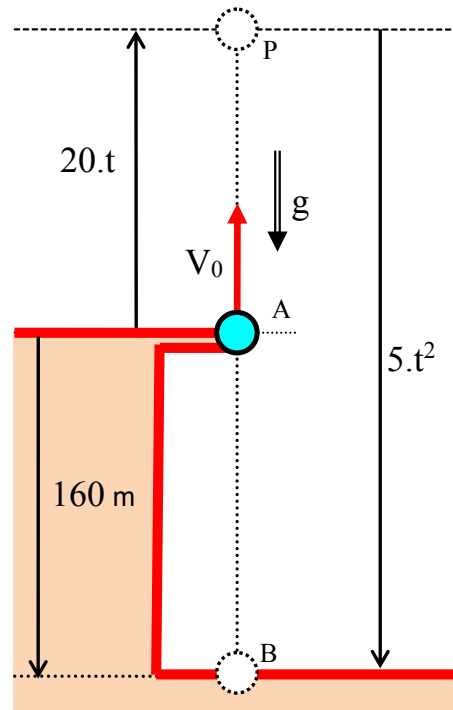
Tramo PB: El desplazamiento vertical, con caída libre: $PB = \frac{1}{2}g.t^2 = 5.t^2$

Ecuación de desplazamientos: $AB = AP + PB \Rightarrow -300 = 20.t - 5.t^2$

Resolviendo la ecuación: $(t+6)(t-10)=0 \Rightarrow t=10 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 10 segundos.

4. Desde una altura de 160 m se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 20 m/s. Determinar el tiempo que transcurre hasta llegar al suelo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos.

El M.R.U en el tramo AP y caída libre en el tramo PB.

Tramo AB: El desplazamiento vertical hacia abajo, la distancia que desciende la partícula (altura). La altura siempre fue, y es ciertamente un vector desplazamiento.

Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 20.t$

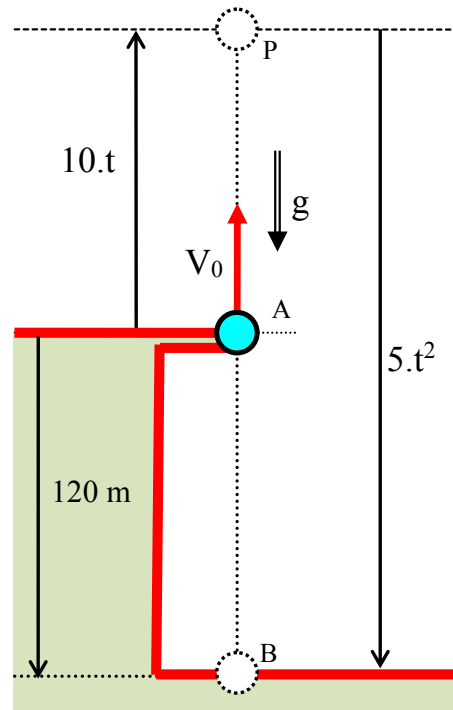
Tramo PB: El desplazamiento vertical, con caída libre: $PB = \frac{1}{2}g.t^2 = 5.t^2$

Ecuación de desplazamientos: $AB = AP + PB \Rightarrow -160 = 20.t - 5.t^2$

Resolviendo la ecuación: $(t+4)(t-8)=0 \Rightarrow t = 8 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 8 segundos.

5. Desde una altura de 120 m se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 10 m/s. Determinar el tiempo que transcurre hasta llegar al suelo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos.

El M.R.U en el tramo AP y caída libre en el tramo PB.

«1» Tramo AB: El desplazamiento vertical hacia abajo, la distancia que desciende la partícula (altura). La altura siempre fue, y es ciertamente un vector desplazamiento.

«2» Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 10.t$

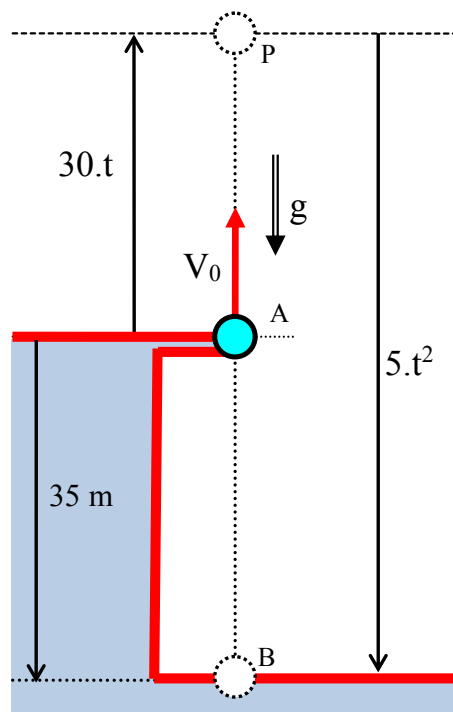
«3» Tramo PB: El desplazamiento vertical, con caída libre: $PB = \frac{1}{2}gt^2 = 5.t^2$

«4» **Ecuación de desplazamientos:** $AB = AP + PB \Rightarrow -120 = 10.t - 5.t^2$

Resolviendo la ecuación: $(t + 4)(t - 6) = 0 \Rightarrow t = 6 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 6 segundos.

6. Desde una altura de 35 m se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 30 m/s. Determinar el tiempo que transcurre hasta llegar al suelo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos.

El M.R.U en el tramo AP y caída libre en el tramo PB.

«1» Tramo AB: El desplazamiento vertical hacia abajo, la distancia que desciende la partícula (altura). La altura siempre fue, y es ciertamente un vector desplazamiento.

«2» Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 30.t$

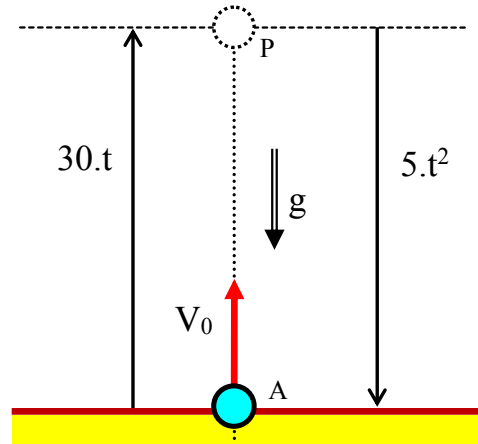
«3» Tramo PB: El desplazamiento vertical, con caída libre: $PB = \frac{1}{2}gt^2 = 5.t^2$

«4» **Ecuación de desplazamientos:** $AB = AP + PB \Rightarrow -35 = 30.t - 5.t^2$

Resolviendo la ecuación: $(t+1)(t-7)=0 \Rightarrow t=7 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 7 segundos.

7. Desde el piso dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 30 m/s. ¿Después de cuantos segundos regresa al piso? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos. El M.R.U en el tramo AP (sube) y caída libre en el tramo PA (baja).

⟦1⟧ Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 30.t$

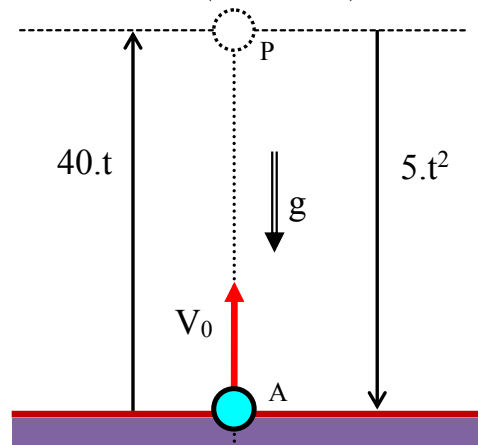
⟦2⟧ Tramo PB: El desplazamiento vertical, con caída libre: $PB = \frac{1}{2}g.t^2 = 5.t^2$

⟦3⟧ **Ecuación de desplazamientos:** $AP + PA = 0 \Rightarrow 30.t - 5.t^2 = 0$

Resolviendo la ecuación: $(t)(t - 6) = 0 \Rightarrow t = 6 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 6 segundos.

8. Desde el piso dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 40 m/s. ¿Después de cuantos segundos regresa al piso? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos. El M.R.U en el tramo AP (sube) y caída libre en el tramo PA (baja).

⟦1⟧ Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 40.t$

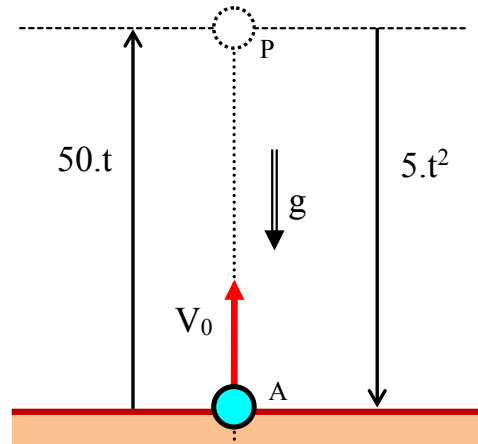
⟨2⟩ Tramo PB: El desplazamiento vertical, con caída libre: $PB = \frac{1}{2} g t^2 = 5.t^2$

⟨3⟩ **Ecuación de desplazamientos:** $AP + PA = 0 \Rightarrow 40.t - 5.t^2 = 0$

Resolviendo la ecuación: $(t)(t - 8) = 0 \Rightarrow t = 8 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 8 segundos.

9. Desde el piso dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 50 m/s. ¿Después de cuantos segundos regresa al piso? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos.

El M.R.U en el tramo AP (sube) y caída libre en el tramo PA (baja).

⟨1⟩ Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 50.t$

⟨2⟩ Tramo PB: El desplazamiento vertical, con caída libre: $PB = \frac{1}{2} g t^2 = 5.t^2$

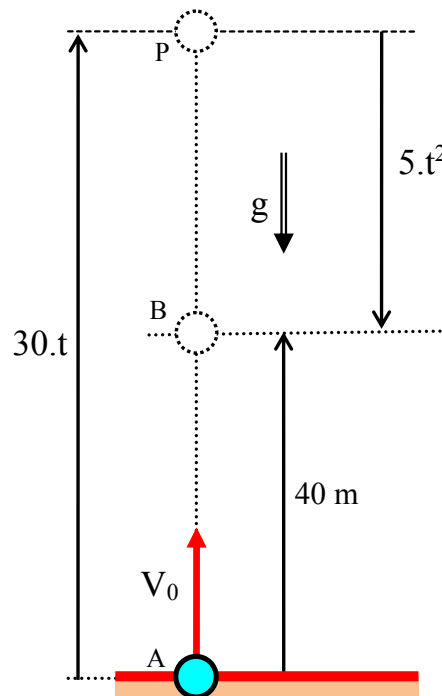
⟨3⟩ **Ecuación de desplazamientos:** $AP + PA = 0 \Rightarrow 50.t - 5.t^2 = 0$

Resolviendo la ecuación: $(t)(t - 10) = 0 \Rightarrow t = 10 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 10 segundos.

10. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 30 m/s.

¿Después de cuántos segundos se encontrará a 40 m del piso por segunda vez? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos.

El M.R.U en el tramo AP y caída libre en el tramo PB.

⟨1⟩ Tramo AB: El desplazamiento vertical hacia arriba, la distancia que asciende la partícula (altura). La altura siempre fue, y es ciertamente un vector desplazamiento.

⟨2⟩ Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 30.t$

⟨3⟩ Tramo PB: El desplazamiento vertical hacia abajo, con caída libre: $PB = \frac{1}{2}gt^2 = 5.t^2$

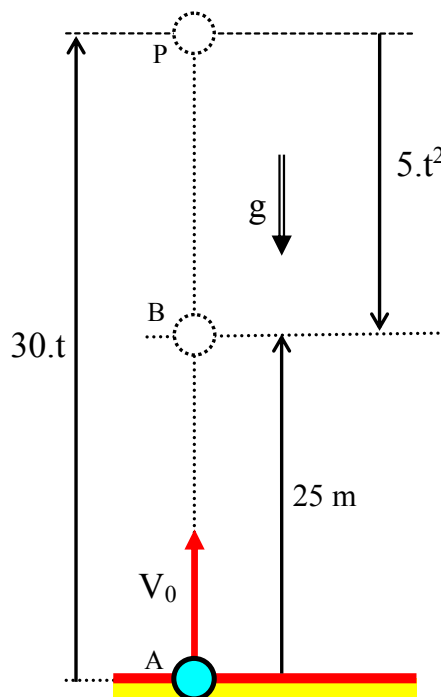
⟨4⟩ **Ecuación de desplazamientos:** $AB = AP + PB \Rightarrow 40 = 30.t - 5.t^2$

Resolviendo la ecuación: $(t-2)(t-4)=0 \Rightarrow t = 2 \text{ s y } t = 4 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 4 segundos.

11. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 30 m/s.

¿Después de cuántos segundos se encontrará a 25 m del piso por segunda vez? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos.

El M.R.U en el tramo AP y caída libre en el tramo PB.

⟨1⟩ Tramo AB: El desplazamiento vertical hacia arriba, la distancia que asciende la partícula (altura). La altura siempre fue, y es ciertamente un vector desplazamiento.

⟨2⟩ Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 30.t$

⟨3⟩ Tramo PB: El desplazamiento vertical hacia abajo, con caída libre: $PB = \frac{1}{2}gt^2 = 5.t^2$

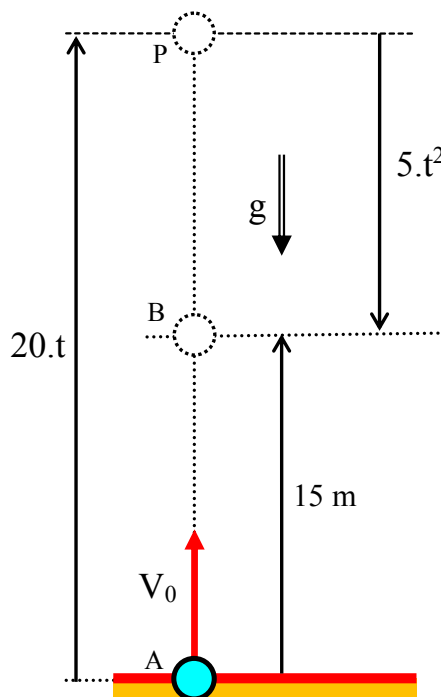
⟨4⟩ **Ecuación de desplazamientos:** $AB = AP + PB \Rightarrow 25 = 30.t - 5.t^2$

Resolviendo la ecuación: $(t-1)(t-5)=0 \Rightarrow t=1 \text{ s } y t=5 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 5 segundos.

12. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 20 m/s.

¿Después de cuántos segundos se encontrará a 15 m del piso por segunda vez? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos.

El M.R.U en el tramo AP y caída libre en el tramo PB.

⟨1⟩ Tramo AB: El desplazamiento vertical hacia arriba, la distancia que asciende la partícula (altura). La altura siempre fue, y es ciertamente un vector desplazamiento.

⟨2⟩ Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0 \cdot t = 20t$

⟨3⟩ Tramo PB: El desplazamiento vertical hacia abajo, con caída libre: $PB = \frac{1}{2}gt^2 = 5t^2$

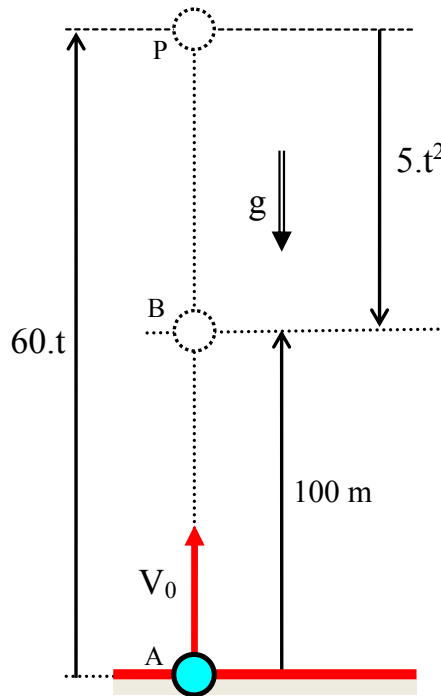
⟨4⟩ **Ecuación de desplazamientos:** $AB = AP + PB \Rightarrow 15 = 20t - 5t^2$

Resolviendo la ecuación: $(t-1)(t-3)=0 \Rightarrow t=1 \text{ s} \text{ y } t=3 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 3 segundos.

13. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 60 m/s.

¿Después de cuántos segundos se encontrará a 100 m del piso por segunda vez? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos. El M.R.U en el tramo AP y caída libre en el tramo PB.

«1» Tramo AB: El desplazamiento vertical hacia arriba, la distancia que asciende la partícula (altura). La altura siempre fue, y es ciertamente un vector desplazamiento.

«2» Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 60.t$

«3» Tramo PB: El desplazamiento vertical hacia abajo, con caída libre: $PB = \frac{1}{2}gt^2 = 5.t^2$

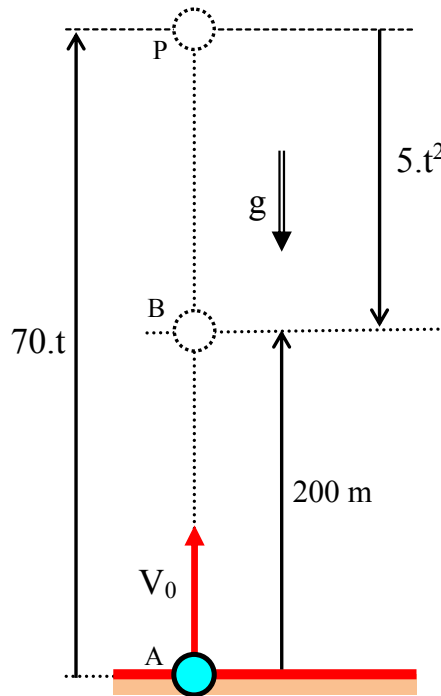
«4» **Ecuación de desplazamientos:** $AB = AP + PB \Rightarrow 100 = 60.t - 5.t^2$

Resolviendo la ecuación: $(t-2)(t-10)=0 \Rightarrow t=2 \text{ s y } t=10 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 10 segundos.

14. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 70 m/s.

¿Después de cuántos segundos se encontrará a 200 m del piso por segunda vez? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos.

El M.R.U en el tramo AP y caída libre en el tramo PB.

⟨1⟩ Tramo AB: El desplazamiento vertical hacia arriba, la distancia que asciende la partícula (altura). La altura siempre fue, y es ciertamente un vector desplazamiento.

⟨2⟩ Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 70.t$

⟨3⟩ Tramo PB: El desplazamiento vertical hacia abajo, con caída libre: $PB = \frac{1}{2}gt^2 = 5.t^2$

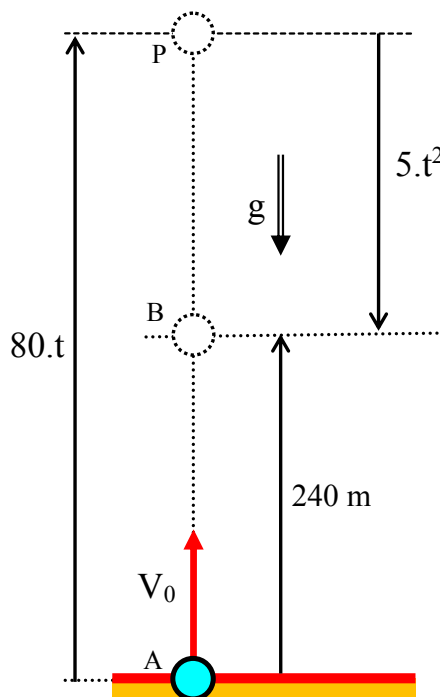
⟨4⟩ **Ecuación de desplazamientos:** $AB = AP + PB \Rightarrow 200 = 70.t - 5.t^2$

Resolviendo la ecuación: $(t-4)(t-10)=0 \Rightarrow t=4 \text{ s } y \text{ } t=10 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 10 segundos.

15. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 80 m/s.

¿Después de cuántos segundos se encontrará a 240 m del piso por segunda vez? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos.

El M.R.U en el tramo AP y caída libre en el tramo PB.

⟨1⟩ Tramo AB: El desplazamiento vertical hacia arriba, la distancia que asciende la partícula (altura). La altura siempre fue, y es ciertamente un vector desplazamiento.

⟨2⟩ Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0.t = 80.t$

⟨3⟩ Tramo PB: El desplazamiento vertical hacia abajo, con caída libre: $PB = \frac{1}{2}gt^2 = 5.t^2$

⟨4⟩ **Ecuación de desplazamientos:** $AB = AP + PB \Rightarrow 240 = 80.t - 5.t^2$

Resolviendo la ecuación: $(t-4)(t-12)=0 \Rightarrow t=4 \text{ s } y \text{ } t=12 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 12 segundos.

16. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 90 m/s.
¿Después de cuántos segundos se encontrará a 360 m del piso por segunda vez? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

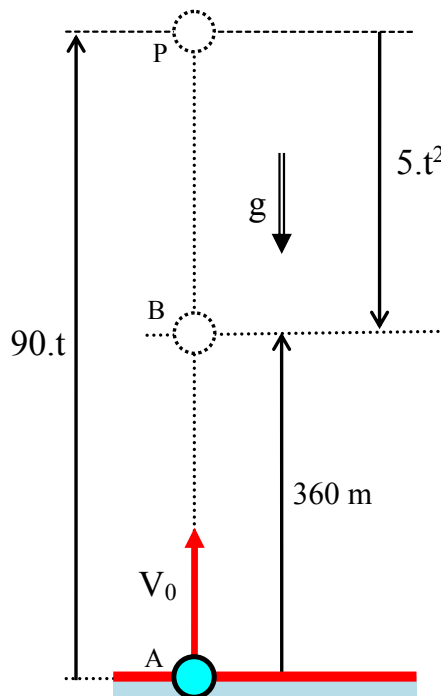
RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método de desplazamientos y la superposición de movimientos.

El M.R.U en el tramo AP y caída libre en el tramo PB.

⟨1⟩ Tramo AB: El desplazamiento vertical hacia arriba, la distancia que asciende la partícula (altura). La altura siempre fue, y es ciertamente un vector desplazamiento.

⟨2⟩ Tramo AP: El desplazamiento vertical con M.R.U, $AP = V_0 \cdot t = 90 \cdot t$

⟨3⟩ Tramo PB: El desplazamiento vertical hacia abajo, con caída libre: $PB = \frac{1}{2} g t^2 = 5 \cdot t^2$



⟨4⟩ Ecuación de desplazamientos: $AB = AP + PB \Rightarrow 360 = 90 \cdot t - 5 \cdot t^2$

Resolviendo la ecuación: $(t - 6)(t - 12) = 0 \Rightarrow t = 6 \text{ s y } t = 12 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 12 segundos.

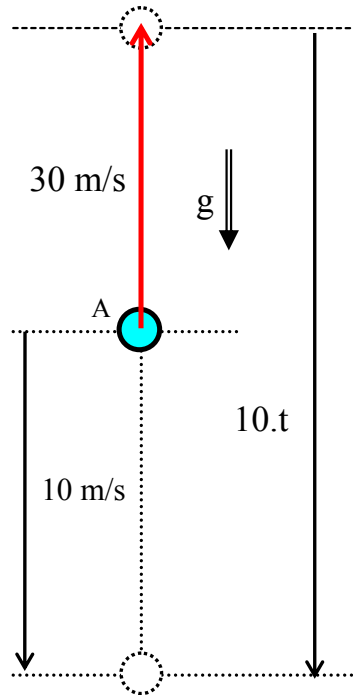
17. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 30 m/s.
¿Después de cuántos segundos la rapidez será 10 m/s por segunda vez? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

⟨1⟩ La velocidad inicial de lanzamiento es: $V_0 = 30.\hat{j} \text{ (m/s)}$

⟨2⟩ El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}.t = 10.t \text{ (-}\hat{j}\text{) m/s}$

⟨3⟩ La velocidad final, tiene sentido hacia abajo: $V_F = -10.\hat{j} \text{ (m/s)}$



⟨4⟩ Ecuación vectorial para la velocidad es: $V_F = V_0 + \vec{g}.t$

Resolviendo la ecuación: $-10 = 30 - 10.t \Rightarrow t = 4 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 4 segundos.

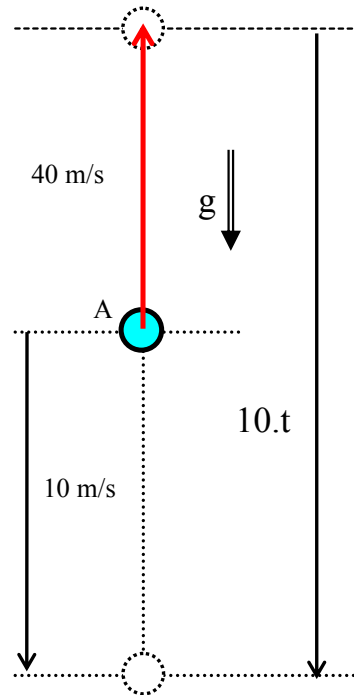
18. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 40 m/s.
¿Después de cuántos segundos la rapidez será 10 m/s por segunda vez? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

«1» La velocidad inicial de lanzamiento es: $V_0 = 40.\hat{j} \text{ (m/s)}$

«2» El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}t = 10.t \text{ (-}\hat{j}\text{) m/s}$

«3» La velocidad final, tiene sentido hacia abajo: $V_F = -10.\hat{j} \text{ (m/s)}$



«4» Ecuación vectorial para la velocidad es: $V_F = V_0 + \vec{g}t$

Resolviendo la ecuación: $-10 = 40 - 10.t \Rightarrow t = 5 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 5 segundos.

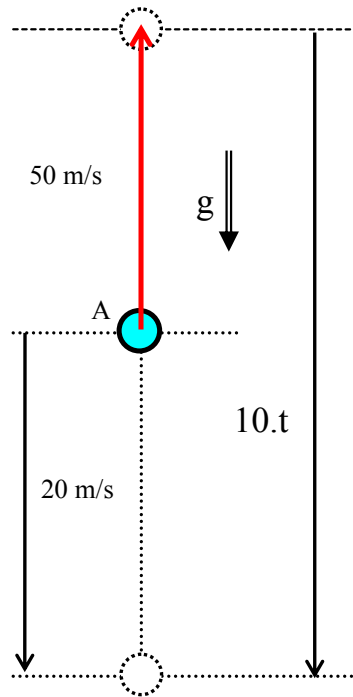
19. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 50 m/s.
¿Después de cuántos segundos la rapidez será 20 m/s por segunda vez? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

«1» La velocidad inicial de lanzamiento es: $V_0 = 50.\hat{j} \text{ (m/s)}$

«2» El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}.t = 10.t \text{ (-}\hat{j}\text{) m/s}$

«3» La velocidad final, tiene sentido hacia abajo: $V_F = -20.\hat{j} \text{ (m/s)}$



«4» Ecuación vectorial para la velocidad es: $V_F = V_0 + \vec{g}.t$

Resolviendo la ecuación: $-20 = 50 - 10.t \Rightarrow t = 7 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 7 segundos.

20. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 20 m/s.

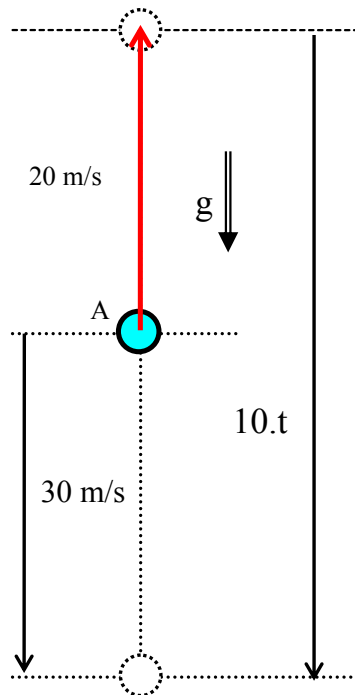
¿Después de cuántos segundos la rapidez será 30 m/s? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

«1» La velocidad inicial de lanzamiento es: $V_0 = 20.\hat{j} \text{ (m/s)}$

«2» El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}.t = 10.t \text{ (-}\hat{j}\text{) m/s}$

«3» La velocidad final, tiene sentido hacia abajo: $V_F = -30.\hat{j} \text{ (m/s)}$



«4» **Ecuación vectorial para la velocidad es:** $V_F = V_0 + \vec{g}.t$

Resolviendo la ecuación: $-30 = 20 - 10.t \Rightarrow t = 5 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 5 segundos.

21. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 20 m/s.

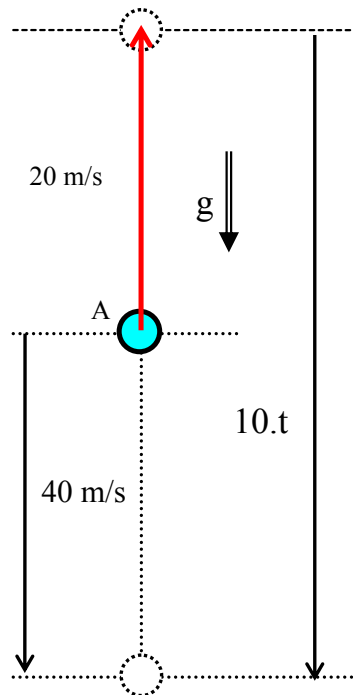
¿Después de cuántos segundos la rapidez será 40 m/s? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

«1» La velocidad inicial de lanzamiento es: $V_0 = 20.\hat{j} \text{ (m/s)}$

«2» El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}.t = 10.t \text{ (-}\hat{j}\text{) m/s}$

«3» La velocidad final, tiene sentido hacia abajo: $V_F = -40.\hat{j} \text{ (m/s)}$



«4» Ecuación vectorial para la velocidad es: $V_F = V_0 + \vec{g}.t$

Resolviendo la ecuación: $-40 = 20 - 10.t \Rightarrow t = 6 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 6 segundos.

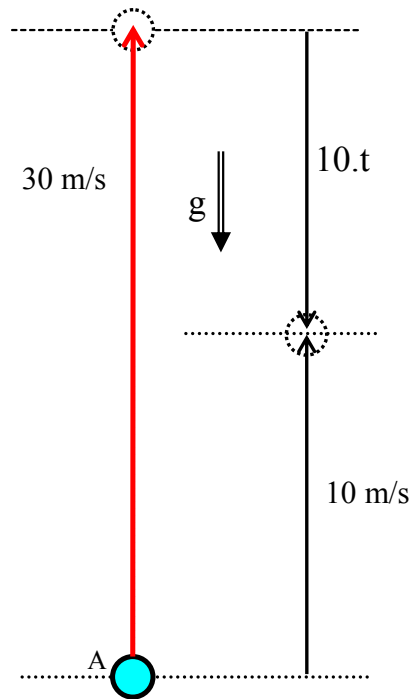
22. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 30 m/s.
¿Después de cuántos segundos la rapidez será 10 m/s por primera vez? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

«1» La velocidad inicial de lanzamiento es: $V_0 = 30.\hat{j} \text{ (m/s)}$

«2» El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}.t = 10.t \text{ (-}\hat{j}\text{) m/s}$

«3» La velocidad final, tiene sentido hacia arriba: $V_F = 10.\hat{j} \text{ (m/s)}$



«4» Ecuación vectorial para la velocidad es: $V_F = V_0 + \vec{g}.t$

Resolviendo la ecuación: $10 = 30 - 10.t \Rightarrow t = 2 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 2 segundos.

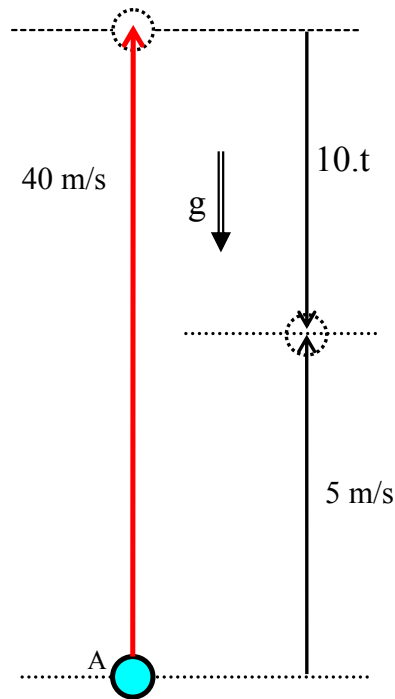
23. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 40 m/s.
¿Después de cuántos segundos la rapidez será 5 m/s por primera vez? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

«1» La velocidad inicial de lanzamiento es: $V_0 = 40.\hat{j} \text{ (m/s)}$

«2» El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}.t = 10.t \text{ (-}\hat{j}\text{) m/s}$

«3» La velocidad final, tiene sentido hacia arriba: $V_F = 5.\hat{j} \text{ (m/s)}$



«4» Ecuación vectorial para la velocidad es: $V_F = V_0 + \vec{g}.t$

Resolviendo la ecuación: $5 = 40 - 10.t \Rightarrow t = 3,5 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 3,5 segundos.

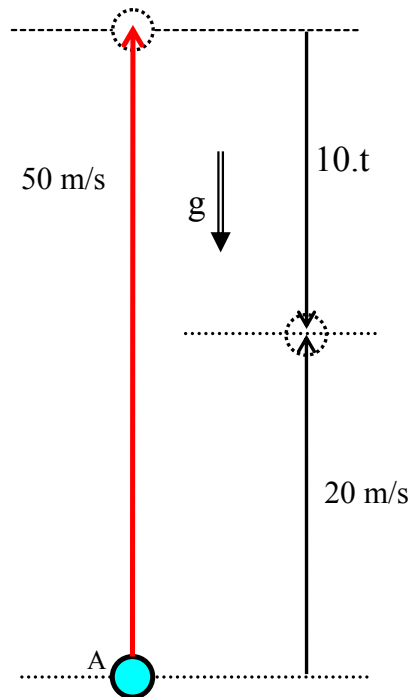
24. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 50 m/s.
¿Después de cuántos segundos la rapidez será 20 m/s por primera vez? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

«1» La velocidad inicial de lanzamiento hacia arriba es: $V_0 = 50.\hat{j} \text{ (m/s)}$

«2» El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}t = 10.t \text{ (-}\hat{j}\text{) m/s}$

«3» La velocidad final, tiene sentido hacia arriba: $V_F = 20.\hat{j} \text{ (m/s)}$



«4» Ecuación vectorial para la velocidad es: $V_F = V_0 + \vec{g}t$

Resolviendo la ecuación: $20 = 50 - 10.t \Rightarrow t = 3 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 3 segundos.

25. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 20 m/s.

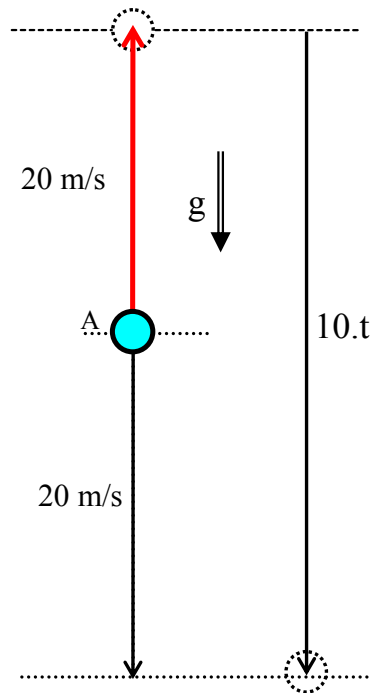
¿Después de cuántos segundos la rapidez será 20 m/s? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

«1» La velocidad inicial de lanzamiento hacia arriba es: $V_0 = 20.\hat{j} \text{ (m/s)}$

«2» El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}t = 10.t(-\hat{j}) \text{ m/s}$

«3» La velocidad final, tiene sentido hacia abajo: $V_F = -20.\hat{j} \text{ (m/s)}$



«4» Ecuación vectorial para la velocidad es: $V_F = V_0 + \vec{g}t$

Resolviendo la ecuación: $-20 = 20 - 10.t \Rightarrow t = 4 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 4 segundos.

26. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 30 m/s.

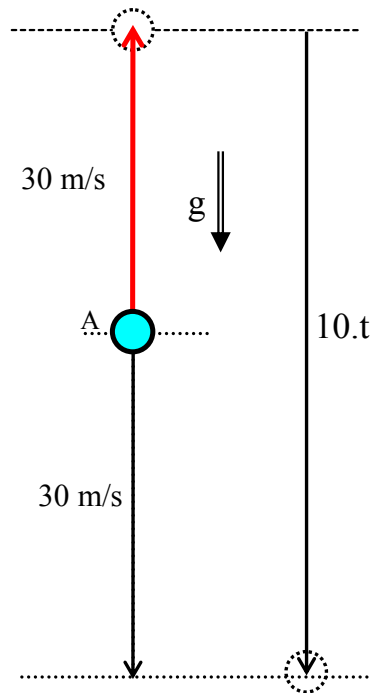
¿Después de cuántos segundos la rapidez será 30 m/s? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

«1» La velocidad inicial de lanzamiento hacia arriba es: $V_0 = 30.\hat{j} \text{ (m/s)}$

«2» El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}t = 10.t \text{ (-}\hat{j}\text{) m/s}$

«3» La velocidad final, tiene sentido hacia abajo: $V_F = -30.\hat{j} \text{ (m/s)}$



«4» **Ecuación vectorial para la velocidad es:** $V_F = V_0 + \vec{g}t$

Resolviendo la ecuación: $-30 = 30 - 10.t \Rightarrow t = 6 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 6 segundos.

27. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 40 m/s.

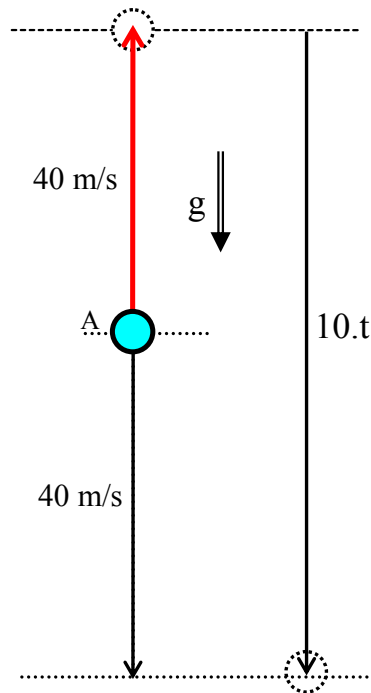
¿Después de cuántos segundos la rapidez será 40 m/s? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

«1» La velocidad inicial de lanzamiento hacia arriba es: $V_0 = 40.\hat{j} \text{ (m/s)}$

«2» El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}t = 10.t \text{ (-}\hat{j}\text{) m/s}$

«3» La velocidad final, tiene sentido hacia abajo: $V_F = -40.\hat{j} \text{ (m/s)}$



«4» **Ecuación vectorial para la velocidad es:** $V_F = V_0 + \vec{g}t$

Resolviendo la ecuación: $-40 = 40 - 10.t \Rightarrow t = 8 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 8 segundos.

28. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 40 m/s.

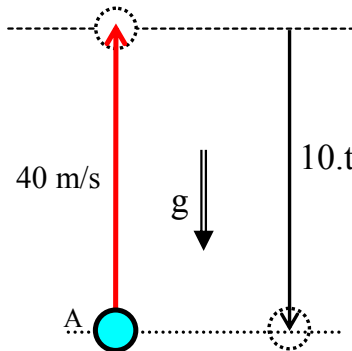
¿Después de cuántos segundos la rapidez será nula? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

⟦1⟧ La velocidad inicial de lanzamiento hacia arriba es: $V_0 = 40.\hat{j} \text{ (m/s)}$

⟦2⟧ El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}.t = -10.t \text{ (}\hat{j}\text{) m/s}$

⟦3⟧ La velocidad final, tiene sentido hacia abajo: $V_F = 0.\hat{j} \text{ (m/s)}$



⟦4⟧ Ecuación vectorial para la velocidad es: $V_F = V_0 + \vec{g}.t$

Resolviendo la ecuación: $0 = 40 - 10.t \Rightarrow t = 4 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 4 segundos.

29. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 30 m/s.

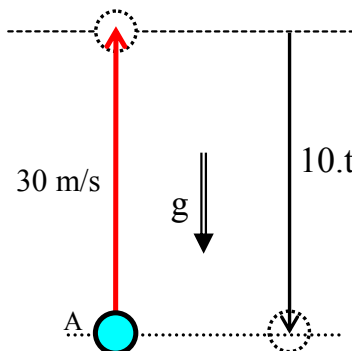
¿Después de cuántos segundos la rapidez será nula? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

⟦1⟧ La velocidad inicial de lanzamiento hacia arriba es: $V_0 = 30.\hat{j} \text{ (m/s)}$

⟦2⟧ El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}.t = -10.t \text{ (}\hat{j}\text{) m/s}$

⟦3⟧ La velocidad final, tiene sentido hacia abajo: $V_F = 0.\hat{j} \text{ (m/s)}$



⟦4⟧ Ecuación vectorial para la velocidad es: $V_F = V_0 + \vec{g}.t$

Resolviendo la ecuación: $0 = 30 - 10.t \Rightarrow t = 3 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 3 segundos.

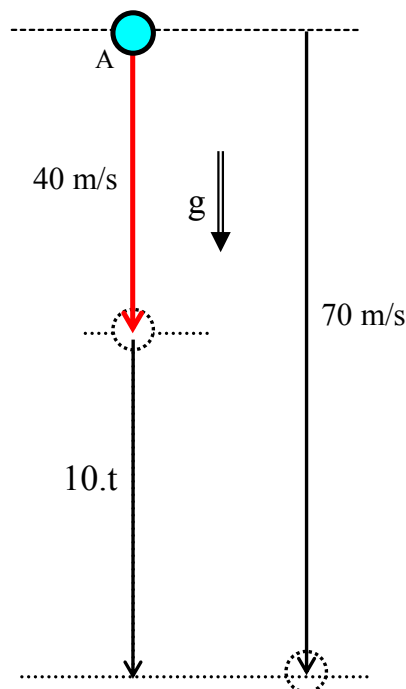
30. Desde lo alto de una torre se dispara un proyectil verticalmente hacia abajo con velocidad de 40 m/s. ¿Después de cuántos segundos la rapidez será 70 m/s? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

⟨1⟩ La velocidad inicial de lanzamiento hacia abajo es: $V_0 = -40.\hat{j} \text{ (m/s)}$

⟨2⟩ El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}.t = -10.t \text{ (}\hat{j}\text{) m/s}$

⟨3⟩ La velocidad final, tiene sentido hacia abajo: $V_F = -70.\hat{j} \text{ (m/s)}$



⟨4⟩ **Ecuación vectorial para la velocidad es:** $V_F = V_0 + \vec{g}.t$

Resolviendo la ecuación: $-70 = -40 - 10.t \Rightarrow t = 3 \text{ s}$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 3 segundos.

31. **EJEMPLO:** Desde lo alto de una torre se dispara un proyectil verticalmente hacia abajo con velocidad de 30 m/s. ¿Después de cuántos segundos la rapidez será 70 m/s? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

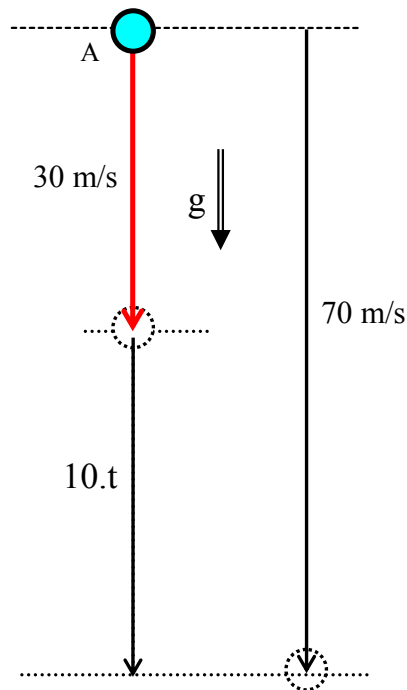
⟨1⟩ La velocidad inicial de lanzamiento hacia abajo es: $V_0 = -30.\hat{j} \text{ (m/s)}$

⟨2⟩ El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}.t = -10.t \text{ (}\hat{j}\text{) m/s}$

⟨3⟩ La velocidad final, tiene sentido hacia abajo: $V_F = -70.\hat{j} \text{ (m/s)}$

⟨4⟩ **Ecuación vectorial para la velocidad es:** $V_F = V_0 + \vec{g}.t$

Resolviendo la ecuación: $-70 = -30 - 10.t \Rightarrow t = 4 \text{ s}$



Respuesta: el tiempo transcurrido es 4 segundos.

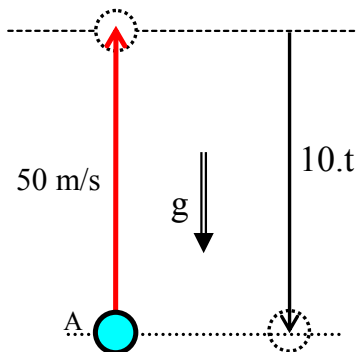
32. Desde el suelo se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad de 50 m/s .
¿Después de cuántos segundos la rapidez será nula? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN. Utilizaremos el método vectorial.

«1» La velocidad inicial de lanzamiento hacia arriba es: $V_0 = 50.\hat{j} \text{ (m/s)}$

«2» El cambio de la velocidad debido a la gravedad es: $\Delta V = \vec{g}t = -10t(\hat{j}) \text{ m/s}$

«3» La velocidad final, tiene sentido hacia abajo: $V_F = 0.\hat{j} \text{ (m/s)}$



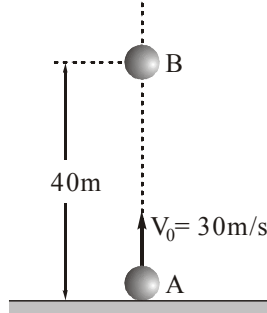
«4» Ecuación vectorial para la velocidad es: $V_F = V_0 + \vec{g}t$

Resolviendo la ecuación: $0 = 50 - 10t \Rightarrow t = 5 \text{ s}$

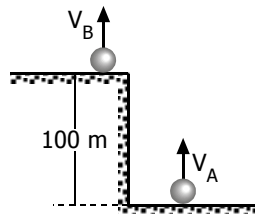
Respuesta: el tiempo transcurrido es 5 segundos.

PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE:

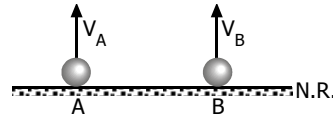
- Desde una altura de 100 metros se deja caer una piedra y al mismo tiempo del piso se lanza otra piedra, tienen la misma rapidez cuando se encuentran. ¿Qué distancia (en m) ascendió la piedra lanzada desde el piso? $\left(g = 10 \frac{m}{s^2}\right)$
 A) 55 B) 60 **C) 65** D) 70 E) 75
- Se muestra el lanzamiento vertical de una esfera en el punto A con rapidez $V_0 = 30 \text{ m/s}$. Determinar la rapidez de la esfera cuando pasa por el punto B. $(g = 10 \text{ m/s}^2)$



- A) 10 m/s B) 12 m/s C) 14 m/s D) 16 m/s E) 18 m/s
- Se muestra el lanzamiento vertical de dos esferas simultáneamente con rapidez de $V_A = 80 \text{ m/s}$ y $V_B = 30 \text{ m/s}$. ¿Después de cuántos segundos las esferas se encuentran a la misma altura? $(g = 10 \text{ m/s}^2)$

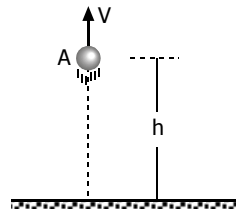


- A) 1 s B) 2 s C) 3 s D) 4 s E) 5 s
- Se muestra el lanzamiento vertical de dos esferas con rapidez de $V_A = 100 \text{ m/s}$ y $V_B = 100 \text{ m/s}$. El móvil B es lanzado 6 segundos después que el móvil A. ¿Después de cuántos segundos del lanzamiento de B las esferas se encuentran a la misma altura? $(g = 10 \text{ m/s}^2)$

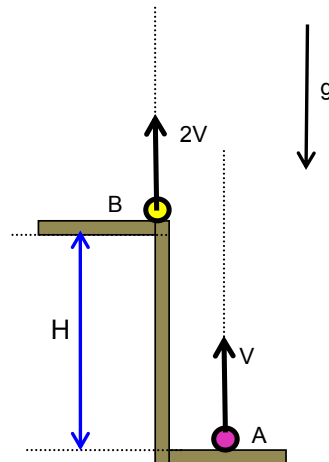


- A) 12 s B) 13 s C) 14 s D) 7 s E) 8 s
- Una partícula lanzada hacia arriba demora 2 segundos en regresar al punto de lanzamiento. Determine la altura máxima que alcanza el cuerpo. $(g = 10 \text{ m/s}^2)$
 A) 10 m B) 15 m C) 5 m D) 20 m E) 25 m

6. Un cohete que inicia su movimiento desde el reposo, asciende verticalmente con aceleración constante de $a = 5 \text{ m/s}^2$ mientras que el combustible se quema, si el combustible se agota luego de 200 segundos, ¿Qué altura máxima (en km) alcanza el cohete? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
- A) 40 B) 50 C) 80 D) 100 E) ninguna
7. Se muestra el lanzamiento de una partícula, con rapidez $V = 20 \text{ m/s}$ desde una altura $h = 300 \text{ m}$. ¿Después de cuántos segundos llegará a la superficie terrestre? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

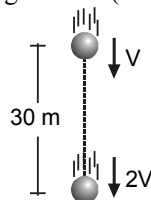


- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14
8. Desde las posiciones A y B se lanzan simultáneamente dos objetos hacia arriba con rapidez V y $2V$ ($V = 10 \text{ m/s}$), si el objeto lanzado desde A llega solamente hasta B, ¿Cuál será la distancia (en m) que separa a los cuerpos cuando la esfera lanzada desde B comience a descender? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



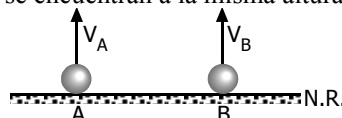
- A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30
9. Un cuerpo fue lanzado verticalmente hacia abajo. Durante el décimo segundo de su movimiento descendió dos veces de los que descendió en el quinto segundo. ¿Cuál fue la rapidez con que fue lanzado (en m/s)? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
10. Una esfera pequeña se abandona ($t = 0 \text{ s}$) en caída libre vertical. Determine el desplazamiento entre $t = 1 \text{ s}$ y $t = 3 \text{ s}$. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
- A) -5 j B) -15 j C) -25 j D) -35 j E) -40 j

11. En cierto planeta una partícula en caída libre duplica su rapidez luego de recorrer 30 m en 2 segundos. Determine la aceleración de la gravedad (en m/s^2).



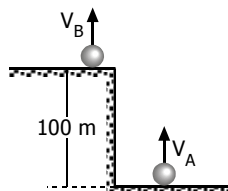
- A) 5 j B) -5 j C) 15 j D) -15 j E) -10 j

12. Dos partículas A y B son lanzadas verticalmente hacia arriba con la misma rapidez: $V_A = V_B = 80 \text{ m/s}$. La partícula B es lanzada 2 segundos después que A. ¿Después de cuántos segundos del lanzamiento de B, las partículas se encuentran a la misma altura? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



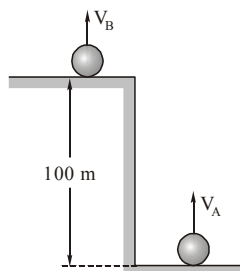
- A) 11 B) 8 C) 10 D) 12 E) 9

13. Dos partículas A y B son lanzadas verticalmente hacia arriba simultáneamente con rapidez: $V_A = 75 \text{ m/s}$ y $V_B = 35 \text{ m/s}$. ¿Después de cuántos segundos las partículas se encuentran a la misma altura? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- A) 1,5 B) 2,5 C) 3,0 D) 3,5 E) 4,0

14. Se muestra el lanzamiento vertical de dos esferas simultáneamente con rapidez de $V_A = 60 \text{ m/s}$ y $V_B = 20 \text{ m/s}$. ¿Después de cuántos segundos las esferas se encuentran a la misma altura? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

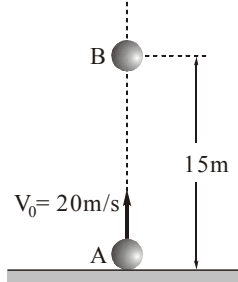


- A) 2,5 s B) 3,5 s C) 4,5 s D) 5,5 s E) 6,5 s

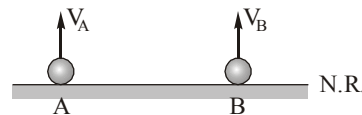
15. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad 40 j (m/s). Determine el desplazamiento (en m) entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 8 \text{ s}$. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

- A) 0 j B) -5 j C) 15 j D) -15 j E) -10 j

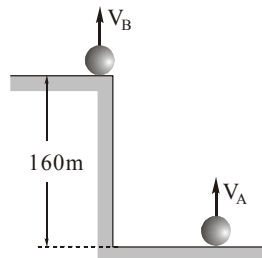
16. Desde un globo que sube con velocidad de 20 j (m/s) y que se encuentra a una altura de 400 m sobre el suelo se suelta una piedra. Determinar el tiempo transcurrido (en s) que demora en llegar al suelo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
A) 9,16 B) 10,5 C) 11,17 D) 13,6 E) 17,16
17. Un cuerpo recorre 340 m en los dos últimos segundos de su movimiento de caída libre. Determine el tiempo total (en s) que demora en caer el cuerpo sabiendo que el cuerpo es soltado. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
A) 40 B) 18 C) 82 D) 41 E) 20
18. Se muestra el lanzamiento vertical de una esfera en el punto A con rapidez $V_0 = 20 \text{ m/s}$. Determinar la rapidez de la esfera cuando pasa por el punto B. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- A) 10 m/s B) 12 m/s C) 14 m/s D) 16 m/s E) 18 m/s
19. Se muestra el lanzamiento vertical de dos esferas con rapidez de $V_A = 100 \text{ m/s}$ y $V_B = 100 \text{ m/s}$. El móvil B es lanzado 4 segundos después que el móvil A. ¿Después de cuántos segundos del lanzamiento de B las esferas se encuentran a la misma altura? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

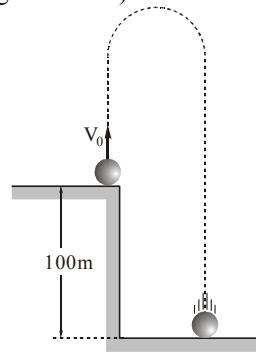


- A) 12 s B) 8 s C) 9 s D) 10 s E) 11 s
20. Se muestra el lanzamiento vertical de dos esferas simultáneamente con rapidez de $V_A = 70 \text{ m/s}$ y $V_B = 30 \text{ m/s}$. ¿Después de cuántos segundos las esferas se encuentran a la misma altura? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

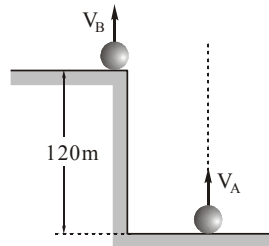


- A) 1 s B) 2 s C) 3 s D) 4 s E) 5 s

21. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad 10 j (m/s). Determine el desplazamiento (en m) entre $t = 1 \text{ s}$ y $t = 2 \text{ s}$. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 A) 5 j B) -5 j C) 15 j D) -15 j E) -10 j
22. Se muestra el lanzamiento vertical de una esfera con rapidez $V_0 = 40 \text{ m/s}$. ¿Después de cuántos segundos la esfera llegará al piso? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

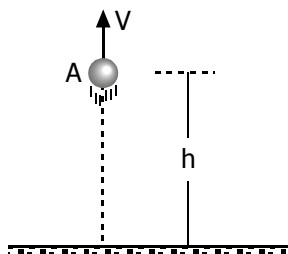


- A) 12 s B) 8 s C) 9 s D) 10 s E) 11 s
23. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad 50 j (m/s). Determine el desplazamiento (en m) entre $t = 4 \text{ s}$ y $t = 6 \text{ s}$. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 A) 5 j B) -5 j C) 15 j D) -15 j E) 0 j
24. Se muestra el lanzamiento vertical de dos esferas simultáneamente con rapidez de $V_A = 70 \text{ m/s}$ y $V_B = 30 \text{ m/s}$. ¿Después de cuántos segundos las esferas se encuentran a la misma altura? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- A) 1 s B) 2 s C) 3 s D) 4 s E) 5 s
25. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad 50 j (m/s). Determine el desplazamiento (en m) en el cuarto segundo de su movimiento. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 A) 5 j B) -5 j C) 15 j D) -15 j E) -10 j
26. Una partícula con movimiento vertical pasa por un punto P y luego de 3 segundos regresa a dicho punto. Si el punto P se encuentra a 20 m del suelo, halle la rapidez (en m/s) con que la partícula fue lanzada. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25
27. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad 40 j (m/s). Determine el desplazamiento (en m) entre $t = 4 \text{ s}$ y $t = 5 \text{ s}$. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 A) 5 j B) -5 j C) 15 j D) -15 j E) -10 j

28. Un cuerpo cae verticalmente desde el reposo. Determine la altura que descendió cuando su velocidad es de 8 m/s. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 A) 4,3 m B) 6,7 m C) 3,2 m D) 2,8 m E) N.A.
29. Se muestra el lanzamiento de una partícula, con rapidez $V = 20 \text{ m/s}$ desde una altura $h = 25 \text{ m}$. ¿Después de cuántos segundos llegará a la superficie terrestre? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 12
30. Un cuerpo se suelta, cae libremente y le toma 6 s llegar al suelo. Determine la altura que recorre en los 2 últimos segundos de su caída. ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$)
 A) 85m B) 78m C) 120m D) 90m E) 100m
31. Se suelta un cuerpo y cae libremente una altura de 100 m, determine la rapidez en ese instante que llega al piso. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 A) 8 m/s B) 10 m/s C) $8\sqrt{5} \text{ m/s}$ D) $\sqrt{50} \text{ m/s}$ E) $20\sqrt{5} \text{ m/s}$
32. Un globo aerostático asciende verticalmente con rapidez constante de 50 m/s, en un instante dado se deja caer un cuerpo respecto del globo, que tarda 20 s en impactar con el piso. Calcular la altura a la que se encontraba el globo al momento de soltar el cuerpo. ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$)
 A) 870m B) 790m C) 1230m D) 960m E) N.A.
33. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez de 20 m/s, ¿Al cabo de que tiempo como máximo se encuentra a una altura igual 75 % de su altura máxima? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 A) 3 s B) $7 - \sqrt{3} \text{ s}$ C) $2 - \sqrt{3} \text{ s}$ D) $7 + \sqrt{3} \text{ s}$ E) 1s
34. Dos cuerpos se encuentran separados verticalmente por una distancia “H” metros, el cuerpo que está en tierra se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad “v” m/s, mientras el otro se suelta simultáneamente. Determine el intervalo de tiempo que demoran en encontrarse.
 A) $\frac{2H}{v} \text{ s}$ B) $\frac{H}{2v} \text{ s}$ C) $\frac{3H}{4v} \text{ s}$ D) $\frac{H}{v} \text{ s}$ E) $\frac{\sqrt{2}H}{v} \text{ s}$
35. Determine la altura máxima que alcanza un objeto que se mueve verticalmente, si en el último segundo de su ascenso recorre la cuarta parte de su altura máxima. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 A) 30m B) 45m C) 50m D) 18m E) 20m
36. Dos piedras se lanzan simultáneamente verticalmente hacia arriba, al cabo de 10 s se encuentran separadas 20 m. Determine la diferencia de rapidez con las que fueron lanzadas. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 A) 4 m/s B) 3 m/s C) 10 m/s D) 8 m/s E) N.A.

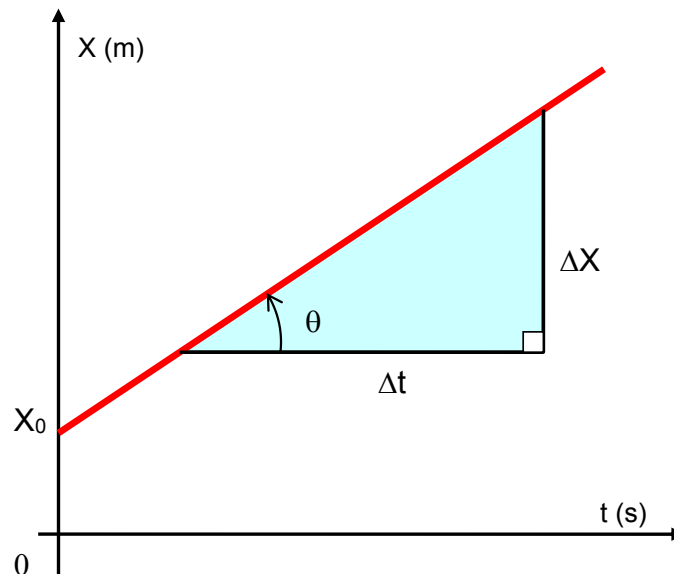
37. Determinar el intervalo de tiempo que demoran en encontrarse. Si dos objetos que se encuentran en el mismo vertical separados una distancia vertical de 200 m, si uno de ellos se suelta libremente mientras el otro es lanzado hacia arriba con una velocidad de 40 m/s.
A) 1s B) 2s C) 3s D) 4s E) 5s
38. Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba con cierta velocidad, si luego se lanza en la misma dirección y sentido desde el mismo punto con una velocidad igual al doble de la primera, alcanza una altura máxima 60 m por encima de la primera. Calcule la altura máxima alcanzada en el primer lanzamiento. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
A) 30m B) 45m C) 25m D) 35m E) 20m
39. A un objeto soltado libremente desde una altura determinada en la Tierra le toma llegar al piso 3 s, si realizamos lo mismo en un planeta donde la aceleración de la gravedad es la cuarta parte de la terrestre y para la misma altura sobre el terreno, calcule el intervalo de tiempo que le toma llegar al piso.
A) 4 s B) 7 s C) 6 s D) 10 s E) N.A
40. Calcule la distancia vertical que separa a dos objetos, si uno se suelta desde el reposo y el otro se lanza verticalmente hacia arriba al mismo tiempo con una rapidez de 60 m/s de manera que se encuentren justo donde el que fue lanzado desde el piso alcanza su altura máxima. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
A) 360m B) 450m C) 256m D) 435 m E) 200 m
41. Un cuerpo es lanzado desde el piso verticalmente hacia arriba con una rapidez de 10 m/s. Determine el tiempo que le toma regresar al punto de lanzamiento. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
A) 4s B) 7s C) 6s D) 2s E) 3s
42. Dos objetos que se encuentran en la misma vertical separados 100 m parten simultáneamente, uno es soltado libremente mientras el otro es lanzado hacia arriba, si se encuentran cuando ambos poseen la misma rapidez, determinar a que altura desde el piso se produce el encuentro.
A) 80 m B) 75 m C) 65 m D) 95 m E) 100 m
43. Calcule el módulo de la aceleración de la gravedad en m/s^2 de un planeta X si un objeto que cae libremente, duplica su velocidad a lo largo de 90 m en 3 s.
A) $\frac{10}{3}$ B) $\frac{40}{7}$ C) $\frac{20}{3}$ D) $\frac{33}{2}$ E) N.A
44. Desde el techo de un ascensor de 2,5 m de altura y que sube con velocidad constante de 8 m/s, se desprende un clavo, determine el tiempo que le toma al clavo impactar en el piso del ascensor.
A) $\sqrt{\frac{1}{4}} \text{ s}$ B) $\sqrt{\frac{1}{3}} \text{ s}$ C) $\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ s}$ D) $\sqrt{3} \text{ s}$ E) N.A
45. Desde el piso es lanzado verticalmente hacia arriba un cuerpo con una rapidez de 50 m/s. Determine el tiempo de vuelo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
A) 14s B) 17s C) 16s D) 12s E) 10s

GRÁFICAS DEL MOVIMIENTO



1. GRÁFICA: POSICIÓN (x) VERSUS TIEMPO (t)

En la gráfica x - t , la posición (x) puede aumentar, disminuir; permanecer constante al transcurrir el tiempo; en estas gráficas siempre se emplean las pendientes de los segmentos rectos.



Dada la gráfica x-t tendremos que:

La pendiente (m) del segmento L será: $m = \tan \theta$

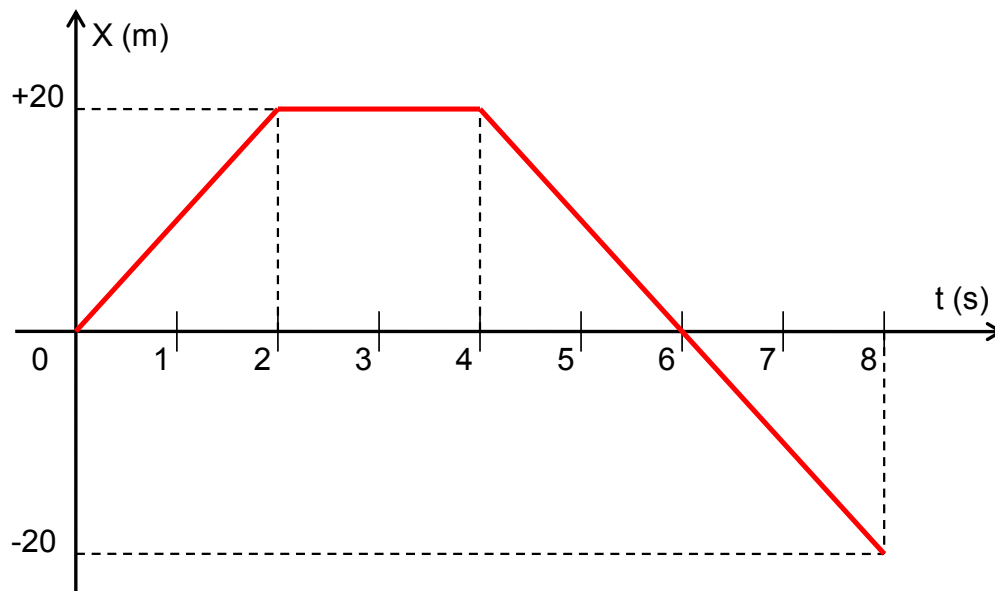
$$\Rightarrow m = \frac{\Delta X}{\Delta t} \dots\dots\dots (1)$$

Recuerde la definición de la velocidad: $V = \frac{\Delta X}{\Delta t}$

$$\text{Luego: } \|V\| = \tan \theta$$

En cualquier gráfica x-t la pendiente de los segmentos rectos representan la velocidad del móvil.

EJEMPLO 01: Se muestra la variación de la posición de una partícula respecto del tiempo. Determine la velocidad media en el intervalo $t \in [4;8]$ segundo.



Resolución

PRIMER PASO. La velocidad media se define como la razón entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo:

Definición de velocidad media:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

SEGUNDO PASO. Reemplazando los datos:

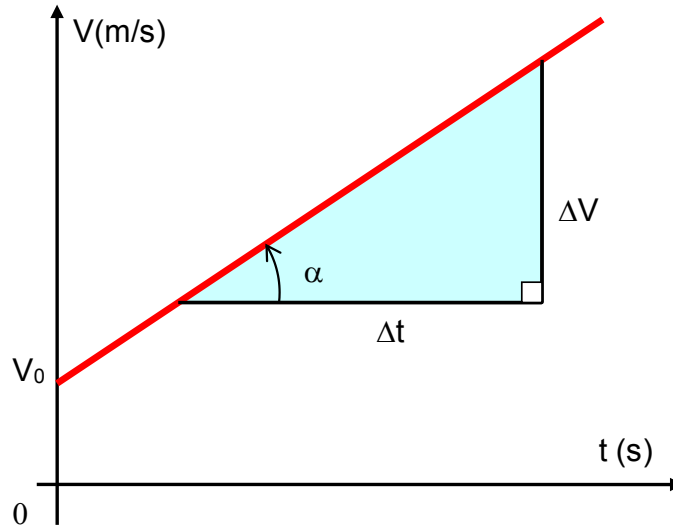
$$\vec{V}_m = \frac{(-20) - (20)}{8 - 4} = \frac{-40 \text{ m}}{4 \text{ s}} = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El signo negativo señala la dirección del movimiento, en sentido del eje X negativo.

Respuesta: la velocidad media es -10 m/s.

2. GRÁFICA VELOCIDAD (V) – TIEMPO (t)

En la gráfica v-t, la velocidad puede aumentar, disminuir o permanecer constante mientras que el móvil se traslada siguiendo una trayectoria recta.



PENDIENTE (m) EN UNA GRÁFICA V- t

La pendiente (m) del segmento L será:

$$m = \text{Tan}\alpha \Rightarrow m = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Recuerde la definición de la aceleración: $\frac{\Delta V}{\Delta t} = a$

$$\text{Luego: } a = \text{Tan}\alpha$$

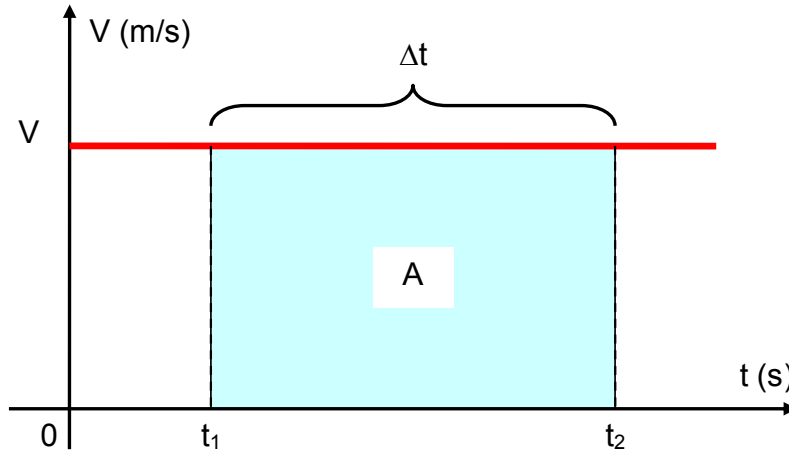
En cualquier gráfica Velocidad versus tiempo, la pendiente de los segmentos rectos representa la aceleración del móvil.

3. ÁREA EN UNA GRÁFICA V- t (en el M.R.U.)

Demostremos que, si la velocidad del móvil es constante, el área “A” del rectángulo que se forma debajo de la gráfica equivale a la distancia (d) que recorre el móvil.

El área del rectángulo es: $Area = A = b.h = V.\Delta t$

Recuerde que: $d = V.\Delta t$ Representa la distancia (d).



Luego: $Area_{\square} = A = d = X_f - X_i$

GOTA 1. En general el área es igual al *cambio de posición*.

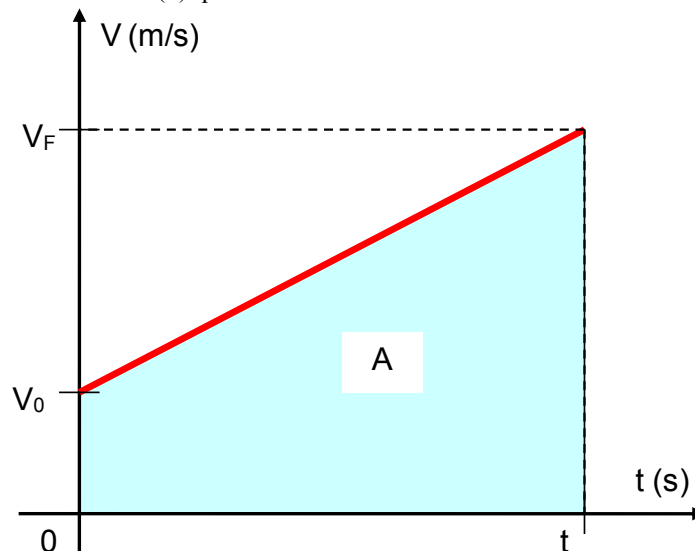
GOTA 2. $Area_{\square} = \Delta X = X_f - X_i$

GOTA 3. El área del rectángulo representa el cambio de posición.

GOTA 4. El área puede ser positiva o negativa, dependiendo del sentido de la velocidad.

4. ÁREA EN UNA GRÁFICA V- t (en el M.R.U.V.)

Demostremos que, si la velocidad del móvil varía, el área “A” del trapecio que se forma debajo de la gráfica equivalente a la distancia (d) que recorre el móvil.



Calculamos el área del trapecio.

$$Area_{\square} = \left(\frac{b + B}{2} \right) \cdot h = \left(\frac{V_0 + V_F}{2} \right) \cdot t$$

Del M.R.U.V sabemos que:

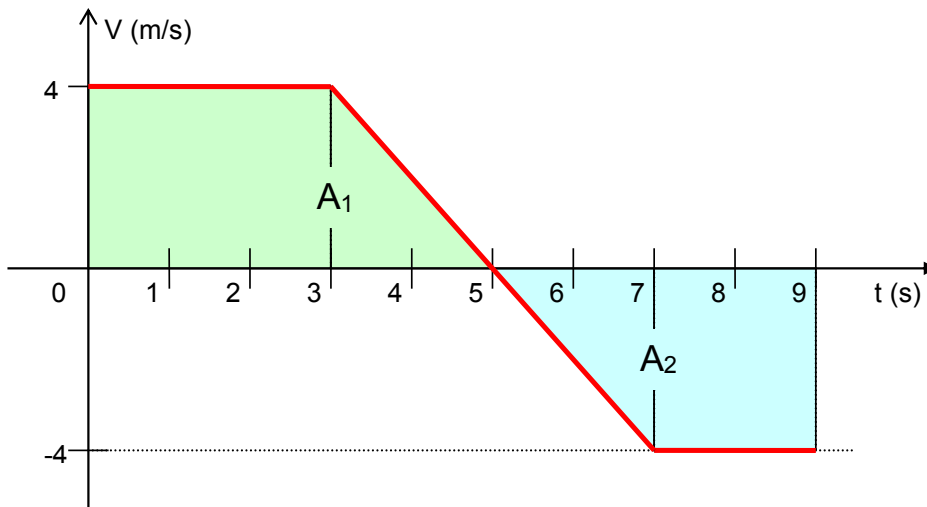
$$d = \left(\frac{V_0 + V_F}{2} \right) \cdot t$$

Luego: $d = AREA_{\square}$

En cualquier gráfica Velocidad versus tiempo, el área debajo de la gráfica representa la distancia (d) que recorre el móvil.

5. CÁLCULO DEL RECORRIDO (e) y EL DESPLAZAMIENTO ($\vec{d}$).

Cuando en la gráfica V - t el móvil presenta velocidades negativas, se formarán áreas debajo del eje del tiempo (t) como podemos ver en el siguiente ejemplo:



Para determinar el recorrido (e) adicionamos las áreas sin considerar el signo negativo, en cambio para determinar el módulo del desplazamiento adicionamos considerando el signo de las áreas determinadas.

OBSERVACIONES

- De 0 a 5 s la velocidad es positiva
- De 5 s a 9 s la velocidad es negativa
- El área A_1 está sobre el eje del tiempo
- El área A_2 está debajo del eje del tiempo
- Para calcular el recorrido (e) de 0 hasta 9 s adicionaremos las áreas:

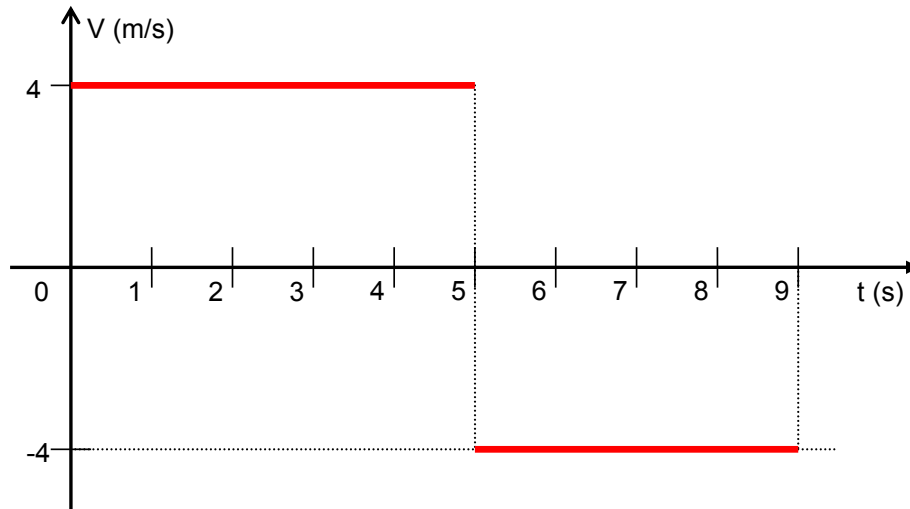
$$e = |A_1| + |A_2|$$

- Para calcular el desplazamiento total adicionaremos las áreas considerando los signos:

$$\vec{d} = |A_1| - |A_2|$$

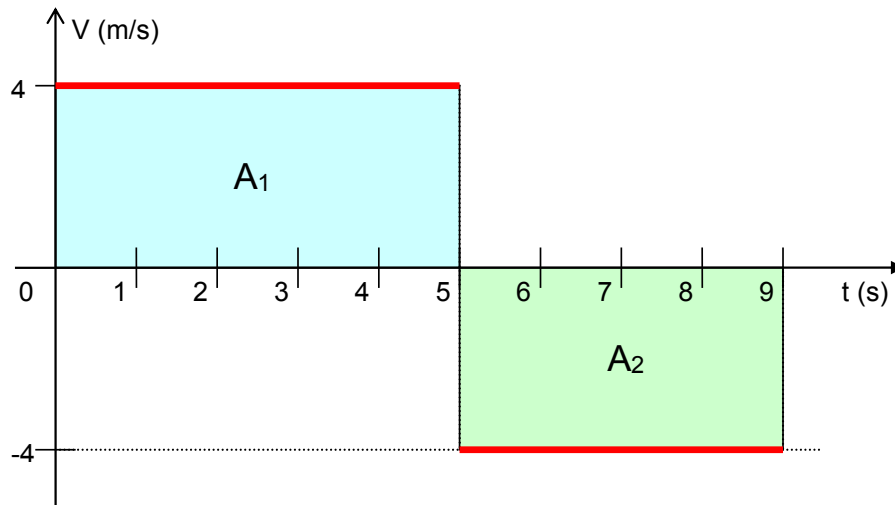
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Se muestra la variación de la velocidad de una partícula respecto del tiempo. Determine el recorrido y el desplazamiento que experimenta en los primeros 9 segundos.

**Resolución**

Cálculo del área: $A_1 = b.h = (5\text{ s}) \cdot (4\text{ m.s}^{-1}) = 20\text{ m}$

Cálculo del área: $A_2 = b.h = (4\text{ s}) \cdot (-4\text{ m.s}^{-1}) = -16\text{ m}$



Para calcular recorrido (e) de 0 segundos hasta 9 segundos adicionaremos las áreas:

$$e = |20| + |-16| = 36\text{ m}$$

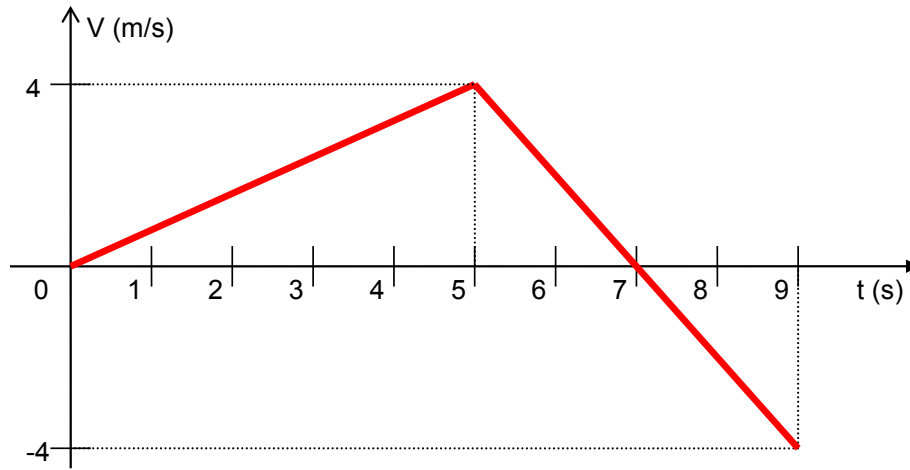
Para calcular el desplazamiento total, adicionaremos las áreas considerando los signos:

$$\vec{d} = 20 + (-16) = +4\text{ m}$$

El signo **positivo** significa que finalmente el cuerpo se desplaza 4 metros hacia la derecha.

Respuesta: el recorrido es 36 metros y el desplazamiento $+4\text{ i (m)}$.

2. Se muestra la variación de la velocidad de una partícula respecto del tiempo. Determine el recorrido y el desplazamiento que experimenta en los primeros 9 segundos.



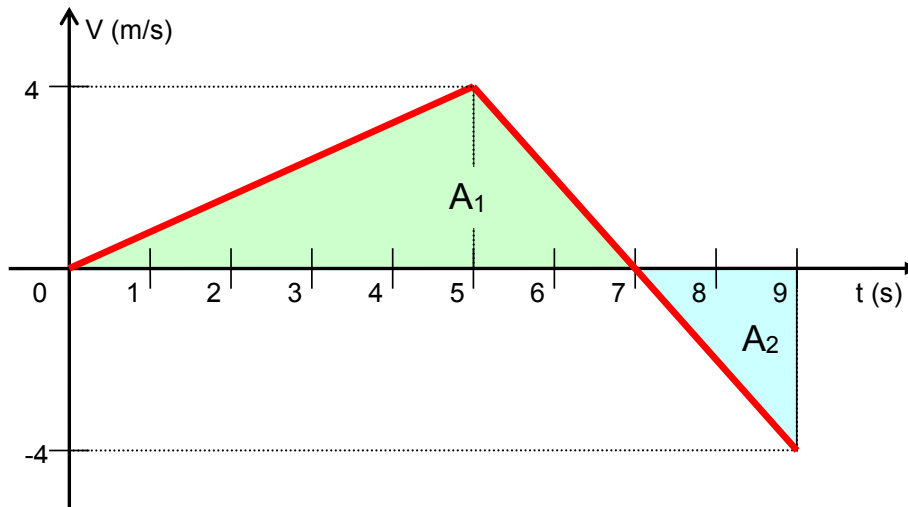
RESOLUCIÓN

Cálculo del área:

$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(7 \text{ s}) \cdot (4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})}{2} = 14 \text{ m}$$

Cálculo del área:

$$A_2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(2 \text{ s}) \cdot (-4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})}{2} = -4 \text{ m}$$



Para calcular recorrido (e) de 0 segundos hasta 9 segundos adicionaremos las áreas:

$$e = |14| + |-4| = 18 \text{ m}$$

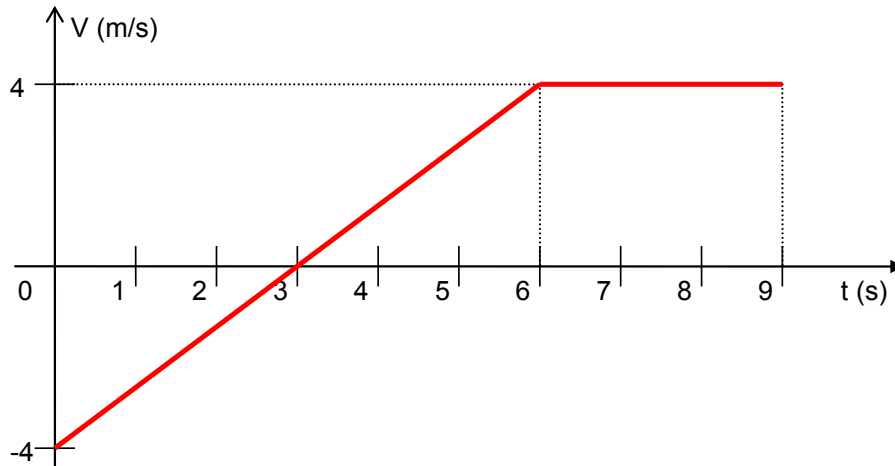
Para calcular el desplazamiento total, adicionaremos las áreas considerando los signos:

$$\vec{d} = 14 + (-4) = +10 \text{ m}$$

El signo **positivo** significa que finalmente el cuerpo se desplaza 10 metros hacia la derecha.

Respuesta: el recorrido es 18 metros y el desplazamiento $+10 \text{ i (m)}$.

3. Se muestra la variación de la velocidad de una partícula respecto del tiempo. Determine el recorrido y el desplazamiento que experimenta en los primeros 9 segundos.



Resolución

$$\text{Cálculo del área: } A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(3\text{ s}) \cdot (-4\text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{2} = -6\text{ m}$$

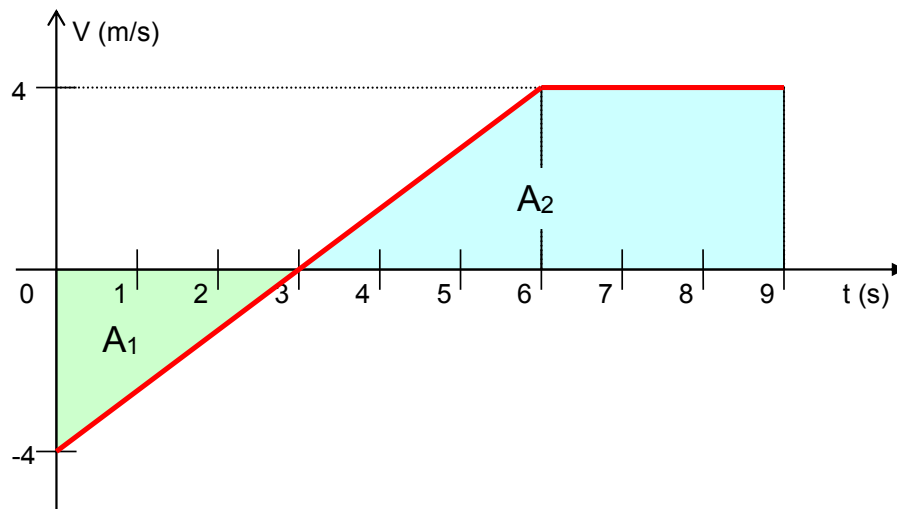
$$\text{Cálculo del área: } A_2 = \frac{(b + B) \cdot h}{2} = \frac{(3\text{ s} + 6\text{ s}) \cdot (4\text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{2} = 18\text{ m}$$

Para calcular recorrido (e) desde 0 segundos hasta 9 segundos adicionaremos las áreas:

$$e = |-6\text{ m}| + |18\text{ m}| = 24\text{ m}$$

Para calcular el desplazamiento total, adicionaremos las áreas considerando los signos:

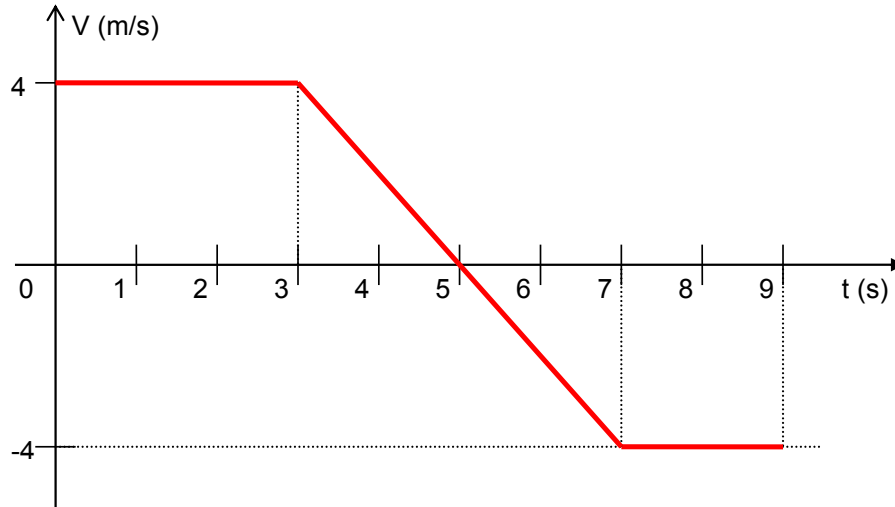
$$\vec{d} = (-6\text{ m}) + (18\text{ m}) = +12\text{ m}$$



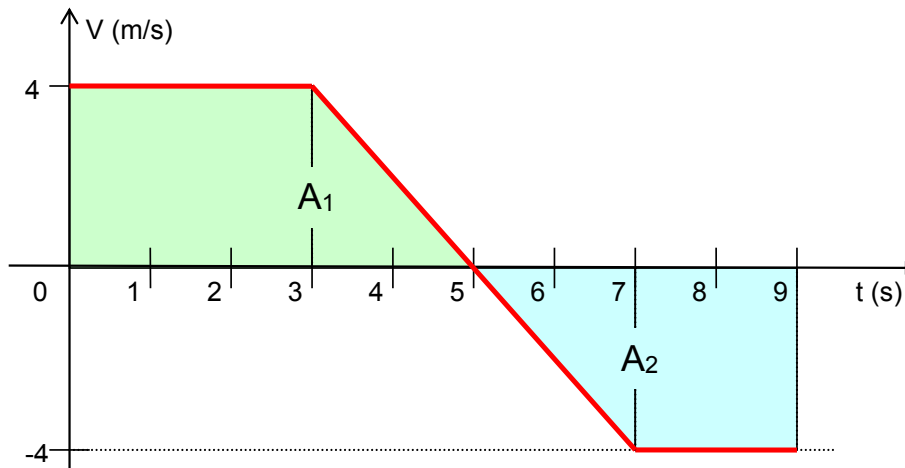
El signo **positivo** significa que finalmente el cuerpo se desplaza 24 metros hacia la derecha.

Respuesta: el recorrido es 18 metros y el desplazamiento $+12\text{ i (m)}$.

4. Se muestra la variación de la velocidad de una partícula respecto del tiempo. Determine el recorrido y el desplazamiento que experimenta en los primeros 9 segundos.



RESOLUCIÓN



$$\text{Cálculo del área: } A_1 = \frac{(b+B) \cdot h}{2} = \frac{(3s+5s) \cdot (4m \cdot s^{-1})}{2} = 16 \text{ m}$$

$$\text{Cálculo del área: } A_2 = \frac{(b+B) \cdot h}{2} = \frac{(2s+4s) \cdot (-4m \cdot s^{-1})}{2} = -12 \text{ m}$$

Para calcular recorrido (e) de 0 segundos hasta 9 segundos adicionaremos las áreas:

$$e = |16m| + |-12m| = 28 \text{ m}$$

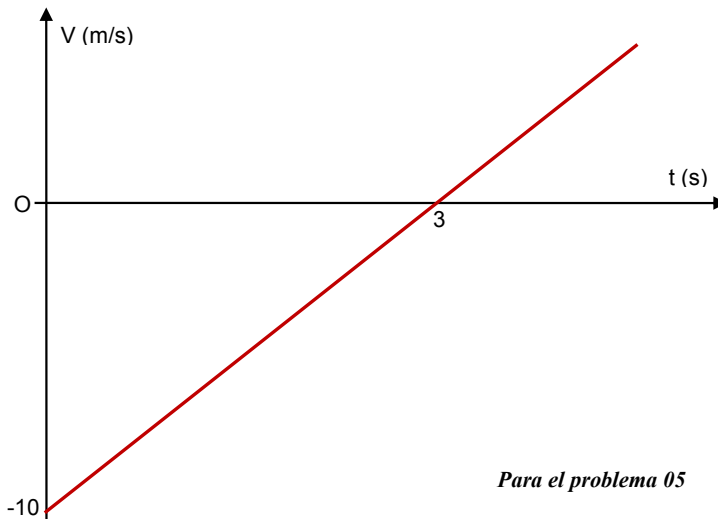
Para calcular el desplazamiento total, adicionaremos las áreas considerando los signos:

$$\vec{d} = (16m) + (-12m) = +4 \text{ m}$$

El signo **positivo** significa que finalmente el cuerpo se desplaza 4 metros hacia la derecha.

Respuesta: el recorrido es 28 metros y el desplazamiento $+4 \text{ i (m)}$.

5. Se tiene un gráfico velocidad versus tiempo de un móvil que se mueve sobre el eje X y que en el instante ($t = 0$) su posición es $X_0 = 5$ m. ¿En qué instante pasará por segunda vez por el origen de coordenadas?



RESOLUCION

PRIMER PASO. De la gráfica deducimos que la velocidad inicial es, $t = 0s \Rightarrow V_0 = -10 \text{ m.s}^{-1}$.

La velocidad del móvil es nula, $t = 3s \Rightarrow V = 0$ en este instante invierte el sentido del movimiento.

SEGUNDO PASO. La aceleración tiene el mismo valor de la pendiente de la recta:

$$m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{0 - (-10)}{3 - 0} = +\frac{10}{3} \Rightarrow a = \frac{10}{3} \text{ m.s}^{-2}$$

TERCER PASO. Posición de la partícula en el M.R.U.V.:

$$X_F = X_0 + V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

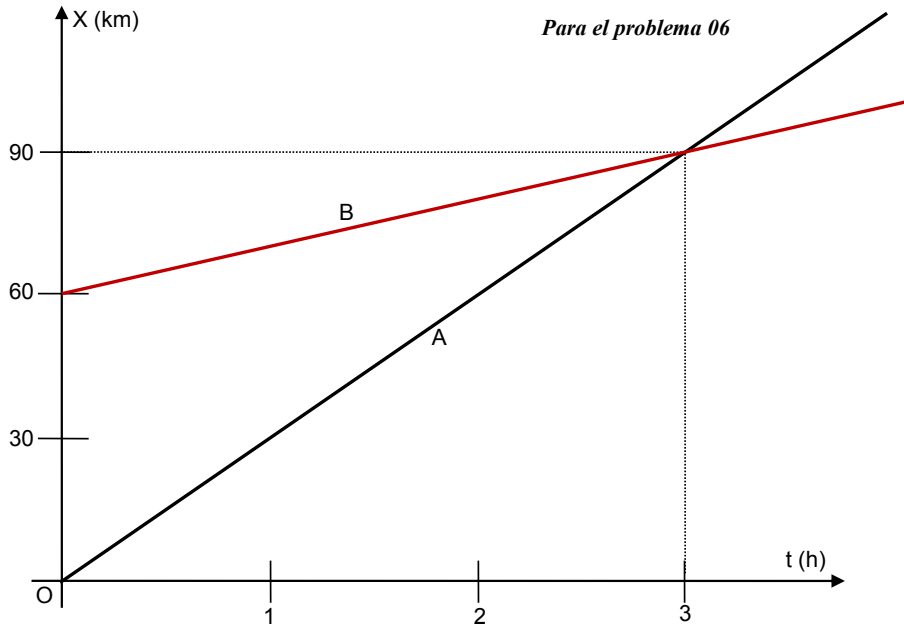
$$0 = 5 + (-10) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{10}{3}\right) \cdot t^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 3 = 0$$

Respuesta: Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$\text{PRIMERA VEZ: } t_1 = (3 - \sqrt{6}) = 0,55 \text{ s}$$

$$\text{SEGUNDA VEZ: } t_2 = (3 + \sqrt{6}) = 5,45 \text{ s}$$

6. Dos automóviles A y B se desplazan en una misma carretera rectilínea. Se muestra la posición de cada uno en relación al comienzo de la carretera y en función del tiempo. Determinar la ley de movimiento de los móviles A y B.



RESOLUCION

PRIMER PASO. La pendiente de las rectas nos da la velocidad.

$$V_A = \tan \alpha = \frac{90 \text{ km}}{3 \text{ h}} \Rightarrow V_A = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$V_B = \tan \beta = \frac{30 \text{ km}}{3 \text{ h}} \Rightarrow V_B = 10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

SEGUNDO PASO. La posición de una partícula A en el M.R.U es:

$$X(t) = X_0 + V \cdot t \Rightarrow X(t) = 0 + (30) \cdot t$$

Para el móvil A: $X(t) = 30 \cdot t$

TERCER PASO. La posición de una partícula B en el M.R.U es:

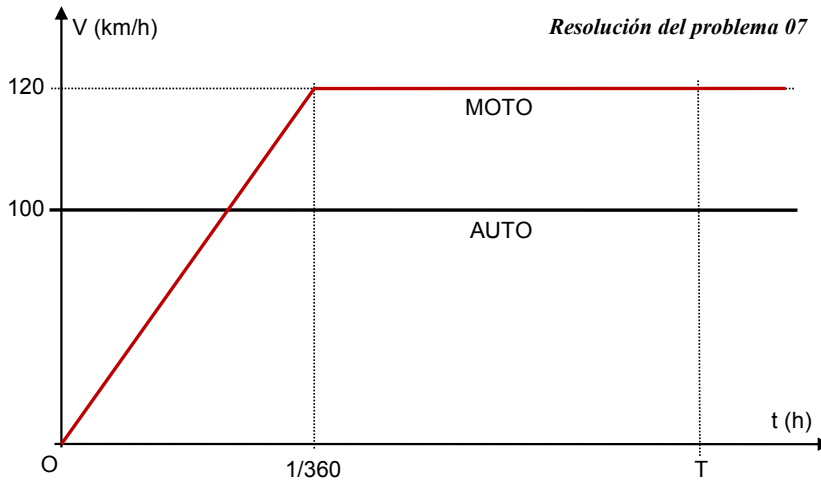
$$X(t) = X_0 + V \cdot t \Rightarrow X(t) = 60 + (10) \cdot t$$

Para el móvil B: $X(t) = 60 + 10 \cdot t$

7. Un policía de tránsito ve que un automóvil se le aproxima a una velocidad constante no permitida de 100 km/h. En el instante que pasa frente a él, monta en la moto y sale en su persecución. La moto después de acelerar durante 10 segundos alcanza su velocidad tope de 120 km/h. Calcular cuánto ha tardado el policía en ser al auto.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos una gráfica velocidad versus tiempo de los móviles.



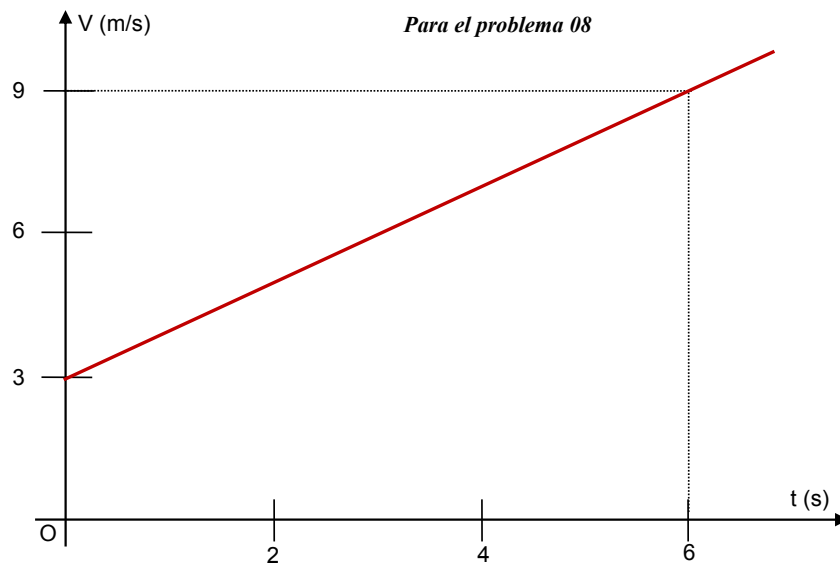
SEGUNDO PASO. En el instante que el policía alcanza al auto, la distancia que recorren es igual, desde ($t=0$) que se inicia la persecución.

$$d_{AUTO} = d_{MOTO} \Rightarrow b.h = \left(\frac{b+B}{2} \right) . H$$

$$(T).(100) = \left(\frac{T - \frac{1}{360} + T}{2} \right) . (120) \Rightarrow T = \frac{1}{120} h$$

Respuesta. El policía lo alcanza después de 30 segundos.

8. Una partícula se mueve sobre el eje X, en el instante $t = 0\text{ s}$, su posición es $X_0 = -2\text{ m}$. Se muestra la gráfica velocidad versus tiempo. Determine la posición de la partícula en el instante $t = 6\text{ s}$.



RESOLUCION

PRIMER PASO. El cambio de posición que experimenta la partícula es igual Al área bajo la recta, en la gráfica velocidad versus tiempo:

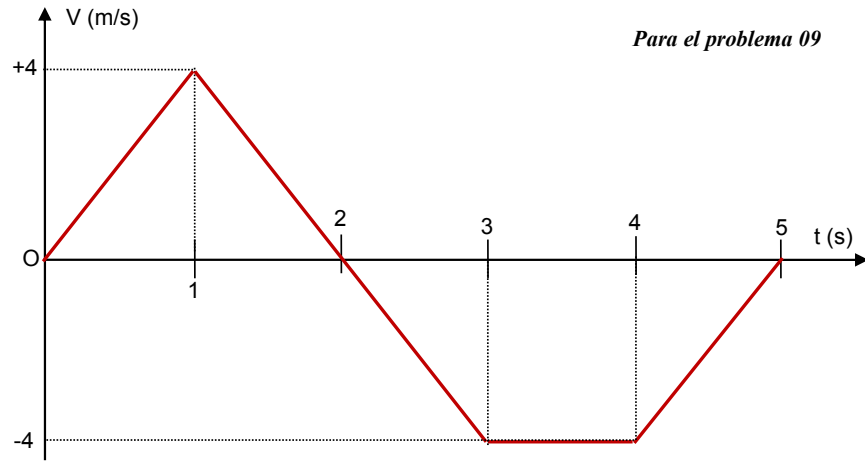
SEGUNDO PASO. Cálculo del área de del trapecio.

$$\Delta X = \left(\frac{b+B}{2} \right) \cdot h \Rightarrow X_F - X_0 = \left(\frac{3+9}{2} \right) \cdot 6$$

$$X_F - (-2) = 36 \Rightarrow X_F = 34\text{ m}$$

Respuesta: la posición final es $X = 34\text{ m}$.

9. Se muestra la gráfica velocidad versus tiempo de una partícula que se mueve en el eje X, en el instante $t = 0s$ la posición del móvil es $X_0 = 2m$.

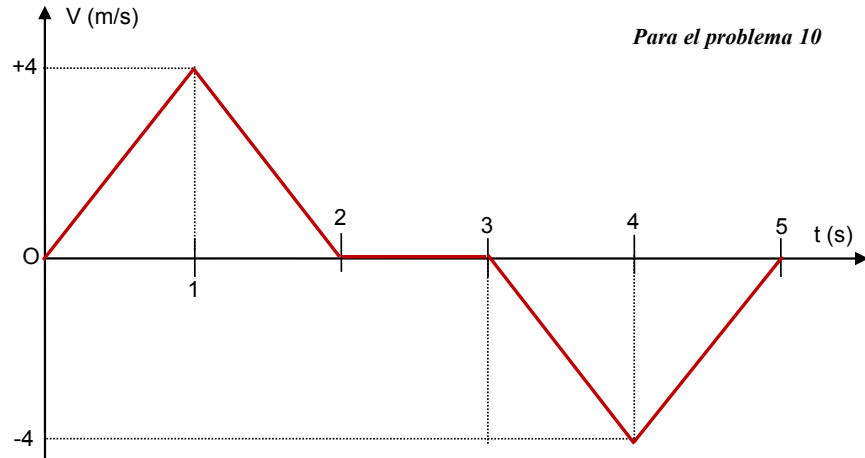


¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- I. En el instante $t = 4s$, la partícula se encuentra en el origen de coordenadas ($X=0$).
- II. En el intervalo de tiempo $t_1 = 0s$ y $t_2 = 4s$, el recorrido por la partícula fue 10 metros.
- III. En el intervalo de tiempo $t_1 = 2s$ y $t_2 = 3s$ la velocidad y aceleración tienen igual sentido (a la izquierda respecto del sistema de referencia).
- IV. En el instante $t = 3,5s$ el móvil estaba de regreso a su posición inicial.

A) Solo I y II. B) Solo II y III C) Solo I, II y IV D) **E) todas son verdaderas.**

10. Se muestra la gráfica velocidad versus tiempo de una partícula que sale del origen ($X=0$) moviéndose en línea recta.

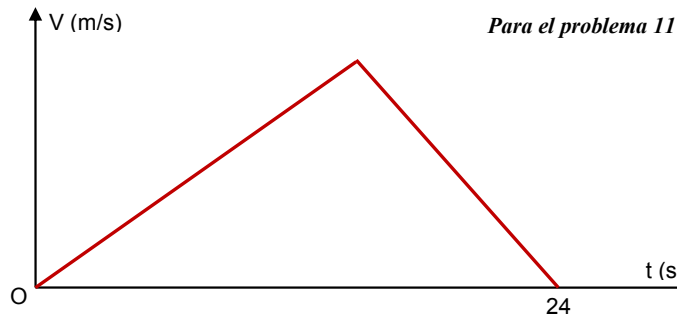


¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- I. En el intervalo de tiempo $t_1 = 2s$ y $t_2 = 3s$ la partícula se encuentra en reposo.
- II. En el intervalo de tiempo $t_1 = 0s$ y $t_2 = 5s$ el recorrido de la partícula fue de 5 metros.
- III. En el instante $t = 4,5s$ el móvil estaba de regreso a su posición inicial.
- IV. En el instante $t = 4s$ el móvil se encuentra a 2 metros del origen.

A) Solo I y II. B) Solo II y III C) Solo I, II y IV D) **E) todas son verdaderas.**

11. Se muestra la velocidad versus tiempo, describe el movimiento de una partícula. Si para el intervalo de tiempo $t_1 = 0$ y $t_2 = 24s$ el recorrido es 96 metros, ¿Qué velocidad máxima alcanzó la partícula?



RESOLUCION

PRIMER PASO. La máxima velocidad es igual a la altura del triángulo.

SEGUNDO PASO. El recorrido por la partícula es igual al área del triángulo en la gráfica velocidad versus tiempo.

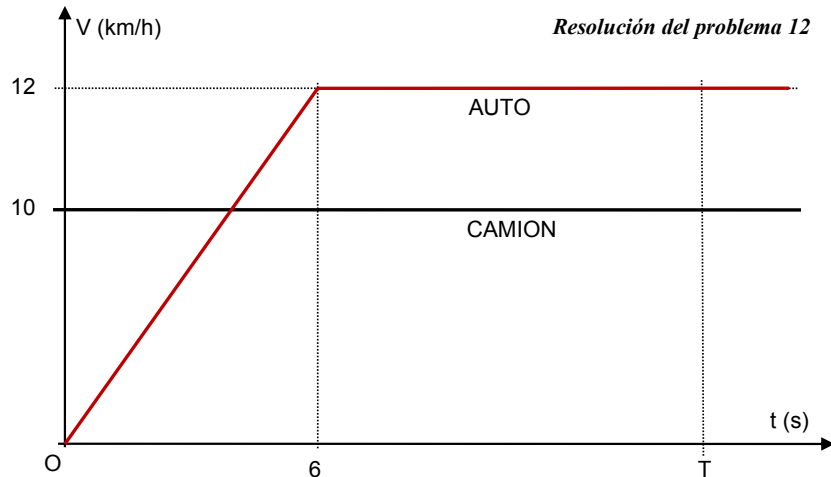
$$e = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow 96 = \frac{(24) \cdot (V)}{2} \Rightarrow V_{MAX} = 8 \text{ m.s}^{-1}$$

Respuesta. La máxima velocidad que alcanza es 8 m/s.

12. Un automóvil está esperando que cambie la luz roja, cuando la luz cambia a verde el auto acelera a razón de 2 m/s^2 durante 6 segundos, después de la cual se mueve con velocidad constante, en el instante que el auto comienza a moverse un camión que se mueve en la misma dirección con velocidad constante de 10 m/s , lo pasa. ¿En qué intervalo de tiempo y a que distancia se encontraran nuevamente el auto y el camión?

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos una gráfica velocidad versus tiempo de los móviles.



SEGUNDO PASO. Analizando el movimiento del auto.

$$V_F = V_0 + a.t \Rightarrow V_F = 0 + (2).(6) = 12 \text{ m.s}^{-1}$$

La máxima velocidad alcanzada es 12 m/s .

TERCER SEGUNDO. En el instante que el auto alcanza al camión, la distancia que recorren es igual, desde ($t=0$) que se inicia la persecución.

$$d_{\text{CAMION}} = d_{\text{AUTO}} \Rightarrow b.h = \left(\frac{b+B}{2} \right).H$$

$$(T).(10) = \left(\frac{T-6+T}{2} \right).(12) \Rightarrow T = 18 \text{ s}$$

CUARTO PASO. Cálculo de la distancia:

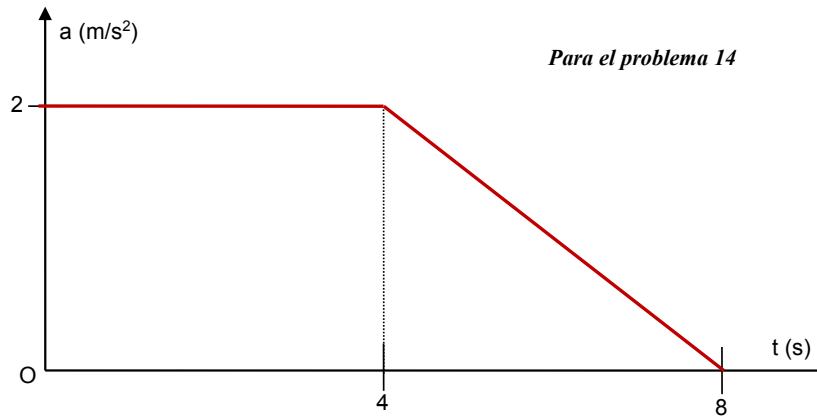
$$d_{\text{CAMION}} = (T).(10) = (18).(10) = 180 \text{ m}$$

Respuesta. El auto lo alcanza después de 18 segundos y recorre 180 metros.

