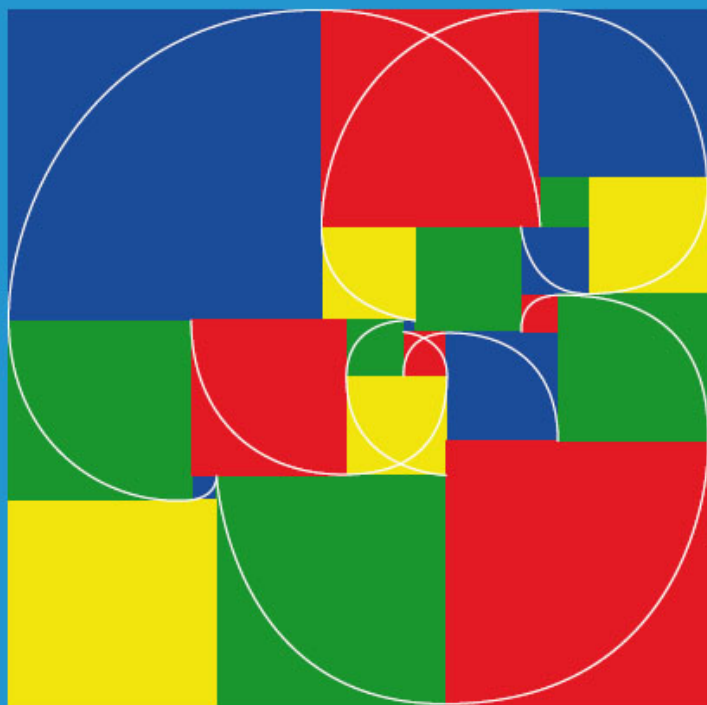


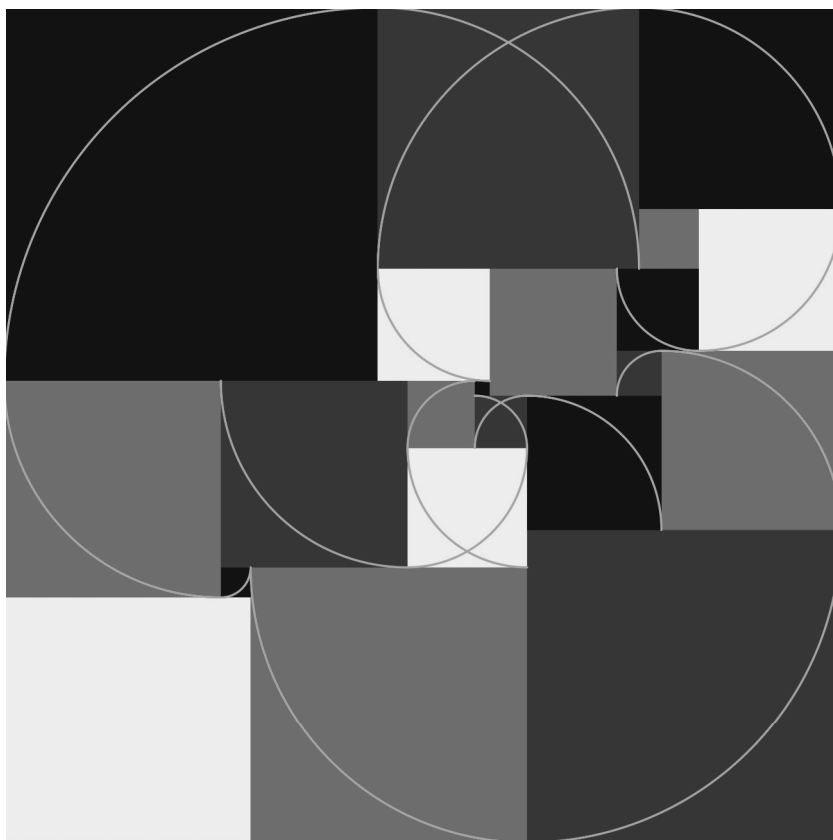
PROBLEMAS MATEMÁTICOS RESUELTOS DE NIVEL AVANZADO

Juan Diego Sánchez Torres



Problemas matemáticos resueltos de nivel avanzado

Juan Diego Sánchez Torres



Problemas matemáticos resueltos de nivel avanzado

Juan Diego Sánchez Torres

Datos catalográficos

Sánchez, Juan
Problemas matemáticos resueltos de nivel avanzado
Primera Edición

Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México

ISBN: 978-607-622-663-6

Formato: 17 x 23 cm

Páginas: 512

Problemas matemáticos resueltos de nivel avanzado

Juan Diego Sánchez Torres

ISBN: 978-84-267-2201-0, edición en español publicada por MARCOMBO, S.A., Barcelona, España

Derechos reservados © 2015 MARCOMBO, S.A.

Primera edición: Alfaomega Grupo Editor, México, diciembre 2016

© 2017 Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V.

Dr. Isidoro Olvera (Eje 2 sur) No. 74, Col. Doctores, 06720. Ciudad de México

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana

Registro No. 2317

Pág. Web: <http://www.alfaomega.com.mx>

E-mail: atencionalcliente@alfaomega.com.mx

ISBN: 978-607-622-663-6

Derechos reservados:

Esta obra es propiedad intelectual de su autor y los derechos de publicación en lengua española han sido legalmente transferidos al editor. Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier medio sin permiso por escrito del propietario de los derechos del copyright.

Nota importante:

La información contenida en esta obra tiene un fin exclusivamente didáctico y, por lo tanto, no está previsto su aprovechamiento a nivel profesional o industrial. Las indicaciones técnicas y programas incluidos, han sido elaborados con gran cuidado por el autor y reproducidos bajo estrictas normas de control. ALFAOMEGA GRUPO EDITOR, S.A. de C.V. no será jurídicamente responsable por: errores u omisiones; daños y perjuicios que se pudieran atribuir al uso de la información comprendida en este libro, ni por la utilización indebida que pudiera dársele.

Edición autorizada para venta en México y todo el continente americano.

Impreso en México. Printed in Mexico.

Empresas del grupo:

México: Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. – Dr. Isidoro Olvera (Eje 2 sur) No. 74, Col. Doctores, Ciudad de México - C.P. 06720, – Tel.: (52-55) 5575-5022 – Fax: (52-55) 5575-2420 / 2490. Sin costo: 01-800-020-4396 – E-mail: atencionalcliente@alfaomega.com.mx

Colombia: Alfaomega Colombiana S.A. – Calle 62 No. 20-46, Barrio San Luis, Bogotá, Colombia, Tels.: (57-1) 746 0102 / 210 0415 – E-mail: cliente@alfaomega.com.co

Chile: Alfaomega Grupo Editor, S.A. – Av. Providencia 1443. Oficina 24, Santiago, Chile
Tel.: (56-2) 2235-4248 – Fax: (56-2) 2235-5786 – E-mail: agechile@alfaomega.cl

Argentina: Alfaomega Grupo Editor Argentino, S.A. – Av. Córdoba 1215 piso 10, C.P. 1055, Buenos Aires, Argentina. – Tel./Fax: (54-11) 4811-0887 y 4811 7183 – E-mail: ventas@alfaomegaeditor.com.ar

A la niña Poti

Índice

<i>Presentación.....</i>	<i>9</i>
Capítulo I. Problemas de Aritmética	15
Capítulo II. Problemas de Álgebra	101
Capítulo III. Problemas de Análisis Matemático	205
Capítulo IV. Problemas de Geometría.....	325
Capítulo V. Problemas de Cálculo de Probabilidades	419

Presentación

Este libro pretende poner al alcance de las personas interesadas una selección de problemas matemáticos de variada temática, que ofrezca una visión general de parte de las Matemáticas que suelen impartirse en el primer y/o segundo curso de las carreras universitarias. Con esto, no quiere decirse que se trate de un libro dirigido únicamente a estudiantes de los primeros cursos universitarios, sino que el lector que disponga de los conocimientos de primer y —quizá— de segundo curso podrá seguir sin demasiada dificultad la resolución expuesta de cada problema. Por decirlo de alguna manera, son problemas que requieren cierta dedicación y cierto esfuerzo (no son ejercicios de aplicación de una teoría concreta), pero que no tratan aspectos demasiado profundos o especializados de las Matemáticas.

Aunque pueda sorprender a las personas «no iniciadas» en la preparación de las Oposiciones de Secundaria, los contenidos sobre los que tratan los problemas «Tipo Oposición» no suelen ser superiores a los del primer curso de carrera (de segundo, como mucho).

Como se comenta en la contraportada, la resolución de cada problema es sumamente detallada: se indica cada paso, cada operación, cada resultado o teorema empleado, qué línea de razonamiento nos lleva a ese camino... La razón de este tratamiento tan exhaustivo se encuentra en el deseo del autor de facilitar al máximo posible la tarea del lector. Es posible que esta forma de exponer la resolución de los problemas pueda causar cierta sorpresa, o incluso, en alguna ocasión, la sensación de que las explicaciones llegan a ser excesivas (a buen entendedor...). Sin embargo, no es intención del autor insultar a la inteligencia del lector, ni mucho menos; su propósito es tratar de evitar el desconcierto (a veces efímero, a veces no tanto, pero siempre frecuente) que produce el hecho de no comprender un paso dado o un cálculo realizado en la resolución de un problema.

A la hora de juzgar la idoneidad de esta íntegra resolución de cada problema, hemos de tener presente que este libro ha sido concebido por el autor como una herramienta que pretende tener tres utilidades, principalmente: facilitar la consolidación y el perfeccionamiento de sus capacidades matemáticas a los estudiantes de los primeros cursos universitarios (quienes, por lo general, y con el debido respeto, no suelen estar acostumbrados a seguir un texto matemático sin que otra persona le apoye en su lectura y comprensión); ayudar a su «reciclaje matemático» a las personas que quieran actualizar sus conocimientos (quienes muy posiblemente agradecerán la abundancia de explicaciones); y contribuir a que las personas que aspiran a superar las Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria puedan avanzar con velocidad en su tarea, especialmente aquellos opositores que no son titulados en Matemáticas, sino en una especialidad afín.

En este sentido, hay que decir que, en los últimos años, son muchas las personas de otra especialidad que preparan las oposiciones de Matemáticas, algunas de las cuales transmitieron al autor la necesidad de un libro de «problemas matemáticos de nivel avanzado» que, sin embargo, estuviera «explicado para gente que no tiene ese nivel».

Así pues, a partir de esta sugerencia, la idea del autor fue escribir un texto que, si bien no sustituye a un profesor (¡nunca sería posible!), hiciera que su ausencia causara el menor impacto posible en el estudiante o lector.

Por otro lado, en cuanto a los problemas presentados, cabe destacar que la mayoría de ellos han aparecido en Oposiciones de Secundaria (algunos, varias veces) y en exámenes de Facultades y Escuelas Universitarias; otros, han sido propuestos en pruebas universitarias, dentro del Programa de Formación Permanente del Profesorado, o en Olimpiadas Matemáticas; asimismo, hay algún que otro problema creado por el autor. Al final de la resolución de cada problema se indica su procedencia.

La selección de estos problemas es fruto de la experiencia del autor ayudando a estudiantes universitarios a mejorar sus capacidades matemáticas y, sobre todo, al trabajo desarrollado para ayudar a las personas que han querido contar con él como preparador de oposiciones, a lo cual se dedica desde hace varios años. Tengamos en cuenta que las Oposiciones de Secundaria dejaron de incorporar «la parte práctica» en la mayoría de las Comunidades Autónomas del Estado Español a partir de 2006, pero que, en la Comunidad Valenciana, donde reside el autor y ha impartido —e imparte— clases a opositores, el examen de problemas se ha mantenido en todas las convocatorias, salvo en la de 2007, por lo que era imprescindible preparar esta parte de las oposiciones; asimismo, el modelo actual de oposiciones exige una prueba práctica en todas las Comunidades Autónomas, por lo que es necesario para los opositores tener una sólida preparación en esta parte.

Cabe señalar que los problemas están resueltos de manera independiente, incluso aunque traten del mismo aspecto de una teoría. Se han presentado de este modo con el fin de que el lector siga el orden que considere oportuno, y no precise de unos problemas para poder asimilar otros. En ocasiones, se hace referencia a algún problema, pero es únicamente con la idea de establecer o destacar un nexo entre ambos, no porque sea preciso tener presente el enunciado o la resolución del problema aludido.

Asimismo, hemos de destacar el hecho de que el texto no incluye ni contenidos ni desarrollos teóricos a nivel general. Cuando es necesario contar con algún concepto o algún resultado para resolver un problema concreto, se emplea la expresión «como es sabido», para indicar un hecho o un concepto más o menos básico de la teoría involucrada; cuando se trata de una cuestión menos general o básica, se «recuerda» al lector el contenido correspondiente, en abstracto, y, posteriormente, se aplica al «caso que nos ocupa», para resolver el problema en cuestión.

En cuanto a la estructura, hay que decir que, aunque el libro está distribuido a lo largo de cinco capítulos (Aritmética, Álgebra, Análisis Matemático, Geometría, y Cálculo de Probabilidades), no se trata de compartimentos estancos: son bastantes los problemas cuya resolución requiere de elementos de más de una de estas ramas, lo cual evidencia que, a pesar de la especialización de cada parte de las Ma-

temáticas, es posible (y muy positivo) tratarlas desde un punto de vista un tanto global o integrador.

Para acabar esta presentación, solo queda agradecer al lector el hecho de haber elegido este libro, con el deseo de que le resulte útil y práctico, e invitarlo a que, si lo estima oportuno, traslade sus comentarios y sugerencias sobre el mismo al autor, a través de la dirección odisbaum@hotmail.com, indicando «problemas de nivel avanzado» en el asunto. No cabe duda de que las aportaciones que puedan hacer los lectores contribuirán considerablemente a que el texto sea mejorado de cara a futuras ediciones que puedan llevarse a cabo; por ello, el autor agradece de antemano las sugerencias y comentarios que reciba.

Asimismo, el autor quiere transmitir, desde estas líneas, su agradecimiento a todas las personas que le han ayudado en la creación y mejora de este libro —proporcionándole enunciados, apuntes y notas; criticando (constructivamente) la forma de resolver los problemas y de redactar las soluciones; «padeciendo» sus explicaciones; etc.—, a los estudiantes universitarios que han querido contar con su ayuda, a todos los opositores que han confiado —y aún confían— en él una cuestión tan importante en la vida como es la preparación de unas oposiciones, y, muy especialmente, a María Cristina Algar, José Luis Alcón, Santi «del Viso», Federico García, Lola Blanca, Víctor Ruiz, Óscar Miguel González, Piedad Vico, Carmen Cavero, Beatriz Misó, Rosana Zamora, Susana Girbés y María José Riquelme.

El autor

Capítulo I. Problemas de Aritmética

Problema 1.1

Sea b un número natural cualquiera, pero mayor que 7.

Demuestra que el número $n = 1367631_b$ es un cubo perfecto en el sistema de numeración de base b .

El número n , en base 10, es $n = 1367631_b = b^6 + 3b^5 + 6b^4 + 7b^3 + 6b^2 + 3b + 1$.

Puesto que pretendemos escribirlo como el cubo de otro número, digamos x , este debe ser de la forma $x = pqr_b = pb^2 + qb + r$, para que, al elevarlo al cubo, resulte un polinomio en la indeterminada b de grado 6, que es la forma que tiene el número n . Tenemos, pues:

$$n = x^3 \Leftrightarrow b^6 + 3b^5 + 6b^4 + 7b^3 + 6b^2 + 3b + 1 = (pb^2 + qb + r)^3,$$

que es una ecuación con incógnitas p , q y r .

Ahora bien, puesto que el polinomio del primer miembro es mónico (su coeficiente principal es 1), y su término independiente vale 1, resulta claro que $p = r = 1$, por lo que la ecuación puede reescribirse como:

$$b^6 + 3b^5 + 6b^4 + 7b^3 + 6b^2 + 3b + 1 = (b^2 + qb + 1)^3,$$

al sustituir los valores de p y r .

Desarrollando el cubo del segundo miembro y agrupando sus términos de manera conveniente, podemos escribir:

$$(b^2 + qb + 1)^3 = b^6 + 3qb^5 + (3q^2 + 3)b^4 + (q^3 + 6q)b^3 + (3q^2 + 3)b^2 + 3qb + 1.$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{aligned} b^6 + 3b^5 + 6b^4 + 7b^3 + 6b^2 + 3b + 1 &= \\ &= b^6 + 3qb^5 + (3q^2 + 3)b^4 + (q^3 + 6q)b^3 + (3q^2 + 3)b^2 + 3qb + 1. \end{aligned}$$

Identificando los coeficientes de ambos polinomios, llegamos al sistema:

$$\begin{cases} 3 = 3q \\ 6 = 3q^2 + 3 \\ 7 = q^3 + 6q \end{cases}$$

(en el que se han omitido las ecuaciones repetidas), cuya única solución es $q = 1$.

Así pues, hemos encontrado el número que estábamos buscando, puesto que la expresión $x = 111_b = b^2 + b + 1$ es tal que $n = x^3$. En otras palabras, n es un cubo perfecto.

Obsérvese que en la resolución del problema no se ha usado explícitamente la hipótesis de que b sea mayor que 7. En realidad, no es una restricción al problema, sino una condición necesaria para que tenga sentido considerar el número 1367631 en base b , ya que las cifras de un número siempre son menores que la base.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.2

Demuestra que los números 10101, 101010101, 1010101010101... son compuestos en cualquier sistema de numeración.

Sea $b \geq 2$ la base de un sistema de numeración cualquiera. Escribiendo los números dados en el enunciado en base 10, tenemos:

$$a_1 = 10101_b = b^4 + b^2 + 1$$

$$a_2 = 101010101_b = b^8 + b^6 + b^4 + b^2 + 1$$

$$a_3 = 1010101010101_b = b^{12} + b^{10} + b^8 + b^6 + b^4 + b^2 + 1$$

De la expresión de estos primeros términos, podemos inferir la del término general de la sucesión formada por los números dados:

$$a_n = \overbrace{1010 \cdots 10101_b}^{4n+1 \text{ cifras}} = b^{4n} + b^{4n-2} + \cdots + b^4 + b^2 + 1.$$

Obsérvese que estamos ante la suma de los primeros términos de la progresión geométrica de razón b^2 y primer término 1. Usando la conocida fórmula que permite realizar esta suma, tenemos:

$$a_n = b^{4n} + b^{4n-2} + \cdots + b^4 + b^2 + 1 = \frac{b^{4n+2} - 1}{b^2 - 1} = \frac{(b^{2n+1})^2 - 1}{b^2 - 1},$$

expresión que incluye dos diferencias de cuadrados. Factorizando mediante la utilización de las conocidas identidades, resulta:

$$a_n = \frac{(b^{2n+1} + 1)(b^{2n+1} - 1)}{(b + 1)(b - 1)}.$$

Como es claro, las raíces del polinomio del denominador son $b = -1$ y $b = 1$, las cuales también son raíces del numerador: $b = -1$ es raíz de $b^{2n+1} + 1$, puesto que el exponente es impar, y $b = 1$ es raíz de $b^{2n+1} - 1$. Ello se traduce en que la fracción algebraica es reducible.

Usando la regla de Ruffini, tenemos:

$$a_n = \frac{(b+1)(b^{2n} - b^{2n-1} + b^{2n-2} - \dots - b + 1)(b-1)(b^{2n} + b^{2n-1} + b^{2n-2} + \dots + b + 1)}{(b+1)(b-1)},$$

y, simplificando:

$$a_n = (b^{2n} - b^{2n-1} + b^{2n-2} - \dots - b + 1)(b^{2n} + b^{2n-1} + b^{2n-2} + \dots + b + 1).$$

De este modo, hemos escrito cualquiera de los números dados en el enunciado como el producto de dos números (distintos de 1, como es claro), lo que demuestra que todos son compuestos.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.3

Cristina da a África un número escrito en un sistema de numeración de base menor que 9, pero África cree que está escrito en base 10, por lo que comete un error. Si dicho error es igual a 15861, ¿Cuál es la base del sistema de numeración en que Cristina escribió el número?

Sea $b \geq 2$ la base del sistema de numeración empleado por Cristina. Supongamos que el número escrito tiene la forma $a = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$, donde los a_i son sus cifras. Con esta notación, el valor que Cristina asignó a a es:

$$n_C = (a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0)_b,$$

que se escribe en base 10 como:

$$n_C = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0,$$

mientras que África interpreta que se trata del número:

$$n_A = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

Según el enunciado, $b < 9$, lo que implica que $n_A > n_C$. Por tanto, el error cometido, que es igual a 15861, se calcula haciendo la resta $n_A - n_C$, de donde, descomponiendo en factores primos, se sigue $n_A - n_C = 15861 = 3 \cdot 17 \cdot 311$.

Sustituyendo las expresiones polinómicas anteriores en esta igualdad, se tiene:

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 - (a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0) = 3 \cdot 17 \cdot 311,$$

y, extrayendo factores comunes:

$$a_n (10^n - b^n) + a_{n-1} (10^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + a_1 (10 - b) = 3 \cdot 17 \cdot 311.$$

Se puede ver con claridad que $b = 10$ es una raíz del polinomio del primer miembro de esta ecuación, por lo que puede usarse la regla de Ruffini para factorizarlo, obteniéndose la ecuación:

$$(10 - b)P(b) = 3 \cdot 17 \cdot 311,$$

para cierto polinomio P , cuya expresión es irrelevante para los fines que perseguimos.

Ahora, como $2 \leq b < 9$, se deduce que $2 \leq 10 - b < 9$. Además, los dos miembros de la ecuación son números naturales, por lo que los factores primos presentes en el segundo miembro deben ser los mismos que tenga el primero.

Entonces, ha de ser $10 - b = 3$, ya que los otros factores primos son mayores que 9, de donde se llega a la conclusión de que $b = 7$ es la base en que Cristina escribió el número.

Obsérvese que no tiene sentido considerar el valor $b = 10$, pues, por el enunciado, se sabe que $b < 9$. Sin embargo, en el razonamiento anterior no se ha pretendido ni se ha supuesto $b = 10$. Nos hemos servido de esta igualdad con el único objetivo de poder factorizar el polinomio, lo cual constituye un razonamiento válido, ya que la factorización obtenida es válida para cualquier valor de b , lo que permite, a posteriori, sustituir b por cualquiera de los valores posibles.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.4

¿Cuál es la base de numeración en la que los números $0'12$, $0'5$ y $2'4$ se encuentran en progresión geométrica?