13. Un auto y un camión se mueven por la carretera a 72 km/h , cuando el auto está a 5 m detrás del camión comienza a acelerar hasta colocarse 55 m delante de él. ¿Cuál será el tiempo mínimo que demora la operación, si la máxima aceleración del auto es de $2,5 \text{ m/s}^2$, y sabemos que su máxima velocidad alcanzada es igual a 90 km/h .

A) 12 s **B) 13** C) 14 D) 15 E) ninguna anterior

14. Una partícula que se mueve en línea recta inicia su movimiento ($t=0$) con una velocidad $V_0 = 3 \text{ m.s}^{-1}$. Se muestra su grafica aceleración versus tiempo. Determinar la velocidad en el instante $t = 8 \text{ s}$.



RESOLUCION

PRIMER PASO. En la gráfica aceleración versus tiempo, el área bajo la curva es igual al cambio de velocidad.

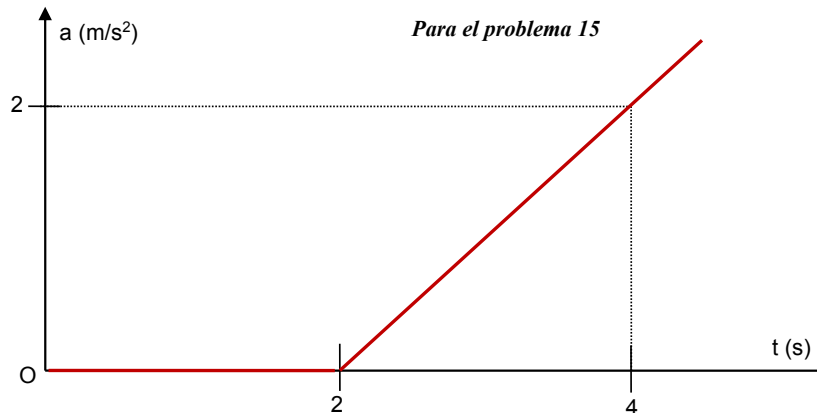
SEGUNDO PASO. Cálculo del área del trapecio.

$$\Delta V = \left(\frac{b+B}{2} \right) \cdot h \Rightarrow V_F - V_0 = \left(\frac{4+8}{2} \right) \cdot (2)$$

$$V_F - (3) = 12 \Rightarrow V_F = 15 \text{ m.s}^{-1}$$

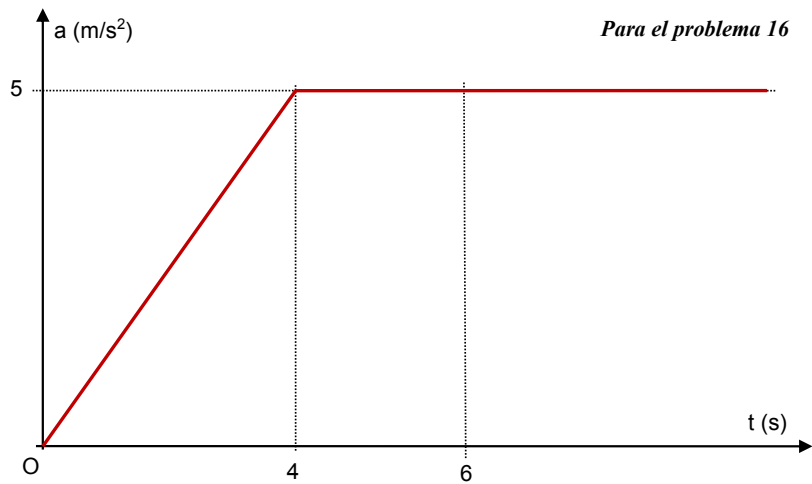
Respuesta. La velocidad es 15 m/s.

15. Una partícula que se mueve en línea recta, inicia su movimiento ($t=0$) con una velocidad $V_0 = -12,5 \text{ m.s}^{-1}$. Se muestra una gráfica aceleración versus tiempo. ¿En qué instante “t” la velocidad es nula?



- A) $t = 3 \text{ s}$ B) $t = 4 \text{ s}$ C) $t = 6 \text{ s}$ **D) $t = 7 \text{ s}$** E) Ninguna anterior

16. Se tiene el gráfico aceleración versus tiempo de un móvil que se mueve en línea recta. Si en el instante $t = 0 \text{ s}$ su velocidad es V y para $t = 4 \text{ s}$ la velocidad es $3V$, determinar su velocidad para $t = 6 \text{ s}$.



RESOLUCION

PRIMER PASO. En la gráfica aceleración versus tiempo, el área bajo la curva es igual al cambio de velocidad.

SEGUNDO PASO. En el intervalo de tiempo $t_1 = 0 \text{ s}$ y $t_2 = 4 \text{ s}$, el área bajo la recta es igual al cambio de la velocidad.

$$\Delta V = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow V_F - V_0 = \frac{(4) \cdot (5)}{2}$$

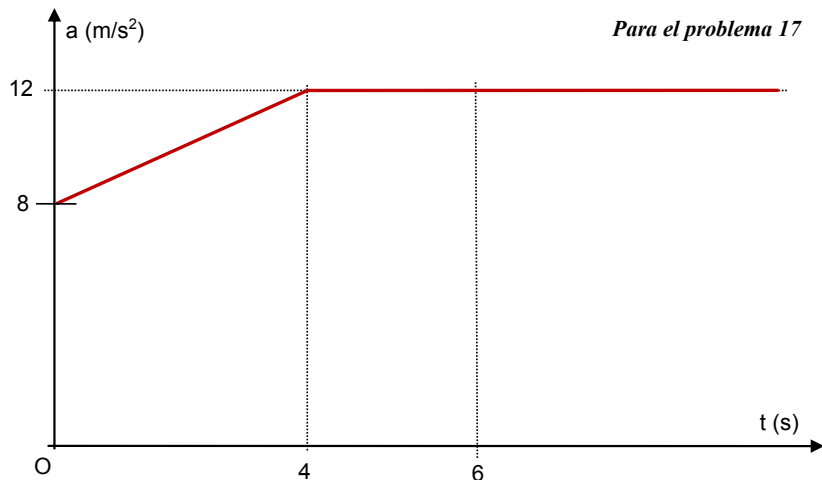
$$(3V) - (V) = 10 \Rightarrow V = 5 \text{ m.s}^{-1}$$

TERCER PASO. En el intervalo de tiempo $t_1 = 4 \text{ s}$ y $t_2 = 6 \text{ s}$, el área bajo la recta es igual al cambio de la velocidad.

$$V_F = V_0 + a \cdot t \Rightarrow V_F = (15) + (5) \cdot (2) = 25 \text{ m.s}^{-1}$$

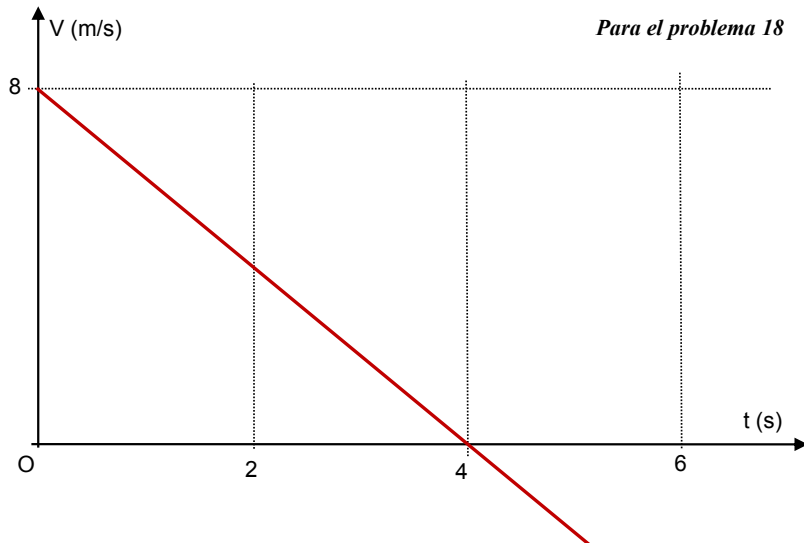
Respuesta: la velocidad en $(t = 6 \text{ s})$ es 25 m/s .

17. Se tiene el gráfico aceleración versus tiempo de una partícula que se desplaza en línea recta. Si en el instante $t = 0 \text{ s}$ su velocidad es V y para el instante $t = 4 \text{ s}$ la velocidad es $3V$, determinar su velocidad para $t = 6 \text{ s}$.



- A) 20 m/s B) 60 C) 64 **D) 84** E) ninguna

18. Una partícula se mueve sobre el eje X, en el instante $t = 0 \text{ s}$ su posición es $X_0 = 0 \text{ m}$. Se muestra la gráfica velocidad versus tiempo. Determinar su posición en el instante $t = 6 \text{ s}$ y el recorrido en el intervalo de tiempo $t_1 = 0$ y $t = 6 \text{ s}$.



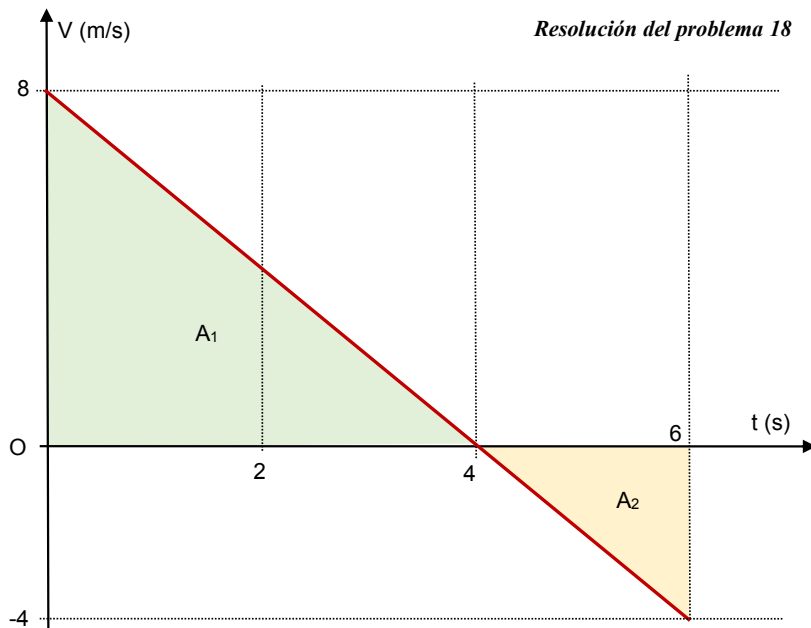
RESOLUCION

PRIMER PASO. En la gráfica velocidad versus tiempo, el cambio de posición que experimenta la partícula es igual al área bajo la recta.

SEGUNDO PASO. Cálculo del área del triángulo:

$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(4)(8)}{2} = 16 \text{ m}$$

$$A_2 = \frac{b.h}{2} = \frac{(2)(-4)}{2} = -4m$$



TERCER PASO. La suma de áreas (considerando los signos) representa el cambio de posición en el intervalo $t_1 = 0$ y $t = 6$ s:

$$\Delta X = A_1 + A_2 \Rightarrow X_F - X_0 = (16) + (-4)$$

$$X_F - (0) = 12m \Rightarrow \text{Para } t = 6 \text{ s} \Rightarrow X = 12m$$

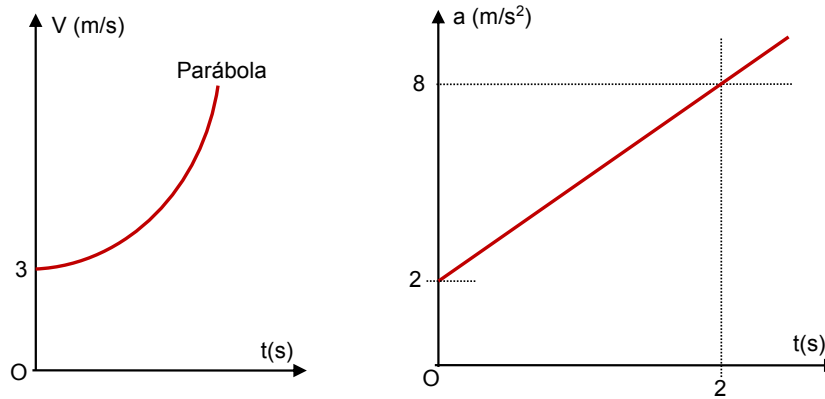
CUARTO PASO. La suma de áreas (sin considerar los signos) representa el recorrido en el intervalo $t_1 = 0$ y $t = 6$ s:

$$e = |A_1| + |A_2| \Rightarrow e = (16) + (4) = 20m$$

19. Una partícula se mueve en el eje X, mediante la siguiente ley:

$$X_F = X_0 + V_0 \cdot t + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot a_0 \cdot t^2 + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot C \cdot t^3$$

Si la partícula inicia su movimiento $t = 0 \text{ s}$ en la posición $X_0 = -2 \text{ m}$, determinar su posición en el instante $t = 4 \text{ s}$. Sus gráficas velocidad versus tiempo y la aceleración versus tiempo, son:



Para el problema 19

RESOLUCION

PRIMER PASO. De la gráfica velocidad versus tiempo, la velocidad inicial es:

$$t = 0 \Rightarrow V_0 = 3 \text{ m.s}^{-1}$$

SEGUNDO PASO. De la gráfica aceleración versus tiempo, la aceleración inicial es:

$$t = 0 \Rightarrow a_0 = 2 \text{ m.s}^{-2}$$

TERCER PASO. la celeridad es igual a la pendiente de la recta:

$$C = \frac{\Delta a}{\Delta t} \Rightarrow C = \frac{(8) - (2)}{(2) - (0)} = 3 \text{ m.s}^{-3}$$

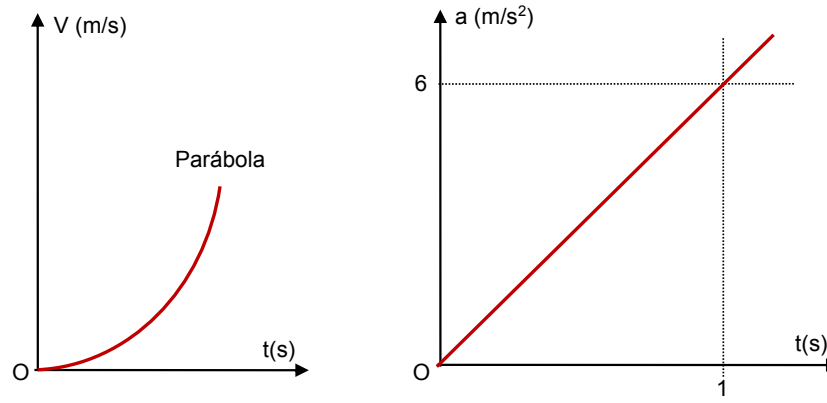
CUARTO CASO. Reemplazando en la ley del movimiento:

$$X_F = X_0 + V_0 \cdot t + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot a_0 \cdot t^2 + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot C \cdot t^3$$

$$X_F = (-2) + (3) \cdot (4) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (2) \cdot (4)^2 + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot (3) \cdot (4)^3$$

Respuesta: la posición final de la partícula es $X = 58 \text{ m}$.

20. Una partícula se mueve en el eje X, mediante la siguiente ley: $X_F = \frac{X_0}{0!} + \frac{V_0.t}{1!} + \frac{a_0.t^2}{2!} + \frac{C.t^3}{3!}$
 sus graficas velocidad versus tiempo y la aceleración versus tiempo, son:



Para el problema 20

Si la partícula inicia su movimiento $t = 0 \text{ s}$ en la posición $X_0 = 0 \text{ m}$, determinar su posición en el instante $t = 5 \text{ s}$.

RESOLUCION

PRIMER PASO. De la gráfica velocidad versus tiempo, la velocidad inicial es:
 $t = 0 \Rightarrow V_0 = 0 \text{ m.s}^{-1}$

SEGUNDO PASO. De la gráfica aceleración versus tiempo, la aceleración inicial es:

$$t = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \text{ m.s}^{-2}$$

TERCER PASO. La celeridad es igual a la pendiente de la recta en la gráfica aceleración versus tiempo:

$$C = \frac{\Delta a}{\Delta t} \Rightarrow C = \frac{(6) - (0)}{(1) - (0)} = 6 \text{ m.s}^{-3}$$

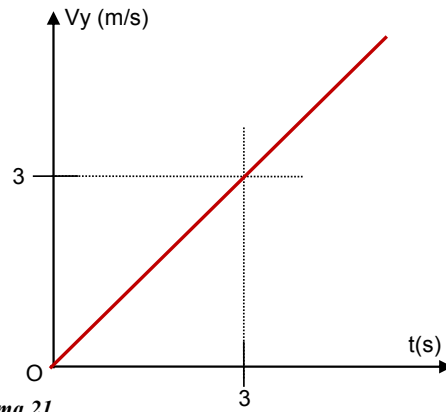
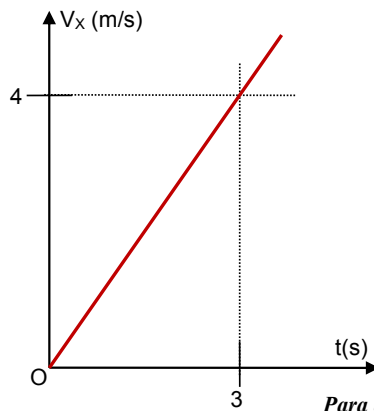
CUARTO CASO. Reemplazando en la ley del movimiento:

$$X_F = \frac{X_0}{0!} + \frac{V_0.t}{1!} + \frac{a_0.t^2}{2!} + \frac{C.t^3}{3!}$$

$$X_F = \frac{(0)}{1} + \frac{(0).(5)}{1} + \frac{(0).(5)^2}{2} + \frac{(6).(5)^3}{6} = 125 \text{ m}$$

Respuesta: la posición final de la partícula es $X = 125 \text{ m}$.

21. Determinar la ecuación de la trayectoria del móvil, cuyas graficas velocidad versus tiempo se conocen, si además se sabe que el móvil parte inicialmente ($t = 0 \text{ s}$) del punto $P = (0; 3) \text{ m}$



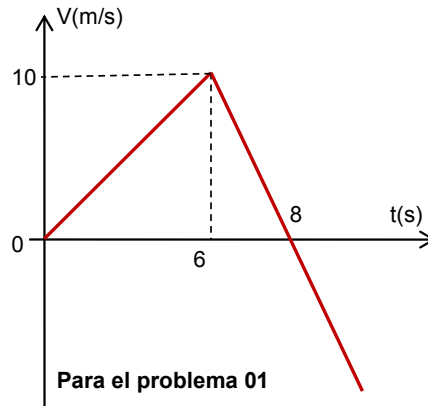
Para el problema 21

- A) $y = 3 + 4x$ B) $y = 4x$ C) $y = 3 + \frac{3}{4}x$ D) $y = 4 + \frac{3}{4}x$ E) N.A

PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE.

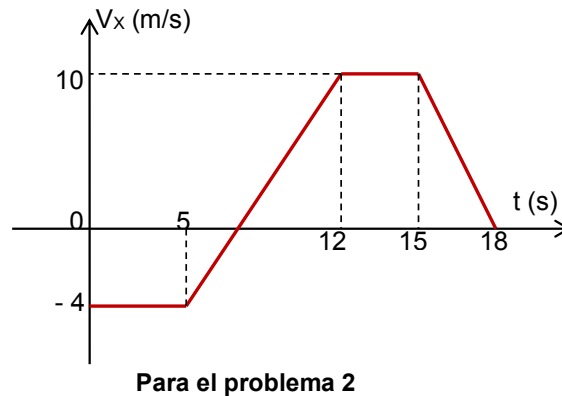
1. Un móvil que parte del reposo se mueve en línea recta y desarrolla una velocidad cuya grafica es mostrada en la figura. Calcular el que instante t de tiempo el móvil vuelve al punto de partida.

(Examen UNI 2006 – II)



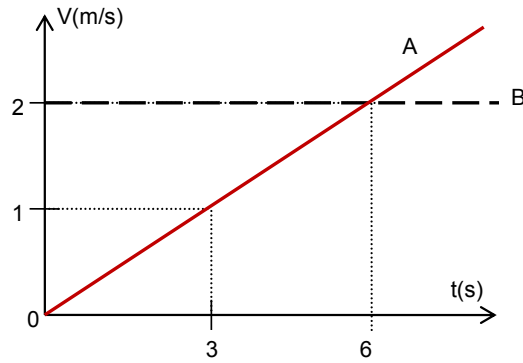
- A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 18

2. Se muestra la variación de la velocidad de un móvil. Determine el módulo del desplazamiento en los 10 primeros segundos.



- A) 46 m B) 48 m C) 50 m D) 92 m E) 94 m

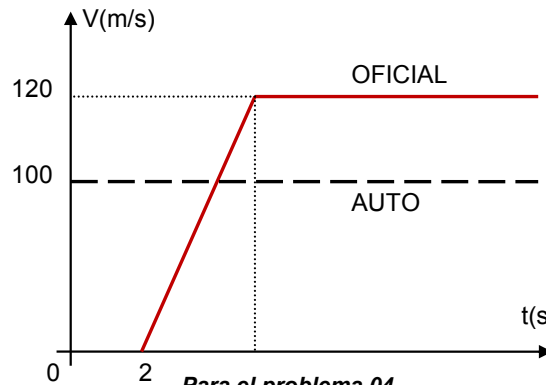
3. En el instante $t = 0$, dos partículas A y B parten de un mismo punto y se mueven en línea recta en la misma dirección y sentido. Una de ellas se mueve con velocidad constante y la otra con aceleración constante. La figura muestra las graficas de ambas velocidades. La distancia d , en metros, que recorren y en tiempo empleado t en segundos que tardan hasta que vuelven a encontrarse, respectivamente son:
- (Examen UNI 2006 – II)



Para el problema 03

- A) 12 m y 24 s B) 48 m y 12 s C) 24 m y 48 s
D) 24 m y 12 s E) 36 m y 24 s

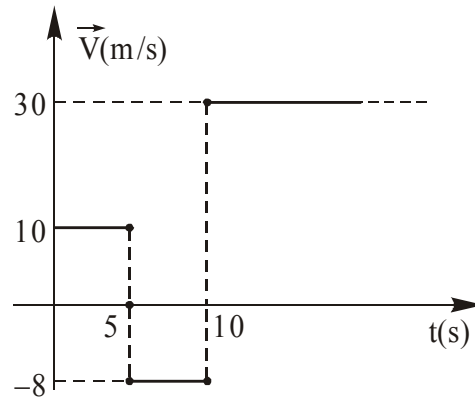
4. Un patrullero esta estacionado al lado de una carretera rectilínea, frente a el pasa una mujer en un auto deportivo a 100 m/s. Después de varios intentos de poner en marcha su motocicleta, el Oficial arranca 2 segundos después con MRUV con aceleración de modulo 10 m/s^2 y su rapidez máxima es 120 m/s. ¿después de cuántos segundos, desde que sale el oficial, alcanza al auto?



Para el problema 04

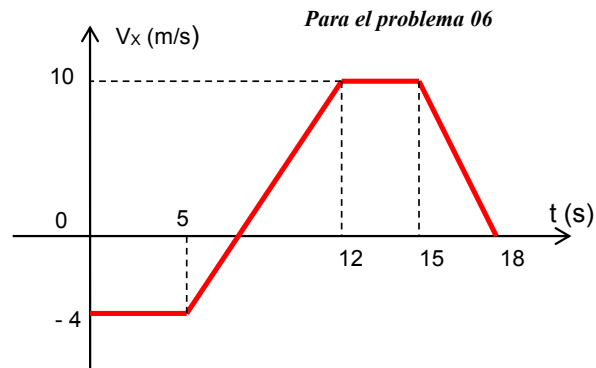
- A) 30 B) 40 C) 42 D) 46 E) Ninguna anterior

5. Se muestra la variación de la velocidad de un móvil. Determine el módulo del desplazamiento en los 20 primeros segundos.



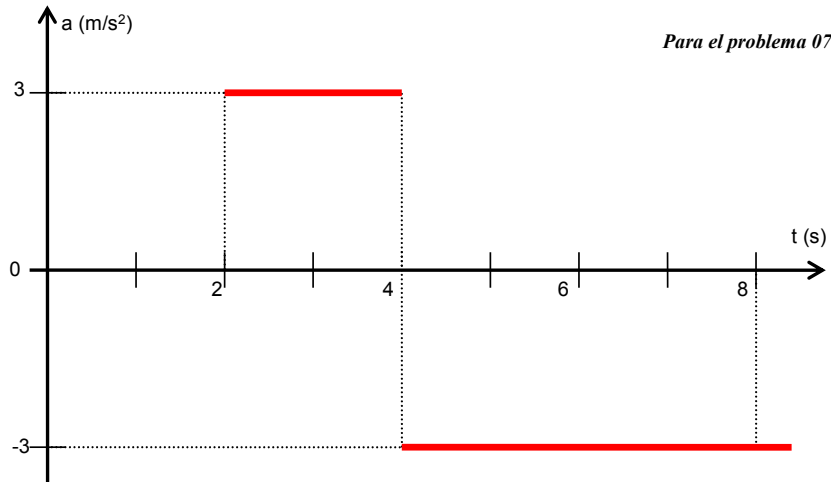
- A) 100 m B) 200 m C) 300 m D) 400 m E) 500 m

6. Se muestra la variación de la velocidad de un móvil. Determine el módulo del desplazamiento en los 10 primeros segundos.



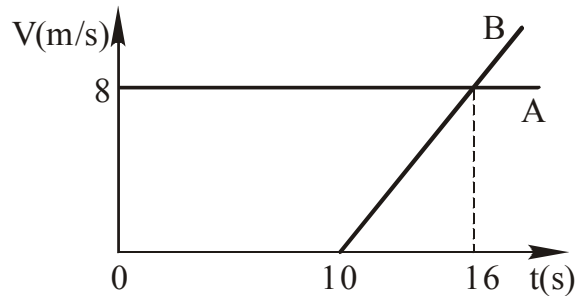
- A) 46 m B) 48 m C) 50 m D) 92 m E) 94 m

7. La gráfica indica el comportamiento de la aceleración de un auto que se mueve a lo largo del eje x , en función al tiempo. Si en $t = 0$ se encuentra en la posición $-20 \hat{i}$ (m) con una velocidad $3 \hat{i}$ (m/s) ¿Cuál será la posición (en m) del auto cuando $t = 8$ s?



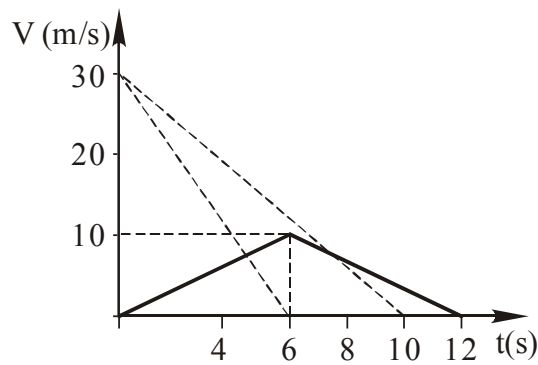
- A) $-5 \hat{i}$ B) $+6 \hat{i}$ C) $+7 \hat{i}$ D) $+10 \hat{i}$ E) $+15 \hat{i}$

8. Se muestra la variación de la velocidad de los móviles A y B. Si ambos móviles se encuentran en el instante $t = 10$ s, ¿Qué distancia los separaba inicialmente?



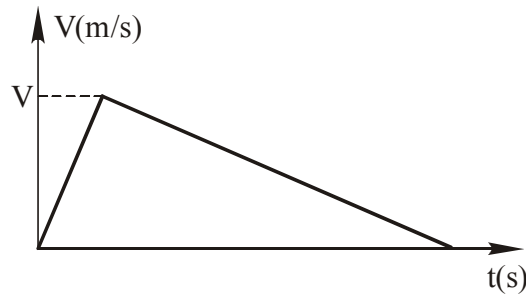
- A) 104 m B) 114 m C) 124 m D) 94 m E) 84 m

9. Se muestra la variación de la velocidad de tres móviles. ¿Cuál es el mayor módulo del desplazamiento experimentado?



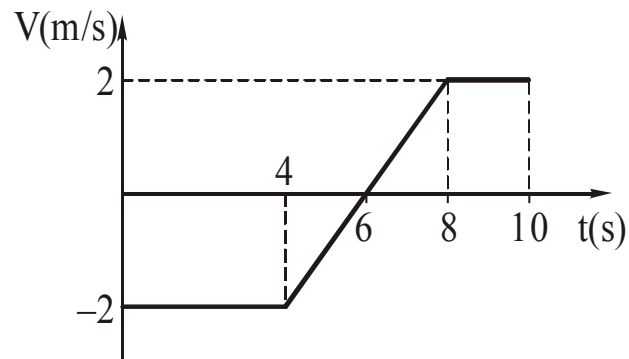
- A) 60 m B) 180 m C) 150 m D) 90 m E) 75 m

10. Se muestra la variación de la velocidad de un móvil. Si la distancia total que recorre en línea recta es 60 m en un intervalo de 12 segundos, determine la máxima rapidez que alcanza el móvil.



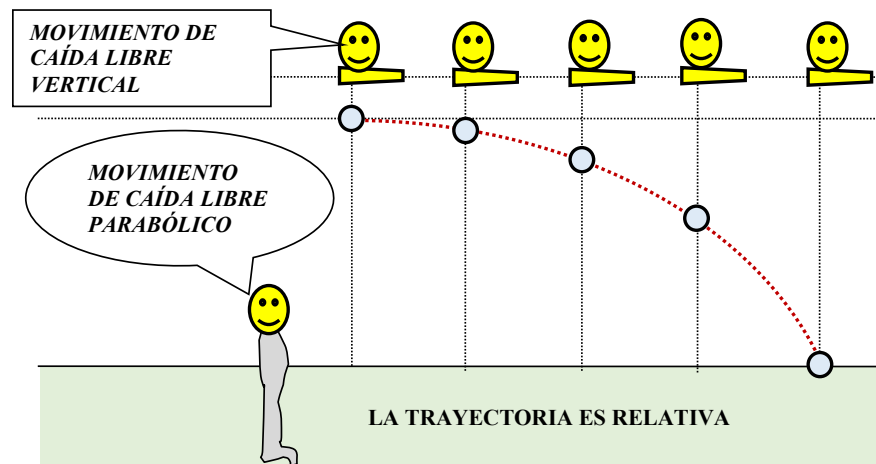
- A) 8 m/s B) 9 m/s C) 10 m/s D) 12 m/s E) 15 m/s

11. Se muestra la variación de la velocidad de un móvil. Determine el módulo del desplazamiento en los 10 primeros segundos.



- A) 4 m B) 8 m C) 12 m D) 16 m E) 14 m

MOVIMIENTO RELATIVO



1. LA TRAYECTORIA ES RELATIVA.

El observador dentro del avión ve un **movimiento de caída libre** vertical, en cambio un observador fuera del avión ve un **movimiento parabólico**. Por consiguiente, la trayectoria es relativa.

2. RELATIVIDAD DE GALILEO.

En general, la posición, la velocidad, la aceleración, el tiempo, el movimiento y la masa son relativos.

GOTA 1. El reposo es un estado particular del movimiento.

GOTA 2. El reposo es relativo.

GOTA 3. No existe el reposo absoluto.

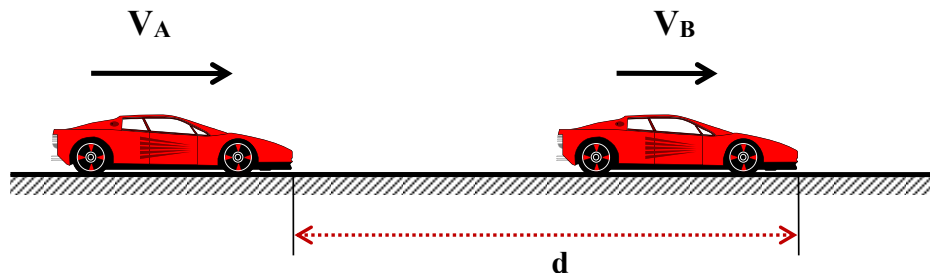
GOTA 4. La materia se encuentra en eterno movimiento y desarrollo.

3. VELOCIDAD RELATIVA

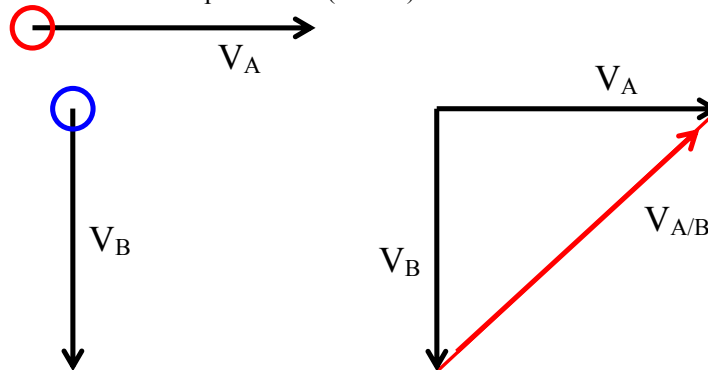
Es la velocidad del cuerpo A respecto de un observador ubicado en el cuerpo B que también se mueve. La velocidad de A respecto de B, se define como la diferencia de las velocidades.

$$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

La velocidad relativa es el vector diferencia entre la velocidad de A (minuyendo) y la velocidad de B (sustraendo).



EJEMPLO: Dos cuerpos A y B se mueven con velocidades de $V_A = 3 \mathbf{i}$ (m/s) y $V_B = -4 \mathbf{j}$ (m/s). Determinar la velocidad de A respecto de B (en m/s).



Resolución

La velocidad de A respecto de B es:

$$V_{A/B} = V_A - V_B$$

$$V_{A/B} = 3\mathbf{i} - (-4\mathbf{j}) = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} \text{ (m/s)}$$

4. PRINCIPIO DE RELATIVIDAD DE GALILEO:

La velocidad absoluta del móvil A, es igual a la velocidad del móvil B más la velocidad relativa de A respecto de B.

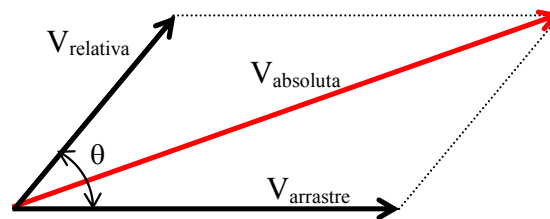
$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$$

5. PRINCIPIO DE INDEPENDENCIA DE LOS MOVIMIENTOS

Cada movimiento componente es un fenómeno físico independiente de los demás movimientos mecánicos, teniendo en común el tiempo transcurrido.

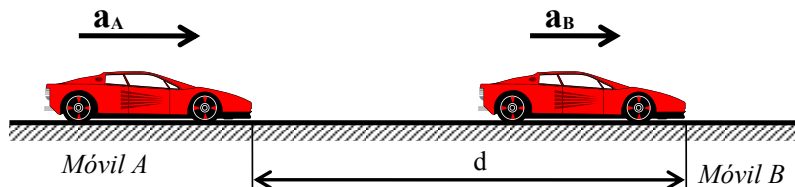
$$\vec{V}_{ABSOLUTA} = \vec{V}_{ARRASTRE} + \vec{V}_{RELATIVA}$$

El movimiento compuesto fue estudiado por el físico italiano Galileo Galilei.



6. ACELERACIÓN RELATIVA

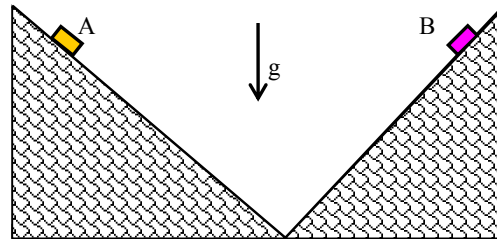
Es la aceleración del cuerpo A respecto de un observador ubicado en el cuerpo B que también se mueve con aceleración constante. La aceleración de A respecto de B, se define como la diferencia de las aceleraciones. $\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$



ACELERACIÓN RELATIVA

La aceleración relativa de A respecto de B, es el vector diferencia entre la aceleración de A (minuyendo) y la aceleración de B (sustraendo).

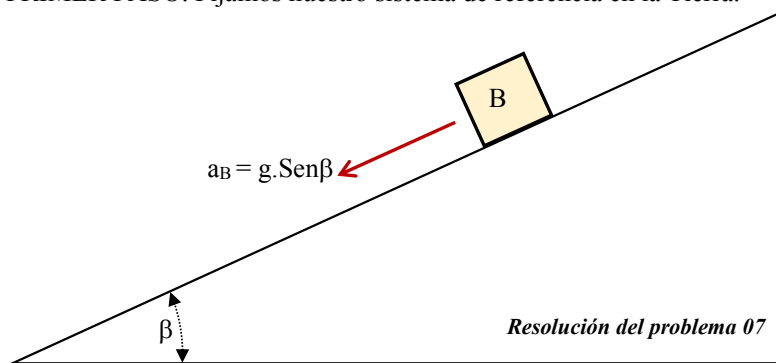
EJEMPLO. Se muestra dos bloques A y B que resbalan sobre planos inclinados libres de rozamiento. Si los planos forman entre si un ángulo recto, determinar el módulo de la aceleración relativa de A respecto de B. (g: módulo de la aceleración de la gravedad)



Para el problema 07

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Fijamos nuestro sistema de referencia en la Tierra.



Resolución del problema 07

SEGUNDO PASO. La aceleración del bloque sobre un plano inclinado tiene el siguiente valor.

$$a_A = g.Sen\alpha \quad y \quad a_B = g.Sen\beta$$

Además, sabemos que los planos son perpendiculares: $\alpha + \beta = 90^\circ$

TERCER PASO. Cálculo de la aceleración relativa: $\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$

CUARTO PASO. Cálculo del módulo de la aceleración relativa, aplicando la ley de cosenos.

$$a_{A/B} = \sqrt{(a_A)^2 + (a_B)^2 - 2.(a_A).(a_B).Cos90^\circ}$$

$$a_{A/B} = \sqrt{(a_A)^2 + (a_B)^2} \Rightarrow a_{A/B} = \sqrt{(g.Sen\alpha)^2 + (g.Sen\beta)^2}$$

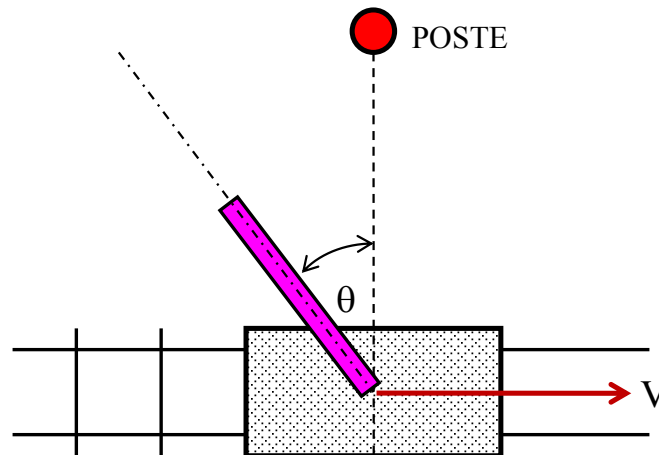
$$a_{A/B} = \sqrt{g^2.[(Sen\alpha)^2 + (Sen\beta)^2]} = g$$

Respuesta: el valor de la aceleración relativa es “g”.

7. MOVIMIENTO COMPUESTO

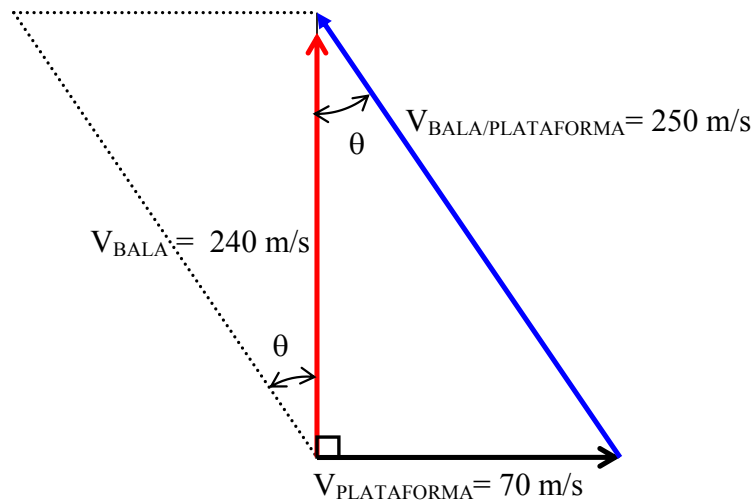
Es aquel movimiento que resulta de la composición de dos o más movimientos simples, el parámetro común en el tiempo transcurrido.

EJEMPLO: Un hombre se encuentra parado sobre una plataforma móvil que se mueve horizontalmente con velocidad constante de módulo 70 m/s. Si el hombre sostiene en sus manos un rifle, ¿en qué dirección definida por el ángulo θ debe hacer el disparo, en el instante que el hombre pasa enfrente a un poste para hacer blanco en éste? El módulo de la velocidad de la bala es 250 m/s respecto del rifle.



RESOLUCIÓN

La velocidad resultante, es igual a la suma de la velocidad de la plataforma, mas, la velocidad del proyectil respecto de la plataforma. De la condición del problema la velocidad resultante se dirige hacia el poste.



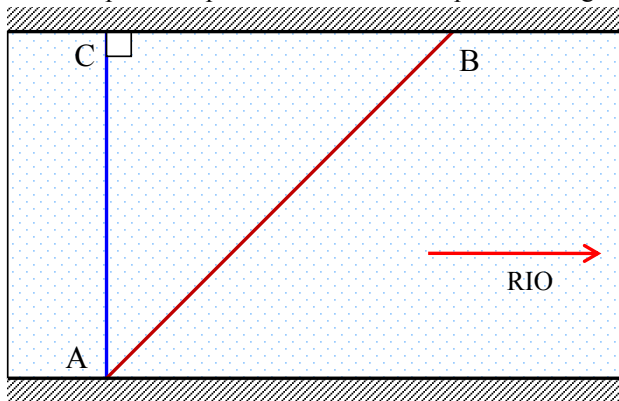
Resolviendo el triángulo notable cuyos ángulos interiores es 16° , 74° y 90° .

Respuesta: La medida del ángulo θ es 16° .

8. PRINCIPIO DE INDEPENDENCIA DE LOS MOVIMIENTOS

Cada movimiento componente es un fenómeno físico independiente de los demás movimientos, teniendo en común el tiempo transcurrido. Este fenómeno fue estudiado por el físico italiano Galileo Galilei.

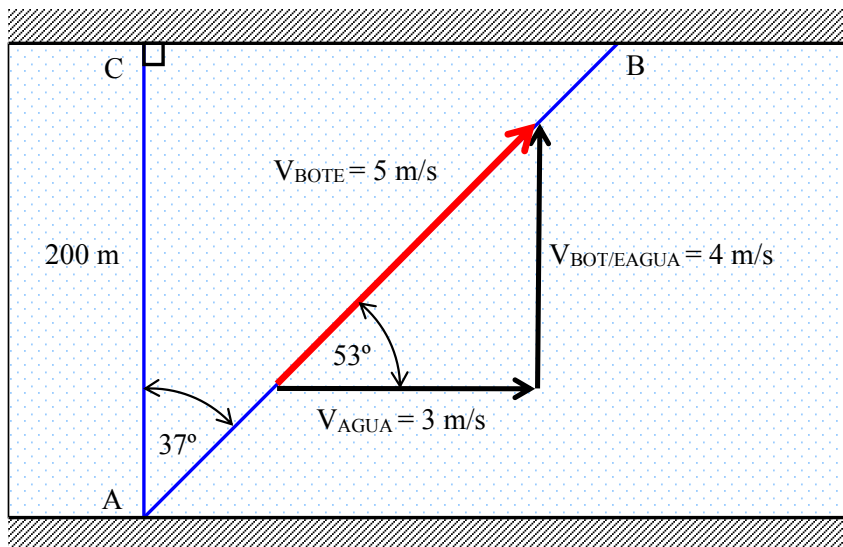
EJEMPLO: Para cruzar un río de ancho $AC = 200$ m, desde A hasta B, se emplea un bote que se mueve siempre perpendicularmente a la corriente del agua con velocidad de 4 km/h respecto del agua. Si la velocidad de la corriente del río tiene módulo de 3 m/s, ¿a qué distancia (en m) medida desde el punto de partida se encuentra el punto de llegada del bote?



RESOLUCIÓN

En el movimiento compuesto, la velocidad resultante se consigue sumando vectorialmente la velocidad del agua, más, la velocidad del bote respecto del agua. La trayectoria que sigue el bote tiene la misma dirección de la velocidad resultante.

Del triángulo rectángulo ACB y del triángulo de velocidades deducimos que:



$$\operatorname{Tg} 53^{\circ} = \frac{4}{3} = \frac{200 \text{ m}}{CD}$$

Respuesta: $CD = 150$ m y $AB = 250$ m

9. ACELERACION RELATIVA

Es la aceleración del cuerpo A respecto de un observador ubicado en el cuerpo B que también se mueve con aceleración constante. La aceleración de A respecto de B, se define como la diferencia de las aceleraciones.

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

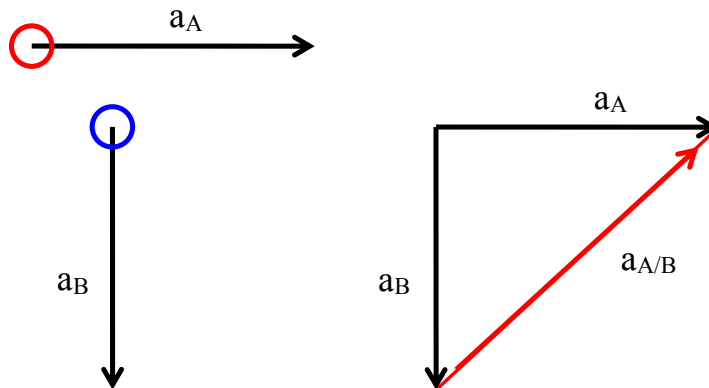
Para el movimiento compuesto se cumple que:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$



La aceleración relativa es el vector diferencia entre la aceleración de A (minuyendo) y la aceleración de B (sustraendo).

EJEMPLO: Dos cuerpos esféricos A y B se mueven con aceleración de $a_A = 3 \mathbf{i} \text{ (m/s}^2\text{)}$ y $a_B = -4 \mathbf{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$. Determinar la aceleración de A respecto de B (en m/s^2).



Resolución

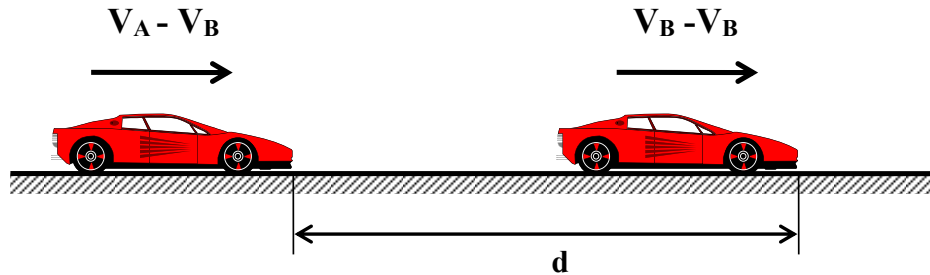
La aceleración relativa de A respecto de B es: $a_{A/B} = a_A - a_B$

$$a_{A/B} = 3i - (-4j) = 3i + 4j \text{ (m/s}^2\text{)}$$

10. PRINCIPIO DE RELATIVIDAD DE GALILEO

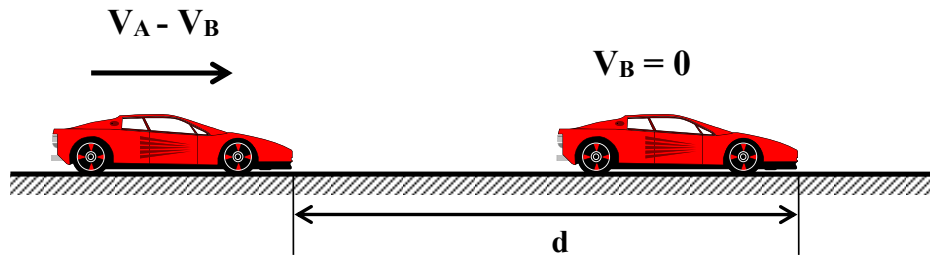
Si restamos la misma cantidad a las velocidades de A y B de tal manera que la velocidad del móvil B sea nula. Es decir, el observador se mueve con la misma velocidad de B. Entonces analizar el movimiento visto desde el móvil B en reposo es mucho más fácil.

En la “Teoría Especial de la relatividad” la velocidad de las partículas es comparable con la rapidez de la luz.



Si fijamos nuestro sistema de referencia sobre el móvil B, entonces observamos al móvil A con rapidez $(V_A - V_B)$. Para el observador, el móvil B se encuentra en reposo relativo.

$$d_{relativa} = V_{relativa} \cdot t \Rightarrow d_{relativa} = (V_A - V_B) \cdot t$$



EJEMPLO: Un camión de 40 m de largo, marcha a 72 km/h por una carretera paralela a la vía del tren. ¿Cuánto tiempo invertirá el camión en pasar íntegramente a un tren de 260 metros de largo que marcha a 18 km/h en la misma dirección?

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. El camión de 40 metros de largo se desplaza con rapidez de 20 m/s y el tren de 260 m le largo con rapidez de 5 m/s.

SEGUNDO PASO. Si fijamos nuestro sistema de referencia en el tren, la velocidad relativa del camión es 15 m/s y la distancia relativa es para adelantar al tren es $(40 + 260 = 300)$ metros.

$$d_{relativa} = (V_{camion} - V_{tren}) \cdot t$$

$$(40 + 260) = (20 - 5) \cdot t$$

Resolviendo la ecuación tenemos: $t = 20$ s.

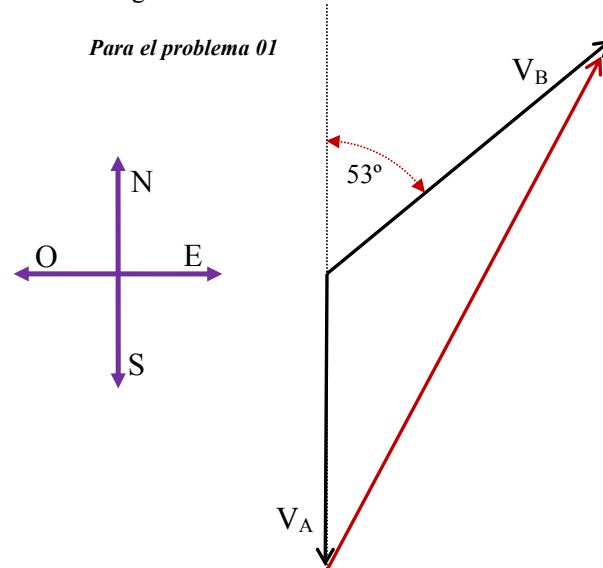
Respuesta: El camión invierte en adelantar al tren 20 segundos.

RESOLUCION DE PROBLEMAS

1. Un barco **A** navega hacia el Sur con velocidad de 14 km/h, mientras que otro barco **B** mantiene el rumbo N53°E moviéndose a 30 km/h. Determinar la velocidad del barco **B** respecto de un observador que se encuentra sobre la cubierta de **A**.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama de velocidades.



SEGUNDO PASO. La velocidad de **B** respecto de **A** es: $\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

$$\|\vec{V}_{B/A}\| = \sqrt{(V_B)^2 + (V_A)^2 - 2 \cdot (V_B) \cdot (V_A) \cdot \cos 127^\circ}$$

$$\|\vec{V}_{B/A}\| = \sqrt{(30)^2 + (14)^2 - 2 \cdot (30) \cdot (14) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)} = 40 \frac{km}{h}$$

Respuesta: La rapidez de B respecto de A es $40 \frac{km}{h}$

2. Un muchacho caminando sobre una escalera mecánica detenida se demora en llegar arriba 90 segundos. Cuando está parado sobre la escalera en movimiento demora en llegar 60 segundos, ¿Qué tiempo demora en llegar si camina sobre la escalera en movimiento?

RESOLUCION

PRIMER PASO. Sea, **L** la longitud de la escalera.

SEGUNDO PASO. La velocidad del hombre respecto de la escalera:

$$V_{H/E} = \frac{L}{90}$$

TERCER PASO. La velocidad de la escalera respecto de la Tierra:

$$V_E = \frac{L}{60}$$

CUARTO PASO. La velocidad del hombre respecto de la Tierra:

$$V_H = V_E + V_{H/E} \Rightarrow V_H = \frac{L}{60} + \frac{L}{90} = \frac{L}{36}$$

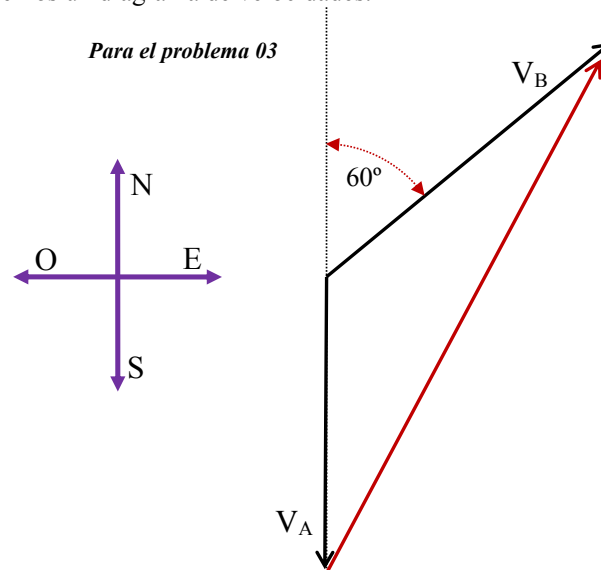
QUINTO PASO. El hombre demora en desplazarse la distancia **L** en 36 segundos:

Respuesta: demora 36 segundos.

3. Un barco **A** navega hacia el Sur con velocidad de 36 km/h, mientras que otro barco **B** mantiene el rumbo N60°E moviéndose a 36 km/h. Determinar la velocidad del barco **B** respecto de un observador que se encuentra sobre la cubierta de **A**.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama de velocidades.



SEGUNDO PASO. La velocidad de **B** respecto de **A** es:

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

TERCER PASO. Cálculo del valor de la velocidad relativa, aplicando la ley de cosenos.

$$\|\vec{V}_{B/A}\| = \sqrt{(V_B)^2 + (V_A)^2 - 2 \cdot (V_B) \cdot (V_A) \cdot \cos 120^\circ}$$

$$\|\vec{V}_{B/A}\| = \sqrt{(10)^2 + (10)^2 - 2 \cdot (10) \cdot (10) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 10\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

Respuesta: La rapidez de B respecto de A es $17,3 \frac{m}{s}$

4. Dos pueblos amazónicos se encuentran en la misma orilla de un río separados una distancia de 36 km. Los pobladores para movilizarse usan una lancha que siempre se mueve con la misma velocidad constante en módulo respecto del agua, pero debido a la corriente de agua, cuando se mueve la lancha río debajo demora 1 hora y cuando se mueve río arriba se demora 2 horas, entre ambos pueblos. Determinar el módulo de la velocidad constante del río (en km/h)

A) 17 **B) 27** C) 30 D) 24 E) 15

RESOLUCION

PRIMER PASO. Fijamos nuestro sistema de referencia en la tierra. Sea, v la velocidad del Río y u la velocidad de la lancha respecto del agua. Entonces la velocidad Río abajo será $(u+v)$ y la velocidad Río arriba será $(u-v)$

SEGUNDO PASO. La distancia es la misma, cuando va río arriba y cuando regresa río arriba.

$$d_{abajo} = d_{arriba} \Rightarrow V_1 \cdot t_1 = V_2 \cdot t_2$$

$$(u+v) \cdot (1h) = (u-v) \cdot (2h) \Rightarrow u = 3v$$

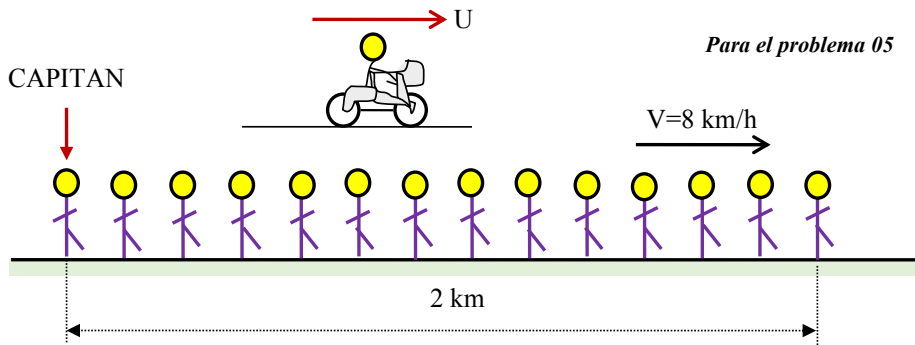
TERCER PASO. Cálculo de la velocidad del Río, aplicando las leyes del M.R.U.

$$d = (u + v) \cdot (t_1) \Rightarrow 36 \text{ km} = (4 \cdot v) \cdot (1 \text{ h}) \Rightarrow v = 9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$u = 3 \cdot v \Rightarrow u = 27 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Respuesta: la velocidad del río es 27 km/h

5. Una columna de soldados que se extiende 2 km se mueve por una carretera con velocidad de 8 km/h. El capitán que se halla en la retaguardia envía una motocicleta con una orden a la cabeza de la columna. Después de 20 minutos el motociclista regresa con la misión cumplida. Determine la velocidad del motociclista considerando que él avanza en ambas direcciones con la misma velocidad.



RESOLUCION

PRIMER PASO. Fijamos nuestro sistema de referencia en los ojos del capitán.

SEGUNDO PASO. Para el capitán, la velocidad del motociclista será $(U - V)$ de ida y $(U + V)$ de regreso.

Para la ida:

$$t_1 = \frac{d}{U - V} = \frac{2}{U - 8} \dots (1)$$

Para el regreso:

$$t_2 = \frac{d}{U + V} = \frac{2}{U + 8} \dots (2)$$

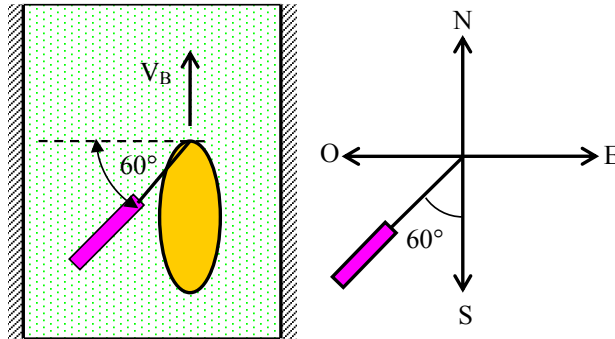
Pero el tiempo total es: $t_1 + t_2 = 20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ h} \dots (3)$

TERCER PASO. Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$\frac{2}{U - 8} + \frac{2}{U + 8} = \frac{1}{3} \Rightarrow U = 16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Respuesta: la velocidad del motociclista es $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

6. Una bandera ubicada en el mástil de un bote flamea haciendo un ángulo de 60° como se muestra en la figura, pero la bandera situada en una casa en la orilla del río se extiende al Sur 60° Oeste. Determinar el módulo de la velocidad (en km/h) del viento respecto al bote, si el bote se mueve con rapidez de 10 km/h.

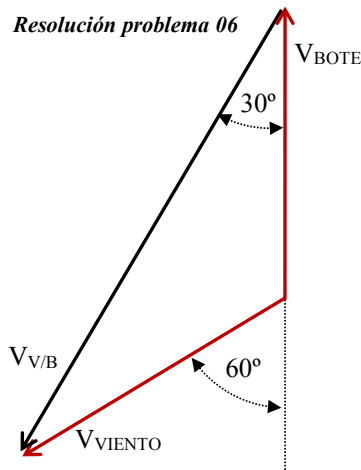


Para el problema 06

- A) 10 B) $10\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{3}$ D) 8 E) ninguna anterior

RESOLUCION

PRIMER PASO. La bandera ubicada en el mástil del bote flamea en dirección de la velocidad relativa del viento respecto del bote.



SEGUNDO PASO. De la composición vectorial de velocidades se deduce que el triángulo es isósceles:

$$V_{BOTE} = V_{VIENTO} = 10 \frac{km}{h}$$

TERCER PASO. Cálculo de la velocidad del viento respecto de un observador ubicado en el bote. Aplicando la ley de cosenos:

$$V_{V/B} = \sqrt{(V_V)^2 + (V_B)^2 - 2 \cdot (V_V) \cdot (V_B) \cdot \cos 120^\circ}$$

$$V_{V/B} = \sqrt{(10)^2 + (10)^2 - 2 \cdot (10) \cdot (10) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 10\sqrt{3} \frac{km}{h}$$

Respuesta: la rapidez de viento respecto del pote es $17,3 \frac{km}{h}$

OBSEERVACION. En ausencia del viento, la bandera ubicada en el mástil del bote flamearía en el sentido de N a S, opuesto al movimiento del bote.

7. Dos trenes que se mueven en vías paralelas y sentidos opuestos viajan con rapidez de 54 km/h y 36 km/h. Un pasajero del tren más lento (que mantiene su posición en todo momento), percibe que el otro tren pasa, frente a él, completamente en 6 segundos. Determine el largo del tren más rápido.

Resolución

Consideremos dos trenes A y B. El tren A se mueve con rapidez de 15 m/s y el tren B con rapidez de 10 m/s. El pasajero se encuentra ubicado en el tren B (lento) y observa pasar al tren A de largo L en un intervalo de tiempo de 60 segundos.

$$d_{\text{relativa}} = (V_A - V_B)t \Rightarrow L = (15 - 10) \cdot (60) = 300 \text{ m}$$

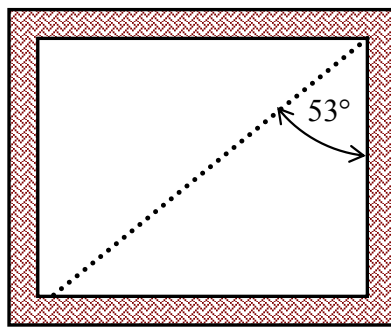
Respuesta: El largo del tren A es 300 metros

8. Un hombre que guía su automóvil a través de una tormenta a 100 km/h observa que las gotas de lluvia dejan trazos en las ventanas laterales haciendo un ángulo de 53° con la vertical. Cuando el hombre detiene su auto, observa que la lluvia está cayendo realmente en forma vertical. Calcular el módulo de la velocidad de la lluvia (km/h) respecto de la Tierra.

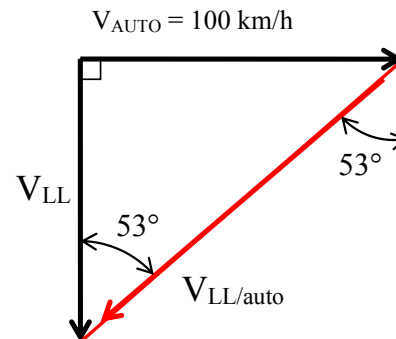
RESOLUCIÓN

Construimos el diagrama de velocidades, donde la velocidad de la lluvia respecto del auto forma 53° respecto de la vertical.

Resolviendo el triángulo rectángulo de ángulo interior 37° , 53° y 90° , obtenemos:



Para el problema 08



$$\tan 37^\circ = \frac{V_{\text{lluvia}}}{V_{\text{auto}}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{V_{\text{lluvia}}}{100 \text{ km/h}}$$

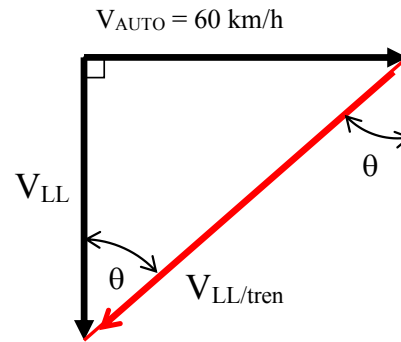
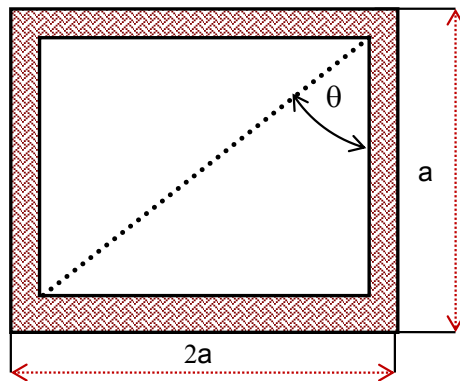
Rapidez de la lluvia: 75 km/h

Respuesta: La rapidez de la lluvia respecto del auto es: 125 km/h.

9. A través del cristal de la ventana de un coche de ferrocarril, un pasajero ve caer las gotas de lluvia paralelamente a la diagonal del marco. ¿Con qué módulo de velocidad (en km/h) cae realmente, si no hay viento, y el tren está corriendo con velocidad constante cuyo módulo es 60 km/h? El ancho de la ventana es el doble de la altura.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Nos piden determinar la velocidad de la lluvia respecto de la Tierra. De la condición del problema, la velocidad de la lluvia respecto del tren es paralelamente a la diagonal del marco.



Para el problema 09

SEGUNDO PASO. De la semejanza de triángulos:

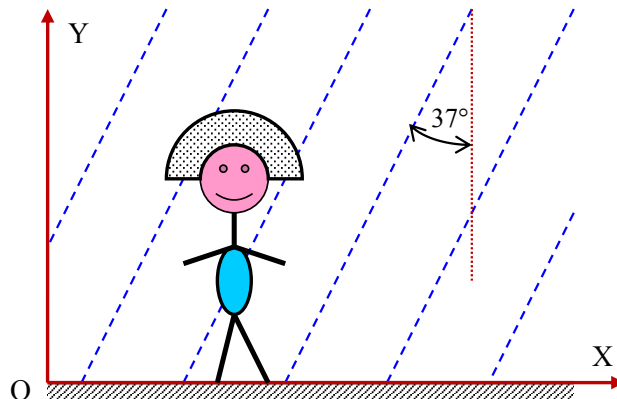
$$\tan \theta = \frac{2a}{a} = \frac{V_{TREN}}{V_{LLUVIA}}$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$2 = \frac{60 \text{ km/h}}{V_{LLUVIA}} \Rightarrow V_{LLUVIA} = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

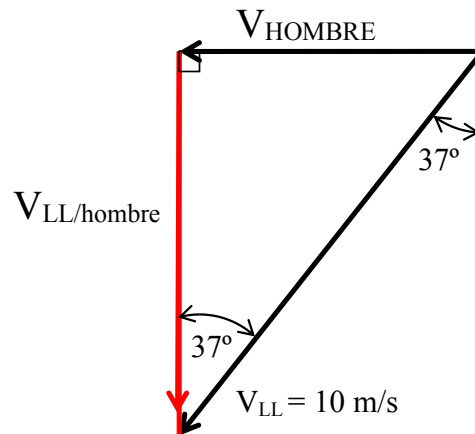
Respuesta: La rapidez de la lluvia es $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

10. Las gotas de lluvia caen con velocidad constante de módulo 10 m/s formando un ángulo de 37° con la vertical. Determinar la rapidez (en m/s) y dirección con que debe moverse el hombre con un sombrero grande para mojarse lo menos posible.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. La velocidad de la lluvia respecto del hombre en movimiento debe ser aparentemente vertical. Entonces la velocidad del hombre debe ser hacia la izquierda respecto de la Tierra. Observemos el diagrama de velocidades:



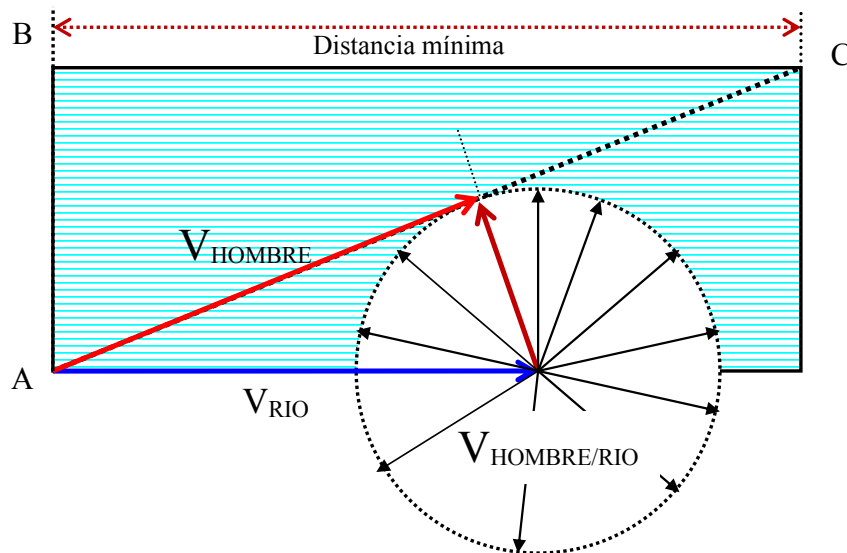
SEGUNDO PASO. Se forma un triángulo de ángulos interiores 37° , 53° y 90° . Resolviendo obtenemos que:

Rapidez del hombre: 6 m/s.

Rapidez de la lluvia respecto del hombre: 8 m/s.

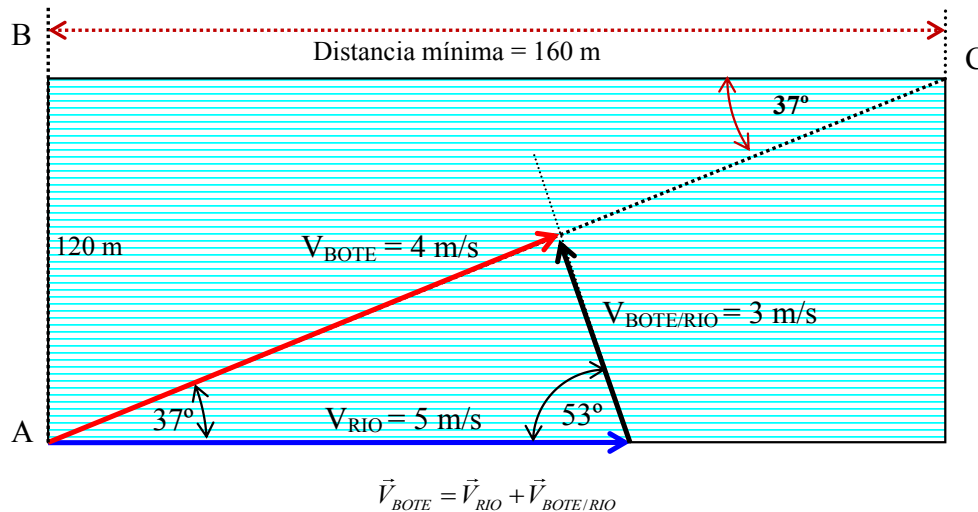
Respuesta: La velocidad del hombre: $-6 \mathbf{i}$ (m/s)

11. Un hombre puede nadar en aguas tranquilas con velocidad de módulo 3 m/s. Si el ancho del río es $AB = 120$ m, cuyas aguas se mueven con velocidad constante de módulo 5 m/s, determinar el intervalo de tiempo (en s) que tardará en cruzar el río, sabiendo que sale del punto A y quiere llegar alejado del punto opuesto B una distancia mínima BC.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. La figura muestra una circunferencia donde el hombre puede nadar en infinitas direcciones. De todas las direcciones posibles la distancia de alejamiento será mínima cuando la velocidad del hombre respecto de la Tierra sea perpendicular a la velocidad del hombre respecto del agua. En la figura, el segmento AC es tangente a la circunferencia. Entonces se forma un triángulo rectángulo de ángulo interior 37° , 53° y 90° .



SEGUNDO PASO. La velocidad del hombre respecto de la Tierra es igual a la suma de las velocidades del agua (corriente del río), más, la velocidad del hombre respecto del agua.

La rapidez del hombre respecto de tierra es 4 m/s.

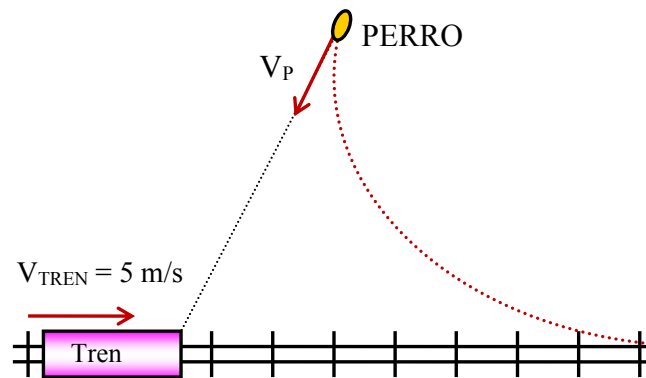
Resolviendo el triángulo obtenemos que la medida del segmento AC es 200 metros y la distancia mínima de alejamiento BC es 160 metros.

El tiempo empleado por el hombre para desplazarse desde A hasta C con rapidez constante de 4 m/s es:

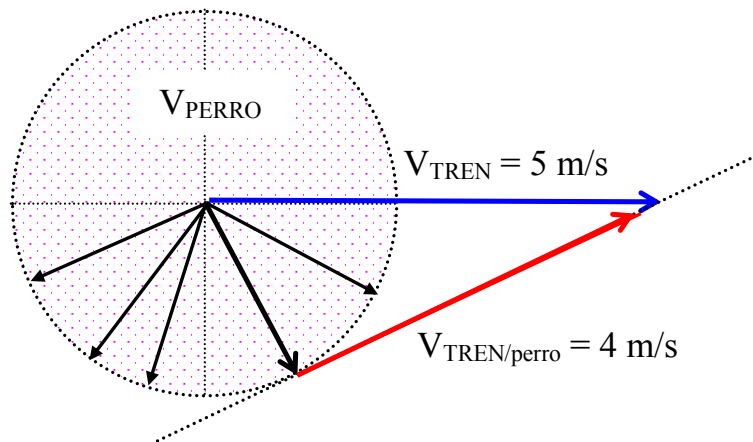
$$t = \frac{d}{V} = \frac{200 \text{ m}}{4 \text{ m/s}} = 50 \text{ s}$$

Respuesta: El hombre demora en cruzar el río 50 segundos.

12. Un coche de ferrocarril se desplaza rectilíneamente sobre rieles con rapidez constante de 5 m/s. Un perro que se encuentra fuera de la línea férrea se dirige en todo instante al coche con rapidez constante. Si en cierto instante el perro observa que el tren pasa frente a él con una rapidez de 4 m/s, determinar la rapidez con que se mueve el perro.

**RESOLUCIÓN**

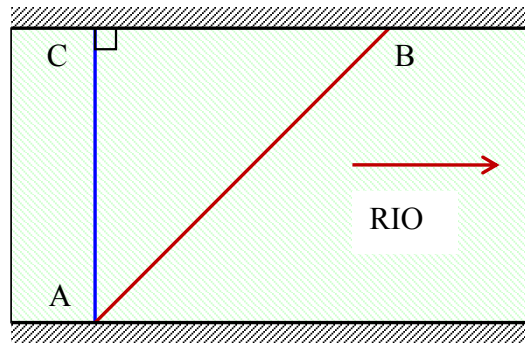
PRIMER PASO. El perro cambia de dirección en cada instante respecto de la Tierra, pero manteniendo constante el módulo de la velocidad. El perro dirá que el tren pasa frente a él, cuando la velocidad del perro es perpendicular a la velocidad relativa del tren respecto al perro.



SEGUNDO PASO. En el diagrama de velocidades, aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de 37° y 53° , se deduce que,

Respuesta: la rapidez del perro es 3 m/s.

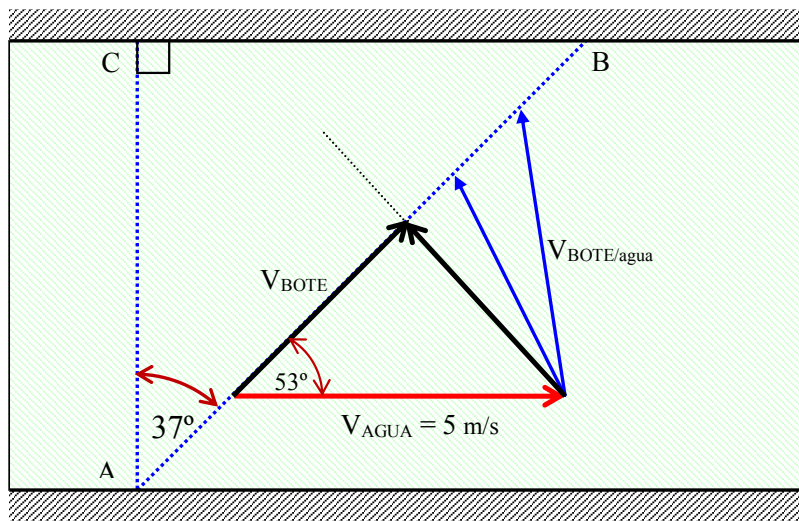
13. Un hombre en un bote debe ir de A hacia B que está en orillas opuestas. Las dimensiones son $AC = 80$ m y $BC = 60$ m. Si la velocidad de la corriente del río es constante de módulo 5 m/s, determinar la mínima rapidez constante del bote respecto del agua (en m/s), para lograr su objetivo.

**RESOLUCIÓN**

PRIMER PASO. La velocidad del bote respecto de la Tierra debe tener la dirección AB. Pero la velocidad resulta de sumar vectorialmente la velocidad del agua, más la velocidad del bote respecto del agua.

$$\vec{V}_{BOTE} = \vec{V}_{AGUA} + \vec{V}_{BOTE/agua}$$

SEGUNDO PASO. Existen infinitas posibilidades de la dirección de la velocidad del bote respecto del agua, la velocidad de menor modulo, es aquel vector **perpendicular** al segmento AB. Observemos el triángulo de velocidades:



Resolviendo tenemos que: Rapidez del bote: 3 m/s

Respuesta: La rapidez del bote respecto del agua (mínimo): 4 m/s

14. Una lancha a motor que va río arriba se encontró con un bote que flota aguas abajo. Pasada una hora después de este encuentro el motor de la lancha se paró. La reparación de esta duró 30 minutos y durante todo el tiempo la lancha seguía libremente la corriente del río. Arreglando el motor, la lancha comenzó a ir río abajo con la misma rapidez con relación a la corriente del agua y alcanzó al bote a una distancia igual a 7,5 km del punto de su primer encuentro. Determinar la rapidez de la corriente del río, considerándola constante (en km/h).

A) 3

B) 4

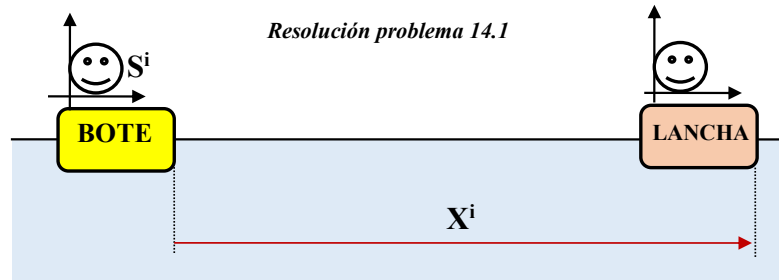
C) 5

D) 6

E) 10

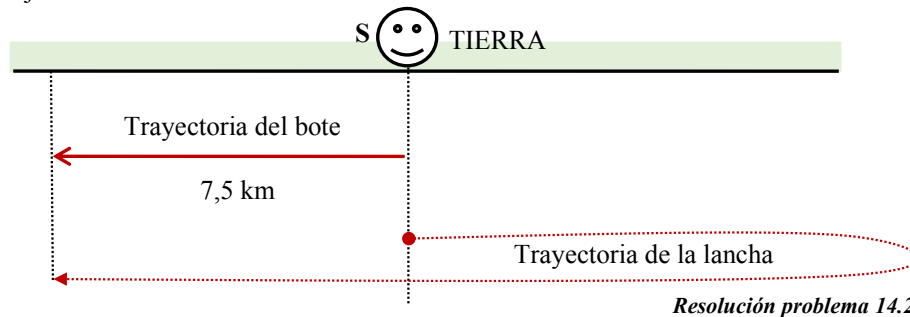
RESOLUCION

PRIMER PASO. Fijamos nuestro sistema de referencia inercial S^i en el bote, de ahí observamos que la lancha se aleja una distancia X^i en 1 hora.



SEGUNDO PASO. Pasado 0,5 hora, en que el motor de la lancha paró, la distancia X^i no se altera, debido a que ambos cuerpos tienen la misma velocidad del Río. Arreglado el motor la lancha regresa con la misma rapidez respecto del agua, por consiguiente, pasado 1 hora más da alcance al bote. El tiempo total transcurrido será: $t = 1 + 0,5 + 1 = 2,5 h$

TERCER PASO. El tiempo transcurre de igual modo para todos los sistemas de referencia. Ahora fijamos nuestro sistema de referencia S en la tierra.



CUARTO PASO. Observamos que la lancha le da alcance al bote a 7,5 km de su primer punto de encuentro. El bote en 2,5 horas se ha desplazado 7,5 km con la misma rapidez del Río, con respecto de la Tierra.

$$d = V \cdot t \Rightarrow V = \frac{d}{t} = \frac{7,5 \text{ km}}{2,5 \text{ h}} = 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Respuesta: La velocidad de la corriente del Río es 3 km/h.

15. Dos trenes de 200 m y 400 m de largo avanzan en vías paralelas en sentidos opuestos y, cuando se encuentran sus velocidades son 12 m/s y 18 m/s, y sus aceleraciones son iguales a 3 m/s², respectivamente. Calcular el tiempo que demoran los trenes en cruzarse completamente.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Ubicamos nuestro sistema de referencia en el primer tren (1).



Resolución del problema 15

SEGUNDO PASO. Respecto del primer tren (1), el otro (2) se acerca con velocidad inicial igual a:

$$\vec{V}_{2/1} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \Rightarrow V_{2/1} = (12 + 18) = 30 \frac{m}{s}$$

TERCER PASO. la aceleración relativa del móvil (2) respecto del móvil (1) es:

$$\vec{a}_{2/1} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \Rightarrow a_{2/1} = (3 + 3) = 6 \frac{m}{s^2}$$

CUARTO PASO. Desplazamiento relativo. Respecto del primer tren, el tren (2) se desplaza:

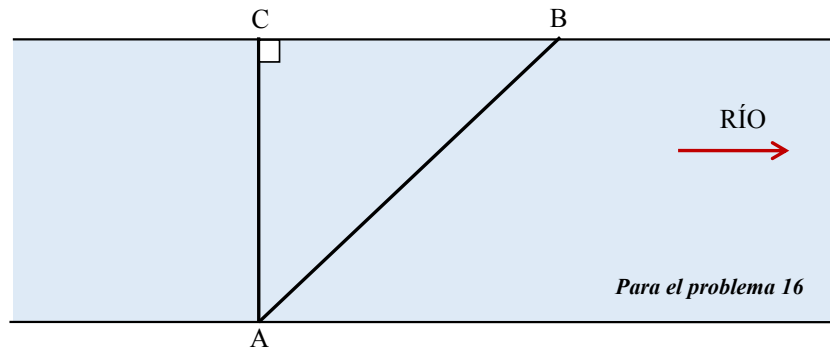
$$d_{2/1} = 200 + 400 = 600 m$$

QUINTO PASO. Cada punto del tren (2) experimenta un desplazamiento de 600 metros para cruzarse completamente con el tren (1). Aplicamos la fórmula del M.R.U.V:

$$d_{2/1} = (V_{2/1})t + \frac{1}{2} \cdot (a_{2/1})t^2 \Rightarrow 600 = 30 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (6) \cdot t^2$$

Respuesta: demoran en cruzarse 10 segundos.

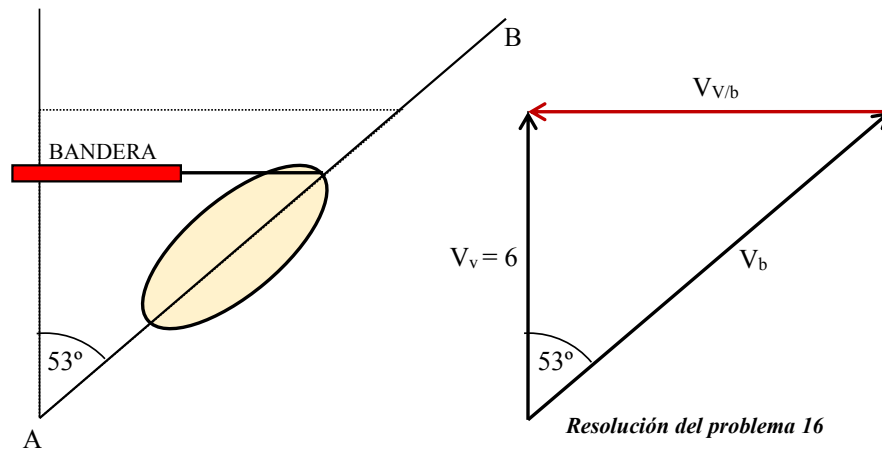
16. En un río del punto A al punto B que se encuentra en la orilla opuesta, a lo largo de la recta AB, navega un bote. La bandera ubicada en el mástil del bote flamea en la dirección y sentido opuesto del río. El viento sopla con velocidad de 6 m/s en dirección perpendicular a la orilla, de A hacia C. Sí, $AC = 3 km$ y $CB = 4 km$, determinar la velocidad del bote.



Para el problema 16

RESOLUCION

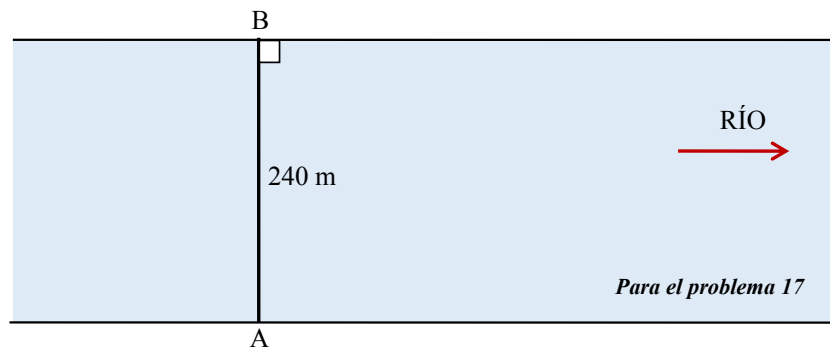
PRIMER PASO. La bandera ubicada en el mástil del bote flamea en la dirección de la, velocidad relativa del viento respecto del bote.



SEGUNDO PASO. Del triángulo rectángulo deducimos que la velocidad del bote respecto de la orilla es 10 m/s.

TERCER PASO. En ausencia del viento, la bandera ubicada en el mástil del bote flamearía en el sentido de B hacia A, opuesto al movimiento del bote.

17. Un hombre puede nadar en aguas tranquilas con velocidad de 5 m/s. Si se tiene un río de 240 m de ancho, cuyas aguas se mueven con velocidad constante de 3 m/s. Calcular el tiempo que tardará en cruzar el río, sabiendo que tiene que hacerlo en dirección perpendicular a la orilla.



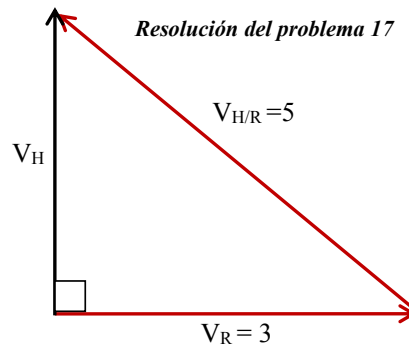
RESOLUCION

PRIMER PASO. Fijamos nuestro sistema de referencia en la orilla del río.

SEGUNDO PASO. La velocidad del hombre nadando es igual a la suma vectorial, de la velocidad de la corriente del río más la velocidad del hombre respecto del río, y esta resultante tiene la dirección de A hacia B, perpendicular a la orilla.

$$\vec{V}_{HOMBRE} = \vec{V}_{RÍO} + \vec{V}_{HOMBRE/RÍO}$$

TERCER PASO. Del triángulo rectángulo formado, deducimos que la velocidad del hombre respecto de la tierra es $V_H = 4 \text{ m/s}$, con el cual recorre la distancia AB en un tiempo "t".



$$d_{AB} = V_H \cdot t \Rightarrow t = \frac{d_{AB}}{V_H} = \frac{240 \text{ m}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 60 \text{ s}$$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 1 minuto.

- 18.** Sobre la plataforma de un ferrocarril que está corriendo a razón de 12 km/h, un hombre camina con velocidad de 5 km/h respecto de la plataforma, en dirección perpendicular a la dirección de los rieles. Calcular la velocidad del hombre visto desde suelo firme.

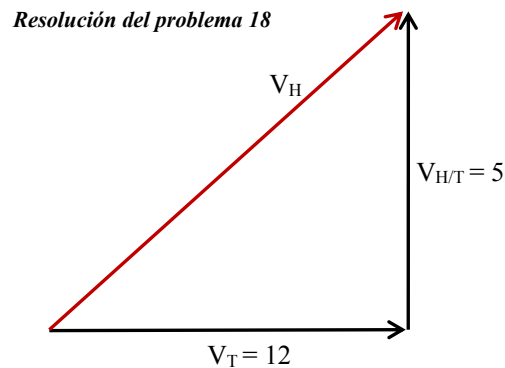
RESOLUCION

PRIMER PASO. Fijamos nuestro sistema de referencia en suelo firme.

SEGUNDO PASO. En el movimiento compuesto, la velocidad resultante se consigue adicionando vectorialmente la velocidad del tren, mas, la velocidad del hombre respecto del tren.

$$\vec{V}_{\text{HOMBRE}} = \vec{V}_{\text{TREN}} + \vec{V}_{\text{HOMBRE/TREN}}$$

TERCER PASO. Resolvemos el triángulo rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras.



$$(V_H)^2 = (V_T)^2 + (V_{H/T})^2 \Rightarrow (V_H)^2 = (12)^2 + (5)^2$$

$$(V_H)^2 = 169 \Rightarrow V_H = 13 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

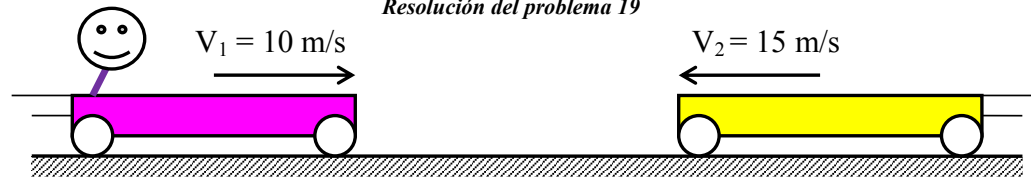
Respuesta: la velocidad del hombre respecto del suelo es 13 km/h.

19. Dos trenes corren en sentidos contrarios y con velocidades de $V_1 = 36 \text{ km/h}$ y $V_2 = 54 \text{ km/h}$. Un pasajero del primer tren (el de V_1), observa que el tren (2) demora en pasar por su costado 6 segundos. Se supone que el pasajero está inmóvil en el primer tren mirando a través de la ventana. ¿Cuál es la longitud del segundo tren?

RESOLUCION

PRIMER PASO. Fijamos nuestro sistema de referencia en el primer tren.

Resolución del problema 19



SEGUNDO PASO. El pasajero observa pasar al segundo tren con velocidad:

$$\vec{V}_{2/1} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \Rightarrow V_{2/1} = (10 + 15) = 25 \frac{m}{s}$$

TERCER PASO. Aplicamos las leyes del M.R.U para el pasajero del primer tren.

$$d = V_{2/1} \cdot t \Rightarrow L = (V_1 + V_2) \cdot (t)$$

$$L = (10 + 15) \cdot (6) = 150 \text{ m}$$

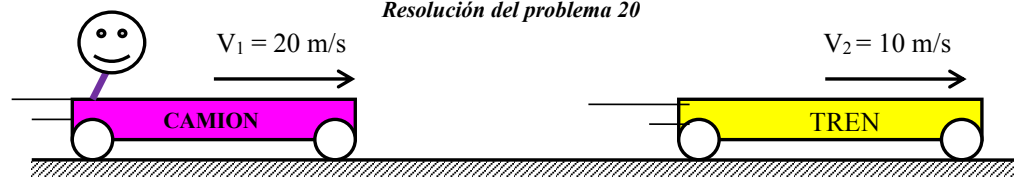
Respuesta: el largo del segundo tren mide 150 metros.

20. Un camión de 40 m de largo marcha a 72 km/h por una carretera paralela a la vía del tren. ¿Cuánto tiempo invertirá el camión en pasar íntegramente a un tren de 260m que marcha a 36 km/h en la misma dirección y sentido?

RESOLUCION

PRIMER PASO. Transformando a m/s la velocidad del camión es 20 m/s y la velocidad del tren es 10 m/s.

Resolución del problema 20



SEGUNDO PASO. Respecto de un observador ubicado en el camión, el tren pasa con velocidad igual a la diferencia,

$$\vec{V}_{T/C} = \vec{V}_T - \vec{V}_C \Rightarrow \vec{V}_{T/C} = (10 - 20) = -10 \frac{m}{s}$$

Para el observador ubicado en el camión, el tren avanza en sentido opuesto al movimiento del camión.

TERCER PASO. Cada punto del camión experimenta un desplazamiento de $(40 \text{ m} + 260 \text{ m})$ para que el tren atravesase íntegramente el camión.

$$d = V_{T/C} \cdot t \Rightarrow 300 \text{ m} = \left(10 \frac{m}{s}\right) \cdot (t) \Rightarrow t = 30 \text{ s}$$

Respuesta: el tiempo invertido es 30 segundos.

21. Dos trenes (1) y (2) de 300 m y 220 m de largo avanzan en vías paralelas en el mismo sentido y, cuando se encuentran sus velocidades son 18 m/s y 12 m/s, y sus aceleraciones son 3,5 m/s² y 1,5 m/s² respectivamente. Calcular el tiempo que demoran los trenes en cruzarse completamente.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Ubicamos nuestro sistema de referencia en el primer tren (1).



Resolución del problema 21

SEGUNDO PASO. Respecto del primer tren (1), el otro (2) se acerca con velocidad inicial igual a:

$$\vec{V}_{2/1} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \Rightarrow \vec{V}_{2/1} = (12 - 18) = -6 \frac{m}{s}$$

TERCER PASO. la aceleración relativa del móvil (2) respecto del móvil (1) es:

$$\vec{a}_{2/1} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \Rightarrow \vec{a}_{2/1} = (1,5 - 3,5) = -2 \frac{m}{s^2}$$

CUARTO PASO. Desplazamiento relativo. Respecto del primer tren, el tren (2) se desplaza:

$$\vec{d}_{2/1} = (-300 - 220) = -520 m$$

QUINTO PASO. Cada punto del tren (2) experimenta un desplazamiento de 520 metros para cruzarse completamente con el tren (1).

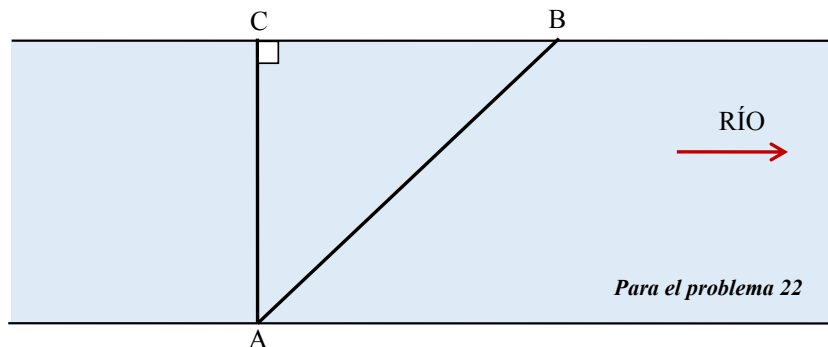
SEXTO PASO. Aplicamos la fórmula del M.R.U.V: Para el observador ubicado en el tren (1), el tren (2) avanza de derecha a izquierda, tiene velocidad inicial 6 m/s y acelera con 2 m/s², veamos:

$$d_{2/1} = (V_{2/1})t + \frac{1}{2} \cdot (a_{2/1})t^2 \Rightarrow 520 = 6t + \frac{1}{2} \cdot (2)t^2$$

$$520 = 6t + t^2 \Rightarrow t = 20 s$$

Respuesta: demoran en cruzarse 20 segundos.

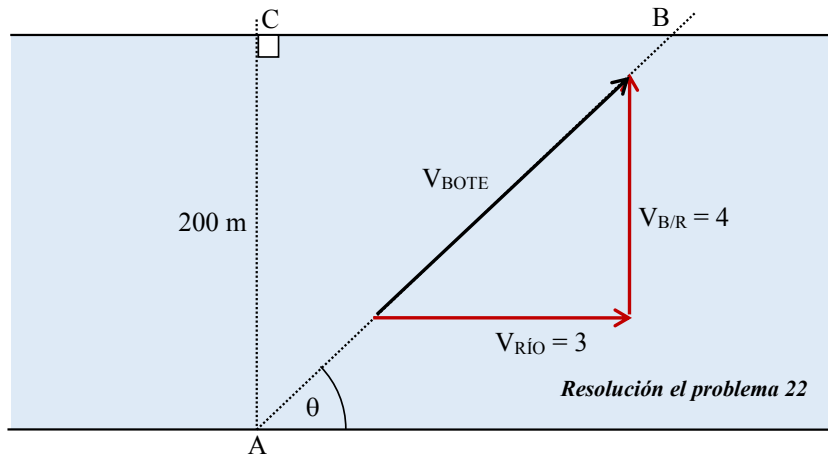
22. Para cruzar un río de 200 m de ancho, se emplea un bote, que se mueve siempre perpendicularmente a la corriente del agua, con velocidad de 4 km/h. Si la velocidad de la corriente es 3 km/h, ¿A qué distancia, medida desde el punto de partida, se encuentra el punto de llegada?



Para el problema 22

RESOLUCION

PRIMER PASO. Fijamos nuestro sistema de referencia en la orilla del río.



SEGUNDO PASO. En el movimiento compuesto, la velocidad resultante se consigue adicionando vectorialmente la velocidad del río, mas, la velocidad del bote respecto del río.

$$\vec{V}_{BOTE} = \vec{V}_{RIO} + \vec{V}_{BOTE/RIO}$$

TERCER PASO. La trayectoria que sigue el bote tiene la misma dirección del vector velocidad resultante, en la dirección de A hacia B.

CUARTO PASO. Del triángulo rectángulo de velocidades se deduce que $\theta = 53^\circ$.

Del triángulo rectángulo ACB:

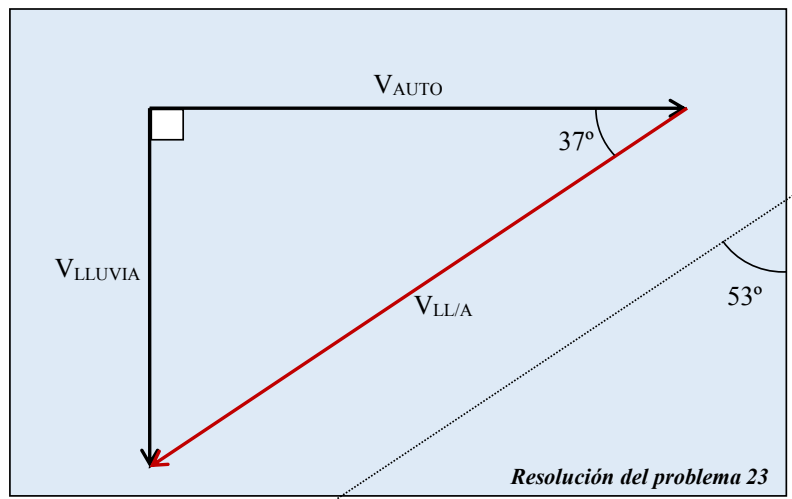
$$d = \overline{AB} = 250 \text{ m}$$

Respuesta: la distancia que se aleja hasta llegar a la orilla opuesta es 250 m.

23. Un hombre que guía su automóvil a través de una tormenta a 100 km/h observa que las gotas de lluvia dejan trazas en las ventanas laterales haciendo un ángulo de 53° con la vertical. Cuando detiene su auto, observa que la lluvia está cayendo realmente en forma vertical. Calcular la velocidad de la lluvia respecto de la tierra.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Fijamos nuestro sistema de referencia en el automóvil en movimiento. Consideramos que el auto se mueve de izquierda a derecha.

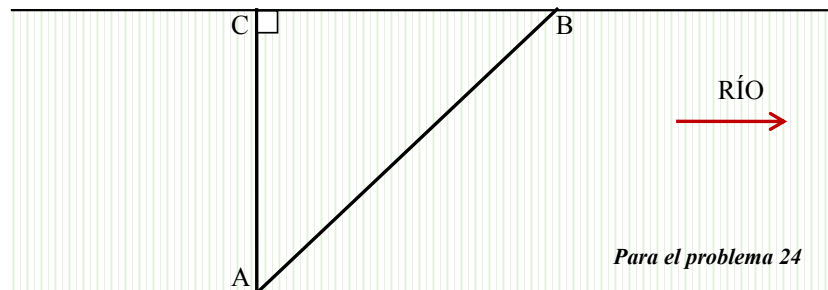


SEGUNDO PASO. Construimos el diagrama de velocidades.

$$\tan 37^\circ = \frac{V_{LLUVIA}}{V_{AUTO}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{V_{LLUVIA}}{100 \text{ km/h}} \Rightarrow V_{LLUVIA} = 75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Respuesta: la velocidad de la lluvia es 75 km/h

24. Un hombre en un bote debe ir de A hacia B que están en orillas opuestas del río. Las dimensiones son $AC = 80 \text{ m}$ y $BC = 60 \text{ m}$. La velocidad de la corriente del río es 5 m/s. Calcular la mínima velocidad del bote relativa al agua, para lograr su objetivo.

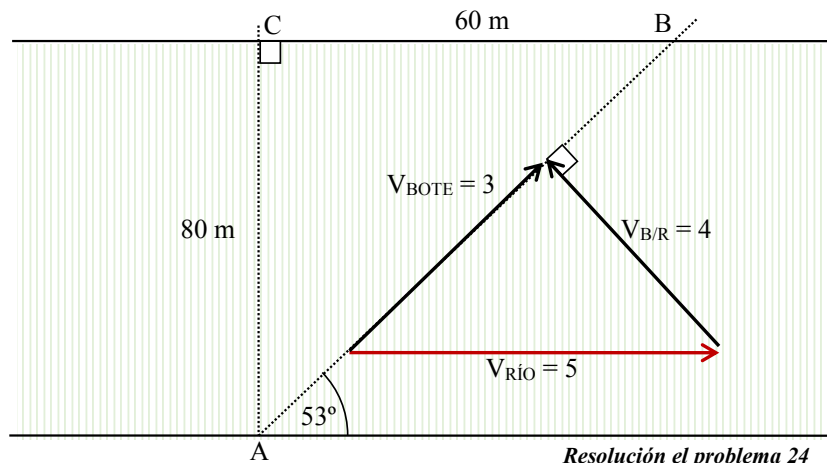


RESOLUCION

PRIMER PASO. Fijamos nuestro sistema de referencia en la orilla del río. La velocidad del bote respecto de tierra tiene la dirección de A hacia B.

SEGUNDO PASO. La velocidad del bote es resultado de adicionar vectorialmente la velocidad del río, mas, la velocidad del bote respecto del río (agua).

$$\vec{V}_{BOTE} = \vec{V}_{RIO} + \vec{V}_{BOTE/RIO}$$



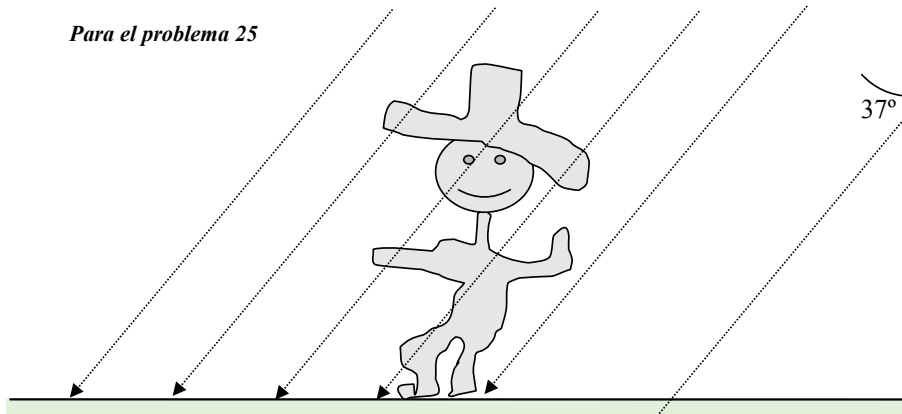
TERCER PASO. La velocidad del bote respecto del río puede tomar muchas direcciones posibles, pero la mínima velocidad relativa es aquella que tiene dirección perpendicular a la dirección de A hacia B. La velocidad de menor módulo, es aquel vector perpendicular al segmento AB.

$$\sin 53^\circ = \frac{V_{BOTE/RIO}}{V_{RIO}} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{V_{BOTE/RIO}}{5} \Rightarrow V_{BOTE/RIO} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Respuesta: la mínima velocidad del bote respecto del agua es 4 m/s.

25. Las gotas de lluvia caen con velocidad constante de 10 m/s formando un ángulo de 37° con la vertical. Calcular la velocidad con que debe moverse el hombre con sombrero de charro para mojarse lo menos posible.

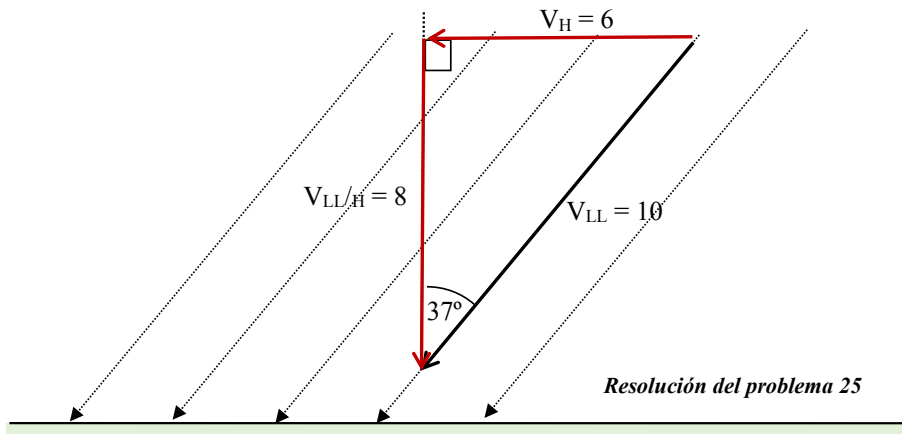
Para el problema 25



RESOLUCION

PRIMER PASO. Fijamos nuestro sistema de referencia en la Tierra.

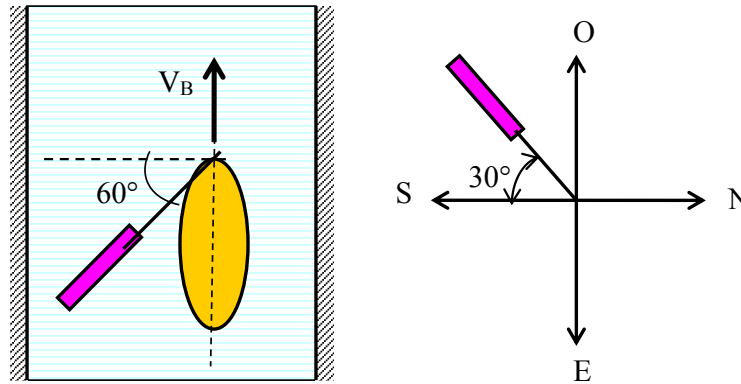
SEGUNDO PASO. El hombre con sombrero de charro se mojara lo menos posible cuando la velocidad de la lluvia respecto del hombre sea vertical.



TERCER PASO. Del triángulo rectángulo, deducimos que la velocidad constante con que debe moverse el hombre es 6 m/s hacia la izquierda.

Respuesta. El hombre debe correr con rapidez de 6 m/s.

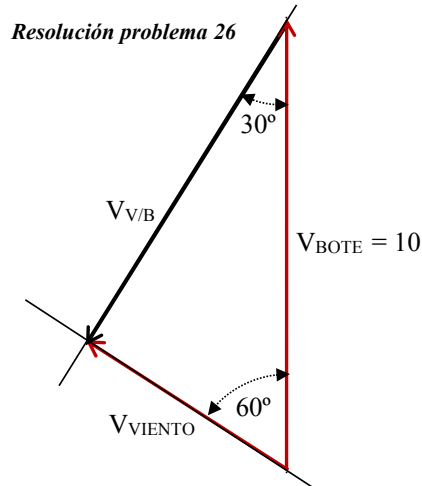
26. Una bandera ubicada en el mástil de un bote flamea haciendo un ángulo de 60° como se muestra, pero la bandera situada en la orilla del río se extiende al Sur 30° Oeste. Determinar el módulo de la velocidad (en km/h) del viento respecto a la Tierra, si el bote se mueve con rapidez de 10 km/h.



Para el problema 26

RESOLUCION

PRIMER PASO. La bandera ubicada en el mástil del bote flamea, en dirección de la velocidad relativa del viento respecto del bote.