Sea $b \geq 2$ la base de numeración buscada. Puesto que los números dados en el enunciado, escritos en base b , están en progresión geométrica, debe cumplirse:

$$\frac{0'5_b}{0'12_b} = \frac{2'4_b}{0'5_b}.$$

Escribiendo los números en base 10, la igualdad se convierte en:

$$\frac{5b^{-1}}{b^{-1} + 2b^{-2}} = \frac{2b^0 + 4b^{-1}}{5b^{-1}}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador del primer miembro por b^2 , y el numerador y el denominador del segundo por b , obtenemos:

$$\frac{5b}{b+2} = \frac{2b+4}{5}.$$

Operando y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante, tenemos:

$$\frac{5b}{b+2} = \frac{2b+4}{5} \Leftrightarrow 25b = 2b^2 + 8b + 8 \Leftrightarrow 2b^2 - 17b + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} = 0'5 \\ b = 8 \end{cases}.$$

Puesto que b es la base de un sistema de numeración, no puede ser $b = 0'5$, luego la única solución al problema es $b = 8$.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.5

Un número natural n , cuadrado perfecto, se escribe en base 7 de la forma:

$$n_7 = ab0cb_7,$$

siendo $a = c + 1$. Determina el valor de n .

El número n , escrito en base 10, es:

$$n = ab0cb_7 = 7^4a + 7^3b + 7c + b.$$

Usando la igualdad $a = c + 1$ y operando, resulta:

$$n = 7^4a + 7^3b + 7c + b = 7^4(c+1) + 7^3b + 7c + b = 7^4c + 7^4 + 7^3b + 7c + b.$$

Trasponiendo y extrayendo factores comunes:

$$n - 7^4 = 7^4c + 7^3b + 7c + b = (7^3 + 1)b + 7c(7^3 + 1),$$

luego:

$$n - 7^4 = (7^3 + 1)(b + 7c) = 344(b + 7c) = 2^3 \cdot 43(b + 7c).$$

Como, según el enunciado, n es un cuadrado perfecto, existe un número natural, digamos x , tal que $x^2 = n$, de donde, sustituyendo, se sigue:

$$x^2 - 7^4 = 2^3 \cdot 43(b + 7c).$$

El primer miembro está constituido por una diferencia de cuadrados, que podemos factorizar usando la conocida identidad, resultando:

$$(x + 7^2)(x - 7^2) = 2^3 \cdot 43(b + 7c) \Leftrightarrow (x + 49)(x - 49) = 2^3 \cdot 43(b + 7c) \quad (I)$$

Puesto que los números involucrados son naturales, y el número primo 43 está en la factorización del segundo miembro, podemos afirmar que este número primo también debe estar en la factorización del primero, lo cual significa que o bien $x + 49$ es múltiplo de 43 o bien lo es el número $x - 49$. Tenemos, pues, dos casos, que tendremos que analizar por separado.

Sin embargo, puesto que los múltiplos de un número dado son infinitos, conviene, en primer lugar, acotar los posibles valores de x , para lo cual es útil tener en cuenta que, en cualquier sistema de numeración, un número de k cifras es menor que la unidad seguida de k ceros, y mayor o igual que la unidad seguida de $k - 1$ ceros.

En el caso que nos ocupa, como n tiene cinco cifras en base 7, podemos escribir:

$$10000_7 \leq n_7 < 100000_7 \Leftrightarrow 7^4 \leq n < 7^5 \Leftrightarrow 2401 \leq n < 16807.$$

Sustituyendo x^2 por n , y tomando raíz cuadrada, tenemos:

$$2401 \leq x^2 < 16807 \Leftrightarrow \sqrt{2401} \leq x < \sqrt{16807} \Leftrightarrow 49 \leq x < 129'64.$$

Al ser x un número natural, podemos concluir con:

$$49 \leq x \leq 129.$$

Ahora estamos en condiciones de abordar los dos casos antes mencionados.

Caso 1 ($x + 49$ es un múltiplo de 43)

Como $49 \leq x \leq 129$, sumando 49 en cada miembro, resulta $98 \leq x + 49 \leq 178$. Así pues, $x + 49$ es un múltiplo de 43 comprendido entre 98 y 178. Puesto que los múltiplos de 43 comprendidos entre 98 y 178 son 129 y 172, tenemos dos posibilidades:
 $x + 49 = 129$ o $x + 49 = 172$.

Si se cumple la primera, es decir, si $x + 49 = 129$, entonces, $x = 80$, y $x - 49 = 31$. Sustituyendo en la ecuación (I), resulta:

$$129 \cdot 31 = 2^3 \cdot 43(b + 7c) \Leftrightarrow 3 \cdot 31 = 2^3(b + 7c),$$

lo cual es absurdo, ya que el primer miembro es impar y el segundo es par. Así pues, esta posibilidad es insostenible.

Si se cumple la segunda, es decir, si $x + 49 = 172$, entonces, $x = 123$, y $x - 49 = 74$. Sustituyendo en la ecuación (I), se tiene:

$$172 \cdot 74 = 2^3 \cdot 43(b + 7c) \Leftrightarrow 37 = b + 7c.$$

Puesto que b y c son cifras de un número escrito en base 7, necesariamente tienen que ser menores que 7, lo cual arroja una única solución de la ecuación $37 = b + 7c$, en virtud del teorema de la división de Euclides, a saber, $b = 2$ y $c = 5$. Por otro lado, como $a = c + 1$, se sigue que $a = 6$. Por tanto, en este caso, obtenemos el número:

$$n = 62052_7 = 6 \cdot 7^4 + 2 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 2 = 15129,$$

que es una posible solución del problema. Además, como 15129 es un cuadrado perfecto ($15129 = 123^2$), podemos afirmar ya que este número es solución del problema.

Caso 2 ($x - 49$ es un múltiplo de 43)

Como $49 \leq x \leq 129$, restando 49 en cada miembro, resulta $0 \leq x - 49 \leq 80$. Así pues, $x - 49$ es un múltiplo de 43 comprendido entre 0 y 80. Puesto que los múltiplos de 43 comprendidos entre 0 y 80 son 0 y 43, tenemos dos posibilidades:

$x - 49 = 0$ o $x - 49 = 43$.

Si se cumple que $x - 49 = 0$, entonces, $x = 49$, y $x + 49 = 98$. Sustituyendo en la ecuación (I), resulta:

$$98 \cdot 0 = 2^3 \cdot 43(b + 7c) \Leftrightarrow 0 = b + 7c,$$

lo cual solo es cierto si $b = c = 0$. En tal caso, como $a = c + 1$, se sigue que $a = 1$, y obtenemos el número:

$$n = 10000_7 = 7^4 = 2401,$$

que es una solución válida del problema (obviamente, es un cuadrado perfecto).

Si, por el contrario, se cumple que $x - 49 = 43$, entonces, $x = 92$, y $x + 49 = 141$. Sustituyendo en la ecuación (I), se tiene:

$$141 \cdot 43 = 2^3 \cdot 43(b + 7c) \Leftrightarrow 141 = 2^3(b + 7c),$$

lo cual es imposible, ya que el primer miembro es impar y el segundo es par. Tenemos, pues, otra situación insostenible.

Recapitulando, podemos decir que el problema tiene dos soluciones: $n = 15129$ y $n = 2401$.

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1975)

Problema 1.6

Demuestra que los números 49, 4489, 444889, 44448889..., obtenidos colocando las cifras 4 y 8 en el centro del número anterior, son cuadrados perfectos.

Denotemos por $\{a_n\}_{n \geq 1}$ la sucesión formada por los números descritos en el enunciado. Con esta notación, podemos escribir:

$$a_1 = 49$$

$$a_2 = 4489$$

$$a_3 = 444889$$

$$a_4 = 44448889$$

Y, en general:

$$a_n = \underbrace{4444 \dots 4}_{n \text{ veces el } 4} \underbrace{888 \dots 8}_{n-1 \text{ veces el } 8} 9.$$

Sea $n \geq 1$ un número natural cualquiera. Como podemos ver, a_n es un número de $2n$ cifras, que podemos expresar en forma polinómica así:

$$a_n = \underbrace{4 \dots 4}_{n \text{ veces}} \underbrace{8 \dots 8}_{n-1 \text{ veces}} 9 \Leftrightarrow$$

$$a_n = \underbrace{4 \cdot 10^{2n-1} + 4 \cdot 10^{2n-2} + \dots + 4 \cdot 10^n}_{\text{PG1}} + \underbrace{8 \cdot 10^{n-1} + 8 \cdot 10^{n-2} + \dots + 8 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 9}_{\text{PG2}}.$$

Es evidente que la expresión señalada con PG1 es la suma de los primeros términos de la progresión geométrica de razón 10 y primer término $4 \cdot 10^n$, mientras que PG2 es la suma de los primeros términos de la progresión geométrica de primer término $8 \cdot 10$ y razón 10. Aplicando la conocida fórmula que permite sumar estos términos, resulta:

$$a_n = \underbrace{\frac{4 \cdot 10^{2n} - 4 \cdot 10^n}{10 - 1}}_{\text{PG1}} + \underbrace{\frac{8 \cdot 10^n - 8 \cdot 10}{10 - 1}}_{\text{PG2}} + 9,$$

y, operando:

$$a_n = \frac{4 \cdot 10^{2n} - 4 \cdot 10^n + 8 \cdot 10^n - 8 \cdot 10 + 81}{9} = \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9}.$$

Usando la conocida identidad, tenemos ya que a_n es un cuadrado perfecto, como queríamos demostrar, puesto que:

$$a_n = \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9} = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2.$$

Además, el numerador de la fracción entre paréntesis se escribe, en base 10, como:

$$2 \cdot 10^n + 1 = \underbrace{2000 \cdots 01}_{n-1 \text{ ceros}},$$

lo cual implica que es un múltiplo de 3, ya que la suma de sus cifras es igual a 3. Por tanto, tiene sentido el cociente indicado, al ser el resultado un número natural, como era exigible.

(Oposiciones de Secundaria, 2004, y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 1.7

Encuentra un número de tres cifras que en los sistemas de numeración de base 5 y de base 7 se escriba con las mismas cifras, pero en orden inverso.

Sea n el número buscado, y sean a , b y c sus cifras.

La condición dada en el enunciado se traduce en la igualdad $abc_5 = cba_7$, que al expresarla en base 10 se convierte en:

$$a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = c \cdot 7^2 + b \cdot 7 + a.$$

Trasponiendo términos y operando, resulta:

$$2b = 24a - 48c \Leftrightarrow b = 12a - 24c \Leftrightarrow b = 12(a - 2c),$$

de donde se sigue que b es múltiplo de 12, ya que b se escribe como el producto de 12 y otro número.

Ahora bien, como b es una cifra de un número escrito en base 5, necesariamente ha de cumplirse que $0 \leq b \leq 4$, por lo que estamos buscando un múltiplo de 12 comprendido entre 0 y 4. Evidentemente, ello solo es posible si $b = 0$. Sustituyendo el valor encontrado de b en la última ecuación, resulta:

$$12(a - 2c) = 0,$$

de donde $a = 2c$.

Entonces, en particular, a es par, ya que es igual al doble de otro número. Pero, además, a es la primera cifra de un número escrito en base 5, luego tiene que satisfacer las condiciones $1 \leq a \leq 4$. Por tanto, solo hay dos posibilidades: $a = 2$ o $a = 4$.

Si $a = 2$, entonces, $c = 1$, y, sustituyendo, se sigue:

$$n = 201_{(5)} = 102_{(7)} = 51.$$

Si $a = 4$, tenemos $c = 2$, y, entonces:

$$n = 402_{(5)} = 204_{(7)} = 102.$$

Para concluir el problema, hay que hacer notar que existen dos interpretaciones del enunciado. Si se interpreta que el número buscado tiene tres cifras también en el sistema de numeración decimal, entonces, solo es admisible la solución $n = 102$; si, por el contrario, se interpreta que el número tiene tres cifras en los sistemas de base 5 y 7, con independencia del número de cifras en base 10, entonces, también podría aceptarse la solución $n = 51$.