SEGUNDO PASO. De la composición vectorial de velocidades se deduce que el triángulo es rectángulo.

$$\vec{V}_{VIENTO/BOTE} = \vec{V}_{VIENTO} - \vec{V}_{BOTE}$$

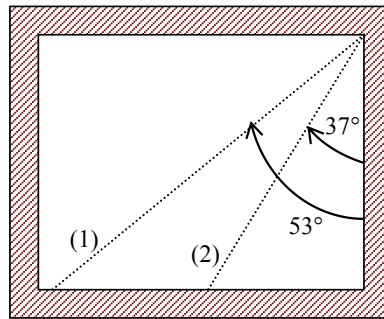
TERCER PASO. Cálculo de la velocidad del viento respecto de un observador ubicado en el bote. Propiedad del triángulo rectángulo de \$30^\circ\$ y \$60^\circ\$.

$$V_{BOTE} = 10 \frac{km}{h} \Rightarrow V_{VIENTO} = 5 \frac{km}{h}$$

Respuesta: la rapidez de viento respecto del pote es $5 \frac{km}{h}$

OBSERVACIÓN. En ausencia del viento, la bandera ubicada en el mástil del bote flamearía en el sentido de **O** a **E**, opuesto al movimiento del bote.

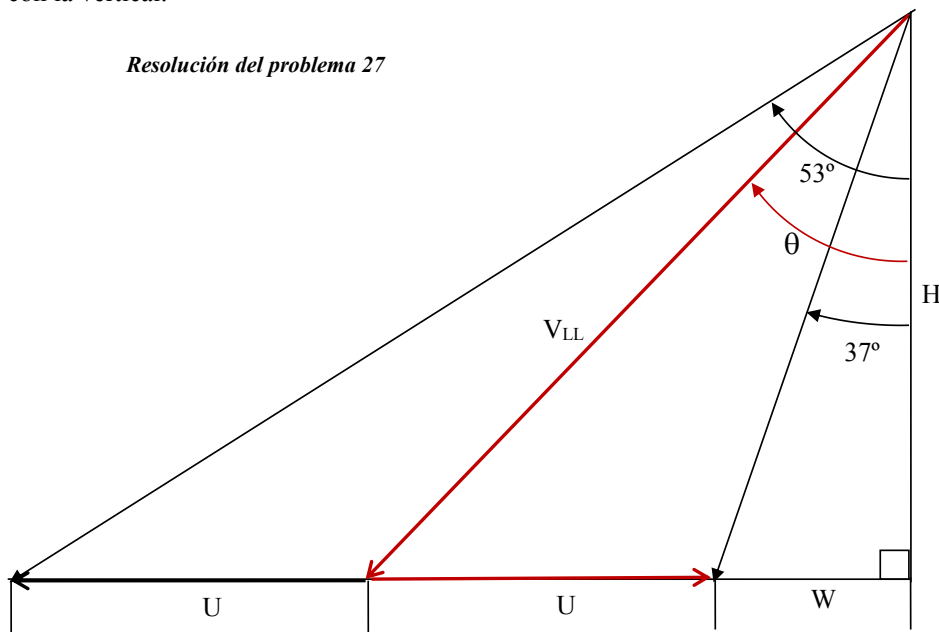
27. El conductor de un automóvil ve que cuando avanza con rapidez constante las gotas de lluvia siguen la trayectoria (1) y cuando retrocede con la misma rapidez ve que las gotas siguen la trayectoria (2). Si la velocidad real de las gotas de lluvia también es constante, determinar el ángulo que hace la dirección del movimiento real de las gotas de lluvia con la vertical.



Para el problema 27

RESOLUCION

PRIMER PASO. De la condición del problema, la velocidad de la lluvia V_{LL} forma un ángulo θ con la vertical.

Resolución del problema 27

SEGUNDO PASO. Sea U la velocidad del automóvil. De la semejanza de triángulos:

$$\tan 37^\circ = \frac{W}{H} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{W}{H} \Rightarrow W = \left(\frac{3}{4}\right)H$$

$$\tan 53^\circ = \frac{W+2U}{H} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{\left(\frac{3H}{4}\right) + 2U}{H} \Rightarrow U = \left(\frac{7}{24}\right)H$$

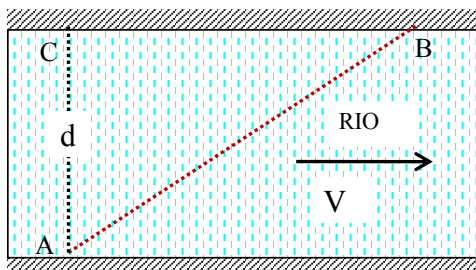
TERCER CASO. Ahora calculamos el ángulo que forma la velocidad de la lluvia con la vertical:

$$\tan \theta = \frac{W+U}{H} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\frac{3H}{4} + \frac{7H}{24}}{H} = \frac{25}{4}$$

Respuesta. La mediada del ángulo es: $\theta = 46,2^\circ$

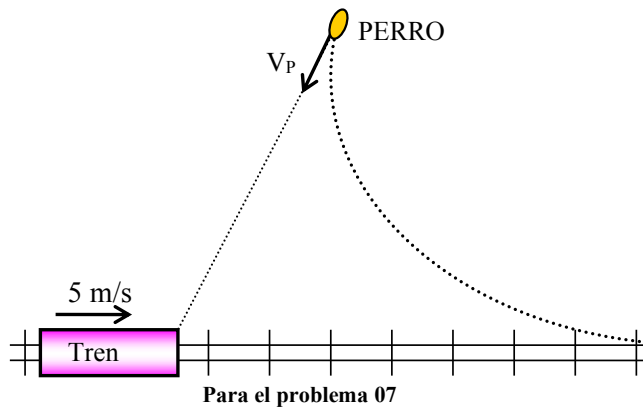
PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE

- Un muchacho caminando sobre una escalera mecánica detenida se demora en llegar arriba 90 segundos. Cuando está parado sobre la escalera en movimiento demora en llegar 60 segundos, ¿Qué tiempo demora en llegar si camina sobre la escalera en movimiento?
A) 33 B) 34 C) 35 **D) 36** E) 37
- Dos cuerpos A y B se mueven con velocidades de $V_A = 3 \mathbf{i}$ (m/s) y $V_B = 4 \mathbf{j}$ (m/s). Determinar la rapidez de A respecto de B (en m/s).
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 10
- Para cruzar un río de 60 m de ancho, se emplea una lancha que se mueve con rapidez constante de 3 m/s respecto del agua. Si la rapidez de la corriente del río es 5 m/s, determine la distancia BC mínima (en m) a lo largo de la orilla.
A) 50 B) 80 C) 100 D) 110 E) N.A.
- Para cruzar un río de 40 m de ancho, se emplea un bote que se mantiene siempre perpendicular a la corriente del agua con rapidez de 8 m/s. Si la rapidez de la corriente del río es 6 m/s, determine la distancia (en m) desde A hasta B.



Para el problema 4 y 5

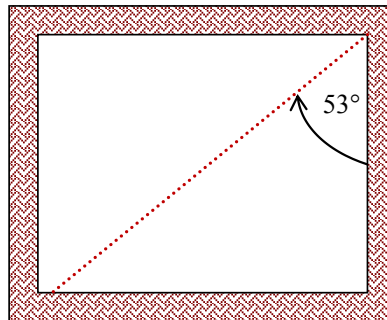
- A) 50 B) 80 C) 100 D) 110 E) 150
- Un hombre nada con rapidez de 3 m/s con respecto a las aguas de un río. Si se desplaza desde A hasta B, determinar el intervalo de tiempo (en s) que empleará el hombre en cruzar el río, de rapidez de corriente de 5 m/s y 12 m de ancho, con la condición que llegue a la orilla opuesta alejado en forma mínima de su punto de partida.
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) N.A.
 - Una lancha a motor que va río arriba se encontró con un bote que flota aguas abajo. Pasada una hora después de este encuentro el motor de la lancha se paró. La reparación de esta duro 30 minutos y durante todo el tiempo la lancha seguía libremente la corriente del río. Arreglando el motor, la lancha comenzó a ir río abajo con la misma rapidez con relación a la corriente del agua y alcanzo al bote a una distancia igual a 7,5 km del punto de su primer encuentro. Determinar la rapidez de la corriente del río, considerándola constante (en km/h).
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 10
 - ****Un coche de ferrocarril se desplaza rectilíneamente sobre rieles con rapidez constante de 5 m/s. Un perro que se encuentra fuera de la línea férrea se dirige en todo instante al coche con rapidez constante. Si en cierto instante el perro observa que el tren pasa frente a el con una rapidez de 4 m/s, determinar la rapidez con que se mueve el perro.



- A) 5 B) 2 **C) 3** D) 4 E) N.A.

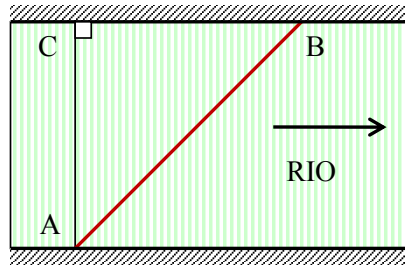
8. Dos pueblos amazónicos se encuentran en la misma orilla de un río separados una distancia de 36 km. Los pobladores para movilizarse usan una lancha que siempre se mueve con la misma velocidad constante en módulo respecto del agua, pero debido a la corriente de agua, cuando se mueve la lancha río abajo demora 1 hora y cuando se mueve río arriba se demora 2 horas, entre ambos pueblos. Determinar el módulo de la velocidad constante del río (en km/h)
- A) 17 B) 27 C) 30 D) 24 E) 15

9. **Un hombre que guía su automóvil a través de una tormenta a 100 km/h observa que las gotas de lluvia dejan trazos en las ventanas laterales haciendo un ángulo de 53° con la vertical. Cuando el hombre detiene su auto, observa que la lluvia está cayendo realmente en forma vertical. Calcular el módulo de la velocidad de la lluvia (km/h) respecto de la tierra.



- A) 75 B) 27 C) 30 D) 54 E) 65

10. **Un hombre en un bote debe ir de A hacia B que están en orillas opuestas. Las dimensiones son $AC = 80$ m y $BC = 60$ m. Si la velocidad de la corriente del río es constante de módulo 5 m/s, determinar la mínima rapidez constante del bote respecto del agua (en m/s), para lograr su objetivo.



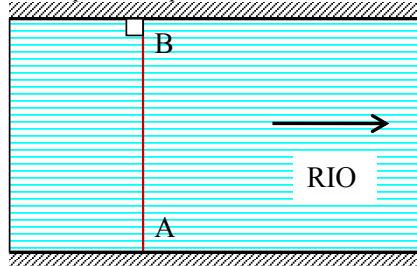
Para el problema 10

- A) 3 B) 2 C) 5 D) 4 E) 1

11. **A través del cristal de la ventana de un coche de ferrocarril, un pasajero ve caer las gotas de lluvia paralelamente a la diagonal del marco. ¿Con qué módulo de velocidad (en km/h) cae realmente, si no hay viento, y el tren está corriendo con velocidad constante cuyo módulo es 60 km/h? El ancho de la ventana es el doble de la altura.

- A) 30 B) 20 C) 25 D) 40 E) 15

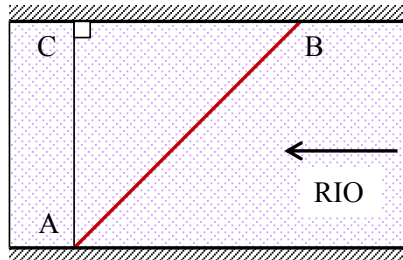
12. Un hombre puede nadar en aguas tranquilas con una rapidez de 5 m/s. Si el río mostrado tiene un ancho de 24 m cuya corriente tiene velocidad constante de módulo 3 m/s, determinar el intervalo de tiempo (en s) que tardará en cruzar el río, sabiendo que tiene que hacerlo de A hacia B.



Para el problema 12

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) Es imposible

13. Un hombre puede nadar en aguas tranquilas con una rapidez de $4\sqrt{5}$ m/s. Si el río mostrado tiene las siguientes dimensiones $AC = 40$ m y $CB = 30$ m, cuya corriente tiene velocidad constante de módulo 1 m/s, determinar el intervalo de tiempo (en s) que tardará en cruzar el río, sabiendo que tiene que hacerlo de A hacia B.

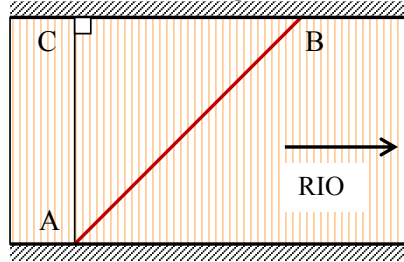


Para el problema 13

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) Es imposible

14. Por un río, del punto A al punto B que se encuentra en la orilla opuesta, a lo largo de la recta AB, navega un bote. La bandera ubicada en el mástil del bote flamea en la misma dirección del río. El viento sopla con

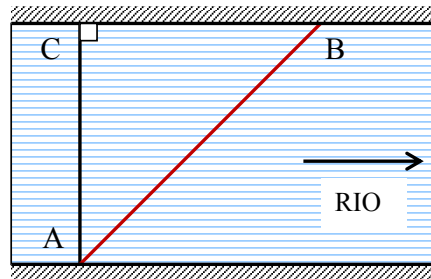
una velocidad de 6 m/s en dirección perpendicular a la orilla de A hacia C. Si $AC = 3$ km y $CB = 4$ km, determinar el módulo de la velocidad (m/s) del bote respecto de la orilla.



Para el problema 14

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) Ninguna anterior

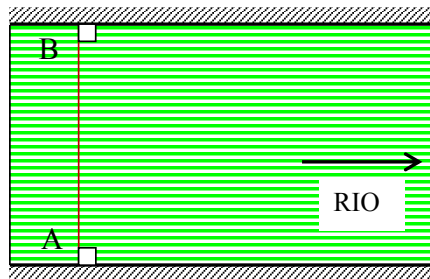
15. **Para cruzar un río de ancho $AC = 200$ m, desde A hasta B, se emplea un bote que se mueve siempre perpendicularmente a la corriente del agua con velocidad de 4 km/h respecto del agua. Si la velocidad de la corriente del río tiene módulo de 3 m/s, ¿a qué distancia (en m) medida del punto de partida se encuentra el punto de llegada del bote?



Para el problema 15

- A) 250 B) 300 C) 400 D) 500 E) Ninguna anterior

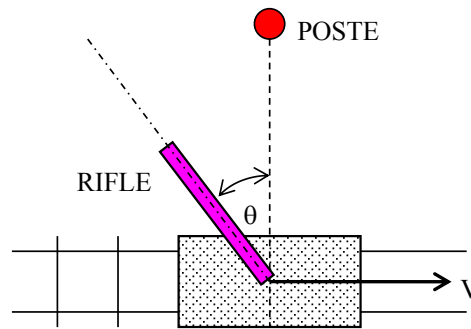
16. *Un hombre puede nadar en aguas tranquilas con velocidad de módulo 4 m/s. Si el ancho del río es $AB = 12$ m, cuyas aguas se mueven con velocidad constante de módulo 5 m/s, determinar el intervalo de tiempo (en s) que tardará en cruzar el río, sabiendo que sale del punto A y quiere llegar alejado del punto de partida una distancia mínima.



Para el problema 16

- A) 3 B) 6 C) 5 D) 8 E) ninguna anterior

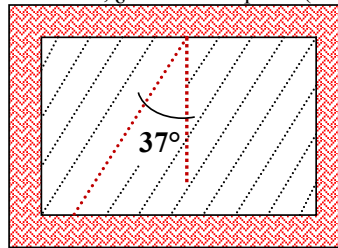
17. **Un hombre se encuentra parado sobre una plataforma móvil que se mueve horizontalmente con velocidad constante de módulo 7 m/s. Si el hombre sostiene en sus manos un rifle, ¿en qué dirección definida por el ángulo θ debe hacer el disparo, en el instante que el hombre pasa enfrente a un poste para hacer blanco en éste. El módulo de la velocidad de la bala es 25 m/s respecto del rifle.]



Para el problema 17

- A) 8° B) 10° C) 16° D) 20° E) 30°

18. Sobre las ventanas laterales de un automóvil que se desplaza a 30 km/h se observa que los trazos que deja la lluvia en las ventanas laterales forman un ángulo de 37° con la vertical. Si las gotas de lluvia se observan que caen verticalmente cuando el auto está detenido, ¿Cuál es la rapidez (en km/h) de la lluvia respecto de la tierra?

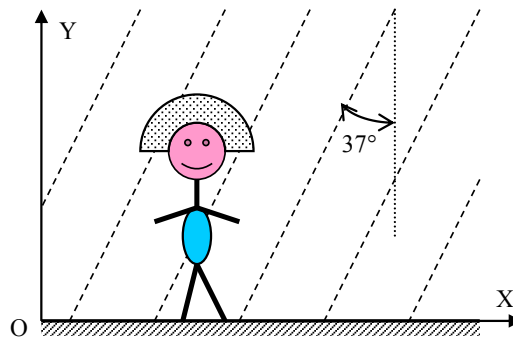


Para el problema 18

- A) 30 B) 60 C) 40 D) 80 E) ninguna anterior

19. Un bote de largo pequeño navega por un río cuya corriente tiene una velocidad de 2 m/s. Cuando pasa por debajo de un puente muy ancho a favor de la corriente se demora 10 segundos, si pasa contra la corriente se demora 20 segundos. Calcular el ancho del puente (en m).
A) 10 B) 30 C) 50 D) 80 E) 120

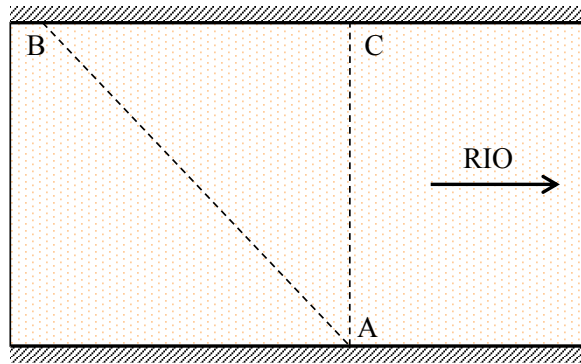
20. **Las gotas de lluvia caen con velocidad constante de módulo 10 m/s formando un ángulo de 37° con la vertical. Determinar la rapidez (en m/s) y dirección con que debe moverse el hombre con un sombrero grande para mojarse lo menos posible.



Para el problema 20

- A) 6 hacia la derecha B) 4 hacia la derecha C) 8 hacia la izquierda
D) 6 hacia la izquierda E) 8 hacia la derecha

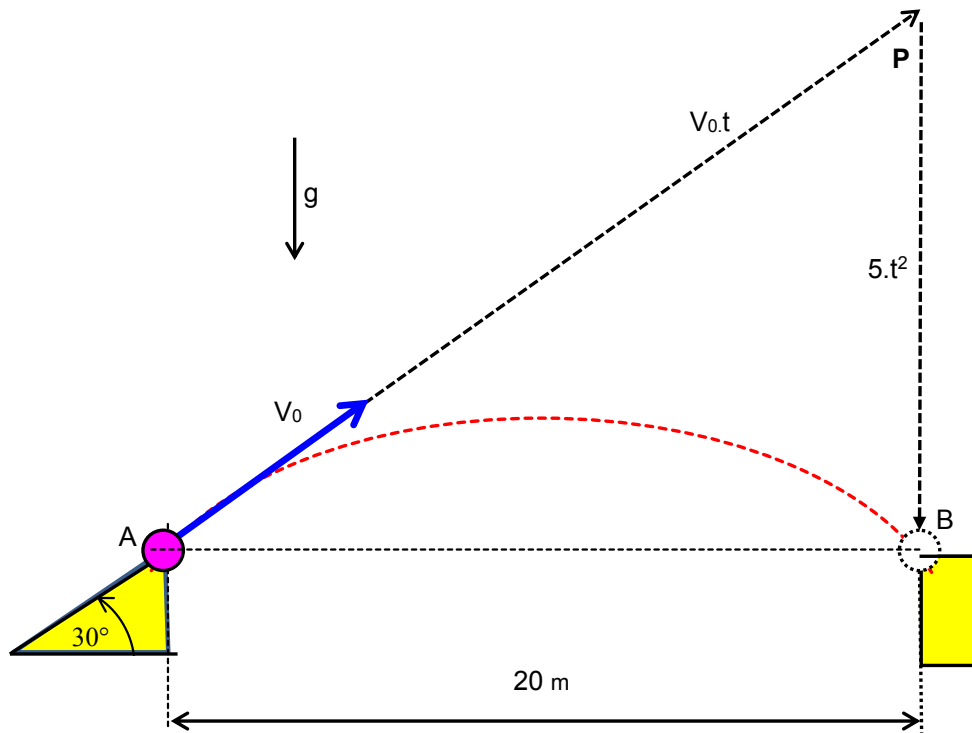
21. Del punto A situado en la orilla de un río es necesario llegar al punto B, moviéndose siempre por la recta AB. Si $AC = 1$ km, $BC = 2$ km, la velocidad máxima del bote con respecto al río es de 5 km/h y la rapidez de la corriente de agua en el río de 2 km/h. ¿Es posible cubrir la distancia AB en 30 minutos?



Para el problema 21

22. CONTINUARA.

MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE PARABÓLICO

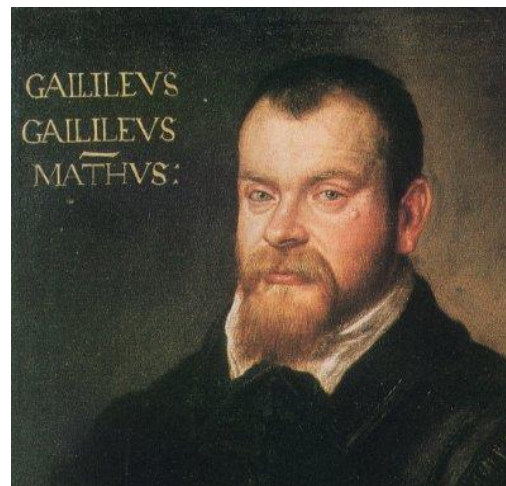


1. CONCEPTO:

Cuando lanzamos un cuerpo al aire vemos que el se ve obligado a bajar por causa de la gravedad. Si el tiro fuera inclinado y el medio fuese el vacío, el móvil describiría una trayectoria curva llamada parábola, la cual tendrá una forma final que dependerá de la velocidad y el ángulo de disparo.

Galileo demostró que el movimiento parabólico debido a la gravedad es un movimiento compuesto por otros dos: uno horizontal y el otro vertical.

Descubrió asimismo que el movimiento horizontal se desarrolla siempre como un M.R.U. y el movimiento vertical es un M.R.U.V. con aceleración igual a “ g ”, es decir movimiento de caída libre vertical.

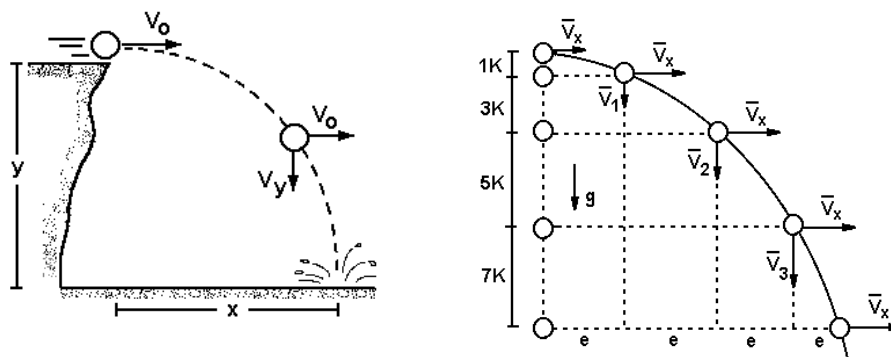


2. TIRO SEMIPARABÓLICO

Cuando estudies un movimiento parabólico haz una separación imaginaria de sus movimientos componentes Así, del ejemplo de la figura, tendremos que:

Desplazamiento vertical: caída libre desde el reposo

Desplazamiento horizontal: movimiento con velocidad constante.



En la figura se muestra un cuerpo lanzado de manera horizontal con una velocidad ($\vec{V}_x$) que se mantendrá constante a lo largo del movimiento. En el eje vertical se observa que la velocidad vertical inicial es nula ($V_{0y} = 0$), pero a medida que el cuerpo cae, esta velocidad va aumentando de valor de “g” en “g” en cada segundo. Las distancias recorridas tanto en el eje vertical como en el horizontal se han efectuado en intervalos de tiempos iguales.

Todos los tiros semiparabólicos causados por la gravedad se resuelven con las siguientes relaciones:

$$\text{Movimiento vertical: } y = \frac{1}{2} g t^2$$

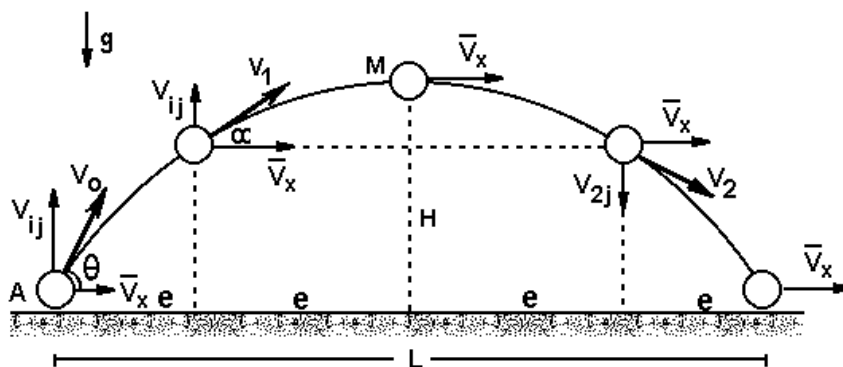
$$\text{Movimiento horizontal: } X = V_x \cdot t$$

$$\text{Velocidad de lanzamiento (dirección horizontal): } V_0$$

3. TIRO PARABÓLICO

Una partícula se ha lanzado desde “A” con una velocidad “ V_0 ” y una inclinación “ θ ”, tal como se muestra en la figura. Por efecto de la gravedad, a medida que el proyectil sube de manera inclinada se ve forzada a bajar, retornando al piso en “B”.

En el punto “A” las componentes de la velocidad son:



* Componente horizontal: $V_x = V_0 \cdot \cos \theta$

* Componente vertical inicial: $V_{0y} = V_0 \cdot \sin \theta$

* Velocidad de lanzamiento: V_0

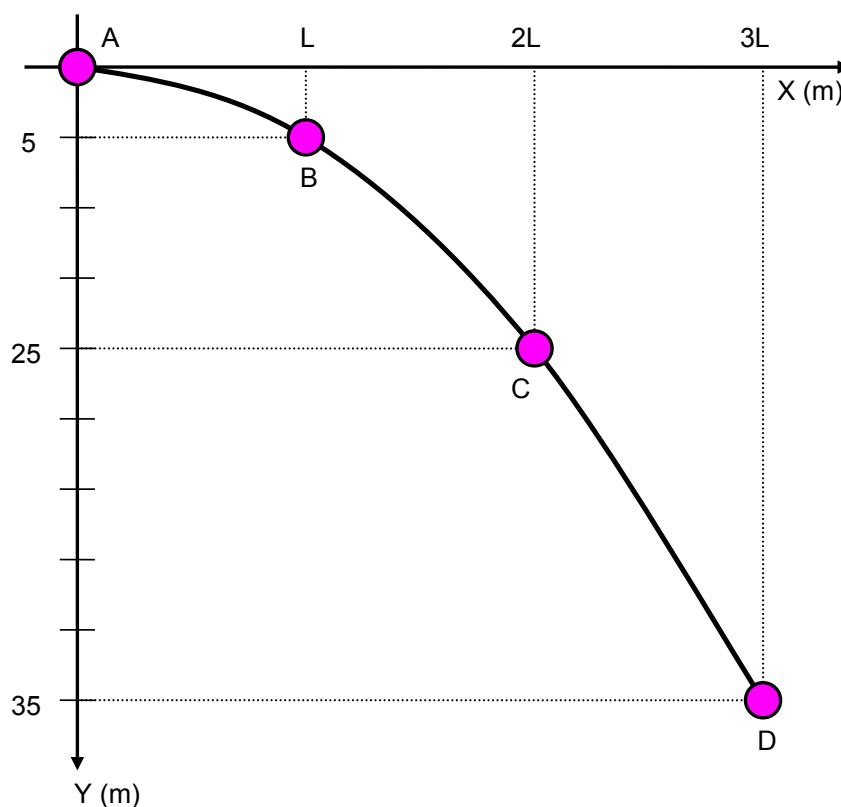
* Angulo de tiro o de lanzamiento: θ

Si observas con detenimiento el ejemplo mostrado, llegarás a las siguientes conclusiones:

* En el movimiento horizontal, la componente V_x permanece constante, pues de acuerdo con el principio de independencia de los movimientos, no se ve afectado por la gravedad que actúa en el eje vertical. La ecuación del movimiento horizontal estará dada por: $X = V_x \cdot t$

* En el movimiento vertical se observa que la componente vertical de la velocidad (V_y) va disminuyendo a medida que el cuerpo sube, se anula en el punto "M" de máxima altura, y a continuación cambia de dirección y va aumentando gradualmente a medida que el cuerpo desciende.

4. SISTEMA DE REFERENCIA: Para una trayectoria semiparabólica fijamos nuestro sistema de referencia en el nivel de lanzamiento, de manera que el cuerpo acelera en el eje Y. Veamos:



5. FORMA VECTORIAL: Cuando utilices las ecuaciones vectoriales no debes olvidar que todas las cantidades vectoriales que en ellas aparecen tienen signos los que dependerán del sentido que

posean. Asimismo, te recomiendo trazar el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento, y desde allí medir los desplazamientos, horizontal ($\bar{x}$) y vertical ($\bar{y}$).

Las ecuaciones vectoriales del movimiento vertical son:

Para la velocidad vertical: $\vec{V}_{fy} = \vec{V}_{0y} + \vec{g}.t$

Para el desplazamiento vertical: $\vec{h} = \vec{V}_{0y}.t + \frac{\vec{g}.t^2}{2}$

La velocidad total del proyectil es siempre tangente a la parábola en cualquier punto de esta, y su

valor se puede determinar así: $\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_{fy}^2}$

6. ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA: Aplicamos en el eje X el M.R.U, entonces el módulo del desplazamiento horizontal es $x = V_x.t \Rightarrow x = (V_0.\cos\theta).t$

Ahora despejamos el tiempo transcurrido

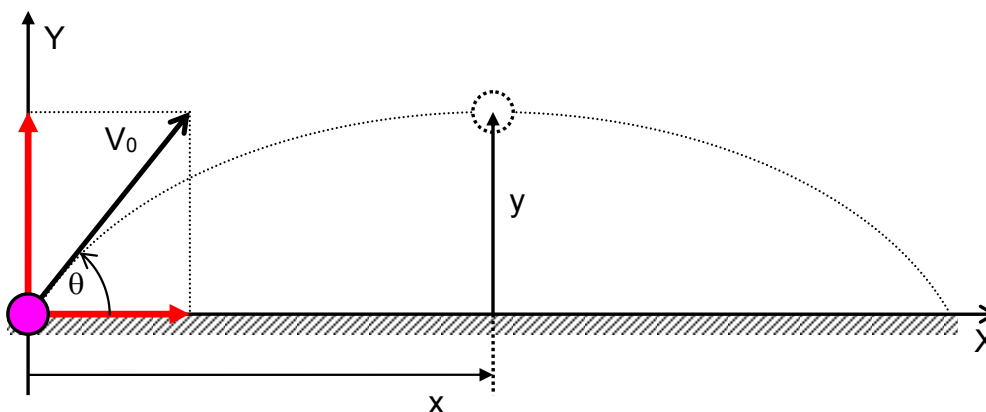
$$t = \frac{x}{V_0.\cos\theta} \dots (1)$$

Aplicamos en el eje Y el M.R.U.V., entonces el módulo del desplazamiento vertical es

$$y = V_{0y}.t - \frac{g.t^2}{2} \dots (2)$$

Reemplazamos (1) en (2): $y = (V_0.\sin\theta) \cdot \left(\frac{x}{V_0.\cos\theta}\right) - \frac{g \cdot \left(\frac{x}{V_0.\cos\theta}\right)^2}{2}$

$$y = (\tan\theta).x - \left(\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\theta}\right).x^2$$



La trayectoria que describe el proyectil en una línea curva llamada PARÁBOLA.

$$y = a.x - b.x^2$$

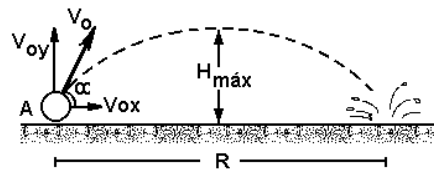
ECUACIONES ESPECIALES

El siguiente grupo de fórmulas sólo se aplican para movimientos parabólicos como el que aparece en la figura. Así tenemos:

7. TIEMPO DE VUELO: tiempo que demora el proyectil en regresar al nivel de lanzamiento.

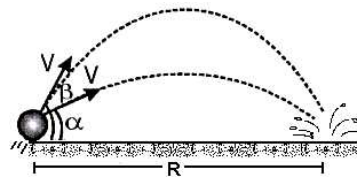
$$T_v = \frac{2 \cdot V_0 \cdot \text{Sen} \theta}{g}$$

8. ALTURA MÁXIMA: En el instante que el proyectil alcanza la altura máxima, su velocidad el eje vertical es nulo (un instante).



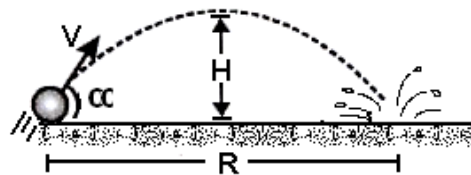
$$H = \frac{(V_0)^2 \cdot (\text{Sen} \alpha)^2}{2g}$$

9. ALCANCE HORIZONTAL: Se define como el desplazamiento sobre el eje horizontal.



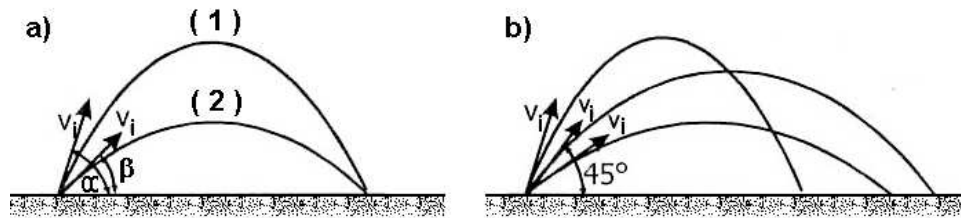
$$R = \frac{2 \cdot (V_0)^2 \cdot \text{Sen} \alpha \cdot \text{Cos} \alpha}{g} = \frac{(V_0)^2 \cdot \text{Sen} 2\alpha}{g}$$

10. Relaciones entre la altura máxima y el alcance horizontal: $\text{Tan} \alpha = \frac{4H}{R}$



11. Relaciones entre la altura máxima y el tiempo de vuelo: $H = \frac{g \cdot (T_v)^2}{8}$

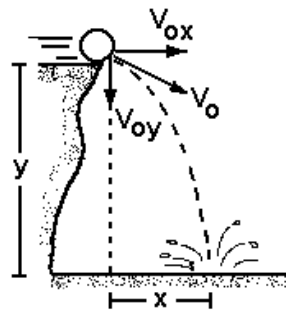
12. ALCANCES IGUALES: Si dos cuerpos son lanzados con velocidades de igual módulo (v_i) y con distintas inclinaciones " α " y " β ", de manera que los alcances horizontales sean iguales en los dos casos, se verificará: Los alcances son iguales si los ángulos son complementarios, $\alpha + \beta = 90^\circ$.



13. ALCANCE HORIZONTAL MÁXIMO: Cuando regamos el jardín con una manguera comprobamos que el alcance cambia a medida que inclinamos más la manguera, y cuando continuamos con este proceso observamos que luego de un aumento de alcance, este empieza a reducirse. Se puede demostrar que, de todos los alcances, el máximo se logra cuando el ángulo de disparo es de 45° , de este modo se obtiene que:

$$R_{MAXIMO} = \frac{(V_0)^2}{g}$$

14. LANZAMIENTO INCLINADO: En este tipo de movimiento parabólico, fijamos nuestro sistema de referencia en el punto de lanzamiento de tal manera que el cuerpo acelera en el eje vertical saliendo con rapidez diferente de cero y manteniendo su rapidez constante en el eje horizontal.



Observe las ecuaciones:

V_0 es la velocidad de lanzamiento.

En la dirección horizontal: $V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha$

En la dirección vertical: $V_{0y} = V_0 \cdot \sin \alpha$

α es el ángulo de lanzamiento respecto del eje horizontal.

ECUACIONES ESPECIALES

15. TIEMPO DE VUELO: tiempo que demora el proyectil en regresar al nivel de lanzamiento.

$$T = \frac{2 \cdot V_0 \cdot \sin \theta}{g}$$

16. ALTURA MÁXIMA: En el instante que el proyectil alcanza la altura máxima, su velocidad el eje vertical es nulo (un instante).

$$H = \frac{(V_0)^2 \cdot (\text{Sen}\alpha)^2}{2g}$$

17. ALCANCE HORIZONTAL: Se define como el desplazamiento sobre el eje horizontal.

$$D = \frac{2 \cdot (V_0)^2 \cdot \text{Sen}\alpha \cdot \text{Cos}\alpha}{g} = \frac{(V_0)^2 \cdot \text{Sen}2\alpha}{g}$$

18. Relaciones entre la altura máxima y el alcance horizontal:

$$\text{Tan}\alpha = \frac{4H}{R}$$

19. Relaciones entre la altura máxima y el tiempo de vuelo:

$$H = \frac{g \cdot (T_v)^2}{8}$$

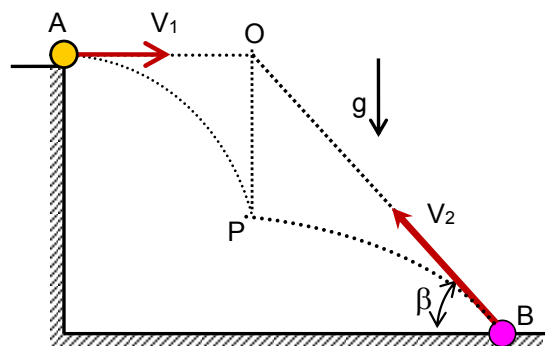
20. ALCANCES IGUALES: Si dos cuerpos son lanzados con velocidades de igual módulo (v_i) y con distintas inclinaciones " α " y " β ", de manera que los alcances horizontales sean iguales en los dos casos, se verificará: Los alcances son iguales si los ángulos son complementarios, $\alpha + \beta = 90^\circ$.

21. ALCANCE HORIZONTAL MÁXIMO: Cuando regamos el jardín con una manguera comprobamos que el alcance cambia a medida que inclinamos más la manguera, y cuando continuamos con este proceso observamos que luego de un aumento de alcance, este empieza a reducirse. Se puede demostrar que, de todos los alcances, el máximo se logra cuando el ángulo de disparo es de 45° , de este modo se obtiene que:

$$D_{\text{MINIMA}} = \frac{(V_0)^2}{g}$$

22. TEOREMA DE LA GRAVEDAD NULA.

Si dos partículas se mueven con una misma aceleración (iguales en modulo y dirección), su movimiento relativo es un movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.).



DEMOSTRACIÓN

Sabemos que: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}.t$ entonces para las partículas A y B que se mueven con una misma aceleración tenemos que: $\vec{v}_A = \vec{v}_{0A} + \vec{a}.t$ y $\vec{v}_B = \vec{v}_{0B} + \vec{a}.t$

Por otro lado, por definición de velocidad relativa: $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{0A} + \vec{a}.t - (\vec{v}_{0B} + \vec{a}.t)$$

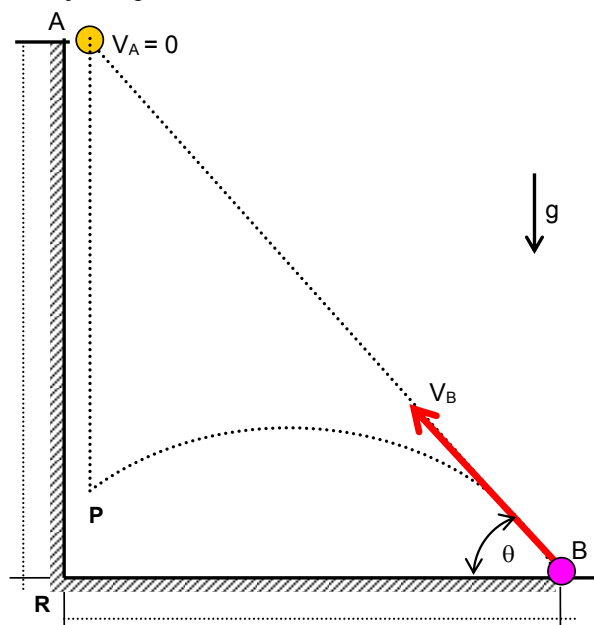
$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{0A} - \vec{v}_{0B}$$

Como la velocidad relativa de A respecto de B, no varía con el tiempo, **su trayectoria relativa será una línea recta.**

Este teorema es muy útil cuando dos partículas A y B describen una trayectoria Parabólica dentro de un campo gravitacional.

23. TEOREMA DEL PUNTO DE CHOQUE.

Si dos partículas, que, al ser lanzadas simultáneamente al campo de gravedad, chocan en el aire, el punto de impacto P estará debajo del punto de intersección de sus velocidades de lanzamiento.

**DEMOSTRACIÓN**

Sabemos por teoría que el desplazamiento que experimenta una partícula que se mueve parabólicamente en el campo de gravedad está dado por: $\vec{d} = \vec{v}_0.t + \frac{1}{2}\vec{g}.t^2$

Según esto el vector desplazamiento $\vec{d}$ es la suma vectorial de un vector colineal con la velocidad de lanzamiento $\vec{v}_0$ y de un vector vertical paralelo a la aceleración de la gravedad $\vec{g}$.

Si dos partículas A y B, que, al ser lanzadas simultáneamente, chocan en el punto P, se cumplirá que el punto P estará debajo del punto de intersección de sus velocidades de lanzamiento.

En ausencia de la gravedad las partículas A y B chocarían en el punto "A".

24. DESCOMPOSICIÓN DE LA ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO PARABÓLICO.

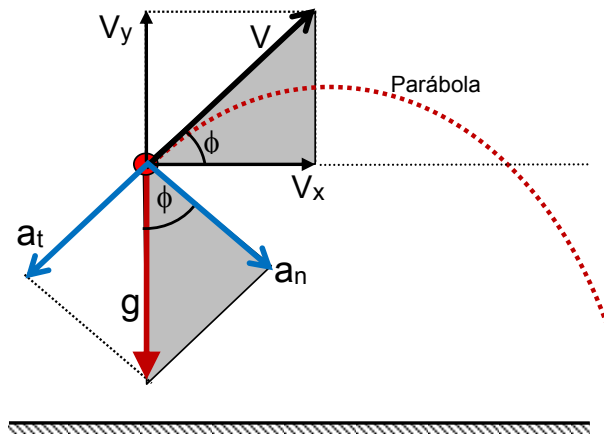


Fig. 01. DESCOMPOSICIÓN RECTANGULAR DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD

Descomponemos la velocidad de una partícula en un instante de tiempo, en el eje horizontal la velocidad no varía, pero la velocidad en el eje vertical cambia debido al campo de gravedad. Calculemos el ángulo que forma la velocidad V con el eje horizontal.

$$\tan\phi = \frac{V_y}{V_x}$$

Ahora observe la descomposición rectangular de la aceleración de la gravedad. Tiene dos componentes en cada instante de tiempo:

GOTA 1. La *aceleración tangencial* es colineal con la velocidad instantánea V :

$$a_t = g \cdot \text{Sen}\phi$$

GOTA 2. La *aceleración normal* es perpendicular a la velocidad instantánea V :

$$a_n = g \cdot \text{Cos}\phi$$

GOTA 3. El *radio de curvatura* se puede calcular con la ecuación:

$$a_n = g \cdot \text{Cos}\phi = \frac{V^2}{\rho} \text{ despejando tenemos } \rho = \frac{V^2}{g \cdot \text{Cos}\phi}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Un futbolista patea la pelota, la cual describe una trayectoria parabólica, si permanece en el aire un intervalo de 6 segundos hasta regresar al piso, ¿Qué altura máxima alcanzó la pelota?

$$g = 10 m.s^{-2}$$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. En un movimiento parabólico, el tiempo de vuelo T y la altura máxima alcanzada H , se relacionan de la siguiente manera:

$$H = \left(\frac{g}{8} \right) T^2$$

SEGUNDO PASO. Remplazamos los datos:

$$H = \left(\frac{10}{8} \right) (6)^2 = 45 \text{ m}$$

Respuesta: la altura máxima alcanzada es 45 metros.

2. Un futbolista impulsa la pelota desde el piso, la cual describe una trayectoria parabólica, alcanzando la altura máxima de 20 metros. ¿Cuánto tiempo permanece en el aire? $g = 10 m.s^{-2}$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. En un movimiento parabólico, el tiempo de vuelo T y la altura máxima alcanzada H , se relacionan de la siguiente manera:

$$H = \left(\frac{g}{8} \right) T^2$$

SEGUNDO PASO. Remplazamos los datos:

$$20 = \left(\frac{10}{8} \right) (T)^2 \Rightarrow T = 4 \text{ s}$$

Respuesta: Permanece en el aire 4 segundos.

3. ¿Cuál es la diferencia entre las alturas máximas alcanzadas por un proyectil disparado con velocidad de 2 m/s, cuando varía su ángulo de tiro de 30° a 60° ? El valor de la velocidad de lanzamiento es constante. $g = 10 m.s^{-2}$

A) 0,1 m

B) 0,2

C) 0,3

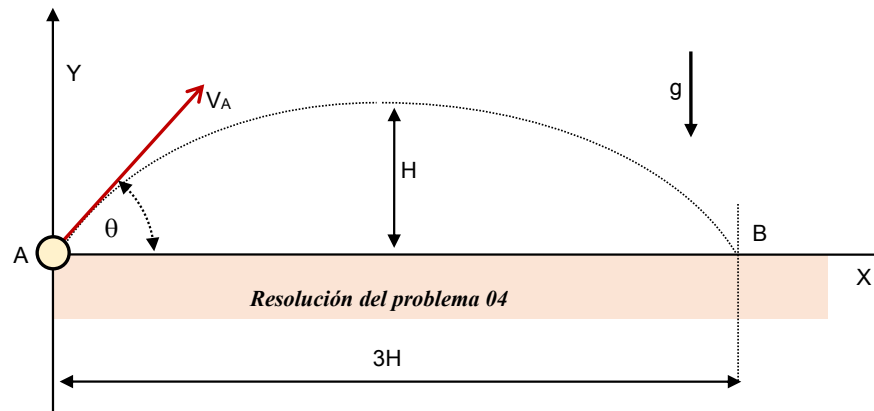
D) 0,4

E) ninguna

4. Respecto del movimiento parabólico, determinar la medida del ángulo de lanzamiento θ , tal que, el alcance horizontal sea el triple de la altura máxima.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama de la trayectoria de la partícula.



SEGUNDO PASO. El ángulo de lanzamiento θ , la altura máxima H y el alcance horizontal D , se relacionan:

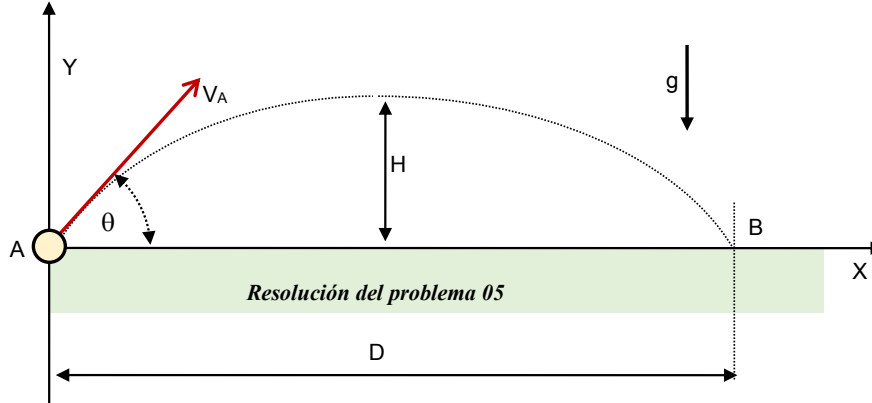
$$\tan \theta = \frac{4H}{D} \Rightarrow \tan \theta = \frac{4H}{3H} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53^\circ$$

Respuesta: la medida del ángulo de lanzamiento es 53°

5. Un proyectil es lanzado con velocidad inicial V_0 formando un ángulo de 45° respecto de la horizontal. Si la altura máxima es 4 m, determinar el alcance horizontal hasta llegar al suelo.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama de la trayectoria de la partícula.



SEGUNDO PASO. El ángulo de lanzamiento θ , la altura máxima H y el alcance horizontal D , se relacionan:

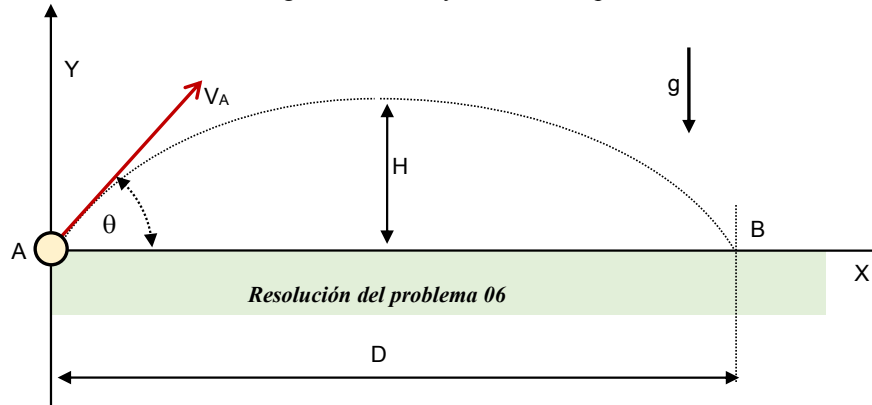
$$\tan \theta = \frac{4H}{D} \Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{4(4)}{D} = 1 \Rightarrow D = 16 \text{ m}$$

Respuesta: El alcance horizontal es 16 metros.

6. Dos proyectiles A y B lanzados con inclinaciones de 53° y 37° respectivamente alcanzan iguales alturas máximas. El proyectil A experimenta un alcance horizontal de 9 metros, ¿Cuál es el alcance que experimenta B?

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama de la trayectoria de la partícula.



SEGUNDO PASO. El ángulo de lanzamiento θ , la altura máxima H y el alcance horizontal D , se relacionan:

$$\tan \theta = \frac{4H}{D} \Rightarrow \tan 53^\circ = \frac{4H}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow H = 3 \text{ m}$$

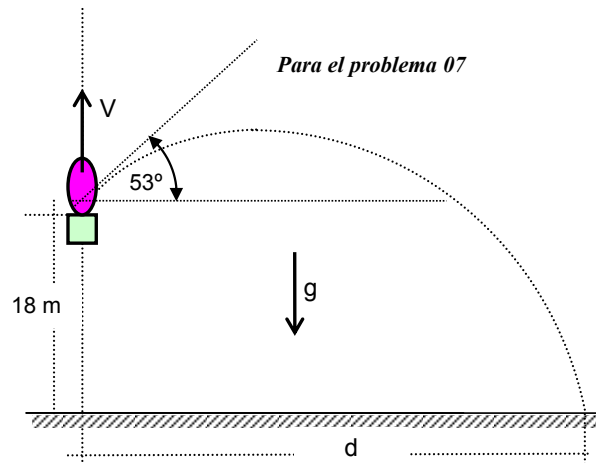
TERCER PASO. Ahora aplicamos esta propiedad al segundo proyectil, conociendo la altura máxima H .

$$\tan \theta = \frac{4H}{D} \Rightarrow \tan 37^\circ = \frac{4(3)}{D} = \frac{3}{4} \Rightarrow D = 16 \text{ m}$$

Respuesta: El alcance horizontal del segundo proyectil es 16 metros.

7. Desde el globo que sube con velocidad constante vertical de 5 m/s, se lanza un proyectil con velocidad de 5 m/s formando un ángulo de 53° con al horizontal (dicha velocidad y ángulo respecto de un observador en el globo). Si el globo se halla a una altura de 18 m del piso en el momento del lanzamiento, determinar el alcance horizontal que experimenta la partícula hasta llegar al piso.

$$g = 10 \text{ m.s}^{-2}$$



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Fijamos nuestro observador en el globo y descomponemos la velocidad de lanzamiento:

$$\vec{V}_{\text{PROYECTIL/GLOBO}} = (3; 4) = 3.i + 4.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

SEGUNDO PASO. Ahora fijamos nuestro observador en la Tierra, instante después del lanzamiento, la partícula tiene las siguientes componentes, en el eje horizontal la velocidad es constante $\vec{V}_x = 3.i \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$ y la velocidad inicial en el eje vertical hacia arriba es, $\vec{V}_y = 5.j + 4.j = 9.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$ luego el proyectil describe una trayectoria parabólica.

TERCER PASO. Aplicamos las leyes de la caída libre vertical.

$$h = V_{0y}.t + \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow -18 = (9).t + (-5).t^2$$

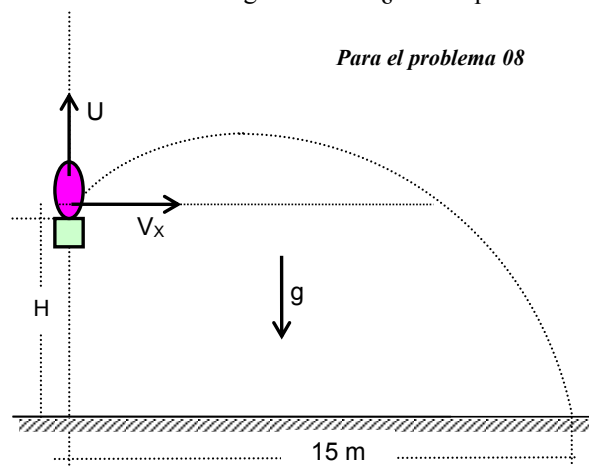
Resolviendo: $t = 3 \text{ s}$

CUARTO PASO. Analizando el movimiento en el eje horizontal.

$$d = V_x.t \Rightarrow d = (3 \text{ m.s}^{-1}).(3 \text{ s}) = 9 \text{ m}$$

Respuesta. El alcance horizontal es 9 metros.

8. Desde un globo que asciende con velocidad $U = 6 \text{ m.s}^{-1}$, se lanza una piedra horizontalmente (respecto del globo) con velocidad $V_x = 5 \text{ m.s}^{-1}$. La piedra experimenta un alcance horizontal de 15 metros hasta llegar al suelo. ¿Desde qué altura **H** se lanzó la piedra? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

**RESOLUCION**

PRIMER PASO. Fijamos nuestro observador en la tierra. La velocidad de lanzamiento es:

$\vec{V} = (5; 6) = 5.i + 6.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$ y la trayectoria es una parábola.

SEGUNDA PASO. En el eje horizontal se cumple el M.R.U:

$$t = \frac{d}{V_x} = \frac{15 \text{ m}}{5 \text{ m.s}^{-1}} = 3 \text{ s}$$

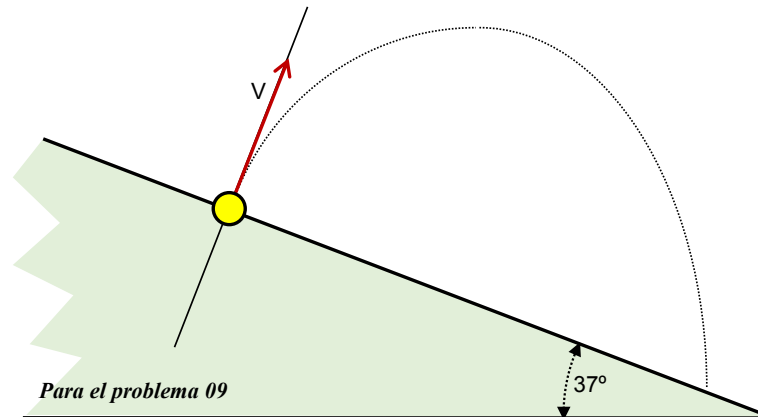
TERCER CASO. Tomamos como referencia el punto de lanzamiento. En el eje vertical.

$$h = V_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow (-H) = (6) \cdot (3) + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot (3)^2$$

Resolviendo: $H = 27 \text{ m}$

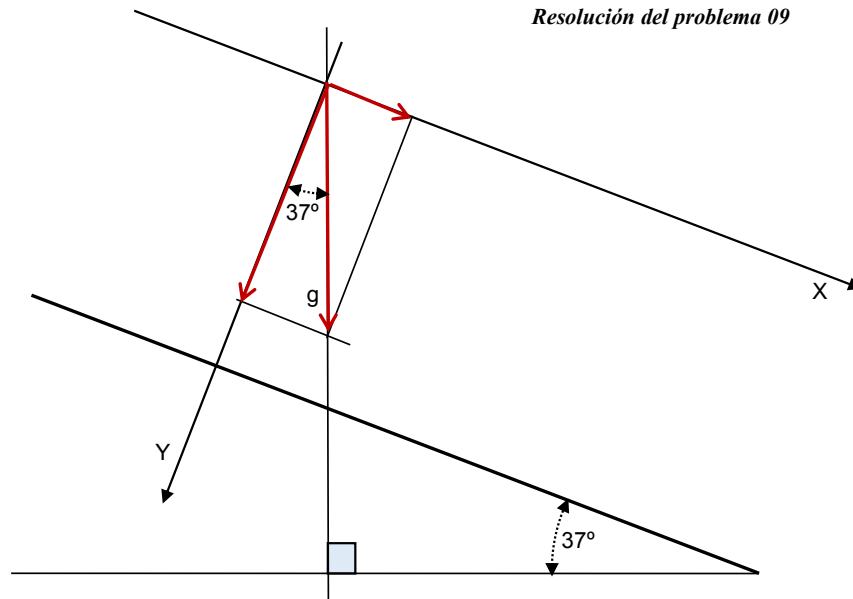
Respuesta: La piedra se lanza desde una altura de 27 metros.

9. Se lanza una esfera perpendicularmente al plano inclinado con velocidad de 40 m/s. ¿Después de cuantos segundos la esfera experimenta un alejamiento máximo respecto del plano inclinado 37° respecto de la horizontal? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Descomponiendo la aceleración de la gravedad “g” convenientemente. La componente perpendicular al plano es 8 m/s^2 y la componente tangente o paralela al plano es 6 m/s^2 .

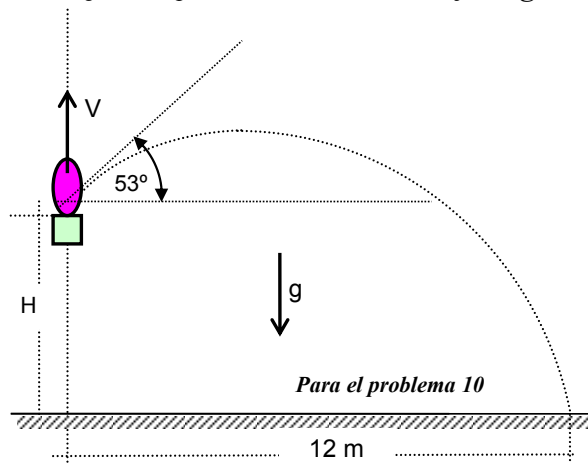


SEGUNDO PASO. Analizando el movimiento de la esfera en el eje Y perpendicular al plano. El alejamiento será máximo cuando la velocidad en el eje Y sea nula.

$$V_{FY} = V_{0Y} - a_Y \cdot t \Rightarrow 0 = 40 - 8 \cdot t \Rightarrow t = 5s$$

Respuesta. El alejamiento es máximo después de 5 segundos.

10. Desde el globo que sube con velocidad constante vertical de 5 m/s, se lanza un proyectil con velocidad de 5 m/s formado un ángulo de 53° con al horizontal (dicha velocidad y ángulo respecto de un observador en el globo). El objeto experimenta un alcance horizontal de 12 metros. ¿Desde qué altura H se lanzó el objeto? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$



RESOLUCION

PRIMER PASO. Fijamos nuestro observador en el globo y descomponemos la velocidad de lanzamiento:

$$\vec{V}_{\text{PROYECTIL/GLOBO}} = (3; 4) = 3.i + 4.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

SEGUNDO PASO. Ahora fijamos nuestro observador en la Tierra, instante después del lanzamiento, la partícula tiene las siguientes componentes, en el eje horizontal la velocidad es constante $\vec{V}_x = 3.i \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$ y la velocidad inicial en el eje vertical hacia arriba es, $\vec{V}_y = 5.j + 4.j = 9.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$ luego el proyectil describe una trayectoria parabólica.

TERCER PASO. Analizando el movimiento en el eje horizontal.

$$t = \frac{d}{V_x} \Rightarrow t = \frac{12m}{3 \text{ m.s}^{-1}} \Rightarrow t = 4s$$

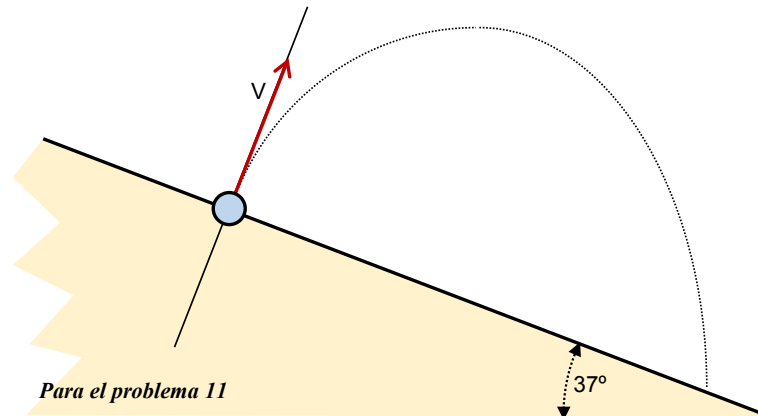
CUARTO PASO. Aplicamos las leyes de la caída libre vertical.

$$h = V_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow -H = (9) \cdot (4) + (-5) \cdot (4)^2$$

Resolviendo: $H = 44 \text{ m}$

Respuesta. Se lanzó desde una altura de 44 metros.

11. Se lanza una esfera perpendicularmente al plano inclinado con velocidad de 40 m/s. ¿Cuál es el alcance máximo sobre el plano inclinado 37° respecto de la horizontal? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

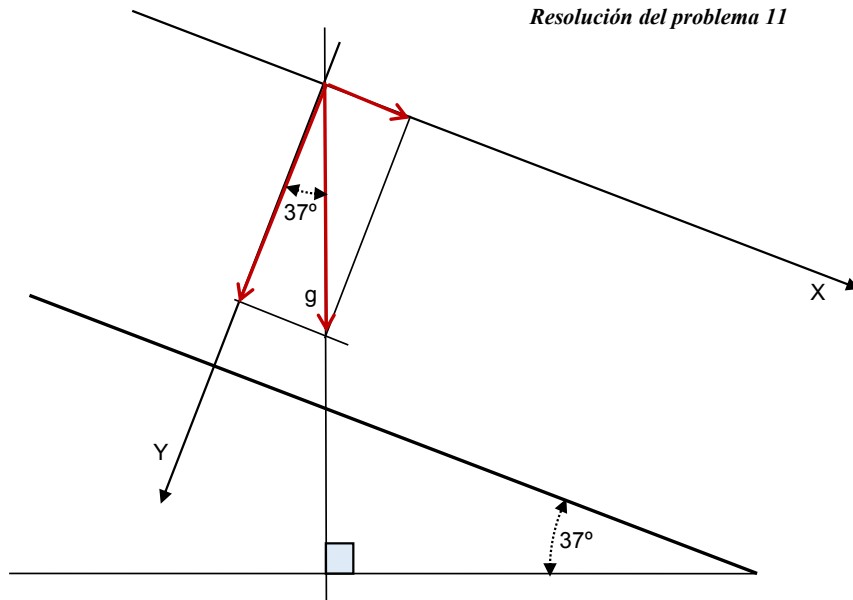


RESOLUCION

PRIMER PASO. Descomponiendo la aceleración de la gravedad “g” convenientemente. La componente perpendicular al plano es 8 m/s^2 y la componente tangente o paralela al plano es 6 m/s^2 .

$$\vec{a} = (6 ; 8) = 6.i + 8.j \text{ (m.s}^{-2}\text{)}$$

Resolución del problema 11



SEGUNDO PASO. Descomponiendo la velocidad de lanzamiento.

$$\vec{V} = (0 ; -40) = 0.i - 40.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

TERCER PASO. Analizando el movimiento del proyectil en el eje Y. Cuando regresa al plano inclinado la altura es nula.

$$h = V_{0Y}.t + \frac{1}{2}.a_Y.t^2 \Rightarrow (0) = (-40).(t) + \frac{1}{2}.(8).(t)^2$$

Regresa después de: $t = 10 \text{ s}$

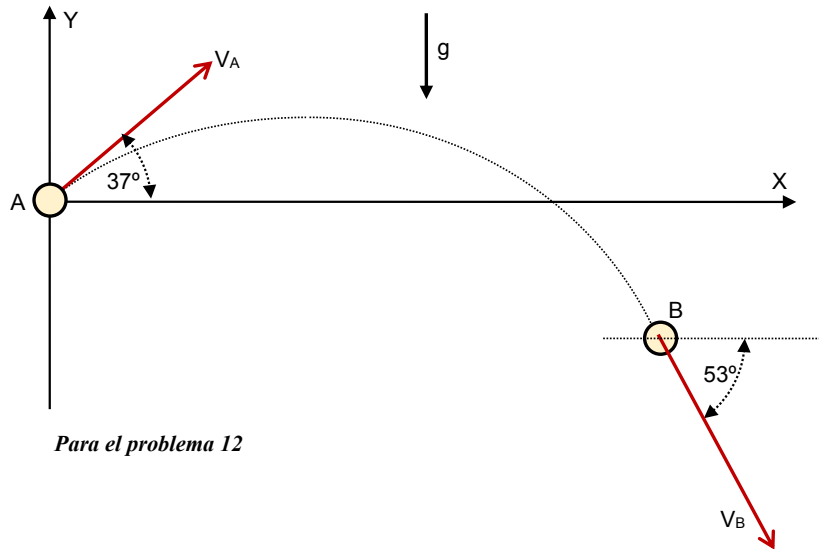
CUARTO PASO. Analizando el movimiento del proyectil en el eje X. Aplicamos las leyes del M.R.U.V:

$$d = V_{0X} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_X \cdot t^2 \Rightarrow d = (0) \cdot (10) + \frac{1}{2} \cdot (6) \cdot (10)^2$$

Resolviendo: $d = 300m$

Respuesta: el alcance en el eje X es 300 metros.

12. Se muestra la trayectoria parabólica del proyectil en un plano vertical, calcular el tiempo que empleo para ir desde A hasta B, si la velocidad en A es 15 m/s. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$



RESOLUCION

PRIMER PASO. Descomponiendo la velocidad en la posición A. La componente en el eje X es 12 m/s (constante) y en el eje Y es 9 m/s.

$$\vec{V}_A = (12 ; 9) = 12.i + 9.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

SEGUNDO PASO. Descomponiendo la velocidad en la posición B. La componente en el eje X es 12 m/s (constante).

$$\vec{V}_B = (3K ; -4K) \Rightarrow 3K = 12 \Rightarrow K = 4$$

$$\vec{V}_B = (12 ; -16) \Rightarrow \vec{V}_B = 12.i - 16.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

TERCER PASO. Analizando el desplazamiento desde A hasta B en el eje vertical:

$$V_{FY} = V_{0Y} - g \cdot t \Rightarrow -16 = 9 - 10 \cdot t \Rightarrow t = 2,5s$$

Respuesta: después de 2,5 segundos la partícula pasa desde A hasta B.

13. Un buque de guerra avanza en línea recta hacia un blanco con velocidad constante de $v = 10 \text{ (i)} m.s^{-1}$. Tiene un cañón que dispara un proyectil con velocidad de módulo 50 m/s y formando un ángulo de 53° según un observador situado en el buque. ¿A qué distancia del blanco debe disparar para acertarle? $g = 10 m.s^{-2}$

RESOLUCION

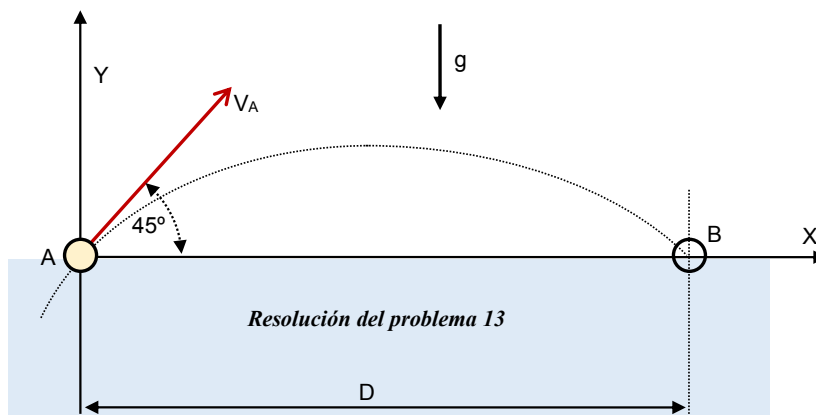
PRIMER PASO. La velocidad del buque es 10 m/s. Descomponiendo la velocidad del proyectil respecto de un observador ubicado en el buque:

$$\vec{V}_{\text{PROYECTIL/BUQUE}} = (30 ; 40) = 30.i + 40.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

SEGUNDO PASO. Fijamos nuestro observador en la tierra. En el instante después de lanzamiento el proyectil tiene los siguientes componentes:

$$\vec{V}_{\text{PROYECTIL/TIERRA}} = (30 + 10 ; 40) = 40.i + 40.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

En el eje horizontal su velocidad es igual a 40 m/s (adicionando las velocidades) y en el eje vertical la velocidad inicial hacia arriba es también 40 m/s, por consiguiente, la velocidad de lanzamiento respecto de tierra forma 45° con la horizontal.



TERCER PASO. Analizando al proyectil en el eje vertical. Aplicamos las leyes de caída libre vertical.

$$h = V_{0Y}.t + \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow (0) = (40).(t) + \frac{1}{2}.(-10).(t)^2$$

Resolviendo, el tiempo transcurrido es: $t = 8s$

CUARTO PASO. Analizando el movimiento del proyectil, en el eje horizontal, M.R.U:

$$d = V_X.t \Rightarrow d = (40 m.s^{-1}).(8s) = 320m$$

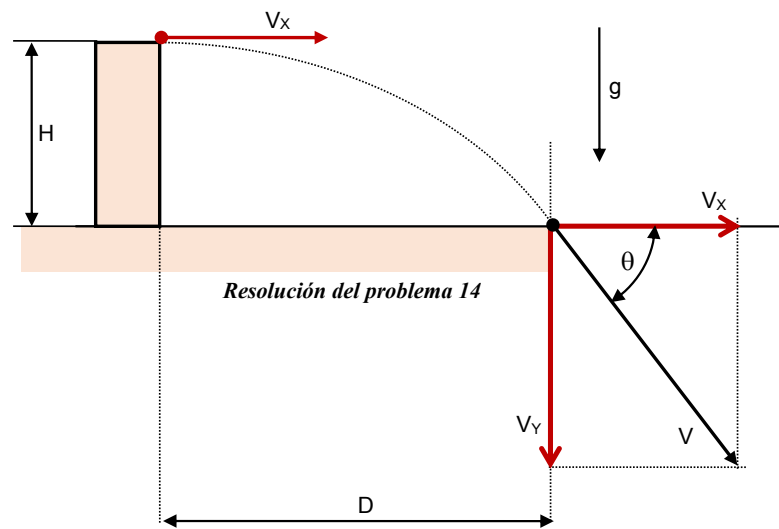
Respuesta: debe disparar a 320 m del blanco.

14. De lo alto de una torre se lanza una piedra con velocidad horizontal de 40 m/s. Sabiendo que la piedra estuvo en movimiento 3 segundos. ¿Cuál es la altura de la torre? ¿A qué distancia del pie de la torre, la piedra alcanza el suelo? ¿Con qué velocidad la piedra alcanza el suelo? ¿Qué ángulo forma la velocidad con la horizontal en el instante del impacto con el suelo?

$$g = 10 m.s^{-2}$$

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama del movimiento parabólico que describe la partícula.



SEGUNDO PASO. Aplicamos las leyes de caída libre vertical. La velocidad inicial en el eje Y es nula.

$$h = V_{0Y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow H = 0 + \frac{1}{2} \cdot (10) \cdot (3)^2 = 45 \text{ m}$$

TERCER PASO. En el eje horizontal, tiene M.R.U, la velocidad es constante:

$$D = V_X \cdot t \Rightarrow D = (40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot (3 \text{ s}) = 120 \text{ m}$$

CUARTO PASO. Cálculo de la velocidad en el eje vertical:

$$V_Y = V_{0Y} + g \cdot t \Rightarrow V_Y = 0 + (10) \cdot (3) = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

QUINTO PASO. Cálculo de la velocidad neta en el impacto con la tierra.

$$V_{NETA} = \sqrt{(V_X)^2 + (V_Y)^2} \Rightarrow V_{NETA} = \sqrt{(40)^2 + (30)^2}$$

La velocidad de la piedra cuando impacta con el suelo es 50 m/s

SEXTO PASO. cálculo de la velocidad de impacto respecto de la horizontal:

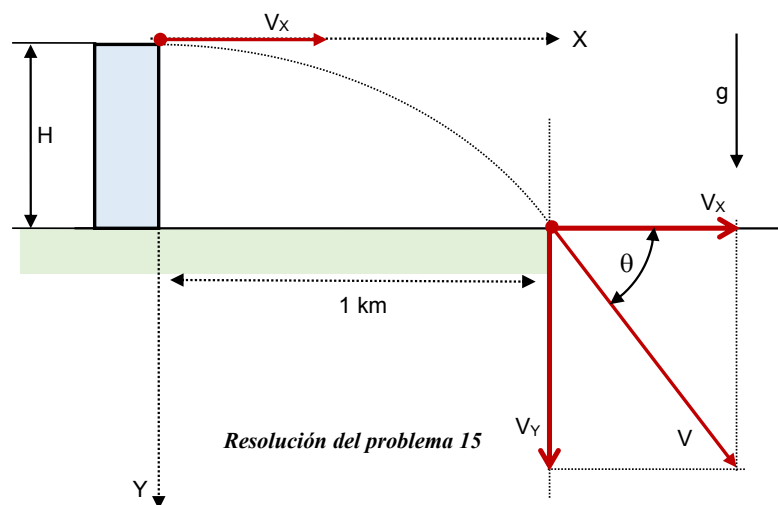
$$\tan \theta = \frac{V_Y}{V_X} \Rightarrow \tan \theta = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37^\circ$$

Respuesta. La velocidad forma con la horizontal un ángulo de 37° .

15. Un avión vuela horizontalmente con velocidad de 100 m/s, se deja caer una piedra respecto del avión y recorre 1000 metros antes de llegar al suelo. ¿Cuál es la altura a la que se encuentra el avión? ¿Qué ángulo forma la velocidad con la horizontal en el instante del impacto con el suelo?
 $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama del movimiento parabólico que describe la partícula.



SEGUNDO PASO. En el eje horizontal, tiene M.R.U, la velocidad es constante:

$$D = V_x \cdot t \Rightarrow 1000 \text{ m} = (100 \text{ m.s}^{-1}) \cdot (t) \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

TERCER PASO. Cálculo de la velocidad en el eje vertical:

$$V_y = V_{0y} + g \cdot t \Rightarrow V_y = 0 + (10) \cdot (10) = 100 \text{ m.s}^{-1}$$

CUARTO PASO. Cálculo de la velocidad neta en el impacto con la tierra.

$$V_{NETA} = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} \Rightarrow V_{NETA} = \sqrt{(100)^2 + (100)^2}$$

La velocidad de la piedra cuando impacta con el suelo es,

$$V_{NETA} = 10 \cdot \sqrt{10} \text{ m.s}^{-1}$$

QUINTO PASO. Cálculo de la velocidad de impacto respecto de la horizontal:

$$\tan \theta = \frac{V_y}{V_x} \Rightarrow \tan \theta = \frac{100}{100} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

La velocidad forma con la horizontal un ángulo de 45° .

SEXTO PASO. Aplicamos las leyes de caída libre vertical.

La velocidad inicial en el eje Y es nula.

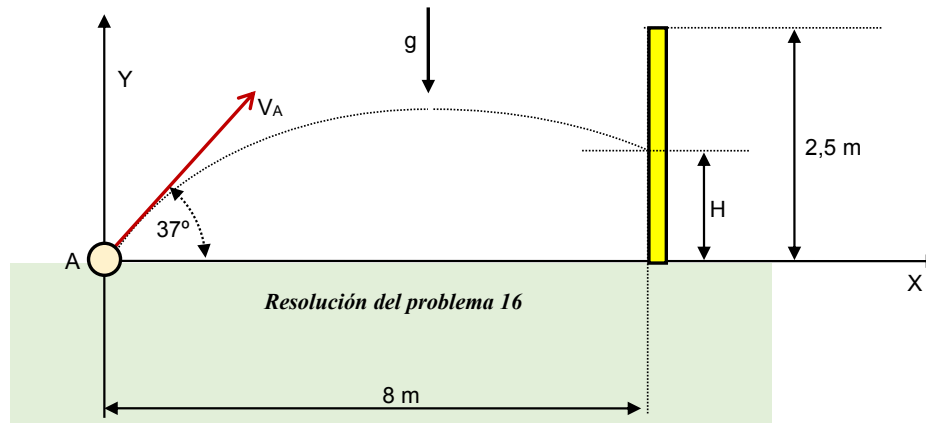
$$h = V_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow H = 0 + \frac{1}{2} \cdot (10) \cdot (10)^2 = 500 \text{ m}$$

Respuesta. El avión vuela a 500 metros del piso.

16. Un futbolista comunica a una pelota la velocidad de 10 m/s con un ángulo de 37° con la horizontal, encontrándose a 8 m de distancia de una portería (arco) de 2,5 m. ¿Había posibilidad de gol?

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama donde se muestra la trayectoria de la pelota.



SEGUNDO PASO. En el eje horizontal se cumple el M.R.U, velocidad constante:

$$d = V_x \cdot t \Rightarrow 8 = (V_0 \cdot \cos 37^\circ) \cdot (t)$$

$$8 = 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \cdot (t) \Rightarrow t = 1s$$

TERCER PASO. En el eje vertical se cumplen las leyes de caída libre vertical.

$$h = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow H = (V_0 \cdot \sin 37^\circ) \cdot (1) - \frac{1}{2} \cdot (9,8) \cdot (1)^2$$

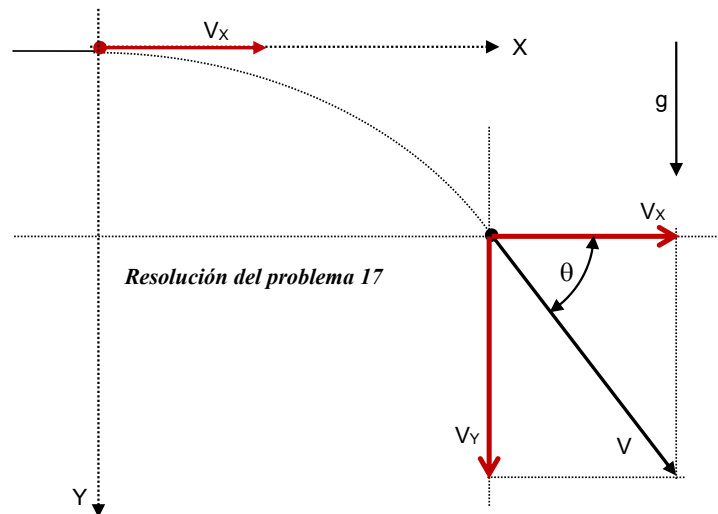
$$H = 10 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \cdot (1) - \frac{1}{2} \cdot (9,8) \cdot (1)^2 = 1,1 \text{ m}$$

CUARTO PASO. Si hay posibilidad de gol. $H < 2,5 \text{ m}$

17. Una partícula se lanza horizontalmente con velocidad inicial $V_x = 40 \text{ m.s}^{-1}$ desde lo alto de una torre, ¿Qué ángulo forma el vector velocidad de la partícula con respecto a la horizontal luego de 3 segundos? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama de la trayectoria de la partícula.



SEGUNDO PASO. Cálculo de la velocidad en el eje Y después de 3 segundos.

$$V_Y = V_{0Y} + g.t \Rightarrow V_Y = 0 + (10).(3) = 30 m.s^{-1}$$

TERCER PASO. Aplicamos la razón trigonométrica tangente que relaciona a los dos catetos.

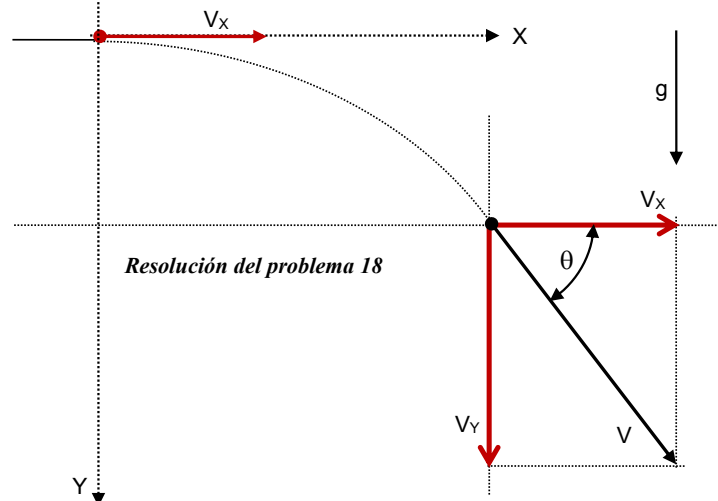
$$\tan \theta = \frac{V_Y}{V_X} \Rightarrow \tan \theta = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37^\circ$$

Respuesta: después de 3 segundos formara 37° con la horizontal.

18. Se deja caer una bomba desde un aeroplano que vuela horizontalmente a una altura de 320 m con velocidad de 216 km/h. ¿Qué ángulo forma el vector velocidad de la partícula con respecto a la horizontal cuando impacta con el suelo? $g = 10 m.s^{-2}$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama de la trayectoria de la partícula.



SEGUNDO PASO. En el eje vertical se cumplen las leyes de caída libre vertical.

$$h = V_{0Y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 320 = 0 + \frac{1}{2} \cdot (10) \cdot (t)^2$$

Después de 8 segundos llegará al suelo: $t = 8s$

TERCER PASO. Cálculo de la velocidad en el eje Y después de 3 segundos.

$$V_Y = V_{0Y} + g \cdot t \Rightarrow V_Y = 0 + (10) \cdot (8) = 80 m.s^{-1}$$

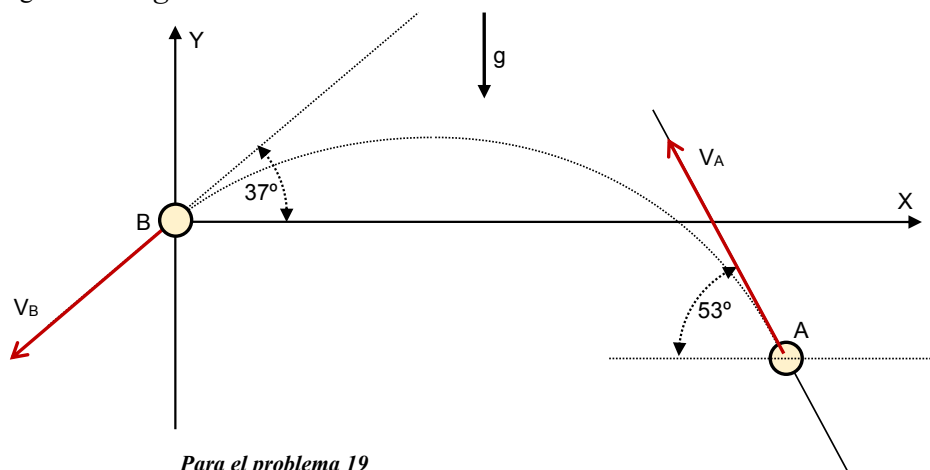
CUARTO PASO. Aplicamos la razón trigonométrica tangente que relaciona a los dos catetos.

La velocidad constante en el eje X es 60 m/s:

$$\tan \theta = \frac{V_Y}{V_X} \Rightarrow \tan \theta = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53^\circ$$

Respuesta: la velocidad formará 53° con la horizontal en el impacto con el suelo.

19. Una partícula se lanza con velocidad inicial de 20 m/s haciendo un ángulo de 53° con la horizontal. ¿Al cabo de qué tiempo su velocidad formará un ángulo de 37° con la horizontal por segunda vez? $g = 10 m.s^{-2}$



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos la descomposición de la velocidad de lanzamiento, en la posición A.

$$\vec{V}_A = (-V_A \cdot \cos 53^\circ; V_A \cdot \sin 53^\circ) = \left(-20 \cdot \frac{3}{5}; 20 \cdot \frac{4}{5}\right) m.s^{-1}$$

$$\vec{V}_A = (-12; 16) m.s^{-1}$$

La velocidad en el eje horizontal, $\vec{V}_X = -12 (i) m.s^{-1}$ es constante en este movimiento parabólico.

SEGUNDO PASO. Hacemos la descomposición de la velocidad, en la posición B.

$$\vec{V}_B = (-V_B \cdot \cos 37^\circ; -V_B \cdot \sin 37^\circ) = (-12; -V_B \cdot \sin 37^\circ) m.s^{-1}$$

$$-V_B \cdot \cos 37^\circ = -12 \Rightarrow V_B \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = 12 \Rightarrow V_B = 15 m.s^{-1}$$

La velocidad en la posición B es: $\vec{V}_B = (-12; -9) \text{ m.s}^{-1}$

TERCER PASO. Analizando el movimiento en el eje vertical:

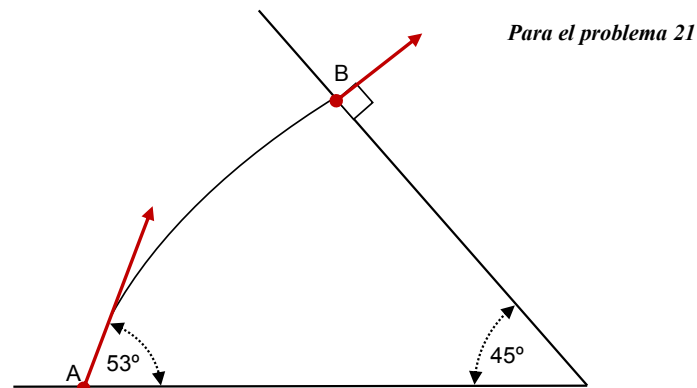
$$V_{FY} = V_{0Y} + g.t \Rightarrow (-9) = (16) + (-10).t$$

Resolviendo: $t = 2,5 \text{ s}$

Respuesta: Esto ocurre después de 2,5 segundos.

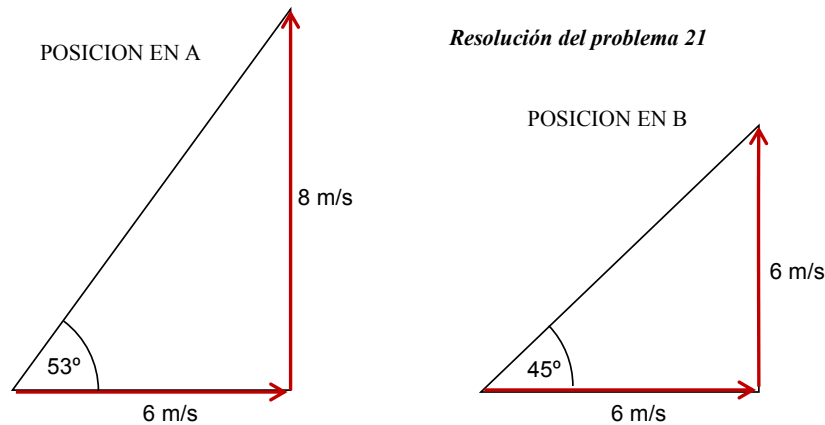
20. Una partícula se lanza con velocidad inicial $V_0 = 15 \text{ m.s}^{-1}$ formando un ángulo de 53° con la horizontal. ¿Al cabo de qué tiempo su velocidad formará un ángulo de 45° con la horizontal por segunda vez? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
- A) 0,1 s B) 0,2 **C) 0,3** D) 0,4 E) ninguna

21. Un dardo es lanzado desde la posición A con velocidad 10 m/s formando un ángulo de 53° con la horizontal y se incrusta en el punto B perpendicularmente al plano inclinado, ¿Cuánto es el tiempo transcurrido? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$



RESOLUCION

PRIMER PASO. En Todo movimiento parabólico, la componente de la velocidad en el eje horizontal es constante en el tiempo.



SEGUNDO PASO. Tenemos la velocidad en las posiciones inicial y final:

En la Posición A: $\vec{V}_A = (6; 8) = 6.i + 8.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$

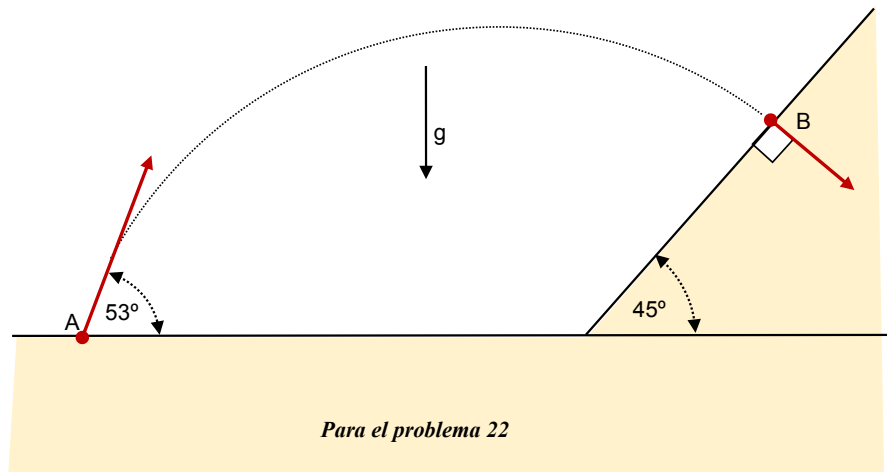
En la Posición B: $\vec{V}_B = (6; 6) = 6.i + 6.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$

TERCER PASO: Analizando en el eje vertical. Caída libre vertical:

$$V_{FY} = V_{0Y} + g.t \Rightarrow (6) = (8) + (-10).t \Rightarrow t = 0,2s$$

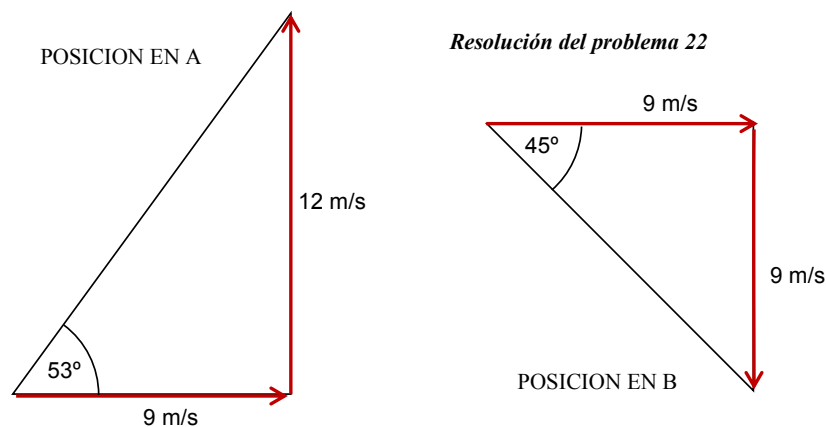
Respuesta: impacta después de 0,2 segundo.

22. Un dardo es lanzado desde la posición A con velocidad 15 m/s formando un ángulo de 53° con la horizontal y se incrusta en el punto B perpendicularmente al plano inclinado, ¿Cuánto es el tiempo transcurrido? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$



RESOLUCION

PRIMER PASO. En Todo movimiento parabólico, la componente de la velocidad en el eje horizontal es constante en el tiempo.



Resolución del problema 22

SEGUNDO PASO. Tenemos la velocidad en las posiciones inicial y final:

En la Posición A: $\vec{V}_A = (9; 12) = 9.i + 12.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$

En la Posición B: $\vec{V}_B = (9; -9) = 9.i - 9.j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$

TERCER PASO: Analizando en el eje vertical. Caída libre vertical:

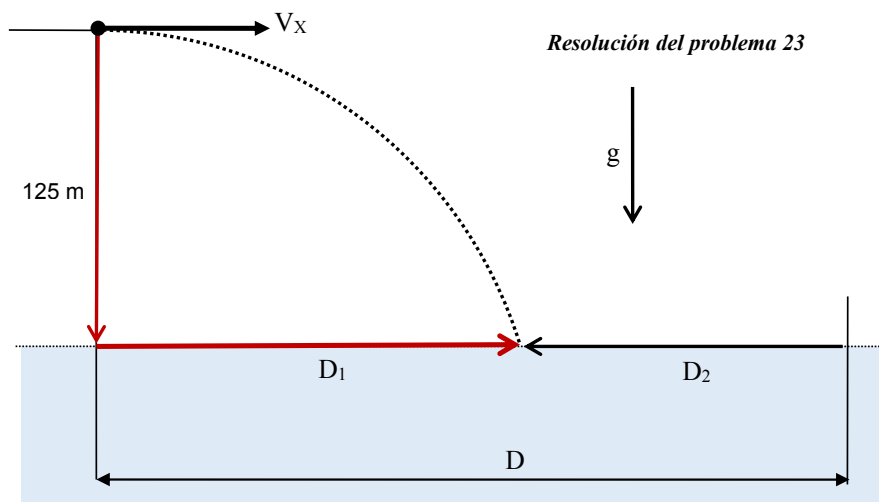
$$V_{FY} = V_{0Y} + g.t \Rightarrow (-9) = (12) + (-10).t \Rightarrow t = 2,1 \text{ s}$$

Respuesta: impacta después de 2,1 segundos.

23. Un bombardeo que vuela horizontalmente a una altura de 125 m con velocidad de 100 m/s, trata de atacar a un barco que navega a una velocidad de 20 m/s, en la misma dirección y sentidos opuestos. ¿A qué distancia **D** se debe dejar de caer una bomba para lograr un impacto sobre el barco? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama donde se muestra las trayectorias de los móviles.



Resolución del problema 23

SEGUNDO PASO. Cálculo del tiempo de vuelo del proyectil. Aplicamos las leyes del movimiento de caída libre vertical.

$$h = V_{0Y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 125 = 0 + \frac{1}{2} \cdot (10) \cdot (t)^2$$

El tiempo de vuelo es: $t = 5s$

TERCER PASO. Los desplazamientos en el eje horizontal, con velocidad constante.

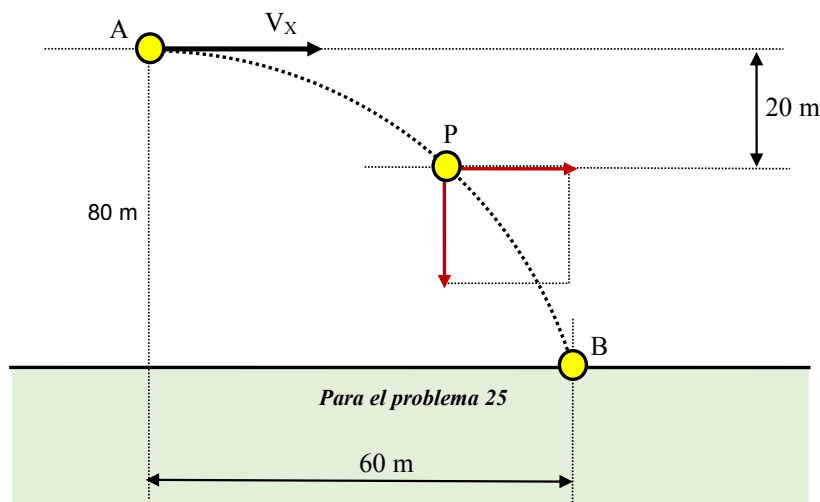
$$D = D_1 + D_2 \Rightarrow D = V_1 \cdot t + V_2 \cdot t$$

$$D = (100) \cdot (5) + (20) \cdot (5) = 600m$$

Respuesta: Se debe soltar la bomba a 600 metros.

24. Un bombardero que vuela horizontalmente a una altura de 180 m y con velocidad de 20 m/s, en la misma dirección y sentido. ¿A qué distancia **D** se debe dejar caer una bomba para lograr un impacto sobre el barco? $g = 10m.s^{-2}$
- A) 280 m B) 380 **C) 480** D) 580 E) ninguna

25. Calcular la velocidad del móvil en el punto P. El cuerpo es lanzado horizontalmente desde el punto A y llega al punto B como se muestra. $g = 10m.s^{-2}$



RESOLUCION

PRIMER PASO. Analizando el movimiento parabólico desde A hasta B. En la vertical se cumple las leyes de caída libre vertical.

$$h = V_{0Y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 80 = 0 + \frac{1}{2} \cdot (10) \cdot (t)^2$$

El tiempo de vuelo es: $t = 4s$

SEGUNDO PASO. Analizando el movimiento en el eje horizontal. La velocidad es constante.

$$V_X = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow V_X = \frac{60m}{4s} = 15 m.s^{-1}$$

TERCER PASO. La velocidad componente del punto P, en el eje vertical es,

$$(V_{FY})^2 = (V_{0Y})^2 + 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow (V_{FY})^2 = (0) + 2 \cdot (10) \cdot (20)$$

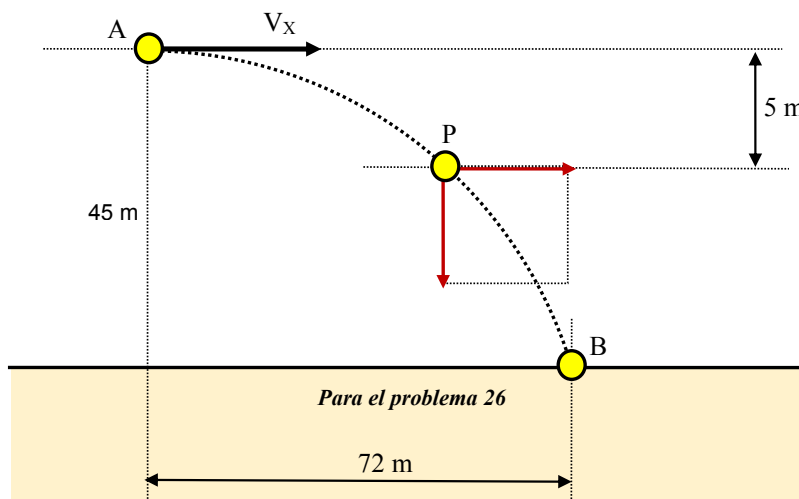
La componente vertical es: $V_{FY} = 20 m.s^{-1}$

CUARTO PASO. Cálculo de la velocidad en el punto P.

$$V_P = \sqrt{(V_X)^2 + (V_{FY})^2} = 25 \text{ m.s}^{-1}$$

Respuesta. La velocidad en el punto P tiene valor 25 m/s.

26. Calcular la velocidad del móvil en el punto P. La partícula lanzada horizontalmente en el punto A llega al punto B como se muestra. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$



RESOLUCION

PRIMER PASO. Analizando el movimiento parabólico desde A hasta B. En la vertical se cumple las leyes de caída libre vertical.

$$h = V_{0Y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 45 = 0 + \frac{1}{2} \cdot (10) \cdot (t)^2$$

El tiempo de vuelo es: $t = 3 \text{ s}$

SEGUNDO PASO. Analizando el movimiento en el eje horizontal. La velocidad es constante.

$$V_X = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow V_X = \frac{72 \text{ m}}{3 \text{ s}} = 24 \text{ m.s}^{-1}$$

TERCER PASO. La velocidad componente del punto P, en el eje vertical es,

$$(V_{FY})^2 = (V_{0Y})^2 + 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow (V_{FY})^2 = (0) + 2 \cdot (10) \cdot (5)$$

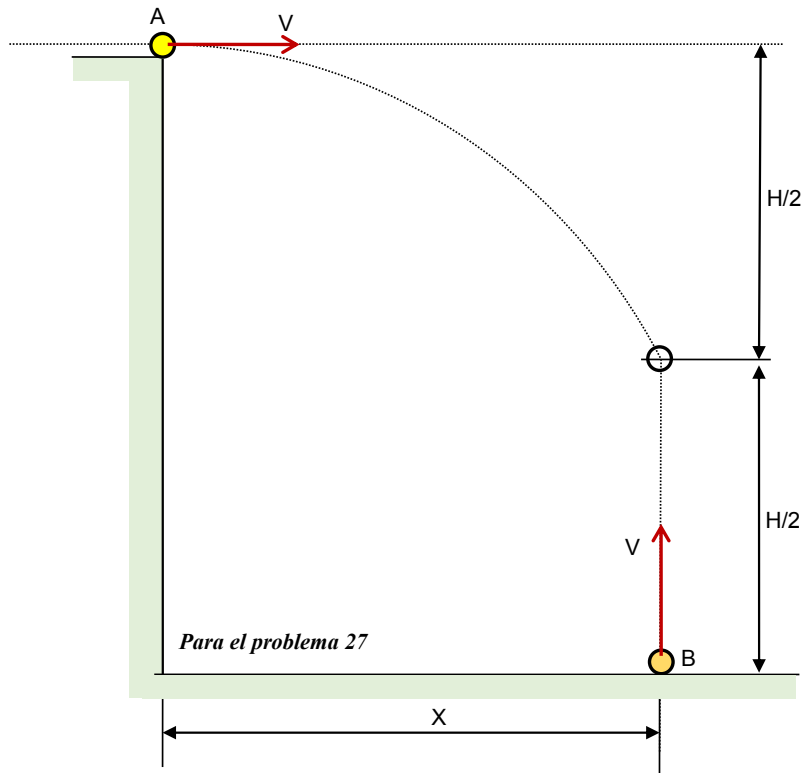
La componente vertical es: $V_{FY} = 10 \text{ m.s}^{-1}$

CUARTO PASO. Cálculo de la velocidad en el punto P.

$$V_P = \sqrt{(V_X)^2 + (V_{FY})^2} = 26 \text{ m.s}^{-1}$$

Respuesta. La velocidad en el punto P tiene valor 26 m/s.

27. Dos esferitas A y B inician su movimiento simultáneamente, A es lanzado horizontalmente y B verticalmente. Tienen el mismo valor la velocidad de lanzamiento. Determinar la distancia X si se sabe que los cuerpos chocan a una altura $H/2$.

**RESOLUCION**

PRIMER PASO. Las esferas A y B tienen igual rapidez de lanzamiento. Analizando el movimiento en el eje vertical.

$$h = V_{0Y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

SEGUNDO PASO. Caída libre vertical.

Para el móvil A: $\frac{H}{2} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \dots (1)$

TERCER PASO. Caída libre vertical.

Para el móvil B: $\frac{H}{2} = V \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \dots (2)$

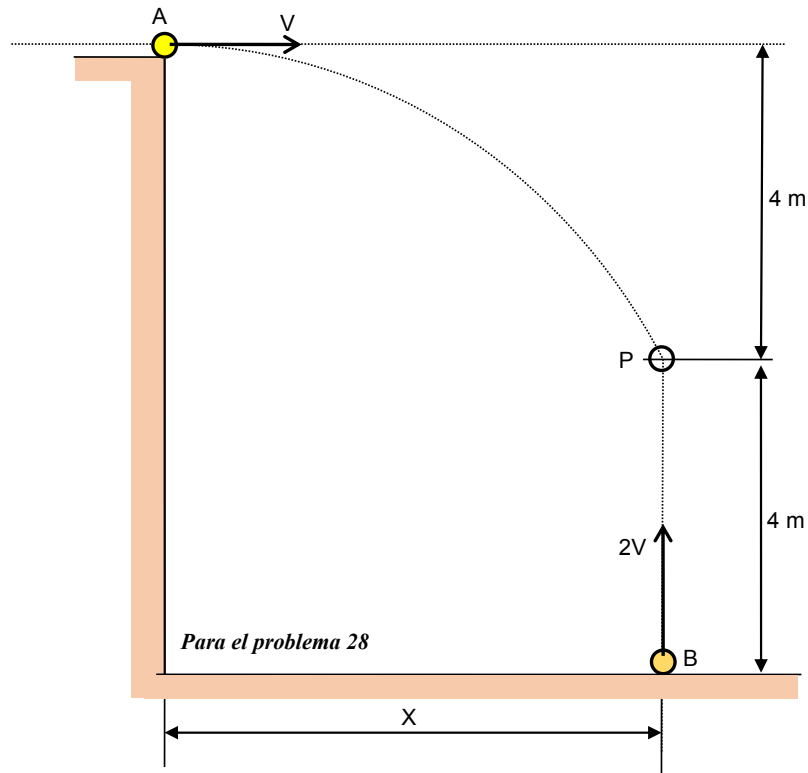
Adicionando las ecuaciones (1) y (2): $H = V \cdot t \quad \dots (3)$

CUARTO PASO: Para el móvil A en la horizontal, M.R.U: $X = V \cdot t \quad \dots (4)$

De las ecuaciones (3) y (4): $X = H$

Respuesta. El desplazamiento horizontal mide H.

28. Dos esferitas A y B inician su movimiento simultáneamente, A es lanzado horizontalmente con velocidad "V" y B verticalmente con velocidad "2V". Determinar la distancia X si se sabe que los cuerpos chocan en el punto P.

**RESOLUCION**

PRIMER PASO. Las esferas A y B tienen diferente rapidez de lanzamiento. Analizando el movimiento en el eje vertical.

$$h = V_{0Y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

SEGUNDO PASO. Caída libre vertical.

Para el móvil A: $4 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \dots (1)$

TERCER PASO. Caída libre vertical.

Para el móvil B: $4 = (2V) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \dots (2)$

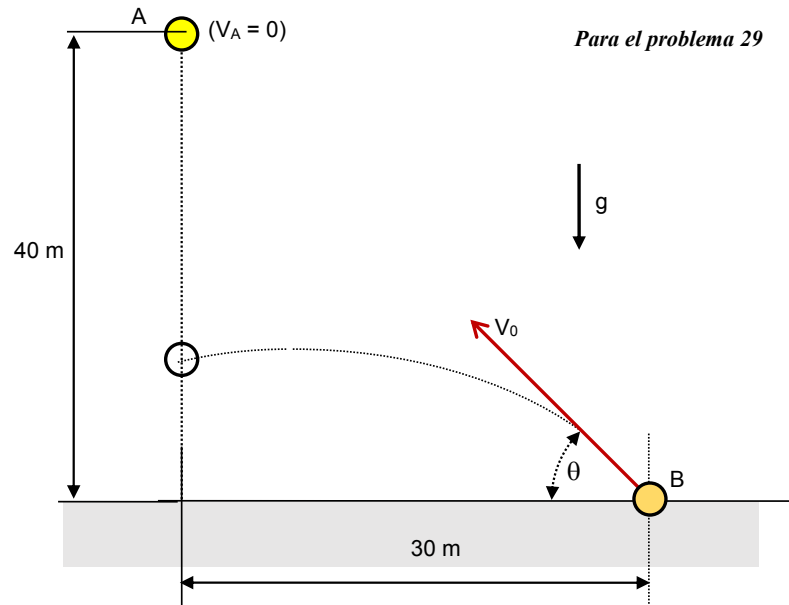
Adicionando las ecuaciones (1) y (2): $4 = V \cdot t \quad \dots (3)$

CUARTO PASO: Para el móvil A en la horizontal, M.R.U: $X = V \cdot t \quad \dots (4)$

De las ecuaciones (3) y (4): $X = 4 \text{ m}$

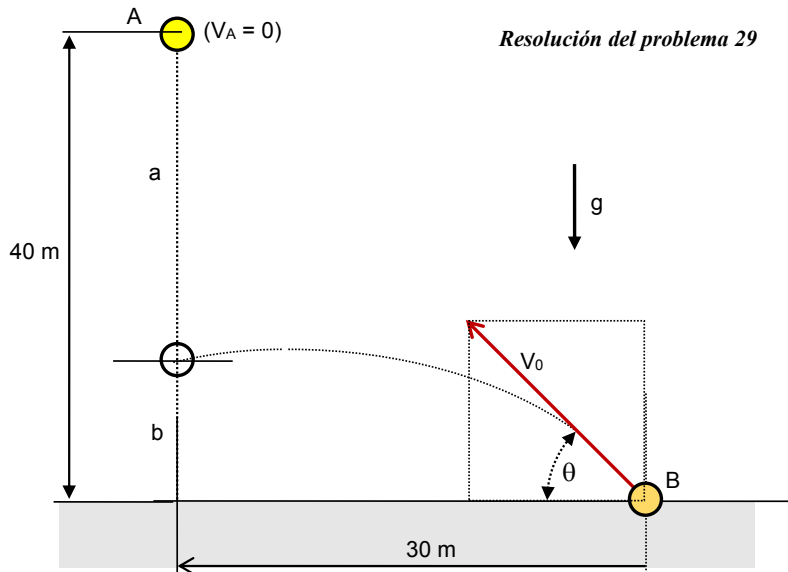
Respuesta. El desplazamiento horizontal mide 4 metros.

29. Se muestra, en el mismo instante que se abandona la esfera A se lanza la esfera B con velocidad V_0 , determinar la medida del ángulo θ de lanzamiento, tal que, las esferas A y B colisionan en el punto P.



RESOLUCION

PRIMER PASO. Analizando el movimiento de A y B en el eje vertical. La esfera B tiene movimiento de caída libre parabólico.



SEGUNDO PASO. La esfera A tiene movimiento de caída libre vertical.

$$h = V_{0Y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \dots (1)$$

TERCER PASO. La esfera B tiene movimiento de caída libre parabólico.

$$h = V_{0Y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow b = (V_0 \cdot \text{Sen} \theta) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \dots (2)$$

Adicionando (1) y (2): $a + b = V_0 \cdot \text{Sen} \theta \cdot t = 40 \quad \dots (3)$

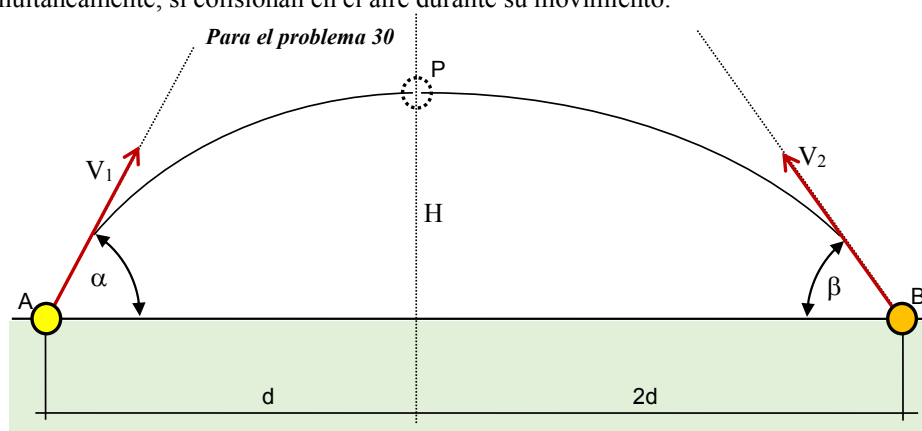
CUARTO PASO. Analizando el movimiento horizontal de la esfera B:

$$d = V_X \cdot t \Rightarrow V_0 \cdot \text{Cos} \theta \cdot t = 30 \quad \dots (4)$$

dividiendo (3) / (4): $\text{Tan} \theta = \frac{40}{30} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53^\circ$

Respuesta. La medida del ángulo del lanzamiento es 53° .

30. Determinar una relación entre los ángulos α y β con que se lanzan los dos proyectiles simultáneamente, si colisionan en el aire durante su movimiento.



RESOLUCION

PRIMER PASO. Ambos proyectiles alcanzan alturas iguales.

$$H = V_{0Y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

SEGUNDO PASO. Para el móvil A: $H = (V_1 \cdot \text{Sen} \alpha) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \dots (1)$

TERCER PASO. Para el móvil B: $H = (V_2 \cdot \text{Sen} \beta) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \dots (2)$

Igualando (1) y (2): $V_1 \cdot \text{Sen} \alpha = V_2 \cdot \text{Sen} \beta \quad \dots (3)$

CUARTO PASO: Desplazamiento horizontal, con velocidad constante. M.R.U.

Para el móvil A: $e = V_X \cdot t \Rightarrow V_1 \cdot \text{Cos} \alpha \cdot t = d$

Para el móvil B: $e = V_X \cdot t \Rightarrow V_2 \cdot \text{Cos} \beta \cdot t = 2d$

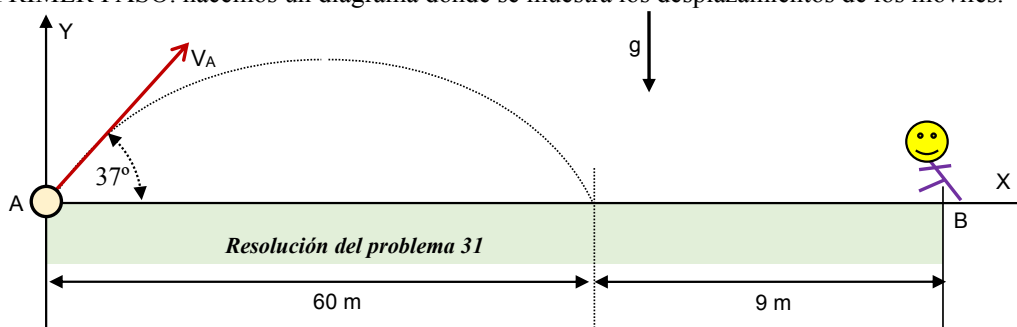
$$2 \cdot V_1 \cdot \text{Cos} \alpha \cdot t = V_2 \cdot \text{Cos} \beta \cdot t \quad \dots (4)$$

Dividiendo las ecuaciones (3) y (4): $\frac{\text{Tan} \alpha}{\text{Tan} \beta} = 2$

31. Un futbolista A patea una pelota, saliendo ésta con una velocidad de 25 m/s y un ángulo de 37° con el piso. Otro jugador B que se encuentra a 69 metros delante del primero corre a recoger la pelota. ¿Con que velocidad media debe recorrer este último para recoger la pelota justo cuando llega al suelo? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. hacemos un diagrama donde se muestra los desplazamientos de los móviles.



SEGUNDO PASO. Descomponemos la velocidad de lanzamiento de la pelota:

$$\vec{V}_A = (V_A \cdot \cos 37^\circ; V_A \cdot \sin 37^\circ) = (20; 15) \text{ m.s}^{-1}$$

TERCER PASO. Cálculo del tiempo de vuelo de la pelota. Analizando el movimiento en el eje vertical.

$$H = V_{0Y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 0 = 15 \cdot t - 5 \cdot t^2 \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

CUARTO PASO. Desplazamiento de la pelota en el eje horizontal. La velocidad es constante.

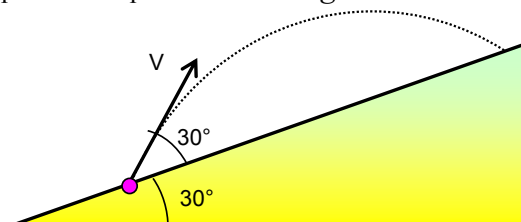
$$d = V_X \cdot t \Rightarrow d = (20 \text{ m.s}^{-1}) \cdot (3 \text{ s}) = 60 \text{ m}$$

QUINTO PASO. Cálculo de la velocidad media del otro jugador.

$$V_X = \frac{d}{t} \Rightarrow V_X = \frac{9 \text{ m}}{3 \text{ s}} = 3 \text{ m.s}^{-1}$$

Respuesta: la velocidad media del jugador B es 3 m/s.

32. Se muestra el lanzamiento de una partícula, con rapidez $V_0 = 20\sqrt{3} \text{ m.s}^{-1}$ formando un ángulo de 60° respecto de la horizontal, sobre un plano que está inclinado 30° . ¿Después de cuántos segundos llegará a la superficie del plano inclinado? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$



Para el problema 32

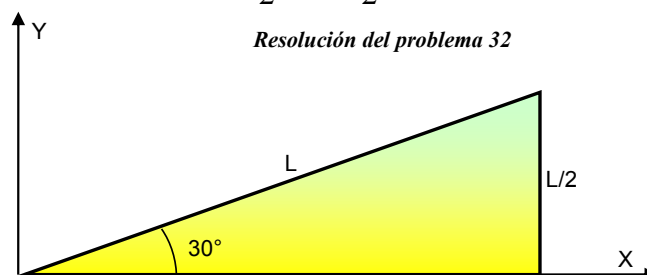
RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Descomponemos la velocidad de lanzamiento respecto de un sistema de referencia.

$$\vec{V}_0 = (V_0 \cdot \cos 60^\circ; V_0 \cdot \sin 60^\circ) = (10\sqrt{3}; 30) \text{ m.s}^{-1}$$

SEGUNDO PASO. Hacemos un diagrama donde se muestra los desplazamientos del móvil. Los

lados del triángulo rectángulo son: L ; $\frac{L}{2}$ y $\frac{L\sqrt{3}}{2}$



TERCER PASO. Analizando el movimiento del proyectil en el eje horizontal.

$$d = V_x \cdot t \Rightarrow \frac{L\sqrt{3}}{2} = (10\sqrt{3}) \cdot t \Rightarrow t = \frac{L}{20} \dots (1)$$

CUARTO PASO. Analizando el movimiento del proyectil en el eje vertical.

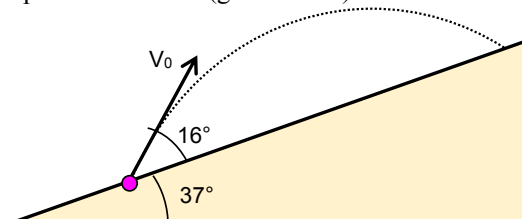
$$h = V_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \frac{L}{2} = (30) \cdot t - 5 \cdot t^2 \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$\frac{L}{2} = (30) \cdot \left(\frac{L}{20}\right) - 5 \cdot \left(\frac{L}{20}\right)^2 \Rightarrow L = 80 \text{ m}$$

Respuesta: El alcance sobre el plano inclinado es 80 metros.

33. Se muestra el lanzamiento de una partícula, con rapidez $V_0 = 10 \text{ m/s}$ formando un ángulo de 53° respecto de la horizontal, sobre un plano que está inclinado 37° . ¿Después de cuántos segundos llegará a la superficie del plano inclinado? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



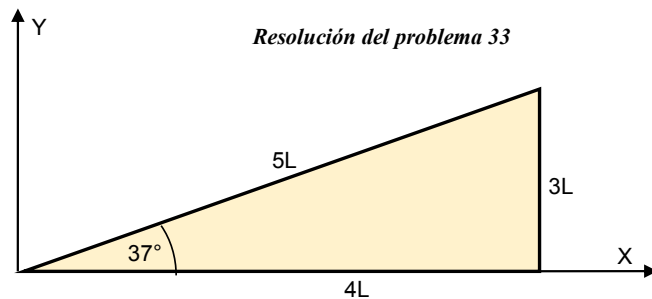
Para el problema 33

RESOLUCION

PRIMER PASO. Descomponemos la velocidad de lanzamiento respecto de un sistema de referencia.

$$\vec{V}_0 = (V_0 \cdot \cos 53^\circ; V_0 \cdot \sin 53^\circ) = (6; 8) \text{ m.s}^{-1}$$

SEGUNDO PASO. Hacemos un diagrama donde se muestra los desplazamientos del móvil. Los lados del triángulo rectángulo son: $5L$; $4L$ y $3L$



TERCER PISO. Analizando el movimiento del proyectil en el eje horizontal.

$$d = V_x \cdot t \Rightarrow 4L = (6) \cdot t \Rightarrow t = \frac{2L}{3} \dots (1)$$

CUARTO PASO. Analizando el movimiento del proyectil en el eje vertical.

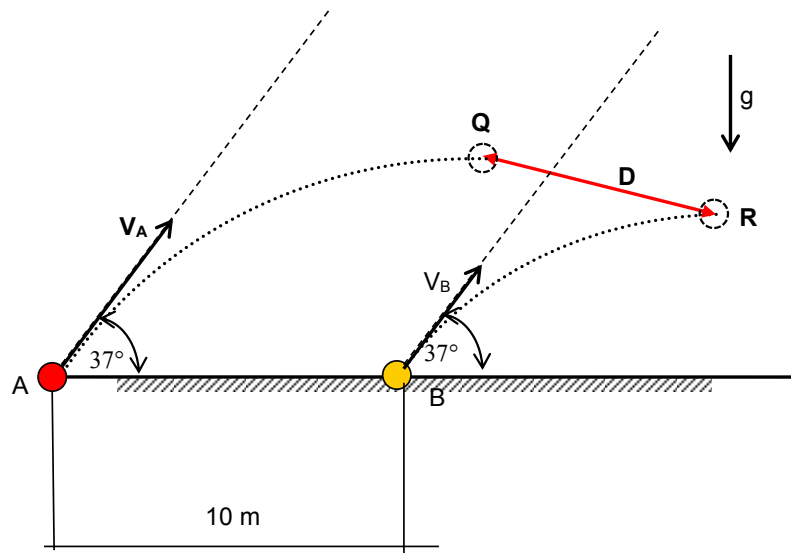
$$h = V_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 3L = (8) \cdot t - 5 \cdot t^2 \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$3L = (8) \cdot \left(\frac{2L}{3}\right) - 5 \cdot \left(\frac{2L}{3}\right)^2 \Rightarrow L = 1,05 \text{ m}$$

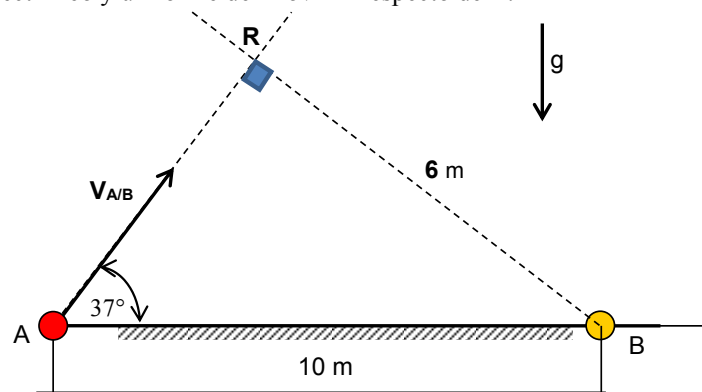
Respuesta: El alcance (5L) sobre el plano inclinado es 5,25 metros.

34. Dos partículas A y B son lanzadas simultáneamente de las posiciones indicadas con velocidades paralelas de $V_A = 20 \text{ m/s}$ y $V_B = 10 \text{ m/s}$ que forman 37° con la horizontal y separadas 10 m inicialmente. Después de cuántos segundos la distancia de separación entre las partículas es mínima.



RESOLUCIÓN. Aplicamos el principio de Relatividad de Galileo. Restamos a cada velocidad la misma cantidad vectorial, en este caso 10 m/s , entonces, $V_A = 10 \text{ m/s}$ y $V_B = 0 \text{ m/s}$ el móvil B

queda en reposo relativo. La aceleración relativa del móvil A respecto de B es nula. Tenemos el movimiento rectilíneo y uniforme del móvil A respecto de B.



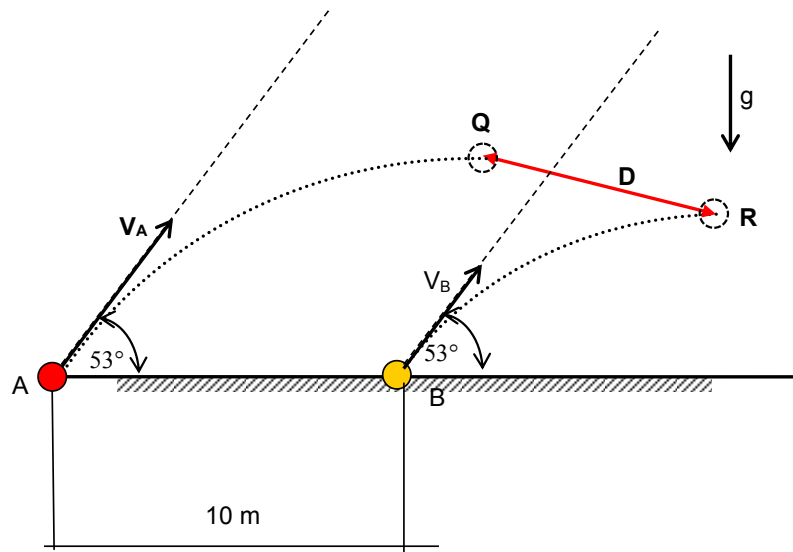
[1] Resolviendo el triángulo rectángulo: ARB recto en R: $AR = 8 \text{ m}$ y $BR = 6 \text{ m}$

La distancia mínima de acercamiento es $D = 6 \text{ m}$.

[2] Aplicando las leyes del M.R.U: $d_{rel} = V_{A/B} \cdot t \Rightarrow 8 = 10 \cdot (t) \Rightarrow t = 0,8 \text{ s}$

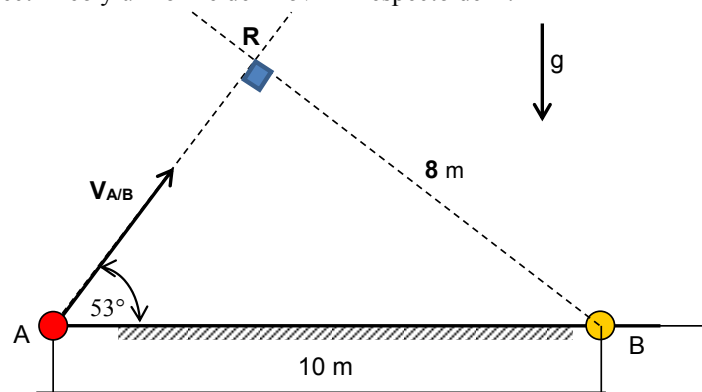
Respuesta: Después de 0,8 segundos la distancia de separación entre las partículas es mínima.

35. Dos partículas A y B son lanzadas simultáneamente de las posiciones indicadas con velocidades paralelas de $V_A = 20 \text{ m/s}$ y $V_B = 10 \text{ m/s}$ que forman 53° con la horizontal y separadas 10 m inicialmente. Después de cuantos segundos la distancia de separación entre las partículas es mínima.



RESOLUCIÓN. Aplicamos el principio de Relatividad de Galileo. Restamos a cada velocidad la misma cantidad vectorial, en este caso 10 m/s , entonces, $V_A = 10 \text{ m/s}$ y $V_B = 0 \text{ m/s}$ el móvil B

queda en reposo relativo. La aceleración relativa del móvil A respecto de B es nula. Tenemos el movimiento rectilíneo y uniforme del móvil A respecto de B.



[1] Resolviendo el triángulo rectángulo: ARB recto en R: $AR = 6 \text{ m}$ y $BR = 8 \text{ m}$

La distancia mínima de acercamiento es $D = 8 \text{ m}$.

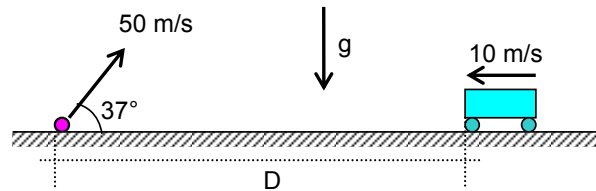
[2] Aplicando las leyes del M.R.U: $d_{rel} = V_{A/B} \cdot t \Rightarrow 6 = 10 \cdot (t) \Rightarrow t = 0,6 \text{ s}$

Respuesta: Después de 0,6 segundos la distancia de separación entre las partículas es mínima.

PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE

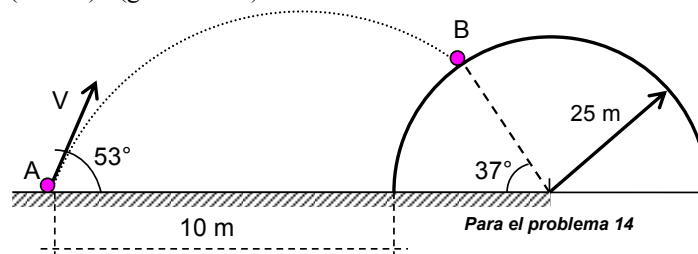
1. Un proyectil se dispara con velocidad de $\vec{v} = 30\vec{i} + 40\vec{j} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$ desde el suelo. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.
Determine: a) la altura máxima. b) el tiempo de vuelo. c) el alcance horizontal.
Respuesta: a) 80 m. b) 8 s. c) 240 m.
2. Un proyectil se dispara con velocidad de $\vec{v} = 80\vec{i} + 80\vec{j} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$ desde el suelo. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.
Determine la medida del ángulo que forma la velocidad con la horizontal después de: a) 2 segundos. b) 8 segundos. c) 14 segundos
Respuesta: a) 37° . b) 0° . c) -37° .
3. Un proyectil se dispara con velocidad de $\vec{v} = 30\vec{i} + 40\vec{j} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$ desde el suelo. Determine el radio de curvatura cuando pasa por el punto más alto de la trayectoria. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
Respuesta: 90 m
4. Un futbolista A patea una pelota, saliendo ésta con una velocidad de 25 m/s y un ángulo de 37° con el piso. Otro jugador B que se encuentra a 69 metros delante del primero corre a recoger la pelota. ¿Con qué velocidad media debe recorrer este último para recoger la pelota justo cuando llega al suelo? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
a) 3 m/s b) 2,5 c) 2,8 d) 1,5 e) 1,6
5. Un balón de futbol se patea con un ángulo de elevación de 37° y una velocidad de 20 m/s, calcular: a) el tiempo de vuelo. b) la altura máxima. c) el alcance horizontal.
 $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
Respuestas. a) 2,4 s. b) 7,2 m. c) 38,4 m
6. Desde lo alto de una torre de 5 m se lanza horizontalmente. Sabiendo que el alcance horizontal hasta llegar al suelo es 20 metros, calcular el valor de la velocidad de lanzamiento.
 $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
Respuesta. 20 m/s.
7. Desde el piso se dispara un proyectil con velocidad “V” formando un ángulo de 30° . Se vuelve a disparar con la misma rapidez formando un ángulo de 60° . ¿Cuál es la diferencia entre los alcances en la horizontal? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
Respuesta. 0 m.
8. Un proyectil se dispara el cual describe una trayectoria parabólica, permanece 6 segundos en el aire y determina un alcance horizontal de 240 m. Calcular el valor de la velocidad de lanzamiento. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
Respuesta. 50 m/s
9. Se dispara un proyectil desde el suelo con un ángulo de 37° con la horizontal, regresa al suelo, siendo el alcance horizontal 60 m. Determine el valor de la velocidad de lanzamiento.
 $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
Respuesta. 25 m/s

10. Un tanque se mueve horizontalmente con una velocidad de módulo 10 m/s hacia un mortero situado en el mismo plano horizontal y delante de él. Si de pronto el mortero lanza un proyectil con una velocidad de 50 m/s formando un ángulo de 37° con la horizontal y da en el blanco, ¿a qué distancia D (en m) del mortero se encontraba al tanque en el instante del disparo? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Para el problema 10

- A) 100 B) 200 C) 300 D) 400 E) 500
11. Un proyectil es disparado desde el origen del sistema de referencia haciendo un ángulo θ con el eje horizontal. Determinar la medida del ángulo θ si para t_1 pasa por la posición (40 m; 25 m) y en el instante t_2 pasa por la posición (160 m; 40 m). ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
A) 15° B) 30° C) 37° D) 45° E) 53°
12. Un clavadista corre con 4 m/s y se lanza horizontalmente desde cierta altura llegando al agua después de 2 segundos. Determine: a) la altura, b) el alcance horizontal. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
Respuesta. a) 20 m. b) 8 m.
13. Una avioneta vuela horizontalmente a una altura de 500 m con velocidad de 70 m/s, cuando esta pasando sobre una cabaña se desprende una de las ruedas de la avioneta, ¿a qué distancia de la cabaña impactará la rueda? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
Respuesta. 700 m
14. Desde A se lanza una partícula con velocidad V formando un ángulo de 53° con la horizontal. Si la partícula cae en el punto B de la semiesfera de radio 25 m, determinar la rapidez de lanzamiento (en m/s). ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Para el problema 14

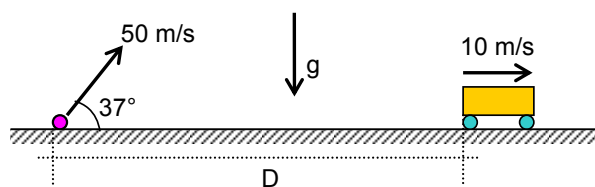
- A) 25 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50
15. Un bombardeo que vuela horizontalmente a una altura de 125 m con velocidad de 100 m/s, trata de atacar a un barco que navega a una velocidad de 20 m/s, en la misma dirección y sentidos opuestos. ¿A qué distancia D se debe dejar de caer una bomba para lograr un impacto sobre el barco? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

A) 600 m B) 590 C) 610 D) 640 E) 550

16. Se lanza horizontalmente una esfera con velocidad de 30 m/s. Calcular la medida del ángulo respecto de la horizontal después de 2,25 segundos. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
Respuesta. 37° .

17. Un proyectil se lanza desde el suelo describiendo una trayectoria parabólica, el alcance horizontal es 60 metros y la altura máxima es 20 metros. Calcular el valor de la velocidad de lanzamiento. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
Respuesta: 25 m/s

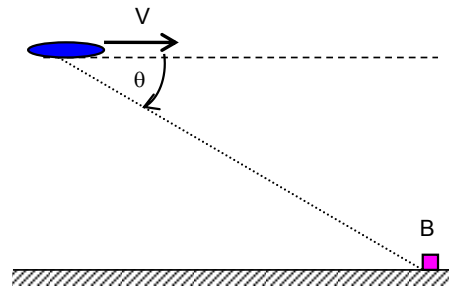
18. Un tanque se mueve horizontalmente con una velocidad de módulo 10 m/s hacia la derecha situado en el mismo plano horizontal y delante del mortero. Si de pronto el mortero lanza un proyectil con una velocidad de 50 m/s formando un ángulo de 37° con la horizontal y da en el blanco. ¿A qué distancia D (en m) del mortero se encontraba al tanque en el instante del disparo? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Para el problema 18

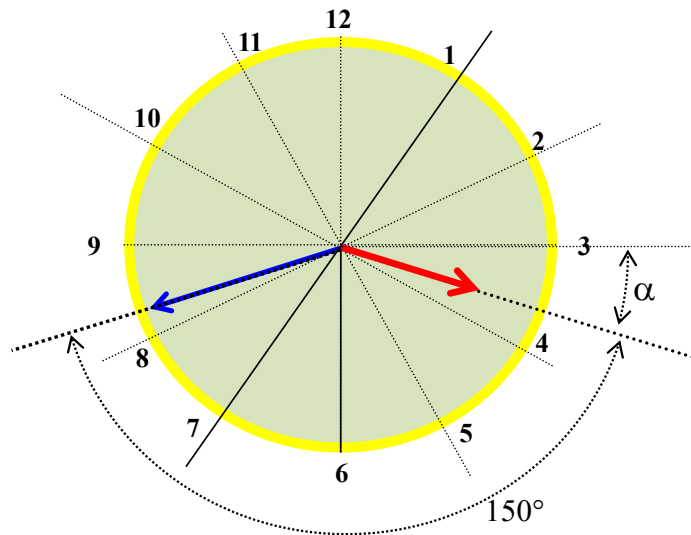
- A) 180 B) 200 C) 240 D) 300 E) 500
19. Un futbolista comunica a una pelota la velocidad de 10 m/s con un ángulo de 37° con la horizontal, encontrándose a 8 m de distancia de una portería (arco) de 2,5 m. ¿Había posibilidad de gol? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
A) si B) no C) puede ser.
20. Un avión vuela horizontalmente con velocidad de 100 m/s, se deja caer una piedra respecto del avión y recorre 1000 m antes de llegar al suelo. ¿Cuál es la altura a la que se encuentra el avión? ¿Qué ángulo forma la velocidad con la horizontal en el instante del impacto con el suelo? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
A) 45° B) 30° C) 15° D) 53° E) 60°
21. ¿Cuál es la diferencia entre las alturas alcanzadas (en m) por el proyectil disparado con velocidad de módulo $V = 2 \text{ m/s}$? cuando el ángulo de tiro varía de 30° a 60° , sin cambiar la rapidez de lanzamiento. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3 D) 0,4 E) ninguna anterior
22. Se lanza un proyectil desde el piso, describiendo una trayectoria parabólica. En el instante que alcanza una altura máxima de 7,2 m su velocidad horizontal es 9 m/s. Determine el valor de la velocidad de lanzamiento. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
Respuesta. 15 m/s
23. Desde el piso se lanza un proyectil con velocidad de 100 m/s formando 30° con la horizontal. Determine la altura máxima que alcanza.
Respuesta. 125 m

24. Un avión vuela horizontalmente con una velocidad constante de módulo $V = 50 \text{ m/s}$, a una altura de 500 m de la superficie terrestre. ¿Con qué ángulo de depresión debe ver el piloto el objetivo par que al dejar caer una bomba esta dé en el blanco B? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Para el problema 24

- A) 45° B) 30° C) 37° D) 60° E) 53°
25. Un proyectil se dispara con una velocidad de $30 \mathbf{i} + 40 \mathbf{j} \text{ (m/s)}$. Si éste choca contra la pared vertical con una velocidad que hace 45° con ella, el proyectil choca cuando se encuentra ganando altura. Calcula a que distancia (en m) del punto de disparo se encuentra la pared. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
a) 80 b) 30 c) 40 d) 50 e) 60
26. Un proyectil se dispara con una velocidad de $30 \mathbf{i} + 40 \mathbf{j} \text{ (m/s)}$. Si éste choca contra la pared vertical con una velocidad que hace 45° con ella, el proyectil choca cuando se encuentra perdiendo altura. Calcula a que distancia (en m) del punto de disparo se encuentra la pared. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
a) 280 b) 230 c) 210 d) 150 e) 160
27. Un proyectil es lanzado con un ángulo de elevación de 16° y pasa justamente por la parte superior de dos postes de 5 m de altura separados 100 m . Determinar el alcance horizontal (en m) desde que sale del piso hasta que regresa al piso. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
a) 100 b) 140 c) 260 d) 200 e) 360
28. Un proyectil se dispara con velocidad de $\vec{v} = 40\mathbf{i} + 30\mathbf{j} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$ desde el suelo. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.
Determine: a) la altura máxima. b) el tiempo de vuelo. c) el alcance horizontal.
Respuesta: a) 45 m. b) 6 s. c) 240 m.
29. Un proyectil se dispara con velocidad de $\vec{v} = 60\mathbf{i} + 80\mathbf{j} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$ desde el suelo. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.
Determine la medida del ángulo que forma la velocidad con la horizontal después de: a) 2 segundos. b) 8 segundos. c) 14 segundos
Respuesta: a) 45° . b) 0° . c) -45° .
30. Un proyectil se dispara con velocidad de $\vec{v} = 40\mathbf{i} + 30\mathbf{j} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$ desde el suelo. Determine el radio de curvatura cuando pasa por el punto más alto de la trayectoria. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
Respuesta: 160 m



MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL

CONCEPTO: Es aquel tipo de movimiento donde la partícula o cuerpo describe una trayectoria curva llamada circunferencia.

GOTA 1. En todo movimiento curvilíneo el móvil tiene aceleración centrípeta.

GOTA 2. Entonces si el móvil tiene como trayectoria una circunferencia, este móvil tiene aceleración centrípeta.

GOTA 3. El ángulo central que corresponde al arco en la circunferencia, se mide en radianes.

GOTA 4. La velocidad lineal (velocidad tangencial) se representa por un vector tangente a la circunferencia en cada punto de la trayectoria.

ELEMENTOS DEL MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL

1. DESPLAZAMIENTO LINEAL (S)

Es la longitud de arco de la circunferencia que recorre el móvil o cuerpo entre dos puntos considerados de la trayectoria. Se mide en metros, kilómetros y centímetros.

2. DESPLAZAMIENTO ANGULAR (θ)

Es el ángulo central correspondiente al arco descrito por el cuerpo, se mide en radianes.

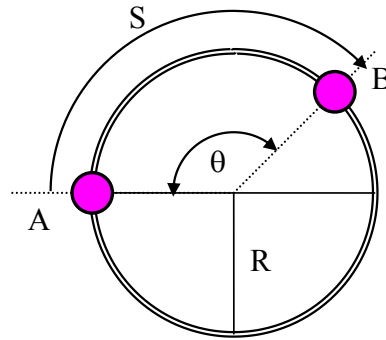


Figura 01

El ángulo medido en radianes es igual al cociente de la longitud de arco entre el radio de curvatura.

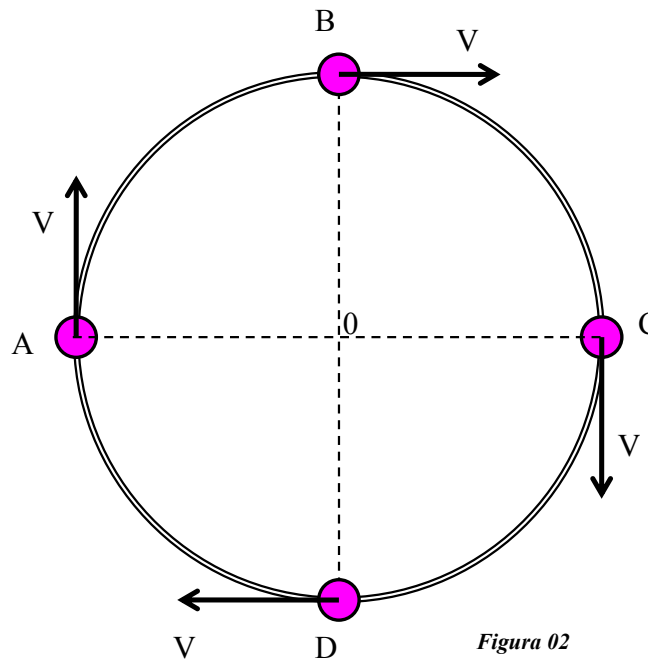


Figura 02

$$\theta = \frac{S}{R} \Rightarrow S = \theta \cdot R \quad \dots(1)$$

3. VELOCIDAD LINEAL O TANGENCIAL (V)

Es aquella magnitud física vectorial, se define como la longitud de arco recorrido por el móvil por cada unidad de tiempo. Se representa por un vector tangente a la trayectoria.

$$\|\vec{V}_t\| = \frac{S}{t} \Rightarrow \text{unidad} : \frac{m}{s}; \frac{km}{h} \quad \dots(2)$$

4. VELOCIDAD ANGULAR (ω)

Es aquella magnitud física vectorial, se define como el desplazamiento angular que experimenta el móvil por cada unidad de tiempo. Se representa por un vector perpendicular al plano de rotación, el sentido se determina mediante la regla de la mano derecha, los dedos indican el sentido de rotación y el pulgar señala la dirección de la velocidad angular.

$$\omega_t = \frac{\theta}{t} \Rightarrow \text{unidad} : \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \frac{\text{rad}}{\text{h}} \quad \dots(3)$$

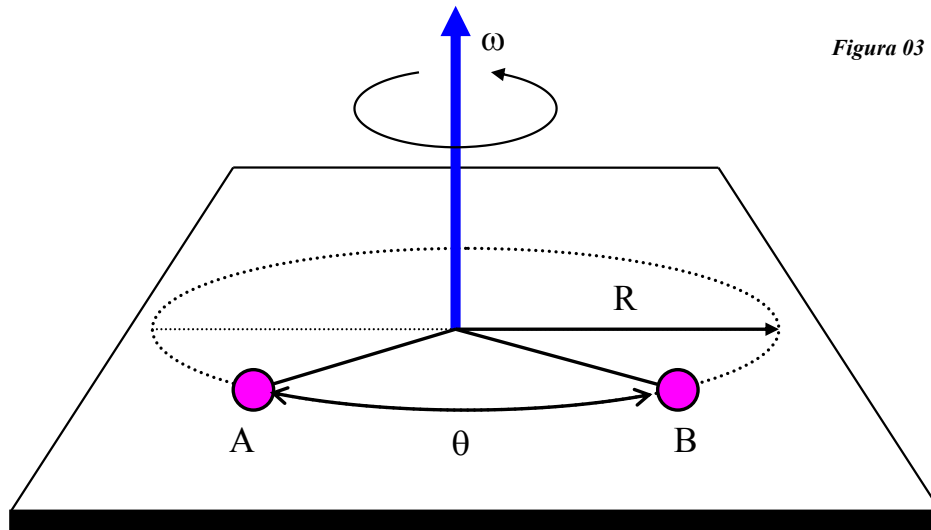


Figura 03

5. RELACIÓN ENTRE LAS VELOCIDADES

Sabemos que:

$$V_t = \frac{S}{t} = \frac{\theta \cdot R}{t} = \left(\frac{\theta}{t} \right) R = \omega \cdot R$$

Entonces:

$$V_t = \omega \cdot R \quad \dots(4)$$

MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL UNIFORME (M.C.U.)

CONCEPTO: Es aquel tipo de movimiento donde la partícula o cuerpo describe una trayectoria curva llamada circunferencia, donde la rapidez se mantiene constante y la velocidad solamente cambia la dirección, es decir el cuerpo se mueve con **aceleración centrípeta** cuyo valor se mantiene constante.

1. PERIODO (T)

Es el intervalo de tiempo constante que demora un cuerpo en recorrer la misma trayectoria. Su valor indica el intervalo de tiempo por cada vuelta o revolución. Se mide en segundos, minutos, hora y años.

$$T = \frac{\text{Tiempo empleado}}{\text{numero de vueltas}}$$

2. FRECUENCIA (f)

Se define como la inversa del periodo. Su valor indica el número de vueltas que describe el cuerpo por cada unidad de tiempo. Se mide en revolución por segundo: R.P.S., revolución por minuto: R.P.M. y revolución por hora: R.P.H.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\text{Numero de vueltas}}{\text{tiempo empleado}}$$

3. RELACIÓN ENTRE LA VELOCIDAD ANGULAR Y LA FRECUENCIA

Si el cuerpo describe una vuelta, genera un ángulo 2π (radianes) y el tiempo empleado se denomina periodo.

Sabemos que: $\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \left(\frac{1}{T} \right) = 2\pi f$

En función del periodo: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

En función de la frecuencia: $\omega = 2\pi f$

4. ACELERACIÓN CENTRÍPETA (a_c)

GOTA 1. La aceleración centrípeta mide la rapidez de cambio que experimenta la velocidad tangencial en dirección.

GOTA 2. Se representa por vector que indica al centro de curvatura.

GOTA 3. Su valor es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad tangencial e inversamente proporcional al radio de curvatura.

GOTA 4. Se mide en m/s^2 .

$$a_c = \frac{V^2}{R} = \frac{(\omega.R)^2}{R} = \omega^2.R$$

En función de la velocidad tangencial: $a_c = \frac{V^2}{R}$

En función de la velocidad angular: $a_c = \omega^2 \cdot R$

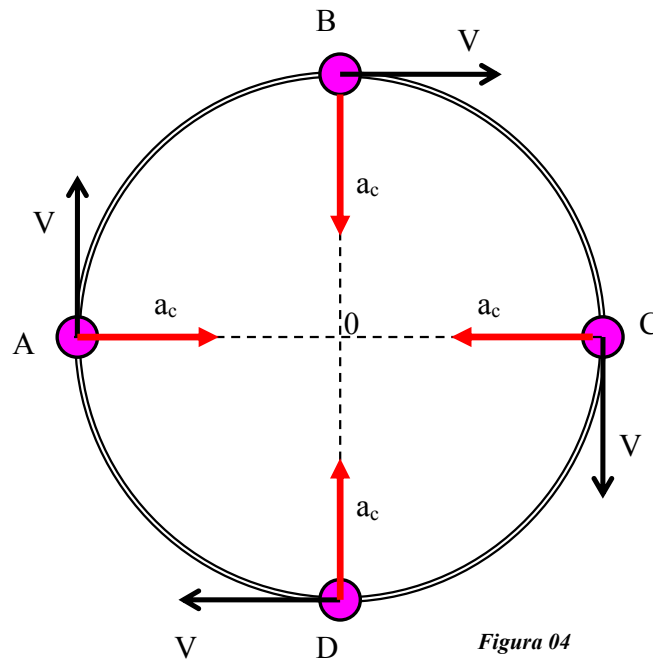


Figura 04

5.LEY DE KEPLER PARA EL M.C.U.

Todo cuerpo o partícula que tiene movimiento circular uniforme, describe ángulos iguales en intervalos de tiempos iguales, respecto de un sistema de referencia ubicado en el centro de la circunferencia.

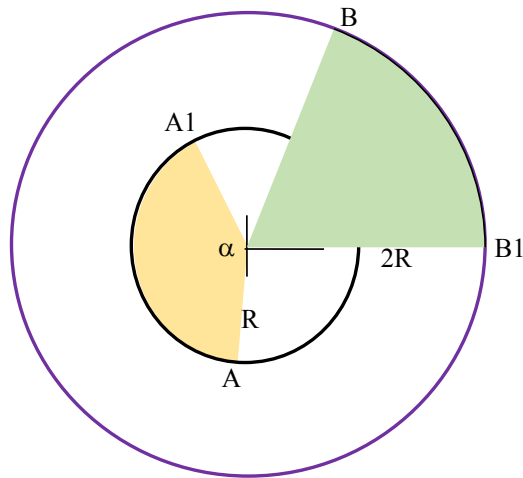
Ley de áreas: *La partícula describe áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.*

La circunferencia en un caso particular de la elipse.

EJEMPLO: Dos satélites A y B describen trayectorias circunferenciales concéntricas de radios de curvatura R y $2R$ respectivamente. Si los vectores posición, respecto del centro de curvatura, de A y de B describen áreas iguales en tiempos iguales, determinar la relación entre sus velocidades angulares.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. El área de un sector circular es directamente proporcional al cuadrado del radio de curvatura.



SEGUNDO PASO. Igualamos las áreas descritas por A y B en un tiempo “t”.

$$A_{\alpha} = A_{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha(R)^2}{2} = \frac{\beta(2R)^2}{2} \Rightarrow \alpha = 4\beta$$

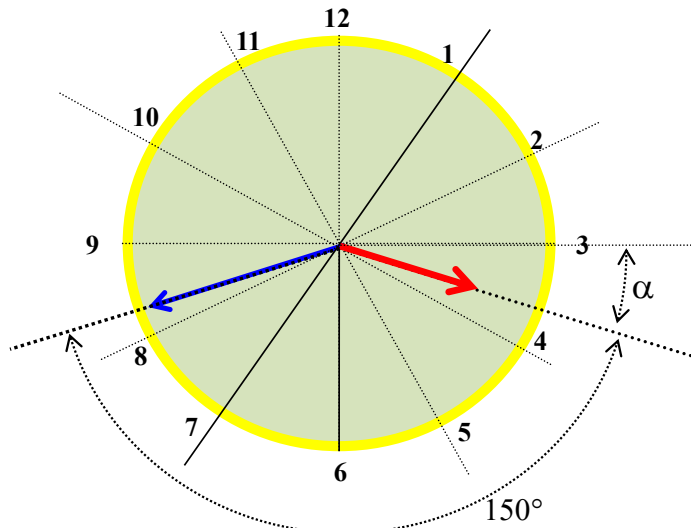
TERCER PASO. Cálculo de la velocidad angular de los satélites.

$$\left(\frac{\alpha}{t}\right) = 4\left(\frac{\beta}{t}\right) \Rightarrow \omega_A = 4\omega_B \Rightarrow \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{4}{1}$$

Respuesta. La relación de las velocidades angulares está, 4:1.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Se tiene un reloj de agujas, donde la aguja de menor tamaño es el horario (H) y el más largo es el minuterio (M). ¿A qué hora entre las 3:00 y 4:00 las agujas forman un ángulo de 150° ?



Para el problema 01

- A) $3\frac{6}{11}h$ B) $3\frac{10}{11}h$ C) $3\frac{7}{11}h$ **D) $3\frac{8}{11}h$** E) ninguna anterior

RESOLUCIÓN

I: La velocidad angular del horario es. $\omega_H = \frac{2\pi}{12h} = \frac{\pi}{6} \frac{rad}{h}$

II: La velocidad angular del minuterio es. $\omega_M = \frac{2\pi}{1h} = 2\pi \frac{rad}{h}$

III: El horario gira: $\theta_H = \omega_H t \Rightarrow \left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) rad = \left(\frac{\pi}{6} \frac{rad}{h}\right) t$

Despejando el tiempo transcurrido: $t = \frac{\alpha}{30} (h)$

IV: El minuterio gira: $\theta_M = \omega_M t$

$$\left((90^\circ + \alpha + 150^\circ) \cdot \frac{\pi}{180}\right) rad = \left(2\pi \frac{rad}{h}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{30} h\right)$$

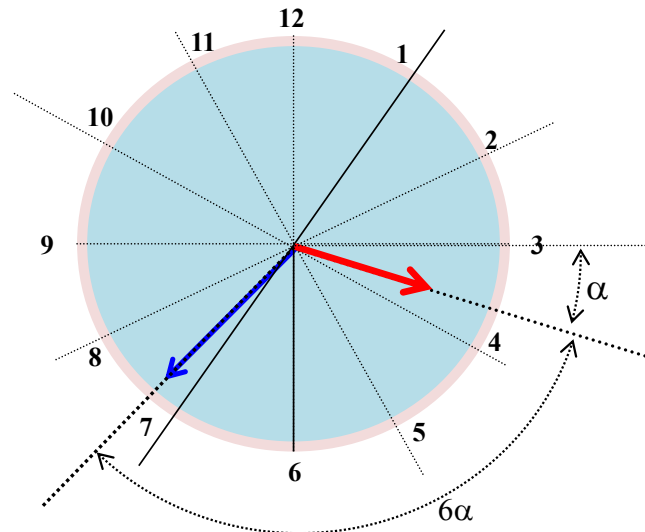
Despejando tenemos:

$$\alpha = \frac{240}{11} \Rightarrow t = \frac{\frac{240}{11}}{\frac{30}{1}} h = \frac{8}{11} h$$

$$t = 43 \text{ min } 38,18 \text{ s}$$

Respuesta: $3h \ 43 \text{ min } 38,18 \text{ s}$

2. Se tiene un reloj de agujas, donde la aguja de menor tamaño es el horario (H) y el más largo es el minuterero (M). ¿Qué hora es?



Para el problema 02

- A) $3\frac{6}{11}h$ B) $3\frac{3}{5}h$ C) $3\frac{7}{11}h$ D) $3\frac{8}{11}h$ E) ninguna anterior

RESOLUCIÓN

I: La velocidad angular del horario es. $\omega_H = \frac{2\pi}{12h} = \frac{\pi}{6} \frac{rad}{h}$

II: La velocidad angular del minuterero es. $\omega_M = \frac{2\pi}{1h} = 2\pi \frac{rad}{h}$

III: El horario gira: $\theta_H = \omega_H t \Rightarrow \left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) rad = \left(\frac{\pi}{6} \frac{rad}{h}\right) t$

Despejando el tiempo transcurrido: $t = \frac{\alpha}{30} (h)$

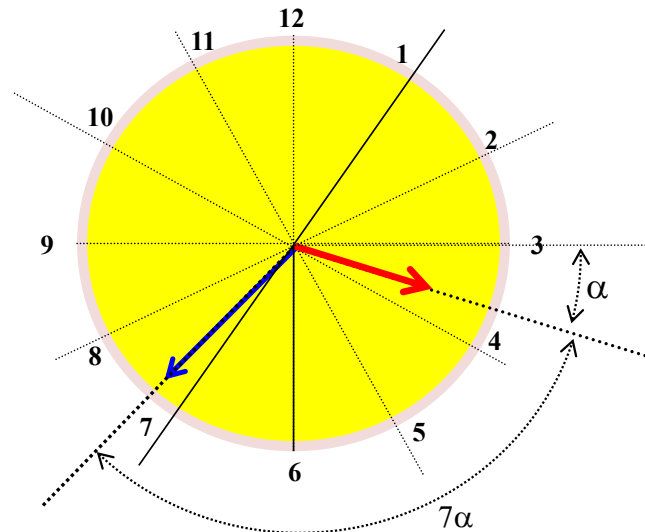
IV: El minuterero gira: $\theta_M = \omega_M t$

$$\left((90^\circ + \alpha + 6\alpha) \cdot \frac{\pi}{180}\right) rad = \left(2\pi \frac{rad}{h}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{30} h\right)$$

Despejando tenemos: $\alpha = 18 \Rightarrow t = \frac{18}{30} h = \frac{3}{5} h$

$t = 36 \text{ min} \Rightarrow \text{Respuesta : } 3h \ 36 \text{ min}$

3. Se tiene un reloj de agujas, donde la aguja de menor tamaño es el horario (H) y el más largo es el minuterio (M). ¿Qué hora es?



Para el problema 03

- A) $3\frac{6}{11}h$ B) $3\frac{3}{5}h$ C) $3\frac{7}{11}h$ D) $3\frac{8}{11}h$ E) ninguna anterior

RESOLUCIÓN

I: La velocidad angular del horario es. $\omega_H = \frac{2\pi}{12h} = \frac{\pi}{6} \frac{rad}{h}$

II: La velocidad angular del minuterio es. $\omega_M = \frac{2\pi}{1h} = 2\pi \frac{rad}{h}$

III: El horario gira: $\theta_H = \omega_H t \Rightarrow \left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) rad = \left(\frac{\pi}{6} \frac{rad}{h}\right) t$

Despejando el tiempo transcurrido: $t = \frac{\alpha}{30} (h)$

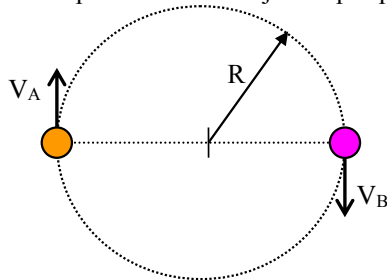
IV: El minuterio gira: $\theta_M = \omega_M t$

$$\left((90^\circ + \alpha + 6\alpha) \cdot \frac{\pi}{180}\right) rad = \left(2\pi \frac{rad}{h}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{30} h\right)$$

Despejando tenemos: $\alpha = 18 \Rightarrow t = \frac{18}{30} h = \frac{3}{5} h$

$t = 36 \text{ min} \Rightarrow \text{Respuesta : } 3h \ 36 \text{ min}$

4. *Dos móviles A y B parten de dos puntos diametralmente opuestos de una pista circular con rapidez angular de $\pi/2$ rad/s y $\pi/3$ rad/s en el mismo sentido. ¿Después de que intervalo de tiempo se encuentran juntos por primera vez?



Para el problema 04

RESOLUCION

PRIMER PASO. El móvil A que es más veloz, debe sacarle una ventaja de media vuelta para alcanzar al móvil más lento.

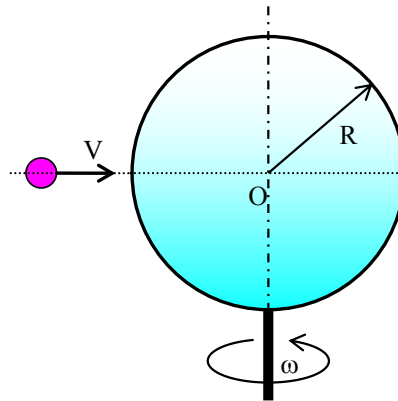
SEGUNDO PASO. Planteamiento del problema. Ecuación de arcos de circunferencia.

$$\theta_A - \theta_B = \pi \Rightarrow (\omega_A - \omega_B)t = \pi$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)t = \pi \Rightarrow t = 6s$$

Respuesta: Lo alcanza después de 6 segundos.

5. *Una esfera hueca de radio 0,5 m gira alrededor de un eje vertical que pasa por su centro con frecuencia de 100 R.P.S. Un proyectil se dispara de tal modo que pasa por el centro geométrico. Determinar la máxima rapidez (en m/s) que el proyectil tal que, atravesase haciendo un solo agujero.



Para el problema 05

RESOLUCION

PRIMER PASO. De la condición del problema el proyectil hace un solo agujero, entonces el ángulo de giro puede ser: $\theta = \pi; 3\pi; 5\pi; \dots$

SEGUNDO PASO. Si la velocidad del proyectil es máxima, entonces el desplazamiento angular del agujero es $\theta = \pi$

TERCER PASO. el tiempo empleado por el cascaron en dar media vuelta es el mismo tiempo empleado por el proyectil en recorrer el diámetro de 1 metro de largo.

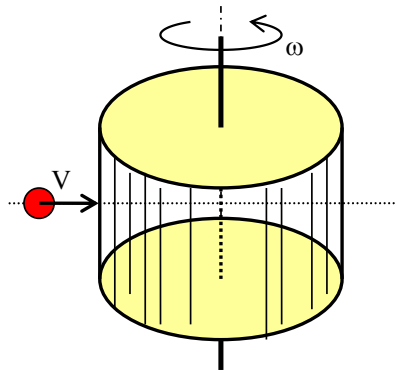
CUARTO PASO. El agujero da 100 vueltas en un segundo, por consiguiente, gira $\frac{1}{2}$ vuelta en $\frac{1}{200}$ segundo

QUINTO PASO. Aplicamos la ley del MRU al proyectil:

$$V_{BALA} = \frac{d}{t} \Rightarrow V_{BALA} = \frac{1m}{\frac{1}{200}s} = 200 m.s^{-1}$$

Respuesta: La máxima velocidad del proyectil es 200 m/s

6. *Un cilindro hueco de radio de curvatura 0,4 m gira con frecuencia de 150 R.P.S respecto del eje vertical. Se dispara un proyectil horizontalmente, de modo que pasa por el eje de rotación. Calcular la máxima rapidez del proyectil (en m/s), tal que atraviese haciendo un solo agujero.



Para el problema 06

RESOLUCION

PRIMER PASO. De la condición del problema el proyectil hace un solo agujero, entonces el ángulo de giro puede ser: $\theta = \pi; 3\pi; 5\pi; \dots$

SEGUNDO PASO. Si la velocidad del proyectil es máxima, entonces el desplazamiento angular del agujero es $\theta = \pi$

TERCER PASO. El tiempo empleado por el cilindro en dar media vuelta es el mismo tiempo empleado por el proyectil en recorrer el diámetro de 0,8 metro de largo.

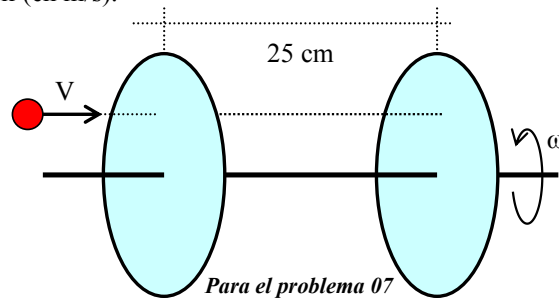
CUARTO PASO. El agujero da 150 vueltas en un segundo, por consiguiente, gira $\frac{1}{2}$ vuelta en $\frac{1}{300}$ segundo

QUINTO PASO. Aplicamos la ley del M.R.U al proyectil:

$$V_{BALA} = \frac{d}{t} \Rightarrow V_{BALA} = \frac{0,8m}{\frac{1}{300}s} = 240 m.s^{-1}$$

Respuesta: La máxima velocidad del proyectil es 240 m/s

7. *Sobre un eje horizontal que gira con frecuencia de 1 200 R.P.M se tiene montado dos discos separados una distancia de 25 cm. Se dispara un proyectil paralelamente al eje, tal que perfora los dos discos, notándose que el segundo agujero se desvía 12° respecto del primero. Determine la rapidez del proyectil (en m/s).



RESOLUCION

PRIMER PASO. El tiempo que demora el proyectil en desplazarse del primer al segundo agujero, es el mismo tiempo que emplean los discos en girar un ángulo de 12° o $\theta = \frac{\pi}{15}$

SEGUNDO PASO. El tiempo empleado por el disco en dar 1200 vueltas en 1 minuto, es decir, da 20 vueltas en un segundo. Da 1 vuelta en $\frac{1}{20}$ segundo.

$$\omega = \frac{\theta}{t} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{1}{20}s} = 40\pi \text{ s}^{-1}$$

TERCER PASO. El tiempo que demora el agujero en girar un ángulo de 12° .

$$t = \frac{\theta}{\omega} \Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{15}}{40\pi} = \frac{1}{600} \text{ s}$$

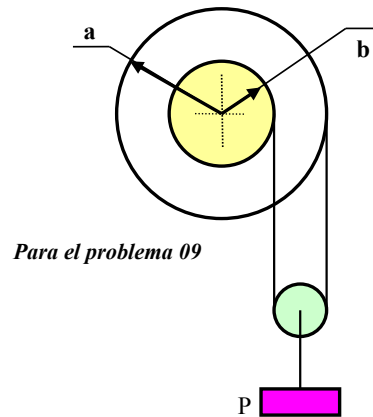
CUARTO PASO. Aplicamos la ley del M.R.U al proyectil:

$$V_{BALA} = \frac{d}{t} \Rightarrow V_{BALA} = \frac{25 \text{ cm}}{\frac{1}{600} \text{ s}} = 150 \text{ m.s}^{-1}$$

Respuesta. La velocidad del proyectil es 150 m/s

8. Un cilindro hueco de 3 m de largo gira alrededor de un eje horizontal con velocidad angular constante a razón de 180 R.P.M. Una bala disparada paralelamente al eje de rotación perfora las bases en dos puntos, cuyos radios forman un ángulo de 8° . Calcular la velocidad de la bala.
- A) 105 m/s B) 205 C) 305 **D) 405** E) ninguna

9. *Se muestra dos poleas concéntricas de radios $a = 20 \text{ cm}$ y $b = 10 \text{ cm}$, que giran en sentido horario a razón de 4 rad/s . La polea móvil se encuentra sostenida mediante una cuerda cuyos extremos están enrollados a las poleas fijas. Determine la rapidez (en m/s) con que baja el bloque P.



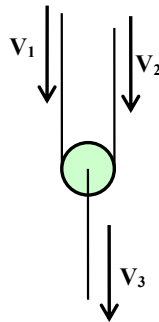
RESOLUCION

PRIMER PASO. la velocidad de los puntos (1) y (2) en las cuerdas, es igual a la velocidad lineal de los puntos periféricos de las poleas respectivas. $V = \omega.R$

Para el punto (1): $V_1 = \omega.b = (4).(10) = 40 \text{ cm.s}^{-1}$

Para el punto (2): $V_2 = \omega.a = (4).(20) = 80 \text{ cm.s}^{-1}$

Resolución del problema 21

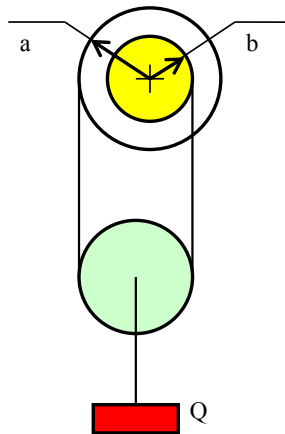


SEGUNDO PASO. Propiedad de la polea móvil. La velocidad del punto (3) es la semisuma vectorial de las velocidades de los puntos (1) y (2).

$$\vec{V}_3 = \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{2} \Rightarrow \vec{V}_3 = \frac{(-40.j) + (-80.j)}{2} = 60(-j) \text{ cm.s}^{-1}$$

Respuesta. El bloque P desciende con rapidez de 60 cm/s

10. *Se muestra dos poleas concéntricas de radios $a = 20$ cm y $b = 10$ cm. Si las poleas giran en sentido horario con rapidez angular constante de 6 rad/s, determinar la rapidez (en m/s) del bloque Q.



Para el problema 10

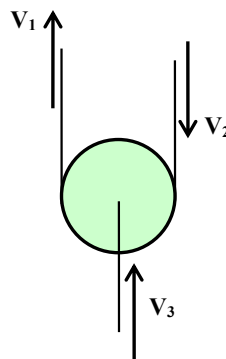
RESOLUCION

PRIMER PASO. la velocidad de los puntos (1) y (2) en las cuerdas, es igual a la velocidad lineal de los puntos periféricos de las poleas respectivas. $V = \omega.R$

Para el punto (1): $V_1 = \omega.a = (6).(20) = 120 \text{ cm.s}^{-1}$

Para el punto (2): $V_2 = \omega.b = (6).(10) = 60 \text{ cm.s}^{-1}$

Resolución del problema 22

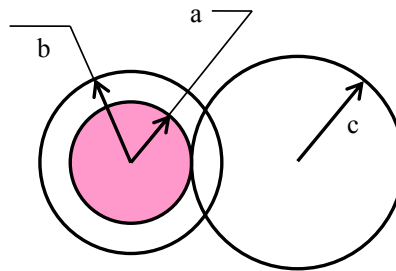


SEGUNDO PASO. Propiedad de la polea móvil. La velocidad del punto (3) es la semisuma vectorial de las velocidades de los puntos (1) y (2).

$$\vec{V}_3 = \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{2} \Rightarrow \vec{V}_3 = \frac{(+120.j) + (-60.j)}{2} = 30(+j) \text{ cm.s}^{-1}$$

Respuesta. El bloque Q asciende con rapidez de 30 cm/s.

11. *Se muestra tres discos A, B y C de radios $a = 2 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ y $c = 5 \text{ cm}$, donde A y B son concéntricos y además A y C son tangentes. Si el disco de radio “c” gira con rapidez angular de 3 rad/s en sentido horario, determinar el módulo de la velocidad (en cm/s) de los puntos periféricos del disco B.



Para el problema 11

RESOLUCION

PRIMER PASO. Los discos A y C son tangentes, por consiguiente, sus puntos periféricos tienen igual velocidad tangencial.

$$V_A = V_C \Rightarrow \omega_A \cdot R_A = \omega_C \cdot R_C$$

$$\omega_A \cdot (2 \text{ cm}) = (3 \text{ rad.s}^{-1}) \cdot (5 \text{ cm}) \Rightarrow \omega_A = 7,5 \text{ rad.s}^{-1}$$

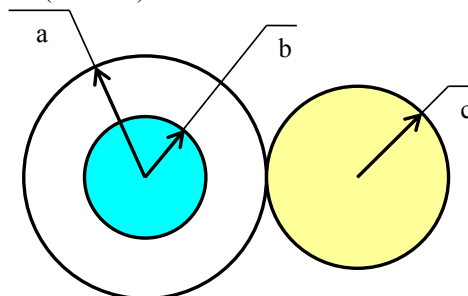
SEGUNDO PASO. los discos A y B son concéntricos, por consiguiente, tienen igual velocidad angular: $\omega_A = \omega_B = 7,5 \text{ rad.s}^{-1}$

TERCER PASO. Calculo de la velocidad tangencial del disco B.

$$V_B = \omega_B \cdot R_B \Rightarrow V_B = (7,5) \cdot (4) = 30 \text{ cm.s}^{-1}$$

Respuesta. La velocidad tangencial de los puntos periféricos del disco B es 30 cm/s .

12. *Se muestra tres discos A, B y C de radios $a = 6 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ y $c = 4 \text{ cm}$, donde A y B son concéntricos y además A y C son tangentes. Si el disco de radio “b” gira a razón de 120 R.P.M , determinar la rapidez angular (en rad/s) del disco de radio “c”.



Para el problema 12

RESOLUCION

PRIMER PASO. Los discos A y B son concéntricos, por consiguiente, tienen igual velocidad angular. El disco B gira 120 vueltas en 1 minuto, 2 vueltas en 1 segundo

$$\omega_A = \omega_B = \frac{\theta}{t} = \frac{4\pi}{1} = 4\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

SEGUNDO PASO. Los discos A y C son tangentes, por consiguiente, tienen igual velocidad tangencial en sus puntos periféricos.

$$V_A = V_C \Rightarrow \omega_A \cdot R_A = \omega_C \cdot R_C$$

$$(4\pi) \cdot (6) = \omega_C \cdot (4) \Rightarrow \omega_C = 6\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

Respuesta: La velocidad angular del disco C es $6\pi \text{ rad.s}^{-1}$

13. Se lanzan dos satélites alrededor de la Tierra, uno de ellos A se ve fijo y el otro B se observa que da dos vueltas por día. Determinar la relación entre sus velocidades angulares, visto por un observador fuera del planeta Tierra.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Si el satélite A se ve fijo desde la Tierra, esto quiere decir que ambos tienen la misma velocidad angular.

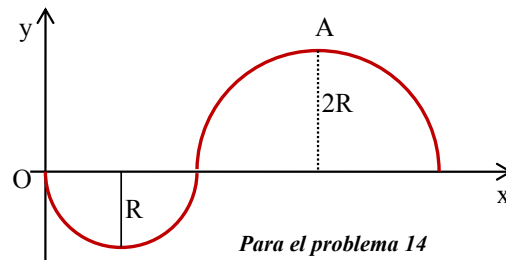
$$\omega_A = \omega_{\text{TERRA}} = \omega \dots (1)$$

SEGUNDO PASO. La velocidad angular del satélite B es el triple de la velocidad angular de la Tierra, razón por el cual da dos vueltas por día respecto de un observador ubicado en la superficie de la Tierra.

$$\omega_B = 3\omega \dots (2)$$

Respuesta: podemos afirmar que la relación es de 1:3

14. *Una partícula recorre la trayectoria mostrada, formada por dos semicircunferencias, con velocidad tangencial constante en 3 segundos. Sabiendo que $R = 1 \text{ m}$, encontrar el módulo de la aceleración centrípeta en el punto A en m/s^2 .



RESOLUCION

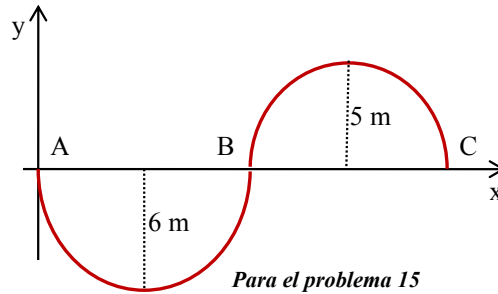
PRIMER PASO. En el intervalo de 3 segundos el móvil recorre un camino $e = 3\pi \text{ m}$, por consiguiente, el módulo de la velocidad lineal es, $V = 3\pi \text{ m.s}^{-1}$

SEGUNDO PASO. La aceleración centrípeta en el punto A es,

$$a_c = \frac{V^2}{(2R)} = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow a_c = \frac{\pi^2}{2} \text{ m.s}^{-2}$$

Respuesta: el valor de la aceleración centrípeta es $4,93 \text{ m.s}^{-2}$

15. *Un móvil recorre la trayectoria ABC con módulo de velocidad constante por el tramo de arco AB y para el tramo de arco BC. Se sabe que el módulo de la aceleración en el arco AB es 6 m/s^2 y en el arco BC 5 m/s^2 . Determinar el intervalo de tiempo (en s) que demora en el recorrido total ABC.



RESOLUCION

PRIMER PASO. La aceleración centrípeta en el arco AB es,

$$a_c = \frac{V^2}{R} \Rightarrow 6 = \frac{(V_{AB})^2}{6} \Rightarrow V_{AB} = 6 \text{ m.s}^{-1}$$

SEGUNDO PASO. La aceleración centrípeta en el arco BC es,

$$a_c = \frac{V^2}{R} \Rightarrow 5 = \frac{(V_{BC})^2}{5} \Rightarrow V_{BC} = 5 \text{ m.s}^{-1}$$

TERCER PASO. Cálculo del tiempo transcurrido en el arco AB,

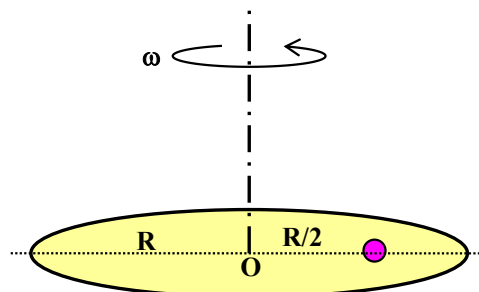
$$t = \frac{e}{V} \Rightarrow t_{AB} = \frac{6\pi}{6} \Rightarrow t_{AB} = \pi \text{ s}$$

CUARTO PASO. Cálculo del tiempo transcurrido en el arco BC,

$$t = \frac{e}{V} \Rightarrow t_{BC} = \frac{5\pi}{5} \Rightarrow t_{BC} = \pi \text{ s}$$

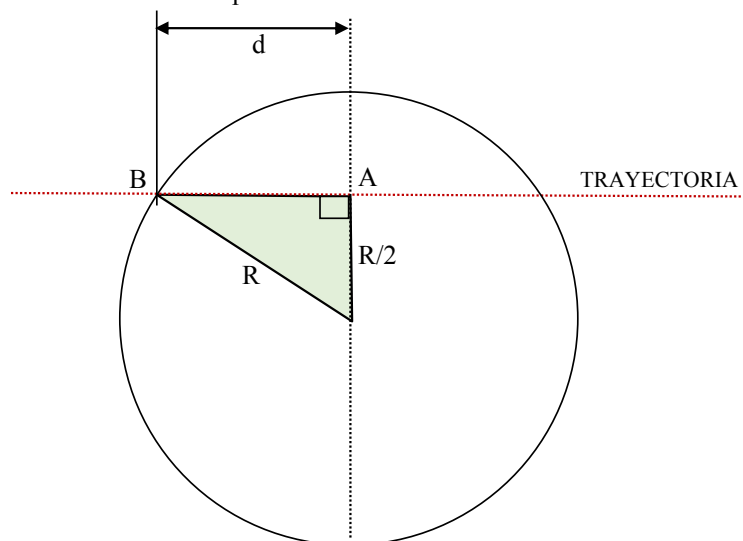
Respuesta. El tiempo total transcurrido es 6,28 segundos.

16. Una moneda se encuentra clavada a un disco de radio R que gira con velocidad angular constante de $0,5 \text{ rad/s}$. La moneda se encuentra a una distancia $R/2$ del centro de rotación. No hay rozamiento. Determinar el tiempo que demora la moneda en abandonar el disco, cuando retiramos el clavo.



RESOLUCION

PRIMER PASO. Cuando retiramos el clavo, respecto de un observador en la tierra, la velocidad lineal constante es igual a $V = \omega(R/2)$ y se desplaza en un tiempo "t" una distancia $d = R\sqrt{3}/2$, hasta abandonar la superficie horizontal lisa.

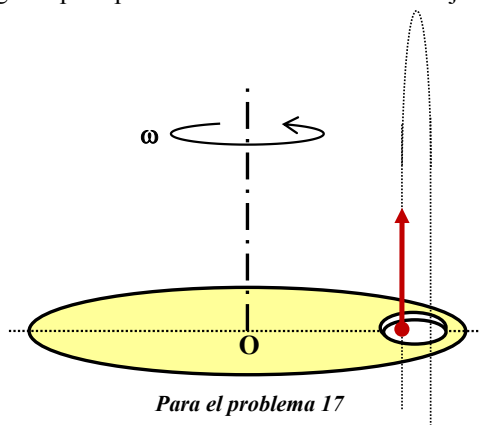
**Resolución del problema 16**

SEGUNDO PASO. Aplicamos las leyes del MRU en el tramo AB. Cálculo del tiempo.

$$t = \frac{d}{V} \Rightarrow t = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\frac{\omega R}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{0,5} = 2\sqrt{3} \text{ s}$$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 3,46 segundos.

17. Si la bala atraviesa el orificio del disco mostrado con velocidad lineal de $V_0 = 100\pi \text{ m.s}^{-1}$ hacia arriba, ¿Cuál deberá ser la mínima velocidad angular constante con la que está girando el disco, para que la bala de regreso pase por el mismo orificio hacia abajo? $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$



Para el problema 17

RESOLUCION

PRIMER PASO. Determinamos el tiempo de vuelo, del proyectil empleado en alcanzar su altura máxima y regresar al orificio.

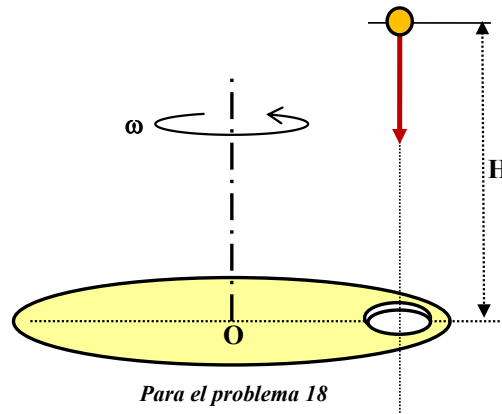
$$t_{VUELO} = \frac{2 \cdot V_0}{g} \Rightarrow t_{VUELO} = \frac{2 \cdot (100\pi)}{10} = 20\pi \text{ s}$$

SEGUNDO PASO. La velocidad angular del disco será mínima cuando en el mismo tiempo describe un ángulo de una vuelta.

$$\omega = \frac{\theta}{t} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{20\pi} = 0,1 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

Respuesta: la mínima velocidad angular es 0,1 rad/s.

18. Un disco que tiene un agujero a 50 cm de su centro geométrico, gira con velocidad angular constante respecto de un eje vertical, desde una altura $H = 1,25 \text{ m}$ se abandona una bolita en el instante en que el agujero y la bolita están en la misma línea vertical. Determinar la mínima velocidad angular del disco, tal que, la bolita puede pasar por el agujero. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

**RESOLUCION**

PRIMER PASO. El tiempo que demora la bolita en recorrer 1,25 m, es el mismo tiempo que demora el disco en dar una vuelta completa.

SEGUNDO PASO. Aplicamos las leyes de caída libre vertical, saliendo la bolita del reposo.

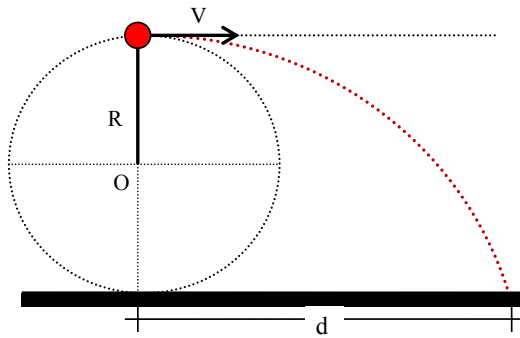
$$H = V_0 t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 1,25 = 0 + \frac{1}{2} \cdot (10) \cdot t^2 \Rightarrow t = 0,5 \text{ s}$$

TERCER PASO. Cálculo de la velocidad angular del disco:

$$\omega = \frac{\theta}{t} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

Respuesta: la rapidez angular es 12,57 rad/s

19. *Una piedra atada a una cuerda de 2,5 m de longitud gira en un plano vertical con rapidez angular constante de 2 rad/s. En el instante que pasa por el punto más alto se rompe la cuerda, determinar el desplazamiento horizontal "d" (en m) que experimenta la piedra hasta llegar al piso. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$



Para el problema 19

RESOLUCION

PRIMER PASO. Cálculo de la velocidad tangencial en el punto más alto.

$$V = \omega.R \Rightarrow V = (2).(2,5) = 5 \text{ m.s}^{-1}$$

SEGUNDO PASO. Inmediatamente que se rompe la cuerda, la piedra describe un movimiento parabólico, la velocidad de lanzamiento es horizontal de valor 5 m/s. La altura que desciende es 5 metros hasta llegar al piso.

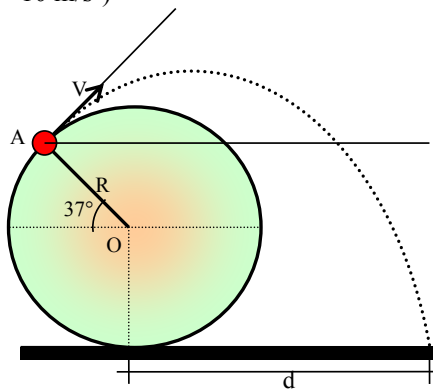
$$H = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 5 = 0 + \frac{1}{2} (10) t^2 \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

TERCER PASO. Aplicamos las leyes del MRU en el tramo horizontal.

$$d = V_x t \Rightarrow d = (5).(1) = 5 \text{ m}$$

Respuesta: el desplazamiento horizontal es 5 metros.

20. *Una rueda de radio 5 m rota con rapidez angular constante de 2 rad/s respecto de un eje fijo. Si en la posición A se desprende de la rueda una partícula, determinar la altura máxima (en m) que alcanza respecto del piso. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Para el problema 20

RESOLUCION

PRIMER PASO. Inmediatamente que se rompe la cuerda, la piedra describe un movimiento parabólico, la velocidad de lanzamiento es 10 m/s que forma con la horizontal un ángulo de 53° respecto de la horizontal. La altura que desciende es 8 metros hasta llegar al piso.

SEGUNDO PASO. Cálculo de la velocidad tangencial en el punto más alto.

$$V = \omega.R \Rightarrow V = (2).(5) = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\vec{V} = (10.\cos 53^\circ; 10.\sin 53^\circ) = (6; 8) \text{ m.s}^{-1}$$

TERCER PASO. La posición de la piedra en A, respecto de un sistema de referencia en el piso es:

$$P_A = (-R.\cos 37^\circ; R + R.\sin 37^\circ) = (-4; 8) \text{ m}$$

CUARTO PASO. La altura máxima sobre el punto A es,

$$h = \frac{(V_{0y})^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{(8)^2}{2(10)} = 3,2 \text{ m}$$

$$H = 8 + h = 8 + 3,2 = 11,2 \text{ m}$$

Respuesta: La altura máxima respecto del piso es 11,2 m.

21. ¿Con qué velocidad respecto de la tierra deberá volar un avión en el Ecuador de Este a Oeste, para que a sus pasajeros les parezca que el Sol esté fijo en el firmamento? El radio de órbita del avión es 6396 km.

RESOLUCION

PRIMER PASO. La velocidad angular del avión debe ser igual a la velocidad angular de la tierra, pero en sentido opuesto.

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{24h} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{12h} \left(\frac{\text{rad}}{h} \right)$$

SEGUNDO PASO. La velocidad lineal del avión respecto de la tierra es,

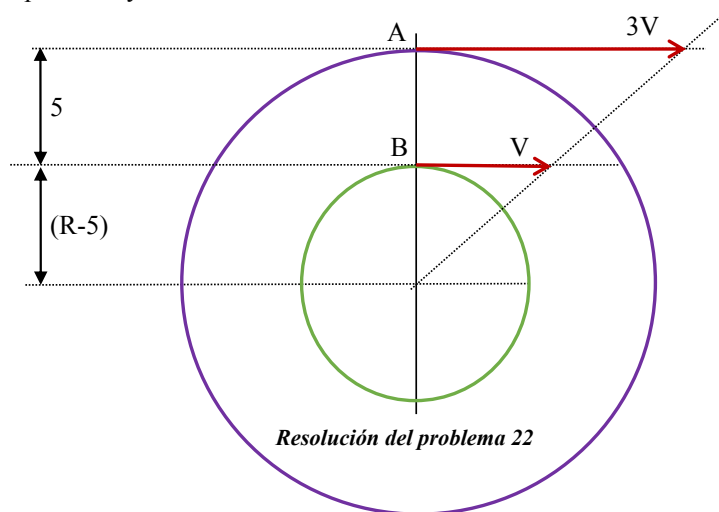
$$V = \omega.R \Rightarrow V = \left(\frac{\pi}{12h} \right). (6396 \text{ km}) = 1663,7 \frac{\text{km}}{h}$$

Respuesta: la velocidad del avión debe ser 1663,7 km/h.

22. Un disco gira con una velocidad angular constante, si los puntos periféricos tienen el triple de velocidad que los puntos que se encuentran 5 cm más cerca al centro del disco. Calcular el radio del disco.

RESOLUCION

PRIMER PASO. Hacemos en un diagrama donde se muestran los puntos periféricos y la velocidad de los puntos A y B.



Resolución del problema 22

SEGUNDO PASO. La velocidad tangencial es igual al producto de la velocidad angular por el radio. Para el punto A:

$$V_A = \omega.R_A \Rightarrow 3V = \omega.R \dots (1)$$

SEGUNDO PASO. La velocidad tangencial es igual al producto de la velocidad angular por el radio. Para el punto B:

$$V_B = \omega.R_B \Rightarrow V = \omega.(R-5) \dots (2)$$

TERCER PASO. Dividiendo las ecuaciones (1) y (2):

$$\frac{3}{1} = \frac{R}{R-5} \Rightarrow R = 7,5 \text{ cm}$$

Respuesta: el radio del disco es 7,5 cm.

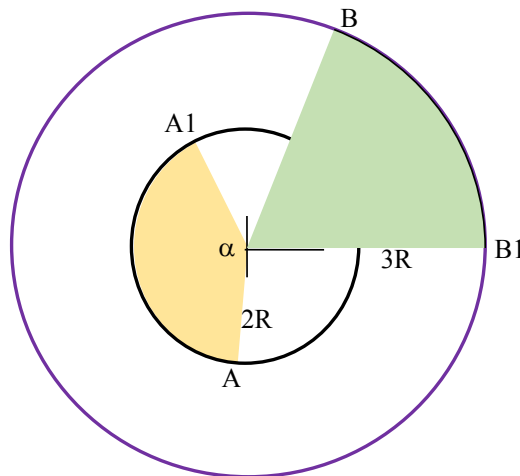
23. Un disco gira con velocidad angular constante. La velocidad lineal de los puntos periféricos del disco es 6 m/s y la velocidad lineal de los puntos situados a una distancia de 0,15 m mas cerca al eje es 5,5 cm/s. Determinar el radio del disco.

A) 2,8 m B) 2,4 **C) 1,8** D) 1,2 E) ninguna

24. Dos satélites A y B describen trayectorias circunferenciales concéntricas de radios de curvatura $2R$ y $3R$ respectivamente. Si los vectores posición respecto del centro de curvatura de A y de B describen áreas iguales en tiempos iguales. Determinar la relación entre sus velocidades angulares.

RESOLUCION

PRIMER PASO. El área de un sector circular es directamente proporcional al cuadrado del radio de curvatura.



Resolución del problema 24

SEGUNDOM PASO. Igualamos las áreas descritas por A y B en un tiempo “t”.

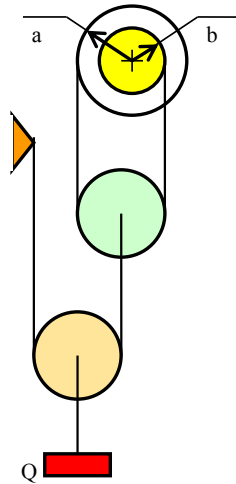
$$A_\alpha = A_\beta \Rightarrow \frac{\alpha(2R)^2}{2} = \frac{\beta(3R)^2}{2} \Rightarrow 4\alpha = 9\beta$$

TERCER PASO. Calculo de la velocidad angular de los satélites.

$$4\left(\frac{\alpha}{t}\right) = 9\left(\frac{\beta}{t}\right) \Rightarrow 4.\omega_A = 9.\omega_B \Rightarrow \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{9}{4}$$

Respuesta. La relación de las velocidades angulares está, 9:4.

25. Se muestra dos poleas concéntricas de radios $a = 20 \text{ cm}$ y $b = 10 \text{ cm}$. Si las poleas giran en sentido horario con rapidez angular constante de 6 rad/s , determinar la rapidez (en m/s) del bloque Q.



Para el problema 25

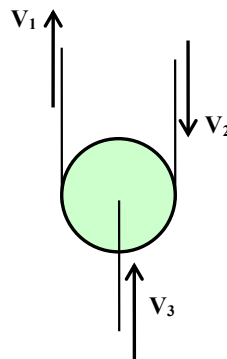
RESOLUCION

PRIMER PASO. la velocidad de los puntos (1) y (2) en las cuerdas, es igual a la velocidad lineal de los puntos periféricos de las poleas respectivas. $V = \omega.R$

Para el punto (1): $V_1 = \omega.a = (6).(20) = 120 \text{ cm.s}^{-1}$

Para el punto (2): $V_2 = \omega.b = (6).(10) = 60 \text{ cm.s}^{-1}$

Resolución del problema 25.1



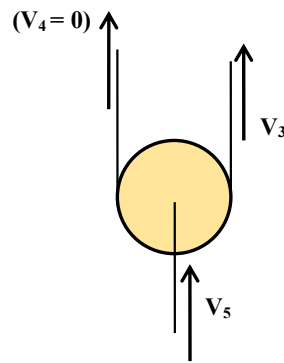
SEGUNDO PASO. Propiedad de la polea móvil. La velocidad del punto (3) es la semisuma vectorial de las velocidades de los puntos (1) y (2).

$$\vec{V}_3 = \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{2} \Rightarrow \vec{V}_3 = \frac{(+120.j) + (-60.j)}{2} = 30(+j) \text{ cm.s}^{-1}$$

TERCER PASO. Propiedad de la polea móvil. La velocidad del punto (5) es la semisuma vectorial de las velocidades de los puntos (3) y (4).

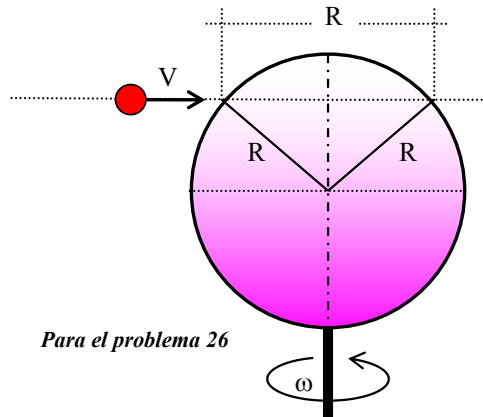
$$\vec{V}_5 = \frac{\vec{V}_3 + \vec{V}_4}{2} \Rightarrow \vec{V}_5 = \frac{(+30.j) + (0.j)}{2} = 15(+j) \text{ cm.s}^{-1}$$

Resolución del problema 25.2



Respuesta. El bloque Q asciende con rapidez de 15 cm/s.

26. Una esfera hueca de radio 1,0 m gira alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Un proyectil se desplaza con velocidad de 400 i (m/s) perpendicularmente al eje, perforando a la esfera en un punto cuyo radio forma 30° con el eje vertical. Determinar la mínima rapidez angular (en rad/s) que debe tener la esfera para que el proyectil entre y salga por el mismo agujero.



Para el problema 26

RESOLUCION

PRIMER PASO. De la condición del problema el proyectil hace un solo agujero, entonces el ángulo de giro puede ser: $\theta = \pi; 3\pi; 5\pi; \dots$

SEGUNDO PASO. Si la velocidad del proyectil es máxima, entonces el desplazamiento angular del agujero es $\theta = \pi$

TERCER PASO. El tiempo empleado por el cascaron en dar media vuelta es el mismo tiempo empleado por el proyectil en recorrer la distancia R del metro de largo.

CUARTO PASO. Aplicamos la ley del M.R.U al proyectil:

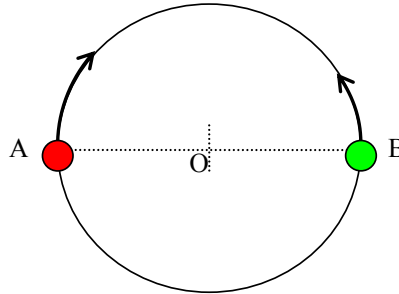
$$t = \frac{d}{V_{BALA}} \Rightarrow t = \frac{1m}{400 m.s^{-1}} = \frac{1}{400} s$$

QUINTO CASO. Calculo la velocidad angular de la esfera.

$$\omega = \frac{\theta}{t} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{\frac{1}{400}} = 400\pi \left(\frac{rad}{s} \right)$$

Respuesta: La velocidad angular del cascarón es $400\pi \text{ rad} / s$.

27. *Dos partículas realizan un M.C.U en sentidos opuestos tal como se muestra; si sus periodos son: $T_A = 10 \text{ min}$ y $T_B = 20 \text{ min}$ ¿luego de cuántos minutos desde la posición mostrada se cruzarán por segunda vez?



Para el problema 27

RESOLUCION

PRIMER PASO. Cálculo de la velocidad angular de cada partícula:

Para el móvil A: $\omega_A = \frac{2\pi}{T_A}$

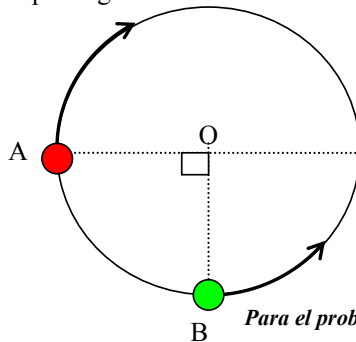
Para el móvil B: $\omega_B = \frac{2\pi}{T_B}$

SEGUNDO PASO. Se cruzan por primera vez cuando los desplazamientos suman $\pi \text{ rad}$ y por segunda vez cuando los desplazamientos suman $3\pi \text{ rad}$.

$$\begin{aligned}\theta_A + \theta_B &= 3\pi \Rightarrow \omega_A t + \omega_B t = 3\pi \\ \frac{2\pi}{T_A} t + \frac{2\pi}{T_B} t &= 3\pi \Rightarrow \frac{t}{T_A} + \frac{t}{T_B} = \frac{3}{2} \\ t &= \frac{3}{2} \left(\frac{T_A \cdot T_B}{T_A + T_B} \right) \Rightarrow t = \frac{3}{2} \left(\frac{10 \cdot 20}{10 + 20} \right) = 10 \text{ min}\end{aligned}$$

Respuesta: se cruzan por segunda vez después de 10 minutos.

28. Dos partículas realizan un M.C.U en sentidos opuestos tal como se muestra; si sus periodos son: $T_A = 15 \text{ min}$ y $T_B = 20 \text{ min}$ y salen simultáneamente. ¿Después de cuántos minutos desde la posición mostrada se cruzarán por segunda vez?



Para el problema 28

RESOLUCION

PRIMER PASO. Cálculo de la velocidad angular de cada partícula:

Para el móvil A: $\omega_A = \frac{2\pi}{T_A}$

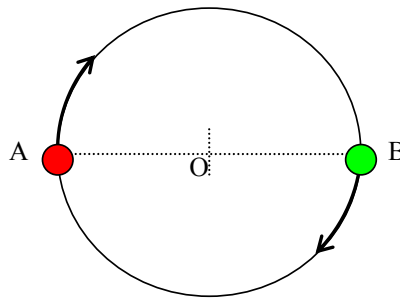
Para el móvil B: $\omega_B = \frac{2\pi}{T_B}$

SEGUNDO PASO. Se cruzan por primera vez cuando los desplazamientos suman $3\pi/2 \text{ rad}$ y por segunda vez cuando los desplazamientos suman $7\pi/2 \text{ rad}$.

$$\begin{aligned}\theta_A + \theta_B &= \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \omega_A t + \omega_B t = \frac{7\pi}{2} \\ \frac{2\pi}{T_A} t + \frac{2\pi}{T_B} t &= \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{T_A} + \frac{t}{T_B} = \frac{7}{4} \\ t &= \frac{7}{4} \left(\frac{T_A \cdot T_B}{T_A + T_B} \right) \Rightarrow t = \frac{7}{4} \left(\frac{15 \cdot 20}{15 + 20} \right) = 15 \text{ min}\end{aligned}$$

Respuesta: se cruzan por segunda vez después de 15 minutos.

29. Dos partículas realizan un M.C.U en sentidos opuestos tal como se muestra; si sus periodos son: $T_A = 15 \text{ min}$ y $T_B = 20 \text{ min}$ y salen simultáneamente. ¿Después de cuántos minutos desde la posición mostrada se cruzarán por segunda vez?



Para el problema 29

RESOLUCION

PRIMER PASO. Cálculo de la velocidad angular de cada partícula:

Para el móvil A: $\omega_A = \frac{2\pi}{T_A}$

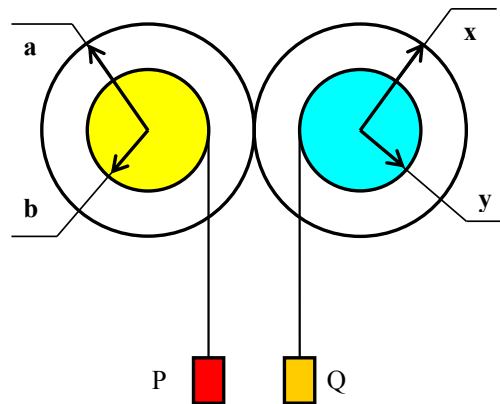
Para el móvil B: $\omega_B = \frac{2\pi}{T_B}$

SEGUNDO PASO. Se cruzan por primera vez cuando los desplazamientos se diferencian $\pi \text{ rad}$ y por segunda vez cuando los desplazamientos se diferencian en $3\pi \text{ rad}$.

$$\begin{aligned}\theta_A - \theta_B &= 3\pi \Rightarrow \omega_A t - \omega_B t = 3\pi \\ \frac{2\pi}{T_A} t - \frac{2\pi}{T_B} t &= 3\pi \Rightarrow \frac{t}{T_A} - \frac{t}{T_B} = \frac{3}{2} \\ t &= \frac{3}{2} \left(\frac{T_A \cdot T_B}{T_B - T_A} \right) \Rightarrow t = \frac{3}{2} \left(\frac{15 \cdot 20}{20 - 15} \right) = 90 \text{ min}\end{aligned}$$

Respuesta: se cruzan por segunda vez después de 90 minutos.

30. *Se muestra un conjunto de poleas concéntricas, entre las poleas tangentes no hay deslizamiento. Si el bloque **P** baja con rapidez de 5 cm/s, determinar la rapidez del bloque **Q** (en cm/s). Los radios son los siguientes: $a = 60$ cm, $b = 30$ cm, $x = 40$ cm, $y = 20$ cm.



Para el problema 30

RESOLUCION

PRIMER PASO. Las poleas concéntricas de radios “a” y “b” giran en sentido horario y el bloque P desciende. Las poleas concéntricas de radios “x” e “y” giran en sentido antihorario, por consiguiente, el bloque Q desciende.

SEGUNDO PASO. Las poleas concéntricas de radios “a” y “b” tienen la misma velocidad angular:

$$\omega_A = \omega_B \Rightarrow \omega_B = \frac{V_P}{b} = \frac{5 \text{ cm.s}^{-1}}{30 \text{ cm}} = \frac{1}{6} \text{ s}^{-1}$$

TERCER PASO. Cálculo de la velocidad tangencial del disco de radio “b”.

$$V_A = \omega_A \cdot R_A \Rightarrow V_A = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot (60) = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

CUARTO PASO. Los discos de radios “a” y “x”, son tangentes, por consiguiente, los puntos periféricos tienen la misma velocidad tangencial.

$$V_A = V_X = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

QUINTO PASO. Las poleas concéntricas de radios “x” e “y” tienen la misma velocidad angular:

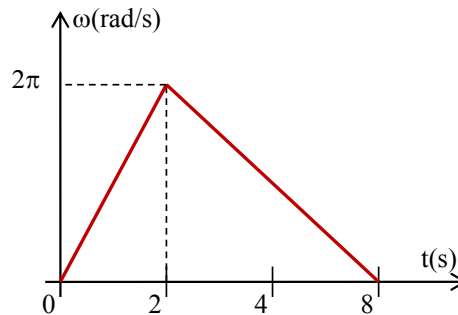
$$\omega_X = \omega_Y \Rightarrow \omega_X = \frac{V_X}{x} = \frac{10 \text{ cm.s}^{-1}}{40 \text{ cm}} = \frac{1}{4} \text{ s}^{-1}$$

SEXTO PASO. Cálculo de la velocidad tangencial del disco de radio “y”, que tiene el mismo valor de la velocidad del bloque Q.

$$V_Y = \omega_Y \cdot R_Y \Rightarrow V_A = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot (20) = 5 \text{ m.s}^{-1}$$

Respuesta. El bloque Q desciende con rapidez de 5 cm/s.

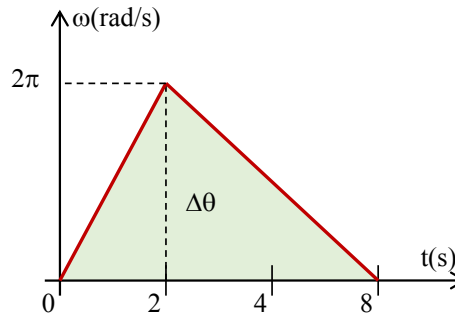
31. *Un disco experimenta un movimiento de rotación variado, cuya rapidez angular varía en el tiempo como se muestra. Determinar el número de revoluciones que gira en los 8 primeros segundos.



Para el problema 31

RESOLUCION

PRIMER PASO. En la gráfica velocidad angular versus tiempo, el área debajo de la curva nos da el desplazamiento angular.



Resolución del problema 31

SEGUNDO PASO. Cálculo del área del triángulo:

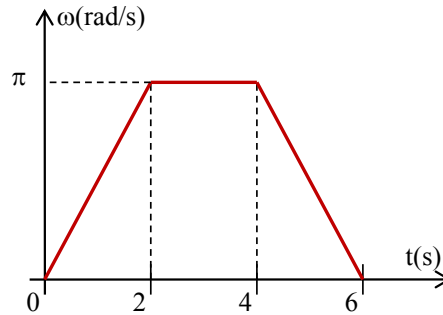
$$\Delta\theta = Area \Rightarrow \theta = \frac{b.h}{2} = \frac{(8s) \cdot (2\pi s^{-1})}{2} = 8\pi$$

TERCER PASO. Cálculo del número de revoluciones en los primeros 8 segundos.

$$N^{\circ}.R = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N^{\circ}.R = \frac{8\pi}{2\pi} = 4$$

Respuesta: Gira 4 vueltas en 8 segundos.

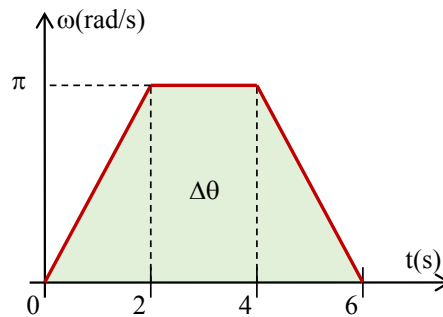
32. *Un disco experimenta un movimiento de rotación variado, cuya rapidez angular varía en el tiempo como muestra la gráfica. Determinar el número de revoluciones que gira en los 6 primeros segundos.



Para el problema 32

RESOLUCION

PRIMER PASO. En la gráfica velocidad angular versus tiempo, el área debajo de la curva nos da el desplazamiento angular



Para el problema 32

SEGUNDO PASO. Cálculo del área del trapecio:

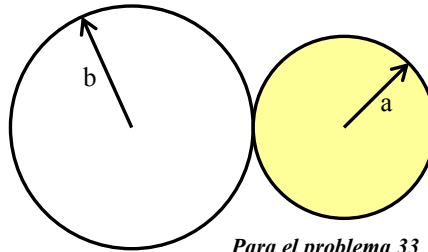
$$\Delta\theta = Area \Rightarrow \theta = \frac{(b+B) \cdot h}{2} = \frac{(2+6) \cdot (\pi)}{2} = 4\pi$$

TERCER PASO. Cálculo del número de revoluciones en los primeros 8 segundos.

$$N^\circ \cdot R = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N^\circ \cdot R = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$$

Respuesta: Gira 2 vueltas en 6 segundos.

33. La polea A de 1,2 m de radio que gira en sentido antihorario, transmite su movimiento a la polea B de 1,6 m de radio, de tal manera que el módulo de la resultante de sus velocidades angulares es $\pi \text{ rad/s}$. ¿Al cabo de cuántos segundos del instante mostrado, los puntos de contacto señalados vuelven a coincidir por segunda vez?



RESOLUCION

PRIMER PASO. La velocidad angular es una cantidad vectorial, cuyo sentido se determina aplicando la regla de la mano derecha.

SEGUNDO PASO. Si el disco A gira en sentido antihorario el vector velocidad angular $\vec{\omega}_A$ es saliendo del plano.

TERCER CASO. Si el disco B gira en sentido horario el vector velocidad angular $\vec{\omega}_B$ es ingresando al plano.

$$\omega_A - \omega_B = \pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \dots (1)$$

CUARTO PASO. Los discos A y B son tangentes, por consiguiente, los puntos en contacto tienen la misma velocidad tangencial.

$$V_A = V_B \Rightarrow (\omega_A) \cdot (R_A) = (\omega_B) \cdot (R_B)$$

$$(\omega_A) \cdot (1,2) = (\omega_B) \cdot (1,6) \Rightarrow \omega_A = \left(\frac{4}{3} \right) \omega_B \dots (2)$$

Resolviendo Las ecuaciones (1) y (2):

$$\omega_A = 4\pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \quad y \quad \omega_B = 3\pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

QUINTO PASO. Cálculo de los periodos.

$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \text{ s} \quad y \quad T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3} \text{ s}$$

SEXTO PASO. El tiempo que los puntos de contacto coinciden se obtiene hallando el mínimo común múltiplo, de estos periodos, es decir:

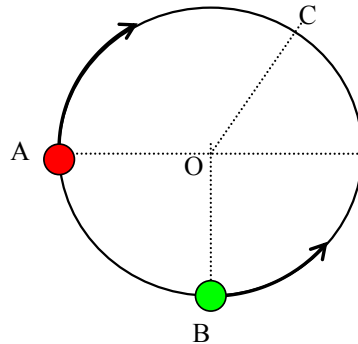
$$t = m.c.m \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right) = 2 \text{ s}$$

SÉPTIMO PASO. Pero nos piden por segunda vez.

El tiempo será, $t_2 = 2.t = 4 \text{ s}$

34. Dos móviles que desarrollan M.C.U parten de A y B encontrándose en C. Si la rapidez angular de A es 2 rad/s y de B es $2,5 \text{ rad/s}$, ¿después de cuántos segundos se encuentran por primera vez?

Resolución



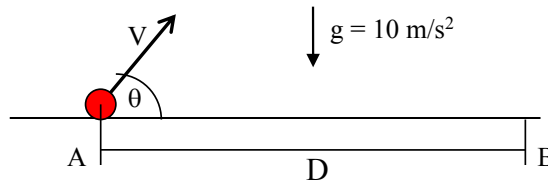
La adición de los desplazamientos angulares hasta el encuentro de los móviles en C es tres cuartas partes de una vuelta.

$$\theta_A + \theta_B = \left(\frac{3}{4}\right) 2\pi$$

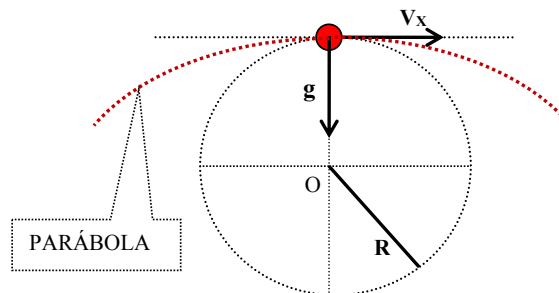
$$2.t + 2,5.t = 1,5\pi \Rightarrow 4,5.t = 1,5\pi$$

Resolviendo: $t = \frac{\pi}{3} \text{ s}$

35. Un proyectil es disparado desde el piso con rapidez de $V = 50 \text{ m/s}$ y un ángulo de elevación $\theta = 53^\circ$. Determinar el radio de curvatura de su trayectoria en el instante que pasa por el punto más alto.



RESOLUCIÓN



Resolución del problema 35

PRIMER PASO. Descomponiendo la velocidad de lanzamiento: $\mathbf{V} = 30 \mathbf{i} + 40 \mathbf{j} \text{ (m/s)}$.

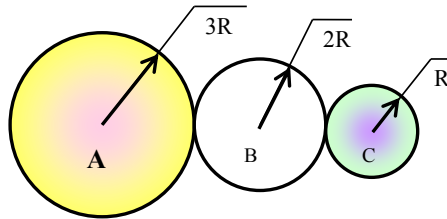
SEGUNDO PASO. En el punto más alto de la trayectoria parabólica es $30 \mathbf{i} \text{ (m/s)}$.

TERCER PASO. La aceleración centrípeta en este punto es igual al valor de la aceleración de la gravedad (g).

$$a_c = \frac{V^2}{R} \Rightarrow 10 = \frac{(30)^2}{R} \Rightarrow R = 90 \text{ m}$$

Respuesta: el radio de curvatura es 90 metros.

36. La figura muestra tres discos tangentes entre sí, de radios de curvatura R , $2R$ y $3R$ respectivamente. Cuando el disco mayor gira 8 vueltas, ¿Cuántas vueltas girara el disco de menor



radio?

- A) 12 vueltas B) 9 vueltas C) 8 vueltas D) 6 vueltas E) 24 vueltas

Resolución

Si los discos son tangentes el número de vueltas es inversamente proporcional al radio de curvatura, es decir el disco de mayor radio da menos vueltas y el disco de menor radio da mayor número de vueltas. Es decir, la **velocidad tangencial** de los puntos periféricos tiene el mismo valor.

$$(N. vueltas de A) \cdot R_A = (N. vueltas de C) \cdot R_C$$

$$(8 vueltas) \cdot (3R) = (N. vueltas de C) \cdot (R)$$

$$(N. vueltas de C) = 24$$

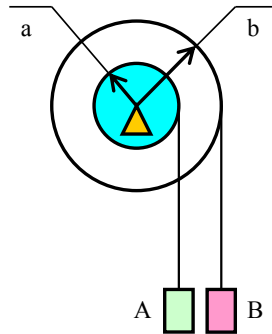
Respuesta: cuando el disco mayor gira 8 vueltas el disco menor gira 24 vueltas.

PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE (M.C.U.)

1. Una rueda gira 240° en 2 segundos. Si la rotación es uniforme, calcule el valor de la velocidad angular.

Respuesta. $\frac{2\pi}{3} \text{ rad.s}^{-1}$

2. Se muestra dos poleas concéntricas de radios $a = 20 \text{ cm}$ y $b = 10 \text{ cm}$. Si las poleas giran en sentido horario con rapidez angular constante de 4 rad/s , determinar la rapidez de alejamiento (en cm/s) entre los bloques A y B.



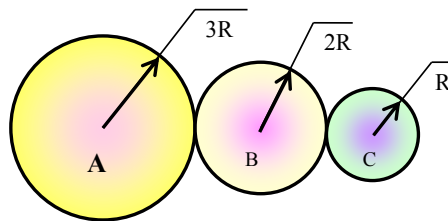
Para el problema 02

- A) 40 B) 18 C) 20 D) 35 E) 45

3. Una partícula realiza un movimiento circunferencial uniforme con rapidez angular $\frac{\pi}{12} (\text{rad/s})$ y radio $2,5 \text{ m}$. ¿En qué intervalo de tiempo (en s) la partícula realiza 7 vueltas completas?

- A) 168 B) 184 C) 204 D) 216 E) 244

4. La figura muestra tres discos tangentes entre si, de radios de curvatura R , $2R$ y $3R$ respectivamente. Cuando el disco mayor gira 4 vueltas, ¿Cuántas vueltas gira el disco de menor radio?



Para el problema 04

- A) 12 vueltas B) 9 vueltas C) 8 vueltas D) 6 vueltas E) 15 vueltas

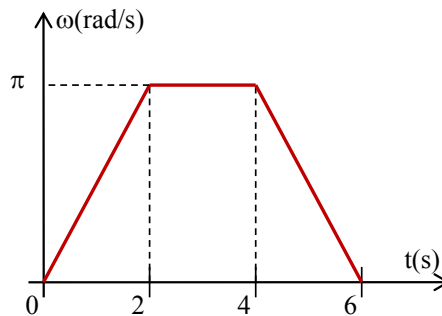
5. Se tiene tres discos tangentes de radios 50 cm , 20 cm y 10 cm . Cuando el disco menor gira 10 vueltas, ¿Cuántas vueltas gira el disco de mayor radio?

Respuesta. 2 vueltas

6. Una silla de carrusel tiene velocidad angular de 2 rad/s y velocidad tangencial de 8 m/s. Determinar el valor de la aceleración centrípeta de la silla.

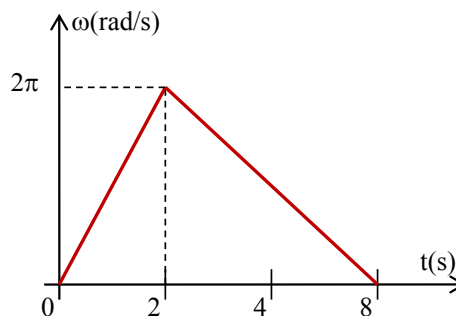
Respuesta. 16 m.s^{-1}

7. *Un disco experimenta un movimiento de rotación variado, cuya rapidez angular varía en el tiempo como muestra la gráfica. Determinar el número de revoluciones que gira en los 6 primeros segundos.



Para el problema 07

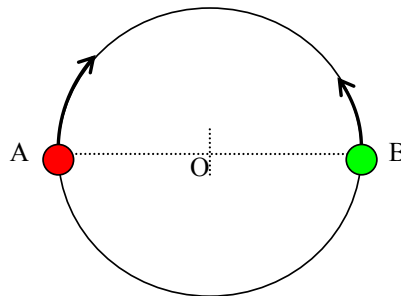
- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) Ninguna anterior
8. Con respecto al movimiento circular, cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:
- I. Una partícula que tiene M.C.U. tiene la aceleración centrípeta constante.
II. La aceleración centrípeta en un movimiento circular tiene dirección variable.
III. Si la aceleración centrípeta es constante en módulo, entonces la trayectoria es una circunferencia.
- A) Sólo II es verdadera B) Sólo I es verdadera C) I y II son verdaderas
D) II y III son verdaderas E) Todas son verdaderas
9. *Un disco experimenta un movimiento de rotación variado, cuya rapidez angular varía en el tiempo como muestra la gráfica. Determinar el número de revoluciones que gira en los 8 primeros segundos.