(Oposiciones de Secundaria, 1996)

Problema 1.8

Se dispone de una balanza y de pesas de 1, 3, 9, 27, 81... kg. ¿Qué pesas deben emplearse para pesar 10 toneladas, usando como máximo una de cada tipo? (Obsérvese que es posible colocar pesas en los dos platillos).

El problema consiste en escribir el número 10000 como suma de potencias de 3, de manera que no haya dos potencias con el mismo exponente, lo cual es equivalente a escribir 10000 en base 3, de forma que las cifras no sean superiores a 1. Tengamos en cuenta que podemos conseguir esto último dividiendo «por exceso», lo que proporciona un resto negativo, que, al trasponerlo al primer miembro de la expresión polinómica correspondiente, podemos interpretar como una pesa en el primer platillo de la balanza, como indica la observación del enunciado. Dividiendo reiteradamente 10000 entre 3, haciéndolo «por exceso» cuando sea necesario (esto es, cuando el resto sea mayor que 1), tenemos:

$$\begin{array}{r}
 10000 \quad | \overline{3} \quad \underline{} \\
 \boxed{1} \quad 3333 \quad | \overline{3} \quad \underline{} \\
 \quad \boxed{0} \quad 1111 \quad | \overline{3} \quad \underline{} \\
 \quad \quad \boxed{1} \quad 370 \quad | \overline{3} \quad \underline{} \\
 \quad \quad \quad \boxed{1} \quad 123 \quad | \overline{3} \quad \underline{} \\
 \quad \quad \quad \quad \boxed{0} \quad 41 \quad | \overline{3} \quad \underline{} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \boxed{-1} \quad 14 \quad | \overline{3} \quad \underline{} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \boxed{-1} \quad 5 \quad | \overline{3} \quad \underline{} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \boxed{-1} \quad 2 \quad | \overline{3} \quad \underline{} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \boxed{-1} \quad 1
 \end{array}$$

(Los números que aparecen en recuadros se corresponden con los restos de las sucesivas divisiones)

De este modo, podemos escribir:

$$10000 = 1 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^4 - 1 \cdot 3^5 - 1 \cdot 3^6 - 1 \cdot 3^7 - 1 \cdot 3^8 + 1 \cdot 3^9,$$

y, trasponiendo términos:

$$10000 + 1 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^7 + 1 \cdot 3^8 = 1 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^9,$$

lo que se traduce en que, para pesar 10 toneladas con las pesas indicadas usando como máximo una de cada tipo, es necesario colocar en un platillo las 10 toneladas, junto con una pesa de 3^5 kg, una de 3^6 kg, una de 3^7 kg y una de 3^8 kg, mientras que en el otro platillo habrá de ponerse una de 1 kg, una de 3^2 kg, una de 3^3 kg y una de 3^9 kg.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.9

Demuestra que todos los términos de la sucesión $a_n = 2^{4n} - 1$ son múltiplos de 15.

Lo resolveremos de tres maneras distintas.

Primera manera (por inducción)

En primer lugar, para $n = 1$, la igualdad es cierta, puesto que:

$$a_1 = 2^{4 \cdot 1} - 1 = 16 - 1 = 15,$$

que obviamente es un múltiplo de 15.

Ahora, supongamos que la hipótesis se cumple para cualquier natural $n \geq 1$, y veamos que, en tal caso, también debe cumplirse para el número $n + 1$, sucesor de n :

$$a_{n+1} = 2^{4(n+1)} - 1 = 2^{4n+4} - 1 = 2^{4n} \cdot 2^4 - 1 = 16 \cdot 2^{4n} - 1 = (15 + 1) \cdot 2^{4n} - 1 = 15 \cdot 2^{4n} + 2^{4n} - 1.$$

Teniendo en cuenta que $a_n = 2^{4n} - 1$, podemos escribir:

$$a_{n+1} = 15 \cdot 2^{4n} + a_n,$$

expresión en la que los dos sumandos del segundo miembro son múltiplos de 15: el primero, porque muestra explícitamente el producto de este número por otro; el segundo, por la hipótesis de inducción. En consecuencia, la suma de ambos números también es un múltiplo de 15, por lo que tenemos ya probado lo que se quería, por inducción, para cualquier valor de n .

Segunda manera (usando congruencias)

Para que $a_n = 2^{4n} - 1$ sea múltiplo de 15 es necesario y suficiente que:

$$2^{4n} - 1 \equiv 0 \pmod{15}.$$

Veamos que esto último es cierto:

En primer lugar:

$$2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{15},$$

y, elevando ambos miembros de la congruencia a n , se tiene

$$(2^4)^n \equiv 1^n \pmod{15},$$

de donde, operando, se sigue:

$$2^{4n} \equiv 1 \pmod{15}.$$

Por último, trasponiendo el 1, se llega a la congruencia que queríamos:

$$2^{4n} - 1 \equiv 0 \pmod{15}.$$

Tercera manera (por factorización)

Para cualquier número natural n , podemos escribir:

$$a_n = 2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1.$$

Haciendo el cambio $x = 2^4$, la anterior igualdad se convierte en $a_n = x^n - 1$, que es un polinomio de grado n en la indeterminada x . Es evidente que $x = 1$ es una raíz de este polinomio, por lo que podemos usar la regla de Ruffini para factorizarlo, resultando:

$$a_n = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1).$$

Deshaciendo el cambio, tenemos:

$$a_n = (2^4 - 1) \left[(2^4)^{n-1} + (2^4)^{n-2} + (2^4)^{n-3} + \cdots + 2^4 + 1 \right],$$

y, operando:

$$a_n = 15 \cdot \left[(2^4)^{n-1} + (2^4)^{n-2} + (2^4)^{n-3} + \cdots + 2^4 + 1 \right].$$

De este modo, hemos escrito a_n como el producto de 15 y otro número. En consecuencia, a_n es múltiplo de 15, como se quería probar.

Obsérvese que, al hacer el cambio $x = 2^4$, no tiene sentido plantearse $x = 1$. Sin embargo, en el razonamiento anterior no se ha pretendido que $x = 1$. Esta igualdad únicamente se ha usado para poder factorizar el polinomio, lo cual constituye un razonamiento válido. Puesto que al factorizar el polinomio hemos llegado a:

$$a_n = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1),$$

para cualquier valor de x , en particular, esta igualdad debe ser cierta para $x = 2^4$, lo que permite deshacer el cambio.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.10

Demuestra que $3^{3n+3} - 26n - 27$ es un múltiplo de 169, para todo n natural.

Lo haremos por inducción.

Para $n = 1$, resulta $3^{3 \cdot 1 + 3} - 26 \cdot 1 - 27 = 676$, que es múltiplo de 169.

Supongamos que la hipótesis es cierta para un número natural cualquiera, n , y veamos que entonces también debe serlo para el número $n + 1$:

$$3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27 = 3^{3n+3+3} - 26n - 26 - 27 = 27 \cdot 3^{3n+3} - 26n - 26 - 27.$$

Para poder aplicar la hipótesis de inducción, necesitamos introducir la expresión $3^{3n+3} - 26n - 27$, lo cual es posible, colocándola entre paréntesis, tras el número 27, y «compensando» los términos que se crean:

$$27 \cdot 3^{3n+3} - 26n - 26 - 27 = 27(3^{3n+3} - 26n - 27) + 27 \cdot 26n + 27 \cdot 27 - 26n - 26 - 27.$$

Extrayendo factores comunes y operando, la expresión anterior se escribe:

$$27(3^{3n+3} - 26n - 27) + 26n(27 - 1) + 27(27 - 1) - 26 =$$

$$27(3^{3n+3} - 26n - 27) + 26^2 n + 27 \cdot 26 - 26 = 27(3^{3n+3} - 26n - 27) + 26^2 n + 26(27 - 1) =$$

$$= 27(3^{3n+3} - 26n - 27) + 26^2(n + 1).$$

Ahora, basta observar que los dos términos resultantes son múltiplos de 169: el primero, por la hipótesis de inducción; el segundo, por incluir el factor 26^2 , que evidentemente es múltiplo de 169. Así pues, tenemos ya probado que la hipótesis es cierta para $n + 1$, y, en consecuencia, para cualquier número natural n .

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1978)

Problema 1.11

Demuestra que todos los términos de la sucesión $a_n = 3^{2n+3} + 40n - 27$ son múltiplos de 64.

Lo haremos por inducción, de manera similar al problema anterior. Para $n = 1$, tenemos $a_1 = 3^{2 \cdot 1 + 3} + 40 \cdot 1 - 27 = 256$, que, obviamente, es múltiplo de 64.

Supongamos que, para un número natural cualquiera n , a_n es múltiplo de 64, y veamos que ello implica que también debe serlo a_{n+1} :

$$a_{n+1} = 3^{2(n+1)+3} + 40(n+1) - 27 = 3^{2n+2+3} + 40n + 40 - 27 = 9 \cdot 3^{2n+3} + 40n + 40 - 27 \quad (\text{I})$$

Para estar en condiciones de aplicar la hipótesis de inducción, es preciso incorporar la expresión a_n , lo cual podemos conseguir trasponiendo términos en su definición, dada en el enunciado, para despejar el término 3^{2n+3} . De este modo, tenemos:

$$3^{2n+3} = a_n - 40n + 27,$$

y, sustituyendo en (I), resulta:

$$a_{n+1} = 9 \cdot 3^{2n+3} + 40n + 40 - 27 = 9(a_n - 40n + 27) + 40n + 40 - 27$$

(obsérvese que este proceso es, en esencia, el mismo empleado en el problema anterior, cuando introdujimos ciertos términos y los «compensamos»).

Quitando paréntesis y agrupando términos semejantes, tenemos:

$$a_{n+1} = 9a_n - 360n + 243 + 40n + 40 - 27 = 9a_n - 320n + 256.$$

Como podemos ver, los tres términos resultantes son múltiplos de 64: el primero, por la hipótesis de inducción; el segundo, por incorporar el factor 320, que es un múltiplo de 64; el tercero ya lo hemos visto antes. Por tanto, la suma de los tres términos, esto es, a_{n+1} , es también un múltiplo de 64, que es lo que pretendíamos demostrar.

Con lo visto, por inducción, podemos afirmar que a_n es un múltiplo de 64, para cualquier valor de n , lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.12

Demuestra que $(7^n - 1)(6^n - 1)$ es múltiplo de 30, para cualquier valor natural de n .

Lo demostraremos mediante el uso de congruencias.

Sea n un número natural cualquiera. Entonces, a partir de la congruencia (evidente) $7 \equiv 1 \pmod{6}$, elevando a n ambos miembros y trasponiendo, resulta:

$$7^n \equiv 1^n \pmod{6} \Leftrightarrow 7^n - 1 \equiv 0 \pmod{6},$$

lo que equivale a afirmar que $7^n - 1$ es múltiplo de 6.

De forma análoga, de la congruencia $6 \equiv 1 \pmod{5}$, se sigue:

$$6^n \equiv 1^n \pmod{5} \Leftrightarrow 6^n - 1 \equiv 0 \pmod{5},$$

por lo que tenemos que $6^n - 1$ es múltiplo de 5.