Para el problema 09

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) Ninguna anterior

10. De las siguientes afirmaciones indicar verdadero o falso, respecto del M.C.U.
- El móvil no tiene aceleración.
 - La velocidad lineal del móvil es constante.
 - La velocidad angular es constante
- A) VFV B) FVF **C) FFV** D) VVV E) VVF
11. Un punto A del borde de un disco, que gira con M.C.U. en un plano horizontal, tiene una rapidez que es el triple de la que tiene otro punto B que está a 4 cm más cerca del centro del disco. Determine el radio del disco.
- A) 2 cm B) 4 cm C) 6 cm D) 8 cm E) 12 cm
12. Una esfera de 10 cm de radio gira uniformemente (con eje de giro vertical y que pasa por el centro de la esfera) con un periodo de $0,2\pi$ s. Determine el módulo de la velocidad de un punto de la superficie de la esfera que se encuentra a 6 cm de un plano horizontal que pasa por el centro de la esfera.
- A) 28 cm/s B) 36 cm/s C) 40 cm/s D) 50 cm/s E) 80 cm/s
13. *Dos partículas realizan un M.C.U en sentidos opuestos tal como se muestra; si sus periodos son: $T_A = 20$ min y $T_B = 10$ min ¿luego de cuántos minutos, desde la posición mostrada se cruzaran por segunda vez?



Para el problema 13

- A) 12,7 B) 18,2 C) 22,6 D) 10 E) ninguna
14. Un disco de 20 cm de radio gira con M.C.U. en un plano horizontal. Si una hormiga se aleja del centro del disco, a lo largo de un radio, con una rapidez constante de 12 cm/s respecto del disco, calcular el módulo de la velocidad de la hormiga cuando se encuentra a 4 cm del centro del disco. La aceleración de un punto del borde del disco tiene un módulo de $3,2 \text{ m/s}^2$.
- A) 12 cm/s B) 15 cm/s C) 20 cm/s D) 35 cm/s E) 40 m/s
15. Una bicicleta tiene ruedas de radios diferentes, de 40 cm y 50 cm. En un paseo con esta bicicleta se observa que la rueda menor tiene un periodo de 2 segundos. Determine el periodo de la rueda grande.
- Respuesta. 2,5 s
16. ¿Qué velocidad angular tiene una turbina Pelton cuando gira con una frecuencia de 300 RPM (revoluciones por minuto)?
- Respuesta: $10\pi \text{ rad.s}^{-1}$

17. Un disco gira a razón de 6 RPS (revoluciones por segundo). Si el radio del disco mide 20 cm, determine el valor de la velocidad angular.

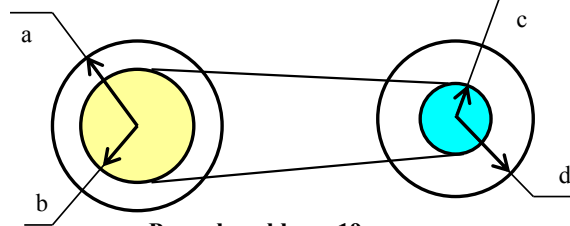
Respuesta. $12\pi \text{ rad.s}^{-1}$

18. ¿Con qué rapidez (en km/h) deberá volar el avión en el Ecuador de Este a Oeste para que a sus pasajeros les parezca que el Sol está fijo en el firmamento?

Considerar: Radio de la Tierra = 6 396 km y $\pi = 3,14$

- A) 1674 B) 1630 C) 1645 D) $1500\sqrt{2}$ E) Ninguna anterior

19. Se muestra dos pares de poleas concentricas, donde un punto del borde de la polea de radio $a = 20$ cm, tiene una rapidez de 60 cm/s. Si las poleas de radios $b = 10$ cm y $d = 5$ cm giran en sentido horario, ¿qué módulo tendrá la velocidad de los puntos del borde de la polea de radio $c = 15$ cm?



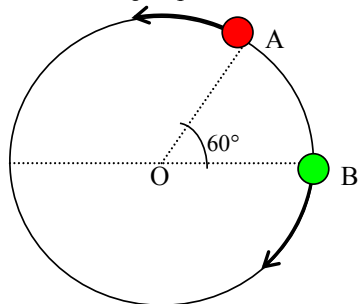
Para el problema 19

- A) 25 cm/s B) 30 cm/s C) 45 cm/s D) 60 cm/s E) Ninguna anterior

20. Un rodillo gira a razón de 660 RPM (revoluciones por minuto), ¿Qué ángulo barre el rodillo en 5 segundos?

Respuesta. $\frac{\pi}{2} \text{ rad.s}^{-1}$

21. *Dos móviles que desarrollan M.C.U parten de A y B. Si la rapidez angular de A es 2 rad/s y de B es 3 rad/s, ¿después de cuántos segundos se encuentran por primera vez?



Para el problema 21

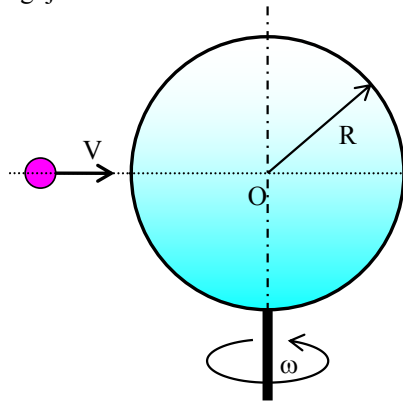
- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) Ninguna anterior

22. Dos personas recorren la misma pista circular (radio 80 m) partiendo del mismo punto en el mismo sentido, cuya rapidez angular están en relación de 2 a 3. Calcular la longitud de arco de circunferencia que recorre el más lento cuando es alcanzado por el más rápido.

- A) 40π m B) 80π m C) 20π m D) 32π m E) 40π m

23. *Una esfera hueca de radio 0,5 m gira alrededor de un eje vertical que pasa por su centro con frecuencia de 100 R.P.S. Un proyectil se dispara de tal modo que pasa por el centro geométrico.

Determinar la máxima rapidez (en m/s) que el proyectil tal que, atraviere haciendo un solo agujero.



Para el problema 23

- A) 400 B) 800 C) 200 D) 320 E) 100

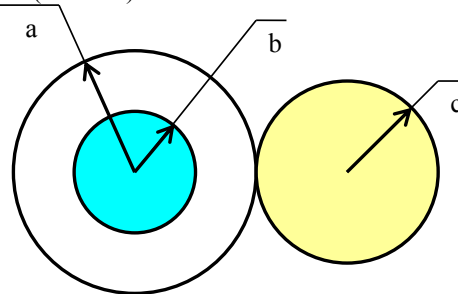
24. Dos satélites A y B describen trayectorias circunferenciales concéntricas de radios de curvatura R y $2R$. Si los vectores posición, respecto del centro de curvatura, describen áreas iguales en intervalos de tiempo iguales, determinar la relación entre sus respectivas rapidez angular.

- A) 1 : 2 B) 1 : 3 C) 1 : 4 D) 1 : 5 E) Ninguna anterior

25. Una rueda logra dar 5 vueltas en 20 segundos, si el giro es uniforme, determinar la velocidad angular de la rueda.

Respuesta. $\frac{\pi}{2} \text{ rad.s}^{-1}$

26. *Se muestra tres discos A, B y C de radios $a = 6 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ y $c = 4 \text{ cm}$, donde A y B son concéntricos y además A y C son tangentes. Si el disco de radio "b" gira a razón de 120 R.P.M, determinar la rapidez angular (en rad/s) del disco de radio "c".



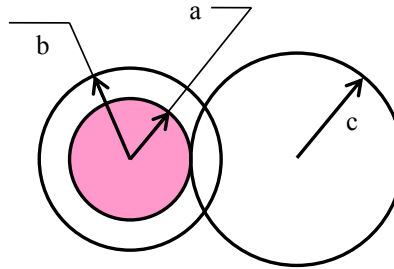
Para el problema 26

27. A) 6π B) 8π C) 2π D) 3π E) 10π

28. Se tiene un reloj de agujas, ¿a qué hora entre las tres y las cuatro, el horario (H) y el minuterio (M) forma un ángulo de 180° ?

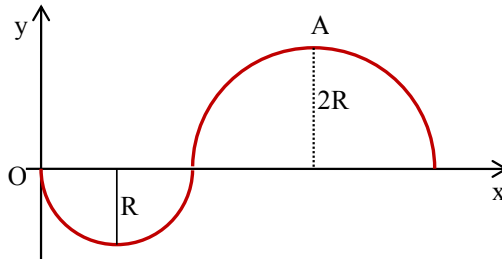
29. A) $3\frac{3}{11}h$ B) $3\frac{6}{11}h$ C) $3\frac{4}{11}h$ D) $3\frac{10}{11}h$ E) ninguna anterior

30. *Se muestra tres discos A, B y C de radios $a = 2$ cm, $b = 4$ cm y $c = 5$ cm, donde A y B son concéntricos y además A y C son tangentes. Si el disco de radio "c" gira con rapidez angular de 3 rad/s, determinar el módulo de la velocidad (en cm/s) de los puntos periféricos del disco B.



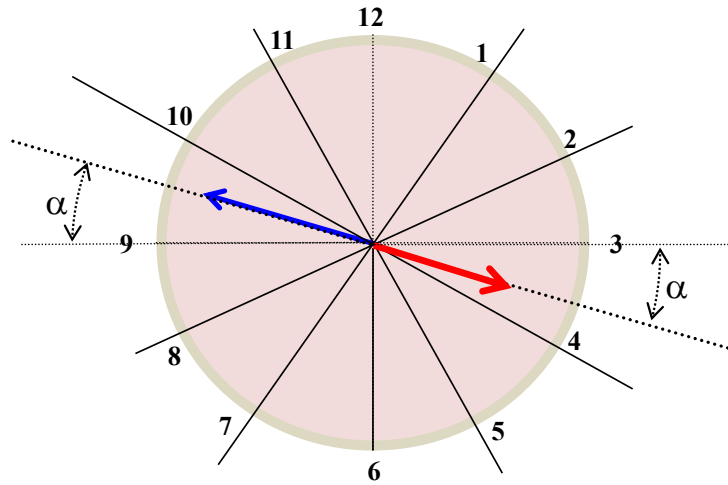
Para el problema 28

- A) 6π B) 8π C) 2π D) 3π E) 10π
31. Se tiene dos discos dentados (dientes en la periferia) de radios 20 cm y 30 cm. Si los discos funcionan dispuestos tangencialmente, ¿Cuál es la frecuencia del disco menor cuando el disco mayor gira a razón 600 RPM?
Respuesta. 900 RPM (revoluciones por minuto)
32. *Una partícula recorre la trayectoria mostrada, formada por dos semicircunferencias, con velocidad tangencial constante en 3 segundos. Sabiendo que $R = 1$ m, encontrar el módulo de la aceleración centrípeta en el punto A en m/s^2 .



Para el problema 30

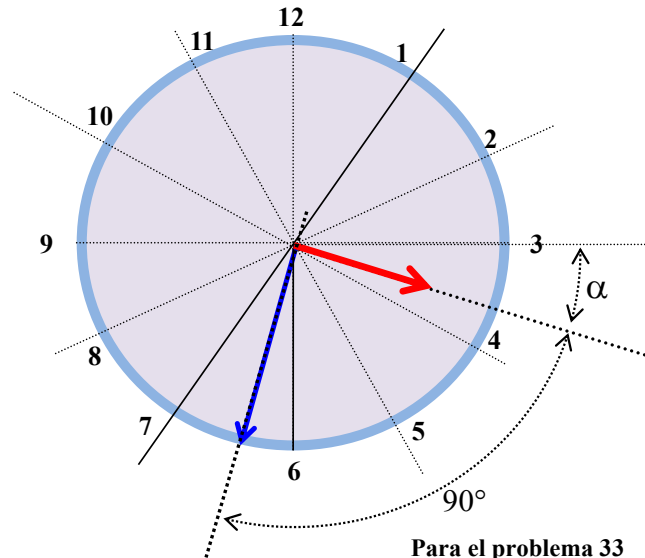
- A) π^2 B) $0,5\pi^2$ C) $2\pi^2$ D) $3\pi^2$ E) $10\pi^2$
33. Una rueda de ruleta logra girar 120° en 4 segundos, el radio de esta rueda es $0,6$ m. Calcular el valor de la velocidad tangencial, sabiendo que gira uniformemente.
Respuesta. $\frac{\pi}{10} \text{ m.s}^{-1}$
34. Se tiene un reloj de agujas, donde la aguja de menor tamaño es el horario (H) y el más largo es el minutero (M). ¿A qué hora entre las $3:00$ y $4:00$ las agujas forman un ángulo de 180° ?



Para el problema 32

- A) $3\frac{7}{13} h$ B) $3\frac{10}{11} h$ C) $3\frac{11}{11} h$ **D) $3\frac{9}{11} h$** E) ninguna anterior

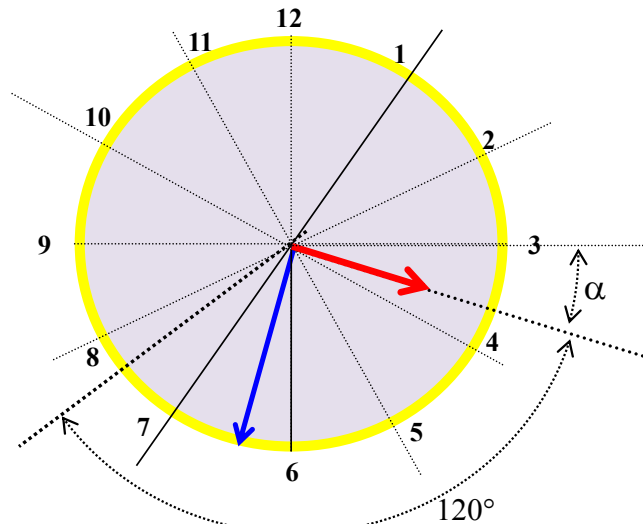
35. Se tiene un reloj de agujas, donde la aguja de menor tamaño es el horario (H) y el más largo es el minuter (M). ¿A qué hora entre las 3:00 y 4:00 las agujas forman un ángulo de 90° ?



Para el problema 33

- A) $3\frac{6}{11} h$** B) $3\frac{10}{11} h$ C) $3\frac{1}{11} h$ D) $3\frac{9}{11} h$ E) ninguna anterior

36. Se tiene un reloj de agujas, donde la aguja de menor tamaño es el horario (H) y el más largo es el minuterio (M). ¿A qué hora entre las 3:00 y 4:00 las agujas forman un ángulo de 120° ?



Para el problema 34

A) $3\frac{6}{11}h$

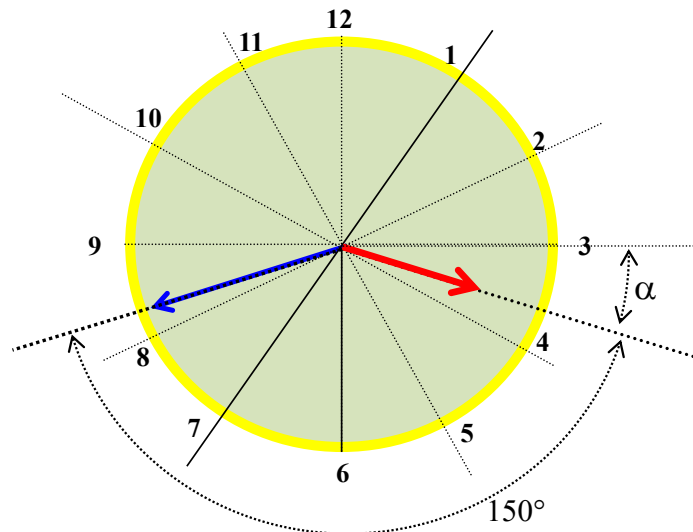
B) $3\frac{10}{11}h$

C) $3\frac{7}{11}h$

D) $3\frac{9}{11}h$

E) ninguna anterior

37. Se tiene un reloj de agujas, donde la aguja de menor tamaño es el horario (H) y el más largo es el minuterio (M). ¿A qué hora entre las 3:00 y 4:00 las agujas forman un ángulo de 150° ?



Para el problema 35

A) $3\frac{6}{11}h$

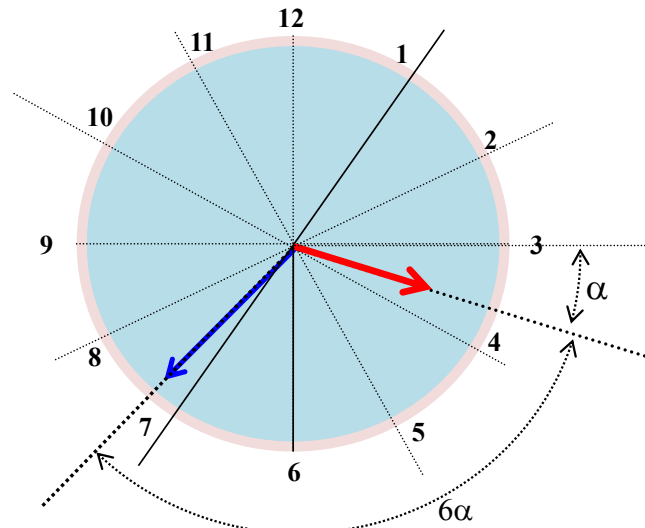
B) $3\frac{10}{11}h$

C) $3\frac{7}{11}h$

D) $3\frac{8}{11}h$

E) ninguna anterior

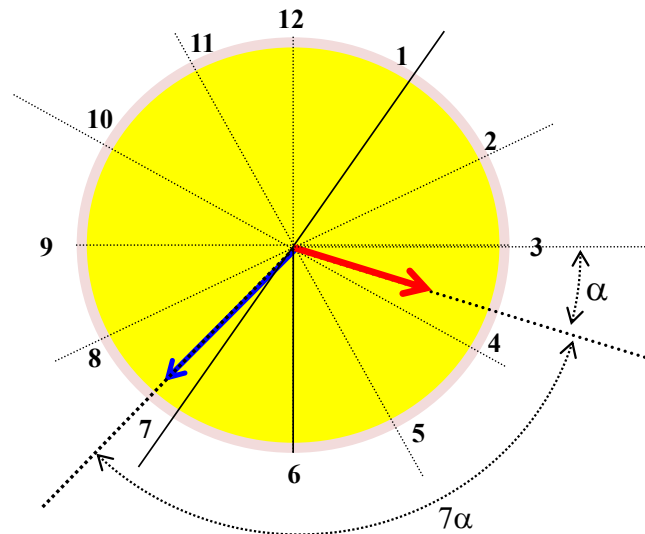
38. Se tiene un reloj de agujas, donde la aguja de menor tamaño es el horario (H) y el más largo es el minuterio (M). ¿Qué hora es?



Para el problema 36

- A) $3\frac{6}{11}h$ B) $3\frac{3}{5}h$ C) $3\frac{7}{11}h$ D) $3\frac{8}{11}h$ E) ninguna anterior

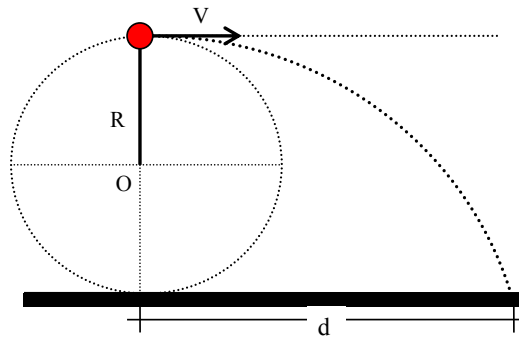
39. Se tiene un reloj de agujas, donde la aguja de menor tamaño es el horario (H) y el más largo es el minuterio (M). ¿Qué hora es?



Para el problema 37

- A) $3\frac{6}{11}h$ B) $3\frac{3}{5}h$ C) $3\frac{7}{11}h$ D) $3\frac{8}{11}h$ E) ninguna anterior

40. *Una piedra atada a una cuerda de 2,5 m de longitud gira en un plano vertical con rapidez angular constante de 2 rad/s. En el instante que pasa por el punto mas alto se rompe la cuerda, determinar el desplazamiento horizontal “d” (en m) que experimenta la piedra hasta llegar al piso. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Para el problema 38

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) Ninguna anterior
41. Se tiene un reloj de agujas, ¿a qué hora entre las tres y las cuatro, el horario (H) y el minuterero (M) forma un ángulo recto?
- A) $3\frac{3}{11}h$ B) $3\frac{6}{11}h$ C) $3\frac{4}{11}h$ D) $3\frac{5}{11}h$ E) ninguna anterior
42. Determine el periodo de revolución de las ruedas de una bicicleta de 0,8 m de diámetro, cuando esta viaja con velocidad de $4\pi \text{ m.s}^{-1}$
 Respuesta: 0,2 s
43. Dos personas recorren la misma pista circular (radio 80 m) partiendo del mismo punto en el mismo sentido, cuya rapidez angular están en relación de 1 a 5. Calcular la longitud de arco de circunferencia que recorre el más lento cuando es alcanzado por el más rápido.
- A) $40\pi \text{ m}$ B) $80\pi \text{ m}$ C) $20\pi \text{ m}$ D) $32\pi \text{ m}$ **E) $40\pi \text{ m}$**
44. Una partícula que tiene M.C.U. tiene frecuencia de 1200 RPM. Si el radio de giro es 50 cm, calcular su aceleración centrípeta en m/s^2 .
- A) $200\pi^2$ B) $400\pi^2$ C) $640\pi^2$ D) $100\pi^2$ D) N.A

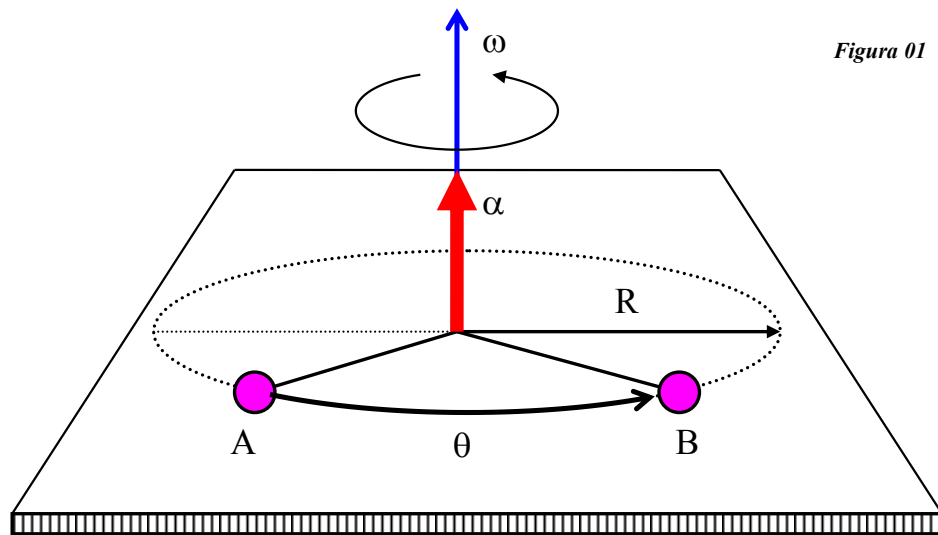


Figura 01

MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL UNIFORMEMENTE VARIADO (M.C.U.V.)

1. CONCEPTO: Es aquel movimiento que tiene como trayectoria una línea curva llamada circunferencia, en el cual la partícula aumenta o disminuye su velocidad angular en módulo, progresivamente, por consiguiente, se mueve con aceleración angular constante.

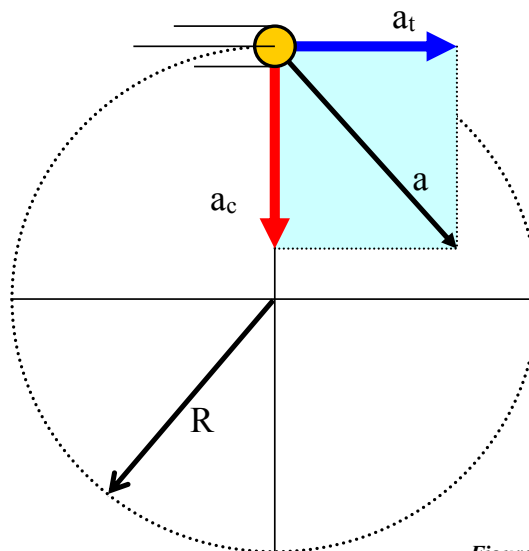


Figura 02

2. ACCELERACIÓN ANGULAR (α): Es una magnitud vectorial, que mide la rapidez de cambio de la velocidad angular que experimenta una partícula. Se representa por un vector perpendicular al plano de rotación.

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_0}{t}$$

$$\text{Unidades: } \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \frac{\text{rad}}{\text{min}^2}, \frac{\text{rad}}{\text{h}^2}$$

3. ACELERACIÓN LINEAL O TANGENCIAL ($\mathbf{a}_t$): Es aquella magnitud vectorial que mide la rapidez de cambio que experimenta la velocidad tangencial en módulo. Se representa mediante un vector tangente a la circunferencia.

$$a_t = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_f - V_0}{t}$$

$$\text{Unidades: } \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}, \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$$

4. ACELERACIÓN CENTRÍPETA ($\mathbf{a}_c$): La aceleración centrípeta mide la rapidez de cambio que experimenta la velocidad tangencial en dirección. Se representa por vector que indica al centro de curvatura. Su valor es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad tangencial e inversamente proporcional al radio de curvatura. Se mide en m/s^2 .

$$a_c = \frac{V^2}{R} = \frac{(\omega.R)^2}{R} = \omega^2.R$$

$$\text{En función de la velocidad tangencial: } a_c = \frac{V^2}{R}$$

$$\text{En función de la velocidad angular: } a_c = \omega^2.R$$

$$\text{Unidades: } \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}, \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$$

5. ACELERACIÓN RESULTANTE ($\mathbf{a}$): es la aceleración que resulta de adicionar la aceleración tangencial y la aceleración centrípeta. El módulo se determina aplicando el teorema de Pitágoras.

$$\text{Forma vectorial: } \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

$$\text{Forma escalar: } \|\vec{a}\| = \sqrt{(a_t)^2 + (a_c)^2}$$

6. RELACIÓN ENTRE LA ACELERACIÓN ANGULAR Y TANGENCIAL:

$$\text{Sabemos que: } V_t = \omega.R$$

$$a_t = \frac{V_f - V_0}{t} = \frac{\omega_f.R - \omega_0.R}{t}$$

$$a_t = \left(\frac{\omega_f - \omega_0}{t} \right).R = \alpha.R$$

$$a_t = \alpha.R$$

Debe observarse que la aceleración angular y la aceleración tangencial son mutuamente perpendiculares.

ACELERACIÓN LINEAL	ACELERACIÓN ANGULAR
1) $S = V_{i0}.t + \frac{1}{2}a_i.t^2$	1) $\theta = \omega_0.t + \frac{1}{2}\alpha.t^2$
2) $S = V_{iF}.t - \frac{1}{2}a_i.t^2$	2) $\theta = \omega_F.t - \frac{1}{2}\alpha.t^2$
3) $V_{iF} = V_{i0} + a_i.t$	3) $\omega_F = \omega_0 + \alpha.t$
4) $V_{iF}^2 = V_{i0}^2 + 2a_i.S$	4) $\omega_F^2 = \omega_0^2 + 2\alpha.\theta$
5) $S = \frac{(V_{i0} + V_{iF})}{2}.t$	5) $\theta = \frac{(\omega_0 + \omega_F)}{2}.t$

*En la tabla se observa las ecuaciones del movimiento para el caso **acelerado**. Para el caso del movimiento **desacelerado** se cambia el signo de la aceleración.

7. NÚMEROS DE GALILEO.

En todo M.C.U.V cuando la partícula sale del reposo, el desplazamiento angular en cada segundo es directamente proporcional a los números impares:

$$\theta_n = \{\theta; 3\theta; 5\theta; 7\theta; 9\theta; \dots\}$$

8. DESPLAZAMIENTO ANGULAR EN EL ENÉSIMO SEGUNDO.

En todo M.C.U.V el desplazamiento angular en el n -ésimo segundo se puede calcular mediante la siguiente ecuación.

$$\theta_n = \omega_0 + \frac{1}{2}.\alpha.(2n-1)$$

9. **PRIMER EJEMPLO:** La hélice de un ventilador gira a razón de 120 RPM (revoluciones por minuto), si al desconectarlo se detiene después de 10 segundos, con aceleración angular constante. Calcular el número de vueltas que ha dado hasta detenerse.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Calculamos la velocidad angular inicial, la hélice gira 120 revoluciones en un minuto, entonces su velocidad angular es:

$$\omega_0 = \frac{\theta}{t} \Rightarrow \omega_0 = \frac{120(2\pi)}{60s} = 4\pi \text{ s}^{-1}$$

SEGUNDO PASO. La velocidad angular final es nula, dado que la hélice se detiene.

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega_F}{2} \right).t \Rightarrow \theta = \left(\frac{4\pi + 0}{2} \right).(10) = 20\pi \text{ rad}$$

TERCER PASO. El número de vueltas se determina dividiendo el ángulo girado entre el ángulo de una vuelta:

$$N^\circ \text{ de } V = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N^\circ \text{ de } V = \frac{20\pi}{2\pi} = 10$$

Respuesta: gira 10 vueltas hasta detenerse.

- 10. SEGUNDO EJEMPLO:** Una partícula sale del reposo, describiendo una trayectoria circular, con aceleración angular constante $\alpha = 0,25\pi \text{ s}^{-2}$. Determinar el desplazamiento angular y el número de vueltas que describe en los primeros 8 segundos.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Cálculo del desplazamiento angular. La velocidad angular inicial es nula.

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow \theta = 0 + \frac{1}{2} (0,25\pi) (8)^2 = 8\pi \text{ rad}$$

SEGUNDO PASO. El número de vueltas se determina dividiendo el ángulo girado entre el ángulo de una vuelta:

$$N^\circ \text{ de } V = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N^\circ \text{ de } V = \frac{8\pi}{2\pi} = 4$$

Respuesta: gira 4 vueltas en los primeros 8 segundos.

11. POLEAS MÓVILES.

La velocidad de la polea (punto A) se mueve con la semisuma de las velocidades de los puntos B y C que son los extremos de la cuerda.

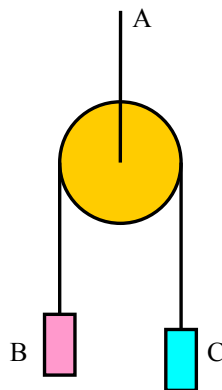
$$\vec{V}_A = \frac{\vec{V}_B + \vec{V}_C}{2}$$

El desplazamiento de la polea (punto A) se desplaza con la semisuma de los desplazamientos de los puntos B y C que son los extremos de la cuerda.

$$\vec{d}_A = \frac{\vec{d}_B + \vec{d}_C}{2}$$

La aceleración de la polea (punto A) se desplaza con la semisuma de las aceleraciones de los puntos B y C que son los extremos de la cuerda.

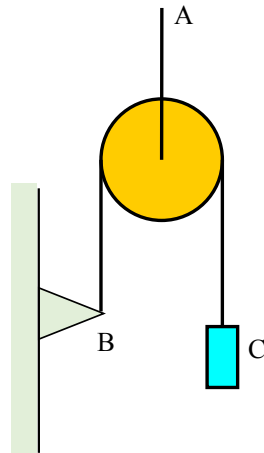
$$\vec{a}_A = \frac{\vec{a}_B + \vec{a}_C}{2}$$



- 12.** Cuando reemplazamos las cantidades vectoriales, el sentido se representa mediante signos convencionalmente, hacia arriba positivo, hacia abajo negativo, hacia la derecha positivo, hacia la izquierda negativo.

13. CASO ESPECIAL EN POLEAS MÓVILES.

Si un extremo de la polea se encuentra fijo ($\vec{V}_B = 0$; $\vec{d}_B = 0$; $\vec{a}_B = 0$) entonces, la velocidad, desplazamiento y aceleración, es igual a la mitad del otro extremo:



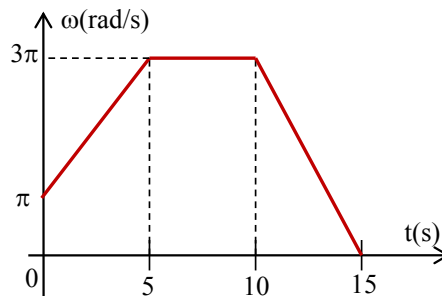
$$\vec{V}_A = \frac{0 + \vec{V}_C}{2} \Rightarrow \vec{V}_A = \frac{\vec{V}_C}{2}$$

$$\vec{d}_A = \frac{0 + \vec{d}_C}{2} \Rightarrow \vec{d}_A = \frac{\vec{d}_C}{2}$$

$$\vec{a}_A = \frac{0 + \vec{a}_C}{2} \Rightarrow \vec{a}_A = \frac{\vec{a}_C}{2}$$

14. GRÁFICA VELOCIDAD ANGULAR VERSUS TIEMPO.

Se muestra la variación de la velocidad angular de una partícula que gira describiendo una trayectoria circular.



Entonces podemos afirmar:

A) El móvil inicia su movimiento con velocidad angular: ($t = 0$; $\omega_0 = \pi \text{ rad.s}^{-1}$)

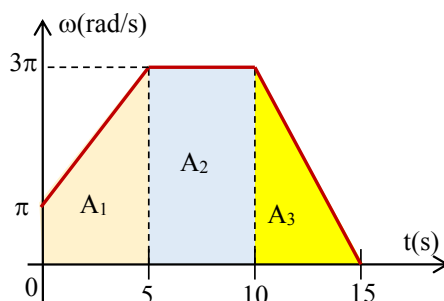
B) En los 5 primeros segundos acelera, aumentando su velocidad de $(\pi \text{ rad.s}^{-1} \text{ a } 3\pi \text{ rad.s}^{-1})$

la aceleración angular es, $\alpha = \frac{\omega_F - \omega_0}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi - \pi}{5} = 0,4\pi \text{ s}^{-2}$

C) En el intervalo de tiempo $(t = 5 \text{ s a } t = 10 \text{ s})$ el móvil mantiene su velocidad constante, $(\omega_2 = 3\pi \text{ rad.s}^{-1})$ y la aceleración angular es nula.

D) En el intervalo de tiempo $(t = 10 \text{ s a } t = 15 \text{ s})$ el móvil tiene movimiento retardado, disminuyendo su velocidad de $(3\pi \text{ rad.s}^{-1} \text{ a } 0 \text{ rad.s}^{-1})$ entonces la aceleración angular es,

$$\alpha = \frac{\omega_F - \omega_0}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = \frac{0 - 3\pi}{5} = -0,6\pi \text{ s}^{-2}$$



E) El desplazamiento angular en los 5 primeros segundos es igual al área del trapecio,

$$A_1 = \left(\frac{b+B}{2} \right) \cdot h \Rightarrow A_1 = \left(\frac{\pi + 3\pi}{2} \right) \cdot (5) = 10\pi \text{ rad}$$

F) En el intervalo de tiempo $(t = 5 \text{ s a } t = 10 \text{ s})$ el desplazamiento angular es igual al área del rectángulo, $A_2 = b \cdot h \Rightarrow A_2 = (5) \cdot (3\pi) = 15\pi \text{ rad}$

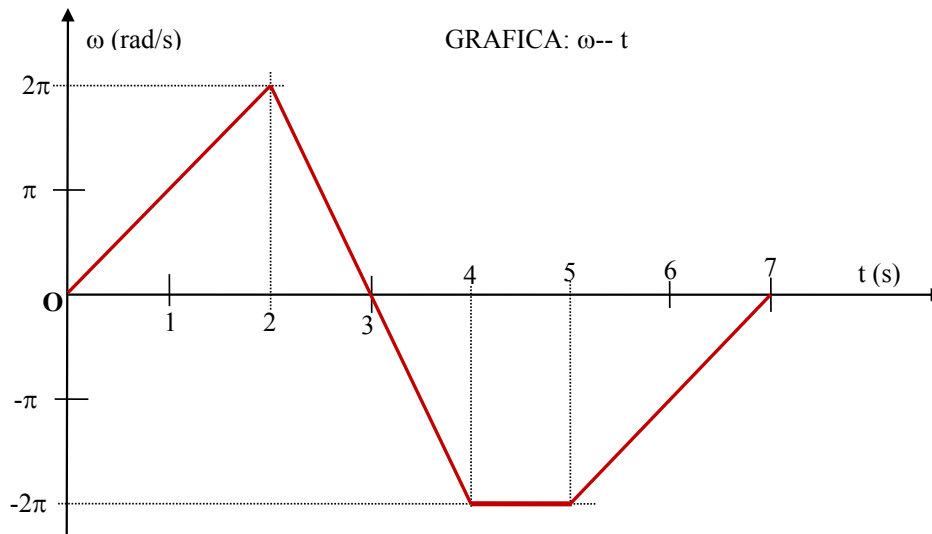
G) En el intervalo de tiempo $(t = 10 \text{ s a } t = 15 \text{ s})$ el desplazamiento angular es igual al área del triángulo, $A_3 = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_3 = \frac{(5) \cdot (3\pi)}{2} = 7,5\pi \text{ rad}$

H) El desplazamiento angular total en los primeros 15 segundos, es igual a la suma de las áreas.

$$\theta = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\theta = (10\pi) + (15\pi) + (7,5\pi) = 32,5 \text{ rad}$$

15. DESPLAZAMIENTO ANGULAR.



Se muestra la variación de la velocidad angular de una partícula que gira describiendo una trayectoria circular. El móvil inicia su movimiento en la posición ($t = 0\text{ s}$ y $\theta_0 = \pi\text{ rad}$)

A) Para hallar el desplazamiento angular de una partícula en la gráfica velocidad angular versus el tiempo, es suficiente sumar las áreas bajo la curva considerando los signos.

B) En el intervalo de tiempo ($t = 0\text{ s}$ y $t = 2\text{ s}$) el desplazamiento angular es igual al área del

triángulo: $A_1 = \frac{(2) \cdot (2\pi)}{2} = 2\pi\text{ rad}$

C) La posición angular en el instante $t = 2\text{ s}$ es: $\Delta\theta = A_1 \Rightarrow \theta - \theta_0 = A_1 \Rightarrow \theta = \theta_0 + A_1$

$$\theta = (\pi) + (2\pi) = 3\pi\text{ rad}$$

D) En el intervalo de tiempo ($t = 2\text{ s}$ y $t = 3\text{ s}$) el desplazamiento angular es igual al área del

triángulo: $A_2 = \frac{(1) \cdot (2\pi)}{2} = \pi\text{ rad}$

E) La posición angular en el instante $t = 3\text{ s}$ es: $\theta = \theta_0 + A_1 + A_2$

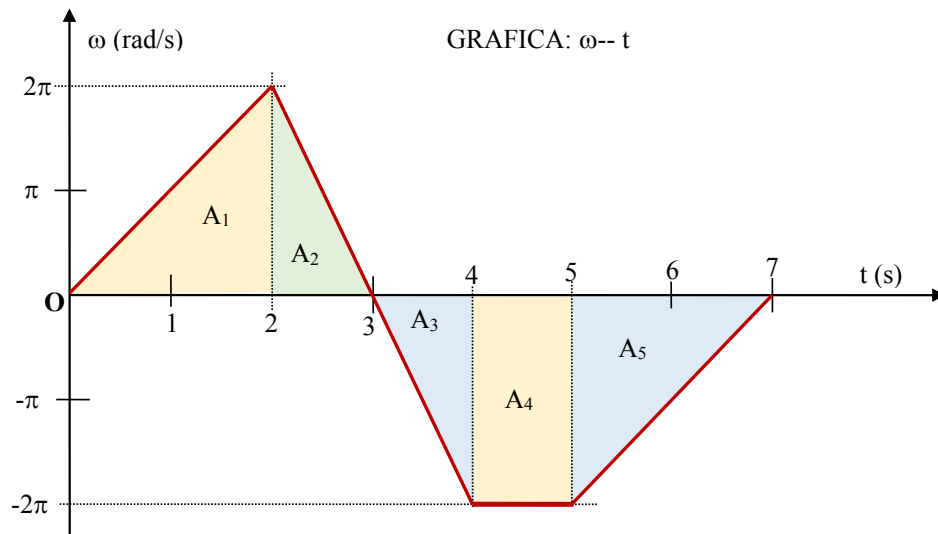
$$\theta = (\pi) + (2\pi) + (\pi) = 4\pi\text{ rad}$$

F) En el intervalo de tiempo ($t = 3\text{ s}$ y $t = 4\text{ s}$) el desplazamiento angular es igual al área del

triángulo: $A_3 = \frac{(1) \cdot (-2\pi)}{2} = -\pi\text{ rad}$ el signo negativo significa que invierte el sentido de giro.

G) La posición angular en el instante $t = 4\text{ s}$ es: $\theta = \theta_0 + A_1 + A_2 + A_3$

$$\theta = (\pi) + (2\pi) + (\pi) + (-\pi) = 3\pi\text{ rad}$$



H) En el intervalo de tiempo ($t = 4 \text{ s}$ y $t = 5 \text{ s}$) el desplazamiento angular es igual al área del rectángulo: $A_4 = (1) \cdot (-2\pi) = -2\pi \text{ rad}$

I) La posición angular en el instante $t = 5 \text{ s}$ es: $\theta = \theta_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

$$\theta = (\pi) + (2\pi) + (\pi) + (-\pi) + (-2\pi) = \pi \text{ rad}$$

J) En el intervalo de tiempo ($t = 5 \text{ s}$ y $t = 7 \text{ s}$) el desplazamiento angular es igual al área del rectángulo: $A_5 = \frac{(2) \cdot (-2\pi)}{2} = -2\pi \text{ rad}$

K) La posición angular en el instante $t = 7 \text{ s}$ es: $\theta = \theta_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

$$\theta = (\pi) + (2\pi) + (\pi) + (-\pi) + (-2\pi) + (-2\pi) = -\pi \text{ rad}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. ¿Cuántas vueltas habrán dado un disco que inicia un M.C.U.V. desde el reposo si al transcurrir el primer minuto tiene una frecuencia de 300 R.P.M.?

A) 150 B) 200 C) 280 D) 300 E) 350

Resolución

PRIMER PASO. Cálculo de la rapidez angular final en el instante $t = 60$ segundos:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi \left(\frac{300}{60 \text{ s}} \right) = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la medida del ángulo que revoluciona en los primeros 60 segundos:

$$\theta = \frac{(\omega_0 + \omega_f)}{2} \cdot t$$

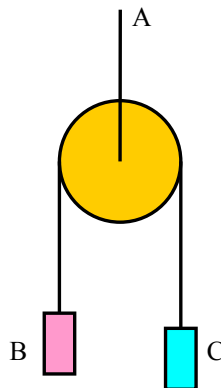
$$\theta = \frac{(0 + 10\pi)}{2} \cdot 60 = 300\pi \text{ rad}$$

TERCER PASO. Cálculo del número de vueltas:

$$N. \text{ de } V. = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{300\pi}{2\pi} = 150$$

Respuesta: el disco gira 150 vueltas en los primeros 60 segundos.

2. Si el bloque B se mueve con una velocidad de $8 \hat{j}$ (m/s) y el bloque C con $10 \hat{j}$ (m/s) ¿Cuál es el módulo de la velocidad (en m/s) con la que se mueve el punto A?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

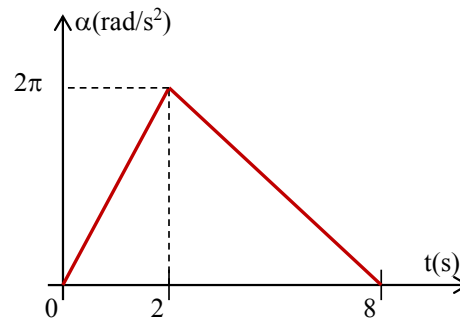
Resolución

La velocidad de la polea (punto A) se mueve con la semisuma de las velocidades de los puntos B y C que son los extremos de la cuerda.

$$\vec{V}_A = \frac{\vec{V}_B + \vec{V}_C}{2} \Rightarrow \vec{V}_A = \frac{8\hat{j} + 10\hat{j}}{2} = 9\hat{j} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

Respuesta: la polea sube con rapidez de 9 m/s.

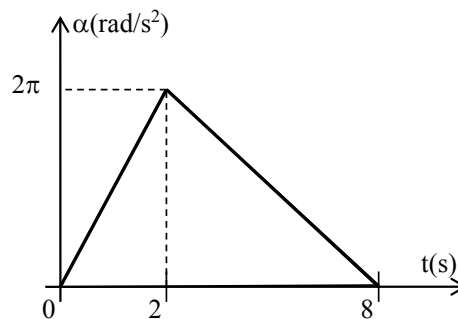
3. Se muestra la variación de la aceleración angular en el tiempo de un disco. Si en el instante $t = 0$ su rapidez angular es " ω " y para $t = 8$ s la rapidez angular es " 3ω ", determinar su rapidez angular (en rad/s) para $t = 2$ s.



- A) 2π B) 4π **C) 6π** D) 8π E) 4

Resolución

PRIMER PASO. En toda grafica aceleración angular versus tiempo, el área bajo la curva es igual al incremento de la rapidez angular en un intervalo de tiempo.



SEGUNDO PASO. Analicemos variación de la rapidez angular para $t = 8$ s

$$\omega_F - \omega_0 = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$3\omega - \omega = \frac{(8) \cdot (2\pi)}{2} \Rightarrow \omega = 4\pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

TERCER PASO. Analicemos variación de la rapidez angular para $t = 2$ s.

$$\omega_F - \omega = \frac{(2) \cdot (2\pi)}{2} \Rightarrow \omega_F - 4\pi = 2\pi$$

$$\omega_F = 6\pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

Respuesta: en el instante $t = 2$ s la rapidez angular es 6π rad/s.

4. Una partícula realiza un M.C.U.V a partir del reposo ($V=0$) con aceleración angular constante de $0,25 \text{ rad/s}^2$. Si se sabe que el radio de la trayectoria es 2 metros y el cambio de la velocidad en módulo, es igual, al cambio de la velocidad en dirección y sentido en un determinado instante. Determine el tiempo en movimiento de la partícula hasta ese instante.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. La aceleración centrípeta, igual, a la aceleración lineal, en módulo.

$$a_c = \frac{(V)^2}{R} \quad y \quad a_T = \alpha \cdot (R)$$

$$\frac{(V)^2}{R} = \alpha \cdot (R) \Rightarrow (V)^2 = \alpha \cdot (R)^2$$

Reemplazando: $(V)^2 = (0,25) \cdot (2)^2 \Rightarrow V = 1 \text{ m.s}^{-1}$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la aceleración lineal o tangencial:

$$a_T = \alpha \cdot (R) \Rightarrow a_T = (0,25) \cdot (2) = 0,5 \text{ m.s}^{-2}$$

TERCER PASO. Cálculo del intervalo de tiempo:

$$V_F = V_0 + a_T \cdot t \Rightarrow 1 = 0 + (0,5) \cdot t \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

Respuesta: el tiempo transcurrido es 2 segundos.

5. Una partícula realiza un M.C.U.V a partir del reposo ($V=0$) con aceleración angular constante de 1 rad/s^2 . Si se sabe que el radio de la trayectoria es 2 metros y el cambio de la velocidad en módulo, es igual, al cambio de la velocidad en dirección y sentido en un determinado instante. Determine el tiempo en movimiento de la partícula hasta ese instante.

A) 0,1 s B) 0,4 C) 0,8 **D) 1** E) ninguna

6. Si un disco parte del reposo con M.C.U.V y en 3 segundos su rapidez angular es 36 rad/s . ¿Cuál será la rapidez angular a los 5 segundos en rad/s ?

A) 40 B) 42 C) 45 D) 48 E) 60

Resolución

PRIMER PASO. Aplicamos la siguiente ecuación del movimiento, para calcular la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} \Rightarrow \alpha = \frac{36 - 0}{3} = 12 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la rapidez angular en el instante $t = 5$ segundos:

$$\omega_0 + \alpha \cdot t \Rightarrow \omega_F = 0 + (12) \cdot (5) = 60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Respuesta: en el instante $t = 5 \text{ s}$ la rapidez es 60 rad/s .

7. La velocidad de un automóvil aumenta uniformemente en 10 segundos de 19 km/h a 55 km/h . Si el diámetro de sus ruedas es 50 cm , ¿Cuál es la aceleración angular?

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Cálculo de la aceleración lineal:

$$a_T = \frac{V_F - V_0}{\Delta t} \Rightarrow a_T = \left(\frac{55 - 19}{10 \text{ s}} \right) \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 1 \text{ m.s}^{-2}$$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la aceleración angular.

$$a_T = \alpha \cdot R \Rightarrow \alpha = \frac{a_T}{R} = \frac{1 \text{ m.s}^{-2}}{0,25 \text{ m}} = 4 \text{ s}^{-2}$$

Respuesta: La aceleración angular es 4 rad/s^2 .

8. La velocidad de un automóvil aumenta uniformemente en 5 segundos de 36 km/h a 90 km/h. Si el diámetro de sus ruedas es 60 cm, ¿Cuál es la aceleración angular?
 A) 5 rad/s^2 **B) 10** C) 15 D) 18 E) ninguna

9. La hélice de un ventilador gira a razón de 240 RPM, si al desconectarlo se detiene al cabo de 10 segundos, con aceleración angular constante. Calcular el número de vueltas que ha dado hasta detenerse.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Cálculo de la velocidad angular inicial:

$$\omega_0 = 2\pi f \Rightarrow \omega_0 = 2\pi \cdot \left(\frac{240}{60 \text{ s}} \right) = 8\pi \text{ s}^{-1}$$

SEGUNDO PASO. La velocidad angular final es nula, la hélice se detiene. Cálculo del desplazamiento angular:

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega_F}{2} \right) t \Rightarrow \theta = \left(\frac{8\pi + 0}{2} \right) \cdot (10) = 40\pi \text{ rad}$$

TERCER PASO. Cálculo de numero de vueltas.

$$N^\circ \text{ de } V = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N^\circ \text{ de } V = \frac{40\pi}{2\pi} = 20$$

Respuesta: dará 20 vueltas hasta detenerse.

10. La hélice de un ventilador gira a razón de “F” RPM, si al desconectarlo se detiene al cabo de “T” segundos, con aceleración angular constante. Calcular el número de vueltas que ha dado hasta detenerse.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Cálculo de la velocidad angular inicial:

$$\omega_0 = 2\pi f \Rightarrow \omega_0 = 2\pi \cdot \left(\frac{F}{60 \text{ s}} \right) = \frac{\pi F}{30} \text{ s}^{-1}$$

SEGUNDO PASO. La velocidad angular final es nula, la hélice se detiene. Cálculo del desplazamiento angular:

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega_F}{2} \right) t \Rightarrow \theta = \left(\frac{\frac{\pi F}{30} + 0}{2} \right) \cdot (T) = \frac{\pi \cdot F}{60} \text{ rad}$$

TERCER PASO. Cálculo de numero de vueltas.

$$N^{\circ} \text{ de } V = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N^{\circ} \text{ de } V = \frac{\frac{\pi F.T}{60}}{2\pi} = \frac{F.T}{120}$$

Respuesta: dará $\frac{F.T}{120}$ vueltas hasta detenerse.

11. Una hélice que gira a razón de “a” R.P.M, si da “b” vueltas antes de detenerse, con aceleración constante, ¿Cuántos minutos tardará en detenerse?

A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{2b}{a}$ C) $\frac{2a}{b}$ D) $\frac{b}{2a}$ E) ninguna

12. Una rueda que giraba a 1200 R.P.M respecto de un eje fijo, es frenada uniformemente logrando dar 200 vueltas hasta que se detiene. ¿En qué tiempo se detiene la rueda?

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. inicialmente la rueda gira 1200 vueltas en 60 segundos. Su velocidad angular inicial es:

$$\omega_0 = \frac{\theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1200(2\pi)}{60s} = 40\pi \text{ s}^{-1}$$

SEGUNDO PASO. Considerando un movimiento con aceleración angular constante. La velocidad angular final es nula, la rueda se detiene.

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega_F}{2} \right) t \Rightarrow 200(2\pi) = \left(\frac{40\pi + 0}{2} \right) t$$

Resolviendo: $t = 20 \text{ s}$

Respuesta: se detiene después de 20 segundos.

13. Una rueda durante su recorrido necesita 3 segundos para girar un ángulo de 234 radianes. Su velocidad angular al cabo de este tiempo es de 108 rad/s. Determinar la aceleración angular constante.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Considerando un movimiento con aceleración angular constante. La

$$\alpha = \frac{\omega_F - \omega_0}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = \left(\frac{108 - 48}{3} \right) = 20 \text{ s}^{-2} \text{ velocidad angular inicial es,}$$

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega_F}{2} \right) t \Rightarrow 234 = \left(\frac{\omega_0 + 108}{2} \right) (3)$$

Resolviendo: $\omega_0 = 48 \text{ s}^{-1}$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\omega_F - \omega_0}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = \left(\frac{108 - 48}{3} \right) = 20 \text{ s}^{-2}$$

Respuesta. La aceleración angular es 20 rad/s^2 .

14. Una partícula gira en una circunferencia de 3 metros de diámetro. Inicia su movimiento ($t=0$) con rapidez de 6 m/s y 3 segundos después su rapidez es 9 m/s. Determinar la medida del ángulo que describe la partícula al cabo de 6 segundos.

A) 12 rad B) 18 C) 36 D) 48 E) ninguna

15. Una partícula sale del reposo, describiendo una trayectoria circular, con aceleración angular constante $\alpha = \pi/5 \text{ s}^{-2}$. Determinar el desplazamiento angular que describe la partícula en el octavo segundo de su movimiento.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. En todo M.C.U.V el desplazamiento angular en el n -ésimo segundo se puede calcular mediante la siguiente ecuación.

$$\theta_n = \omega_0 + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (2n - 1)$$

SEGUNDO PASO. Para el octavo segundo, $n = 8$ y sale del reposo $\omega_0 = 0$

$$\theta_8 = (0) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{5} \right) \cdot (2 \cdot 8 - 1) = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Respuesta. En el octavo segundo gira 270° .

16. Una partícula inicia su movimiento con velocidad angular $\omega_0 = \pi/4 \text{ s}^{-1}$, describiendo una trayectoria circular, con aceleración angular constante $\alpha = \pi/9 \text{ s}^{-2}$. Determinar el desplazamiento angular que describe la partícula en el quinto segundo de su movimiento.

A) 120° B) 135° C) 143° D) 150° E) ninguna

17. La velocidad de un automóvil aumenta uniformemente en 10 segundos de 17 km/h a 53 km/h. Si el diámetro de sus ruedas es 40 cm. ¿Cuál es la aceleración angular de las ruedas?

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Cálculo de la aceleración lineal o tangencial:

$$a_T = \frac{V_F - V_0}{\Delta t} \Rightarrow a_T = \left(\frac{53 - 17}{10 \text{ s}} \right) \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 1 \text{ m.s}^{-2}$$

SEGUNDO PASO. Cálculo de la aceleración angular:

$$a_T = \alpha \cdot R \Rightarrow \alpha = \frac{a_T}{R} = \frac{1 \text{ m.s}^{-2}}{0,2 \text{ m}} = 5 \text{ s}^{-2}$$

Respuesta: La aceleración angular es 5 rad/s^2 .

18. Un móvil parte del reposo y comienza a moverse con M.C.U.V con aceleración angular constante de 2 rad/s^2 . Sabiendo que, en cierto intervalo de tiempo, el móvil ha barrido un ángulo central θ y 2 segundos después ha barrido un ángulo ε , donde se cumple que: $\frac{\theta}{4} = \frac{\varepsilon}{5}$.

Determinar la medida de los ángulos α y ε .

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Llamaremos "t" al tiempo que tarde el móvil en recorrer el ángulo central θ . Analizando el tramo inicial del movimiento:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot t^2 \Rightarrow \theta = t^2 \dots (1)$$

SEGUNDO PASO. Analizando el tramo total del movimiento:

$$(\theta + \varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (t + 2)^2 \Rightarrow (\theta + \varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (t + 2)^2$$

$$(\theta + \varepsilon) = (t + 2)^2 \dots (2)$$

TERCER PASO. De la condición del problema:

$$\frac{\varepsilon}{\theta} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{\theta + \varepsilon}{\theta} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{(t+2)^2}{(t)^2} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{(t+2)}{(t)} = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

Reemplazando en (1) y (2): $\theta = 16 \text{ rad}$ y $\varepsilon = 20 \text{ rad}$

Respuesta: los ángulos miden 16 rad y 20 rad.

19. Un móvil parte del reposo y comienza a moverse con M.C.U.V con aceleración angular constante de 2 rad/s^2 . Sabiendo que, en cierto intervalo de tiempo, el móvil ha barrido un ángulo central θ y 5 segundos después ha barrido un ángulo ε , donde se cumple que: $\frac{\theta}{9} = \frac{\varepsilon}{7}$.

Determinar la medida de $(\theta + \varepsilon)$.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Llamaremos "t" al tiempo que tarde el móvil en recorrer el ángulo central θ .

Analizando el tramo inicial del movimiento:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot t^2 \Rightarrow \theta = t^2 \dots (1)$$

SEGUNDO PASO. Analizando el tramo total del movimiento:

$$(\theta + \varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (t+5)^2 \Rightarrow (\theta + \varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (t+5)^2$$

$$(\theta + \varepsilon) = (t+5)^2 \dots (2)$$

TERCER PASO. De la condición del problema:

$$\frac{\varepsilon}{\theta} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{\theta + \varepsilon}{\theta} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{(t+5)^2}{(t)^2} = \frac{16}{9}$$

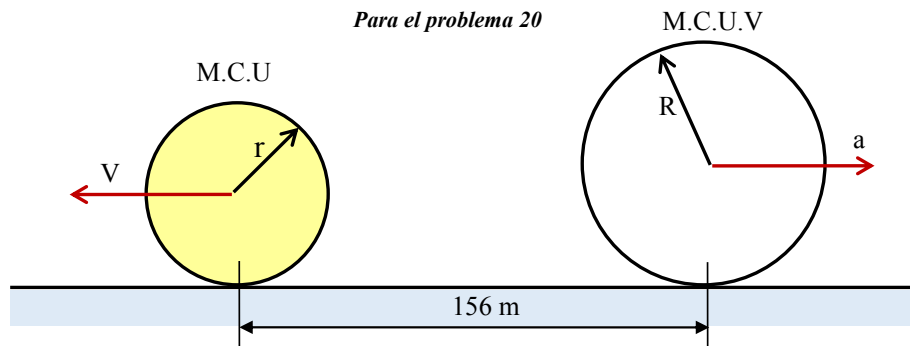
$$\frac{(t+5)}{(t)} = \frac{4}{3} \Rightarrow t = 15 \text{ s}$$

Reemplazando en (1): $\theta = 225 \text{ rad}$

Reemplazando en (2): $\theta + \varepsilon = 400 \text{ rad} \Rightarrow \varepsilon = 175 \text{ rad}$

Respuesta: el ángulo total barrido es 400 rad.

20. Dos ruedas parten de un mismo punto en sentidos opuestos con velocidades angulares del mismo valor $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$, mantiene un M.C.U y la otra un M.C.U.V acelerando a razón de 2 m/s^2 . Calcular la suma de los radios de ambas ruedas, si después de 4 segundos están distanciados 156 metros.

**RESOLUCIÓN**

PRIMER PASO. Cálculo del desplazamiento lineal para el móvil que tiene velocidad constante:

$$M.C.U: S_1 = V.T = \omega_0.r.t \quad \dots (1)$$

SEGUNDO PASO. Cálculo del desplazamiento lineal para el móvil que tiene aceleración constante:

$$M.C.U.V: S_2 = V.t + \frac{1}{2}.a_T.t^2 \Rightarrow S_2 = \omega_0.R.t + \frac{1}{2}.a_T.t^2 \quad \dots (1)$$

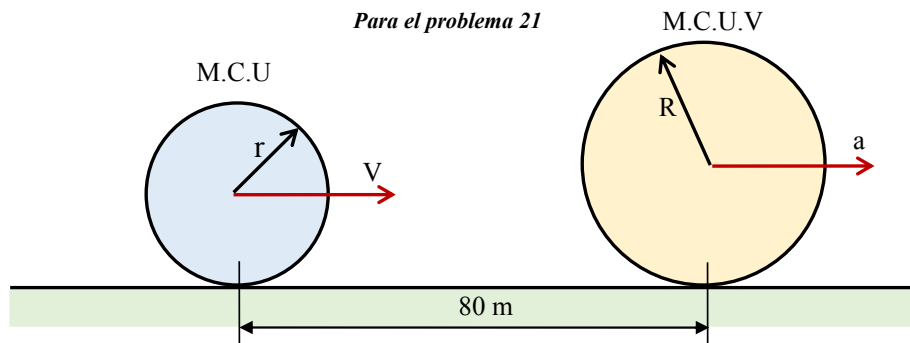
TERCER PASO. De la condición del problema: $S_1 + S_2 = 156\text{ m}$

$$\omega_0.(r+R).t + \frac{1}{2}.a_T.t^2 = 156 \Rightarrow (5).(r+R).(4) + \frac{1}{2}.(2).(4)^2 = 156$$

Resolviendo: $(r+R) = 7\text{ m}$

Respuesta: la suma de radios es 7 metros.

21. Dos ruedas parten de un mismo punto en sentidos iguales con velocidades angulares del mismo valor $\omega_0 = 5\text{ rad/s}$, mantiene un M.C.U y la otra un M.C.U.V acelerando a razón de 2 m/s^2 . Calcular la diferencia de los radios de ambas ruedas, si después de 4 segundos están distanciados 80 metros.

**RESOLUCIÓN**

PRIMER PASO. Cálculo del desplazamiento lineal para el móvil que tiene velocidad constante:

$$M.C.U: S_1 = V.T = \omega_0.r.t \quad \dots (1)$$

SEGUNDO PASO. Cálculo del desplazamiento lineal para el móvil que tiene aceleración constante:

$$M.C.U.V: S_2 = V.t + \frac{1}{2}.a_T.t^2 \Rightarrow S_2 = \omega_0.R.t + \frac{1}{2}.a_T.t^2 \quad \dots (1)$$

TERCER PASO. De la condición del problema: $S_2 - S_1 = 80\text{ m}$

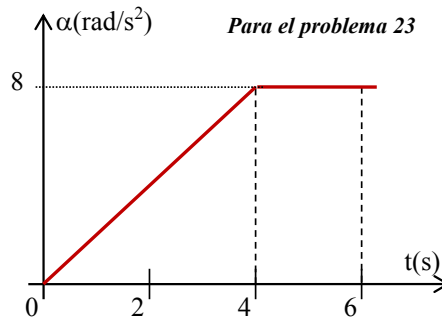
$$\omega_0 \cdot (R-r) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_t \cdot t^2 = 80 \Rightarrow (5) \cdot (R-r) \cdot (4) + \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (4)^2 = 80$$

Resolviendo: $(R-r) = 3,2\text{ m}$

Respuesta: la diferencia de radios de radios es 3,2 metros.

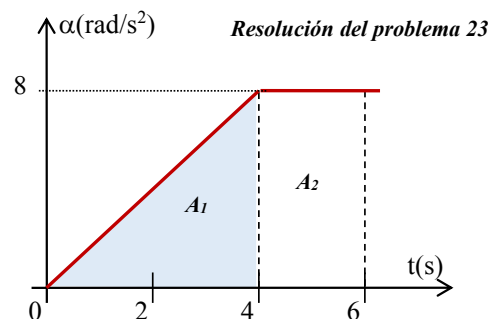
22. Dos ruedas parten de un mismo punto en sentidos iguales con velocidades angulares del mismo valor $\omega_0 = 2\text{ rad/s}$, mantiene un M.C.U y la otra un M.C.U.V acelerando a razón de 4 m/s^2 . Calcular la diferencia de los radios de ambas ruedas, si después de 5 segundos están distanciados 80 metros
- A) 1 m B) 2 m **C) 3 m** D) 4 m E) ninguna

23. Se muestra la gráfica aceleración angular versus tiempo, de una partícula que describe una trayectoria circular. Si en el instante $t=0$ su velocidad angular ω y para $t=4\text{ s}$ la velocidad angular es 3ω , determinar su velocidad angular en el instante $t=6\text{ s}$.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. En la gráfica aceleración angular versus tiempo, el área bajo la curva nos da el valor del cambio de la velocidad angular.



SEGUNDO PASO. En el intervalo de tiempo $t=0\text{ s}$ y $t=4\text{ s}$ el área del triángulo es igual al cambio de la velocidad angular.

$$\Delta\omega = A_1 \Rightarrow \omega_F - \omega_0 = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow 3\omega - \omega = \frac{(4) \cdot (8)}{2}$$

Resolviendo: $\omega = 8\text{ s}^{-1}$

TERCER PASO. En el intervalo de tiempo $t=4\text{ s}$ y $t=6\text{ s}$ la aceleración angular es constante:

$$\omega_F = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \omega_F = (24) + (8) \cdot (2) = 40 \text{ s}^{-1}$$

Respuesta: en el instante $t = 6 \text{ s}$ la velocidad angular es 40 rad/s .

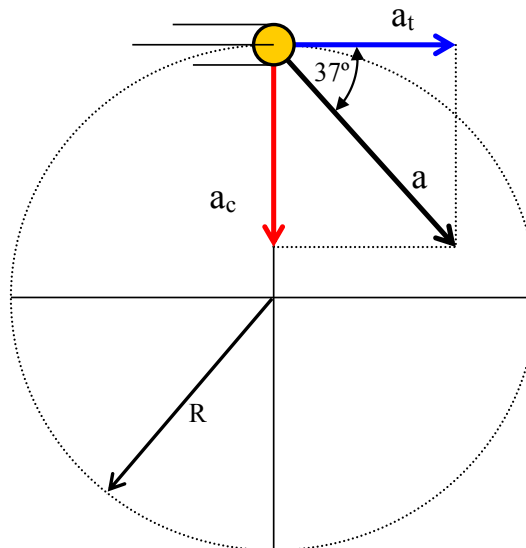
24. Una partícula que tiene M.C.U.V tiene aceleración de valor 2 m/s^2 , forma un ángulo de 37° con la velocidad tangencial. Determine el valor de la aceleración tangencial y la aceleración normal.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama donde observamos a la aceleración y la velocidad tangencial, que forman entre sí un ángulo agudo.

SEGUNDO PASO. Hacemos la descomposición rectangular de la aceleración neta.

$$\text{Sen} 37^\circ = \frac{a_c}{a} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{a_c}{2} \quad a_c = 1,2 \text{ m.s}^{-2}$$



Resolución del problema 24

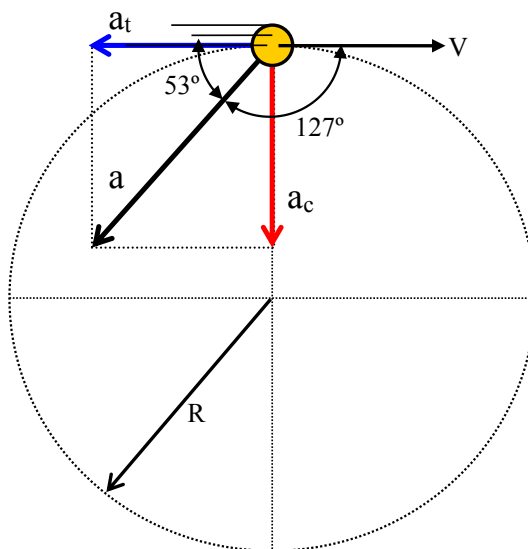
$$\text{Cos} 37^\circ = \frac{a_T}{a} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{a_T}{2} \Rightarrow a_T = 1,6 \text{ m.s}^{-2}$$

OBSERVACIÓN. Si el ángulo entre la aceleración y velocidad tangencial es agudo, entonces el movimiento es acelerado, es decir, el valor de la velocidad tangencial aumenta progresivamente.

25. Una partícula que tiene M.C.U.V tiene aceleración de valor 4 m/s^2 , forma un ángulo de 127° con la velocidad tangencial. Determine el valor de la aceleración tangencial y la aceleración normal.

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos un diagrama donde observamos a la aceleración y la velocidad tangencial, que forman entre sí un ángulo obtuso.



Resolución del problema 25

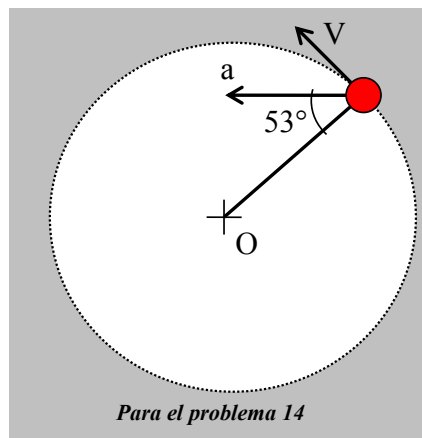
SEGUNDO PASO. Hacemos la descomposición rectangular de la aceleración neta.

$$\text{Sen} 53^\circ = \frac{a_c}{a} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{a_c}{4} \quad a_c = 3,2 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\text{Cos} 53^\circ = \frac{a_T}{a} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{a_T}{4} \Rightarrow a_T = 2,4 \text{ m.s}^{-2}$$

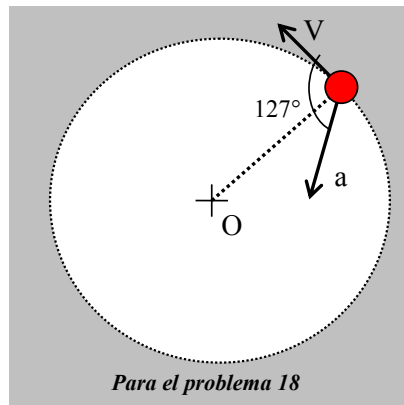
OBSERVACIÓN. Si el ángulo entre la aceleración y velocidad tangencial es obtuso, entonces el movimiento es desacelerado, es decir, el valor de la velocidad tangencial disminuye progresivamente.

10. Un cuerpo de masa 2 kg realiza un M.C.U.V. de radio 2 m. Si su posición angular θ (en radianes) en función del tiempo t (en segundos) es $\theta = 2t + \frac{t^2}{2}$, determine el módulo de la velocidad tangencial (en m/s) en el instante $t = 4s$.
 A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) Ninguna anterior
11. Una partícula que realiza una trayectoria circular parte con una rapidez de 3π rad/s y con aceleración angular de módulo 4π rad/s². Determine el número de vueltas que realizó en el décimo segundo.
 A) 20,5 B) 18,5 C) 16,5 D) 14,5 E) 22,5
12. Una partícula efectúa un M.C.U.V. con aceleración angular de $0,5$ rad/s² en una pista de radio 2 m. Si en $t = 0$ s parte del reposo, determine la longitud de arco (en m) que describe en el décimo segundo de su movimiento.
 A) 7,5 B) 8,5 C) 9,5 D) 10,5 E) 11,5
13. Una partícula describe un movimiento circular uniformemente variado, radio 1,0 m y aceleración tangencial 1 m/s², partiendo del reposo. Determine el desplazamiento angular (en rad) hasta el instante que el valor de la aceleración tangencial es igual a la aceleración centrípeta.
 A) 0,1 B) 0,3 C) 0,5 D) 0,7 E) 0,9.
14. Una partícula que tiene trayectoria circular, en un instante tiene rapidez $V = 20$ m/s y aceleración total de módulo $a = 20$ m/s² como se muestra en la figura. Determinar el radio de curvatura.



- A) 75 m B) 65 m C) 55 m D) 45 m E) 35 m
15. En el movimiento circular uniformemente variado se cumple:
 A) La aceleración tangencial es constante.
 B) La aceleración angular es perpendicular a la velocidad angular.
 C) La aceleración angular es perpendicular al plano de rotación.
 D) La aceleración normal es constante.
 E) El vector aceleración del cuerpo apunta hacia el centro de la circunferencia.

16. Un disco que inicia un M.C.U.V desde el reposo si al transcurrir el primer minuto tiene una frecuencia de 300 R.P.M. ¿Cuántas vueltas habrá dado?
A) 150 B) 200 C) 280 D) 300 E) 350
17. Un cuerpo inicia un M.C.U.V. desde el reposo con 3 rad/s^2 , luego de cierto tiempo empieza a desacelerar a razón de 6 rad/s^2 hasta que se detiene. Si el tiempo total que demora durante su movimiento es 30 s. Calcular el módulo de la velocidad angular máxima que logra el cuerpo.
A) 20 rad/s B) 40 rad/s C) 60 rad/s D) 80 rad/s E) 90 rad/s
18. En cierto instante, una partícula que realiza un M.C.U.V. tiene una aceleración total de módulo 5 m/s^2 y que forma 127° con la velocidad. Determine la rapidez del móvil 2 segundos después del instante mencionado. El radio de la trayectoria es de 16 m.



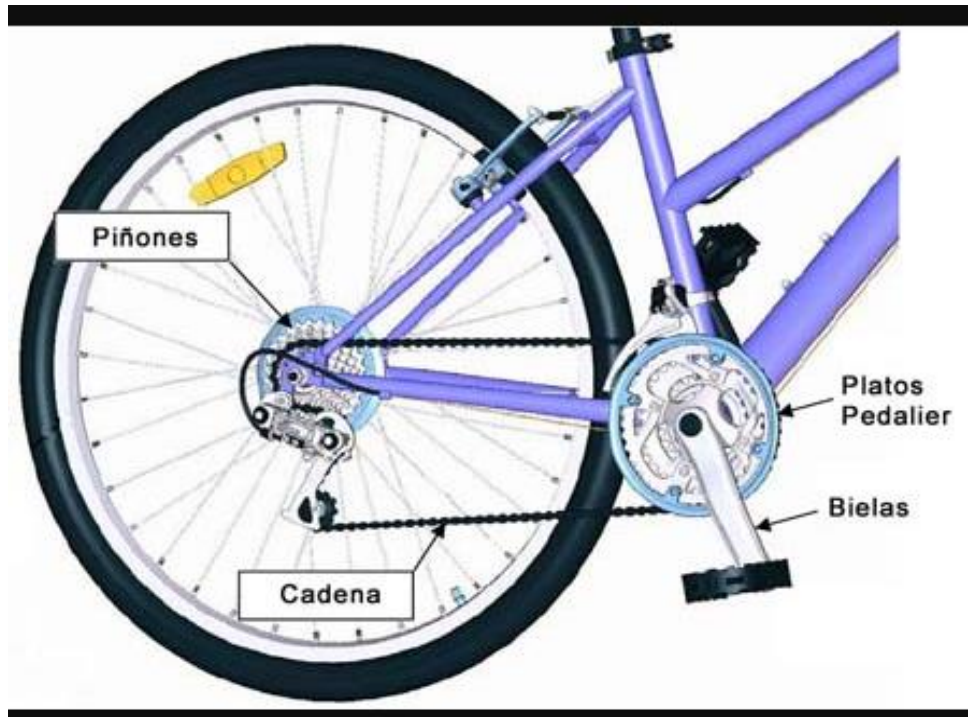
- A) 1 m/s B) 2 m/s C) 3 m/s D) 4 m/s E) 5 m/s
19. Un disco empieza a girar con aceleración angular constante. En determinado instante tiene una rapidez angular de 10 rad/s y 5 s más tarde tiene 20 rad/s . ¿Qué medida de ángulo (en rad) ha girado un radio del disco en los primeros 5 s?
A) 25 rad B) 50 rad C) 75 rad D) 100 rad E) 125 rad
20. Un disco que tiene M.C.U.V necesita 3 segundos para girar un ángulo de medida 234 radianes. Si su rapidez angular a cabo de este tiempo es 108 rad/s . Determinar el módulo de la aceleración angular (en rad/s^2).
A) 20 B) 40 C) 60 D) 80 E) ninguna anterior
21. Una partícula realiza un M.C.U.V partiendo del reposo. ¿En qué instante en (en s) el módulo de su aceleración centrípeta será el doble de lo que era en el instante $t = 2 \text{ s}$?
(1^{er} Seminario CEPRE UNI 2006 – II)
A) $2\sqrt{2}$ B) $7\sqrt{2}$ C) $10\sqrt{2}$ D) $15\sqrt{2}$ E) $20\sqrt{2}$
22. Una partícula describe un movimiento circular uniformemente variado de 1 m de radio. Si en el instante en que el vector aceleración total hace un ángulo de 53° con el vector velocidad de módulo es 2 m/s , determine el módulo del vector aceleración tangencial (en m/s^2) en ese instante.
(1^{er} Seminario CEPRE UNI 2006 – II)
A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 12

23. Una partícula se mueve en una circunferencia de 10 cm de radio con aceleración tangencial de módulo constante. Calcule el módulo de esta aceleración (en m/s^2) luego de 20 s de haber iniciado su movimiento, sabiendo que al término de la quinta vuelta su rapidez tangencial es de 10 cm/s. (1^{er} Seminario CEPRE UNI 2006 – II)
- A) $\frac{1}{\pi}$ B) $\frac{1}{2\pi}$ C) $\frac{1}{3\pi}$ D) $\frac{1}{4\pi}$ E) $\frac{1}{5\pi} 8 \hat{j} (\text{m/s})$
24. Una partícula realiza M.C.U.V con aceleración tangencial de módulo 1 m/s^2 , partiendo del reposo. Si el radio de la trayectoria es de 1 m, determine el desplazamiento angular (rad) en el instante en que el módulo de la aceleración centripeta es 1 m/s^2 . (1^{er} Seminario CEPRE UNI 2006 – II)
- A) 0,1 B) 0,3 C) 0,5 D) 0,7 E) 0,9
25. Una partícula parte del reposo en movimiento circunferencial sobre una trayectoria de radio 0,5 m y después de 0,1 s alcanza una velocidad angular de modulo $4\pi \text{ rad/s}$. Considerando que la aceleración angular es constante, ¿Cuál es el ángulo que forma la aceleración con el radio en dicho instante? (1^{er} Seminario CEPRE UNI 2006 – II)
- A) 30° B) 37° C) 53° D) $\text{arc Tg}\left(\frac{5}{\pi}\right)$ E) $\text{arc Tg}\left(\frac{5}{2\pi}\right)$
26. Un móvil parte del reposo y comienza a moverse con M.C.U.V con aceleración angular de módulo 2 rad/s^2 . Si se sabe que después de un tiempo ha barrido un ángulo central de $\theta \text{ rad}$ y 2 segundos después ha barrido un ángulo $\gamma \text{ rad}$ tal que: $\frac{\theta}{\gamma} = \frac{4}{5}$. Determinar γ en rad. (1^{er} Seminario CEPRE UNI 2006 – II)
- A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50
27. Un disco parte con velocidad angular de modulo ω_0 y realiza un M.C.U.V. Determine cuantas vueltas realiza el disco al cabo de los 10 segundos iniciales de su movimiento, si al cabo de los primeros 2 segundos efectuó 5 vueltas adquiriendo una velocidad angular de modulo $6\pi \text{ rad/s}$. (1^{er} Seminario CEPRE UNI 2006 – II)
- A) 45 B) 55 C) 65 D) 75 E) 85
28. Una partícula inicia su movimiento circunferencial con una aceleración angular constante de modulo 3 rad/s^2 . ¿Después de que tiempo (en s) el vector aceleración forma por primera vez un ángulo de 37° con el vector velocidad? (1^{er} Seminario CEPRE UNI 2006 – II)
- A) 0,5 B) 1,0 C) 1,5 D) 2,0 E) 2,5
29. Una partícula con M.C.U.V duplica su velocidad angular luego de dar 3 vueltas en un tiempo de 10 s. Determine el módulo de su aceleración angular (en rad/s^2).
- A) $3,3\pi$ B) $0,4\pi$ C) $0,02\pi$ D) $0,04\pi$ E) $0,08\pi$
30. Una polea gira un ángulo de 6,4 radianes. Si su rapidez angular inicial es $0,6 \text{ rad/s}$ que se incrementa a $2,2 \text{ rad/s}$ en un tiempo t. Calcular la aceleración angular de la polea en rad/s^2 .
- A) 0,2 B) 0,35 C) 0,55 D) 1,3 E) 2,85

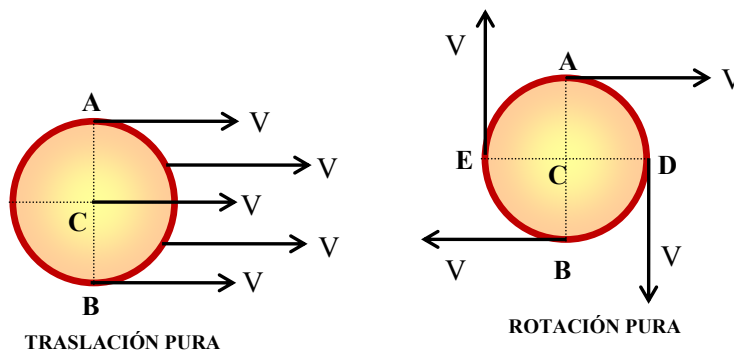
31. Señale la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:
- I. La aceleración tangencial es nula cuando la rapidez es constante.
 - II. En el M.C.U. la aceleración normal es constante.
 - III. En el M.C.U.V. la magnitud de la aceleración tangencial es constante.
- A) VVV B) VFV C) VFF D) FFF E) VFV
32. Hallar la aceleración angular (en rad/s^2) con la que una partícula debe iniciar su M.C.U.V, para que luego de 10 segundos sus aceleraciones tangencial y centrípeta sean de igual magnitud.
- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{25}$ D) $\frac{1}{50}$ E) $\frac{1}{100}$
33. Una partícula realiza un movimiento circular uniformemente acelerado con aceleración tangencial de módulo $a_t = 2 \text{ m/s}^2$. Si la magnitud de la aceleración normal en el instante $t = 0 \text{ s}$ fue de 1 m/s^2 , halle la magnitud (en m/s^2) de la aceleración normal, cuando el desplazamiento angular sea de 3 radianes.
- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13
34. Un móvil parte del reposo iniciando un M.C.U.V de radio $R = \frac{6}{\pi} \text{ m}$. Si la aceleración tangencial es $a_t = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right)$; halle el módulo de la aceleración total del móvil después de 1 segundo (en m/s^2) y el ángulo que hace con la aceleración normal (en grados sexagesimales).
- A) 3,9 ; 15 B) 4,3 ; 18,5 C) 6,4 ; 20 D) 9,3 ; 25,5 E) 12,4 ; 30
35. Una partícula inicia su M.C.U.V a partir del reposo con una aceleración angular de 2 rad/s^2 . Halle aproximadamente en qué instante (en s) su aceleración centrípeta es el cuádruplo de su aceleración tangencial.
- A) 0,3 B) 0,7 C) 1,0 D) 1,4 E) 1,8
36. Una partícula se mueve en una circunferencia ($R = 2 \text{ m}$), según la ley $\theta(t) = \pi + 0,5t \text{ rad}$, donde t está en segundo. Halle la aceleración normal, en m/s^2 , de la partícula en $t = 2 \text{ s}$.
- A) 0,25 B) 0,50 C) 1,0 D) 1,50 E) 2,00
37. Una partícula se mueve sobre la trayectoria $x^2 + y^2 = 4$ considerando un movimiento antihorario con $S = 2t^2$, donde S : se mide en m y t en s; si el movimiento se inicia a partir del punto de intersección del eje X con la circunferencia. Determine el módulo de la aceleración de la partícula (en m/s^2) en el instante $t = 2 \text{ s}$.
- A) 4 B) 7,5 C) 16 D) 16,5 E) ninguna anterior

38. Cierta ascensor tiene un agujero en una de sus paredes laterales y está bajando con una rapidez constante de 5 m/s. Cuando el agujero se encuentra a 60 m del suelo, se lanza a través de él, una bolita con velocidad horizontal (respecto al ascensor) de 2 m/s. Si $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, se pide calcular el alcance horizontal de la bolita, en m, hasta tocar el suelo.
A) 2,05 B) 4,05 C) 6,05 D) 8,05 E) 10,05
39. Un cuerpo inicialmente en reposo ($\theta = 0$, $\omega = 0$ en $t = 0$) es acelerado en sentido antihorario, en una trayectoria circular de 1.3 m de radio de acuerdo a la ecuación:
 $\alpha = 120t^2 - 48t + 16$. Determinar:
a) La velocidad angular y la posición angular como funciones del tiempo.
b) Las componentes tangencial y normal de su aceleración en $t = 2,0 \text{ s}$.
40. La velocidad angular de una rueda disminuye uniformemente con aceleración angular constante desde 900 RPM hasta 800 RPM en 5 segundos. Determinar:
a) El módulo de la aceleración angular.
b) El intervalo de tiempo más que hará falta para que la rueda se detenga.
c) El grafico de ω versus t , sabiendo que en $t = 0$, $\omega_0 = 94,2 \text{ rad/s}$.
d) Realizar el grafico de θ versus t , si en $t = 0$, es $\theta_0 = 0$.
41. Una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio $R = 2 \text{ m}$ con M.C.U y una frecuencia de 5 RPS. Si cuando $t = 0 \text{ s}$ pasa por el punto P. En el instante $t = 0,15 \text{ s}$ determinar:
a) Su posición en función al ángulo central.
b) El módulo de la velocidad tangencial.
c) El módulo de las componentes tangencial y normal de la aceleración
42. El ángulo que gira la rueda de un generador es $\theta = 2 + 4t - 3t^2$ (el radio de la rueda es $r = 2 \text{ m}$). Indique cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas:
I. Después de 2 segundos la velocidad angular es de 10 rad/s.
II. En $t = 3 \text{ s}$, el arco recorrido tiene una longitud de 82 m.
III. La aceleración tangencial es constante e igual 3 m/s².
A) VVV B) FFF C) FVV D) FFV E) FVF

CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

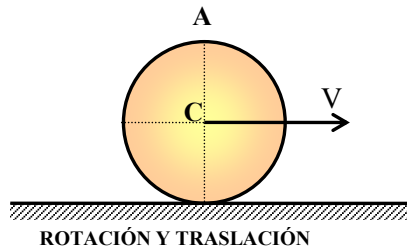


- 1. TRASLACIÓN:** Un cuerpo sólido rígido realiza un movimiento de traslación cuando, considerando un segmento entre dos puntos A y B del cuerpo, éste se mantiene siempre paralelo a sí mismo, durante todo el movimiento. Considerando el cuerpo rígido como un conjunto continuo de puntos materiales, cada punto material describirá, en el movimiento, una trayectoria determinada y a todos los demás puntos materiales describirán trayectorias equidistantes entre sí.
- 2.** Si la traslación es rectilínea, las trayectorias son rectas y paralelas entre sí (equidistantes), y si la traslación es curvilínea, las trayectorias de los puntos materiales son curvas planas o alabeadas equidistantes entre sí.

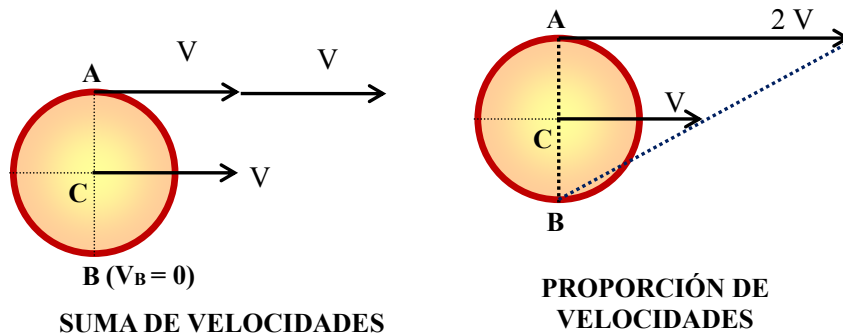


Conclusión: en un sólido en movimiento de traslación todos sus puntos tienen la misma velocidad instantánea y la misma aceleración instantánea.

3. CUERPO RÍGIDO. Es aquel cuerpo cuyas dimensiones externas no cambian en el tiempo, tienen forma y volumen constante, tal que la distancia entre dos puntos del cuerpo no cambia. Ejemplo de cuerpo rígido: Viga, columna, tabla, rueda de acero, biela, cilindro metálico, manivela, etc.



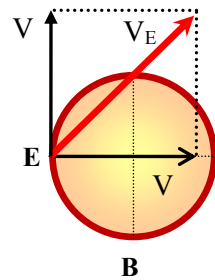
4. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO PLANO PARALELO. Por movimiento plano paralelo se entiende el movimiento de un cuerpo sólido durante el cual todos sus puntos se desplazan paralelamente a un plano fijo de referencia. Analicemos la *traslación pura* sin rotación de una rueda, en este caso todos los puntos del cuerpo rígido tienen la misma velocidad respecto de la tierra. Ahora analicemos la *rotación pura* de una rueda, el centro de rotación “C” no tiene velocidad de traslación, pero todos los puntos del cuerpo rígido tienen igual velocidad angular y los puntos periféricos tienen movimiento circunferencial uniforme.



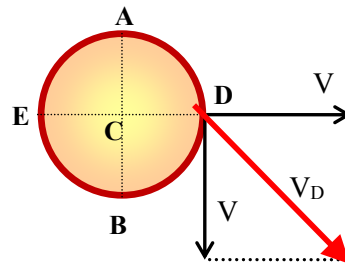
5. DETERMINACIÓN DE LAS VELOCIDADES DE LOS PUNTOS DEL CUERPO.

Si la rueda tiene movimiento de traslación y rotación tal que el punto de contacto con la superficie no resbala, entonces el punto B tiene velocidad de traslación nula:

La velocidad del punto B se consigue de la suma de la velocidad de traslación de C más la velocidad de B respecto de C: $\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{B/C} = \vec{0}$



VELOCIDAD EN “E”



VELOCIDAD EN “D”

La velocidad del punto A se consigue de la suma de la velocidad de traslación de C más la velocidad de A respecto de C: $\vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{V}_{A/C}$

La rapidez del punto A es el doble de la rapidez del centro C de la rueda: $|\vec{V}_A| = 2V$

La velocidad del punto D se consigue de la suma de la velocidad de traslación de C más la velocidad de D respecto de C:

$$\vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{D/C}$$

aplicando el Teorema de Pitágoras se obtiene que:

$$|\vec{V}_D| = V\sqrt{2}$$

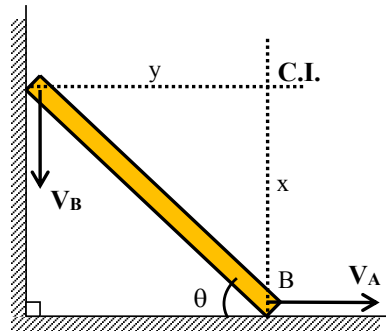
La velocidad del punto E se consigue de la suma de la velocidad de traslación de C más la velocidad de E respecto de C:

$$\vec{V}_E = \vec{V}_C + \vec{V}_{E/C}$$

aplicado el Teorema de Pitágoras se obtiene que:

$$|\vec{V}_E| = V\sqrt{2}$$

6. CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN. Si en un instante un punto del cuerpo rígido tiene velocidad nula, entonces este punto se constituye como el centro de rotación en ese instante, entonces el cuerpo rígido experimenta una **Rotación Pura**, la velocidad de cualquier punto es perpendicular a la **posición** respecto del centro instantáneo de rotación. Este es un método, práctico muy útil en la resolución de problemas. Cuando analizamos el movimiento de la rueda que se traslada y rota sin resbalar, el punto B de contacto con la tierra se comporta como el centro instantáneo de rotación.



CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN

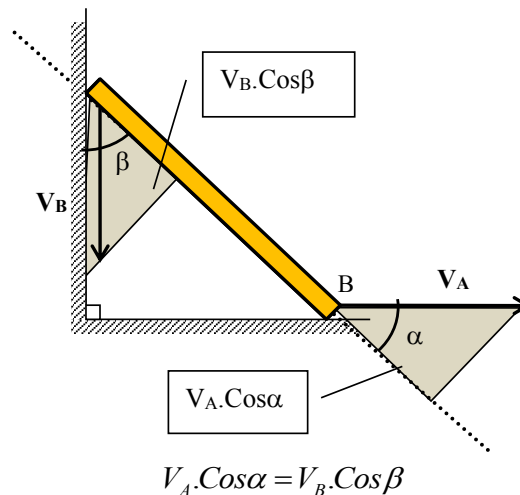
Analicemos el movimiento de una barra de longitud L que apoya en una pared vertical y en una superficie horizontal. Sean los A y B los extremos de la barra, entonces determinamos el Centro Instantáneo de Rotación, trazando perpendiculares a las velocidades de A y de B. Si observamos desde el centro instantáneo de rotación todos los puntos del cuerpo rígido experimentan un movimiento de Rotación Pura.

Aplicamos las leyes del Movimiento Circunferencial Uniforme: $\omega = \frac{V}{R}$

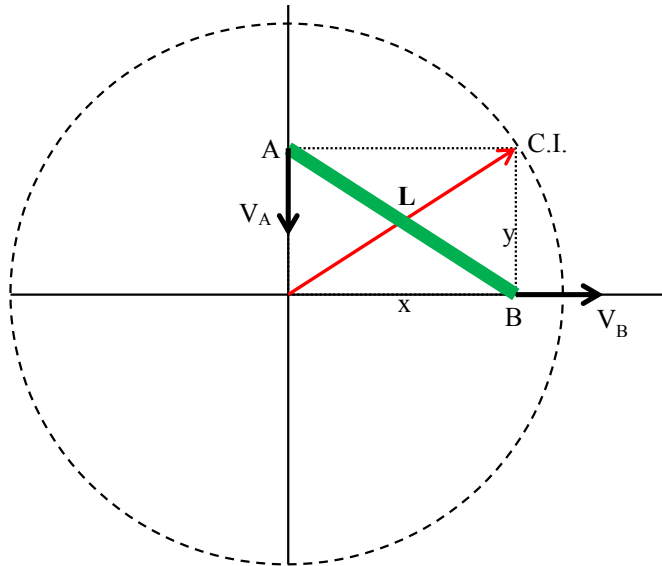
$$\omega = \frac{V_A}{x} = \frac{V_B}{y} \text{ entonces se cumple que: } V_A = \omega \cdot x \text{ y } V_B = \omega \cdot y$$

7. TEOREMA DE LAS PROYECCIONES DE VELOCIDADES DE DOS PUNTOS DEL CUERPO.

La determinación de las velocidades de los puntos del cuerpo rígido con ayuda de la composición de velocidades (movimiento compuesto) es habitualmente muy complicado de resolver. Sin embargo, se puede determinar mediante métodos prácticos y simples, uno de ellos es el teorema siguiente, que dice: **“las proyecciones de las velocidades de dos puntos del cuerpo sólido sobre la recta que une estos puntos, son iguales”**.

MÉTODO DE LAS PROYECCIONES

EJEMPLO 1: Determinar la trayectoria que sigue el centro instantáneo de rotación (C.I.) de la barra AB, si resbala como se muestra, tocando la pared vertical y la superficie horizontal



RESOLUCIÓN

I. Respecto del centro instantáneo de rotación todos los puntos de la barra AB tiene la misma velocidad angular. La velocidad lineal es perpendicular con el radio de curvatura.

$$V_A \perp x \quad e \quad V_B \perp y$$

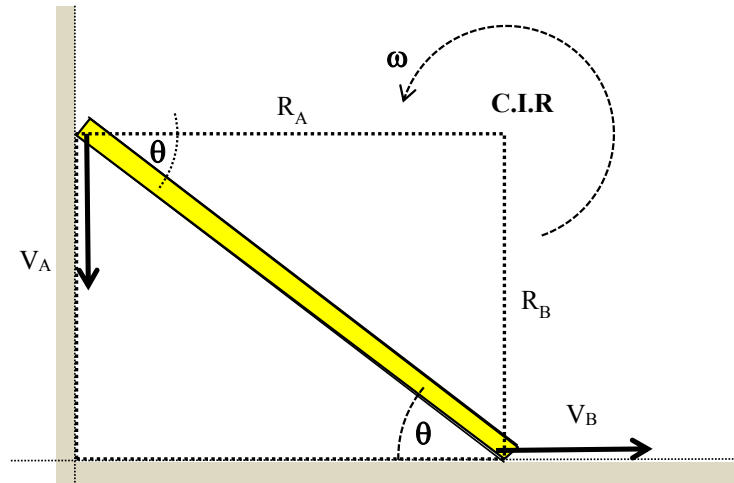
II. En el rectángulo formado la diagonal mide el largo de la barra, L.

Para cualquier instante de tiempo se cumple que:

$$x^2 + y^2 = L^2 \quad (\text{ecuación de la circunferencia})$$

Por lo tanto, la trayectoria del centro instantáneo de rotación (C.I.R) es una circunferencia.

EJEMPLO 2: Una barra AB, tiene sus extremos A y B a moverse horizontal y verticalmente, tal como se muestra. Si la velocidad del extremo A es $V_A = 6 \text{ m/s}$ en el mismo instante $\theta = 37^\circ$, calcular la velocidad del extremo B.



RESOLUCIÓN. Respecto del centro instantáneo de rotación todos los puntos de la barra AB tiene la misma velocidad angular. La velocidad lineal es perpendicular con el radio de curvatura.

$$V_A \perp R_A \quad e \quad V_B \perp R_B$$

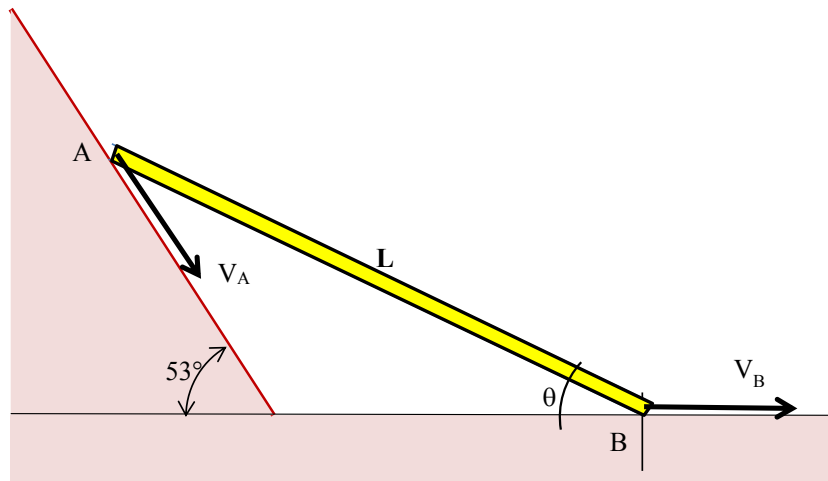
$$\omega = \frac{V_A}{R_A} = \frac{V_B}{R_B} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{R_A}{R_B} = \text{Ctg} \theta$$

Despejando tenemos: $\frac{V_A}{V_B} = \text{Ctg} \theta \Rightarrow V_B = V_A \cdot (\text{Tan} \theta)$

Reemplazando: $V_B = V_A \cdot (\text{Tan} 37^\circ) = \left(6 \frac{m}{s}\right) \left(\frac{3}{4}\right) = 4,5 \frac{m}{s}$

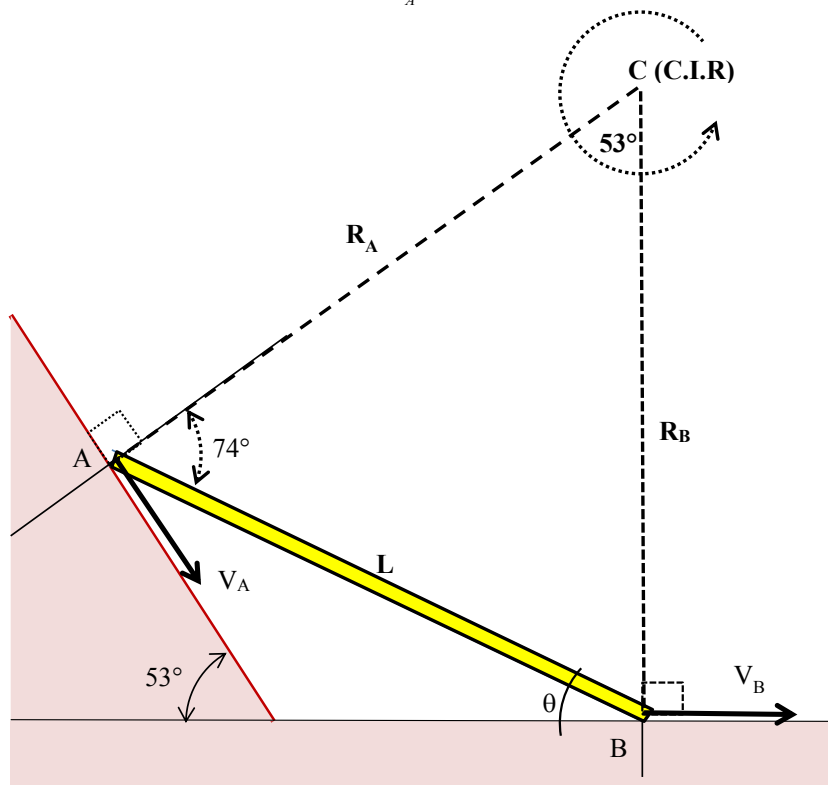
Respuesta: la rapidez del punto B es $4,5 \frac{m}{s}$

EJEMPLO 3: Una barra AB de largo 4 m se mueve de manera que sus extremos están en contacto con el piso horizontal y un plano inclinado 53° con la horizontal. Si la velocidad del extremo A es de 10 m/s, calcular la velocidad del punto B en el mismo instante que $\theta = 37^\circ$

**RESOLUCIÓN**

En el triángulo formado por los puntos A, C, B para el instante mostrado, es isósceles:

$$AB = R_A = L = 4\text{ m}$$



Resolviendo el triángulo ABC, mediante la ley de cosenos:

$$R_B = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2(4)(4)\cos 74^\circ} = 4,8$$

Respecto del centro instantáneo de rotación todos los puntos de la barra AB tiene la misma velocidad angular. La velocidad lineal es perpendicular con el radio de curvatura.

$$V_A \perp R_A \quad e \quad V_B \perp R_B$$

$$\omega = \frac{V_A}{R_A} = \frac{V_B}{R_B} \Rightarrow \frac{10 \frac{m}{s}}{4 m} = \frac{V_B}{4,8 m}$$

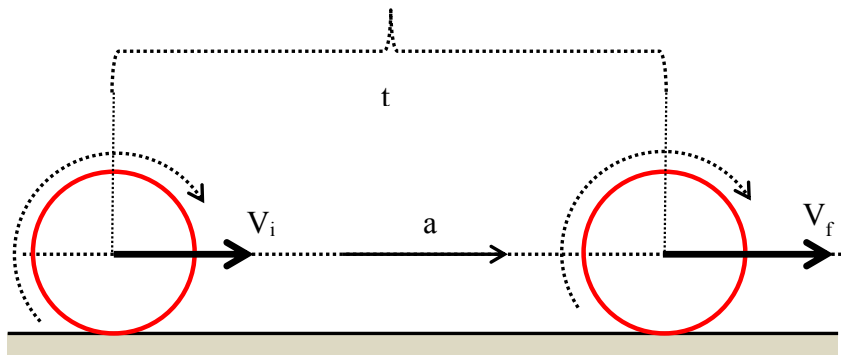
Despejando tenemos: $V_B = 12 \frac{m}{s}$

EJEMPLO 4: La velocidad de un automóvil cuyas llantas tiene un diámetro de 50 cm aumenta uniformemente desde 19 km/h hasta 55 km/h en 10 segundos. Calcular la aceleración angular de las llantas.

RESOLUCIÓN

I. Movimiento de traslación. Calculamos la aceleración lineal del eje de la rueda.

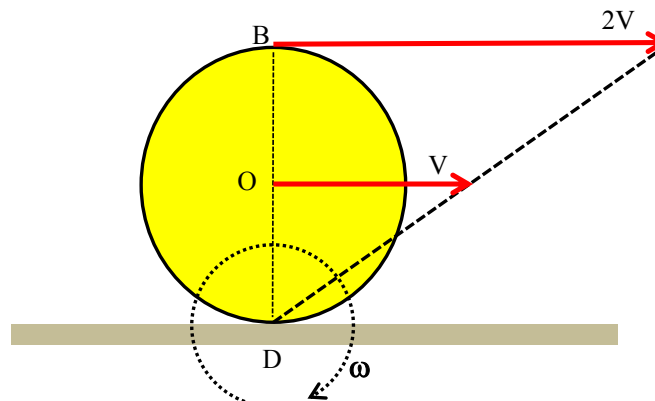
$$a = \frac{V_f - V_i}{\Delta t} = \frac{55 \text{ km/h} - 19 \text{ km/h}}{10 \text{ s}} = \frac{36 \text{ km/h}}{10 \text{ s}} = 1 \frac{m}{s^2}$$



II. Cálculo de la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{1 \frac{m}{s^2}}{0,25 m} = 4 \frac{rad}{s^2}$$

EJEMPLO 5: La rueda mostrada de 0,4 m de radio rueda sin resbalar por el piso horizontal, y avanza con velocidad de 16 m/s. Calcular la velocidad angular de la rueda respecto a un eje instantáneo de rotación que pasa por el punto de contacto con el piso (D).



RESOLUCIÓN

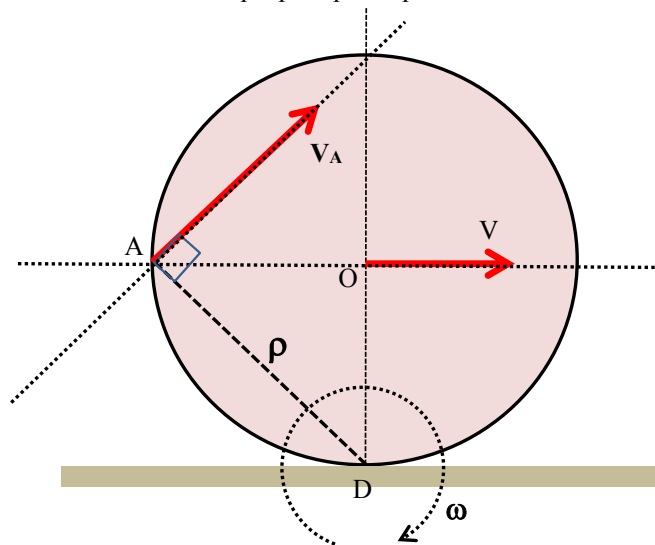
Si observamos desde el centro instantáneo de rotación todos los puntos del cuerpo rígido experimentan un movimiento de Rotación Pura.

Aplicamos las leyes del Movimiento Circunferencial Uniforme, respecto del punto D:

$$\omega = \frac{2V}{2R} = \frac{V}{R} = \frac{16 \frac{m}{s}}{0,4 m} = 40 \frac{rad}{s}$$

Respuesta: La velocidad angular es $40 \frac{rad}{s}$

EJEMPLO 6: La llanta mostrada de radio $R = 0,4m$ rueda sin resbalar sobre el piso horizontal, y avanza con velocidad de $V = 16m/s$ m/s. Calcular la velocidad lineal en el punto A de la rueda respecto a un eje instantáneo de rotación que pasa por el punto de contacto con el piso (D).

**RESOLUCIÓN**

Si observamos desde el centro instantáneo de rotación todos los puntos del cuerpo rígido experimentan un movimiento de Rotación Pura.

Aplicamos las leyes del Movimiento Circunferencial Uniforme, respecto del punto D:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{16 \frac{m}{s}}{0,4 m} = 40 \frac{rad}{s}$$

Cálculo de la velocidad en el punto A. Respecto del punto D todos los puntos de la llanta tienen las mismas velocidades angulares.

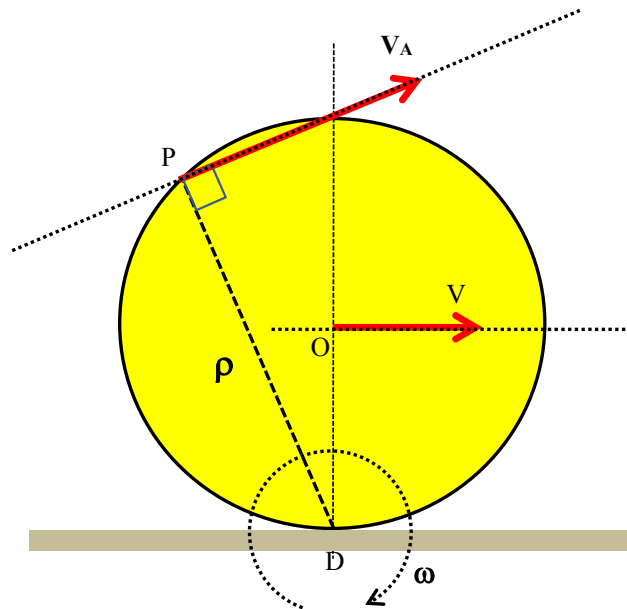
$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{V_A}{\rho} \Rightarrow V_A = \rho \cdot \omega$$

Cálculo de radio de giro: $\rho = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2} = 0,4\sqrt{2} m$

$$V_A = \rho \cdot \omega = (0,4\sqrt{2} m) \left(40 \frac{1}{s} \right) = 16\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

Respuesta: La velocidad lineal en A es $16\sqrt{2} \frac{m}{s}$

EJEMPLO 7: La llanta mostrada de radio $R = 0,4\text{ m}$ rueda sin resbalar sobre el piso horizontal, y avanza con velocidad de $V = 16\text{ m/s}$. Calcular la velocidad lineal en el punto P de la rueda respecto a un eje instantáneo de rotación que pasa por el punto de contacto con el piso (D). $m\angle PDO = 30^\circ$



RESOLUCIÓN

Si observamos desde el centro instantáneo de rotación todos los puntos del cuerpo rígido experimentan un movimiento de Rotación Pura.

Aplicamos las leyes del Movimiento Circunferencial Uniforme, respecto del punto D:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{16 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,4 \text{ m}} = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Cálculo de la velocidad lineal en el punto P. Respecto del punto D todos los puntos de la llanta tienen las mismas velocidades angulares.