Multiplicando ambos factores, podemos decir que el producto $(7^n - 1)(6^n - 1)$ es múltiplo de $6 \cdot 5$, esto es, de 30, que es precisamente lo que queríamos demostrar.

(Problema original)

Problema 1.13

Demuestra que $A = (27^4)^9 - (25^3)^6$ es divisible por 37.

En primer lugar, es claro que $A = 27^{36} - 5^{36}$.

Ahora, puesto que tanto 27 y 37 como 5 y 37 están en las hipótesis del Pequeño Teorema de Fermat, podemos establecer las congruencias:

$$27^{36} \equiv 1 \pmod{37} \text{ y } 5^{36} \equiv 1 \pmod{37}.$$

Restando miembro a miembro, resulta:

$$A = 27^{36} - 5^{36} \equiv 1 - 1 \pmod{37} \equiv 0 \pmod{37},$$

lo cual es equivalente a decir que A es múltiplo de 37, como queríamos demostrar.

(Oposiciones de Secundaria, 2006)

Problema 1.14

Demuestra que $11^n - 4^n$ es múltiplo de 7, para cualquier valor natural de n .

Lo haremos de dos maneras diferentes.

Primera manera (por inducción)

En primer lugar, para $n = 1$, se tiene $11^1 - 4^1 = 11 - 4 = 7$, que obviamente es múltiplo de 7.

Supongamos ahora que, para $n \geq 1$, se cumple que $11^n - 4^n$ es múltiplo de 7, y veamos que, en tal situación, también ha de serlo $11^{n+1} - 4^{n+1}$. En efecto, operando, podemos escribir:

$$11^{n+1} - 4^{n+1} = 11 \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n = (7 + 4) \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n = 7 \cdot 11^n + 4 \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n \Leftrightarrow$$

$$11^{n+1} - 4^{n+1} = 7 \cdot 11^n + 4 \cdot (11^n - 4^n),$$

que es múltiplo de 7, puesto que los dos términos que aparecen lo son: el primero, por tener explícitamente el factor 7; el segundo, por la hipótesis de inducción.

De este modo, por inducción, tenemos demostrado que $11^n - 4^n$ es múltiplo de 7, para cualquier valor natural de n , como se pretendía.

Segunda manera (usando congruencias)

Sea n un número natural cualquiera. A partir de la congruencia (obvia):

$$11 \equiv 4 \pmod{7},$$

es claro que, elevando a n ambos miembros y trasponiendo términos, resulta:

$$11^n \equiv 4^n \pmod{7} \Leftrightarrow 11^n - 4^n \equiv 0 \pmod{7},$$

lo cual es equivalente a decir que $11^n - 4^n$ es múltiplo de 7, como queríamos demostrar.

(Oposiciones de Secundaria)

Problema 1.15

Demuestra que el número $n^4 - 4n^2$ es múltiplo de 3, para todo natural n .

Lo resolveremos de tres maneras distintas.

Primera manera (factorizando)

Extrayendo factor común y empleando la conocida identidad:

$$n^4 - 4n^2 = n^2(n^2 - 4) = (n - 2)n^2(n + 2).$$

Ahora bien, si n es par, entonces, $n - 2$, n y $n + 2$ son tres números pares consecutivos, mientras que si n es impar, son tres impares consecutivos. Así pues, en cualquier caso, uno de los tres debe ser múltiplo de 3, por lo que el producto $(n - 2) \cdot n^2 \cdot (n + 2)$ es múltiplo de 3, como se pretendía demostrar.

Segunda manera (usando congruencias)

Sea n un número natural cualquiera. Si n es múltiplo de 3, entonces, n^4 y n^2 también lo son, de donde se sigue claramente que $n^4 - 4n^2$ es múltiplo de 3. Si, por el contrario, n no es múltiplo de 3, entonces, n y 3 están en las hipótesis del Pequeño Teorema de Fermat, por lo que podemos afirmar que:

$$n^2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la congruencia, por un lado, y multiplicando los dos miembros por 4, por otro, resultan las congruencias:

$$n^4 \equiv 1 \pmod{3} \text{ y } 4n^2 \equiv 4 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}.$$

Restándolas miembro a miembro, llegamos a:

$$n^4 - 4n^2 \equiv 1 - 1 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3},$$

lo que significa que $n^4 - 4n^2$ es múltiplo de 3, como queríamos demostrar.

Tercera manera (por inducción)

En primer lugar, el caso $n = 1$ es trivial, pues $1^4 - 4 \cdot 1^2 = -3$ es múltiplo de 3.

Supongamos que $n^4 - 4n^2$ es múltiplo de 3, para cualquier natural $n \geq 1$, y veamos que, entonces, $(n + 1)^4 - 4(n + 1)^2$ también lo es.

Desarrollando las potencias, tenemos:

$$(n + 1)^4 - 4(n + 1)^2 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 8n - 4,$$

y, reordenando términos y agrupando convenientemente, llegamos a:

$$(n+1)^4 - 4(n+1)^2 = \underline{n^4 - 4n^2} + 6n^2 - 3 + 4n^3 - 4n.$$

Ahora bien, la expresión subrayada del segundo miembro es múltiplo de 3, por la hipótesis de inducción, y los dos términos siguientes también, como es claro. Por tanto, tenemos:

$$(n+1)^4 - 4(n+1)^2 = \overset{\cdot}{3} + 4n^3 - 4n$$

(el punto sobre el 3 simboliza un múltiplo de 3).

Extrayendo factores comunes y usando la conocida identidad algebraica, resulta:

$$(n+1)^4 - 4(n+1)^2 = \overset{\cdot}{3} + 4n(n+1)(n-1).$$

Finalmente, solo falta observar que $n-1$, n , y $n+1$ son tres números consecutivos, por lo que uno de ellos tiene que ser necesariamente múltiplo de 3. En consecuencia, el producto $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ es múltiplo de 3, de donde se sigue que $(n+1)^4 - 4(n+1)^2$ también lo es, al ser la suma de dos múltiplos de 3, como queríamos probar.

Así pues, por inducción, podemos decir que $n^4 - 4n^2$ es múltiplo de 3, para todo natural n , como se pide en el enunciado.

(Examen de Universidad)

Problema 1.16

Demuestra que el número $a_{n,m} = 3^m + 3^n + 2(3^m \cdot m^2 + 3^n \cdot n^2 - 1)$ es divisible por 4, para cualesquiera naturales m y n .

Lo resolveremos usando congruencias.

Para ello, en primer lugar, veremos el resultado de la congruencia 3^p módulo 4, para los distintos valores de p .

Para $p = 0$, trivialmente se tiene que $3^0 = 1 \equiv 1 \pmod{4}$.

Para $p = 1$, resulta $3^1 = 3 \equiv 3 \pmod{4}$.

Para $p = 2$, obtenemos $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$.

Así pues, el «gaussiano», es decir, el menor número natural no nulo, digamos g , tal que $3^g \equiv 1 \pmod{4}$, es $g = 2$.

Ello se traduce en que los valores de la congruencia 3^p módulo 4 se repiten de manera cíclica a partir de $p = 2$. Por tanto, tenemos que $3^p \equiv 1 \pmod{4}$, si p es par; y que $3^p \equiv 3 \pmod{4}$, si p es impar.

Sin embargo, para lo que viene a continuación, es más útil considerar esta última congruencia escrita de una manera equivalente: $3^p \equiv -1 \pmod{4}$, si p es impar.

Ahora, ya podemos pasar a estudiar la congruencia $a_{n,m}$ módulo 4, para los distintos valores de m y n , y ver que $a_{n,m} \equiv 0 \pmod{4}$, lo que equivale a decir que $a_{n,m}$ es múltiplo de 4.

Si m y n son ambos pares, entonces, según lo visto anteriormente:

$$a_{n,m} = 3^m + 3^n + 2(3^m \cdot m^2 + 3^n \cdot n^2 - 1) \equiv 1 + 1 + 2(1 \cdot m^2 + 1 \cdot n^2 - 1) \pmod{4}.$$

Operando:

$$a_{n,m} \equiv 1 + 1 + 2(m^2 + n^2) - 2 \pmod{4} \equiv 2(m^2 + n^2) \pmod{4}.$$

Ahora bien, puesto que estamos suponiendo que m y n son pares, m^2 y n^2 también deben serlo, y, en consecuencia, $m^2 + n^2$ tiene que ser par. Por tanto:

$$a_{n,m} \equiv 2(m^2 + n^2) \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4},$$

ya que el producto de dos números pares es un múltiplo de 4. Así pues, ya tenemos demostrado lo que queríamos en este caso.

Si tanto m como n son impares, entonces, también por lo visto antes:

$$a_{n,m} = 3^m + 3^n + 2(3^m \cdot m^2 + 3^n \cdot n^2 - 1) \equiv -1 - 1 + 2(-1 \cdot m^2 - 1 \cdot n^2 - 1) \pmod{4},$$

y, operando, llegamos a:

$$a_{n,m} \equiv -1 - 1 - 2(m^2 + n^2) - 2 \pmod{4} \equiv -4 - 2(m^2 + n^2) \pmod{4} \equiv -2(m^2 + n^2) \pmod{4},$$

ya que $-4 \equiv 0 \pmod{4}$, como es evidente. Ahora, en este caso, m y n son impares, luego m^2 y n^2 también lo son, y, entonces, $m^2 + n^2$ es par (la suma de dos impares es par). En consecuencia:

$$a_{n,m} \equiv -2(m^2 + n^2) \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4},$$

por la misma razón que en el caso anterior, y ya hemos obtenido el resultado buscado.

Si m es par y n es impar, entonces, por las congruencias antes vistas:

$$a_{n,m} = 3^m + 3^n + 2(3^m \cdot m^2 + 3^n \cdot n^2 - 1) \equiv 1 - 1 + 2(1 \cdot m^2 - 1 \cdot n^2 - 1) \pmod{4},$$

y, operando:

$$a_{n,m} \equiv 2(m^2 - n^2 - 1) \pmod{4} \equiv 2[m^2 - (n^2 + 1)] \pmod{4}.$$

Al ser m par, m^2 es par; al ser n impar, n^2 es impar y, en consecuencia, $n^2 + 1$ es par. Así pues, $m^2 - (n^2 + 1)$ es par, por ser la diferencia de dos pares. Por tanto:

$$a_{n,m} \equiv 2[m^2 - (n^2 + 1)] \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4},$$

también por la razón indicada en el primer caso, concluyendo el estudio de este caso.

Por último, quedaría ver el caso en que m sea impar y n par. Sin embargo, como $a_{n,m} = a_{m,n}$, es decir, m y n tienen papeles «simétricos» en la expresión de $a_{n,m}$, no es necesario estudiar este caso, ya que es idéntico al anterior.

Así pues, recapitulando, hemos demostrado que $a_{n,m} \equiv 0 \pmod{4}$, para cualesquiera valores de m y n , lo que equivale a decir que $a_{n,m}$ es múltiplo de 4, independientemente de los valores de m y n , lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.17

Demuestra que todos los términos de la sucesión $\{a_n\}_{n>2}$ son múltiplos de 600, siendo, para cualquier $n > 2$:

$$a_n = (n^2 - 1)(n^2 + 1)(n^4 - 16)n^2.$$

Sea $n > 2$. Puesto que $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, para ver que a_n es múltiplo de 600, basta con ver que lo es de 2^3 , de 3, y de 5^2 , ya que 2, 3 y 5 son números primos distintos (y, por tanto, coprimos dos a dos).