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{V_P}{\rho} \Rightarrow V_P = \rho \cdot \omega$$

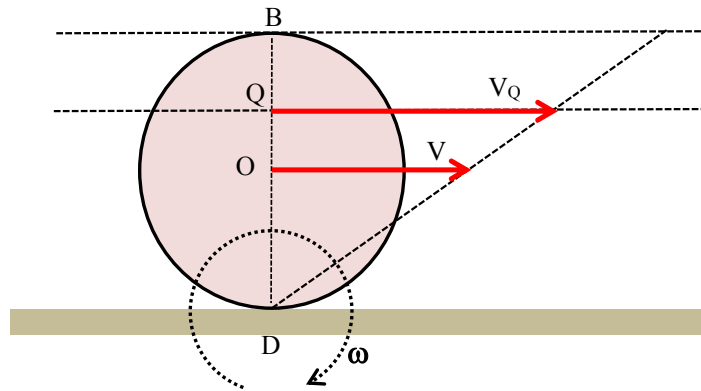
Aplicamos las propiedades del triángulo rectángulo notable de 30° y 60° . Cálculo de radio de giro:

$$\rho = R\sqrt{3} = 0,4\sqrt{3} \text{ m}$$

$$V_P = \rho \cdot \omega = (0,4\sqrt{3} \text{ m}) \left(40 \frac{1}{\text{s}} \right) = 16\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Respuesta: La velocidad lineal en P es $16\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

EJEMPLO 8: La rueda mostrada de $0,4\text{ m}$ de radio rueda sin resbalar por el piso horizontal, y avanza con velocidad de $V = 16\text{ m/s}$. Calcular la velocidad lineal del punto Q de la rueda respecto a un eje instantáneo de rotación que pasa por el punto de contacto con el piso (D). $OQ = QB = 0,2\text{ m}$

**RESOLUCIÓN**

Si observamos desde el centro instantáneo de rotación todos los puntos del cuerpo rígido experimentan un movimiento de Rotación Pura.

Aplicamos las leyes del Movimiento Circunferencial Uniforme, respecto del punto D:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{16 \frac{m}{s}}{0,4 m} = 40 \frac{rad}{s}$$

Cálculo de la velocidad lineal en el punto Q. Respecto del punto D todos los puntos de la llanta tienen las mismas velocidades angulares.

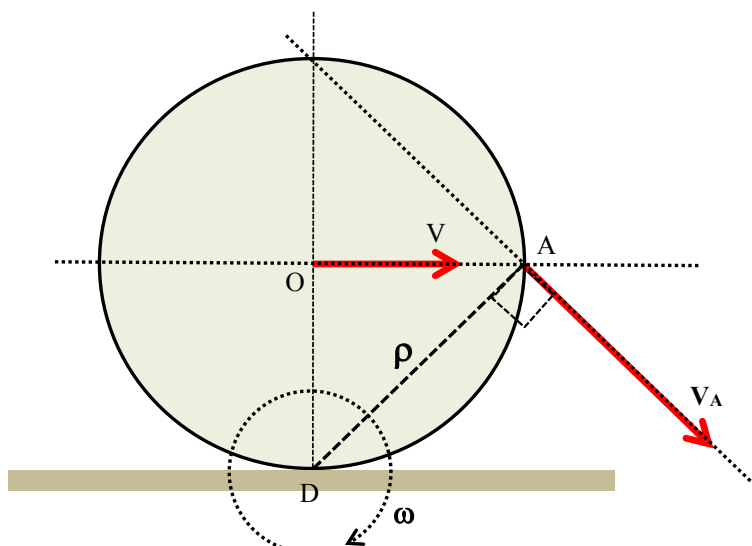
$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{V_Q}{\rho} \Rightarrow V_Q = \rho \cdot \omega$$

Cálculo de radio de giro: $\rho = DQ = 0,6 m$

$$V_Q = \rho \cdot \omega = (0,6 m) \left(40 \frac{1}{s} \right) = 24 \frac{m}{s}$$

Respuesta: La velocidad lineal en Q es $24 \frac{m}{s}$

EJEMPLO 9: La llanta mostrada de radio $R = 0,4 m$ rueda sin resbalar sobre el piso horizontal, y avanza con velocidad de $V = 16 m/s$. Calcular la velocidad lineal en el punto A de la rueda respecto a un eje instantáneo de rotación que pasa por el punto de contacto con el piso (D).

**RESOLUCIÓN**

Si observamos desde el centro instantáneo de rotación todos los puntos del cuerpo rígido experimentan un movimiento de Rotación Pura.

Aplicamos las leyes del Movimiento Circunferencial Uniforme, respecto del punto D:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{16 \frac{m}{s}}{0,4 \text{ m}} = 40 \frac{rad}{s}$$

Cálculo de la velocidad en el punto A. Respecto del punto D todos los puntos de la llanta tienen las mismas velocidades angulares.

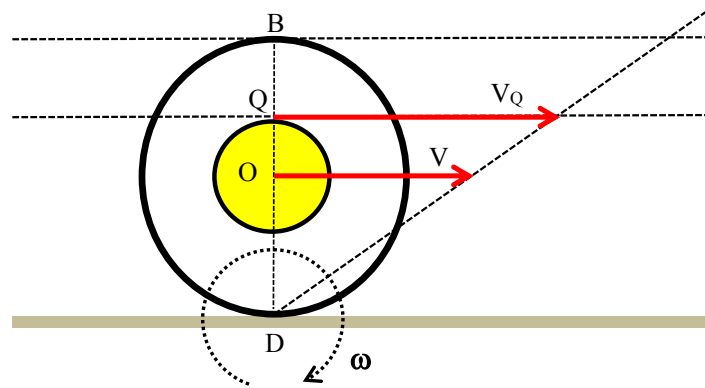
$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{V_A}{\rho} \Rightarrow V_A = \rho \cdot \omega$$

Cálculo de radio de giro: $\rho = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2} = 0,4 \cdot \sqrt{2} \text{ m}$

$$V_A = \rho \cdot \omega = (0,4 \cdot \sqrt{2} \text{ m}) \left(40 \frac{1}{s} \right) = 16\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

Respuesta: La velocidad lineal en A es $16\sqrt{2} \frac{m}{s}$

EJEMPLO 10: La llanta mostrada de 0,4 m de radio rueda sin resbalar por el piso horizontal, avanza con velocidad de V . Calcular la velocidad lineal del punto O (eje de la rueda) sabiendo que la velocidad del punto Q de la rueda respecto a un eje instantáneo de rotación que pasa por el punto de contacto con el piso (D) es 12 m/s. $OQ = QB = 0,2 \text{ m}$

**RESOLUCIÓN**

Si observamos desde el centro instantáneo de rotación todos los puntos del cuerpo rígido experimentan un movimiento de Rotación Pura.

Aplicamos las leyes del Movimiento Circunferencial Uniforme, respecto del punto D:

$$\omega = \frac{V_O}{\rho} = \frac{12 \frac{m}{s}}{0,6 m} = 20 \frac{rad}{s}$$

Cálculo de la velocidad lineal en el punto O. Respecto del punto D, todos los puntos de la llanta tienen las mis velocidades angulares.

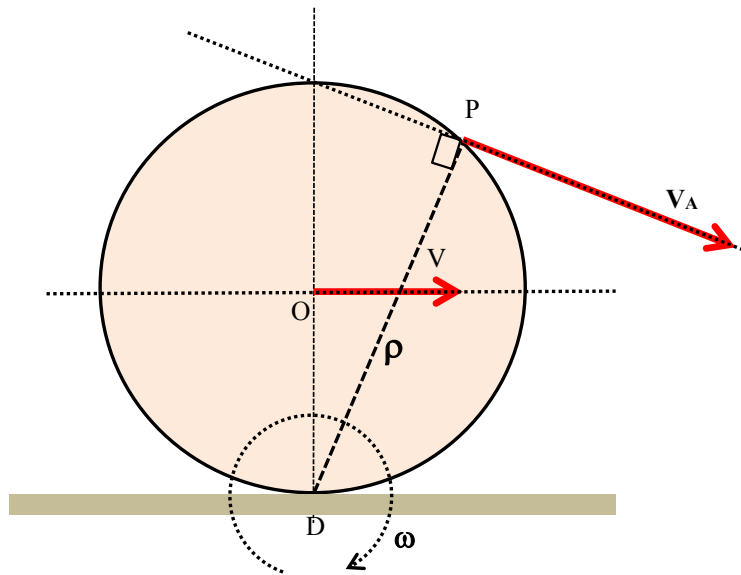
$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{V_O}{\rho} \Rightarrow V = \omega.R$$

Reemplazando los datos:

$$V = \omega.R = \left(20 \frac{1}{s}\right)(0,4 m) = 8 \frac{m}{s}$$

Respuesta: La velocidad lineal del eje de la llanta es $8 \frac{m}{s}$

EJEMPLO 11: La llanta mostrada de radio $R = 0,4 m$ rueda sin resbalar sobre el piso horizontal, y avanza con velocidad de $V = 16 m/s$. Calcular la velocidad lineal en el punto P de la rueda respecto a un eje instantáneo de rotación que pasa por el punto de contacto con el piso (D). $m\angle PDO = 30^\circ$

**RESOLUCIÓN**

Si observamos desde el centro instantáneo de rotación todos los puntos del cuerpo rígido experimentan un movimiento de Rotación Pura.

Aplicamos las leyes del Movimiento Circunferencial Uniforme, respecto del punto D:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{16 \frac{m}{s}}{0,4 \text{ m}} = 40 \frac{rad}{s}$$

Cálculo de la velocidad lineal en el punto P. Respecto del punto D todos los puntos de la llanta tienen las mismas velocidades angulares.

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{V_P}{\rho} \Rightarrow V_P = \rho \cdot \omega$$

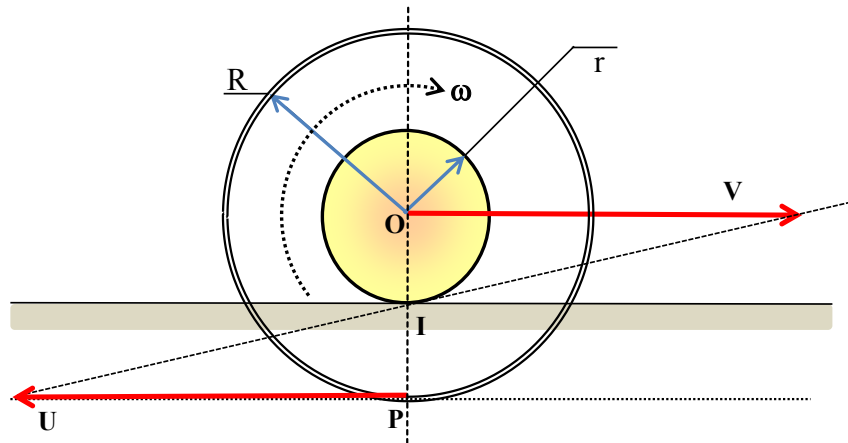
Aplicamos las propiedades del triángulo rectángulo notable de 30° y 60°. Cálculo de radio de giro:

$$\rho = R\sqrt{3} = 0,4\sqrt{3} \text{ m}$$

$$V_P = \rho \cdot \omega = (0,4\sqrt{3} \text{ m}) \left(40 \frac{1}{s} \right) = 16\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

Respuesta: La velocidad lineal en P es $16\sqrt{3} \frac{m}{s}$

EJEMPLO 12: Las ruedas de un ferrocarril, que se mueven horizontalmente hacia la derecha con rapidez $V = 50 \text{ km/h}$, ruedan sin resbalar sobre la línea férrea en la forma que se muestra. Determinar la rapidez (en km/h) con que se mueve el punto más bajo (punto P) de la rueda en cada instante, sabiendo que $R = 22 \text{ cm}$ y $r = 20 \text{ cm}$.

**RESOLUCIÓN**

Si observamos desde el centro instantáneo de rotación I, todos los puntos del cuerpo rígido experimentan un movimiento de Rotación Pura.

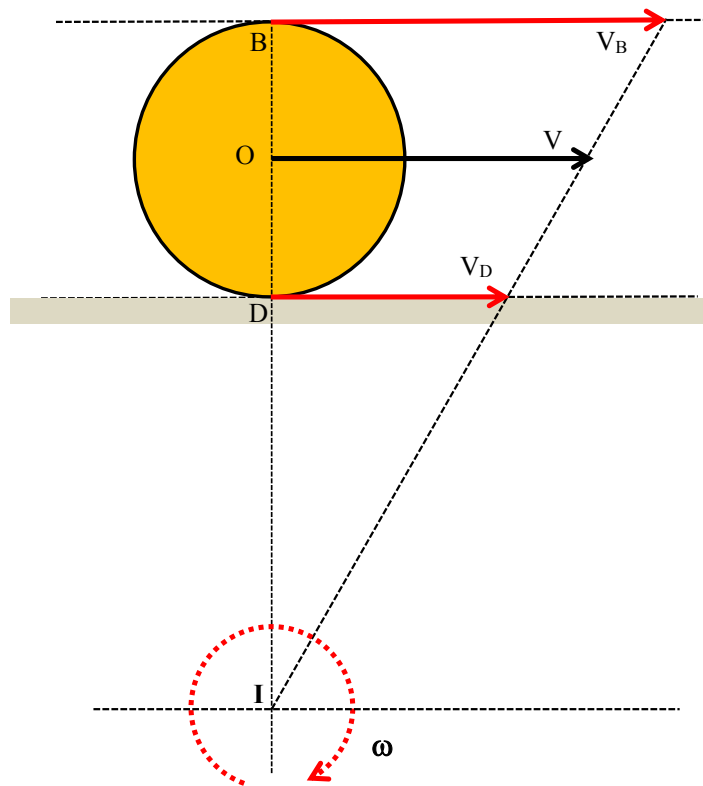
Aplicamos las leyes del Movimiento Circunferencial Uniforme, respecto del punto I:

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{U}{R-r} \Rightarrow U = \left(\frac{R-r}{r} \right) V$$

Reemplazando los datos: $U = \left(\frac{R-r}{r} \right) V = \left(\frac{22-20}{20} \right) 50 \frac{km}{h} = 5 \frac{km}{h}$

Respuesta: La velocidad lineal en P es $5 \frac{km}{h}$

EJEMPLO 13: La llanta mostrada rueda y resbala por el piso horizontal, tal que el punto B avanza con velocidad de $V_B = 6 m/s$ y el punto D de contacto con el piso avanza con $V_D = 2 m/s$. Calcular la velocidad lineal del punto O (eje de la llanta de avión).

**RESOLUCIÓN**

Si observamos desde el centro instantáneo de rotación I, todos los puntos del cuerpo rígido experimentan un movimiento de Rotación Pura.

Aplicamos las leyes del Movimiento Circunferencial Uniforme, respecto del punto I:

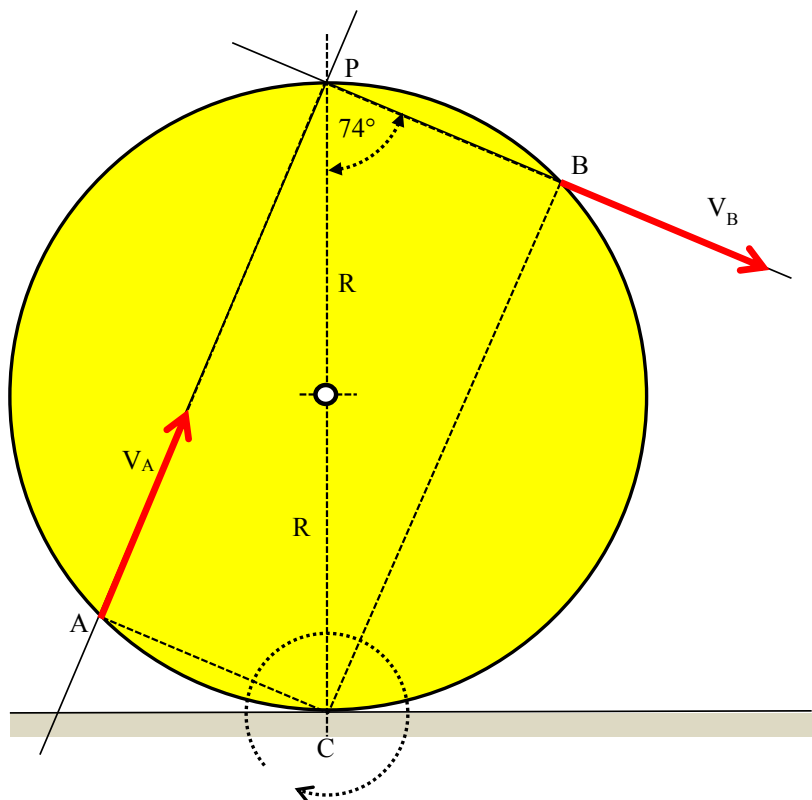
$$\omega = \frac{V_B}{BI} = \frac{V_O}{OI} = \frac{V_D}{DI}$$

Aplicamos la propiedad de la mediana en un trapecio:

$$V_0 = \frac{V_B + V_D}{2} = \frac{6 + 2}{2} = 4 \frac{m}{s}$$

Respuesta: la rapidez de traslación del eje de la llanta es $4 \frac{m}{s}$

EJEMPLO 14: El disco mostrado rueda sin resbalar, talque la velocidad instantánea del punto A es $V_A = 7 \text{ m/s}$, calcular la velocidad instantánea del punto B.



RESOLUCIÓN

Si observamos desde el centro instantáneo de rotación C, todos los puntos del cuerpo rígido experimentan un movimiento de Rotación Pura.

Debemos aclarar que el cuadrilátero A, P, B, C es un rectángulo donde la diagonal es el diámetro de la circunferencia. El ángulo recto se obtiene aplicando el teorema del arco capaz.

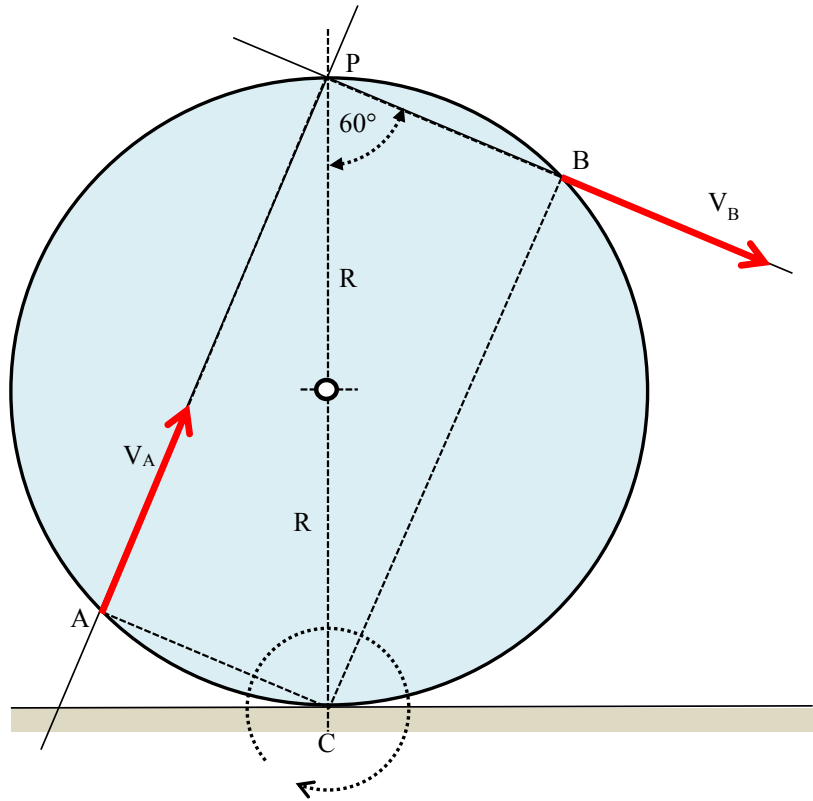
Aplicamos las leyes del Movimiento Circunferencial Uniforme, respecto del punto C:

$$\omega = \frac{V_A}{CA} = \frac{V_B}{CB} \Rightarrow \frac{V_A}{2R \cdot \cos 74^\circ} = \frac{V_B}{2R \cdot \sin 74^\circ}$$

$$\text{Despejando tenemos: } V_B = V_A \cdot \tan 74^\circ \Rightarrow V_B = 7 \left(\frac{24}{7} \right) = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Respuesta: el valor de la velocidad lineal en B es $24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

EJEMPLO 15: El disco mostrado rueda sin resbalar, talque la velocidad instantánea del punto A es $V_A = 10 \text{ m/s}$, calcular la velocidad instantánea del punto B.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Si observamos desde el centro instantáneo de rotación C, todos los puntos del cuerpo rígido experimentan un movimiento de Rotación Pura.

SEGUNDO PASO. Debemos aclarar que el cuadrilátero A, P, B, C es un rectángulo donde la diagonal es el diámetro de la circunferencia. El ángulo recto se obtiene aplicando el teorema del arco capaz.

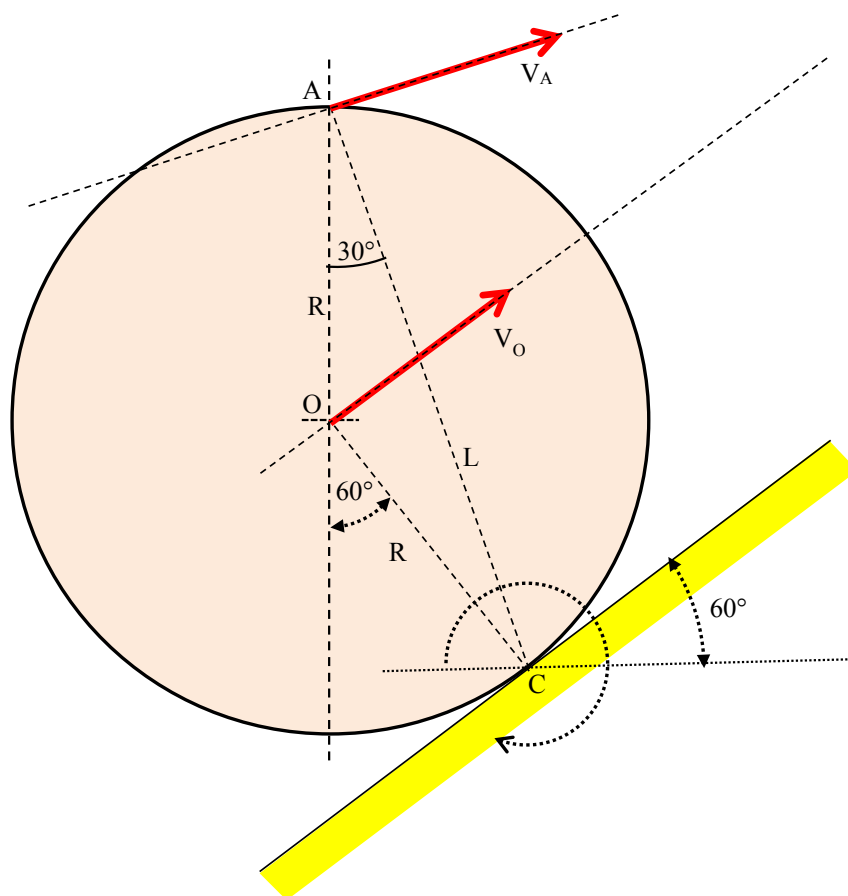
TERCER PASO. Aplicamos las leyes del Movimiento Circunferencial Uniforme, respecto del punto C:

$$\omega = \frac{V_A}{CA} = \frac{V_B}{CB} \Rightarrow \frac{V_A}{2R \cdot \cos 60^\circ} = \frac{V_B}{2R \cdot \sin 60^\circ}$$

$$\text{Despejando tenemos: } V_B = V_A \cdot \tan 60^\circ \Rightarrow V_B = 10 \cdot (\sqrt{3}) = 17,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Respuesta: el valor de la velocidad lineal en B es $17,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

EJEMPLO 16: Un disco de radio R sube sobre un plano inclinado rodando sin resbalar, la velocidad lineal del centro del disco es $V_O = \sqrt{3} \text{ m/s}$. Encontrar la velocidad del punto A en la periferia del disco cuando A se encuentra en el extremo superior de su diámetro vertical del disco.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Si observamos desde el centro instantáneo de rotación C , todos los puntos del cuerpo rígido experimentan un movimiento de Rotación Pura.

SEGUNDO PASO. Observe que la velocidad y el radio instantáneo son perpendiculares entre sí, $V_A \perp AC$ y $V_O \perp OC$

TERCER PASO. Aplicamos las leyes del Movimiento Circunferencial Uniforme, respecto del punto C :

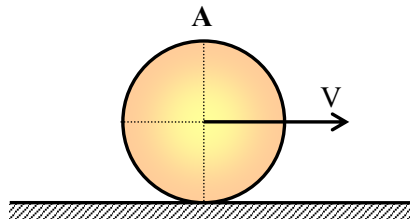
$$\omega = \frac{V_A}{CA} = \frac{V_O}{CO} \Rightarrow \frac{V_A}{R\sqrt{3}} = \frac{V_O}{R}$$

$$\text{Despejando tenemos: } V_A = V_O \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V_A = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}) = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

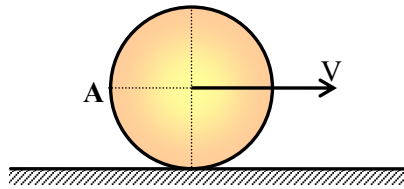
Respuesta: el valor de la velocidad lineal en A es $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE

1. Una rueda gira sin resbalar y se traslada con velocidad constante de módulo V . Determine el módulo de la velocidad del punto "A".

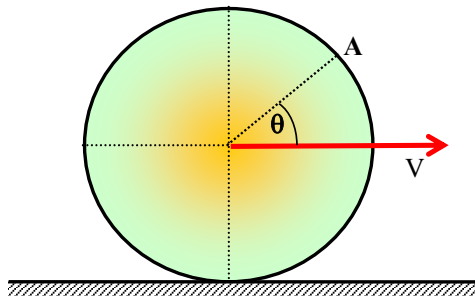


Para el problema 01

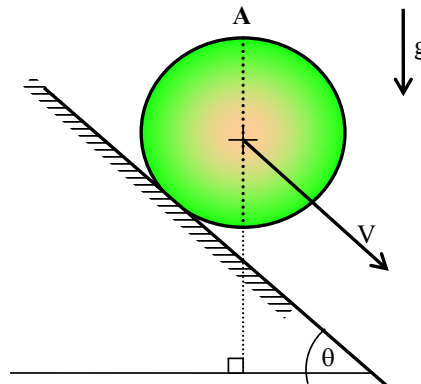


Para el problema 02

2. Una rueda gira sin resbalar y se traslada con velocidad constante de módulo V . Determine el módulo de la velocidad del punto "A".



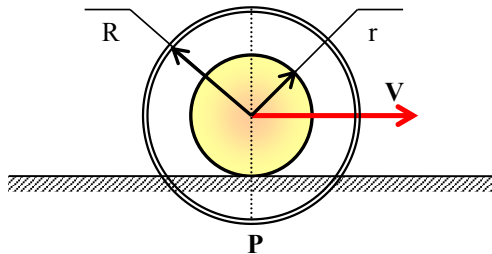
Para el problema 03



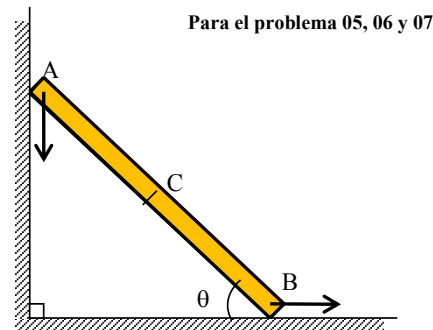
Para el problema 04

3. Una rueda gira sin resbalar y se traslada con velocidad constante de módulo V . Si $\theta = 45^\circ$, determine el módulo de la velocidad del punto "A".
4. Un cilindro rueda sin resbalar sobre un plano inclinado tal que su centro de masa se traslada con una rapidez de $V = 10 \text{ m/s}$. Si $\theta = 60^\circ$, determine el módulo de la velocidad resultante en el punto A.
5. Luego de abandonar a la barra sobre las superficies lisas; el punto medio "C" describirá como trayectoria:
 A) una recta B) una circunferencia C) una elipse D) una parábola E) una hipérbola
6. Respecto del problema anterior; si el extremo A tiene una velocidad de módulo 20 cm/s , cuando $\theta = 37^\circ$, determine el módulo de la velocidad (en m/s) del extremo B en ese instante.

7. Si el extremo A de la barra AB se desliza horizontalmente con rapidez V . Determinar la rapidez con que se mueve el punto medio C de la barra.
8. Las ruedas de un ferrocarril, que se mueven horizontalmente hacia la derecha con rapidez $V = 50 \text{ km/h}$, ruedan sin resbalar sobre la línea férrea en la forma que se muestra. Determinar la rapidez (en km/h) con que se mueve el punto más bajo (punto P) de las ruedas en cada instante, sabiendo que $R = 22 \text{ cm}$ y $r = 20 \text{ cm}$



Para el problema 08



Para el problema 05, 06 y 07

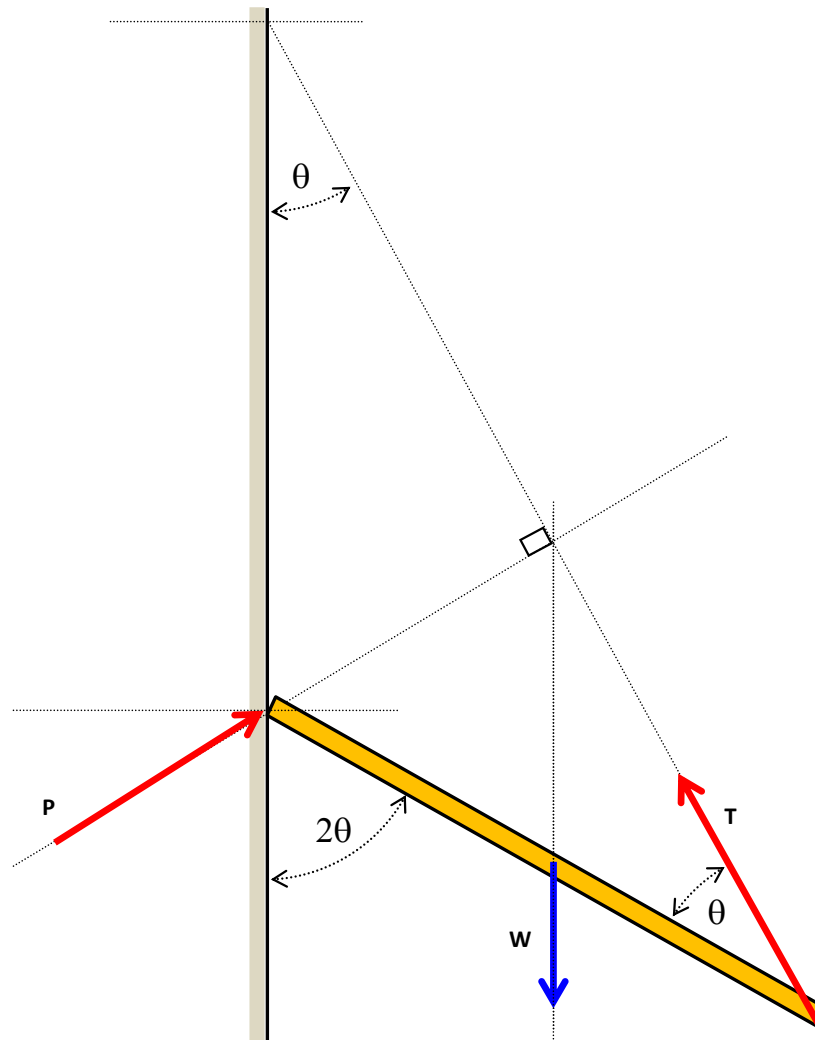
9. Un helicóptero se desplaza horizontalmente con rapidez de 75 m/s . Si la frecuencia de rotación es 40 R.P.S. , determinar el radio máximo de la hélice, tal que, la máxima rapidez de un punto periférico de la hélice sea de 350 m/s .
10. Un árbol que gira a razón de 90 R.P.M (revoluciones por minuto), después de desconectar el motor adquiere un movimiento uniforme retardado y se detiene al cabo de 40 segundos . Determinar el número de revoluciones efectuadas por el árbol durante ese tiempo.

RESPUESTA: 30

11. La velocidad de un automóvil cuyas llantas tiene un diámetro de 50 cm aumenta uniformemente desde 19 km/h hasta 55 km/h en 10 segundos . Calcular la aceleración angular de las llantas.

RESPUESTA: $4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

ESTÁTICA I



1. CONCEPTO: Es una rama de la Física, que tiene la finalidad de analizar las condiciones que deben reunir un grupo de fuerzas actuantes sobre un cuerpo o sistema con a la condición de mantenerlo en equilibrio.

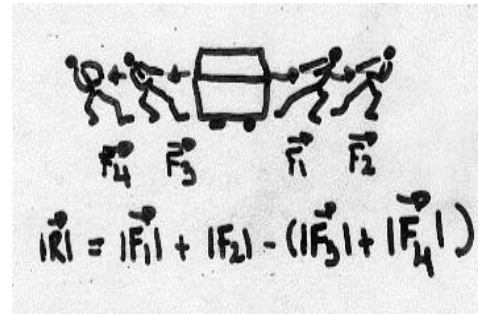
Si vemos un cuerpo en reposo u otro desplazándose con movimiento rectilíneo uniforme, estamos frente a fenómenos aparentemente distintos, pero en el fondo obedecen a las mismas leyes, pues ocurre que en Física ambas situaciones corresponden a un mismo estado, llamado equilibrio mecánico. El estudio de las leyes y condiciones que deben cumplir los cuerpos para encontrarse en dicho estado lo realiza aquella rama de la Mecánica llamada Estática, ciencia que data de la época de los egipcios y babilonios y que hoy ha dado lugar a la creación de varias ramas de la Ingeniería: Civil, Mecánica, Minera, etc.

2. INTERACCIÓN: Es una propiedad **cualitativa** de la materia. Todos cuerpos interactúan, por contacto, a distancia. Interactúan las partículas elementales, interactúan los átomos ionizados, interactúan las moléculas, interactúan los planetas, interactúan las estrellas. Los componentes de la materia siempre interactúan.

3. FUERZA: La fuerza es la medida **cuantitativa** de la interacción. Toda vez que dos cuerpos interactúan entre sí surge entre ellos una magnitud, que además de valor tiene dirección, sentido y punto de aplicación, llamada fuerza. La **acción** de la fuerza sobre los cuerpos depende del punto de aplicación, del módulo y de la dirección.

Es esta magnitud que hace que los cuerpos estén en equilibrio, que cambien la dirección de su movimiento, o que se deformen. En general asociamos la fuerza con los efectos de: sostener, estirar, comprimir, jalar, empujar, tensar, atraer, repeler, etc.

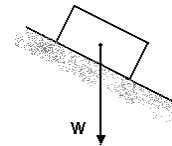
Unidades: newtons (abreviado N).



FUERZAS NOTABLES

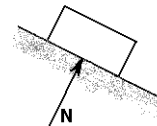
4. FUERZA DE GRAVEDAD O PESO (W)

Llamamos así a la fuerza con que la Tierra atrae a todo cuerpo que se encuentre en su cercanía. Es directamente proporcional con la masa de los cuerpos y con la gravedad local. Se le representa por un vector vertical y dirigido hacia el centro de la tierra.



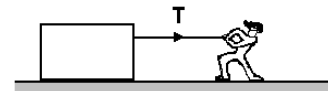
5. FUERZA DE REACCIÓN NORMAL (N)

Se le llama también fuerza de contacto, viene a ser la resultante de las infinitas fuerzas electromagnéticas que se generan entre las superficies de dos cuerpos cuando estas se acercan a distancias relativamente pequeñas, predominando las fuerzas repulsivas. La línea de acción de la normal es siempre perpendicular a las superficies de contacto.

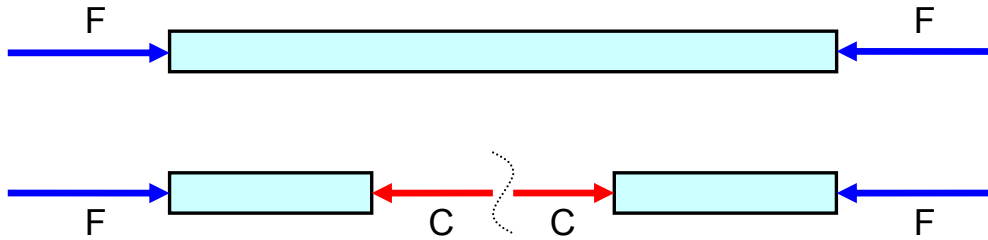


6. Tensión (T)

Esta es la fuerza electromagnética resultante que se genera en el interior de una cuerda o un alambre, y que surge para oponerse a los efectos de estiramiento por parte de fuerzas externas que actúan en los extremos de aquellos. En estas fuerzas predominan los efectos atractivos

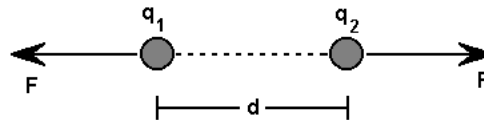


7. COMPRESIÓN (C): Es aquella fuerza generada internamente en el interior de una barra cuando fuerzas externas tratan de aplastar al cuerpo rígido. Para graficar la fuerza se realiza previamente una separación imaginaria. La fuerza de compresión se caracteriza por alejarse de la línea de corte.



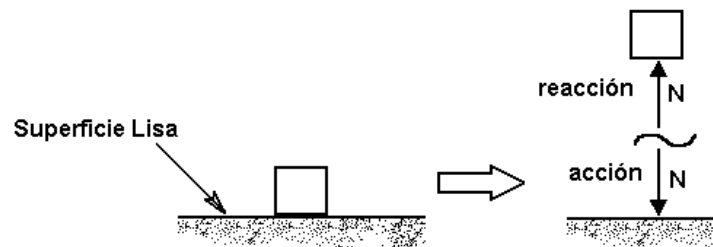
8. FUERZAS DE ACCIÓN Y REACCIÓN

Son aquellas fuerzas de origen electromagnético y/o gravitacional que se manifiestan cuando los cuerpos están en contacto físico o cuando están separados. Fuerza de atracción gravitacional entre el Sol y los planetas (ley de gravitación universal enunciado por Isaac Newton); fuerzas eléctricas de acción y reacción entre partículas electrizadas (Ley de Coulomb); fuerzas magnéticas entre “polos magnéticos” o cargas magnéticas Norte y Sur.



9. TERCERA LEY DE NEWTON O PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN

Establece que a toda fuerza de acción le corresponde una fuerza de reacción de igual módulo, pero de sentido opuesto.



Características:

GOTA 1. Las fuerzas de acción y reacción siempre actúan en cuerpos diferentes.

GOTA 2. Para ser graficadas requieren de una separación imaginaria de los cuerpos, si estos están en contacto.

GOTA 3. La dirección de las fuerzas de acción y reacción dependen de la calidad de las superficies en contacto.

GOTA 4. Si las superficies son lisas serán perpendiculares a los apoyos de lo contrario no serán perpendiculares a los contactos.

10. LEY DE HOOKE

La fuerza generada en el resorte es directamente proporcional a la deformación longitudinal”.

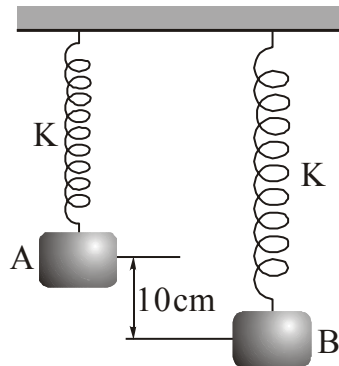
$$F = K \cdot x \Leftrightarrow K = \frac{F}{x}$$

Donde:

k: constante de elasticidad del resorte en N/m

x: deformación longitudinal, se mide en metros

F: fuerza deformadora, se mide en newtons.



La fuerza en el resorte se puede manifestar como **tensión** cuando el resorte es alargado y como **compresión** cuando el resorte es aplastado.

11. FUERZA DE ROZAMIENTO O FRICCIÓN

Es aquella fuerza de origen electromagnético que se manifiesta cuando un cuerpo trata de moverse o se mueve a través de una superficie rugosa, *oponiéndose* a su deslizamiento o traslación.

GOTA 1. La fuerza de rozamiento se grafica tangencialmente a las superficies en contacto con un sentido opuesto al movimiento o posible movimiento que intente realizar el cuerpo.

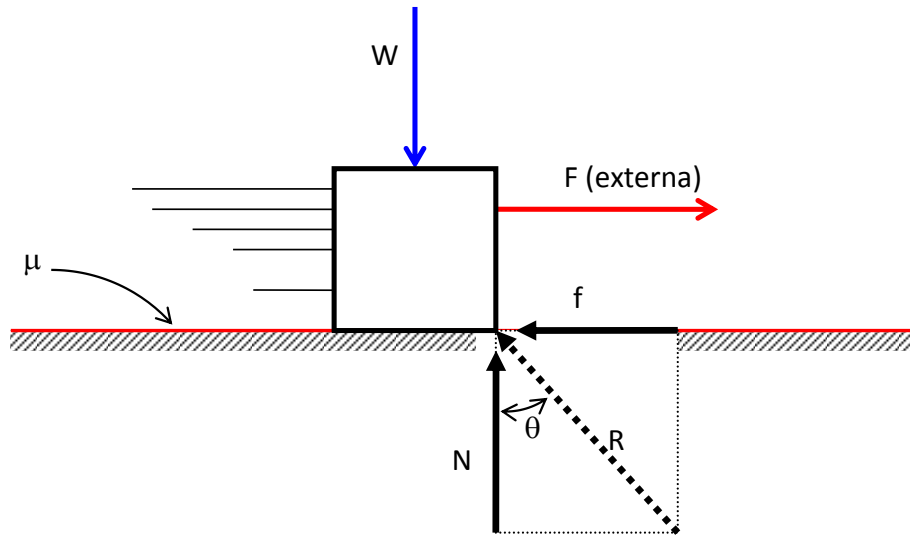
GOTA 2. El módulo de la fuerza de rozamiento es independiente del tamaño de las superficies en contacto, pero es proporcional a la reacción normal.

12. LEY DE ROZAMIENTO

El módulo de la fuerza de rozamiento es directamente proporcional al módulo de la reacción normal.

$$f = \mu \cdot N$$

La fuerza de rozamiento se opone al movimiento relativo entre las superficies en contacto.



De la figura, la reacción neta es R

Pero descomponiendo

f : fuerza de rozamiento (roza la superficie)

N : fuerza normal (perpendicular a la superficie)

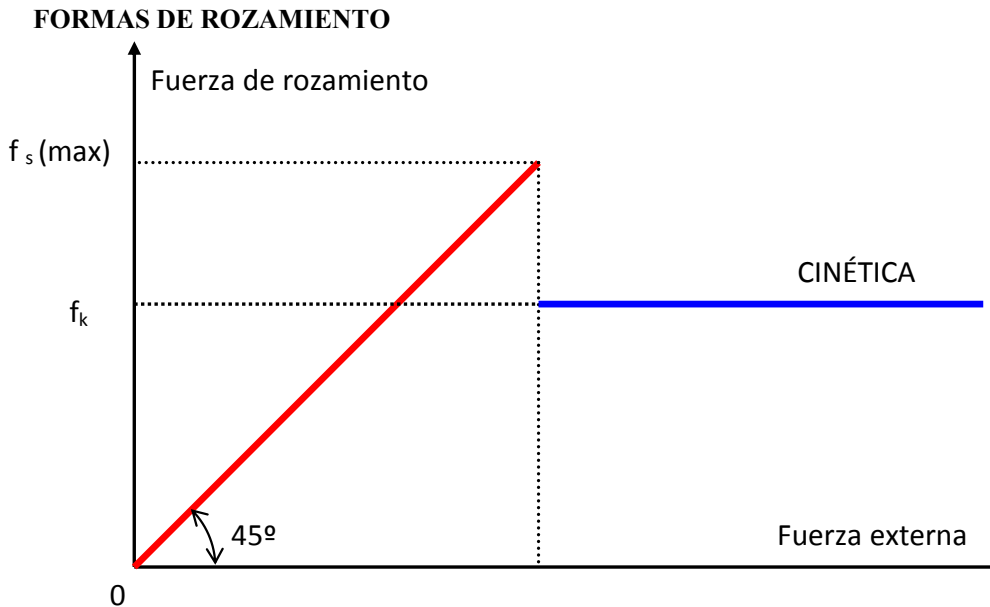
“ θ ”: ángulo de desviación por rugosidad de la superficie:

$$\tan \theta = \frac{f}{N} = \mu \Rightarrow f = \mu \cdot N$$

μ : coeficiente de fricción (adimensional)

13. COEFICIENTE DE ROZAMIENTO

Obsérvese que como $\mu = \tan \theta$, puede ser mayor que la unidad; pero por lo general se trabaja con valores menores a uno ($\theta < 45^\circ$). El **coeficiente de rozamiento** es una característica de rugosidad entre dos superficies en contacto. Es decir, expresa el grado de aspereza entre dos superficies. Es una cantidad adimensional (no tiene unidades).



- 14. ROZAMIENTO ESTÁTICO:** es aquella fuerza que se opone al intento de deslizamiento. Su valor es **variable** desde cero hasta un valor máximo cuando el cuerpo se encuentra en un movimiento inminente (pronto a moverse).

$$0 < f_s < f_{max} \Rightarrow f_{max} = \mu_s \cdot N$$

μ_s : COEFICIENTE DE ROZAMIENTO ESTÁTICO.

La **fuerza estática máxima** se aplica solamente cuando el cuerpo esta **pronto a moverse**.

- 15. ROZAMIENTO CINÉTICO:** es aquella que se presenta durante el movimiento de los cuerpos, oponiéndose a su deslizamiento a través de la superficie rugosa. Su valor es **constante**, independiente de la velocidad y de la aceleración.

$$f_k = constante \Rightarrow f_k = \mu_k \cdot N$$

μ_k : COEFICIENTE DE ROZAMIENTO CINÉTICO.

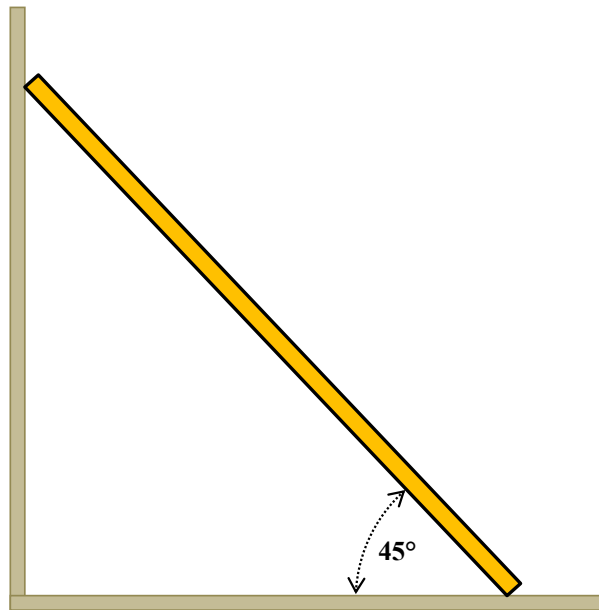
OBSERVACIONES:

- * El coeficiente de rozamiento estático es mayor que el coeficiente de rozamiento cinético.

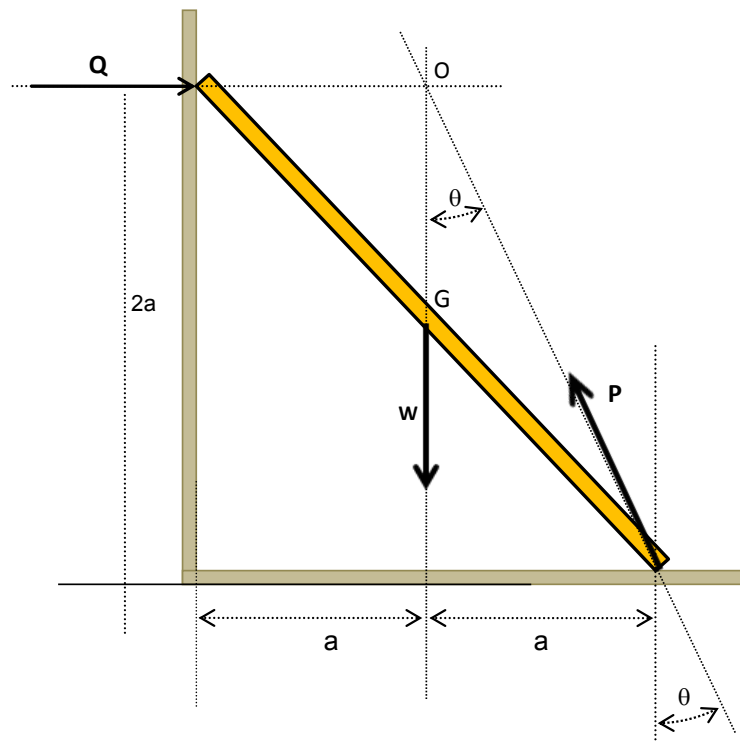
$$\mu_k < \mu_s$$

- * La fuerza de rozamiento disminuye con la humedad, el calor y cualquier otro lubricante (aceite, grasa, vaselina, etc.).

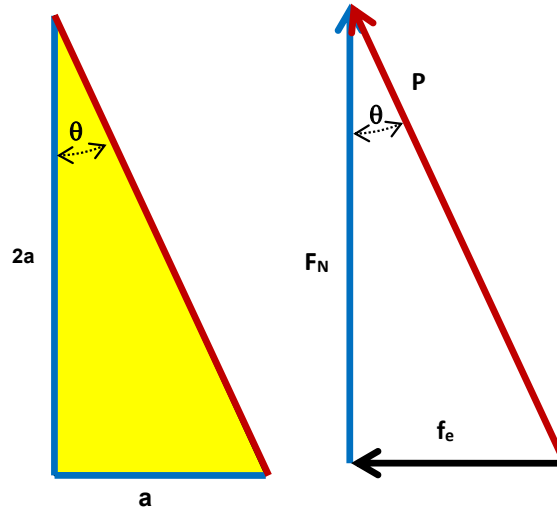
EJEMPLO. Una barra homogénea de 6 kg se encuentra en reposo, pronto a resbalar. Existe rozamiento solamente en la superficie horizontal. Determine el coeficiente de rozamiento estático entre la barra y la superficie horizontal ($g=10 \text{ m/s}^2$)

**RESOLUCIÓN**

Hacemos el DCL de la barra. Las tres fuerzas deben ser concurrentes, por condición de equilibrio. Según el Teorema de Lamy, si tres fuerzas coplanarias actúan sobre un cuerpo en equilibrio, estas deben ser concurrentes.



Construimos un triángulo rectángulo con las tres fuerzas, y comparamos con el triángulo geométrico cuyos catetos están en relación de 1 a 2, es decir la medida del ángulo θ está definido, $\tan\theta = \frac{1}{2}$, entonces la fuerzas Q y W están en la relación de 1 a 2.



El valor del coeficiente de rozamiento estático se define como la tangente del ángulo θ que forma la fuerza de reacción $\mathbf{P}$ con la línea normal, o línea perpendicular a la superficie en contacto.

$$\mu_e = \frac{\text{Fuerza de rozamiento}}{\text{Fuerza Normal}} = \frac{f_e}{F_N} = \tan\theta = \frac{1}{2}$$

Respuesta: el coeficiente de rozamiento estático es 0,5.

16. PRIMERA LEY DE NEWTON O PRINCIPIO DE INERCIA

Todo cuerpo conserva su estado de reposo o de M.R.U mientras la acción de otros cuerpos no le obligue a salir de dicho estado.

El estado de reposo o de M.R.U de un cuerpo, está supeditado a la acción de otros cuerpos (a través de fuerzas externas) y permanecerá indefinidamente siempre que estas acciones o fuerzas se anulen mutuamente.

(I) **EQUILIBRIO ESTÁTICO:** cuerpo en reposo relativo.

(II) **EQUILIBRIO CINÉTICO:** cuerpo con movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U).

“Si la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo es nula, entonces es posible que el cuerpo se encuentre en reposo relativo o es posible que tenga movimiento con velocidad constante”.

CONSECUENCIAS DE LA PRIMERA LEY DE NEWTON

17. INERCIA: Es una propiedad de la materia que se manifiesta como aquella oposición natural que ofrecen los cuerpos cuando se les trata de sacar de su estado de reposo o de M.R.U. La inercia es una propiedad cualitativa de la materia.

18. MASA: Es una magnitud física escalar, que sirve para medir la inercia que poseen los cuerpos. La masa y la inercia son directamente proporcionales. La masa es la medida cuantitativa de la inercia.

19. EQUILIBRIO: Es aquel estado de reposo o de M.R.U que presenta un cuerpo, con respecto a un observador fijo (ubicado en un sistema de referencia inercial, como por ejemplo la Tierra).

20. TEOREMA DE LAMY O DE LAS TRES FUERZAS

Si tres fuerzas coplanarias actúan sobre un cuerpo en equilibrio, estas deben ser necesariamente concurrentes y además el módulo de cada fuerza es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto.

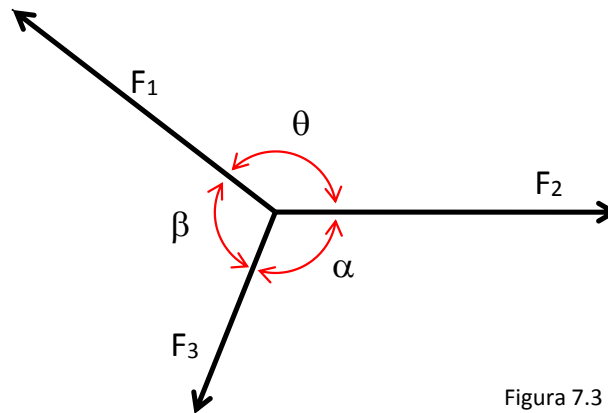


Figura 7.3

La fuerza resultante es nula: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

$$\frac{F_1}{\text{Sen}\alpha} = \frac{F_2}{\text{Sen}\beta} = \frac{F_3}{\text{Sen}\theta}$$

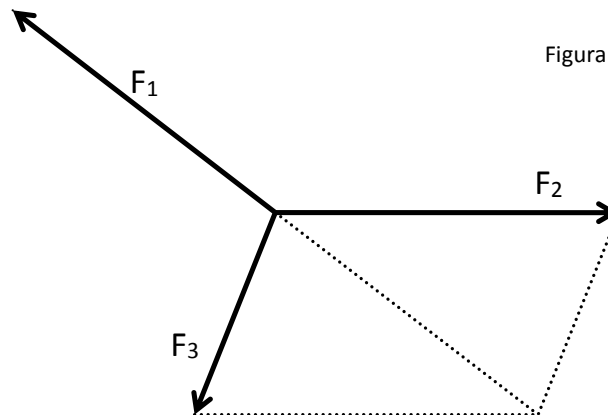


Figura 7.1

Siempre es posible construir con las tres fuerzas un triángulo, de tal manera que la fuerza resultante sea nula.

CASO ESPECIAL: Si los tres ángulos son iguales, entonces el módulo de las tres fuerzas también, son iguales: $\alpha = \beta = \theta = 120^\circ \Rightarrow F_1 = F_2 = F_3$

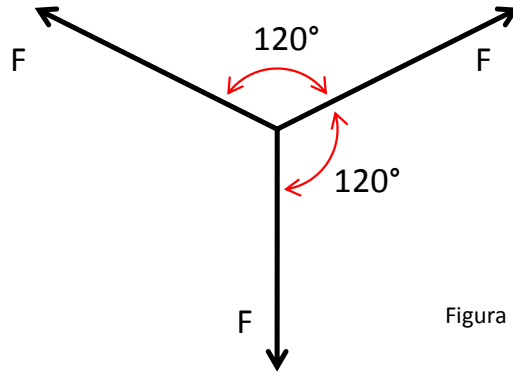


Figura 7.4

21. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (D.C.L.)

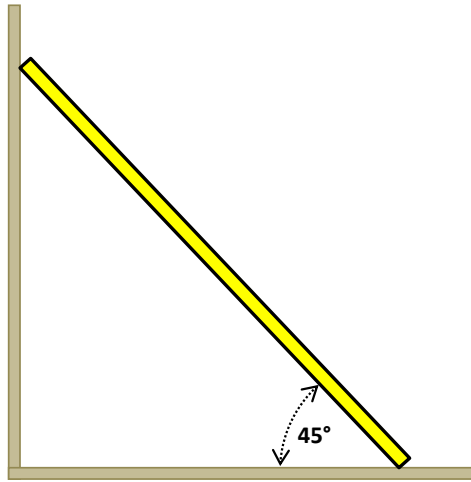
Es el gráfico de un cuerpo o sistema, el cual se representa en forma aislada donde se señalan las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo o sistema.

En un diagrama de cuerpo libre se grafican solamente fuerzas externas al cuerpo o sistema de cuerpos. Las fuerzas internas al cuerpo o sistema se anulan entre sí.

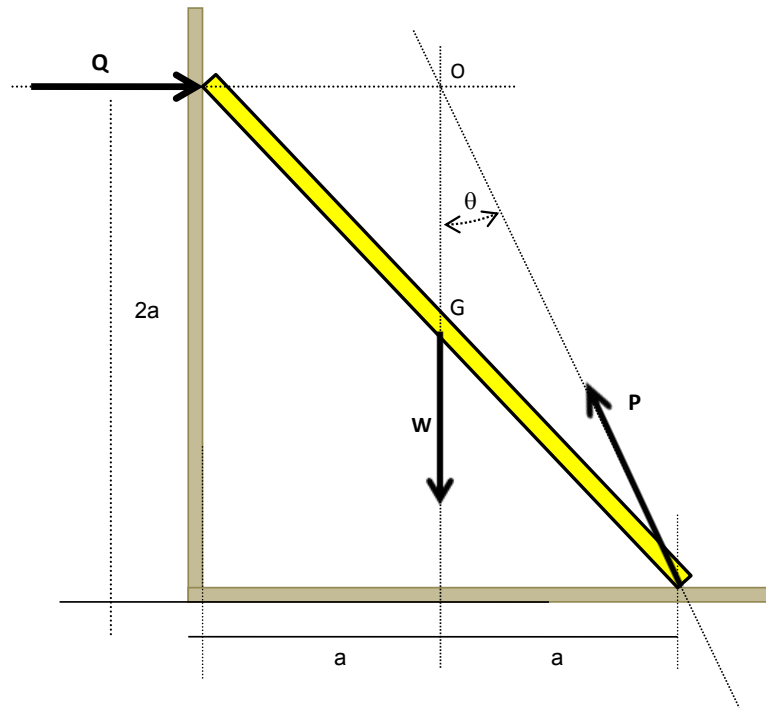
Es aquel gráfico que muestra imaginariamente en forma aislada a un cuerpo o sistema, con todas las fuerzas actuantes, trazadas con el siguiente criterio:

- (1) El peso (W) será trazado siempre verticalmente hacia abajo y estará localizado en el centro geométrico del cuerpo si este es de masa homogénea, de lo contrario se nos tendrá que especificar.
- (2) La fuerza de rozamiento o fricción, será trazada opuesta a la tendencia al movimiento siempre que la superficie sea rugosa o en todo caso si el problema no especifica el tipo de superficie.
- (3) Las tensiones y compresiones serán graficadas.
- (4) Las reacciones en los puntos de apoyo serán graficadas previa separación de las superficies en contacto y teniendo en cuenta si la superficie es lisa o rugosa.
- (5) Las fuerzas externas serán graficadas tal como aparece o se menciona en el problema, pudiendo, inclusive, prolongarse su línea de acción.

EJEMPLO 01. Una barra homogénea se encuentra en reposo tal como se muestra. Determine el módulo de la reacción del piso sobre la barra de 5 kg. Existe rozamiento solamente en la superficie horizontal. ($g=10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN

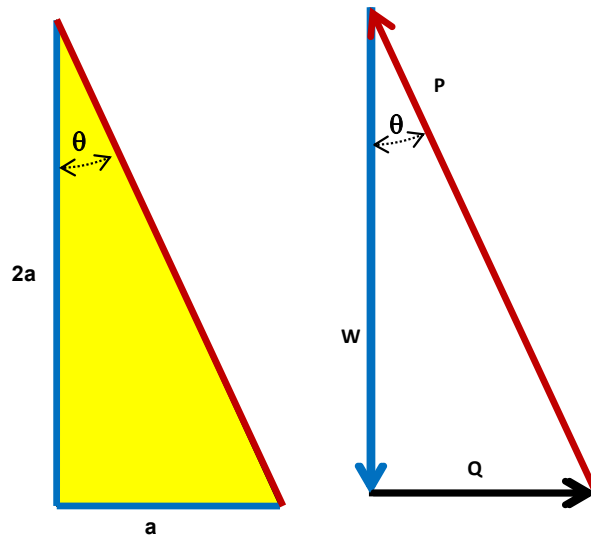


Hacemos el DCL de la barra. Las tres fuerzas deben ser concurrentes, por condición de equilibrio. Según el Teorema de Lamy, si tres fuerzas coplanares actúan sobre un cuerpo en equilibrio, estas deben ser concurrentes.

Construimos un triángulo rectángulo con las tres fuerzas, y comparamos con el triángulo geométrico cuyos catetos están en relación de 1 a 2, es decir la medida del ángulo θ está definido, $\tan\theta = \frac{1}{2}$, entonces la fuerzas Q y W están en la relación de 1 a 2.

$$\tan\theta = \frac{1}{2} = \frac{Q}{W} \Rightarrow Q = \frac{W}{2} = \frac{50\text{ N}}{2} = 25\text{ N}$$

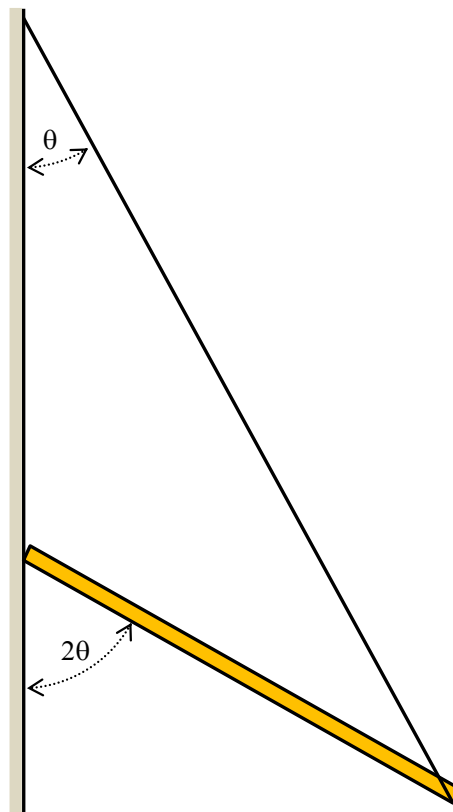
El valor de la fuerza de reacción P en el piso, se calcula aplicando el teorema de Pitágoras:



$$P = \sqrt{W^2 + Q^2} = \sqrt{(50)^2 + (25)^2} = 25\sqrt{5}\text{ N}$$

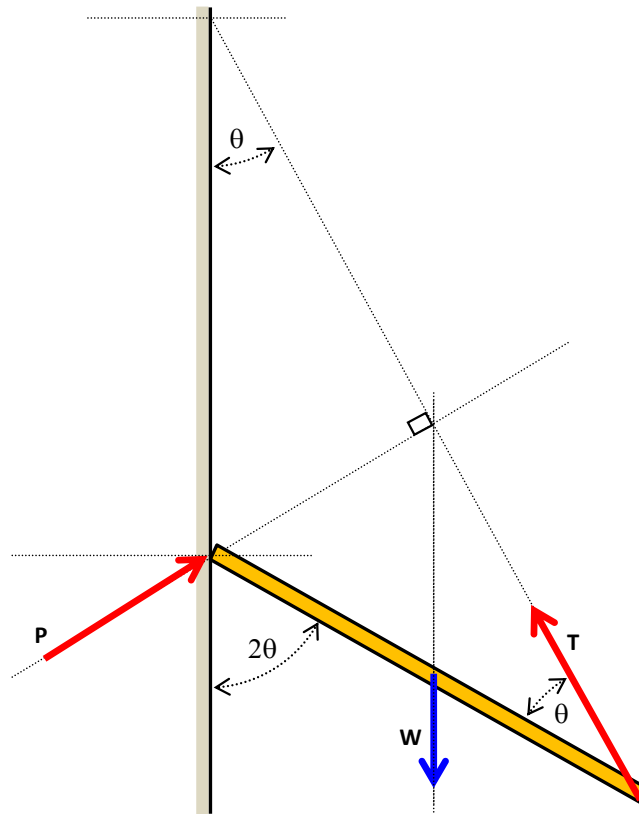
Respuesta: $P = 25\sqrt{5}\text{ N}$

EJEMPLO 02. Se muestra una barra homogénea de masa 2 kg apoyada sobre una superficie áspera, en equilibrio. Determine el valor de la fuerza de tensión en la cuerda y el valor de la fuerza de reacción que ejerce la pared sobre la barra. $\theta = 30^\circ$ ($g = 10\text{ m/s}^2$)

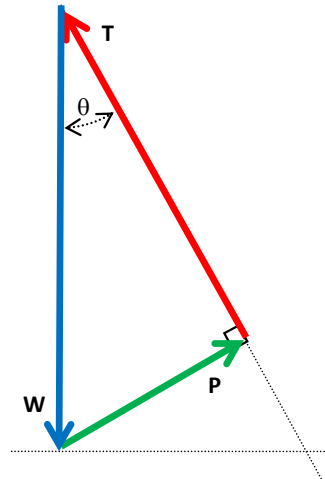
**RESOLUCIÓN**

Según el teorema de Lamy, las tres fuerzas W , P y T , son coplanares y concurrentes.

También aplicamos la propiedad del triángulo isósceles, donde la mediana se confunde con la mediatriz



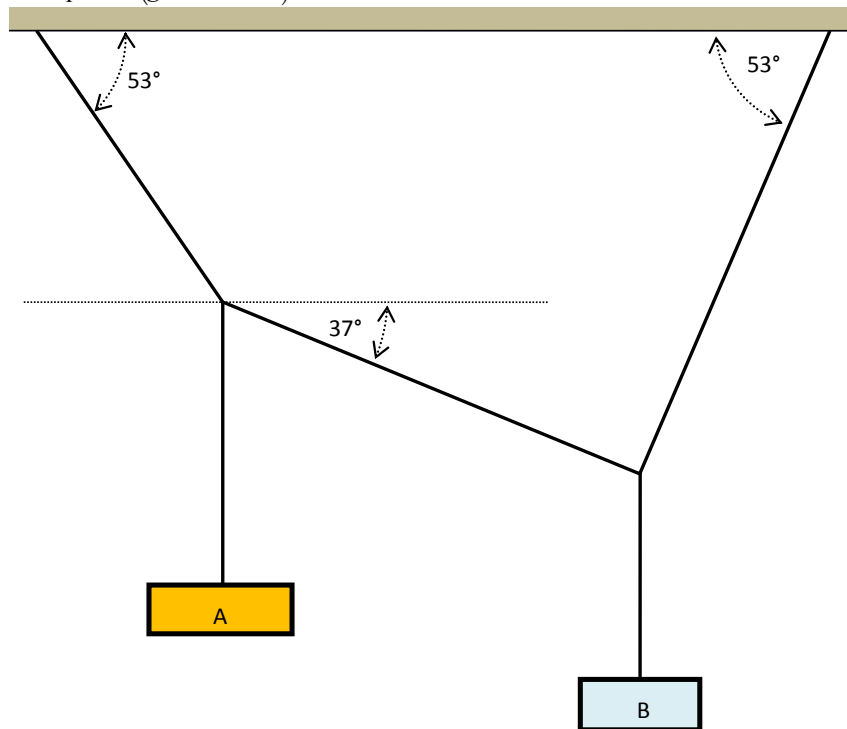
Aplicamos la primera condición de equilibrio: construimos un polígono cerrado y ordenado con los vectores W , P y T . En este caso tenemos un triángulo rectángulo.



Resolviendo el triángulo rectángulo, si $\theta = 30^\circ$ entonces se cumple que, $\frac{W}{2} = \frac{P}{1} = \frac{T}{\sqrt{3}}$

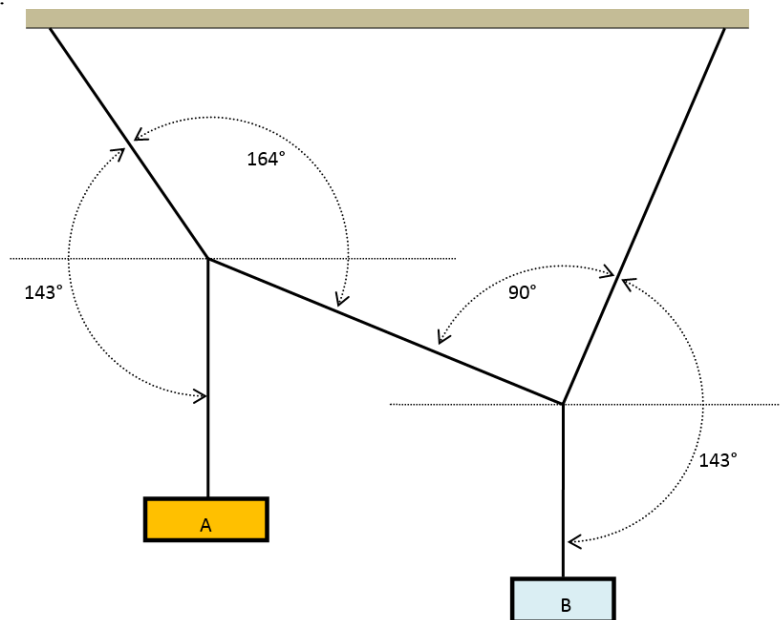
Reemplazando: $\frac{20\text{ N}}{2} = \frac{P}{1} = \frac{T}{\sqrt{3}} \Rightarrow P = 10\text{ N} \text{ y } T = 10\sqrt{3}\text{ N}$

EJEMPLO 03. Se muestra dos bloques en equilibrio. Si la masa del bloque A es 6 kg, determinar la masa del bloque B. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



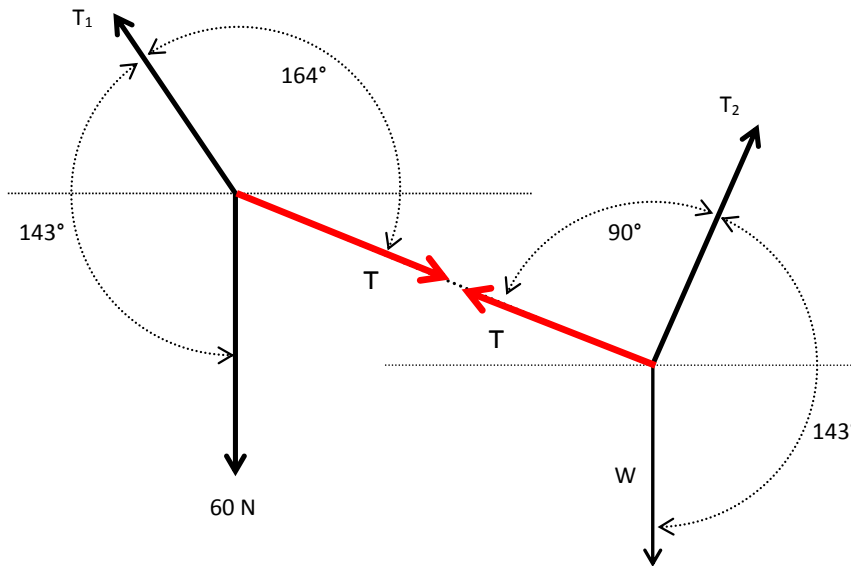
RESOLUCIÓN

Hacemos el diagrama de cuerpo libre de cada nudo. Para encontrar los ángulos, trazamos líneas horizontales por cada nudo y aplicamos las propiedades de dos rectas paralelas cortadas por una recta secante.



Aplicamos el teorema de Lamy o ley de senos. El valor de cada fuerza es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto.

$$\text{Nudo de la izquierda: } \frac{T}{\text{Sen}143^\circ} = \frac{60\text{ N}}{\text{Sen}164^\circ} \Rightarrow T = \left(\frac{\text{Sen}143^\circ}{\text{Sen}164^\circ} \right) \cdot 60\text{ N}$$



$$\text{Nudo de la derecha: } \frac{T}{\text{Sen}143^\circ} = \frac{W}{\text{Sen}90^\circ} \Rightarrow W = \left(\frac{\text{Sen}90^\circ}{\text{Sen}143^\circ} \right) \cdot T$$

$$W = \left(\frac{\text{Sen}90^\circ}{\text{Sen}143^\circ} \right) \cdot \left(\frac{\text{Sen}143^\circ}{\text{Sen}164^\circ} \right) \cdot 60\text{ N} = \left(\frac{\text{Sen}90^\circ}{\text{Sen}164^\circ} \right) \cdot 60\text{ N} = 217,677\text{ N}$$

Respuesta: $W = 217,677\text{ N}$

22. ISAAC NEWTON (1643 – 1727), genial físico y matemático inglés, uno de los célebres sabios en la historia de la humanidad. Newton formuló los principales conceptos y leyes de la mecánica, descubrió la ley de gravitación universal, creando por lo tanto un mundo científico que se mantuvo intacto hasta comienzo del siglo XX. Creó la teoría del movimiento de los cuerpos celestes (planetas y estrellas); explicó las principales particularidades de movimiento de la Luna; dio explicación a las mareas. En la óptica, a Newton se deben los admirables descubrimientos que facilitaron el desarrollo impetuoso de esta rama de la física. Estableció un auténtico método matemático de investigación del cálculo diferencial e integral. Esto influenció enormemente en todo el desarrollo ulterior de la física, facilitando la aplicación de los métodos matemáticos en ella. Isaac Newton nace el 25 de diciembre de 1643, un después del fallecimiento de Galileo Galilei.



23. PRIMERA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO

Se establece que, para que un cuerpo no se traslade aceleradamente, necesariamente la suma de todas las fuerzas actuantes debe ser igual a cero.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

Si la **aceleración** es nula; entonces es posible que el cuerpo esté en reposo o se mueve con velocidad constante.

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow \sum F_y = 0$$

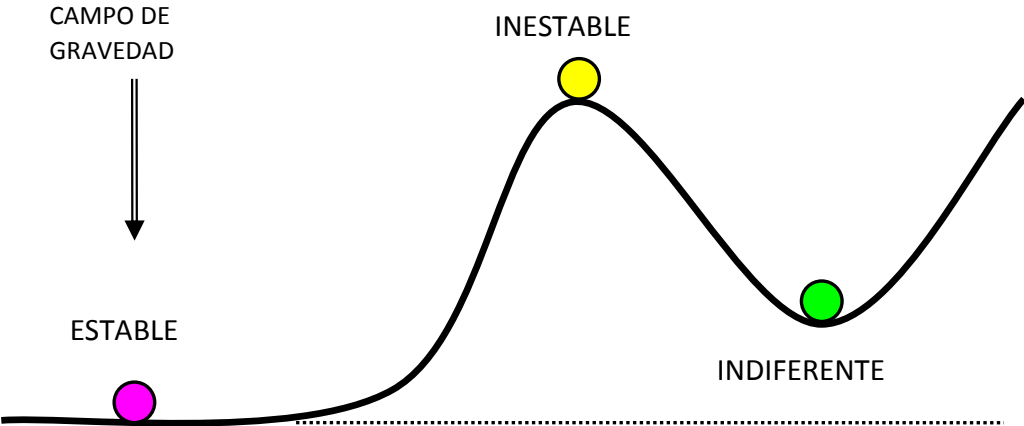
Si descomponemos las fuerzas sobre los ejes cartesianos, debe cumplirse que la sumatoria de las fuerzas en cada eje debe ser nula.

24. TIPOS DE EQUILIBRIO:

EQUILIBRIO ESTABLE: equilibrio en el que un cuerpo, ligeramente desplazado de su posición inicial, tiende a volver a ella.

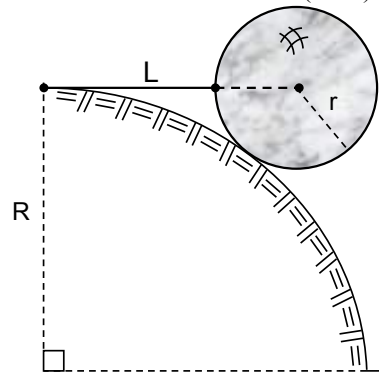
EQUILIBRIO INESTABLE: equilibrio en el que un cuerpo separado de su posición, no la recupera. Es decir, si las fuerzas hacen que el cuerpo continúe moviéndose hasta una posición distinta cuando se desplaza, como ocurre con una varita en equilibrio sobre su extremo.

EQUILIBRIO INDIFERENTE: equilibrio en el que un cuerpo, ligeramente apartado de su posición de equilibrio, permanece en equilibrio en su nueva posición. Por ejemplo, una esfera

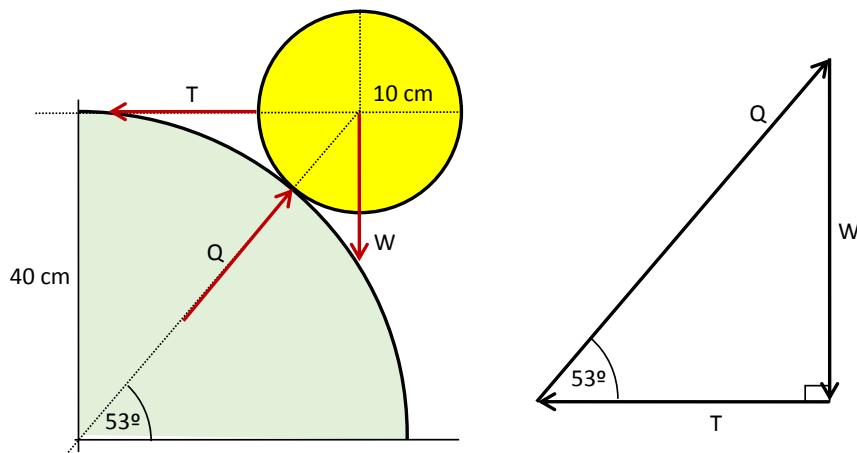


RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

1. Una esfera de peso 20 newtons y radio $r = 10\text{ cm}$ se apoya sobre una esfera de radio $R = 40\text{ cm}$ mediante una cuerda de longitud $L = 20\text{ cm}$ en la posición de equilibrio, la cuerda permanece horizontal. Calcular en valor de la tensión de dicha cuerda (en N). Superficies lisas.

**RESOLUCIÓN**

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de la esfera. De los datos deducimos que la reacción Q forma 53° respecto de la horizontal.

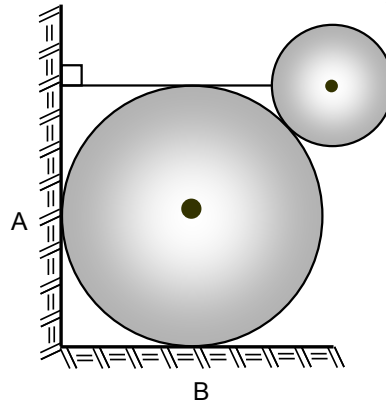


SEGUNDO PASO. De la condición de equilibrio, la sumatoria de fuerzas es nula, y se construye un polígono cerrado y ordenado.

$$\tan 53^\circ = \frac{W}{T} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{20}{T} \Rightarrow T = 15 \text{ newtons}$$

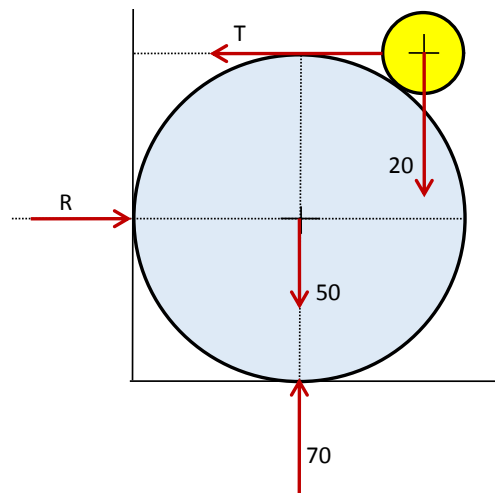
Respuesta. El valor de la tensión es 15 newtons

2. La esfera grande de 50 N y radio $R = 4a$, la esfera pequeña de 20 N y radio $r = a$. Si el sistema se encuentra en equilibrio, determinar el valor de la reacción de la pared (en N) en el punto A.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de todo el sistema (las dos esferas juntas). Aclaremos que la Sumatoria de fuerzas internas siempre es nula. En un diagrama de cuerpo libre se grafican solamente fuerzas externas que afectan al sistema en estudio.

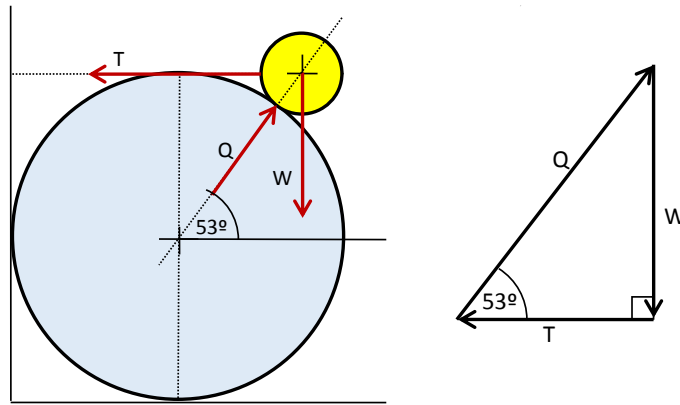


$$\Sigma F_x = 0 \text{ y } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = R$$

SEGUNDO PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de la esfera menor. De los datos deducimos que la reacción Q forma 53° respecto de la horizontal.

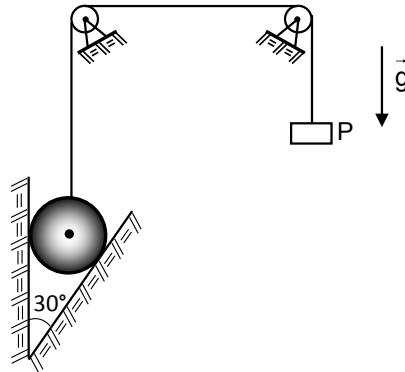
TERCER PASO. De la condición de equilibrio, la sumatoria de fuerzas es nula, y se construye un polígono cerrado y ordenado. En este caso particular se construye un triángulo rectángulo cuyos ángulos internos son 37° y 53° .

$$\tan 53^\circ = \frac{W}{T} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{20}{T} \Rightarrow T = 15 \text{ newtons}$$



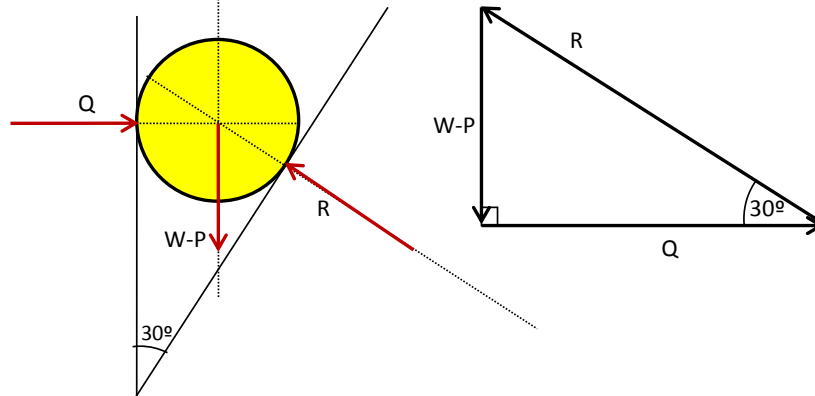
Respuesta. El valor de la tensión es 15 newtons y el valor de la reacción de la pared sobre la esfera grande también es igual 15 newtons.

3. El sistema mostrado se mantiene en equilibrio. El peso de la esfera es de 200 N y el del bloque P es de 80 N. ¿Cuál es el valor de la fuerza de reacción que ejerce el plano inclinado sobre la esfera? Superficies lisas.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de la esfera. Tenemos dos fuerzas verticales, el peso W de la esfera y la tensión en la cuerda de valor P . La fuerza resultante vertical es hacia abajo ($W-P$).



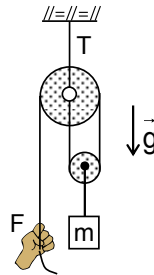
SEGUNDO PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de la esfera menor.

TERCER PASO. De la condición de equilibrio, la sumatoria de fuerzas es nula, y se construye un polígono cerrado y ordenado. En este caso particular se construye un triángulo rectángulo cuyos ángulos internos son 30° y 60° .

$$\text{Sen}30^\circ = \frac{W-P}{R} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{200-80}{R} \Rightarrow R = 240 \text{ newtons}$$

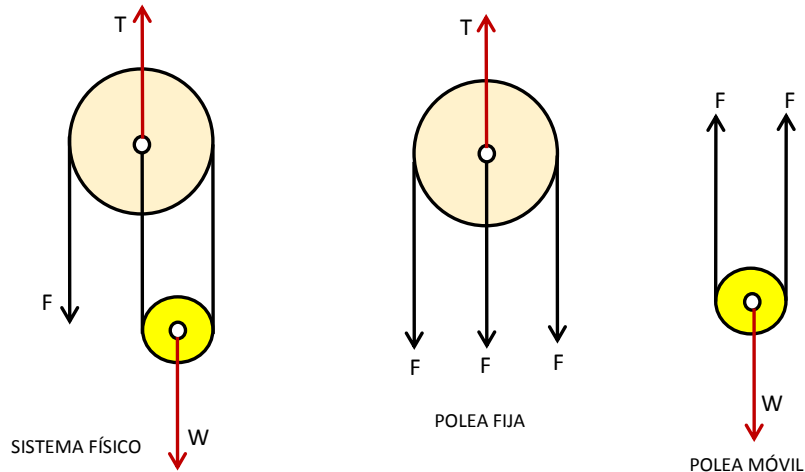
Respuesta. El valor de fuerza de reacción R que ejerce el plano inclinado sobre la esfera es 240 newtons.

4. El bloque de masa “m” mostrado se mantiene en equilibrio al aplicarse una fuerza de valor F mediante el sistema de poleas y cuerdas ingrávidas. Determinar el valor de la fuerza de tensión T , en la cuerda superior.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de las poleas, la polea grande es fija y la polea pequeña es móvil. Además, las poleas tienen masa despreciable.



SEGUNDO PASO. Aplicamos las condiciones de la primera condición de equilibrio.

$$\text{El sistema: } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = F + W \dots (1)$$

$$\text{La polea fija: } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = 3F \dots (2)$$

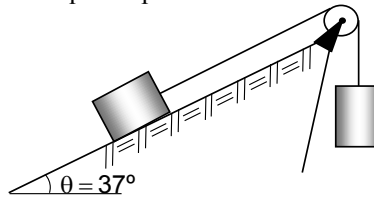
$$\text{El sistema: } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2.F = W \Rightarrow F = \frac{W}{2} \dots (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$T = \left(\frac{3}{2}\right)W \Rightarrow T = \left(\frac{3}{2}\right).m.g$$

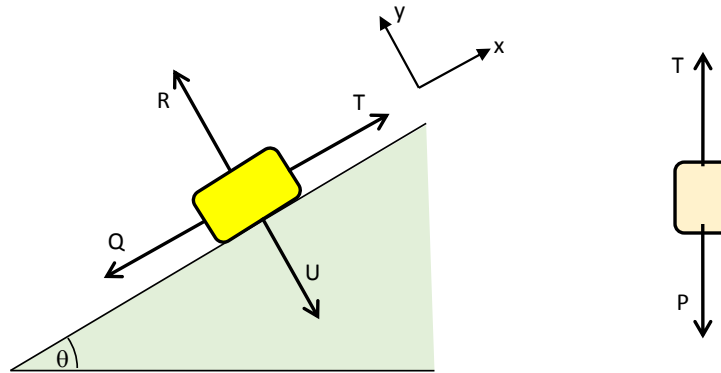
Respuesta. El valor de la tensión en la cuerda representa el 150% de peso del bloque.

5. El bloque sobre el plano inclinado de peso 200 N se encuentra en equilibrio. No existe rozamiento. ¿Cuál es el peso del bloque suspendido en el aire?



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de los bloques. La polea fija tiene masa despreciable y no ofrece ninguna forma de rozamiento.



SEGUNDO PASO. Analizando al bloque que se encuentra suspendido en el aire. El valor de la tensión es igual al peso del bloque.

$$\text{En el aire: } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = P$$

TERCER PASO. Analizamos al bloque sobre el plano inclinado. El peso W descomponemos rectangularmente respecto de un plano cartesiano x versus y .

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R = W \cdot \cos \theta = 200 \cdot \cos 37^\circ$$

$$\text{Fuerza de reacción normal: } R = 200 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = 160 \text{ newtons}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T = Q = W \cdot \sin 37^\circ$$

$$T = Q = 200 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = 120 \text{ newtons}$$

$$\text{Fuerza de arrastre: } Q = 200 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = 120 \text{ newtons}$$

Respuesta. El valor del peso del bloque suspendido en el aire es 120 newtons.

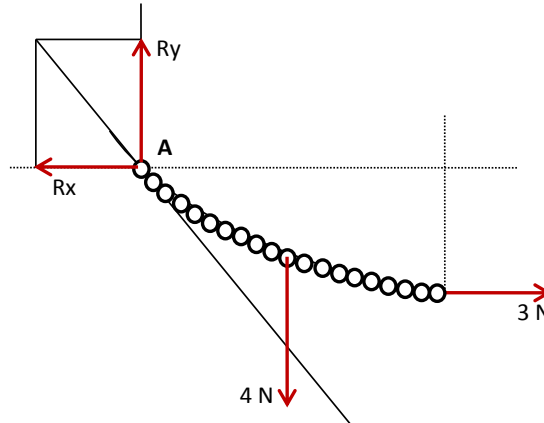
6. La figura muestra una cadena homogénea de 0,8 kg sujeta en los puntos A y B. Si el módulo de la tensión en el punto más bajo 3 N. Determine el módulo de la reacción en el soporte A. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. El peso de la cadena es 8 N. Convenientemente hacemos el diagrama de cuerpo libre de la mitad de la cadena. En la parte más baja de la cadena el valor de la tensión es N y tiene dirección horizontal.

SEGUNDO PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de la mitad de la cadena.



TERCER PASO. Aplicamos la condición de equilibrio.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_x = 3 \text{ N}$$

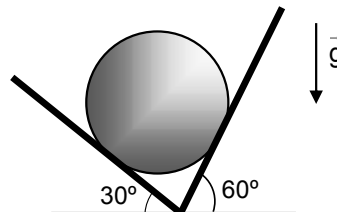
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_y = 4 \text{ N}$$

La reacción en el soporte A, se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras.

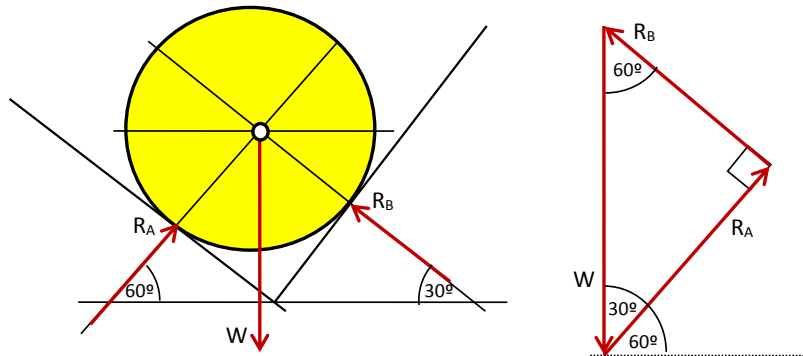
$$R_A = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5 \text{ N}$$

Respuesta. El valor de la fuerza de reacción en el soporte A es 5 newtons.

7. *La esfera de peso 600 N se encuentra apoyada en dos planos inclinados lisos. Determine el valor de la fuerza de reacción (en N) que ejerce el plano de mayor inclinación sobre la esfera.

**RESOLUCIÓN**

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de la esfera. Los planos inclinados forman entre sí un ángulo recto. Las fuerzas de reacción son perpendiculares a los planos inclinados.



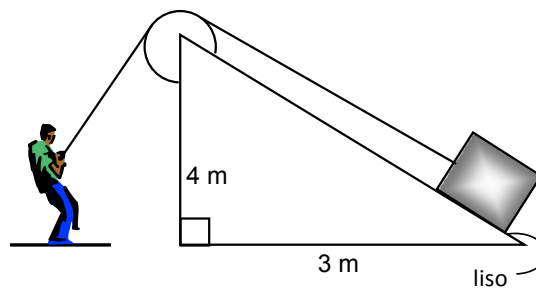
SEGUNDO PASO. Aplicamos la condición de equilibrio. Si tres fuerzas coplanares y concurrentes actúan sobre un cuerpo, con estas se debe formar un triángulo de fuerzas cerrado y ordenado. En este caso tenemos un triángulo rectángulo de 30° y 60° .

$$\text{Sen}30^\circ = \frac{R_B}{W} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R_B}{600} \Rightarrow R_B = 300 \text{ N}$$

$$\text{Sen}60^\circ = \frac{R_A}{W} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R_A}{600} \Rightarrow R_A = 300\sqrt{3} \text{ N}$$

Respuesta. El valor de la fuerza de reacción que ejerce el plano de mayor pendiente sobre la esfera es 300 newtons.

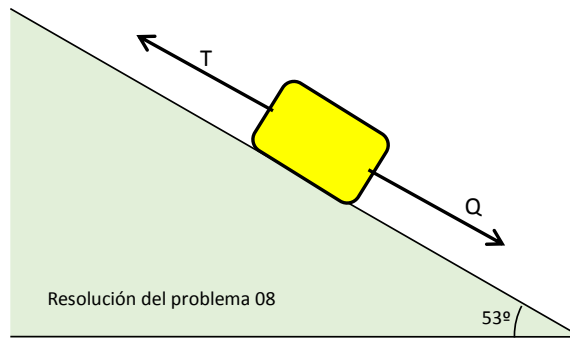
8. *Calcular el valor de la fuerza constante que debe ejercer el hombre sobre la cuerda, tal que el bloque de 600 N ascienda lentamente sobre el plano inclinado.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. En la figura reconocemos un triángulo rectángulo de ángulos interiores 37° y 53° .

SEGUNDO PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre del bloque. La fuerza que ejerce el hombre tiene el mismo valor de la tensión en la cuerda.



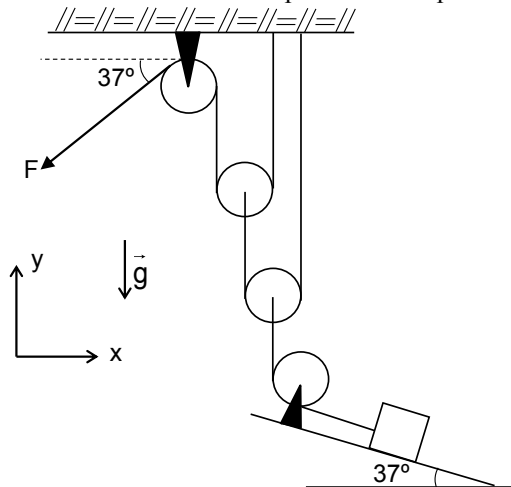
TERCER PASO. Si el bloque asciende con velocidad constante, sube lentamente, es decir, cumple con la condición de equilibrio. Donde, Q es la fuerza de arrastre, es la componente paralela al plano inclinado, de la fuerza de gravedad.

$$Q = W \cdot \text{Sen} 53^\circ \Rightarrow Q = 600 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = 480 \text{ N}$$

$$\text{Pero, } F_{\text{HOMBRE}} = T = Q \Rightarrow F_{\text{HOMBRE}} = 480 \text{ N}$$

Respuesta. La fuerza que debe ejercer el hombre tiene valor de 480 newtons.

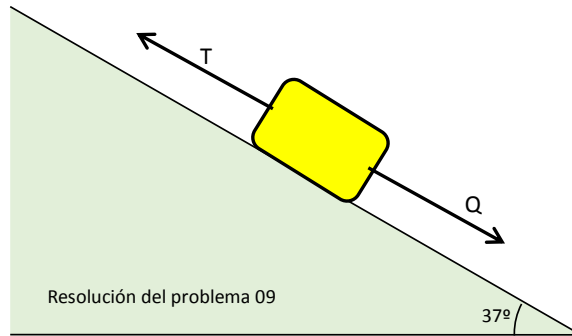
9. Determinar el valor de la fuerza “F” necesaria para mantener al bloque de peso 60 N en equilibrio, sobre el plano inclinado liso. Todas las poleas son de peso despreciable.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Identificamos a la polea fija en la parte superior, sirve para modificar la dirección de la fuerza, es decir el ángulo que forma con la horizontal no modifica el valor de la tensión en la cuerda.

SEGUNDO PASO. Sobre el bloque de peso W que se encuentra sobre el plano inclinado actúa una fuerza de arrastre. La fuerza de arrastre Q actúa paralelamente al plano inclinado con dirección hacia abajo.



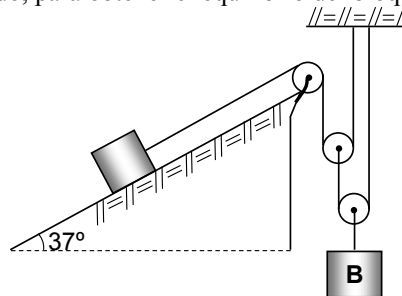
$$Q = W \cdot \text{Sen} 37^\circ \Rightarrow Q = 60 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = 36 \text{ N}$$

TERCER PASO. Analizando todo el sistema deducimos una formula practica para resolver el problema, para un sistema de poleas móviles. En la formula “n” representa la cantidad de poleas móviles. Por equilibrio, $T = Q$.

$$F = \frac{Q}{2^n} \Rightarrow \text{Para } n = 2 \quad F = \frac{36 \text{ N}}{2^2} = 9 \text{ N}$$

Respuesta. El valor de la fuerza F es 9 newtons.

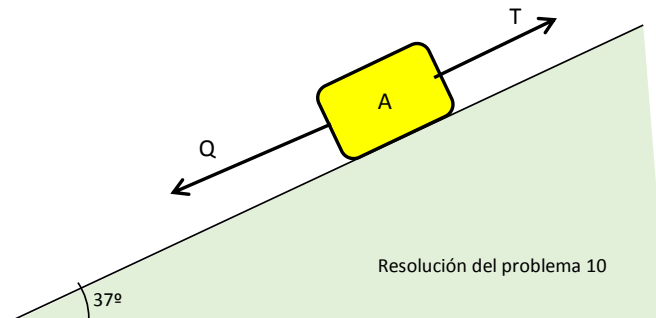
10. El sistema es ideal, las poleas no tienen pesos, no hay fricción, determine el peso del bloque A (en N) sobre el plano inclinado, para obtener el equilibrio del bloque B de peso 120 N.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Identificamos a la polea fija en la parte superior, sirve para modificar la dirección de la fuerza, es decir el ángulo que forma con la vertical no modifica el valor de la tensión en la cuerda.

SEGUNDO PASO. Sobre el bloque A que se encuentra sobre el plano inclinado actúa una fuerza de arrastre. La fuerza de arrastre Q actúa paralelamente al plano inclinado con dirección hacia abajo.



$$Q = W_A \cdot \text{Sen} 37^\circ \Rightarrow Q = W_A \cdot \left(\frac{3}{5}\right)$$

Por condición de equilibrio: $T = Q$.

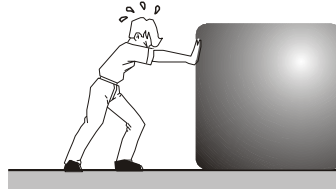
TERCER PASO. Analizando todo el sistema deducimos una fórmula práctica para resolver el problema, para un sistema de poleas móviles. En la fórmula “n” representa la cantidad de poleas móviles.

$$Q = \frac{W_B}{2^n} \Rightarrow \text{Para: } n = 2 \Rightarrow W_A \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{120}{2^2}$$

Resolviendo: $W_A = 50 \text{ newtons}$

Respuesta. El peso del bloque A es 50 newtons.

11. *Una persona trata de poner en movimiento un gran bloque de granito. Si el módulo de la fuerza horizontal que ejerce depende del tiempo según $F = 0,5t$, donde “F” está en newtons y “t” en segundos y el valor máximo de la fuerza de rozamiento, tal que, el bloque no resbale es de 300 N. ¿En qué instante t el bloque empieza a resbalar?



RESOLUCIÓN.

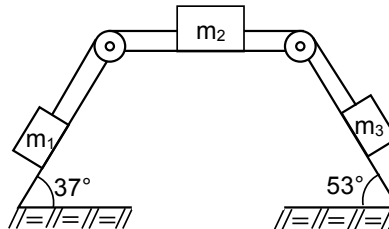
PRIMER PASO. La fuerza F es variable, depende del tiempo. Cuando la fuerza F alcanza un valor de 300 newtons el bloque estará pronto a moverse.

SEGUNDO PASO. En este estado crítico, aplicamos la condición de equilibrio, el bloque está pronto a moverse.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = 300 \Rightarrow (0,5)t = 300 \Rightarrow t = 600 \text{ s } \zeta$$

Respuesta. El bloque empieza a moverse después de 10 minutos.

12. El sistema en equilibrio está conformado por tres bloques sobre superficies lisas, como se muestra. Determinar el valor de X, sabiendo que: $m_1 = X \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, $m_3 = 6 \text{ kg}$.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. En la resolución del problema no interviene el peso del bloque “2”, porque se encuentra sobre una superficie horizontal, la fuerza de gravedad no está en favor ni en contra del movimiento.

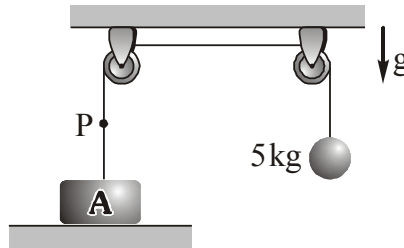
SEGUNDO PASO. Si existe equilibrio, entonces las fuerzas de arrastre en el plano inclinado 37° y en el plano inclinado 53° deben ser iguales.

$$W_1 \cdot \text{Sen} 37^\circ = W_3 \cdot \text{Sen} 53^\circ \Rightarrow m_1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = m_3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)$$

$$m_1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = (6 \text{ kg}) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow m_1 = 8 \text{ kg}$$

Respuesta: La masa del bloque "1" es 8 kilogramos.

13. Si el bloque A está a punto de subir, determine el módulo de la tensión en P y la masa del bloque A. ($g=10 \text{ m/s}^2$).



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. La esfera de masa 5 kilogramo se encuentra en equilibrio, entonces, la tensión en la cuerda es igual al peso de la esfera.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = m \cdot g = (5) \cdot (10) = 50 \text{ N}$$

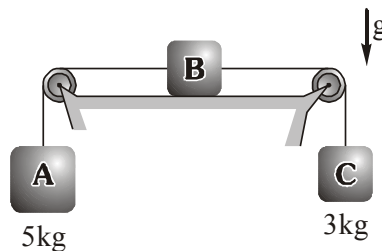
SEGUNDA PASO. Si el bloque A está pronto a subir, entonces la reacción normal es nula, ahora el valor de la tensión en el punto P de la cuerda es igual al peso del bloque A.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = m_A \cdot g \Rightarrow 50 = (m_A) \cdot (10)$$

Resolviendo: $m_A = 5 \text{ kg}$

Respuesta: la masa de la A es 5 kilogramos.

14. Determine el módulo de la fuerza de rozamiento sobre el bloque B si el sistema está en reposo. ($g=10 \text{ m/s}^2$)

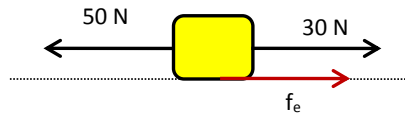


RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. La esfera B se encuentra en equilibrio donde su peso no está en favor ni en contra del movimiento. Los pesos de los bloques A y B son las fuerzas que actúan sobre el bloque B mediante las cuerdas que pasan a través de las poles fijas.

$$T_1 = m_A \cdot g = 50 \text{ N} \quad y \quad T_2 = m_C \cdot g = 30 \text{ N}$$

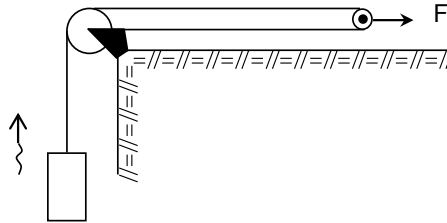
SEGUNDA PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre del bloque B. Aplicamos las condiciones de equilibrio. La fuerza de rozamiento es igual a la diferencia entre las tensiones en las cuerdas.



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f_e = 50 - 30 = 20 \text{ N}$$

Respuesta: el valor de la fuerza de rozamiento es 20 newtons.

15. Si el bloque de peso 80 N sube con velocidad constante, calcular el valor de la fuerza constante “F” (en N). La polea móvil tiene masa despreciable. Desprecie toda forma de rozamiento.

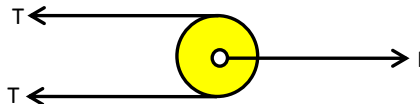


RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. El bloque sube con velocidad constante, es decir se encuentra en equilibrio, entonces el valor de la tensión en la cuerda es igual al peso del bloque.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = W = 80 \text{ N} \dots (1)$$

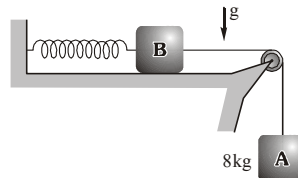
SEGUNDO PASO. La polea móvil se mueve velocidad constante, entonces se encuentra en equilibrio.



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = 2T = 2 \cdot (80) = 160 \text{ N}$$

Respuesta. El valor de la fuerza que actúa sobre la polea móvil es 160 newtons.

16. Si el sistema se encuentra en reposo estando el resorte de constante elástica $K = 1200 \text{ N/m}$ estirado 5 cm, determine el módulo de la fuerza de rozamiento sobre el bloque “B”. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. El bloque A se encuentra en equilibrio, entonces el valor de la tensión en la cuerda es igual peso del bloque A.

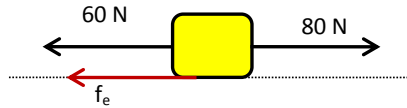
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = m_A \cdot g = 80 \text{ N}$$

SEGUNDO PASO. El bloque B también se encuentra en equilibrio. Sobre el bloque B actúa un resorte. Calculamos el valor de la fuerza externa. Ley de Hooke.

$$F_e = K \cdot X \Rightarrow F_e = (1200 \text{ N.m}^{-1}) \cdot (0,05 \text{ m}) = 60 \text{ N}$$

Si el resorte está estirado, entonces la fuerza elástica es de tensión.

TERCER CASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre.

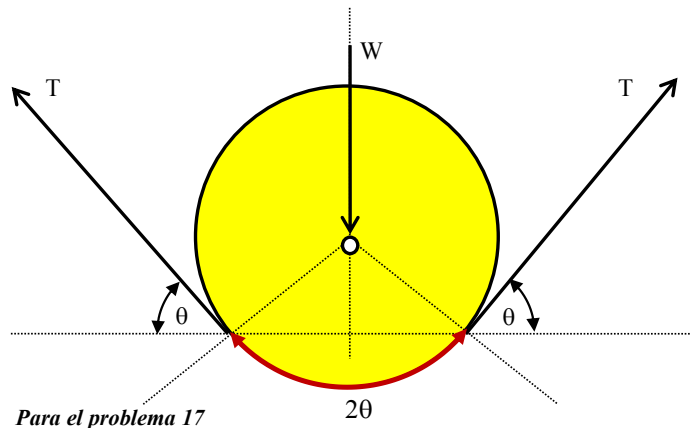


La fuerza de rozamiento es igual a la diferencia entre las tensiones en las cuerdas.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f_e = 80 - 60 = 20 \text{ N}$$

Respuesta: el valor de la fuerza de rozamiento es 20 newtons.

17. Se muestra una polea de peso W en equilibrio. Desprecie toda forma de rozamiento. La cuerda bordea parte de la superficie periférica de la polea. Determinar el valor de la tensión T en la cuerda.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. La cuerda bordea la polea un ángulo central 2θ entonces deducimos que la cuerda en los extremos forma con la horizontal un ángulo θ que resulta una propiedad geométrica, las cuerdas son tangentes a la polea.

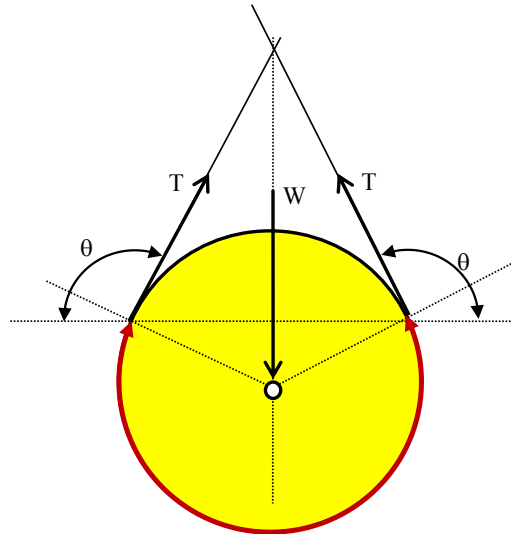
SEGUNDO PASO. Aplicamos la condición de equilibrio. La sumatoria de fuerzas vertical es nula.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T \cdot \text{Sen} \theta = W$$

$$T = \frac{W}{2 \cdot \text{Sen} \theta} \Rightarrow T = \frac{W \cdot \text{Csc} \theta}{2}$$

TERCER PASO. El valor de la tensión depende de la medida del ángulo central que forma la cuerda con el borde de la polea.

18. Se muestra una polea de peso W en equilibrio. Desprecie toda forma de rozamiento. La cuerda bordea parte de la superficie periférica de la polea. Determinar el valor de la tensión T en la cuerda.



Para el problema 18 2θ

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. La cuerda bordea la polea un ángulo central 2θ entonces deducimos que la cuerda en los extremos forma con la horizontal un ángulo θ que resulta una propiedad geométrica, las cuerdas son tangentes a la polea.

SEGUNDO PASO. Aplicamos la condición de equilibrio. La sumatoria de fuerzas vertical es nula.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T \cdot \text{Sen}\theta = W$$

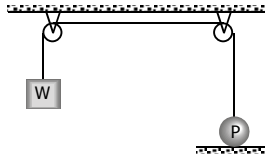
$$T = \frac{W}{2 \cdot \text{Sen}\theta} \Rightarrow T = \frac{W \cdot \text{Csc}\theta}{2}$$

TERCER PASO. El valor de la tensión depende de la medida del ángulo central que forma la cuerda con el borde de la polea.

19. CONTINUARA.

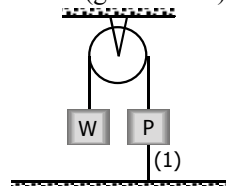
PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE

1. La figura muestra dos cuerpos $W = 1,5 \text{ kg}$ y $P = 3,5 \text{ kg}$, en reposo. Determine el módulo de la tensión en la cuerda. No hay rozamiento. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



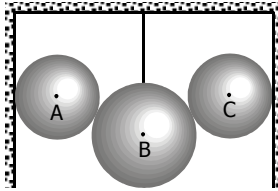
- A) 10 N B) 15 N C) 40 N D) 45 N E) 50 N

2. La figura muestra dos cuerpos $W = 6,5 \text{ kg}$ y $P = 3,5 \text{ kg}$, en reposo. Determine el módulo de la tensión en la cuerda (1). No hay rozamiento. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



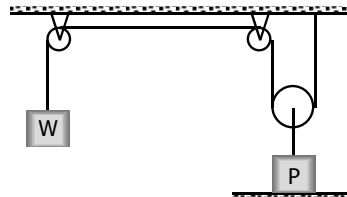
- A) 10 N B) 20 N C) 30 N D) 40 N E) 50 N

3. La figura muestra tres cuerpos $A = 4,5 \text{ kg}$, $B = 6 \text{ kg}$ y $C = 4,5 \text{ kg}$, en reposo. Determine el módulo de la tensión en la cuerda vertical. No hay rozamiento. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



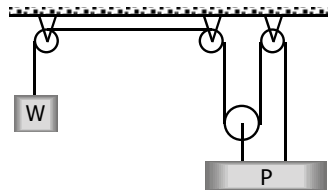
- A) 60 N B) 120 N C) 130 N D) 140 N E) 150 N

4. La figura muestra dos cuerpos $W = 2 \text{ kg}$ y $P = 7 \text{ kg}$, en reposo. Si la polea tiene masa despreciable, determine el módulo de la fuerza de reacción del piso sobre el bloque P. No hay rozamiento. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



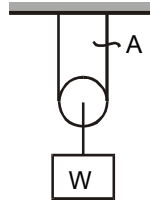
- A) 10 N B) 20 N C) 30 N D) 40 N E) 50 N

5. La figura muestra dos cuerpos $W = 2 \text{ kg}$ y $P = 5 \text{ kg}$, en reposo. Determine la cantidad de masa de la polea móvil. No hay rozamiento. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



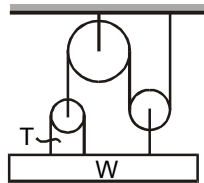
- A) 1 kg B) 0,1 kg C) 2 kg D) 3 kg E) 10 kg

6. El bloque de 20 kg se encuentra en equilibrio. Si la cantidad de masa de la polea móvil es 2 kg, determinar el módulo de la tensión en la cuerda A. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



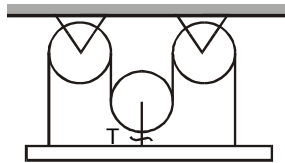
- A) 210 N B) 110 N C) 220 N D) 100 N E) 230 N

7. El bloque de 14 kg se encuentra en equilibrio. Si la cantidad de masa de cada polea móvil es 2 kg, determinar el módulo de la tensión en la cuerda T. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



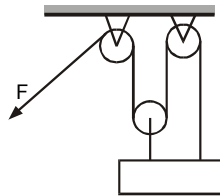
- A) 20 N B) 22 N C) 27 N D) 26 N E) N.A.

8. El bloque de 20 kg se encuentra en equilibrio. Si la cantidad de masa de la polea móvil es 4 kg, determinar el módulo de la tensión en la cuerda T. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



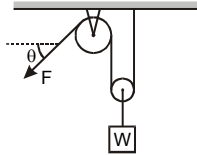
- A) 80 N B) 90 N C) 100 N D) 120 N E) 60 N

9. El bloque de 20 kg se encuentra en equilibrio. Si la cantidad de masa de la polea móvil es 4 kg, determinar el módulo de la fuerza F. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



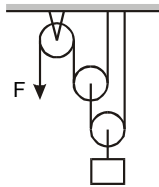
- A) 80 N B) 90 N C) 100 N D) 120 N E) 60 N

10. El bloque de 56 kg se encuentra en equilibrio. Si la cantidad de masa de la polea móvil es 4 kg, determinar el módulo de la fuerza F . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



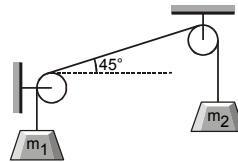
- A) 300 N B) 400 N C) 500 N D) 600 N E) 60 N

11. El bloque de 9 kg se encuentra en equilibrio. Si la cantidad de masa de cada polea móvil es 1 kg, determinar el módulo de la fuerza F . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



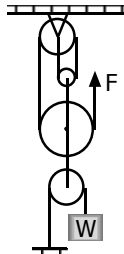
- A) 3 N B) 30 N C) 50 N D) 20 N E) 10 N

12. La figura muestra dos bloques en equilibrio. Si no hay rozamiento en las poleas, determine la relación entre las masas m_1 / m_2 :



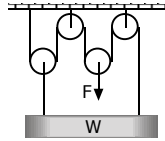
- A) 1:1 B) 2:3 C) 3:4 D) 4:5 E) 3:2

13. El bloque W de 20 kg se encuentra en reposo. Si las poleas móviles tienen masas despreciables y no ofrecen rozamiento, determine el módulo de la fuerza F . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



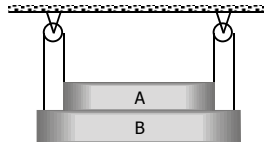
- A) 100 N B) 120 N C) 240 N D) 10 N E) 60 N

14. El bloque W de 5 kg se encuentra en reposo. Si las poleas móviles tienen masas despreciables y no ofrecen rozamiento, determine el módulo de la fuerza F. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



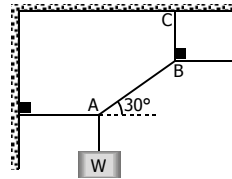
- A) 10 N B) 20 N C) 24 N D) 18 N E) N.A

15. La figura muestra dos bloques A y B de masas 8 kg y 5 kg respectivamente. Determinar el módulo de la fuerza de reacción entre los bloques A y B. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



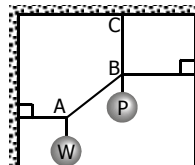
- A) 10 N B) 15 N C) 20 N D) 30 N E) 15 N

16. El bloque W de 5 kg se encuentra en reposo. Determine el módulo de la tensión en la cuerda vertical BC. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



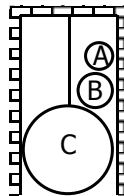
- A) 40 N B) 50 N C) 20 N D) 30 N E) 15 N

17. Los bloques W = 5 kg y P = 3 kg se encuentran en reposo. Determine el módulo de la tensión en la cuerda vertical BC. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



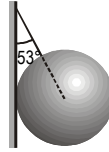
- A) 40 N B) 50 N C) 60 N D) 80 N E) 90 N

18. La figura muestra tres esferas en equilibrio, cuyas masas son: A = 2 kg, B = 3 kg, C = 5 kg. Determine el módulo de la tensión en la cuerda vertical. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



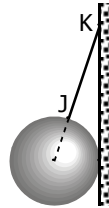
- A) 100 N B) 120 N C) 240 N D) 10 N E) 60 N

19. La figura muestra una esfera apoyada en una pared vertical, en equilibrio. Si el módulo de la tensión en la cuerda es 40 N, determine la cantidad de masa de la esfera. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



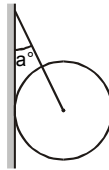
- A) 10 N B) 12 N C) 24 N D) 20 N E) 60 N

20. La figura muestra una esfera de 5 kg apoyada en una pared vertical, en equilibrio. Si el módulo de la tensión en la cuerda JK es 130 N, determine el módulo de la fuerza de reacción de la pared sobre la esfera. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



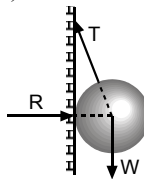
- A) 110 N B) 120 N C) 124 N D) 130 N E) 160 N

21. La figura muestra una esfera de 3 kg apoyada en una pared vertical, en equilibrio. Si el módulo de la tensión en la cuerda es 40 N, determine la medida del ángulo que forma la cuerda con la pared vertical. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



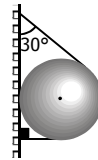
- A) 37° B) 53° C) 30° D) 60° E) 20°

22. La figura muestra una esfera de 5 kg apoyada en una pared vertical, en equilibrio. Si el módulo de la tensión en la cuerda es 130 N, determine el módulo de la fuerza de reacción que ejerce la pared vertical sobre la esfera. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



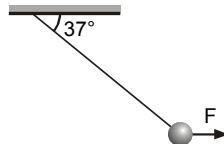
- A) 00 N B) 120 N C) 60 N D) 70 N E) 80 N

23. La figura muestra una esfera de 5 kg apoyada en una pared vertical, en equilibrio. Si la cuerda bordea a la esfera, determine el módulo de la fuerza de reacción que ejerce la pared vertical sobre la esfera. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



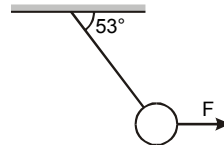
- A) 186,6 N B) 160 N C) 165 N D) 170 N E) N.A

24. La figura muestra una esfera de 6 kg en reposo. Determine el módulo de la fuerza externa F . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



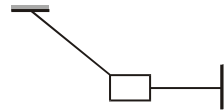
- A) 30 N B) 40 N C) 50 N D) 70 N E) 80 N

25. La figura muestra una esfera de 8 kg en reposo. Determine el módulo de la fuerza externa F . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



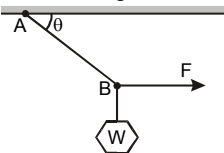
- A) 30 N B) 40 N C) 60 N D) 70 N E) 80 N

26. La figura muestra un bloque de 12 kg en equilibrio. Si el módulo de la tensión en la cuerda horizontal es 50 N, determinar el módulo de la tensión en la cuerda oblicua. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



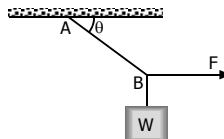
- A) 130 N B) 40 N C) 50 N D) 70 N E) 80 N

27. La figura muestra un bloque de 3 kg en equilibrio. Conociendo la fuerza externa $\mathbf{F} = 40 \mathbf{i}$ (N), determine la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



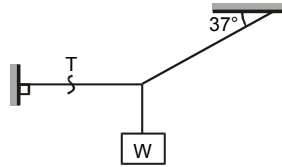
- A) 37° B) 53° C) 30° D) 60° E) 20°

28. La figura muestra un bloque de 6 kg en equilibrio. Determinar el módulo de la fuerza externa $\mathbf{F}$, sabiendo que $\theta = 45^\circ$. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



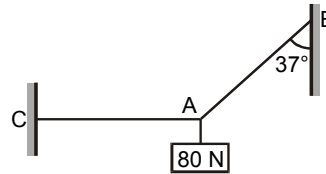
- A) 60 N B) 40 N C) 50 N D) 70 N E) 80 N

29. La figura muestra un bloque de 3 kg en equilibrio. Determine el módulo de la tensión en la cuerda horizontal. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



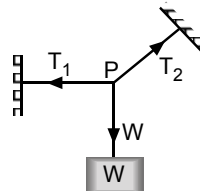
- A) 130 N B) 40 N C) 50 N D) 30 N E) 80 N

30. La figura muestra un bloque de 8 kg en equilibrio. Determine el módulo de la tensión en la cuerda oblicua AB. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



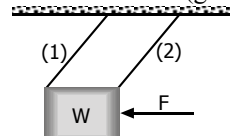
- A) 100 N B) 120 N C) 130 N D) 140 N E) 150 N

31. La figura muestra un bloque W de 8 kg en equilibrio. Si el módulo de la tensión en la cuerda horizontal es 60 N, determine el módulo de la tensión en la cuerda oblicua. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



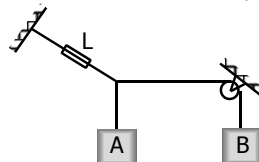
- A) 100 N B) 120 N C) 130 N D) 140 N E) 150 N

32. La figura muestra un bloque W de 12 kg en equilibrio. Si el módulo de la tensión en cada cuerda (1) y (2) es 65 N, determine el módulo de la fuerza F. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



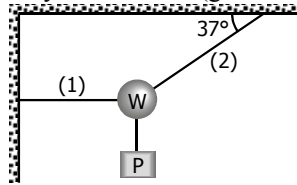
- A) 100 N B) 120 N C) 130 N D) 140 N E) 150 N

33. Los bloques A y B de masas 5 kg y 12 kg, se encuentran en equilibrio. Determine la lectura en el dinamómetro L (módulo de la tensión en la cuerda oblicua). ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

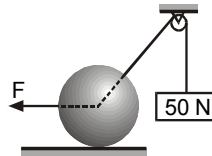


- A) 100 N B) 120 N C) 130 N D) 140 E) 150 N

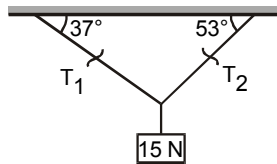
34. La figura muestra dos cuerpos $W = 4 \text{ kg}$ y $P = 2 \text{ kg}$, en reposo. Determine el módulo de la tensión en las cuerdas (1) y (2). No hay rozamiento. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



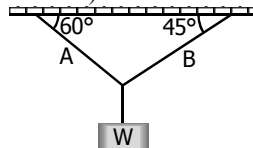
- A) 80 y 100 N
D) 150 y 180 N
- B) 130 y 140 N
E) N.A.
- C) 180 y 240 N
35. La esfera de 5 kg se encuentra en equilibrio por acción de la fuerza $\mathbf{F} = -40 \mathbf{i} \text{ (N)}$. Determine el módulo de la reacción del piso sobre la esfera. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



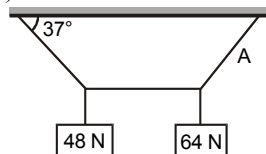
- A) 10 N
C) 30 N
- B) 20 N
D) 40 N
- E) 50 N
36. El bloque de 1,5 kg se encuentra en equilibrio. Determine el módulo de las tensiones en las cuerdas T_1 y T_2 . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- A) 9 y 12 N
C) 18 y 24 N
- B) 3 y 4 N
D) 15 y 18 N
- E) N.A.
37. El bloque W de 1,5 kg se encuentra en equilibrio. Determine el cociente entre los módulos de las tensiones en las cuerdas T_A/T_B . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

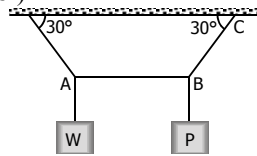


- A) 0,82
C) 1
- B) 1,22
D) 2
- E) N.A.
38. La figura muestra dos bloques de 4,8 kg y 6,4 kg en equilibrio. Determine el módulo de la tensión en la cuerda A. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



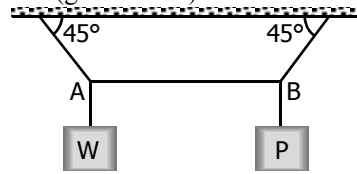
- A) 64 N
C) 16 N
- B) 32 N
D) 90,51 N
- E) 50 N

39. La figura muestra dos bloques W y P en equilibrio. Si $W = 2 \text{ kg}$, determine el módulo de la tensión en la cuerda BC. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



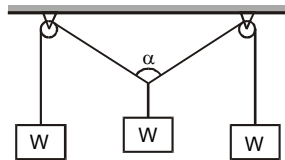
- A) 10 N B) 20 N C) 30 N D) 40 N E) 50 N

40. La figura muestra dos bloques W y P en equilibrio. Si $W = 4 \text{ kg}$, determine el módulo de la tensión en la cuerda horizontal AB. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



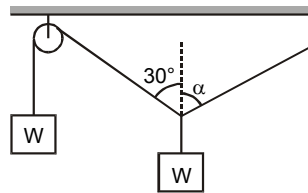
- A) 10 N B) 20 N C) 30 N D) 40 N E) 50 N

41. La figura muestra tres bloques idénticos en equilibrio. Si no hay rozamiento en las poleas, determine la medida del ángulo α .



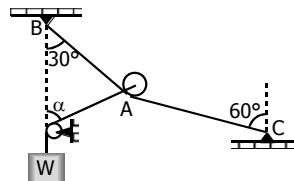
- A) 120° B) 150° C) 135° D) 127° E) N.A.

42. La figura muestra dos bloques idénticos en equilibrio. Si no hay rozamiento, determine la medida del ángulo α .



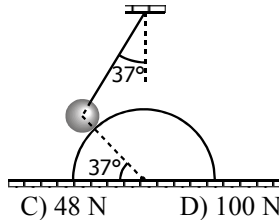
- A) 37° B) 55° C) 30° D) 80° E) N.A.

43. La polea en A de masa despreciable puede deslizarse libremente sobre la cuerda que une los extremos B y C. Determine la medida del ángulo α que define la posición de equilibrio del sistema.



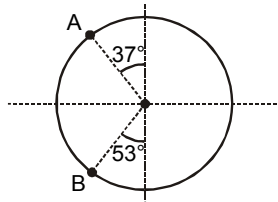
- A) 37° B) 53° C) 30° D) 60° E) N.A.

44. La esfera de 8 kg se encuentra en reposo sobre una superficie cilíndrica de radio R , libre de rozamiento. Determine el módulo de la tensión en la cuerda que une la esfera con el techo.



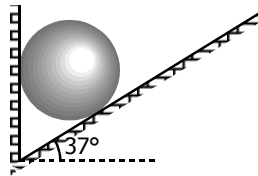
- A) 80 N B) 64 N C) 48 N D) 100 N E) 60 N

45. La figura muestra un aro homogéneo de 5 kg apoyada en dos clavos A y B sobre una pared vertical. Determine el módulo de las reacciones en los clavos sobre el aro. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



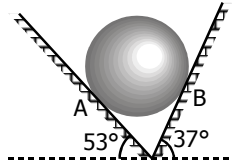
- A) 30 y 40 N B) 20 y 30 N C) 24 y 32 N D) 20 y 45 N E) N.A.

46. La esfera de 6 kg se encuentra apoyada entre dos planos inclinados que no ofrecen rozamiento. Determine el módulo de las reacciones entre los puntos de apoyo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



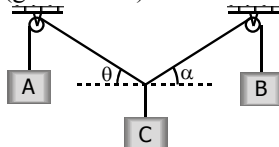
- A) 30 y 40 N B) 60 y 80 N C) 24 y 32 N D) 20 y 45 N E) N.A

47. La esfera de 5 kg se encuentra apoyada entre dos planos inclinados que no ofrecen rozamiento. Determine el módulo de las reacciones entre los puntos de apoyo A y B. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



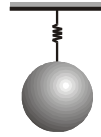
- A) 30 y 40 N B) 20 y 30 N C) 24 y 32 N D) 20 y 45 N E) N.A

48. Los bloques A = 6 kg, B = 8 kg y C = 10 kg se encuentran en reposo. Determine la medida de los ángulos α y θ respectivamente ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



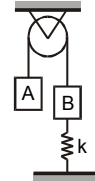
- A) 37° y 53° B) 53° y 37° C) 30° y 60° D) 60° y 53° E) N.A

49. La esfera de 4 kg se encuentra en equilibrio. Determinar la deformación en el resorte de rigidez 5 N/cm. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



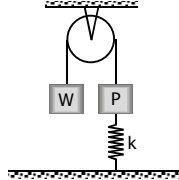
- A) 4 cm B) 6 cm C) 8 cm D) 10 cm E) 12 cm

50. La figura muestra dos bloques A y B de masas 30 kg y 10 kg respectivamente, en equilibrio. Determine la deformación en el resorte de rigidez 50 N/cm. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



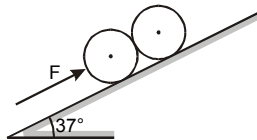
- A) 4 cm B) 6 cm C) 8 cm D) 10 cm E) N.A.

51. La figura muestra dos bloques W y P de masas 30 kg y 50 kg respectivamente, en equilibrio. Determine la deformación en el resorte de rigidez 50 N/cm. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



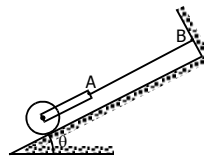
- A) 4 cm B) 5 cm C) 6 cm D) 8 cm E) N.A.

52. La figura muestra dos esferas de 6 kg cada una en equilibrio sobre el plano inclinado. Determine el módulo de la fuerza F. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



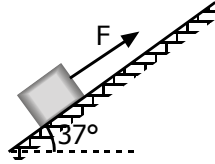
- A) 72 N B) 78 N C) 120 N D) 80 N E) 60 N

53. El rodillo de 4 kg se encuentra en reposo sobre un plano inclinado que no ofrece rozamiento. Si el módulo de la tensión en la cuerda AB que lo sostiene es 20 N, determine la medida del ángulo θ . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



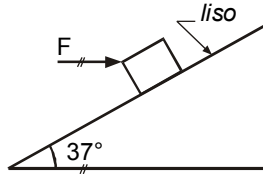
- A) 37° B) 53° C) 30° D) 60° E) N.A.

54. El bloque de 5 kg sube con velocidad constante sobre un plano inclinado que no ofrece rozamiento. Determine el módulo de la fuerza F . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



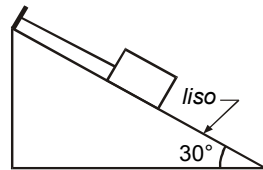
- A) 20 N B) 25 N C) 30 N D) 40 N E) 45 N

55. El bloque se mueve con velocidad constante sobre el plano inclinado libre de rozamiento, debido a la acción de la fuerza $F = 45 \text{ i}$ (N). Determine la cantidad de masa del bloque. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



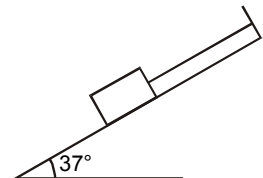
- A) 4 kg B) 6 kg C) 8 kg D) 3 kg E) 5 kg

56. El bloque de 4 kg se encuentra en reposo sobre un plano inclinado que no ofrece rozamiento. Sabiendo que no hay rozamiento, determine el módulo de la tensión en la cuerda que lo sostiene. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



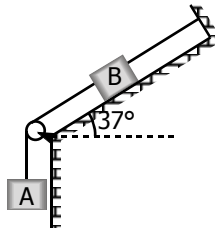
- A) 10 N B) 12 N C) 24 N D) 20 N E) 60 N

57. El bloque de 5 kg se encuentra en reposo sobre un plano inclinado que no ofrece rozamiento. Sabiendo que no hay rozamiento, determine el módulo de la tensión en la cuerda que lo sostiene. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



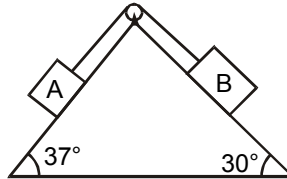
- A) 10 N B) 30 N C) 40 N D) 20 N E) 50 N

58. Los bloques A y B de masas 3 kg y 5 kg se encuentran en equilibrio. No hay rozamiento. Determine el módulo de la tensión en la cuerda que une el bloque B y la pared. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



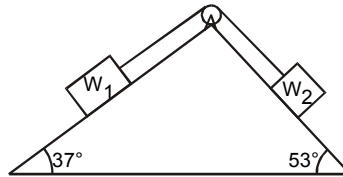
- A) 60 N B) 30 N C) 40 N D) 80 N E) 90 N

59. La figura muestra dos bloques A y B en equilibrio sobre superficies que no ofrecen rozamiento. Si la masa de A es 5 kg, determine la cantidad de masa del bloque B. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



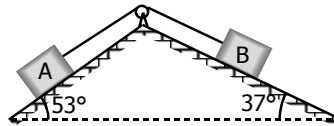
- A) 4 kg B) 6 kg C) 8 kg D) 3 kg E) 5 kg

60. La figura muestra dos bloques W_1 y W_2 en equilibrio, sobre superficies que no ofrecen rozamiento. Si la masa de W_1 es 12 kg, determine la cantidad de masa del bloque W_2 . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



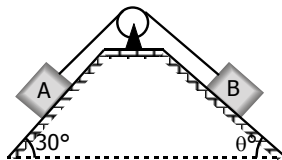
- A) 9 kg B) 6 kg C) 8 kg D) 3 kg E) 5 kg

61. La figura muestra dos bloques A y B en equilibrio, sobre superficies que no ofrecen rozamiento. Determine la relación entre las masas, M_A / M_B :



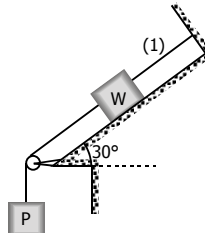
- A) 2:3 B) 3:5 C) 3:4 D) 5:6 E) 1:6

62. La figura muestra dos bloques A y B de masas 6 kg y 5 kg respectivamente, en equilibrio, sobre superficies que no ofrecen rozamiento. Determine la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



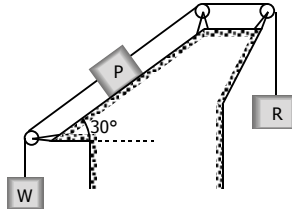
- A) 37° B) 53° C) 30° D) 60° E) N.A

63. La figura muestra dos bloques en reposo, donde $W = 4 \text{ kg}$ y $P = 2 \text{ kg}$, sobre superficies que no ofrecen rozamiento. Determine el módulo de la tensión en la cuerda (1). ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



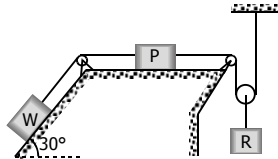
- A) 80 N B) 60 N C) 40 N D) 20 N E) N.A

64. La figura muestra tres bloques en reposo, donde $W = 2 \text{ kg}$ y $P = 3 \text{ kg}$, sobre superficies que no ofrecen rozamiento. Determine la cantidad de masa del bloque R. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



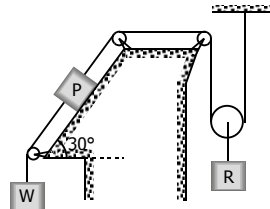
- A) 2 kg B) 3 kg C) 3,5 kg D) 4 kg E) 5 kg

65. La figura muestra tres bloques en reposo, donde $W = 6 \text{ kg}$ y $P = 3 \text{ kg}$, sobre superficies que no ofrecen rozamiento. La polea móvil tiene masa despreciable. Determine la cantidad de masa del bloque R. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



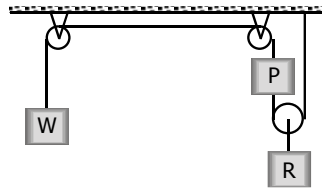
- A) 2 kg B) 3 kg C) 3,5 kg D) 4 kg E) 5 kg

66. La figura muestra tres bloques en reposo, donde $P = 6 \text{ kg}$ y $R = 8 \text{ kg}$, sobre superficies que no ofrecen rozamiento. La polea móvil tiene masa despreciable. Determine la cantidad de masa del bloque W. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



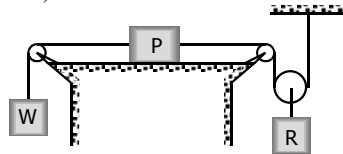
- A) 0,5 kg B) 1 kg C) 1,5 kg D) 2 kg E) 2,5 kg

67. La figura muestra tres bloques en reposo, donde $W = 5 \text{ kg}$, $P = 2 \text{ kg}$ y $R = 5,5 \text{ kg}$, donde las poleas no ofrecen rozamiento. Determine la cantidad de masa de la polea móvil. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



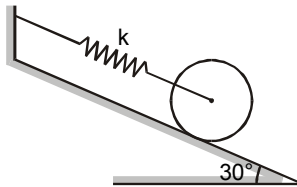
- A) 0,5 kg B) 1 kg C) 1,5 kg D) 2 kg E) 2,5 kg

68. La figura muestra tres bloques en reposo, donde $P = 6 \text{ kg}$ y $R = 4 \text{ kg}$, donde la superficie horizontal no ofrece rozamiento. La polea móvil tiene masa despreciable. Determine la cantidad de masa del bloque W. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



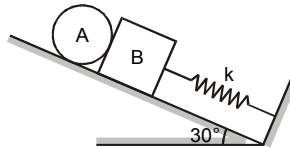
- A) 0,5 kg B) 1 kg C) 1,5 kg D) 2 kg E) 2,5 kg

69. La figura muestra una esfera de 4 kg en reposo sobre un plano inclinado que no ofrece rozamiento. Determine la deformación en el resorte de rigidez 5 N/cm. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



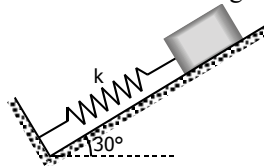
- A) 2 cm B) 3 cm C) 4 cm D) 5 cm E) 6 cm

70. La figura muestra una esfera de 16 kg en reposo. Si retiramos lentamente la esfera A, ¿qué distancia recorre el bloque B. La rigidez del resorte es 200 N/m. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



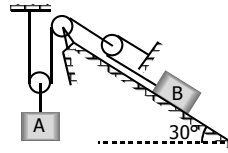
- A) 20 cm B) 30 cm C) 40 cm D) 50 cm E) 60 cm

71. La figura muestra un bloque de 4 kg en reposo sobre un plano inclinado que no ofrece rozamiento. Determine la deformación en el resorte de rigidez 5 N/cm. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



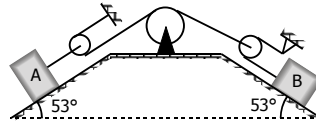
- A) 2 cm B) 3 cm C) 4 cm D) 5 cm E) 6 cm

72. La figura el bloque B de 4 kg en reposo sobre un plano inclinado que no ofrece rozamiento. Si las poleas de masa despreciable no ofrecen rozamiento, determine la cantidad de masa del bloque A. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



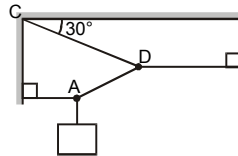
- A) 2 kg B) 4 kg C) 6 kg D) 8 kg E) 10 kg

73. La figura muestra dos bloques A y B en equilibrio, sobre superficies que no ofrecen rozamiento. Determine la relación entre las masas, M_A / M_B :



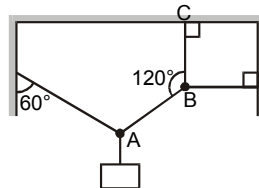
- A) 2:3 B) 2:1 C) 4:1 D) 5:6 E) 6:1

74. La figura muestra un bloque de 4 kg en equilibrio. Determine el módulo de la tensión en la cuerda vertical CD. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



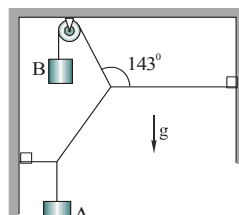
- A) 80 N B) 60 N C) 40 N D) 20 N E) N.A

75. La figura muestra un bloque de 10 kg en equilibrio. Determine el módulo de la tensión en la cuerda vertical BC. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



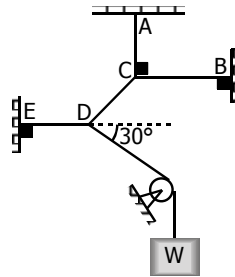
- A) 50 N B) 30 N C) 40 N D) 20 N E) N.A.

76. La figura muestra dos bloques A y B en equilibrio. Si A = 3 kg, determine la cantidad de masa del bloque B. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- A) 2 kg B) 3 kg C) 4 kg D) 5 kg E) 10 kg

77. La figura muestra un bloque de 40 kg en equilibrio. Determine el módulo de la tensión en la cuerda vertical AC. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



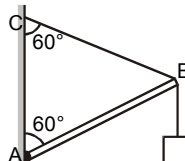
- A) 50 N B) 60 N C) 100 N D) 80 N E) N.A.
78. *La figura muestra una cadena homogénea de 0,8 kg sujeta en los puntos A y B. Si el módulo de la tensión en el punto más bajo 3 N. Determine el módulo de la reacción en el soporte A. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



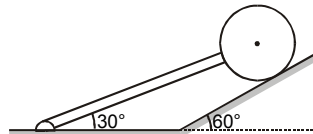
- A) 5 N B) 6 N C) 7 N D) 8 N E) N.A.
79. La figura muestra una cadena homogénea de 1,6 kg sujeta en los puntos A y B. Determine el módulo de la reacción en el soporte A. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- A) 8 N B) 6 N C) 16 N D) 20 N E) N.A.
80. La figura muestra una barra AB de masa despreciable. Si el bloque de 4 kg se encuentra en equilibrio, determine el módulo de la compresión en la barra AB. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

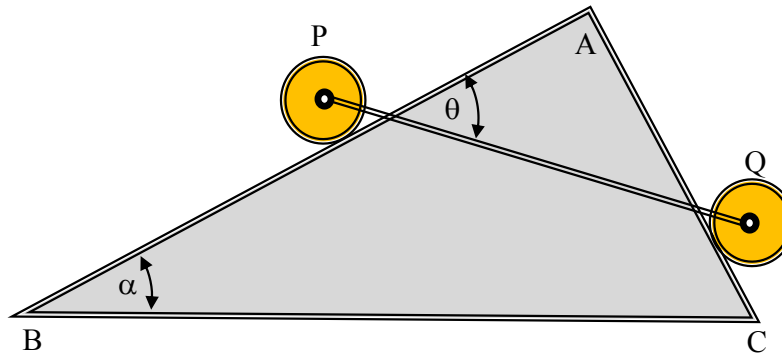


- A) 10 N B) 20 N C) 30 N D) 40 N E) 50 N
81. La figura muestra una barra de masa despreciable en equilibrio. Si la esfera de 2 kg se encuentra en equilibrio, determine el módulo de la compresión en la barra. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

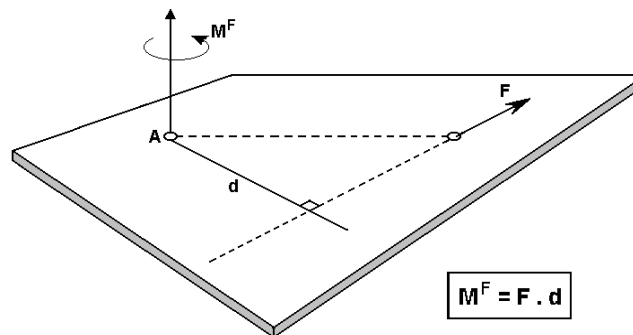


- A) 10 N B) 20 N C) 30 N D) 40 N E) 50 N

ESTÁTICA II



1. **ARQUÍMEDES:** Alrededor de los años 287 – 212 antes de nuestra era existió este genial matemático, físico e ingeniero de la antigüedad. En la mecánica, estableció las leyes de la palanca, las condiciones de flotación de los cuerpos (Principio de Arquímedes). Las leyes de la suma de fuerzas paralelas. Arquímedes inventó una máquina para elevar agua (la rosca de Arquímedes), que incluso actualmente se emplea para transportar cargas movedizas y viscosas; un sistema de palancas y bloques para levantar grandes pesos y maquinas, militares arrojadizas, que actuaron con éxito durante el cerco de su ciudad natal, Siracusa, por los romanos. Arquímedes calculó el volumen y la superficie de la esfera y de sus partes, del cilindro y de los cuerpos formados por la rotación de la elipse, hipérbola y parábola. Calculó por primera vez, con bastante exactitud, la razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro, es decir el valor de $\pi = 3,1416$.



2. **MOMENTO DE UNA FUERZA O TORQUE:** El efecto rotatorio de una fuerza se caracteriza por su “Momento” o torque. El momento de una fuerza es la capacidad que tiene una fuerza para producir giro o rotación respecto de un punto o eje de giro.

ELEMENTOS: El Momento de una fuerza, es una magnitud vectorial y tiene los siguientes elementos:

(1) **Módulo:** Es igual al producto de la fuerza “F”, por la distancia trazada desde el centro de giro “A”, perpendicularmente a la línea de acción de la fuerza.

(2) **Dirección:** Es perpendicular al plano de rotación, determinado por la línea de acción de la fuerza y el centro de giro.

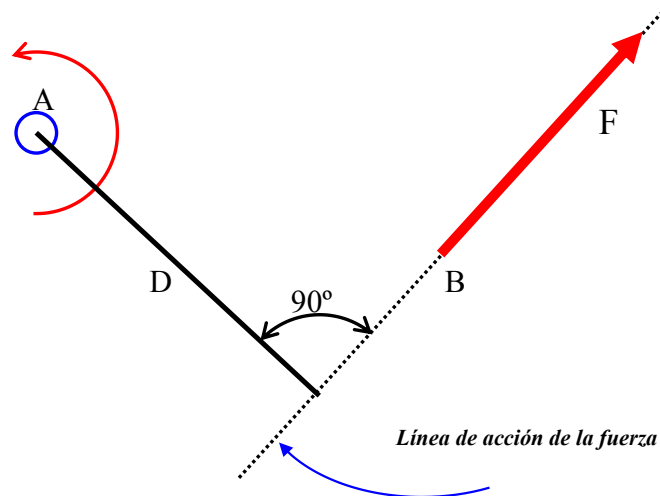
(3) **Sentido:** Se determina aplicando la “Regla de la Mano Derecha”, los dedos indican el sentido de giro y el pulgar, el sentido del vector momento de una fuerza. Tienen la misma dirección y sentido de la velocidad angular.

(4) **Signos:** El momento es positivo si el giro es *antihorario* (+) y es negativo si el giro es *horario* (-).

3. BRAZO DE MOMENTO (D)

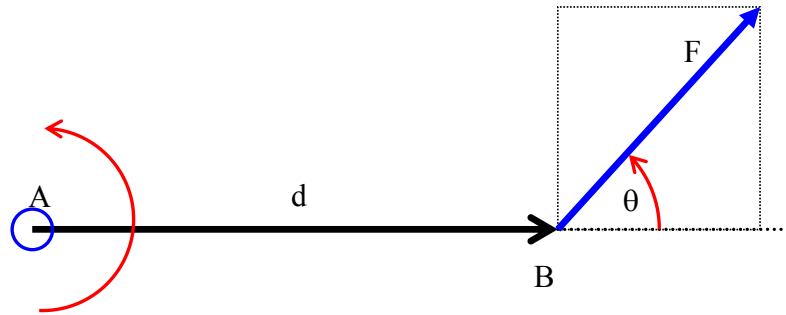
En la distancia trazada desde el centro de giro, perpendicularmente a la línea de acción de la fuerza, no necesariamente a la fuerza, sino a su línea de acción.

$$M_A^F = F.D \Leftrightarrow F \perp D$$



4. TORQUE O MOMENTO DE UN FUERZA

Es la capacidad que tiene una fuerza para producir giro o rotación respecto de un punto o de un eje. Su definición tiene naturaleza vectorial y su módulo es:



$$M_A^F = F \cdot d_{AB} \cdot \text{Sen}\theta$$

M_A^F : Se lee, momento de la fuerza F respecto del punto A.

A: centro de giro o rotación.

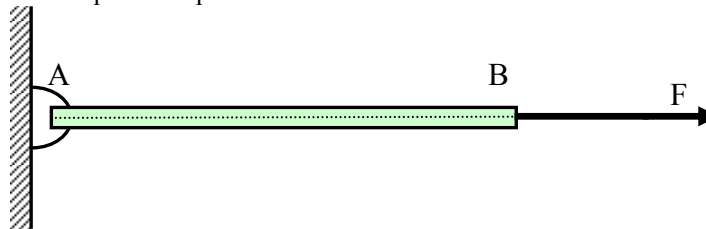
B: punto de aplicación de la fuerza.

d_{AB} : Distancia medida desde el centro de giro y hasta el punto de aplicación de la fuerza.

$\vec{d}_{AB}$: Vector posición del punto de aplicación de la fuerza.

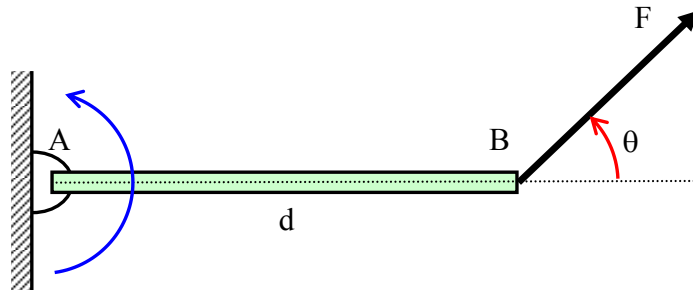
CASOS PARTICULARES

5. MOMENTO NULO: Si la línea de acción de la fuerza pasa por el centro de giro (brazo nulo) entonces el momento producido por dicha fuerza es cero.



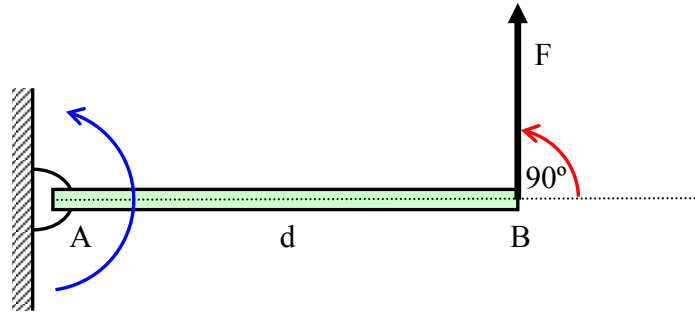
$$M_A^F = \vec{0} \quad (\text{La fuerza no produce giro}).$$

6. FORMULA GENERAL PARA DETERMINAR EL MOMENTO DE UNA FUERZA: El módulo del momento de una fuerza depende del ángulo que forma la fuerza y el vector posición (vector trazado desde el centro de giro A hasta el punto de aplicación B de la fuerza).



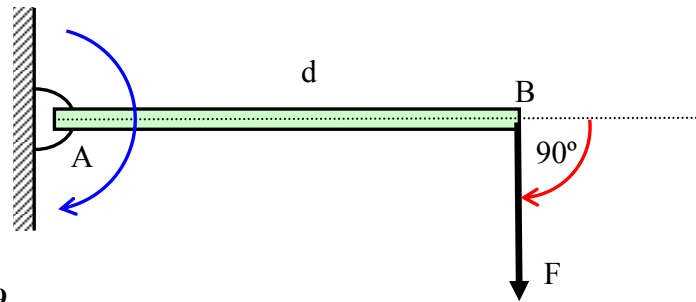
$$M_A^F = F \cdot d_{AB} \cdot \text{Sen}\theta$$

7. CUANDO LA FUERZA Y EL VECTOR POSICIÓN SON PERPENDICULARES: El seno de 90° es igual a la unidad, por consiguiente, el módulo del momento de una fuerza es igual al producto del módulo de la fuerza por el módulo de la distancia entre los puntos A y B.



$$M_A^F = +F \cdot d_{AB} \text{ (SU VALOR ES MÁXIMO)}$$

8. GIRO: Si el centro de giro se encuentra a la izquierda, entonces toda fuerza vertical hacia arriba produce momento **positivo** (giro antihorario), en cambio toda fuerza vertical hacia abajo tiene momento **negativo** (giro horario). Veamos el siguiente ejemplo:



9.

$$M_A^F = -F \cdot d_{AB} \text{ (SU VALOR ES MÁXIMO)}$$

10. EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO: Un cuerpo rígido se encuentra en equilibrio si cumple simultáneamente con las siguientes condiciones:

(1) Primera Condición de Equilibrio

Se establece que, para que un cuerpo no se traslade aceleradamente, necesariamente la suma de todas las fuerzas actuantes debe ser igual a cero.

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow \sum F_y = 0$$

(2) Segunda Condición de Equilibrio

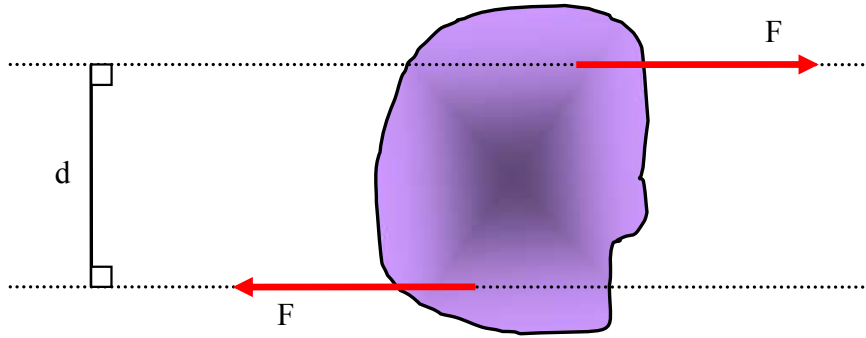
Para que un cuerpo no experimente rotaciones, necesariamente la suma algebraica de todos los momentos producidos por las fuerzas actuantes debe ser igual a cero, con respecto a cualquier punto del cuerpo o fuera de él.

$$\sum M_A = 0$$

11. CUPLA O PAR DE FUERZAS: Se denomina así a dos fuerzas paralelas de módulos iguales y sentidos opuestos, que actúan sobre un mismo cuerpo. El módulo de la cupla es igual al producto del módulo de una de las fuerzas por la distancia entre las líneas rectas paralelas.

$$\sum M^{PAR} = \pm F \cdot d$$

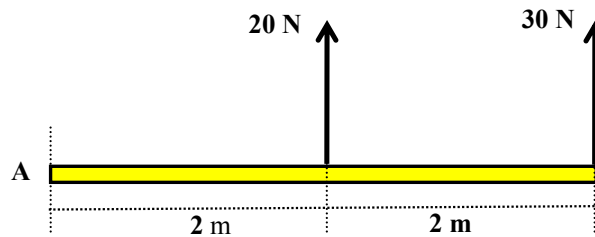
El signo (+) o (-) se coloca de acuerdo al sentido de giro que produce el par de fuerzas.



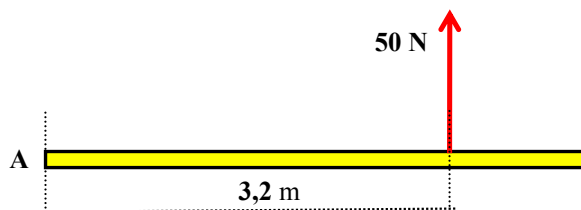
12. TEOREMA DE VARIGNON. Un concepto usado a menudo en mecánica, es el principio de momentos, al cual se le llama a veces **teorema de Varignon**. Este principio establece que el momento de una fuerza con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al punto.

EJEMPLO: Determine el valor de la fuerza resultante y el punto de aplicación en el sistema equivalente.

I. SISTEMA REAL



II. SISTEMA EQUIVALENTE



RESOLUCIÓN

I. Cálculo de la suma de momentos:

$$\Sigma M_A = (20\text{ N})(2\text{ m}) + (30\text{ N})(4\text{ m}) = +160\text{ N.m}$$

II. Cálculo de la fuerza resultante:

$$F_R = \Sigma F = 20\text{ N} + 30\text{ N} = 50\text{ N}$$

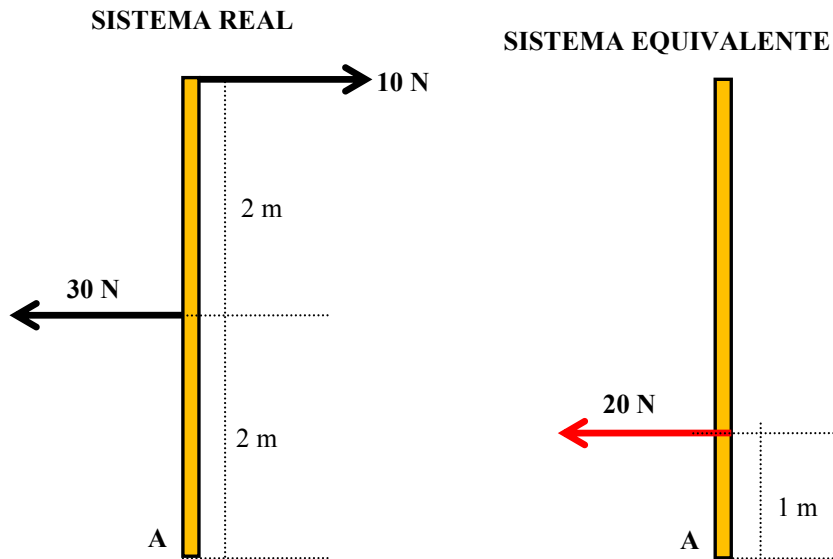
III. Respecto del punto A, la fuerza resultante produce la misma cantidad de Momento que el conjunto de fuerzas, es decir es un sistema equivalente:

$$M_A^{F_R} = \Sigma M_A \Rightarrow F_R \cdot d_x = \Sigma M_A$$

$$\text{Reemplazando: } (50\text{ N}) \cdot d_x = 160\text{ N.m} \Rightarrow d_x = 3,2\text{ m}$$

La fuerza resultante que produce el mismo Momento que el conjunto de fuerzas, actúa a 3,2 m del punto A.

13. EJEMPLO: Determine el valor de la fuerza resultante y el punto de aplicación en el sistema equivalente.

**RESOLUCIÓN**

I. Cálculo de la suma de momentos:

$$\Sigma M_A = (30\text{ N})(2\text{ m}) - (10\text{ N})(4\text{ m}) = +20\text{ N.m}$$

II. Cálculo de la fuerza resultante:

$$F_R = \Sigma F = 30\text{ N} - 10\text{ N} = 20\text{ N}$$

III. Respecto del punto A, la fuerza resultante produce la misma cantidad de Momento que el conjunto de fuerzas, es decir es un sistema equivalente:

$$M_A^{F_R} = \Sigma M_A \Rightarrow F_R \cdot d_x = \Sigma M_A$$

$$\text{Reemplazando: } (20\text{ N}) \cdot d_x = 20\text{ N.m} \Rightarrow d_x = 1,0\text{ m}$$

La fuerza resultante que produce el mismo Momento que el conjunto de fuerzas, actúa a 1,0 m del punto A.

14. TEOREMA DE VARIGNON

Un sistema de fuerzas paralelas se puede reemplazar por una fuerza resultante que produce el mismo efecto es decir el mismo torque respecto de un punto arbitrariamente elegido.

$$\sum \bar{M}_i = M^{F_R}$$

Siendo X el brazo de momento y F_R la fuerza resultante: $\sum \bar{M}_i = F_R \cdot X$

$$X = \frac{\sum M^{F_R}}{F_R}$$

$$X = \frac{X_1 \cdot F_1 + X_2 \cdot F_2 + X_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3}$$

15. CENTRO DE GRAVEDAD: es aquel punto geométrico ubicado dentro o fuera del cuerpo, por el cual pasa la línea de acción de la fuerza resultante, de las fuerzas de gravedad que actúan sobre cada una de las partículas que forman el cuerpo. El centro de gravedad es el punto donde actúa el peso del cuerpo.

16. CENTRO DE GRAVEDAD DE FIGURAS SIMPLES:

- (1) El centro de gravedad de una placa triangular se encuentra en la intersección del as medianas, es decir el baricentro.
- (2) El centro de gravedad de una barra homogénea se encuentra en el punto medio de la barra.
- (3) El centro de gravedad de una placa rectangular homogénea se encuentra en la intersección de las diagonales.
- (4) El centro de gravedad de un círculo homogéneo se encuentra en su centro geométrico. En el plano cartesiano, el centro de gravedad (C.G.) de un sistema de partículas debido a un sistema de fuerzas paralelas es:

$$X_C = \frac{X_1 \cdot F_1 + X_2 \cdot F_2 + X_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3}$$

$$Y_C = \frac{Y_1 \cdot F_1 + Y_2 \cdot F_2 + Y_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 \cdot F_1 + Z_2 \cdot F_2 + Z_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3}$$

El centro de gravedad es: C.G. = $(X_C; Y_C; Z_C)$

17. CENTRO DE MASA PARA UNA DISTRIBUCIÓN DISCRETA DE MASA.

El centro de masas de un sistema de partículas en un plano cartesiano se calcula con las siguientes ecuaciones:

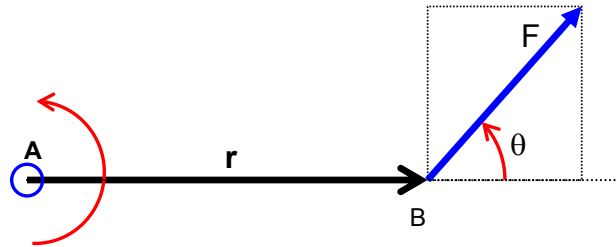
$$X_C = \frac{X_1 \cdot m_1 + X_2 \cdot m_2 + X_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$Y_C = \frac{Y_1 \cdot m_1 + Y_2 \cdot m_2 + Y_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 \cdot m_1 + Z_2 \cdot m_2 + Z_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

El centro de gravedad es: C.M. = $(X_C; Y_C; Z_C)$

18. TORQUE O MOMENTO DE UNA FUERZA. Es la capacidad que tiene una fuerza para producir giro o rotación respecto de un punto o de un eje. Su definición tiene naturaleza vectorial.



El torque se define como el producto vectorial de la posición $\vec{r}$ por la fuerza $\vec{F}$:

$$\vec{M}_A^F = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_A^F = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$

El vector posición respecto del centro de giro o rotación: $\vec{r} = \vec{d} = (x; y; z)$

$$M_A^F = F \cdot d_{AB} \cdot \text{Sen}\theta$$

M_A^F : Se lee, momento de la fuerza F respecto del punto A.

A: centro de giro o rotación.

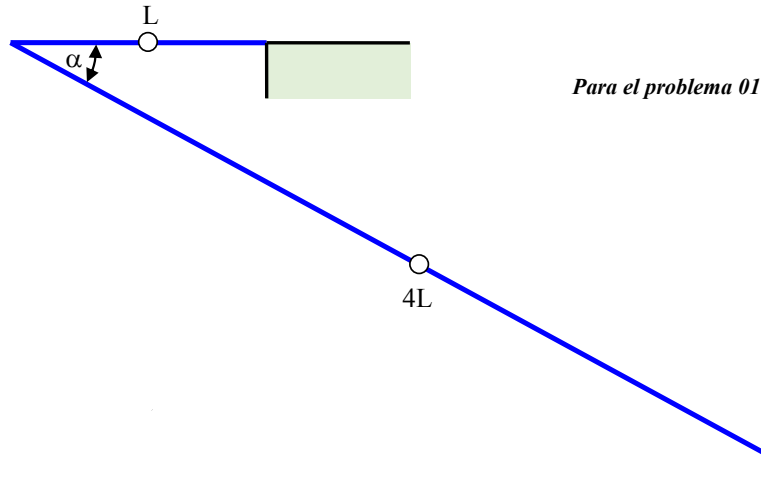
B: punto de aplicación de la fuerza.

d_{AB} : Distancia medida desde el centro de giro y hasta el punto de aplicación de la fuerza.

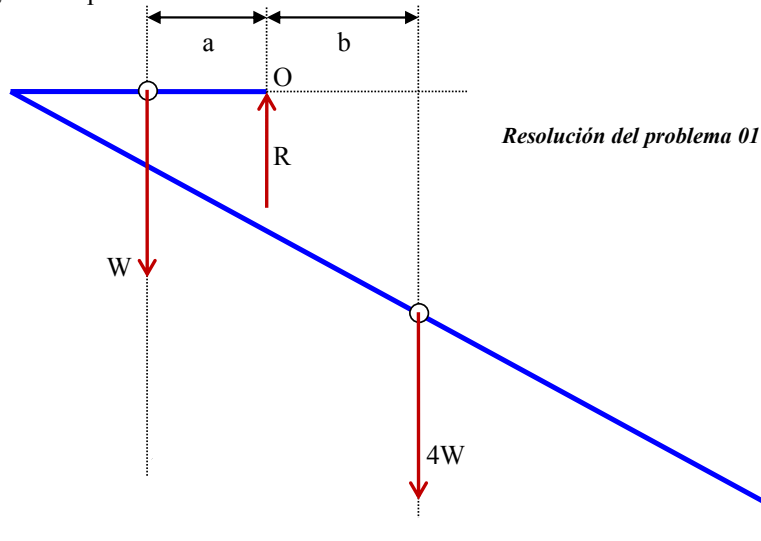
$\vec{d}_{AB}$: Vector posición del punto de aplicación de la fuerza.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Una barra uniforme y homogénea doblada forma un ángulo α se encuentra en equilibrio. Los segmentos miden L y $4L$. Determine la medida del ángulo α .

**RESOLUCIÓN**

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama del cuerpo libre de la barra. El peso es directamente proporcional a la longitud de la barra, es decir, el segmento de longitud L pesa W , el segmento de longitud $4L$ pesa $4W$.



SEGUNDO PASO. Aplicamos la segunda condición de equilibrio. Si el cuerpo rígido está en equilibrio, la sumatoria de momentos respecto de un punto es nulo.

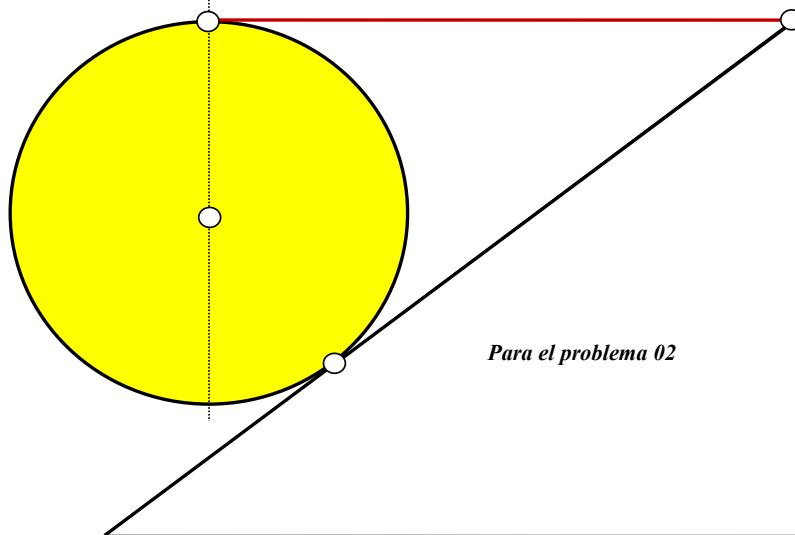
$$\sum M_O = 0 \Rightarrow M_O^W - M_O^{4W} = 0$$

$$M_O^W = M_O^{4W} \Rightarrow (W) \cdot (a) = (4W) \cdot (b) \quad a = \frac{1}{2}L \quad y \quad b = 2L \cdot \cos \alpha - L = L(2 \cdot \cos \alpha - 1)$$

$$(W) \left(\frac{1}{2}L \right) = (4W) \cdot L(2 \cdot \cos \alpha - 1) \Rightarrow \frac{1}{2} = 4 \cdot (2 \cdot \cos \alpha - 1)$$

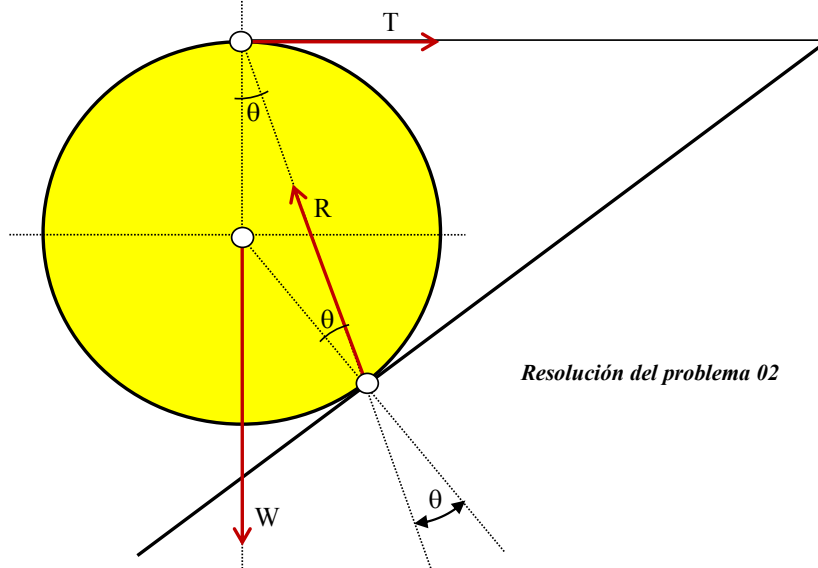
$$\text{Resolviendo: } \cos \alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \alpha = 55,77^\circ$$

2. Se muestra una esfera de 6 kg en equilibrio, proto a resbalar. Si el coeficiente de rozamiento estático entre la esfera y el plano inclinado es $\frac{1}{3}$, determinar el valor de la tensión en la cuerda horizontal. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$



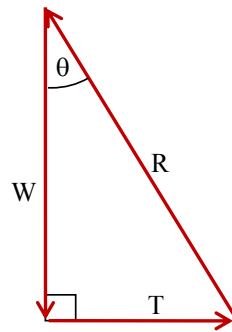
RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de la esfera de peso 60 newtons.



SEGUNDO PASO. Teorema de las tres fuerzas, si tres fuerzas actúan sobre un cuerpo en equilibrio, estas deben ser coplanares y concurrentes. Identificamos el ángulo de rozamiento. Las tres fuerzas forman un polígono cerrado (triángulo).

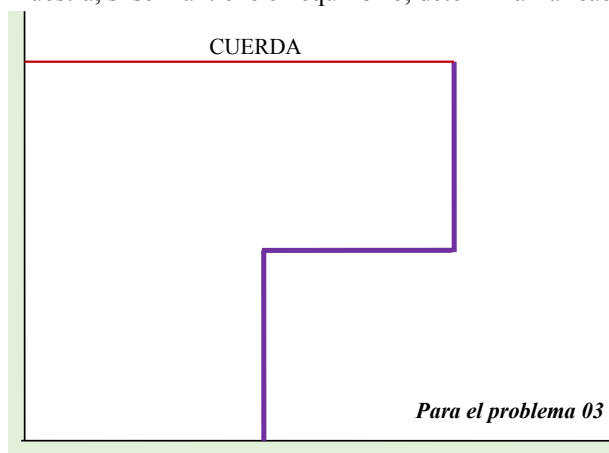
TERCER PASO. La reacción R forma un ángulo θ con la línea normal (radial). La tangente del ángulo de rozamiento es,



$$\tan \theta = \mu_e = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{T}{W} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{T}{60\text{ N}} = \frac{1}{3} \Rightarrow T = 20\text{ N}$$

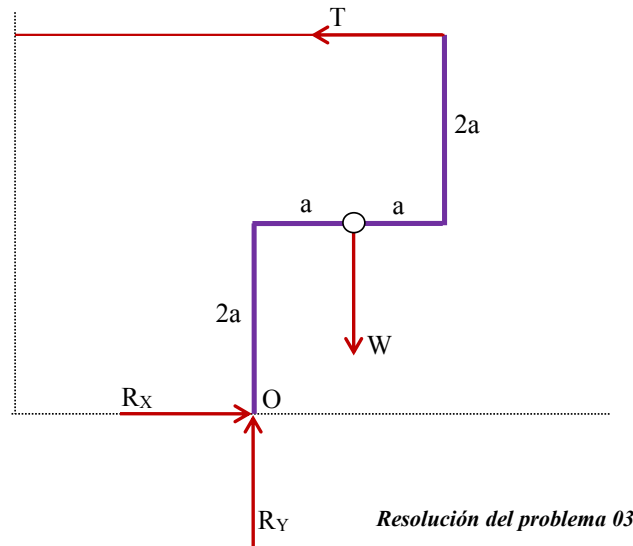
Respuesta: el valor de la tensión en la cuerda es 20 newtons.

3. Una barra homogénea de peso $\sqrt{17}\text{ N}$, ha sido doblada en tres partes iguales, tal como se muestra, si se mantiene en equilibrio, determinar la reacción del piso rugoso sobre la barra.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de la barra. El peso de la barra uniforme y homogénea es W . Cada segmento de barra mide " $2a$ "



SEGUNDO PASO. Equilibrio de traslación.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_x = T \text{ y } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_y = W \dots (1)$$

TERCER PASO. Equilibrio de rotación.

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_O^T = M_O^W \Rightarrow (T) \cdot (4a) = (W) \cdot (a) \dots (2)$$

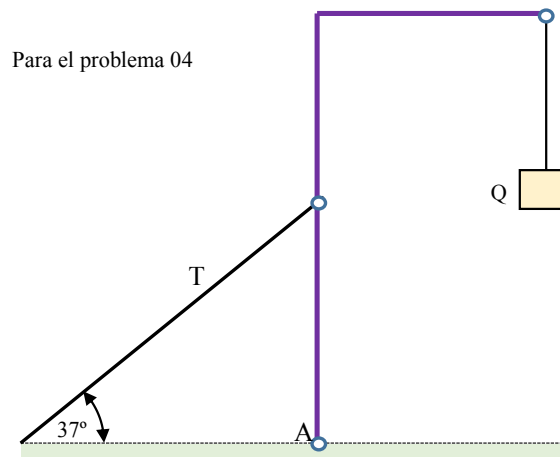
Resolviendo las ecuaciones tenemos: $T = \frac{W}{4} \Rightarrow R_x = \frac{W}{4}$

CUARTO PASO. Cálculo de la reacción en el punto de apoyo de la barra, aplicando el teorema

de Pitágoras: $(R)^2 = (R_x)^2 + (R_y)^2 \Rightarrow R = \frac{W \cdot \sqrt{17}}{4}$

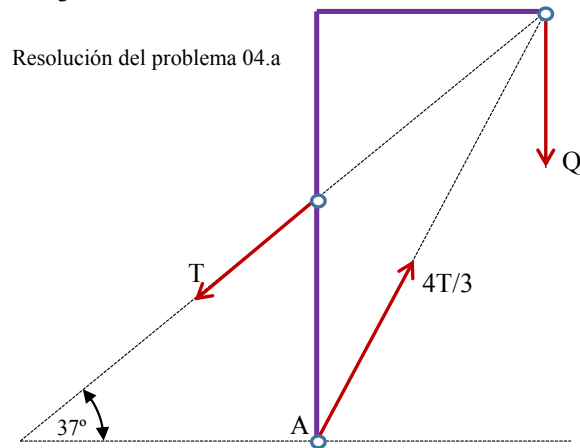
Respuesta: El valor de la reacción en el piso es 4,25 N

4. Si el bloque Q pesa 70 N y la estructura es de peso despreciable, determinar el valor de la tensión T en la cuerda si se sabe es el 75% del valor de la reacción en el punto A (rótula).



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de la estructura ingrávida. El valor de la reacción en A es, $R_A = \frac{4T}{3}$



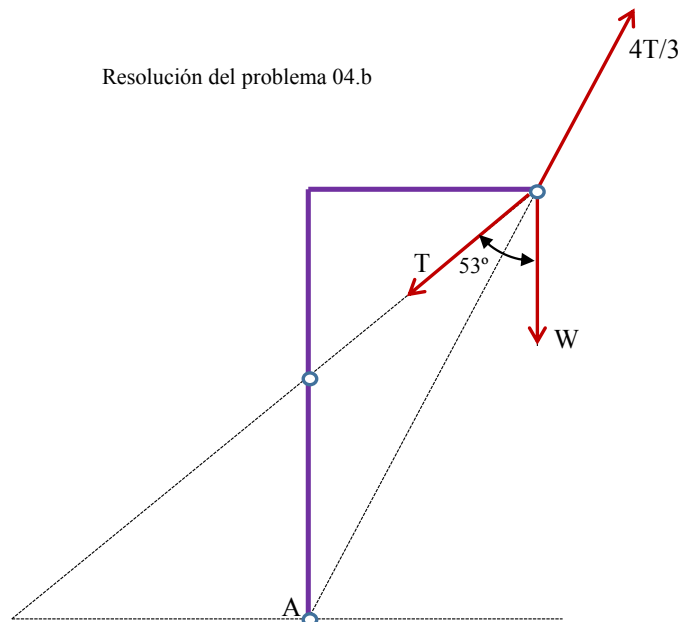
SEGUNDO PASO. Hacemos concurrir las tres fuerzas, y aplicamos la ley del paralelogramo:

$$(R_A)^2 = (T)^2 + (Q)^2 + 2.T.Q.\cos 53^\circ$$

$$\left(\frac{4T}{3}\right)^2 = (T)^2 + (70)^2 + 2.T.(70).\left(\frac{3}{5}\right)$$

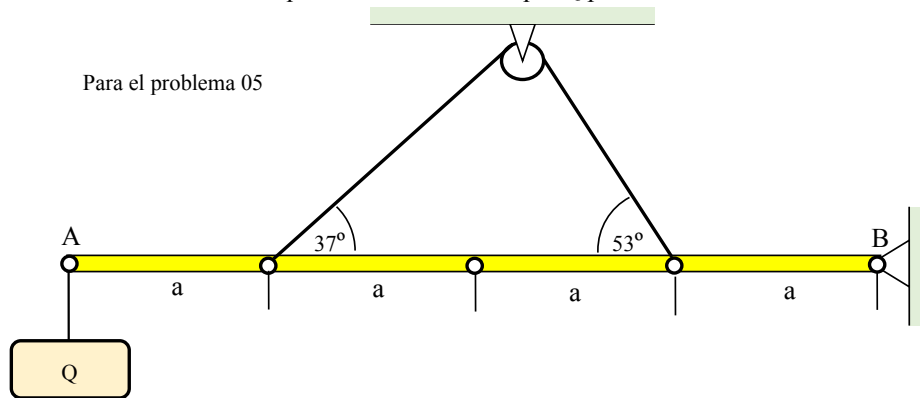
$$\frac{16.T^2}{9} = (T)^2 + 4900 + 84.T \Rightarrow T = 150 \text{ N}$$

Resolución del problema 04.b



Respuesta: el valor de la tensión en la cuerda es 150 newtons.

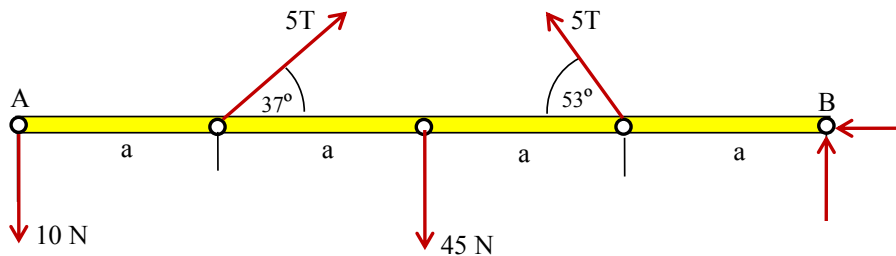
5. Si el peso de la barra horizontal AB uniforme y homogénea es de 45 N, determinar el valor de la tensión de la cuerda que la sostiene. El bloque Q pesa 10 N.



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de la barra ingrávida.

Resolución del problema 05

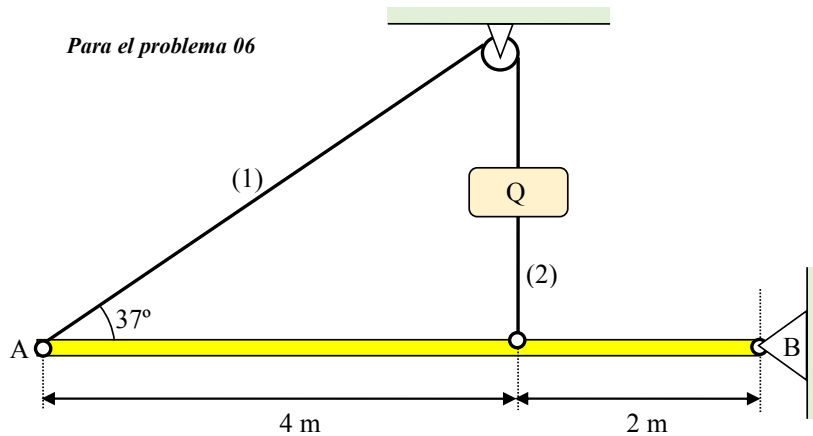


SEGUNDO PASO. Segunda condición de equilibrio. La sumatoria de momentos respecto del punto B es nula. Consideremos convenientemente que el valor de la tensión en la cuerda es “5T”.

$$\begin{aligned}\Sigma M_B = 0 &\Rightarrow M_B^{10N} + M_B^{45N} - M_B^{5T} - M_B^{5T} = 0 \\ (10) \cdot (4a) + (45) \cdot (2a) - (3T) \cdot (3a) - (4T) \cdot (a) &= 0 \\ T = 10\text{ N} &\Rightarrow 5T = 50\text{ N}\end{aligned}$$

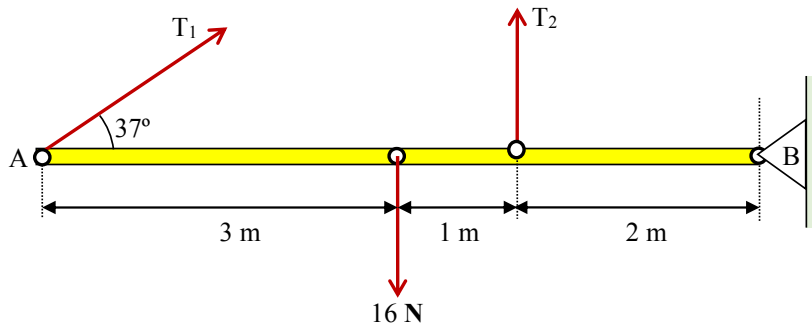
Respuesta: el valor de la tensión en la cuerda es 50 newtons.

6. Si la barra AB uniforme y homogénea que se muestra pesa 16 N y el bloque Q pesa 4 N, determinar las tensiones en las cuerdas (1) y (2).

**RESOLUCIÓN**

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de la barra ingrávida.

Resolución del problema 06



SEGUNDO PASO. Analizando el equilibrio del bloque Q deducimos la siguiente ecuación:

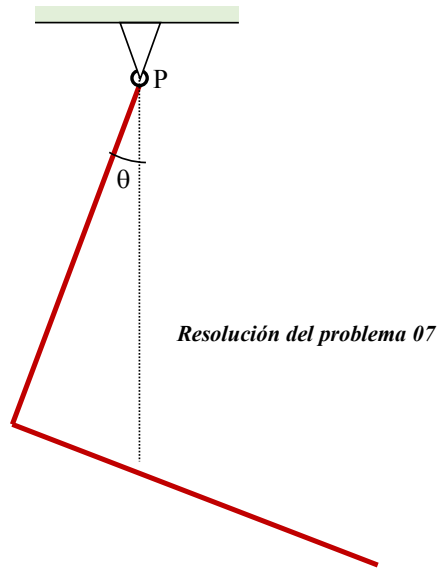
$$T_1 = T_2 + Q \Rightarrow T_1 = T_2 + 4 \dots (1)$$

TERCER PASO. Segunda condición de equilibrio. La sumatoria de momentos respecto del punto B es nula.

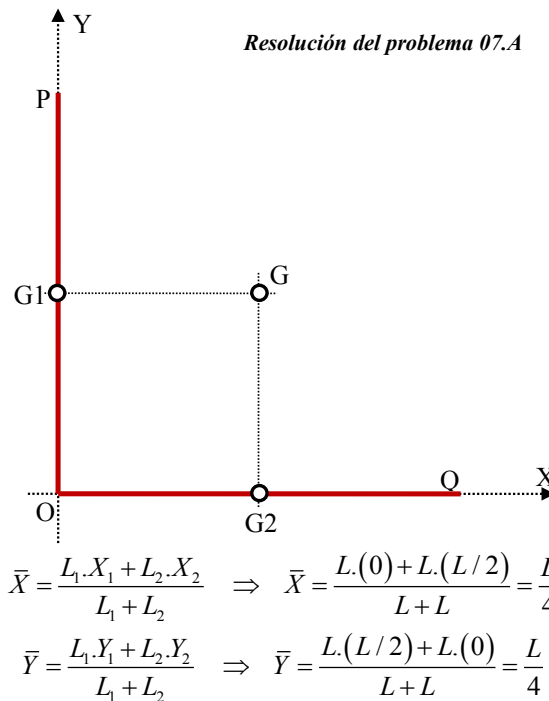
$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0 &\Rightarrow M_B^{16N} + M_B^{T_1} - M_B^{T_2} = 0 \\ (16) \cdot (3) - (T_1 \cdot \text{Sens} 37^\circ) \cdot (6) - (T_2) \cdot (2) &= 0 \\ 48 - \frac{18}{5}(T_2 + 4) - 2T_2 &= 0 \Rightarrow T_2 = 6N \end{aligned}$$

Respuesta: el valor de la tensión en la cuerda (1) es 10 newtons.

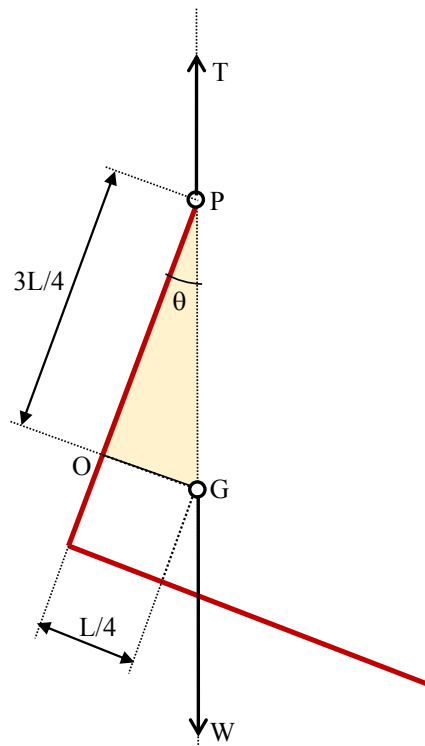
7. Una barra doblada se dobla en dos partes iguales formando un ángulo recto. Se suspende de un extremo, determinar la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio.

**RESOLUCIÓN**

PRIMER PASO. Determinamos previamente la posición del centro de gravedad G de la barra homogénea doblada en forma de "L". Cada segmento mide L. $PO = L$ y $OQ = L$



SEGUNDO PASO. Equilibrio de rotación. En la posición de equilibrio de peso W y la tensión T son coloniales, por consiguiente, los puntos P y Q se encuentran en la misma línea vertical.



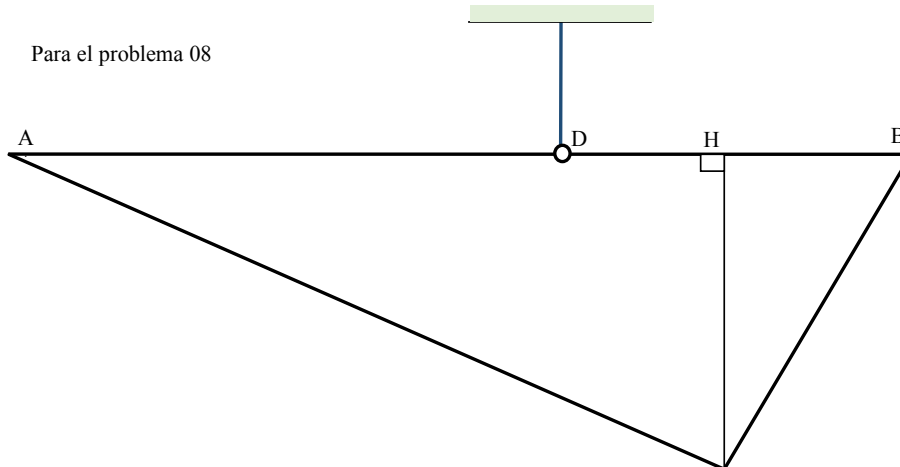
Resolución del problema 07.B

En el triángulo rectángulo POG, tenemos: $\tan \theta = \frac{\frac{L}{4}}{\frac{3L}{4}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = 18,4^\circ$

Respuesta: la medida del ángulo θ es $18,4^\circ$

8. Una lámina homogénea de forma triangular está colgada en un punto D del lado AB mediante un hilo. Determinar el valor del segmento AD, para que en la posición de equilibrio AB quede horizontal. La altura HC sobre el lado AB divide al lado en dos segmentos de 27 cm y 9 cm respectivamente.

Para el problema 08



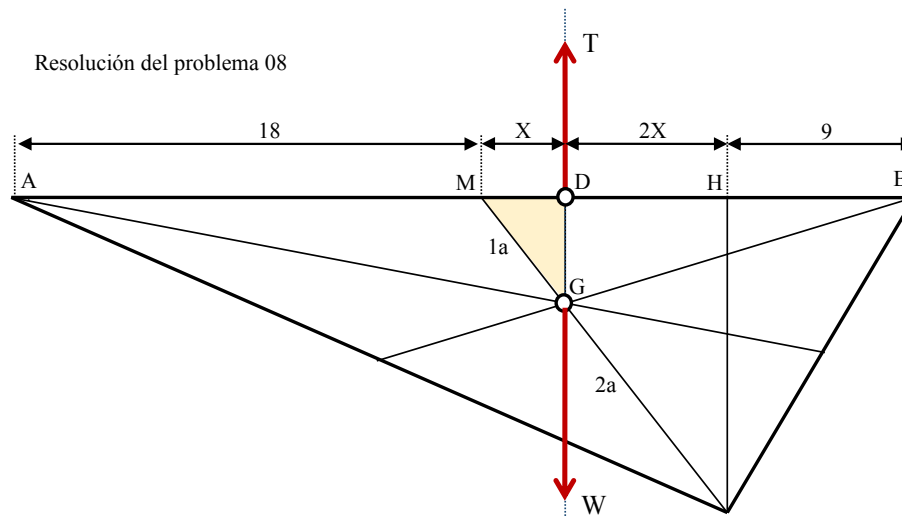
RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de la lámina triangular.

SEGUNDO PASO. El centro de gravedad de la lámina homogénea de forma triangular se encuentra en el baricentro G. En la posición de equilibrio, el peso W y la tensión T en la cuerda son colineales, por consiguiente, los puntos D y G se encuentran en la misma línea vertical.

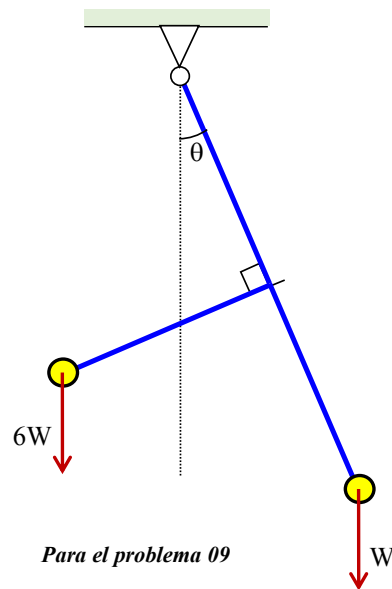
$$AH = 18 + X + 2X = 27 \Rightarrow X = 3$$

TERCER PASO. Aplicando la propiedad del baricentro G en un triángulo, deducimos que

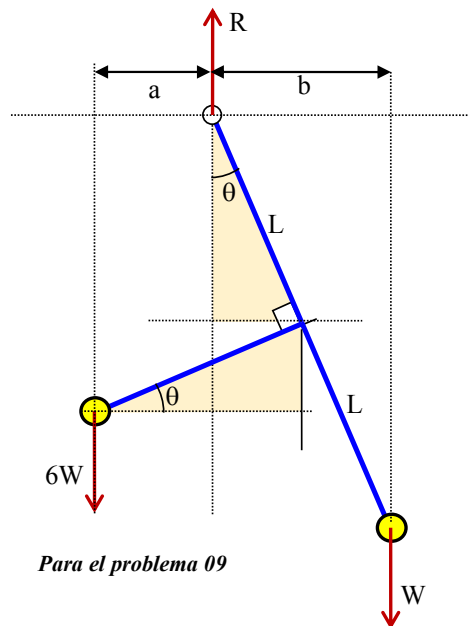


$X = 3 \text{ cm}$. Por consiguiente, el segmento AD mide 21 cm.

9. Si la barra doblada en forma de "T" es de peso despreciable y en sus extremos están soldados dos esferas de pesos W y 6W, determinar la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio del sistema.

**RESOLUCIÓN**

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama del cuerpo libre de la barra.



SEGUNDO PASO. Equilibrio de rotación.

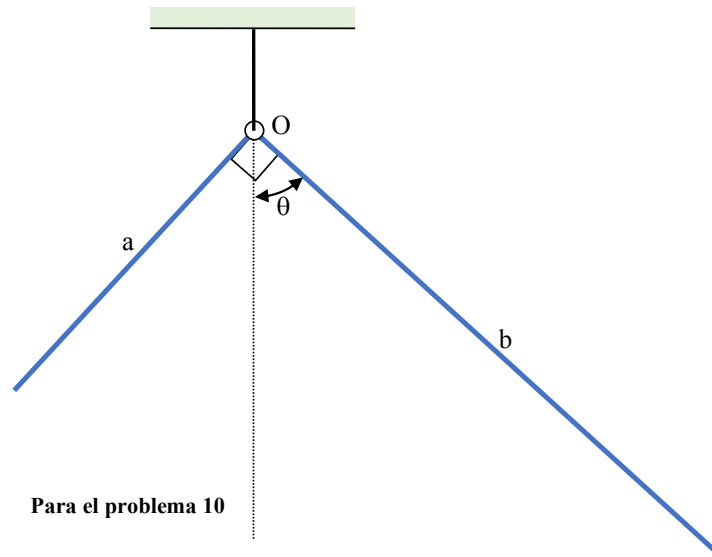
$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_O^{6W} = M_O^W \Rightarrow (6W) \cdot (a) = (W) \cdot (b) \quad \dots (2)$$

$$(6W) \cdot (L \cdot \cos \theta - L \cdot \sin \theta) = (W) \cdot (2L \cdot \sin \theta)$$

$$6 \cdot (\cos \theta - \sin \theta) = (2 \cdot \sin \theta) \Rightarrow \tan \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37^\circ$$

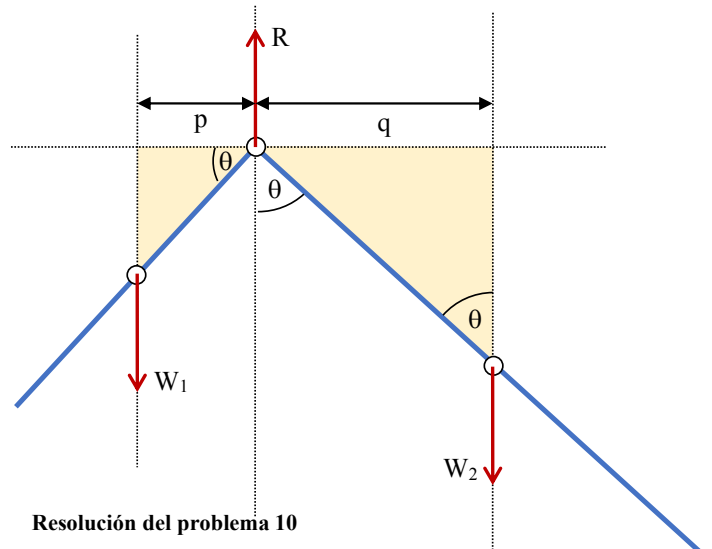
Respuesta: La medida del ángulo que define la posición de equilibrio es 37° .

10. Determinar la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio de la barra uniforme y homogénea doblada formando un ángulo recto cuyos lados miden $a = \sqrt{3}L$ y $b = 2L$



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO: Hacemos el diagrama del cuerpo libre de la barra. El peso de cada segmento es directamente proporcional a la longitud.



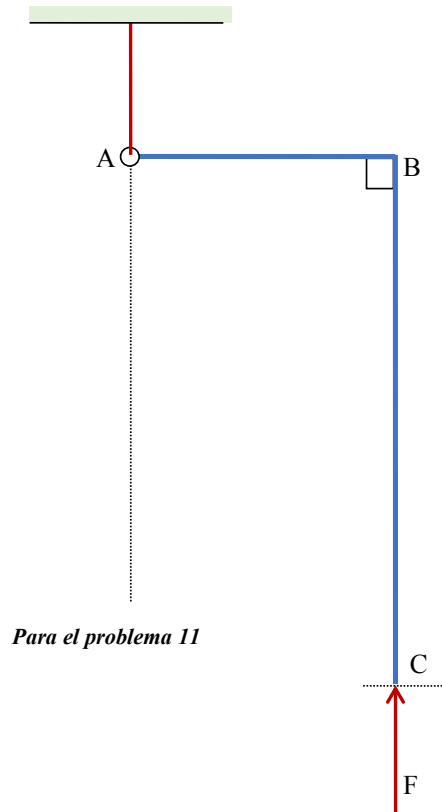
$$W_1 = \sqrt{3}K \quad y \quad W_2 = 2K \quad \Rightarrow \quad p = \frac{a \cdot \cos \theta}{2} \quad y \quad q = \frac{b \cdot \sin \theta}{2}$$

SEGUNDO PASO. Equilibrio de rotación. Aplicamos la segunda condición de equilibrio respecto del punto "O".

$$\begin{aligned}\Sigma M_O = 0 &\Rightarrow M_O^{W_1} - M_O^{W_2} = 0 \Rightarrow M_O^{W_1} = M_O^{W_2} \\ (W_1) \cdot (p) &= (W_2) \cdot (q) \Rightarrow (K\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{a \cdot \cos \theta}{2}\right) = (2K) \cdot \left(\frac{b \cdot \sin \theta}{2}\right) \\ (\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3} \cdot \cos \theta}{2}\right) &= (2) \cdot \left(\frac{2 \cdot \sin \theta}{2}\right) \\ \tan \theta = \frac{3}{4} &\Rightarrow \theta = 37^\circ\end{aligned}$$

Respuesta: la medida del ángulo de equilibrio es 37° .

11. La barra uniforme y homogénea es doblada formando ángulo recto, de peso $3W$. Determinar la magnitud de la fuerza F , para mantener el segmento BC en posición vertical, sabiendo que:
 $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AB}$



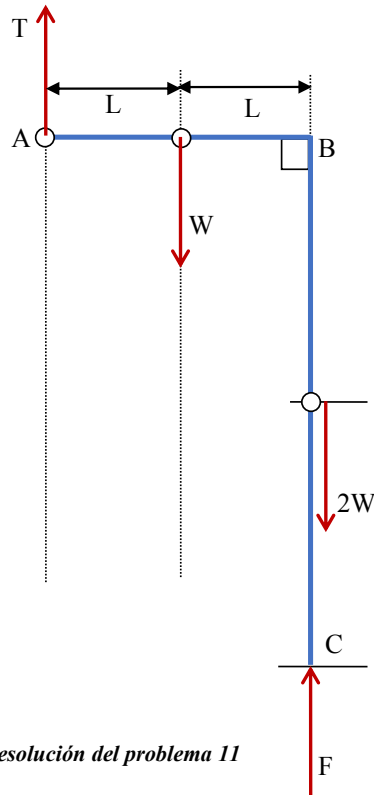
RESOLUCIÓN

PRIMER PASO: Hacemos el diagrama del cuerpo libre de la barra. El peso de cada segmento es directamente proporcional a la longitud.

SEGUNDO PASO. Equilibrio de rotación. Aplicamos la segunda condición de equilibrio respecto del punto "A".

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A^F - M_A^W - M_A^{2W} = 0$$

$$M_A^F = M_A^W + M_A^{2W} \Rightarrow (F) \cdot (2L) = (W) \cdot (L) + (2W) \cdot (2L)$$

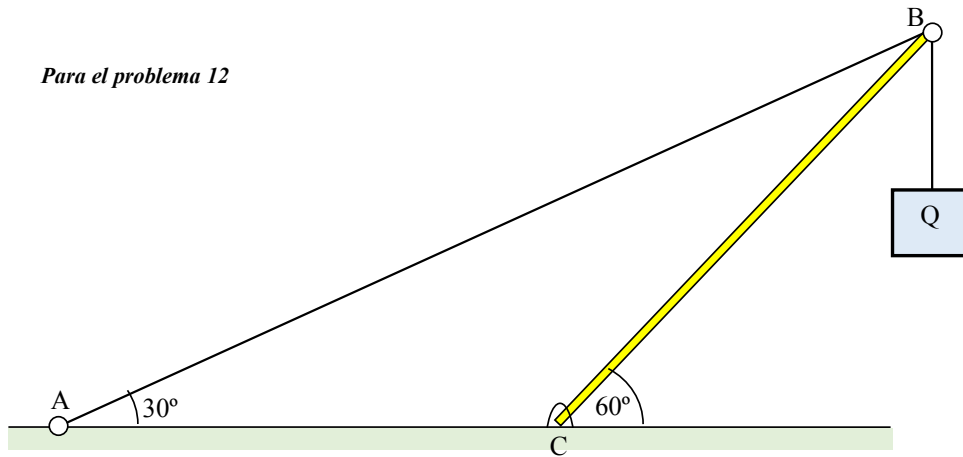


Resolución del problema 11

Respuesta: el valor de la fuerza es, $F = \frac{5W}{2}$

12. Calcular la tensión de la cuerda AB, si el sistema está en equilibrio. El bloque Q pesa 10 newtons. El peso de la barra uniforme y homogénea BC pesa 20 newtons.

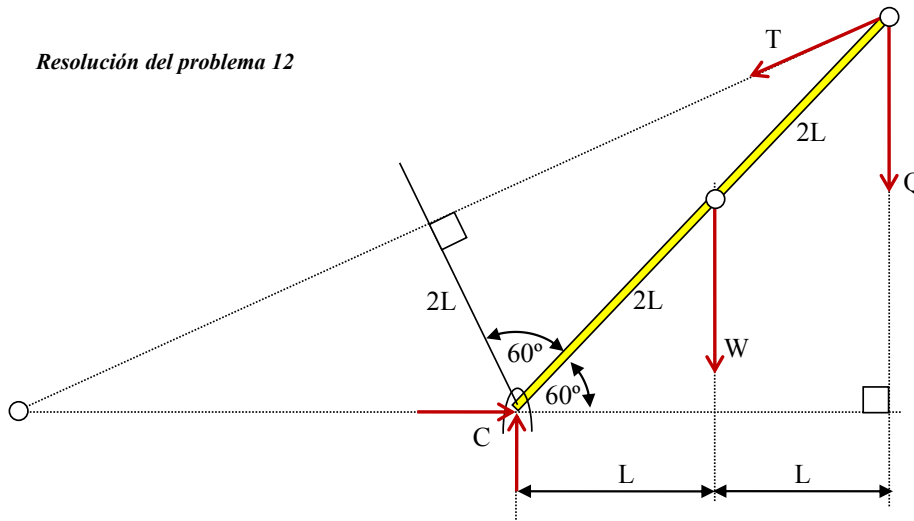
Para el problema 12



RESOLUCIÓN

PRIMER PASO: Hacemos el diagrama del cuerpo libre de la barra. El peso de cada segmento es directamente proporcional a la longitud.

Resolución del problema 12



SEGUNDO PASO. Equilibrio de rotación. Aplicamos la segunda condición de equilibrio respecto del punto "C". Consideremos la barra de largo 4L.

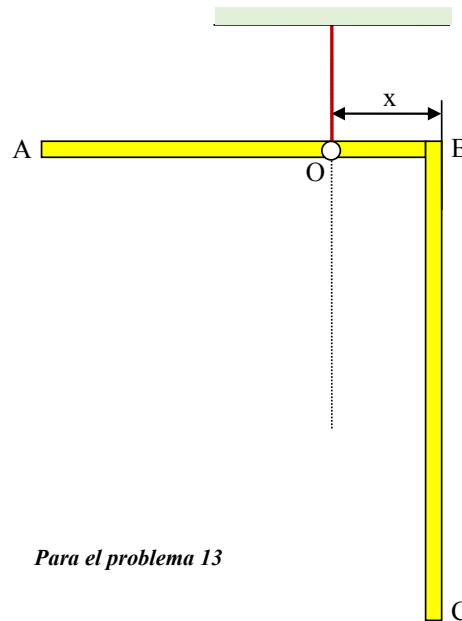
$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_C^T - M_C^W - M_C^Q = 0$$

$$M_A^F = M_A^W + M_A^{2W} \Rightarrow (F) \cdot (2L) = (W) \cdot (L) + (2W) \cdot (2L)$$

$$(F) \cdot (2) = (20) \cdot (1) + (10) \cdot (2) \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

Respuesta: el valor de la tensión es 20 newtons.

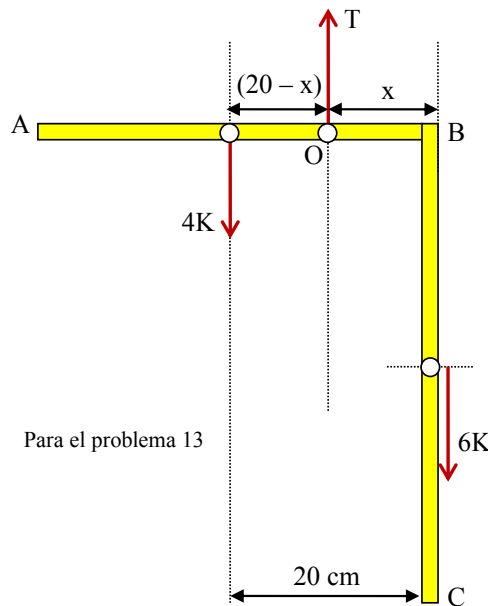
13. Una barra homogénea de 100 cm es doblada formando ángulo recto, tal que $AB = 40$ cm y $BC = 60$ cm. Calcular la distancia “x” del cual se debe sostener, para mantener el lado AB en posición horizontal.



Para el problema 13

RESOLUCIÓN

PRIMER PASO: Hacemos el diagrama del cuerpo libre de la barra. El peso de cada segmento es directamente proporcional a la longitud.



Para el problema 13

SEGUNDO PASO. Equilibrio de rotación. Aplicamos la segunda condición de equilibrio respecto del punto “O”. Consideremos la barra de largo 4L.

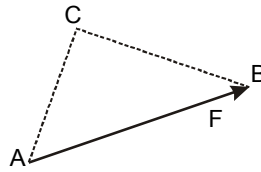
$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow M_o^{4K} - M_o^{6K} = 0 \Rightarrow M_o^{4K} = M_o^{6K}$$

$$(4K).(20 - X) = (6K).(X) \Rightarrow X = 8 \text{ cm}$$

Respuesta: la distancia al punto de suspensión es 8 cm.

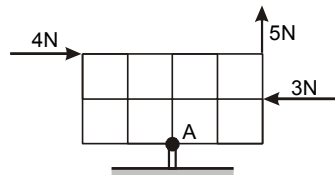
PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE

1. El momento de una fuerza "F" respecto del centro de giro "C" tiene como módulo +24 N.cm. El módulo de la fuerza es $F = 8$ N. Marcar falso (F) o verdadero (V) respecto de las siguientes afirmaciones:



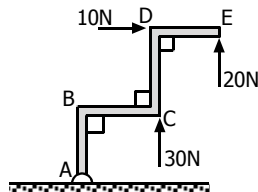
- I. La menor distancia trazada desde "C" al segmento AB es 3 cm.
 II. El área de la región ABC es 12 N.cm.
 III. Si el módulo de la fuerza se duplica, entonces el momento de la fuerza tiene módulo +48 N.cm.
 A) VVV B) VVF C) VFV D) FVV E) N.A.

2. La figura muestra una placa rectangular de masa despreciable sometida a la acción de un sistema de fuerzas. El lado de cada cuadrado es 1 cm. Determine el módulo del momento resultante respecto al pasador A.



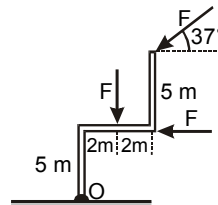
- A) 2 N.cm B) 3 N.cm C) 4 N.cm D) 5 N.cm E) N.A.

3. La figura muestra una barra quebrada de masa despreciable, sometida a un sistema de fuerzas. Determine el módulo del momento resultante respecto al pasador A.
 Además: $AB = BC = CD = DE = 2$ m



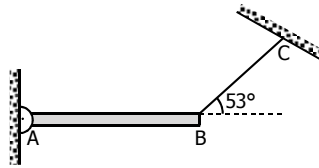
- A) 40 N.m B) 70 N.m C) 80 N.m D) 100 N.m E) N.A.

4. La figura muestra una barra quebrada de masa despreciable, sometida a un sistema de fuerzas de módulos iguales $F = 10$ N. Determine el módulo del momento resultante respecto al pasador O.



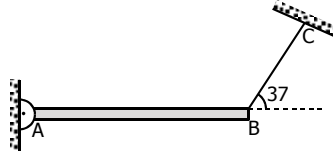
- A) -43 N.m B) +43 N.m C) -86 N.m D) +86 N.m E) N.A.

5. La figura muestra una barra homogénea AB de 8 kg en equilibrio. Determine el módulo de la tensión en la cuerda BC.



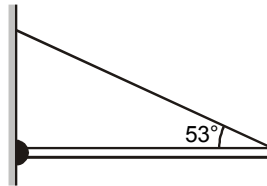
- A) 50N B) 60 N C) 70 N D) 80 N E) 90 N

6. La figura muestra una barra homogénea AB de 6 kg en equilibrio. Determine el módulo de la tensión en la cuerda BC.



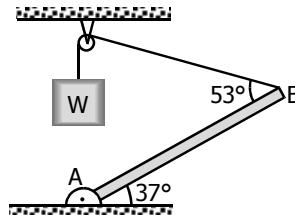
- A) 30N B) 40 N C) 50 N D) 60 N E) 70 N

7. La figura muestra una barra homogénea de 4 kg, en equilibrio. Determine el módulo de la tensión en la cuerda. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



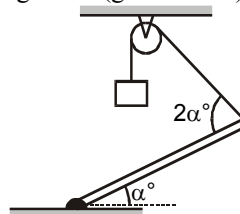
- A) 20N B) 25 N C) 30 N D) 35 N E) 40 N

8. La figura muestra un bloque W de 2,5 kg en reposo. Determine la cantidad de masa de la barra homogénea AB. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



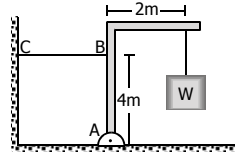
- A) 20N B) 30 N C) 40 N D) 50 N E) N.A.

9. La figura muestra un bloque de 25 kg en reposo. Si la barra homogénea de 60 kg esta en equilibrio, determine la medida del ángulo α . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



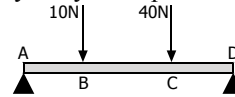
- A) 30° B) 37° C) 53° D) 45° E) 60°

10. La figura muestra una barra quebrada de masa despreciable en equilibrio. Si el bloque W de 8 kg se encuentra en reposo, determine el módulo de la tensión en la cuerda BC. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



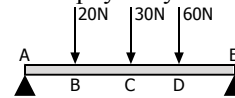
- A) 20N B) 30 N C) 40 N D) 50 N E) N.A.

11. La figura muestra una barra AD de masa despreciable. Si $AB = BC = CD$, determine el módulo de las reacciones en los puntos de apoyo A y D respectivamente.



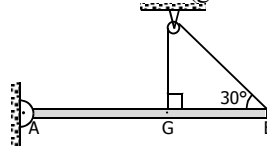
- A) 20 y 30N B) 10 y 40 N C) 15 y 35 N D) 25 y 25 N E) N.A

12. La figura muestra una barra AE de masa despreciable. Si $AB = BC = CD = DE$, determine el módulo de las reacciones en los puntos de apoyo A y E respectivamente.



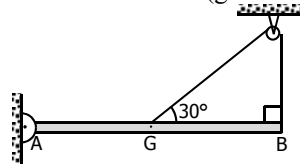
- A) 40 y 60N B) 45 y 65 N C) 100 y 10 N D) 35 y 75 N E) N.A

13. La figura muestra una barra homogénea AB de 4 kg en equilibrio. Si G es el punto medio de AB, determine el módulo de la tensión en la cuerda. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



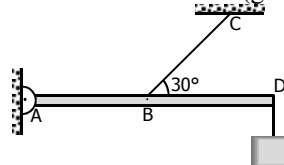
- A) 30N B) 15 N C) 20 N D) 25 N E) N.A.

14. La figura muestra una barra homogénea AB de 5 kg en equilibrio. Si G es el punto medio de AB, determine el módulo de la tensión en la cuerda. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



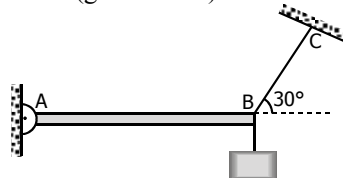
- A) 10N B) 20 N C) 30 N D) 40 N E) 50 N

15. La figura muestra una barra homogénea AD de 2 kg en equilibrio. Si B es el punto medio de AD, determine el módulo de la tensión en la cuerda BC. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



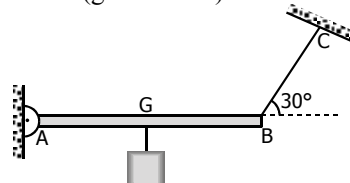
- A) 50N B) 60 N C) 70 N D) 80 N E) 40 N

16. La barra homogénea AB de 4 kg y el bloque de 2 kg se encuentran en equilibrio. Determinar el módulo de la tensión en la cuerda BC. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



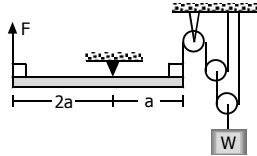
- A) 50 N B) 60 N C) 70 N D) 80 N E) 90 N

17. La barra homogénea AB de 4 kg y el bloque de 1 kg se encuentran en equilibrio. Determinar el módulo de la tensión en la cuerda BC. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



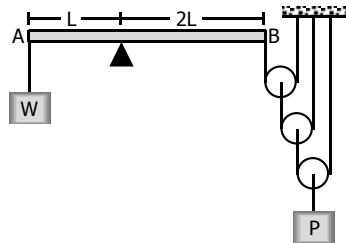
- A) 20 N B) 30 N C) 40 N D) 50 N E) 60 N

18. La figura muestra una barra de masa despreciable y el bloque de 8 kg en equilibrio. Si las poleas tienen masa despreciable, determine el módulo de la fuerza F. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



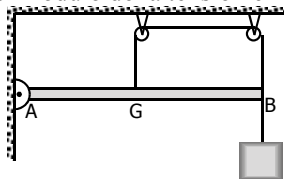
- A) 5 N B) 10 N C) 20 N D) 40 N E) 60 N

19. La figura muestra una barra AB de masa despreciable y el bloque W de 0,5 kg en equilibrio. Si las poleas tienen masa despreciable, determine la cantidad de masa del bloque P. No hay rozamiento. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



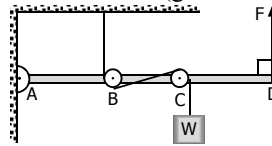
- A) 5 N B) 10 N C) 20 N D) 40 N E) 60 N

20. La figura muestra una barra homogénea AB de 6 kg y un bloque de 3 kg, en equilibrio. Si G es el punto medio de AB, determine el módulo de la tensión en la cuerda. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



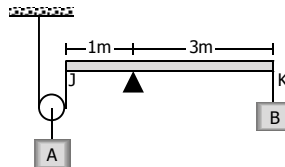
- A) 40 N B) 15 N C) 20 N D) 25 N E) 30 N

21. La figura muestra una barra AD de masa despreciable en equilibrio. Si el bloque W de 6 kg está en reposo, determine el módulo de la fuerza F. Las poleas en B y C son de masa despreciable y no ofrecen rozamiento. Además: $AB = BC = CD$. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



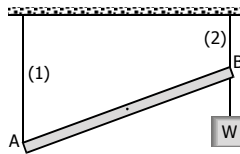
- A) 10 N B) 15 N C) 20 N D) 25 N E) 30 N

22. La figura muestra una barra JK de masa despreciable en equilibrio. Sabiendo que el bloque A de 6 kg está en reposo, determine la cantidad de masa del bloque B. Desprecie la masa de la polea móvil. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



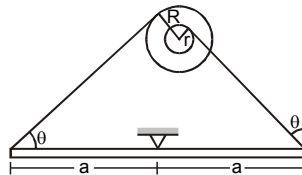
- A) 10 N B) 20 N C) 30 N D) 40 N E) 50 N

23. La barra homogénea AB de 4 kg se encuentra en equilibrio. Sabiendo que el bloque W de 2 kg se encuentra en reposo, determinar la tensión en la cuerda (1). ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



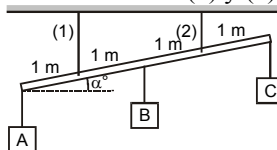
- A) 10 N B) 20 N C) 30 N D) 40 N E) 50 N

24. La figura muestra dos poleas concéntricas de radios $r = 30 \text{ cm}$ y $R = 40 \text{ cm}$ en equilibrio. Determine la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio de la barra homogénea en posición horizontal.