Veamos que a_n es múltiplo de 2^3

Entre los factores que definen a_n hay dos diferencias de cuadrados. Aplicando la correspondiente fórmula, podemos escribir:

$$a_n = (n+1)(n-1)(n^2+1)(n^2+4)(n^2-4)n^2,$$

expresión en la que también hay una diferencia de cuadrados. Factorizando esta diferencia de cuadrados, tenemos:

$$a_n = (n+1)(n-1)(n^2+1)(n^2+4)(n+2)(n-2)n^2.$$

Ahora, caben dos posibilidades: que n sea par, o que n sea impar.

Si n es par, entonces, los números $n^2 + 4$, $n + 2$ y $n - 2$ también son pares, luego el producto $(n^2 + 4)(n + 2)(n - 2)$ es múltiplo de 2^3 , y, en consecuencia, la expresión:

$$a_n = (n+1)(n-1)(n^2+1)(n^2+4)(n+2)(n-2)n^2,$$

que incluye esos tres factores, también lo es.

Si n es impar, entonces, los números $n + 1$, $n - 1$ y $n^2 + 1$ son pares. Por tanto, el producto $(n + 1)(n - 1)(n^2 + 1)$ es múltiplo de 2^3 , y, como antes, llegamos a la conclusión de que:

$$a_n = (n + 1)(n - 1)(n^2 + 1)(n^2 + 4)(n + 2)(n - 2)n^2$$

es múltiplo de 2^3 . Tenemos, pues, que, en cualquier caso, a_n es múltiplo de 2^3 , como queríamos demostrar.

Veamos que a_n es múltiplo de 3

Considerando la expresión de a_n dada en el enunciado:

$$a_n = (n^2 - 1)(n^2 + 1)(n^4 - 16)n^2,$$

podemos observar que tres de los cuatro factores son números consecutivos, a saber, $n^2 - 1$, n^2 y $n^2 + 1$, por lo que necesariamente tiene que haber uno que sea múltiplo de 3, de donde podemos afirmar que el producto de los tres es, forzosamente, múltiplo de 3. Así pues, como el producto $(n^2 - 1)(n^2 + 1)n^2$ es múltiplo de 3, al añadir el cuarto factor, también obtenemos un múltiplo de 3. En otras palabras, hemos probado que a_n es múltiplo de 3, como pretendíamos.

Veamos que a_n es múltiplo de 5^2

En primer lugar, si n es múltiplo de 5, es claro que n^2 es múltiplo de 5^2 , luego a_n también lo es, pues la expresión de a_n incorpora el factor n^2 .

Supongamos, pues, que n no es múltiplo de 5. En esta situación, puesto que 5 es primo y n es coprimo con 5, estamos en las hipótesis del Pequeño Teorema de Fermat. Aplicando este teorema, podemos afirmar que $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$ y, trasponiendo el uno, $n^4 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$, lo que equivale a decir que $n^4 - 1$ es múltiplo de 5. Puesto que 15 también es múltiplo de 5, restando 15 a $n^4 - 1$, tenemos que $n^4 - 1 - 15 = n^4 - 16$ también es múltiplo de 5.

Ya solo nos queda reescribir la expresión de a_n , teniendo en cuenta que en ella hay una suma por una diferencia:

$$a_n = (n^2 - 1)(n^2 + 1)(n^4 - 16)n^2 = (n^4 - 1)(n^4 - 16)n^2.$$

En esta nueva expresión de a_n hay dos múltiplos de 5, $n^4 - 1$ y $n^4 - 16$, como hemos visto, luego el producto de ambos es múltiplo de 5^2 , de donde se deduce que a_n también lo es.

Recapitulando, hemos demostrado que el número a_n es múltiplo de 2^3 , de 3 y de 5^2 , para cualquier $n > 2$. En consecuencia, podemos afirmar que a_n es múltiplo de 600, para $n > 2$, como se pedía demostrar.

Problema 1.18

Determina los valores del natural n para los que los números de la forma $2^n - 1$ son múltiplos de 7. Demuestra que no hay ningún número de la forma $2^n + 1$ (n natural) que sea múltiplo de 7.

Lo resolveremos calculando los resultados de 2^n módulo 7, para los sucesivos valores de n , a partir de $n = 0$, hasta que encontremos el «gaussiano», es decir, hasta que hallemos el menor número natural no nulo, digamos g , tal que $2^g \equiv 1 \pmod{7}$. A partir de ahí, los resultados obtenidos al ir incrementando el valor del exponente, de uno en uno, se repetirán de manera cíclica.

Para $n = 0$, es trivial que $2^0 = 1 \equiv 1 \pmod{7}$.

Para $n = 1$, tenemos $2^1 = 2 \equiv 2 \pmod{7}$.

Para $n = 2$, resulta $2^2 = 4 \equiv 4 \pmod{7}$.

Para $n = 3$, ya tenemos $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$.

Así pues, el gaussiano es $g = 3$, y, con los resultados obtenidos, podemos establecer las siguientes congruencias:

$$2^{3p} \equiv 1 \pmod{7}, \quad 2^{3p+1} \equiv 2 \pmod{7} \quad \text{y} \quad 2^{3p+2} \equiv 4 \pmod{7}, \quad \forall p \geq 0.$$

Para la primera parte del problema, restando 1 en ambos miembros de cada congruencia, se sigue:

$$2^{3p} - 1 \equiv 0 \pmod{7}, \quad 2^{3p+1} - 1 \equiv 1 \pmod{7} \quad \text{y} \quad 2^{3p+2} - 1 \equiv 3 \pmod{7}, \quad \forall p \geq 0.$$

Puesto que solo se obtiene cero para los exponentes de la forma $3p$, podemos concluir con que $2^n - 1$ es múltiplo de 7 si, y solo si, n es múltiplo de 3.

Para la segunda parte, sumando 1 en ambos miembros de las mismas congruencias, tenemos:

$$2^{3p} + 1 \equiv 2 \pmod{7}, \quad 2^{3p+1} + 1 \equiv 3 \pmod{7} \quad \text{y} \quad 2^{3p+2} + 1 \equiv 5 \pmod{7}, \quad \forall p \geq 0.$$

Como en ningún caso se obtiene un resultado nulo, es claro que $2^n + 1$ no es múltiplo de 7, sea cual sea el valor natural de n , como se quería demostrar.

(Oposiciones de Secundaria, 1993, y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 1.19

Determina el resto de la división euclídea de 7^n entre 9, según los diferentes valores del natural n . Como aplicación, calcula el resto de la división euclídea de 41731^{1259} entre 9, y encuentra los valores de n para los que $43^{3n+1} + 25^n + 4$ es múltiplo de 9.

Veamos la primera parte:

Como es evidente, para cada natural n , el resto de la división euclídea de 7^n entre 9 coincide con el resultado de la congruencia 7^n módulo 9. Así pues, para resolver este apartado, calcularemos el resultado de esta congruencia, para los distintos valores de n , hasta que encontremos el «gaussiano», ya que, a partir de él, los valores de la congruencia se repetirán cíclicamente.

Para $n = 0$, es claro que $7^0 = 1 \equiv 1 \pmod{9}$.

Para $n = 1$, se tiene $7^1 = 7 \equiv 7 \pmod{9}$.

Para $n = 2$, resulta $7^2 = 49 \equiv 4 \pmod{9}$.

Para $n = 3$, ya tenemos que $7^3 = 7 \cdot 7^2 \equiv 7 \cdot 4 \pmod{9} \equiv 28 \pmod{9} \equiv 1 \pmod{9}$.

Por tanto, el «gaussiano» es $g = 3$, y, en consecuencia, podemos decir que, para todo número natural k , tenemos:

$$7^{3k} \equiv 1 \pmod{9}, \quad 7^{3k+1} \equiv 7 \pmod{9} \quad \text{y} \quad 7^{3k+2} \equiv 4 \pmod{9},$$

lo que se traduce en que el resto de la división euclídea de 7^n entre 9 es: 1 si n es múltiplo de 3; 7 si n es de la forma $n = 3k + 1$, con k natural; y 4 si existe un número natural k tal que $n = 3k + 2$, que es la respuesta a la primera parte del problema.

La primera de las aplicaciones consiste en hallar el resultado de la congruencia 41731^{1259} módulo 9, para lo cual usaremos los resultados obtenidos anteriormente.

Dividiendo 41731 entre 9, resulta $41731 = 9 \cdot 4636 + 7$, de donde se desprende la congruencia:

$$41731 \equiv 7 \pmod{9},$$

y, elevando:

$$41731^{1259} \equiv 7^{1259} \pmod{9}.$$

Por otra parte, de la división de 1259 entre 3, podemos escribir $1259 = 3 \cdot 419 + 2$, lo que implica:

$$7^{1259} = 7^{3 \cdot 419 + 2} \equiv 4 \pmod{9},$$

pues estamos en el último caso de los considerados antes. Por tanto, tenemos:

$$41731^{1259} \equiv 7^{1259} \pmod{9} \equiv 4 \pmod{9},$$

lo que significa que el resto de la división euclídea de 41731^{1259} entre 9 es igual a 4.

Para la última parte del problema, como $43 \equiv 7 \pmod{9}$, tenemos:

$$43^{3n+1} \equiv 7^{3n+1} \pmod{9} \equiv 7 \pmod{9},$$

por darse la segunda situación de las vistas al principio.

Por otro lado, también $25 \equiv 7 \pmod{9}$, luego:

$$25^n \equiv 7^n \pmod{9},$$

cuyo valor depende de n , como ya sabemos. Así pues, sumando miembro a miembro y operando, podemos escribir:

$$43^{3n+1} + 25^n + 4 \equiv 7 + 7^n + 4 \pmod{9} \equiv 7^n + 11 \pmod{9} \equiv 7^n + 2 \pmod{9},$$

lo que significa que $43^{3n+1} + 25^n + 4$ es múltiplo de 9 si, y solo si, $7^n + 2 \equiv 0 \pmod{9}$, situación que se da solo si $7^n \equiv 7 \pmod{9}$, esto es, si n es de la forma $n = 3k + 1$, para algún número natural k .

(Examen de Universidad)

Problema 1.20

Determina las tres últimas cifras del número 7^{9999} .

Las tres últimas cifras de un número coinciden con el resto de dividirlo por 1000, por lo que para resolver el problema basta con determinar el valor de la congruencia 7^{9999} módulo 1000. Ahora bien, como el exponente es bastante alto, procederemos a calcular las sucesivas potencias de 7 módulo 1000 (con mucha paciencia), hasta encontrar el gaussiano, puesto que a partir de ahí los valores se repetirán de modo cíclico.

Si $n = 0$, obviamente tenemos $7^0 = 1 \equiv 1 \pmod{1000}$.

Si $n = 1$, resulta $7^1 = 7 \equiv 7 \pmod{1000}$.

Si $n = 2$, entonces, $7^2 = 49 \equiv 49 \pmod{1000}$.

Si $n = 3$, $7^3 = 343 \equiv 343 \pmod{1000}$.

Si $n = 4$, $7^4 = 2401 \equiv 401 \pmod{1000}$.

Si $n = 5$, $7^5 = 7 \cdot 7^4 \equiv 7 \cdot 401 \pmod{1000} \equiv 2807 \pmod{1000} \equiv 807 \pmod{1000}$.