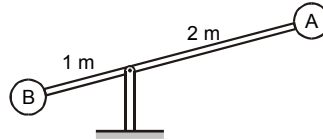
- A) 30° B) 37° C) 53° D) 45° E) 60°

25. La figura muestra una barra de masa despreciable en equilibrio. Si $A = 5 \text{ kg}$, $B = 4 \text{ kg}$ y $C = 1 \text{ kg}$, determine el módulo de las tensiones en las cuerdas (1) y (2). ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



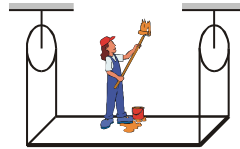
- A) 90 y 10 N B) 80 y 20 N C) 70 y 30 N D) 60 y 40 N E) N.A.

26. La figura muestra dos esferas A y B de masas 3 kg y 13 kg respectivamente en reposo. Determinar la cantidad de masa de la barra homogénea que se encuentra en equilibrio. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



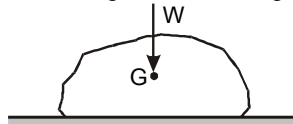
- A) 12 kg B) 13 kg C) 14 kg D) 15 kg E) 16 kg

27. La figura muestra a un pintor de 125 kg que se mueve lentamente de un extremo a otro, sobre una tabla de 50 kg en equilibrio. Determinar el módulo máximo de la tensión en una de las cuerdas. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



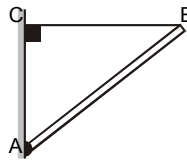
- A) 750 N B) 800 N C) 850 N D) 900 N E) 950 N

28. La figura muestra una piedra de forma irregular, cuando se aplica a un extremo una fuerza vertical de módulo 60 N se puede levantar parcialmente, pero si se aplica al otro extremo una fuerza vertical de módulo 100 N también se puede levantar parcialmente. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



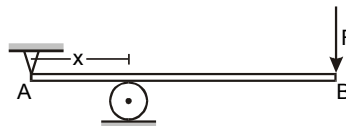
- A) 16 kg B) 17 kg C) 18 kg D) 16,5 kg E) 17,5 kg

29. La figura muestra una barra homogénea de 16 kg en equilibrio. Determine el módulo de la tensión en la cuerda BC. Además: $AC = 80 \text{ cm}$ y $CB = 60 \text{ cm}$. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



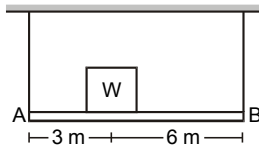
- A) 20 N B) 30 N C) 40 N D) 50 N E) N.A.

30. La figura muestra una barra homogénea AB de largo 18 cm y de masa despreciable, en equilibrio. El módulo de la reacción en el punto de apoyo es 150 N y el módulo de la fuerza externa $F = 100 \text{ N}$. Determine la distancia "x".



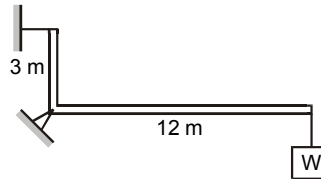
- A) 10 cm B) 12 cm C) 14 cm D) 14 cm E) N.A.

31. La figura muestra una barra AB de masa despreciable en equilibrio. El bloque W de 9 kg se encuentra en reposo. Determine el módulo de la tensión en la cuerda A. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



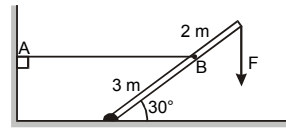
- A) 60 N B) 30 N C) 40 N D) 50 N E) 70 N

32. La figura muestra una barra quebrada en forma de L de masa despreciable, en equilibrio. Si el bloque W es 0,4 kg, determine el módulo de la tensión en la cuerda horizontal. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



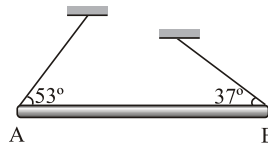
- A) 16 N B) 14 N C) 12 N D) 10 N E) 18 N

33. La figura muestra una barra de masa despreciable en equilibrio. Si el módulo de la fuerza es $F = 15 \text{ N}$, determine el módulo de la tensión en la cuerda horizontal AB.



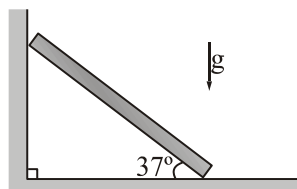
- A) 46 N B) 43,3 N C) 42 N D) 38 N E) 48 N

34. Determinar a qué distancia (en cm) del extremo A se encuentra el centro de gravedad de la barra de 2 m.



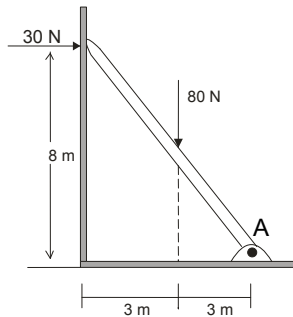
- A) 28 B) 54 C) 72 D) 80 E) 95

35. Determine el módulo de la fuerza de rozamiento (en N) sobre la barra homogénea de 3,0 kg en equilibrio. La pared es lisa. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

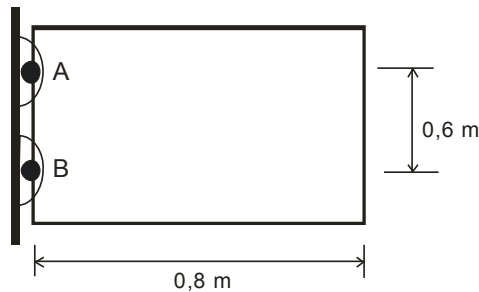
36. Calcule los momentos de $F_1 = 30 \text{ N}$ y $F_2 = 80 \text{ N}$ respecto al gozne "A" respectivamente.



- A) -240 N.m ; -240 N.m B) $+240 \text{ N.m}$; -240 N.m C) -240 N.m ; $+240 \text{ N.m}$
 D) -220 N.m ; $+220 \text{ N.m}$ E) $+220 \text{ N.m}$; -220 N.m

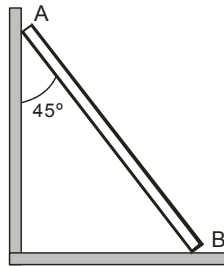
37. Calcule el módulo de las reacciones en los pasadores A y B, si cada uno soporta la mitad del peso del letrero, de 60 kg.

- A) 40 N
 B) 300 N
 C) 600 N
 D) 500 N
 E) 250 N



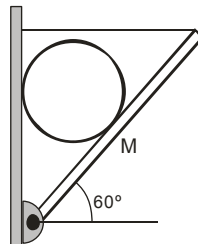
38. Calcule el módulo de las reacciones en los puntos A y B, si la barra homogénea de 0,2 kg está en equilibrio. La pared es lisa, mientras que el piso muestra rugosidad.

- A) 2 N; $\sqrt{2}$
 B) 1 N; $\sqrt{3}$
 C) 1 N; $\sqrt{5}$
 D) 2 N; 4 N
 E) 1 N; $\sqrt{6}$



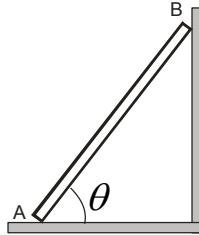
39. La esfera homogénea de 1 kg de masa, está en equilibrio en la posición mostrada. Si M es punto medio de la barra homogénea y uniforme de 0,8 kg, determine el módulo de la tensión en la cuerda horizontal BC. No hay rozamiento.

- A) 8 N
 B) 4 N
 C) $4\sqrt{3} \text{ N}$
 D) $8\sqrt{3} \text{ N}$
 E) $6\sqrt{3} \text{ N}$



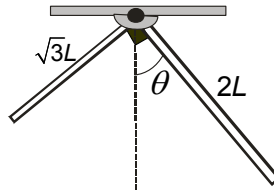
40. La barra homogénea y uniforme AB, se encuentra en equilibrio. Si las dos superficies donde se apoya son rugosas, con coeficiente 0,5, determine el valor del ángulo θ que permite el equilibrio.

A) 45°
 B) 60°
 C) 30°
 D) 37°
 E) 53°



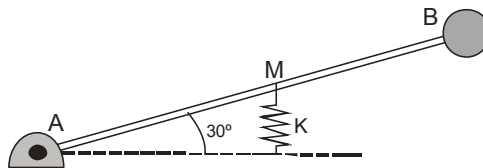
41. ¿Cuál es el valor del ángulo θ , para que las dos barras uniformes y homogéneas del mismo material soldadas? formando ángulo recto, y colocadas en el gozne.

A) 53°
 B) 60°
 C) 30°
 D) 37°
 E) 45°

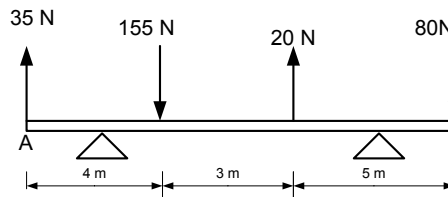


42. A la barra AB uniforme y homogénea de 20 kg, se le coloca en el extremo B una esfera homogénea de 50 kg, de tal manera que el sistema alcanza el equilibrio. La longitud natural del resorte es de 0,8 m y la longitud de la barra es de 2 m, si M es el punto medio de la barra, determine el valor de la constante elástica del resorte.

A) 3 kN/m
 B) 2 kN/m
 C) 4 kN/m
 D) 5 kN/m
 E) 1 kN/m

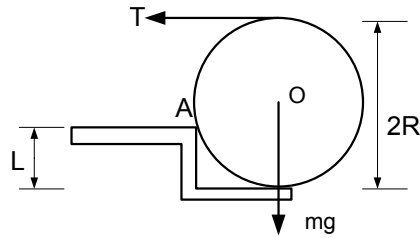


43. Reduzca el sistema mostrado a una única fuerza resultante (módulo) y momento equivalente (módulo) respecto al punto A. Se supone que no hay equilibrio al no conocerse el módulo de las reacciones en los apoyos.



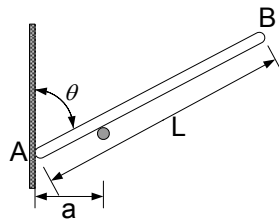
A) 175 N; 1200 N.m B) 180 N; 1440 N.m C) 190 N; 1320 N.m
 D) 180 N; 1400 N.m E) 190 N; 1340 N.m

44. Determine el módulo de la tensión en la cuerda, sabiendo que las superficies son rugosas y la esfera está a punto de subir el escalón. La esfera posee masa "m" kg y las medidas están dadas en m.



- A) $\frac{mg}{\sqrt{\frac{R}{L}+1}}$ B) $\frac{mg}{\sqrt{\frac{R}{L}-1}}$ C) $\frac{mg}{\sqrt{\frac{2R}{L}-1}}$ D) $\frac{2mg}{\sqrt{\frac{R}{L}-1}}$ E) $\frac{mg}{\sqrt{\frac{R}{2L}+1}}$

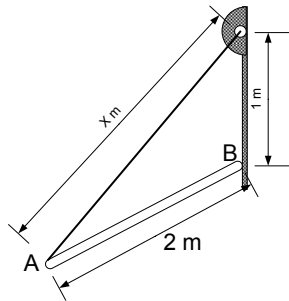
45. La barra uniforme y homogénea se encuentra en equilibrio en la posición mostrada y las superficies en contacto están libres de rozamiento. Determine el valor del ángulo θ para el equilibrio, si la barra posee una longitud de “L” m y una masa de “m” kg. Las medidas están dadas en metros.



- A) $\text{sen}^3 \theta = \frac{2a}{L}$ B) $\cos^3 \theta = \frac{a}{L}$ C) $\text{sen}^2 \theta = \frac{a}{2L}$
D) $\cos 2\theta = \frac{2a}{3L}$ E) $\text{sen} 3\theta = \frac{2a}{L}$

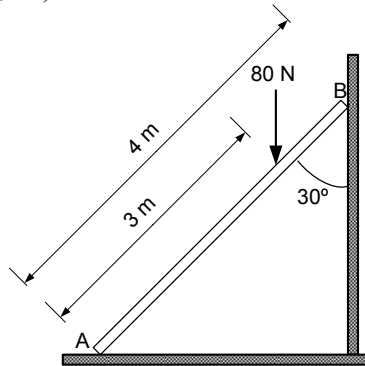
46. La varilla uniforme y homogénea se encuentra en equilibrio. Determine la longitud de la cuerda que une el extremo A de la varilla con la argolla de la pared lisa.

- A) $\sqrt{5}$ m
B) $\sqrt{11}$ m
C) $\sqrt{6}$ m
D) $\sqrt{7}$ m
E) $\sqrt{10}$ m



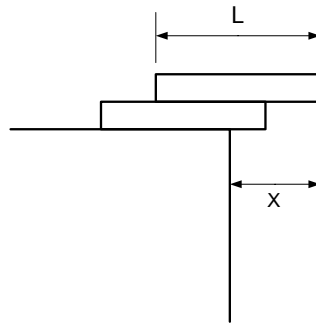
47. La escalera de 1 kg, se encuentra a punto de deslizar, si el coeficiente de rozamiento estático entre la pared y la escalera es de 0,2, determine el coeficiente de rozamiento estático entre la escalera y el suelo. (Dato: $2\sqrt{3} \approx 3,48$)

- A) 0,2
B) 0,3
C) 0,4
D) 0,5
E) 0,35

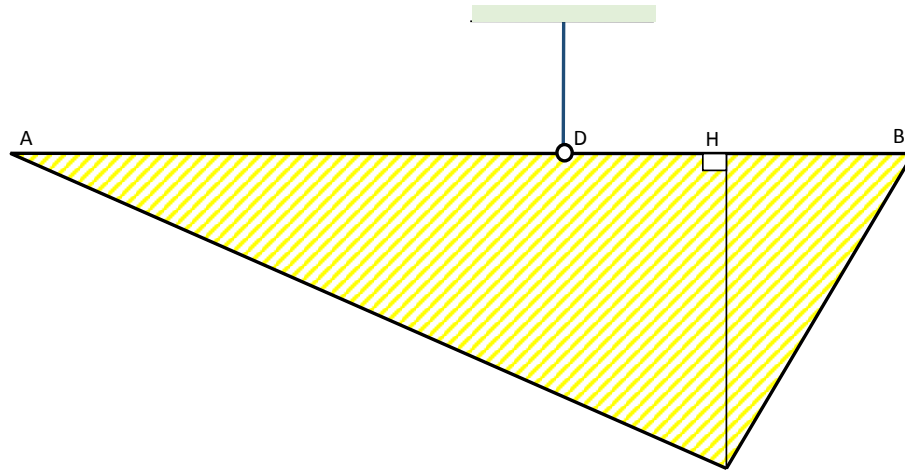


48. Dos ladrillos idénticos de longitud “L” se colocan uno sobre otro en el borde de una superficie horizontal sobresaliendo lo máximo posible sin caer, como se muestra. Determine la distancia “x”.

- A) $\frac{L}{2}$
B) $\frac{L}{3}$
C) $\frac{L}{4}$
D) $\frac{3L}{4}$
E) $\frac{5L}{4}$



CENTRO DE GRAVEDAD



1. **CENTRO DE GRAVEDAD:** es aquel punto geométrico ubicado dentro o fuera del cuerpo, por el cual pasa la línea de acción de la fuerza resultante, de las fuerzas de gravedad que actúan sobre cada una de las partículas que forman el cuerpo. El centro de gravedad es el punto donde actúa el peso del cuerpo.
2. **POSICIÓN DEL CENTRO DE GRAVEDAD.** El centro de gravedad puede estar fuera de la estructura del cuerpo, en un punto donde no hay masa del cuerpo, como sucede con el anillo, la esfera hueca, una taza vacía, en una silla, etc.
 En un cuerpo rígido (sólido) el centro de gravedad ocupa siempre un punto fijo, si el cuerpo gira el centro de gravedad conserva el mismo lugar. Ejemplo: una barra en posición horizontal y la misma barra en posición vertical.
 El centro de gravedad se encuentra en la zona de mayor concentración de masa. Ejemplo: El centro de gravedad de un cono macizo, el centro de gravedad se encuentra a una distancia igual a la cuarta parte de su altura respecto de la base del cono.
3. **CENTRO DE GRAVEDAD DE CUERPOS LINEALES:**
 El centro de gravedad de una barra homogénea se encuentra en el punto medio de la barra.

$$x = \frac{L_1 \cdot X_1 + L_2 \cdot X_2 + L_3 \cdot X_3 + L_4 \cdot X_4}{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}$$

$$y = \frac{L_1 \cdot Y_1 + L_2 \cdot Y_2 + L_3 \cdot Y_3 + L_4 \cdot Y_4}{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}$$

$$G = (x; y)$$

EJEMPLO: Determinar el centro de gravedad de la barra homogénea mostrada.



RESOLUCIÓN

[1]. Cálculo del centro de gravedad de la barra horizontal,

$$L_1 = 3\text{ m} \quad G_1 = (1,5 ; 0)$$

[2] Cálculo del centro de gravedad de la barra vertical,

$$L_2 = 2\text{ m} \quad G_2 = (3 ; 1)$$

[3] Cálculo del centro de gravedad de la barra oblicua,

$$L_3 = \sqrt{13}\text{ m} \quad G_3 = (4,5 ; 3)$$

[4] Cálculo del centro de gravedad del sistema de la barra doblada.

$$x = \frac{L_1 \cdot X_1 + L_2 \cdot X_2 + L_3 \cdot X_3}{L_1 + L_2 + L_3} = \frac{(3)(1,5) + (2)(3) + (\sqrt{13})(4,5)}{3 + 2 + \sqrt{13}} = 3,1\text{ m}$$

$$y = \frac{L_1 \cdot Y_1 + L_2 \cdot Y_2 + L_3 \cdot Y_3}{L_1 + L_2 + L_3} = \frac{(3)(0) + (2)(1) + (\sqrt{13})(3)}{3 + 2 + \sqrt{13}} = 1,5\text{ m}$$

$$G = (x; y) = (3,1 ; 1,5)\text{ m}$$

4. CENTRO DE GRAVEDAD DE CUERPOS SUPERFICIALES.

El centro de gravedad de una placa triangular se encuentra en la intersección de las medianas, es decir el baricentro.

El centro de gravedad de una placa rectangular homogénea se encuentra en la intersección de las diagonales.

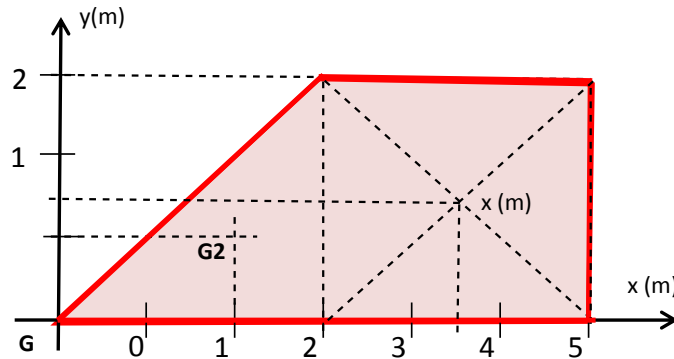
El centro de gravedad de un círculo homogéneo se encuentra en su centro geométrico.

$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot X_3 + A_4 \cdot X_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3 + A_4 \cdot Y_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$$

$$G = (x; y)$$

EJEMPLO: Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



RESOLUCIÓN

[1]. Cálculo del centro de gravedad del triángulo,

$$A_1 = 4,5 \text{ m}^2 \quad G_1 = (2 ; 1) \text{ m}$$

[2]. Cálculo del centro de gravedad del cuadrado,

$$A_2 = 9 \text{ m}^2 \quad G_2 = (4,5 ; 1,5) \text{ m}$$

[3]. Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial que tiene forma de trapecio.

$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2}{A_1 + A_2} = \frac{(4,5)(2) + (9)(4,5)}{4,5 + 9} = 3,7 \text{ m}$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2}{A_1 + A_2} = \frac{(4,5)(1) + (9)(1,5)}{4,5 + 9} = 1,3 \text{ m}$$

$$G = (x; y) = (3,7 ; 1,3) \text{ m}$$

5. CENTRO DE GRAVEDAD DE CUERPOS VOLUMÉTRICOS.

El centro de gravedad de una esfera se encuentra en el centro geométrico. El centro de gravedad de un cilindro se encuentra a la mitad de la altura.

$$x = \frac{V_1 \cdot X_1 + V_2 \cdot X_2 + V_3 \cdot X_3 + V_4 \cdot X_4}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}$$

$$6. \quad y = \frac{V_1 \cdot Y_1 + V_2 \cdot Y_2 + V_3 \cdot Y_3 + V_4 \cdot Y_4}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}$$

$$G = (x; y)$$

6. **CENTRO DE MASA.** Si el cuerpo es uniforme y homogéneo, es decir, si la densidad es constante, entonces el centro de gravedad y el centro de masa se encuentran en el mismo punto.

$$x = \frac{M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_3 \cdot X_3 + M_4 \cdot X_4}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4}$$

$$7. \quad y = \frac{M_1 \cdot Y_1 + M_2 \cdot Y_2 + M_3 \cdot Y_3 + M_4 \cdot Y_4}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4}$$

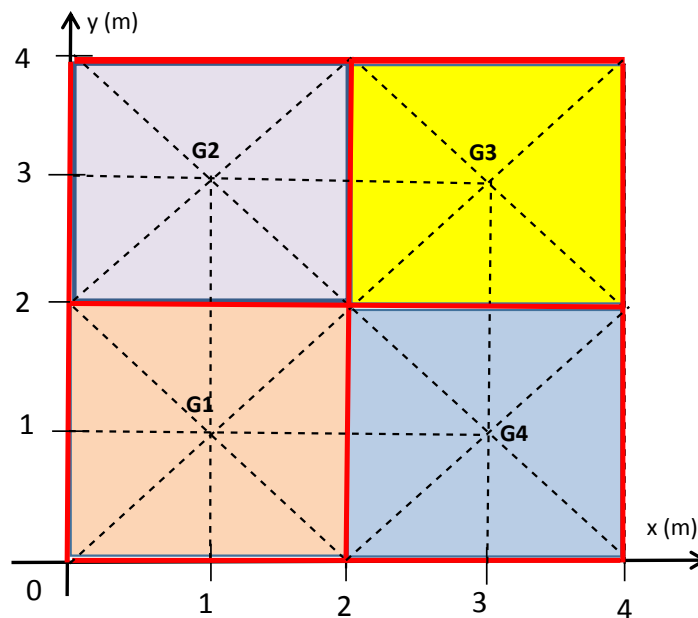
$$G = (x; y)$$

7. **CENTROIDE.** Si el cuerpo no es uniforme, tampoco es homogéneo, es decir, la densidad no es constante.

EJEMPLO: La placa compuesta está hecha de cuatro losetas de densidades,

$$\rho_1 = 1,0 \text{ kg/m}^2, \rho_2 = 1,2 \text{ kg/m}^2, \rho_3 = 1,3 \text{ kg/m}^2, \rho_4 = 1,1 \text{ kg/m}^2$$

Determine la masa y las coordenadas del centro de masa.



RESOLUCIÓN. Cálculo de la masa total:

$$M = A_1 \cdot \rho_1 + A_2 \cdot \rho_2 + A_3 \cdot \rho_3 + A_4 \cdot \rho_4$$

$$M = (4)(1,0) + (4)(1,2) + (4)(1,3) + (4)(1,1) = 18,4 \text{ kg}$$

[1]. Cálculo del centro de gravedad. $M_1 = A_1 \cdot \rho_1 = 4,0 \text{ kg}$ $G_1 = (1; 1)m$

[2]. Cálculo del centro de gravedad. $M_2 = A_2 \cdot \rho_2 = 4,8 \text{ kg}$ $G_2 = (1; 3)m$

[3]. Cálculo del centro de gravedad. $M_3 = A_3 \cdot \rho_3 = 5,2 \text{ kg}$ $G_3 = (3; 3)m$

[4] Cálculo del centro de gravedad.

$$M_4 = A_4 \cdot \rho_4 = 4,4 \text{ kg} \quad G_4 = (3 ; 1) m$$

Cálculo del centro de masa de cuerpo:

$$x = \frac{M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_3 \cdot X_3 + M_4 \cdot X_4}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4}$$

$$x = \frac{8 \cdot (4,0)(1) + (4,8)(1) + (5,2)(3) + (4,4)(3)}{18,4} = 2,04 \text{ m}$$

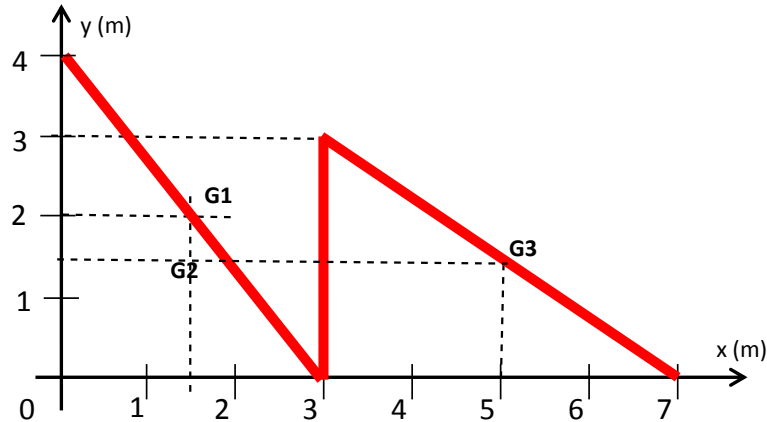
$$9. \quad y = \frac{M_1 \cdot Y_1 + M_2 \cdot Y_2 + M_3 \cdot Y_3 + M_4 \cdot Y_4}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4}$$

$$y = \frac{1(4,0)(1) + (4,8)(3) + (5,2)(3) + (4,4)(1)}{18,4} = 2,09 \text{ m}$$

$$G = (x; y) = (2,04 ; 2,09) m$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Determinar el centro de gravedad de la barra homogénea mostrada.

**RESOLUCIÓN**

- [1]. Cálculo del centro de gravedad de la barra inclinada 53° ,
 $L_1 = 5\text{ m}$ $G_1 = (1,5 ; 2)$

- [2]. Cálculo del centro de gravedad de la barra vertical,
 $L_2 = 3\text{ m}$ $G_2 = (3 ; 1,5)$

- [3]. Cálculo del centro de gravedad de la barra inclinada 37° ,
 $L_3 = 5\text{ m}$ $G_3 = (5 ; 1,5)$

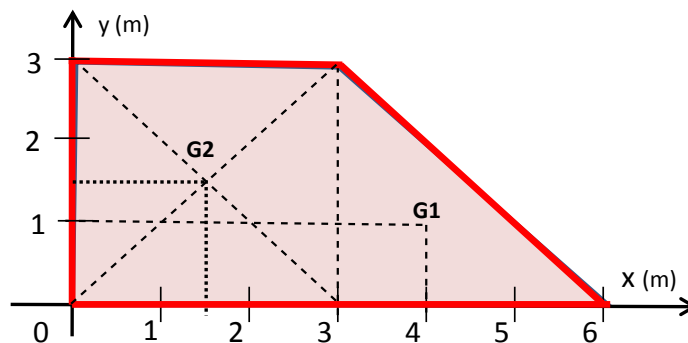
- [4]. Cálculo del centro de gravedad del sistema de la barra doblada.

$$x = \frac{L_1 \cdot X_1 + L_2 \cdot X_2 + L_3 \cdot X_3}{L_1 + L_2 + L_3} = \frac{(5)(1,5) + (3)(3) + (5)(5)}{5 + 3 + 5} = 3,2\text{ m}$$

$$y = \frac{L_1 \cdot Y_1 + L_2 \cdot Y_2 + L_3 \cdot Y_3}{L_1 + L_2 + L_3} = \frac{(5)(2) + (3)(1,5) + (5)(1,5)}{3 + 3 + 5} = 1,7\text{ m}$$

$$G = (x; y) = (3,2 ; 1,7)\text{ m}$$

2. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



RESOLUCIÓN

[1]. Cálculo del centro de gravedad del triángulo,

$$A_1 = 4,5 m^2 \quad G_1 = (4 ; 1) m$$

[2]. Cálculo del centro de gravedad del cuadrado,

$$A_2 = 9 m^2 \quad G_2 = (1,5 ; 1,5) m$$

[3]. Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial que tiene forma de trapecio.

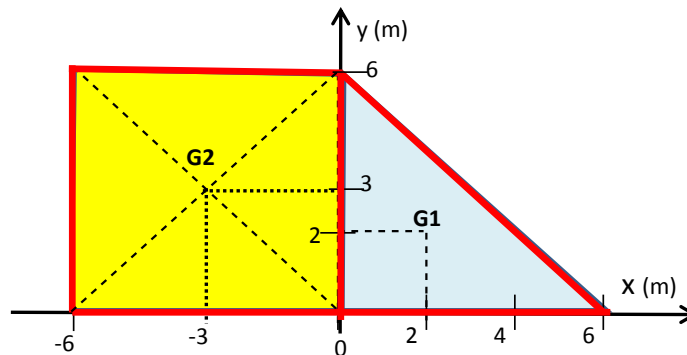
$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2}{A_1 + A_2} = \frac{(4,5)(4) + (9)(1,5)}{4,5 + 9} = 2,3 m$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2}{A_1 + A_2} = \frac{(4,5)(1) + (9)(1,5)}{4,5 + 9} = 1,3 m$$

$$G = (x; y) = (2,3 ; 1,3) m$$

3. La placa compuesta está hecha de dos placas, el cuadrado de acero y el triángulo rectángulo de latón. Determinar la masa y el centro de gravedad de la superficie mostrada.

$$\rho_{LATON} = 8,7 kg/m^2 \quad \rho_{ACERO} = 7,8 kg/m^2$$



RESOLUCIÓN. Cálculo de la masa total:

$$M = A_1 \cdot \rho_1 + A_2 \cdot \rho_2$$

$$M = (18)(8,7) + (36)(7,8) = 437,4 kg$$

[1]. Cálculo del centro de gravedad, triángulo de LATÓN.

$$M_1 = A_1 \cdot \rho_1 = 156,6 kg \quad G_1 = (2 ; 2) m$$

[2]. Cálculo del centro de gravedad, cuadrado de ACERO.

$$M_2 = A_2 \cdot \rho_2 = 280,8 kg \quad G_2 = (-3 ; 3) m$$

$$x = \frac{M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2}{M_1 + M_2}$$

$$x = \frac{(156,6)(2) + (280,8)(-3)}{437,4} = -1,21 m$$

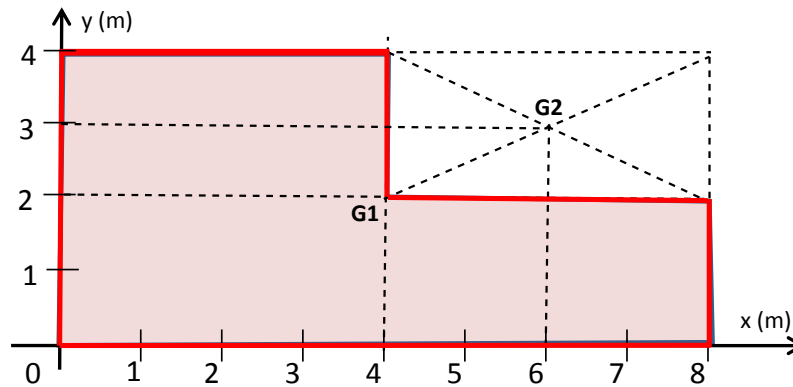
$$5. \quad y = \frac{M_1 \cdot Y_1 + M_2 \cdot Y_2}{M_1 + M_2}$$

6.

$$y = \frac{(156,6)(2) + (280,8)(3)}{437,4} = 2,64 \text{ m}$$

$$G = (x; y) = (-1,21 ; 2,64) \text{ m}$$

4. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



RESOLUCIÓN

[1]. Cálculo del centro de gravedad del rectángulo grande, incluyendo el rectángulo vacío, de base 8 m y altura 4 m. $A_1 = 32 \text{ m}^2$ $G_1 = (4 ; 2) \text{ m}$

[2] Cálculo del centro de gravedad del rectángulo vacío de base 4 m y altura 2 m, $A_2 = 8 \text{ m}^2$ $G_2 = (6 ; 3) \text{ m}$

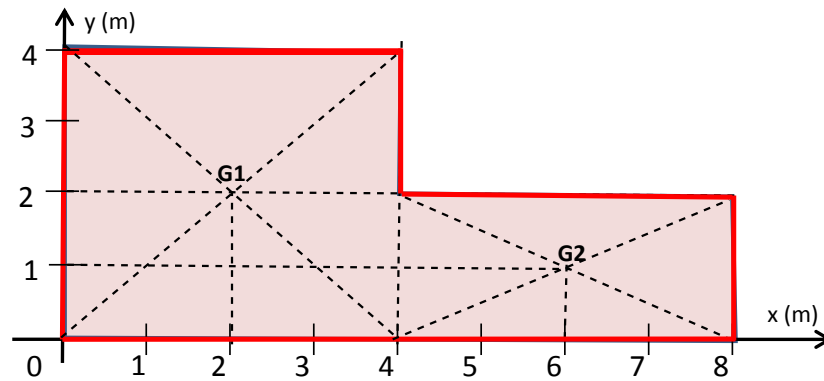
[3] Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial, mediante la resta.

$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 - A_2 \cdot X_2}{A_1 - A_2} = \frac{(32)(4) - (8)(6)}{32 - 8} = 3,3 \text{ m}$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 - A_2 \cdot Y_2}{A_1 - A_2} = \frac{(32)(2) - (8)(3)}{32 - 8} = 1,7 \text{ m}$$

$$G = (x; y) = (3,3 ; 1,7) \text{ m}$$

5. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



RESOLUCIÓN

[1]. Cálculo del centro de gravedad del cuadrado, $A_1 = 16m^2$ $G_1 = (2 ; 2)m$

[2]. Cálculo del centro de gravedad del rectángulo, $A_2 = 8m^2$ $G_2 = (6 ; 1)m$

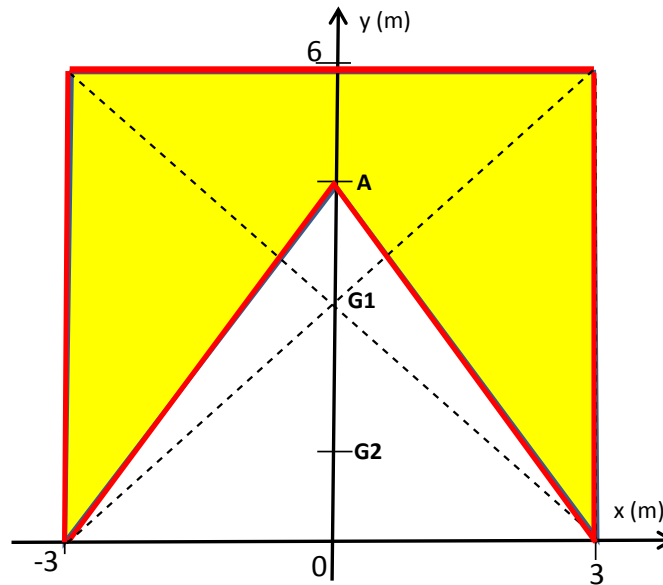
[3]. Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial, forma tradicional.

$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2}{A_1 + A_2} = \frac{(16)(2) + (8)(6)}{16 + 8} = 3,3 \text{ m}$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2}{A_1 + A_2} = \frac{(16)(2) + (8)(1)}{16 + 8} = 1,7 \text{ m}$$

$$G = (x, y) = (3,3 ; 1,7) \text{ m}$$

6. A una placa cuadrada homogénea se le ha sustraído una placa triangular equilátera. Determinar el centro de gravedad de la región limitada por el pentágono.



RESOLUCIÓN.

- [1]. Cálculo del centro de gravedad del cuadrado de lado 6 m,

$$A_1 = 36 m^2 \quad G_1 = (0; 3)m$$

- [2]. Cálculo del centro de gravedad del triángulo equilátero de lado

$$L = 6 m$$

$$A_2 = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 15,588 m^2 \quad G_2 = (0; \sqrt{3})m$$

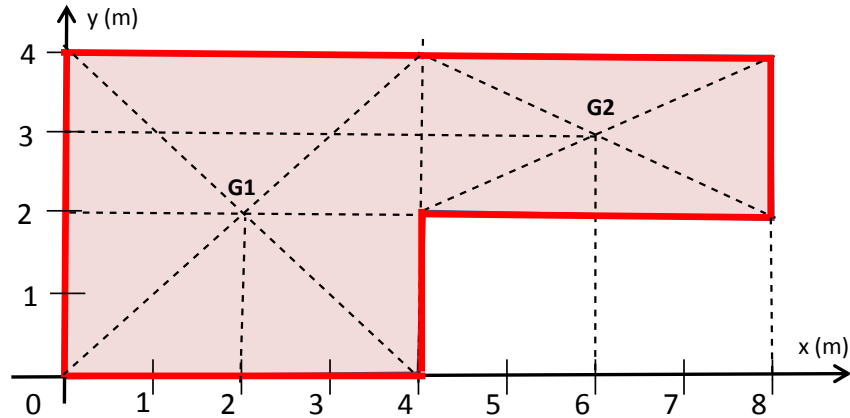
Cálculo del centro de gravedad de la región sombreada:

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 - A_2 \cdot Y_2}{A_1 - A_2}$$

$$y = \frac{(36)(3) - (15,588)(\sqrt{3})}{36 - 15,588} = 3,968 m$$

$$G = (0; 3,968) m$$

7. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



RESOLUCIÓN

[1]. Cálculo del centro de gravedad del cuadrado,

$$A_1 = 16 m^2 \quad G_1 = (2 ; 2)m$$

[2]. Cálculo del centro de gravedad del rectángulo,

$$A_2 = 8 m^2 \quad G_2 = (6 ; 3)m$$

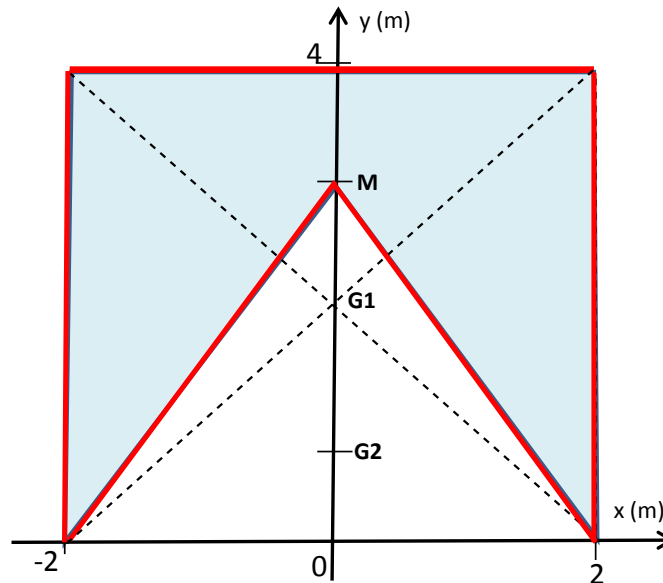
[3]. Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial, forma tradicional.

$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2}{A_1 + A_2} = \frac{(16)(2) + (8)(6)}{16 + 8} = 3,3 \text{ m}$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2}{A_1 + A_2} = \frac{(16)(2) + (8)(3)}{16 + 8} = 2,3 \text{ m}$$

$$G = (x; y) = (3,3 ; 2,3) \text{ m}$$

8. Determinar las coordenadas del punto M situado en el eje de simetría de un cuadrado, de tal modo que sea el centro de gravedad de la región limitada por el pentágono.



RESOLUCIÓN.

- [1]. Cálculo del centro de gravedad del cuadrado de lado 4 m,

$$A_1 = 16m^2 \quad G_1 = (0; 2)m$$

- [2]. Cálculo del centro de gravedad del triángulo isósceles,

$$A_2 = \frac{(4)(h)}{2} = 2h \quad G_2 = \left(0; \frac{h}{3}\right)m$$

Cálculo del centro de gravedad de la región sombreada: de la condición M en el centro de gravedad,

$$M = (0; h)$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 - A_2 \cdot Y_2}{A_1 - A_2}$$

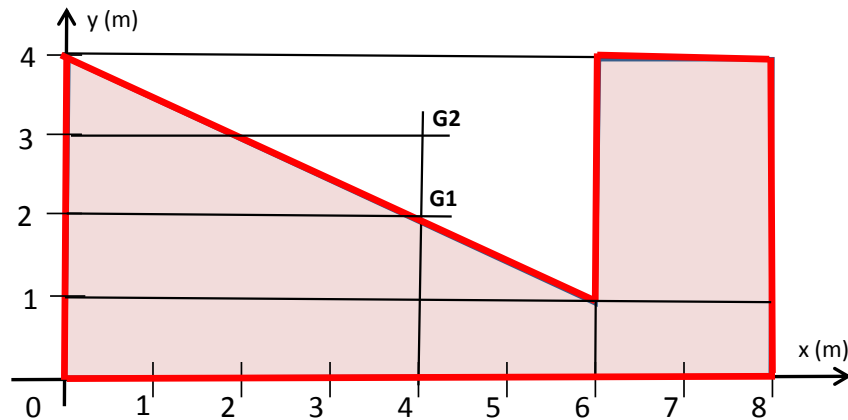
$$h = \frac{(16)(2) - (2h)\left(\frac{h}{3}\right)}{16 - 2h}$$

$$h = 6 - 2\sqrt{3} = 2,54 \text{ m}$$

La posición de M es

$$M = (0; 2,54) \text{ m}$$

9. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



RESOLUCIÓN

[1]. Cálculo del centro de gravedad del rectángulo grande, incluyendo el triángulo vacío, de base 8 m y altura 4 m. $A_1 = 32 \text{ m}^2$ $G_1 = (4 ; 2) \text{ m}$

[2] Cálculo del centro de gravedad del triángulo vacío de base 6 m y altura 3 m,
 $A_2 = 9 \text{ m}^2$ $G_2 = (4 ; 3) \text{ m}$

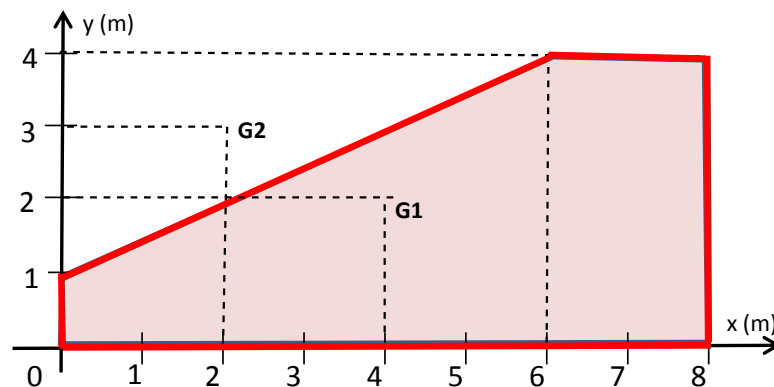
[3] Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial, mediante la resta.

$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 - A_2 \cdot X_2}{A_1 - A_2} = \frac{(32)(4) - (9)(4)}{32 - 9} = 4 \text{ m}$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 - A_2 \cdot Y_2}{A_1 - A_2} = \frac{(32)(2) - (9)(3)}{32 - 9} = 1,22 \text{ m}$$

$$G = (x; y) = (4 ; 1,22) \text{ m}$$

10. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



RESOLUCIÓN

[1]. Cálculo del centro de gravedad del rectángulo grande, incluyendo el triángulo vacío, de base 8 m y altura 4 m. $A_1 = 32 \text{ m}^2$ $G_1 = (4 ; 2) \text{ m}$

[2]. Cálculo del centro de gravedad del triángulo vacío de base 6 m y altura 3 m, $A_2 = 9 \text{ m}^2$ $G_2 = (2 ; 3) \text{ m}$

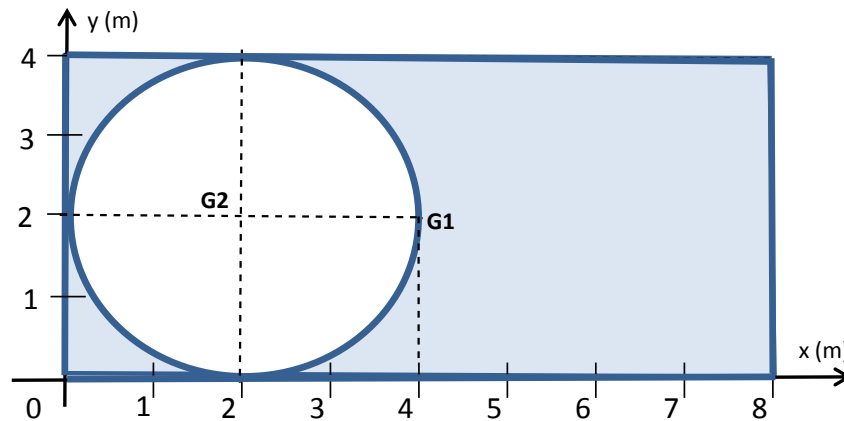
[3]. Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial, mediante la resta.

$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 - A_2 \cdot X_2}{A_1 - A_2} = \frac{(32)(4) - (9)(2)}{32 - 9} = 4,78 \text{ m}$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 - A_2 \cdot Y_2}{A_1 - A_2} = \frac{(32)(2) - (9)(3)}{32 - 9} = 1,22 \text{ m}$$

$$G = (x; y) = (4,78 ; 1,22) \text{ m}$$

11. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.

**RESOLUCIÓN**

[1]. Cálculo del centro de gravedad del rectángulo grande, incluyendo el círculo vacío, de base 8 m y altura 4 m.

$$A_1 = 32 \text{ m}^2 \quad G_1 = (4 ; 2) \text{ m}$$

[2]. Cálculo del centro de gravedad del círculo vacío de radio 2 metros,

$$A_2 = 4\pi \text{ m}^2 \quad G_2 = (2 ; 2) \text{ m}$$

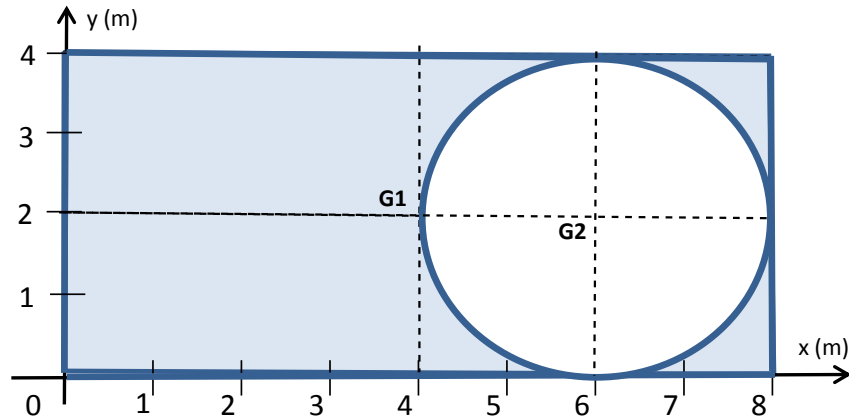
[3]. Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial, mediante la resta.

$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 - A_2 \cdot X_2}{A_1 - A_2} = \frac{(32)(4) - (4\pi)(2)}{32 - 4\pi} = 5,29 \text{ m}$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 - A_2 \cdot Y_2}{A_1 - A_2} = \frac{(32)(2) - (4\pi)(2)}{32 - 4\pi} = 2 \text{ m}$$

$$G = (x ; y) = (5,29 ; 2) \text{ m}$$

12. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



RESOLUCIÓN

[1]. Cálculo del centro de gravedad del rectángulo grande, incluyendo el círculo vacío, de base 8 m y altura 4 m. $A_1 = 32 \text{ m}^2$ $G_1 = (4 ; 2) \text{ m}$

[2]. Cálculo del centro de gravedad del círculo vacío de radio 2 metros, $A_2 = 4\pi \text{ m}^2$ $G_2 = (6 ; 2) \text{ m}$

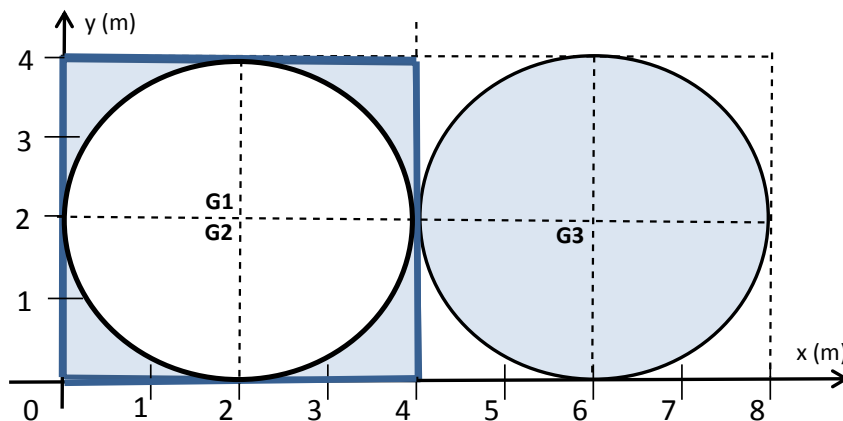
[3]. Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial, mediante la resta.

$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 - A_2 \cdot X_2}{A_1 - A_2} = \frac{(32)(4) - (4\pi)(6)}{32 - 4\pi} = 2,7 \text{ m}$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 - A_2 \cdot Y_2}{A_1 - A_2} = \frac{(32)(2) - (4\pi)(2)}{32 - 4\pi} = 2 \text{ m}$$

$$G = (x ; y) = (2,7 ; 2) \text{ m}$$

13. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



RESOLUCIÓN

[1]. Cálculo del centro de gravedad del cuadrado de lado 4 m,

$$A_1 = 16 m^2 \quad G_1 = (2 ; 2)m$$

[2] Cálculo del centro de gravedad del círculo vacío de radio 2 metros,

$$A_2 = 4\pi m^2 \quad G_2 = (2 ; 2)m$$

[3] Cálculo del centro de gravedad del círculo de radio 2 metros, de la derecha,
 $A_3 = 4\pi m^2 \quad G_3 = (6 ; 2)m$

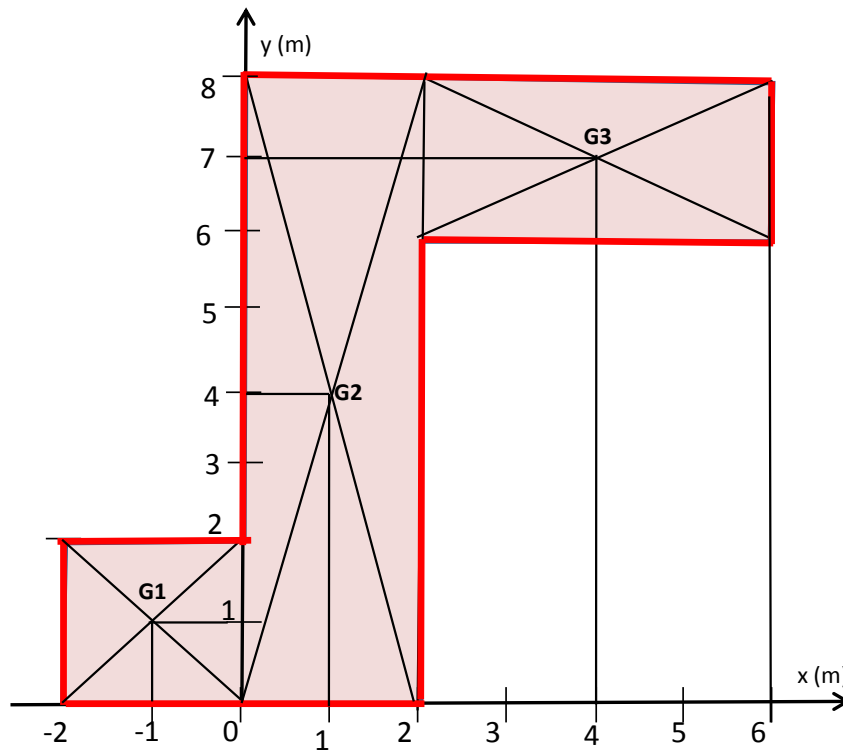
[4] Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial, mediante la resta.

$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 - A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot X_3}{A_1 - A_2 + A_3} = \frac{(16)(2) - (4\pi)(2) + (4\pi)(6)}{16 - 4\pi + 4\pi} = 5,14 m$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 - A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3}{A_1 - A_2 + A_3} = \frac{(16)(2) - (4\pi)(2) + (4\pi)(2)}{16 - 4\pi + 4\pi} = 2 m$$

$$G = (x ; y) = (5,14 ; 2) m$$

14. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.

**RESOLUCIÓN**

[1]. Cálculo del centro de gravedad del cuadrado,

$$A_1 = 4 m^2 \quad G_1 = (-1 ; 1)m$$

[2] Cálculo del centro de gravedad del rectángulo grande,

$$A_2 = 16 m^2 \quad G_2 = (1 ; 4)m$$

[3] Cálculo del centro de gravedad del rectángulo pequeño,

$$A_3 = 8 m^2 \quad G_3 = (4 ; 7)m$$

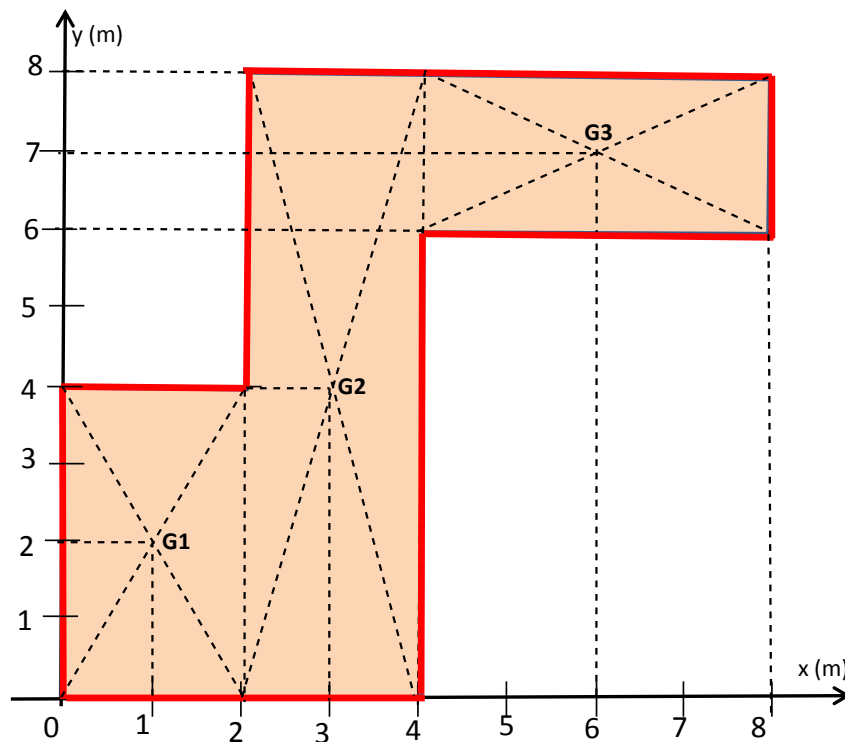
[4] Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial homogéneo.

$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot X_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{(4)(-1) + (16)(1) + (8)(4)}{4 + 16 + 8} = 1,57 m$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{(4)(1) + (16)(4) + (8)(7)}{4 + 16 + 8} = 4,43 m$$

$$G = (x, y) = (1,57 ; 4,43) m$$

15. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



RESOLUCIÓN

[1] Cálculo del centro de gravedad, $A_1 = 8 m^2 \quad G_1 = (1 ; 2)m$

[2] Cálculo del centro de gravedad, $A_2 = 16 m^2 \quad G_2 = (3 ; 4)m$

[3] Cálculo del centro de gravedad, $A_3 = 8 m^2 \quad G_3 = (6 ; 7)m$

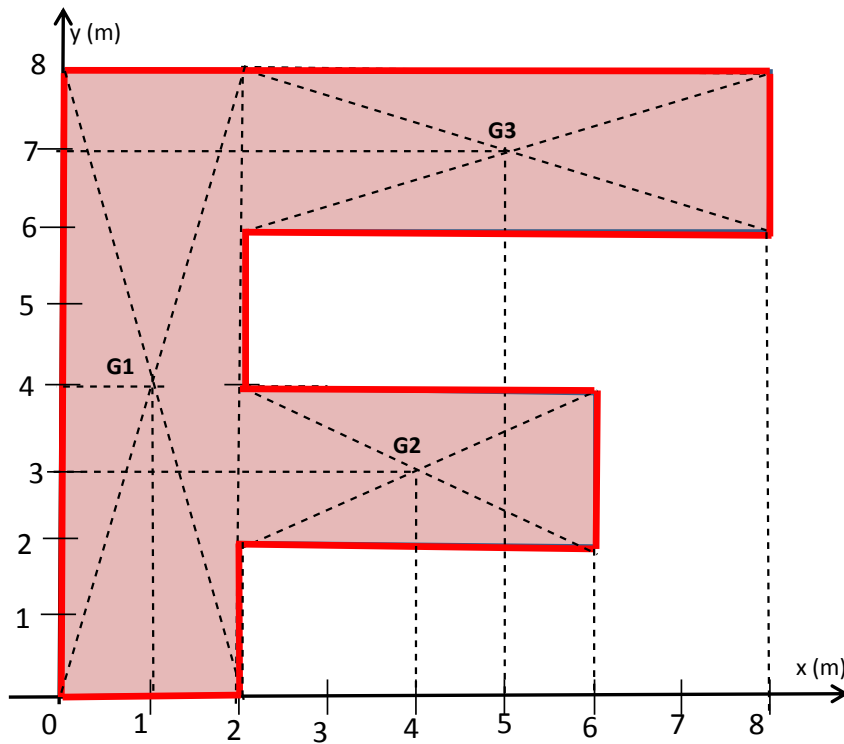
[4] Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial homogéneo.

$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot X_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{(8)(1) + (16)(3) + (8)(6)}{8 + 16 + 8} = 3,25 \text{ m}$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{(8)(2) + (16)(4) + (8)(7)}{4 + 16 + 8} = 4,25 \text{ m}$$

$$G = (x; y) = (3,25 ; 4,25) \text{ m}$$

16. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



RESOLUCIÓN

[1] Cálculo del centro de gravedad, $A_1 = 16 \text{ m}^2$ $G_1 = (1 ; 4) \text{ m}$

[2] Cálculo del centro de gravedad, $A_2 = 8 \text{ m}^2$ $G_2 = (4 ; 3) \text{ m}$

[3] Cálculo del centro de gravedad, $A_3 = 12 \text{ m}^2$ $G_3 = (5 ; 7) \text{ m}$

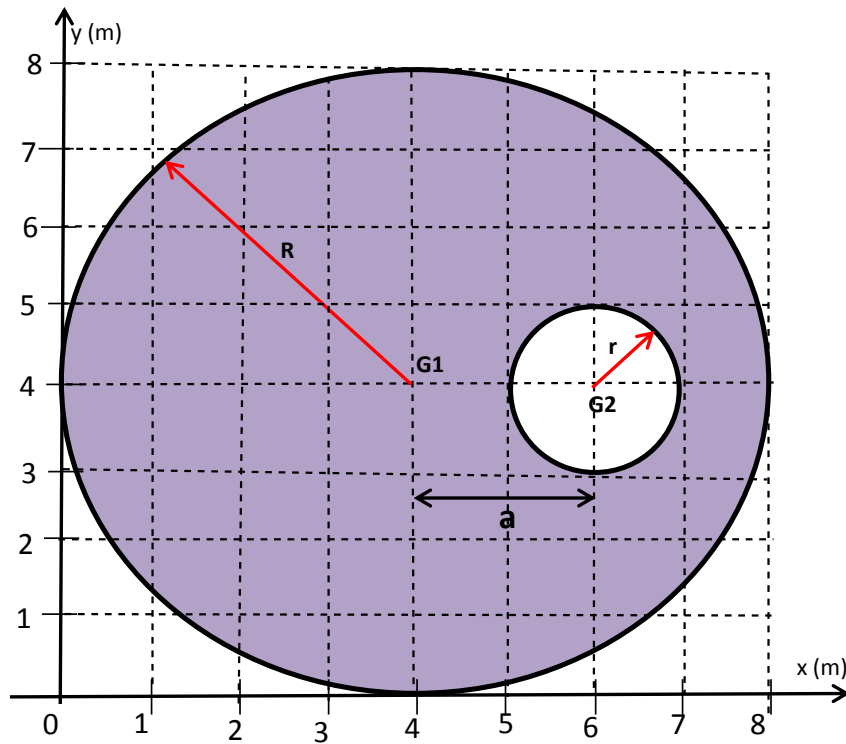
[4] Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial homogéneo.

$$x = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot X_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{(16)(1) + (8)(4) + (12)(5)}{16 + 8 + 12} = 3,00 \text{ m}$$

$$y = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{(16)(4) + (8)(3) + (12)(7)}{16 + 8 + 12} = 4,78 \text{ m}$$

$$G = (x; y) = (3,00 ; 4,78) \text{ m}$$

17. Determinar la posición del centro de gravedad de la superficie circular de radio “R” homogénea mostrada, que tiene una perforación circular de radio “r”, la distancia entre sus centros geométricos es “a”.



RESOLUCIÓN

El Método de complemento se aplica cuando el cuerpo tiene perforaciones.

[1]. Círculo grande, $A_1 = \pi.R^2 = 16\pi \text{ m}^2$ $G_1 = (4 ; 4)m$

[2]. Círculo vacío, $A_2 = \pi.r^2 = \pi \text{ m}^2$ $G_2 = (6 ; 4)m$

[3]. Cálculo del centro de gravedad del sistema superficial homogéneo.

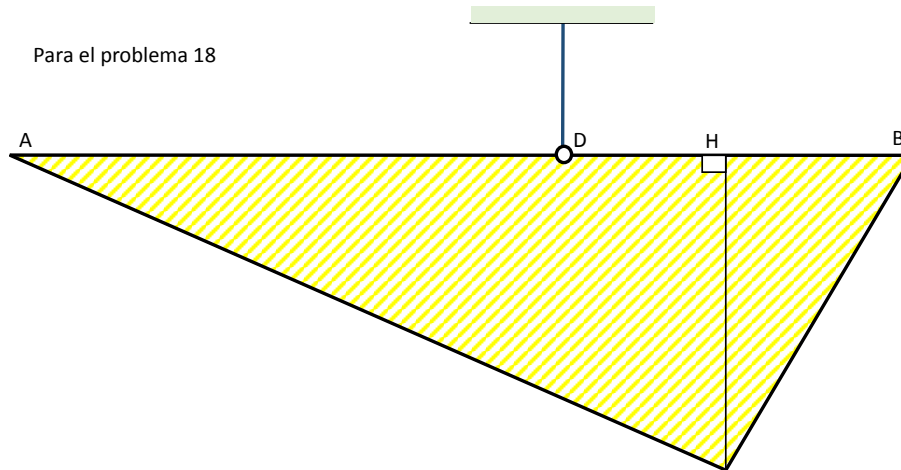
$$x = \frac{A_1.X_1 - A_2.X_2}{A_1 - A_2} = \frac{(16\pi)(4) - (\pi)(6)}{16\pi - \pi} = 3,00 \text{ m}$$

$$y = \frac{A_1.Y_1 + A_2.Y_2 + A_3.Y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{(16)(4) + (8)(3) + (12)(7)}{16 + 8 + 12} = 4,78 \text{ m}$$

$$G = (x; y) = (3,00 ; 4,78) \text{ m}$$

18. Una lámina homogénea de forma triangular está colgada en un punto D del lado AB mediante un hilo. Determinar el valor del segmento AD, para que en la posición de equilibrio AB quede horizontal. La altura HC sobre el lado AB divide al lado en dos segmentos de 27 cm y 9 cm respectivamente.

Para el problema 18



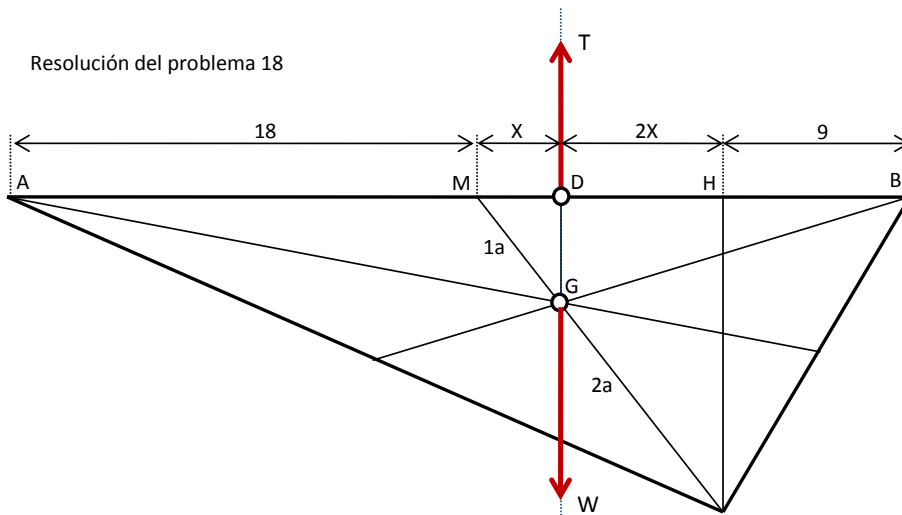
RESOLUCIÓN

PRIMER PASO. Hacemos el diagrama de cuerpo libre de la lámina triangular.

SEGUNDO PASO. El centro de gravedad de la lámina homogénea de forma triangular se encuentra en el baricentro G. En la posición de equilibrio, el peso W y la tensión T en la cuerda son colineales, por consiguiente, los puntos D y G se encuentran en la misma línea vertical.

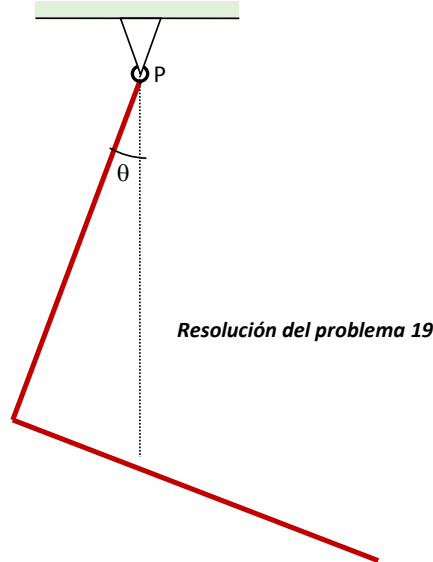
$$AH = 18 + X + 2X = 27 \Rightarrow X = 3$$

Resolución del problema 18



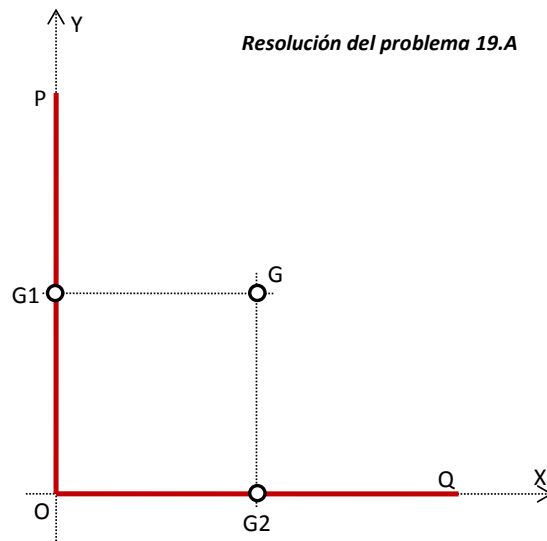
TERCER PASO. Aplicando la propiedad del baricentro G en un triángulo, deducimos que $X = 3\text{ cm}$. Por consiguiente, el segmento AD mide 21 cm.

19. Una barra doblada se dobla en dos partes iguales formando un ángulo recto. Se suspende de un extremo, determinar la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio.



RESOLUCIÓN

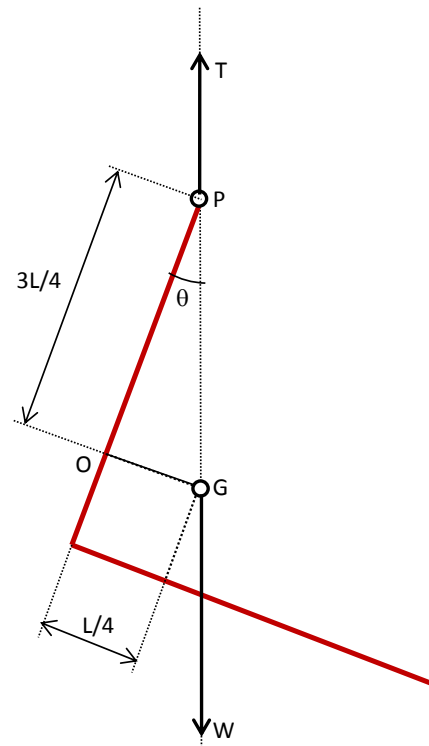
PRIMER PASO. Determinamos previamente la posición del centro de gravedad G de la barra homogénea doblada en forma de “L”. Cada segmento mide L. $PO = L$ y $OQ = L$



$$\bar{X} = \frac{L_1 \cdot X_1 + L_2 \cdot X_2}{L_1 + L_2} \Rightarrow \bar{X} = \frac{L \cdot (0) + L \cdot (L/2)}{L + L} = \frac{L}{4}$$

$$\bar{Y} = \frac{L_1 \cdot Y_1 + L_2 \cdot Y_2}{L_1 + L_2} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{L \cdot (L/2) + L \cdot (0)}{L + L} = \frac{L}{4}$$

SEGUNDO PASO. Equilibrio de rotación. En la posición de equilibrio de peso W y la tensión T son colineales, por consiguiente, los puntos P y Q se encuentran en la misma línea vertical.



Resolución del problema 19.B

$$\tan \theta = \frac{\frac{L}{4}}{\frac{3L}{4}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = 18,4^\circ$$

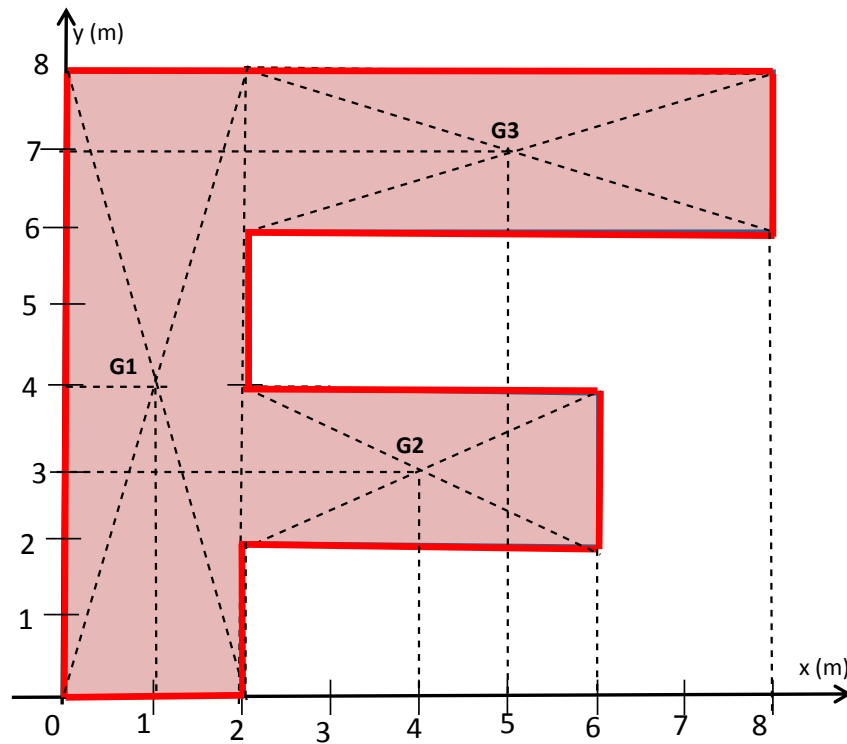
En el triángulo rectángulo POG , tenemos:

Respuesta: la medida del ángulo θ es $18,4^\circ$

19. Continuará.

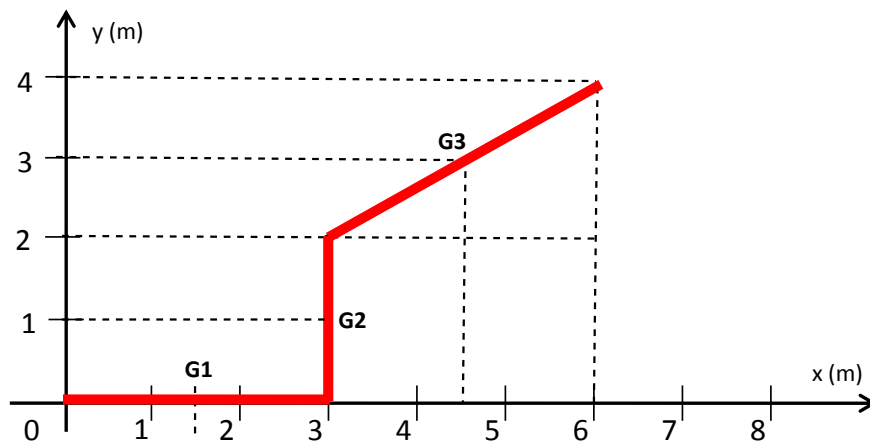
PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE

1. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



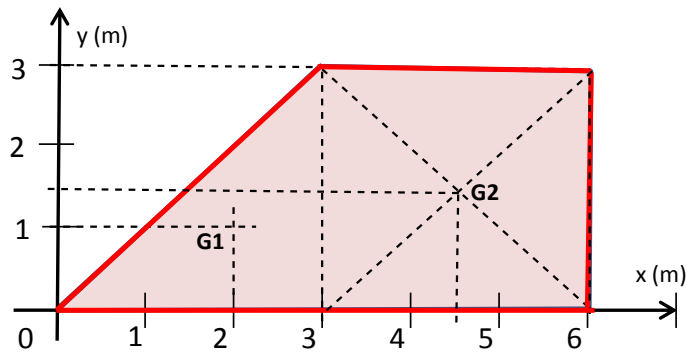
- a) $(1,57 ; 4,43)$ b) $(0 ; 2,54)$ c) $(3,25 ; 4,25)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(3,00 ; 4,78)$

2. Determinar el centro de gravedad de la barra homogénea mostrada.



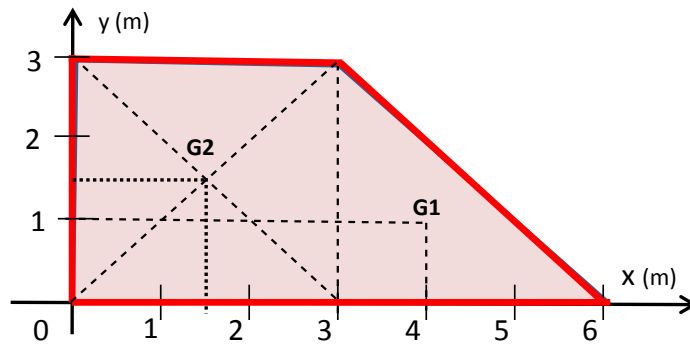
- a) $(3,1 ; 1,5)$ b) $(3,0 ; 1,7)$ c) $(3,2 ; 1,5)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(3,1 ; 1,3)$

3. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



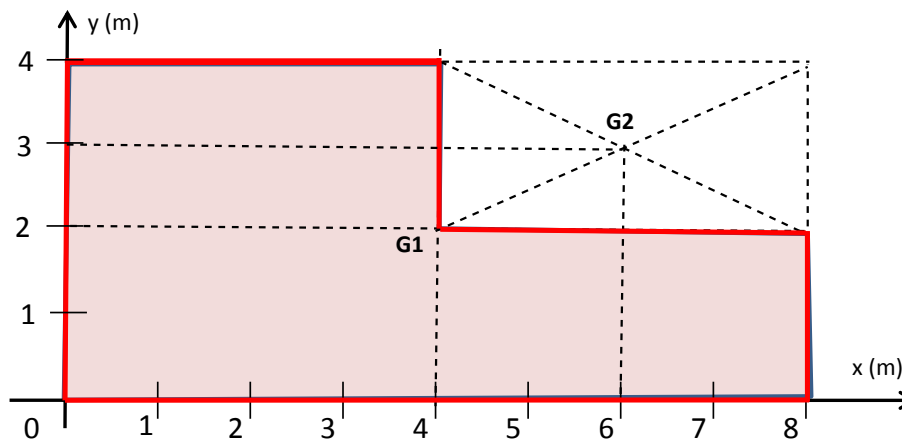
- a) $(2,3 ; 1,3)$ b) $(3,0 ; 1,7)$ c) $(3,2 ; 1,5)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(3,7 ; 1,3)$

4. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



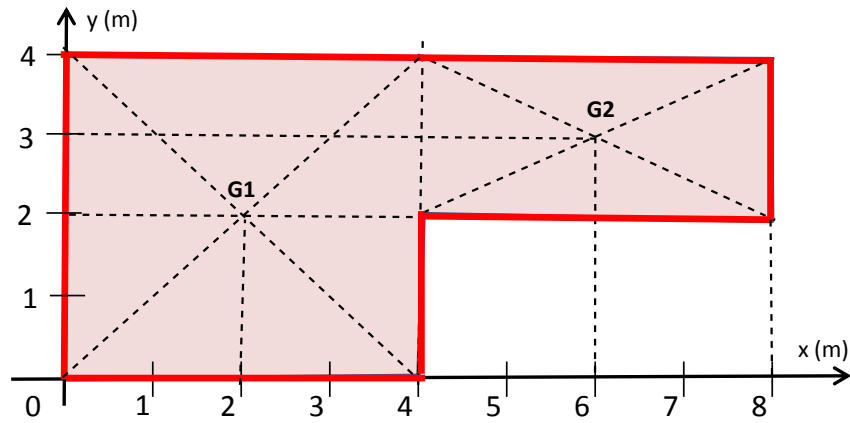
- a) $(2,3 ; 1,3)$ b) $(3,0 ; 1,7)$ c) $(3,2 ; 1,5)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(3,7 ; 1,3)$

5. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



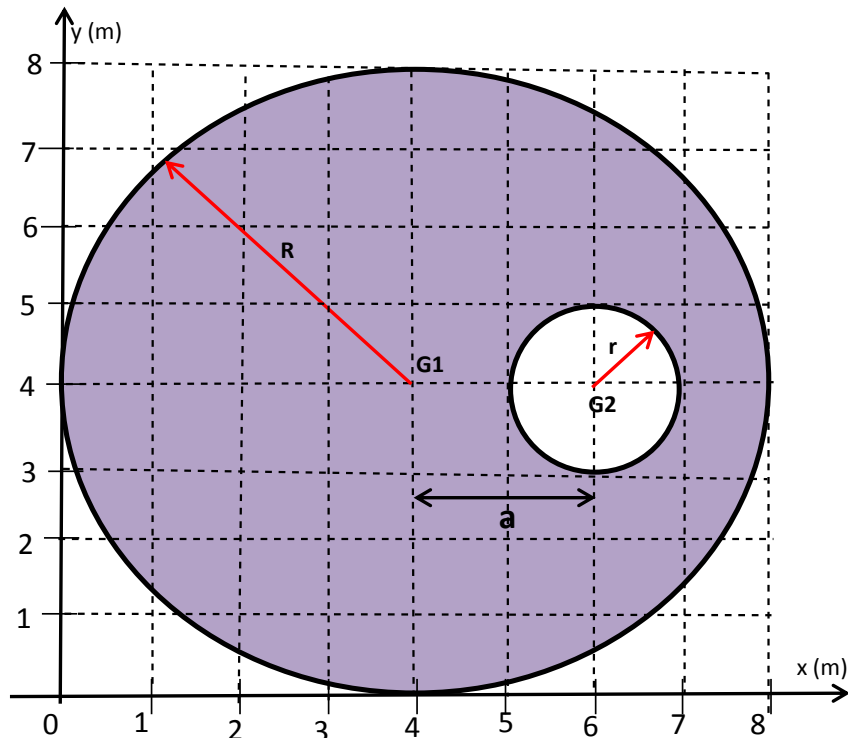
- a) $(2,3 ; 1,3)$ b) $(3,3 ; 1,7)$ c) $(3,2 ; 1,5)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(3,7 ; 1,3)$

6. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



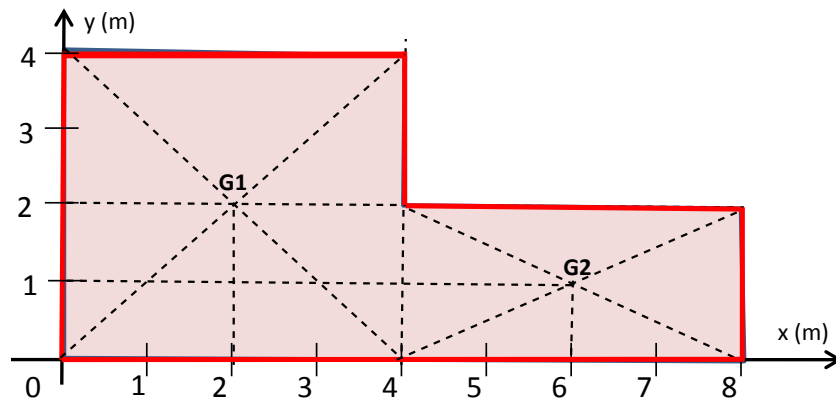
- a) (2,3 ; 1,3) **b) (3,3 ; 2,3)** c) (3,2 ; 1,5) d) (3,1 ; 1,4) e) (3,7 ; 1,3)

7. Determinar la posición del centro de gravedad de la superficie circular de radio "R" homogénea mostrada, que tiene una perforación circular de radio "r", la distancia entre sus centros geométricos es "a".



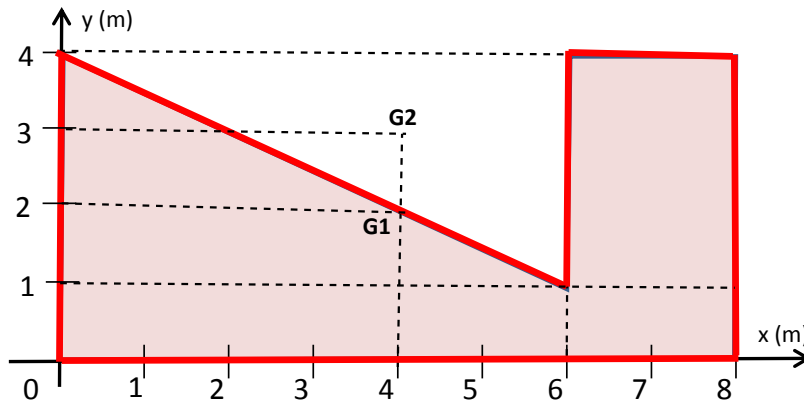
- a) (1,57 ; 4,43) b) (0 ; 2,54) c) (3,25 ; 4,25) d) (3,1 ; 1,4) **e) (3,00 ; 4,78)**

8. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



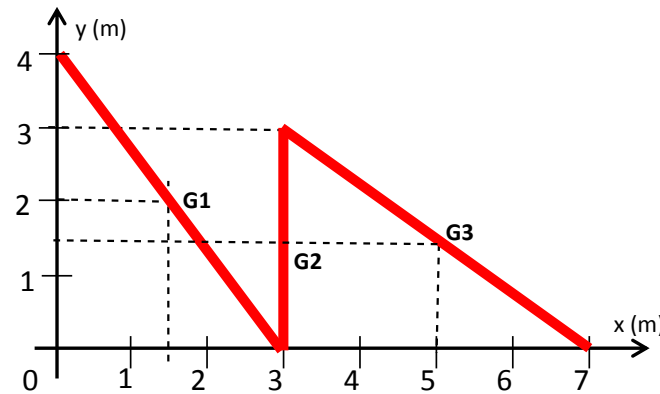
- a) $(2,3 ; 1,3)$ b) $(3,3 ; 1,7)$ c) $(3,2 ; 1,5)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(3,7 ; 1,3)$

9. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



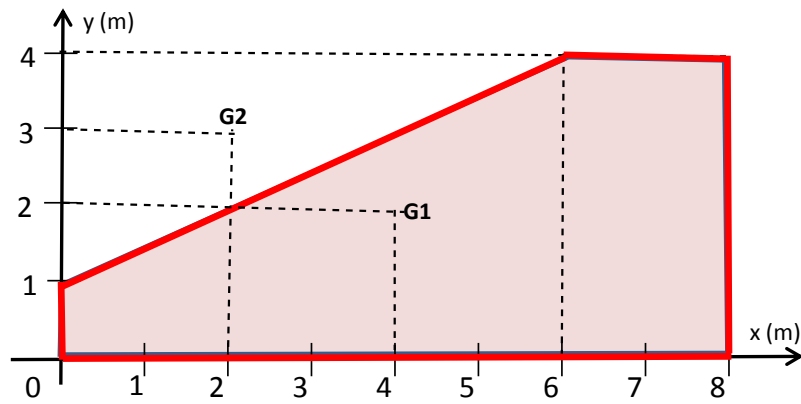
- a) $(2,3 ; 1,3)$ b) $(3,3 ; 2,3)$ c) $(3,2 ; 1,5)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(4 ; 1,22)$

10. Determinar el centro de gravedad de la barra homogénea mostrada.



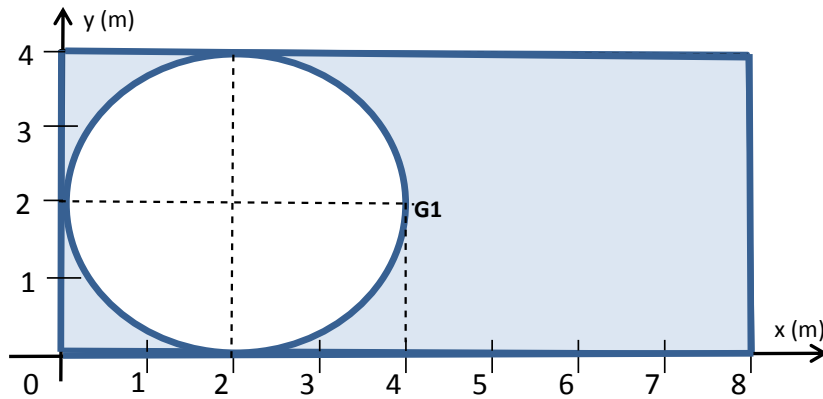
- a) $(2,3 ; 1,3)$ b) $(3,3 ; 2,3)$ c) $(3,2 ; 1,7)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(4 ; 1,22)$

11. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



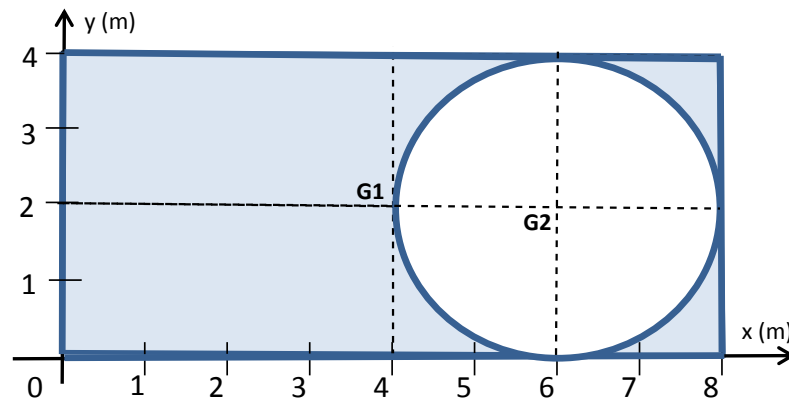
- a) $(4,78 ; 1,22)$ b) $(3,3 ; 2,3)$ c) $(3,2 ; 1,7)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(4 ; 1,22)$

12. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



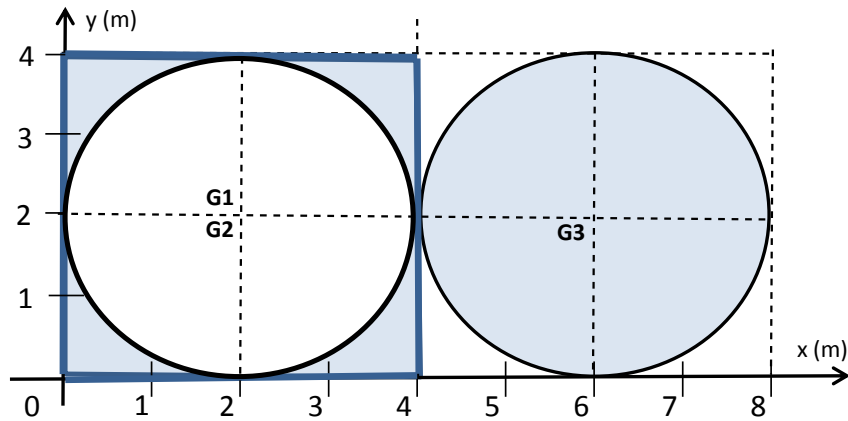
- a) $(4,78 ; 1,22)$ b) $(3,3 ; 2,3)$ c) $(5,29 ; 2,0)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) Ninguna

13. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



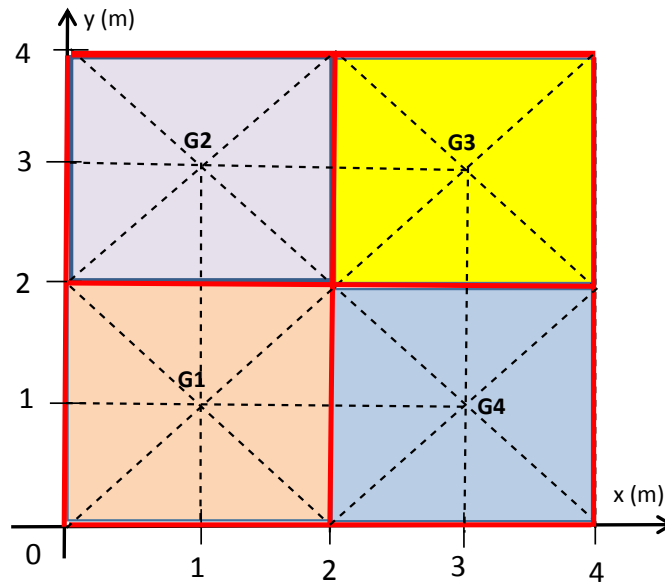
- a) $(4,78 ; 1,22)$ b) $(3,3 ; 2,3)$ c) $(3,2 ; 1,7)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(2,7 ; 2,0)$

14. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



- a) (4,78 ; 1,22) b) (3,3 ; 2,3) **c) (5,14 ; 2,0)** d) (3,1 ; 1,4) e) (2,7 ; 2,0)

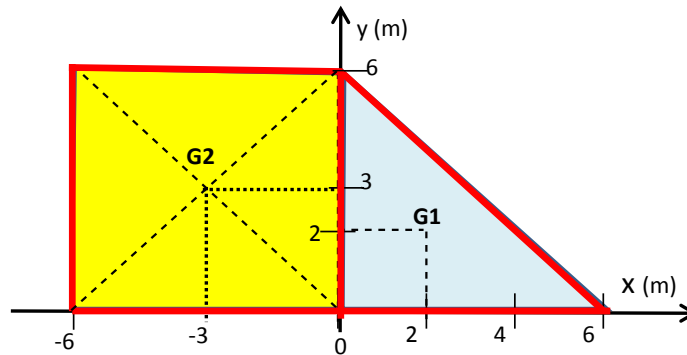
15. La placa compuesta está hecha de cuatro losetas de densidades, $\rho_1 = 1,0 \text{ kg/m}^2$, $\rho_2 = 1,2 \text{ kg/m}^2$, $\rho_3 = 1,3 \text{ kg/m}^2$, $\rho_4 = 1,1 \text{ kg/m}^2$. Determine la masa y las coordenadas del centro de masa.



- a) (4,78 ; 1,22) b) (3,3 ; 2,3) **c) (2,04 ; 2,09)** d) (3,1 ; 1,4) e) (2,7 ; 2,0)

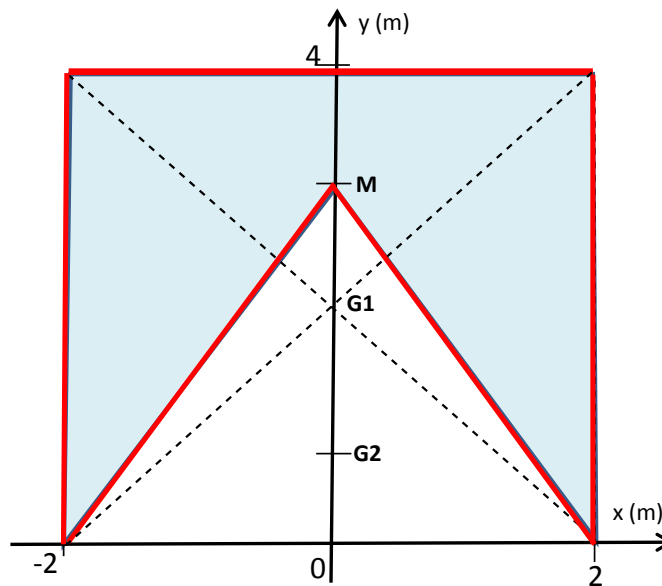
16. La placa compuesta está hecha de dos placas, el cuadrado de acero y el triángulo rectángulo de latón. Determinar la masa y el centro de gravedad de la superficie mostrada.

$$\rho_{\text{LATON}} = 8,7 \text{ kg/m}^2 \quad \rho_{\text{ACERO}} = 7,8 \text{ kg/m}^2$$



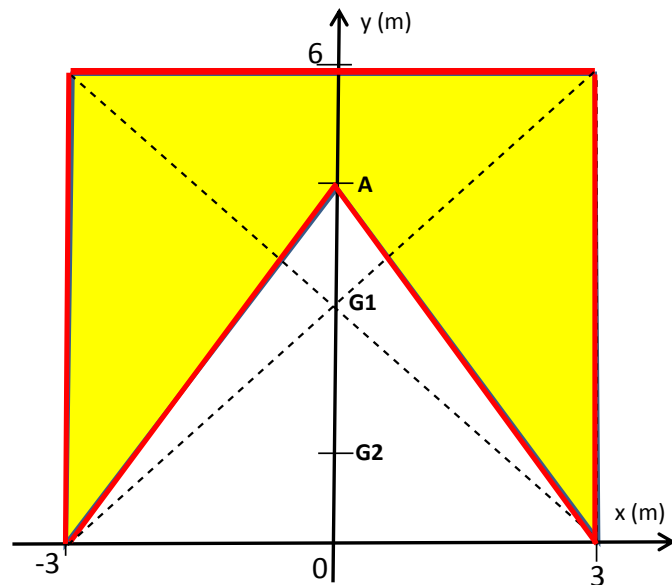
- a) $(-1,21 ; 2,64)$ b) $(3,3 ; 2,3)$ c) $(2,04 ; 2,09)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(-1,3 ; 2,3)$

17. Determinar las coordenada del punto M situado en el eje de simetría de un cuadrado, de tal modo que sea el centro de gravedad de la región limitada por el pentágono.



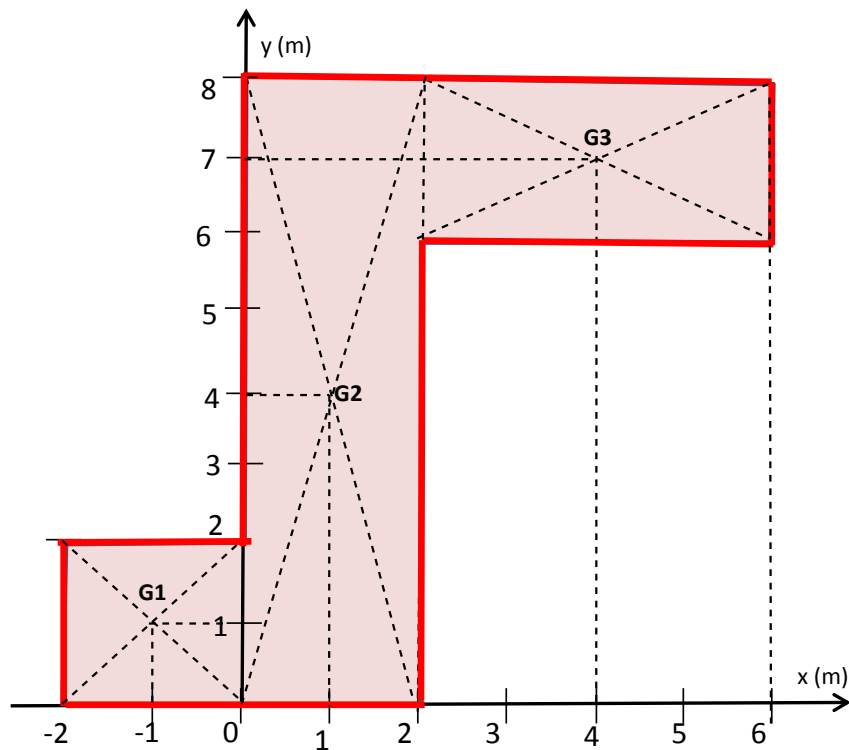
- a) $(-1,21 ; 2,64)$ b) $(0 ; 2,54)$ c) $(2,04 ; 2,09)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(-1,3 ; 2,3)$

18. A una placa cuadrada homogénea se le ha sustraído una placa triangular equilátera. Determinar el centro de gravedad de la región limitada por el pentágono.



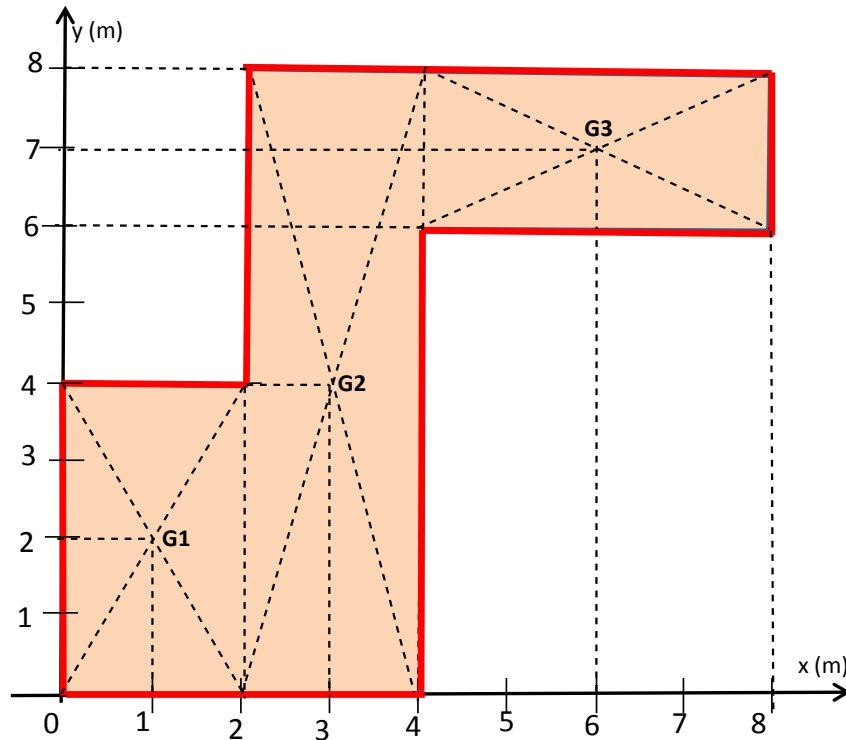
- a) $(-1,21 ; 2,64)$ b) $(0 ; 2,54)$ **c) $(0 ; 3,968)$** d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(-1,3 ; 2,3)$

19. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



- a) $(1,57 ; 4,43)$** b) $(0 ; 2,54)$ c) $(0 ; 3,968)$ d) $(3,1 ; 1,4)$ e) $(-1,3 ; 2,3)$

20. Determinar el centro de gravedad de la superficie homogénea mostrada.



- a) (1,57 ; 4,43) b) (0 ; 2,54) c) (3,25 ; 4,25)
d) (3,1 ; 1,4) e) (-1,3 ; 2,3)

21. CONTINUARÁ.

BIBLIOGRAFÍA**TEXTOS DE TEORÍA**

1. Título: Introducción a la Física; Autores: Marcelo Alonso y Virgilio Acosta; Editorial: Edición Cultural, Bogota – Colombia. Volúmenes: I y II.
2. Título: Física Universitaria; Autores: Sears / Zemansky / Young; Editorial: Addison-Wesley Iberoamericana, 2003.
3. Título: Física preuniversitaria; Autor: Walter Pérez Terrel; Editorial: San Marcos colección “UNICIENCIA”, Lima Perú, Tercera edición 2005.
4. Título: Física para estudiantes de educación secundaria; Autor: Walter Pérez Terrel; Editorial: Escuela Nueva, Lima Perú, 2005.
5. Título: Física y química, preuniversitaria; Autor: Walter Pérez Terrel; Editorial: Universidad Ricardo Palma, CEPURP, tercera edición 2005.
6. Título: Física conceptual Autor: Paul G. Hewitt Editorial: Addison-Wesley Iberoamericana.
7. Título: Unidades de las magnitudes físicas y sus dimensiones; Autor: Lev A. Sena; Editorial: Mir Moscú.
8. Título: Física Moderna; Autor: Carlos De la Cruz González; Editorial: Cuzcano, Lima Perú 2004.
9. Título: Electricidad y magnetismo; Autor: A. N. Matveev Editorial: Mir Moscú.
10. Título: Física I, II, III y IV. Autores: Piórishkin y Ródina Editorial: Mir Moscú, 1982
11. Título: Física Básica, Volumen II Autor: Jaime I. Aguirre; Editorial: San Marcos, 1989.
12. Título: Curso breve de Mecánica Teórica; Autor: Simeón Targ; Editorial: Mir Moscú, cuarta edición 1981.
13. Título: Física general, con experimentos sencillos; Autores: Beatriz Alvarenga y Antonio Máximo; Editorial: BRAZIL, 2000.
14. Título: Física, volúmenes I, II y III; Autor: Marcelo Alonso y Edgard J. Finn Editorial: Addison-Wesley Iberoamericana, 1975.
15. Título: FÍSICA, volúmenes I y II; Autor: R. A. Serway; Editorial: Addison-Wesley Iberoamericana, 2004.

TEXTOS DE PROBLEMAS

16. Título: Libro de Problemas; Autores: Profesores de la academia preuniversitaria “Cesar Vallejo”; Editorial: Lumbreras, primera edición 1984.
17. Título: Problemas de Física; Autor: Walter Pérez Terrel; Editorial: San Marcos, Lima Perú. Primera edición 1991.
18. Título: Física Elemental; Autor: Andrés Custodio García; Editorial: Colecciones IMPECUS
19. Título: Problemas seleccionados de la física elemental; Autores: Saráeva, Miákishev, Krivchenkov, Bújovtsev; Editorial: Mir Moscú.
20. Título: Problemas y experimentos recreativos de física; Autor: Ya. I. Perelmán; Editorial: Mir Moscú.
21. Título: Problemas y ejercicios de física; Autores: Gladkova, Dobronrávov; Editorial: Mir Moscú.

22. Título: Problemas de física general; Autores: I. E. Irodov; Editorial: Mir Moscú.
23. Título: Problemas de Física; Autores: O. Ya. Sávchenko, Zubkov, Vorobiev; Jaritónov; Editorial: Mir Moscú.
24. Título: Física en ejemplos y problemas; Autores: Búticov, Bícov, Kondrátiev; Editorial: Mir Moscú.
25. Título: Problemas Especiales de Física; Autores: Orlando Ramírez Urbano y Walter Pérez Terrel; Editorial: San Marcos, Lima Perú, 1990.
26. Título: Problemas y ejercicios prácticos de Astronomía; Autores: Vorontsov y Veliamínov; Editorial: Mir Moscú.
27. Título: Problemas de Física; Autor: S. Kósel; Editorial: Mir Moscú.
28. Título: Problemas de electromagnetismo; Autor: Miguel Furman; Editorial: Edición para estudiantes universitarios.
29. Título: Olimpiadas de Física de la Unión Soviética; Autores: Orlov y Slobodetski; Editorial: Mir Moscú, 1982.
30. Título: Problemas experimentales ingeniosos de Física; Autor: V. N. Langue; Editorial: Mir Moscú, 1979.
31. Título: FÍSICA⁺⁺; Autores: Régulo Sabrera Alvarado y Walter Pérez Terrel. Editorial: WH editores, 1996.

TEXTOS DE LECTURA

32. Título: Cuerpos físicos, Moléculas, Electrones, Fotones y Núcleos; Autores: Lev Davinovich Landau, A. I. Kitaigorodski Editorial: Mir Moscú.
33. Título: Preguntas y problemas de Física; Autor: L. Tarásov, A. Tarásova; Editorial: Mir Moscú
34. Título: Charlas sobre la refracción de la luz; Autor: L. Tarásov, A. Tarásova; Editorial: Mir Moscú
35. Título: El principito; Autor: Antoine de Saint-Exupéry; Editorial: Escuela Nueva SAC, Lima Perú.
36. Título: Historia de la física; Autor: James Jeans; Editorial: Fondo de Cultura Económica, México.
37. Título: Nicolás Copérnico; Autor: Angus Armitage; Editorial: Ediciones PEUSER Argentina – Buenos Aires.
38. Título: ¿Qué es la teoría de la relatividad? Autor: L. Landau, Y. Rumor; Editorial: Mir Moscú
39. Título: ¿Qué es la Mecánica Cuántica?; Autor: V. I. Rídnik; Editorial: Mir Moscú.
40. Título: ¡Conozcamos la Cinemática! Autor: G. Kopylov; Editorial: Mir Moscú.
41. Título: Física y geometría del desorden; Autor: A. Afros Editorial: Mir Moscú
42. Título: Albert Einstein, correspondencia con Michele Besso; Autor: Derechos reservados; Editorial: METATEMAS.
43. Título: Física del Plasma; Autores: V. Milántiev y S. Temko; Editorial: Mir Moscú.
44. Título: Rompecabezas y paradojas científicos; Autor: Christofher P. Jargocki Editorial: Biblioteca Científica Salvat.

45. Título: Termodinámica para muchos; Autores: Krichevski y Pretianov; Editorial: Mir Moscú, 1980
46. Título: Los secretos de los semiconductores; Autores: Borisov y Piatnova Editorial: Mir Moscú, 1975.
47. Título: El cristal vivo; Autor: Ya. E. Gueguzin; Editorial: Mir Moscú, 1981.
48. Título: La temperatura; Autor: Ya. Smorodinski; Editorial: Mir Moscú, 1981.
49. Título: Fundamentos de la filosofía marxista-leninista; Autor: Academia de Ciencias de la URSS; Editorial: Mir Moscú, 1975.
50. Título: De la Tierra a la Luna; Autor: Julio Verne; Editorial: Colección SAETA.
51. Título: Física Recreativa Volúmenes 1 y 2. Autor: Yakov Perelman; Editorial: Mir Moscú, 1975.
52. Título: Uno, dos, tres,..., infinito; Título: Una estrella llamada Sol; Autor: George Gamow; Editorial: Mir Moscú, 1980.
53. Título: Teoría Especial de la Relatividad; Autor: Albert Einstein Koch; Editorial: San Marcos, Lima Perú, 1995.
54. Título: HISTORIA DEL TEMPO: Del Bing Bang a los Agujeros Negros; Autor: Stephen W. Hawking; Editorial: Fondo Iberoamericano, 1990.

DICCIONARIOS, COMPENDIOS, GUÍAS Y OTROS

55. Título: Prontuario de Física; Autor: B. M. Yavorski y A. A. Detlaf; Editorial: Mir Moscú.
56. Título: Física experimental para todos; Autor: Alexander Efron; Editorial: Ramón Sopena. Barcelona- España.
57. Título: Sistema Internacional de Unidades de Medida; Autor: José Dajes Castro; Editorial: Fondo Editorial del Congreso del Perú.
58. Título: Diccionario de Matemática; Autor: Felipe Sebastiani Carranza; Editorial: Escuela Nueva SAC, Lima – Perú.
59. Título: Ciencia Recreativa; Autor: José Estalella; Editorial: Gustavo Pili, Barcelona España.
60. Título: Laboratorio de Física; Autores: Irwin Genzer y Philip Youngner; Editorial: Publicaciones CULTURAL, México 1976.
61. Título: Laboratorio de Física General; Autor: Oscar Monroy Cárdenas; Editorial: Facultad de Ciencias Físicas, UNMSM, 2003.

DIRECCIONES WEB

62. www.didactika.com. Portal educativo de Ciencias dirigido por Orlando Ramírez Urbano. Perú.
63. www.profisica.cl/experimentos.html. Portal educativo dirigido por Nelson Mayorga. Chile.
64. www.cienciafacil.com/fisica.html. Portal educativo. Colombia.
65. <http://grups.es/didactika/yahoo.com>. Grupo «Amigos de la Física» dirigido por Lic. Walter Perez Terrel, U.N.M.S.M., Perú.
66. http://grups.es/albert_einstein_koch/yahoo.com. Compendio de Física. Dirigido por Lic. Walter Perez Terrel, U.N.M.S.M., Perú.