Si $n = 6$, $7^6 = 7 \cdot 7^5 \equiv 7 \cdot 807 \pmod{1000} \equiv 5649 \pmod{1000} \equiv 649 \pmod{1000}$.
 Si $n = 7$, $7^7 = 7 \cdot 7^6 \equiv 7 \cdot 649 \pmod{1000} \equiv 4543 \pmod{1000} \equiv 543 \pmod{1000}$.
 Si $n = 8$, $7^8 = 7 \cdot 7^7 \equiv 7 \cdot 543 \pmod{1000} \equiv 3801 \pmod{1000} \equiv 801 \pmod{1000}$.
 Si $n = 9$, $7^9 = 7 \cdot 7^8 \equiv 7 \cdot 801 \pmod{1000} \equiv 5607 \pmod{1000} \equiv 607 \pmod{1000}$.
 Si $n = 10$, $7^{10} = 7 \cdot 7^9 \equiv 7 \cdot 607 \pmod{1000} \equiv 4249 \pmod{1000} \equiv 249 \pmod{1000}$.
 Si $n = 11$, $7^{11} = 7 \cdot 7^{10} \equiv 7 \cdot 249 \pmod{1000} \equiv 1743 \pmod{1000} \equiv 743 \pmod{1000}$.
 Si $n = 12$, $7^{12} = 7 \cdot 7^{11} \equiv 7 \cdot 743 \pmod{1000} \equiv 5201 \pmod{1000} \equiv 201 \pmod{1000}$.
 Si $n = 13$, $7^{13} = 7 \cdot 7^{12} \equiv 7 \cdot 201 \pmod{1000} \equiv 1407 \pmod{1000} \equiv 407 \pmod{1000}$.
 Si $n = 14$, $7^{14} = 7 \cdot 7^{13} \equiv 7 \cdot 407 \pmod{1000} \equiv 2849 \pmod{1000} \equiv 849 \pmod{1000}$.
 Si $n = 15$, $7^{15} = 7 \cdot 7^{14} \equiv 7 \cdot 849 \pmod{1000} \equiv 5943 \pmod{1000} \equiv 943 \pmod{1000}$.
 Si $n = 16$, $7^{16} = 7 \cdot 7^{15} \equiv 7 \cdot 943 \pmod{1000} \equiv 6601 \pmod{1000} \equiv 601 \pmod{1000}$.
 Si $n = 17$, $7^{17} = 7 \cdot 7^{16} \equiv 7 \cdot 601 \pmod{1000} \equiv 4207 \pmod{1000} \equiv 207 \pmod{1000}$.
 Si $n = 18$, $7^{18} = 7 \cdot 7^{17} \equiv 7 \cdot 207 \pmod{1000} \equiv 1449 \pmod{1000} \equiv 449 \pmod{1000}$.
 Si $n = 19$, $7^{19} = 7 \cdot 7^{18} \equiv 7 \cdot 449 \pmod{1000} \equiv 3143 \pmod{1000} \equiv 143 \pmod{1000}$.
 Si $n = 20$, $7^{20} = 7 \cdot 7^{19} \equiv 7 \cdot 143 \pmod{1000} \equiv 1001 \pmod{1000} \equiv 1 \pmod{1000}$.

Como vemos, al fin ha vuelto a aparecer el uno. En consecuencia, a partir de aquí, los valores hallados se suceden cíclicamente, en rachas de veinte números. Así pues, para hallar el resultado de 7^{9999} módulo 1000, es necesario conocer la forma del exponente, en relación con los escritos, es decir, tenemos que dividir 9999 entre 20, lo que proporciona la expresión $9999 = 20 \cdot 499 + 19$, que permite escribir:

$$7^{9999} = 7^{20 \cdot 499 + 19} = 7^{20 \cdot 499} \cdot 7^{19} \equiv 1 \cdot 143 \pmod{1000} \equiv 143 \pmod{1000},$$

lo que significa que el número 7^{9999} termina en las cifras 143, que es lo que queríamos averiguar.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.21

Halla todos los números naturales m tales que $2066 \equiv 2766 \pmod{m}$.

Trasponiendo el 2766 en la congruencia dada y operando:

$$2066 \equiv 2766 \pmod{m} \Leftrightarrow 2066 - 2766 \equiv 0 \pmod{m} \Leftrightarrow$$

$$-700 \equiv 0 \pmod{m} \Leftrightarrow 700 \equiv 0 \pmod{m},$$

lo cual es equivalente a decir que 700 es múltiplo de m .

Por tanto, m puede ser cualquiera de los divisores de 700, esto es, cualquiera de los naturales del conjunto $\{1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 25, 28, 35, 50, 70, 100, 140, 175, 350, 700\}$.

(Oposiciones de Secundaria, 2000)

Problema 1.22

Demuestra que si p y 5 son coprimos, entonces $p^{8n} + 3p^{4n} - 4$ es múltiplo de 100, para todo natural n .

Sean p un número natural coprimo con 5, y n un número natural cualquiera.

En primer lugar, observemos que si $n = 0$, entonces:

$$p^{8n} + 3p^{4n} - 4 = p^0 + 3p^0 - 4 = 1 + 3 - 4 = 0,$$

que es, trivialmente, un múltiplo de 100. Así pues, en todo lo sucesivo supondremos que $n \geq 1$.

Ahora, abordaremos el problema tratando de factorizar el polinomio en la indeterminada p que nos proporciona el enunciado. Para ello, conviene pensar que se trata de un polinomio de segundo grado en la indeterminada p^{4n} , es decir, es adecuado reescribirlo como:

$$(p^{4n})^2 + 3p^{4n} - 4,$$

ya que, de este modo, podemos resolver la ecuación:

$$(p^{4n})^2 + 3p^{4n} - 4 = 0,$$

en la incógnita p^{4n} , con la conocida fórmula, obteniendo de esta manera las raíces del polinomio y, con ellas, la factorización del mismo. Así, tenemos:

$$p^{4n} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} p^{4n} = 1 \\ p^{4n} = -4 \end{cases},$$

por lo que podemos escribir:

$$p^{8n} + 3p^{4n} - 4 = (p^{4n} - 1)(p^{4n} + 4).$$

Obsérvese que es absurdo plantear la posibilidad de que $p^{4n} = -4$, puesto que una potencia par de un número natural no puede dar un resultado negativo, y que tampoco es muy lógico pensar que $p^{4n} = 1$, ya que esta igualdad solo puede verificarse si $p = 1$ o $n = 0$, lo cual no tiene por qué ser así. Sin embargo, estas igualdades únicamente son un

artificio que hemos utilizado con el fin de factorizar el polinomio, y no tienen mayores consecuencias; realmente, no hemos pretendido asignar el valor 1 o -4 a p^{4n} , ni hemos aceptado que sea así. Como es claro, la factorización obtenida es válida para cualquier valor de p (realizando el producto indicado puede comprobarse fácilmente), lo cual justifica el uso del artificio antes aludido. Así pues, para ver que $p^{8n} + 3p^{4n} - 4$ es múltiplo de 100, podemos comprobar que lo es $(p^{4n} - 1)(p^{4n} + 4)$.

Por otro lado, como $100 = 2^2 \cdot 5^2$, y 2 y 5 son números primos distintos (y, por tanto, coprimos), es suficiente con demostrar, separadamente, que $(p^{4n} - 1)(p^{4n} + 4)$ es múltiplo de 4 y de 25.

Veamos, pues, que $(p^{4n} - 1)(p^{4n} + 4)$ es múltiplo de 4:

Si p es par, entonces, p^{4n} es múltiplo de 16, puesto que la base 2 aparece en la descomposición en factores primos de p^{4n} con un exponente no inferior a 4 (recordemos que estamos suponiendo que $n \geq 1$). En particular, p^{4n} es múltiplo de 4 y, en consecuencia, también lo es $p^{4n} + 4$, por ser la suma de dos múltiplos de 4. Obviamente, al añadir el otro factor, resulta también un múltiplo de 4, y ya tenemos probado lo que queríamos.

Si, por el contrario, p es impar, es claro que tanto $p^{2n} + 1$ como $p^{2n} - 1$ son pares, y, entonces, el producto de ambos es múltiplo de 4. Pero $(p^{2n} + 1)(p^{2n} - 1) = p^{4n} - 1$, por la conocida identidad. Así pues, podemos afirmar que $p^{4n} - 1$ es múltiplo de 4, y sigue siéndolo al añadir el factor $p^{4n} + 4$, lo que permite obtener el resultado buscado.

Por tanto, ya sabemos que, en cualquier caso, $(p^{4n} - 1)(p^{4n} + 4)$ es múltiplo de 4.

Veamos ahora que también lo es de 25:

Como p y 5 son coprimos, estamos en las hipótesis del Pequeño Teorema de Fermat. Aplicando este teorema, tenemos:

$$p^4 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Elevando ambos miembros de esta congruencia a n , obtenemos:

$$p^{4n} \equiv 1 \pmod{5},$$

de donde se sigue, trasponiendo el uno:

$$p^{4n} - 1 \equiv 0 \pmod{5},$$

lo que equivale a decir que $p^{4n} - 1$ es múltiplo de 5.

Pero la congruencia $p^{4n} \equiv 1 \pmod{5}$ proporciona otro resultado: sumando 4 a ambos miembros, podemos escribir:

$$p^{4n} + 4 \equiv 5 \pmod{5} \equiv 0 \pmod{5},$$

expresión que indica que también $p^{4n} + 4$ es múltiplo de 5. Así pues, al tener dos factores múltiplos de 5, el producto $(p^{4n} - 1)(p^{4n} + 4)$ es múltiplo de 25.

Con todo lo dicho, ya podemos afirmar que $p^{8n} + 3p^{4n} - 4$ es múltiplo de 100, como queríamos ver.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.23

Escribe los divisores de 1001. Dados el número natural n y los naturales a_k , $0 \leq k \leq n$, sea $p = a_0 + a_1 \cdot 1000 + a_2 \cdot 1000^2 + \dots + a_n \cdot 1000^n$, y sea $q = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n \cdot a_n$. Demuestra que p y q son congruentes módulo 1001.

Como aplicación, averigua si 312879645 es divisible por 7, por 11 o por 13.

Puesto que $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, resulta claro que sus 8 divisores naturales son los siguientes: 1, 7, 11, 13, 77, 91, 143 y 1001.

Veamos ahora que p y q son congruentes módulo 1001. Para ello, en primer lugar, observemos que, como es evidente:

$$1000 \equiv -1 \pmod{1001},$$

de donde se sigue, para todo k natural:

$$1000^k \equiv (-1)^k \pmod{1001},$$

y, en consecuencia, para todo k , $0 \leq k \leq n$:

$$a_k \cdot 1000^k \equiv a_k \cdot (-1)^k \pmod{1001}.$$

A partir de aquí, sumando término a término las congruencias resultantes de variar k desde 0 hasta n , podemos escribir:

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot 1000^k \equiv \sum_{k=0}^n a_k \cdot (-1)^k \pmod{1001}.$$

Por último, solo hay que observar que el primer miembro de esta congruencia es precisamente p , mientras que el segundo es q . Así pues, tenemos ya probada la congruencia $p \equiv q \pmod{1001}$, como queríamos.

Para la aplicación, tengamos en cuenta que, como $p \equiv q \pmod{1001}$, debe existir un número natural, digamos s , tal que $p = q + 1001s$. Por tanto, al ser 7, 11 y 13 divisores de 1001, es claro que cada uno de estos números es divisor de p si, y solo si, lo es también de q . Ahora, haciendo $p = 312879645$, es claro que, escrito en base 1000, resulta $p = 312879645 = 645 + 879 \cdot 1000 + 312 \cdot 1000^2$, es decir, en este caso concreto, tenemos $a_0 = 645$, $a_1 = 879$ y $a_2 = 312$, de donde se sigue $q = 645 - 879 + 312 = 78$.

Como 7 y 11 no son divisores de 78 (no son divisores de q), resulta que tampoco lo son de 312879645 (no lo son de p). Por el contrario, 13 sí que es divisor de 78, luego también lo es de 312879645.

Obsérvese que en este problema, en realidad, hemos obtenido un criterio para determinar cuándo un número muy grande, p , es divisible por cada uno de los divisores de 1001 (listados anteriormente), basándonos en si el número q , asociado a p , es divisible o no por el divisor de 1001 en cuestión.

(Adaptado de Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1977, y de examen de Universidad)

Problema 1.24

Para cada número natural n , sea $a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$. Se pide:

- Demuestra que a_{n+3} es congruente con a_n módulo 7, para todo n .
- Determina los valores de n para los que a_n es divisible por 7, empleando el apartado anterior.
- ¿Son múltiplos de 7 los números 1110_2 , 1010100_2 y 1001001000_2 , escritos en base 2?

Apartado a)

Lo demostraremos mediante una cadena de equivalencias, en la que la última proposición sea cierta. Sea n un número natural cualquiera. Entonces:

$$a_{n+3} \equiv a_n \pmod{7} \Leftrightarrow a_{n+3} - a_n \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow 2^{n+3} + 2^{2(n+3)} + 2^{3(n+3)} - (2^n + 2^{2n} + 2^{3n}) \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow$$

$$2^{n+3} + 2^{2n+6} + 2^{3n+9} - 2^n - 2^{2n} - 2^{3n} \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow$$

$$8 \cdot 2^n + 64 \cdot 2^{2n} + 512 \cdot 2^{3n} - 2^n - 2^{2n} - 2^{3n} \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow$$

$$(8-1)2^n + (64-1)2^{2n} + (512-1)2^{3n} \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow$$

$$7 \cdot 2^n + 63 \cdot 2^{2n} + 511 \cdot 2^{3n} \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow 7 \cdot 2^n + 63 \cdot 2^{2n} + 511 \cdot 2^{3n} = \overset{\cdot}{7}$$

(el punto sobre el 7 indica un múltiplo de este número), lo cual es cierto, ya que cada sumando es múltiplo de 7, al incorporar un factor que lo es.

Apartado b)

Lo veremos dando a n los primeros tres valores y usando el apartado anterior para generalizar los resultados, teniendo en cuenta el hecho de que $a_{n+3} \equiv a_n \pmod{7}$ implica, en particular, que a_{n+3} es múltiplo de 7 si, y solo si, a_n lo es.

Para $n = 0$, tenemos que $a_0 = 2^0 + 2^0 + 2^0 = 3$, que no es múltiplo de 7. Por el apartado anterior, a_{0+3} tampoco lo es, de donde se sigue que $a_{0+3+3} = a_{3+3}$ tampoco, y de aquí, que $a_{3+2+3} = a_{3+3}$ tampoco... Continuando sucesivamente con este razonamiento, por inducción, podemos afirmar que, para cualquier múltiplo de 3, digamos $3k$, siendo k un número natural cualquiera, tenemos que $a_{3k} = 2^{3k} + 2^{6k} + 2^{9k}$ no es múltiplo de 7.

Para $n = 1$, tenemos $a_1 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$, que sí que es múltiplo de 7. Procediendo de manera similar al caso anterior, podemos afirmar que a_{1+3} , $a_{1+3+3} = a_{1+3+2}$, $a_{1+3+2+3} = a_{1+3+3}$, y, en general, a_{1+3k} , son múltiplos de 7, para cualquier valor natural de k .

Por último, si $n = 2$, $a_2 = 2^2 + 2^4 + 2^6 = 84$, que también es múltiplo de 7. Entonces, como antes, tenemos que a_{2+3k} es múltiplo de 7, para cualquier natural k .

Así pues, recapitulando, podemos decir que a_n es múltiplo de 7 si, y solo si, n no es múltiplo de 3.

Apartado c)

Este apartado es una simple aplicación del anterior. En efecto, escribiendo los números en base 10, tenemos $1110_2 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = a_1$; $1010100_2 = 2^2 + 2^4 + 2^6 = a_2$; y $1001001000_2 = 2^3 + 2^6 + 2^9 = a_3$. Por tanto, los dos primeros números son múltiplos de 7, mientras que el tercero no lo es.

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1974, y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 1.25

Sean a , m y n naturales no nulos. Demuestra que las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Si $m > n$, entonces, $a^{2^n} + 1$ es divisor de $a^{2^m} - 1$.

b) Si $m \neq n$, entonces, $\text{mcd}(a^{2^n} + 1, a^{2^m} + 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ es par} \\ 2 & \text{si } a \text{ es impar} \end{cases}$.

Apartado a)

Si $m > n$, entonces, existe un número natural no nulo, digamos k , tal que $m = n + k$. Sustituyendo y operando, podemos escribir:

$$a^{2^m} - 1 = a^{2^{n+k}} - 1 = a^{2^n \cdot 2^k} - 1 = \left(a^{2^n}\right)^{2^k} - 1. \quad (\text{I})$$

Haciendo el cambio $x = a^{2^n}$, la última expresión se transforma en $x^{2^k} - 1$, que es un polinomio de grado 2^k en la indeterminada x . Ahora, como k es distinto de cero, 2^k es un número par, por lo que $x = -1$ es una raíz de este polinomio. Entonces, podemos factorizarlo mediante la regla de Ruffini, obteniéndose:

$$x^{2^k} - 1 = (x + 1)(x^{2^k-1} - x^{2^k-2} + x^{2^k-3} - \dots + x - 1).$$

Deshaciendo el cambio, se sigue:

$$\left(a^{2^n}\right)^{2^k} - 1 = \left(a^{2^n} + 1\right) \left(\left(a^{2^n}\right)^{2^k-1} - \left(a^{2^n}\right)^{2^k-2} + \left(a^{2^n}\right)^{2^k-3} - \cdots + a^{2^n} - 1 \right),$$

y, sustituyendo en (I), resulta:

$$a^{2^m} - 1 = \left(a^{2^n} + 1\right) \left(\left(a^{2^n}\right)^{2^k-1} - \left(a^{2^n}\right)^{2^k-2} + \left(a^{2^n}\right)^{2^k-3} - \cdots + a^{2^n} - 1 \right).$$

De este modo, hemos escrito explícitamente $a^{2^m} - 1$ como el producto de $a^{2^n} + 1$ y otro factor, lo que prueba que $a^{2^n} + 1$ es divisor de $a^{2^m} - 1$, como queríamos demostrar.

Hemos de tener presente que, al hacer el cambio $x = a^{2^n}$, no cabe plantearse la posibilidad de que $x = -1$, pues, lógicamente, $a^{2^n} \neq -1$, para cualquier valor de n . Sin embargo, con el argumento empleado no intentábamos igualar estas dos expresiones, sino factorizar el polinomio. Cuando hemos efectuado el cambio y hemos convertido la expresión obtenida en un polinomio, hemos «liberado» el valor de x , lo que nos ha permitido factorizar el polinomio y llegar a una igualdad válida para cualquier valor de x (una identidad). A posteriori, es lícito particularizar el valor de x y deshacer el cambio, para llegar a la igualdad buscada.

Apartado b)

Si $m \neq n$, entonces, uno de estos números debe ser mayor que el otro. Puesto que m y n tienen papeles «simétricos» en el enunciado, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que es $m > n$.

Por el apartado a), sabemos que $a^{2^n} + 1$ es divisor de $a^{2^m} - 1$, lo que se traduce en que existe un número natural, digamos p , tal que:

$$a^{2^m} - 1 = p \cdot \left(a^{2^n} + 1\right),$$

y, sumando 2 en ambos miembros, resulta:

$$a^{2^m} + 1 = p \cdot \left(a^{2^n} + 1\right) + 2. \quad (\text{II})$$

Sea ahora $d = \text{mcd}(a^{2^n} + 1, a^{2^m} + 1)$.

Por la definición del máximo común divisor, tenemos, en particular, que d es divisor de $a^{2^m} + 1$ y de $a^{2^n} + 1$, luego, en la igualdad (II), d es divisor del primer miembro y del primer término del segundo, por lo que debe serlo también del otro sumando, esto es, de 2. Puesto que los únicos divisores naturales de 2 son 1 y 2, solo caben estos dos valores de d . Lógicamente, que sea uno u otro dependerá de la paridad de $a^{2^n} + 1$ y de $a^{2^m} + 1$ (que tienen la misma), la cual depende, a su vez, de la paridad de a .

Concretamente, si a es par, entonces $a^{2^m} + 1$ y $a^{2^n} + 1$ son impares, por lo que su máximo común divisor no puede ser 2, y, por tanto, debe ser 1; si, por el contrario, a es impar, entonces $a^{2^m} + 1$ y $a^{2^n} + 1$ son pares, razón por la que su máximo común divisor debe ser 2.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.26

Demuestra que los números de Fermat, dados por la expresión $F(n) = 2^{2^n} + 1$, terminan en 7 en el sistema decimal, salvo el primero.

Lo demostraremos por inducción.

Para $n = 1$, tenemos $F(1) = 2^{2^1} + 1 = 5$, que no termina en 7, tal y como afirma el enunciado.

Para $n = 2$, resulta $F(2) = 2^{2^2} + 1 = 17$, que sí acaba en 7. Fijamos, pues, la base de la inducción en $n = 2$.

Supongamos ahora que $F(n)$ termina en 7, y veamos que, en tal caso, también lo hace $F(n + 1)$, siendo:

$$F(n + 1) = 2^{2^{n+1}} + 1 = 2^{2^n \cdot 2} + 1 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 1.$$

Para aplicar la hipótesis de inducción, necesitamos introducir la expresión $F(n)$, lo cual podemos conseguir sumando 1 (y restándolo, para «compensar») en el interior del paréntesis. De este modo, se sigue:

$$F(n + 1) = \left(2^{2^n}\right)^2 + 1 = \left(2^{2^n} + 1 - 1\right)^2 + 1 = (F(n) - 1)^2 + 1.$$

Por la hipótesis de inducción, $F(n)$ acaba en 7, luego la expresión entre paréntesis, $F(n) - 1$, termina en 6. Es fácil comprobar que el cuadrado de un número acabado en 6 también acaba en 6, por lo que podemos afirmar que $[F(n) - 1]^2$ termina en 6. Finalmente, al sumarle 1, obtenemos un número acabado en 7, precisamente lo que queríamos demostrar.

De este modo, por inducción, podemos decir que todos los números de Fermat dados por la fórmula del enunciado acaban en 7, salvo el primero, lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 1998, Olimpiadas Matemáticas y examen de Universidad)

Problema 1.27

Demuestra que $1000!$ es divisible por 2^{994} y que no lo es por 2^{995} . Halla el mayor número natural q tal que $1000!$ sea múltiplo de 3^q . Determina el exponente del número primo p en la descomposición en factores primos de $n!$, siendo $p < n$.

La primera parte del problema plantea, sencillamente, demostrar que, en la descomposición en factores primos del $1000!$, el número 2 aparece 294 veces; la segunda parte propone determinar el exponente del 3 en esa misma factorización; la tercera es una generalización de los dos casos anteriores, en la que se plantea calcular el exponente de un factor cualquiera en la descomposición en factores primos del factorial de un natural arbitrario n .

En primer lugar, sabemos que $1000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots 995 \cdot 996 \cdot 997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000$.

Evidentemente, en esta expresión hay números pares e impares, que aparecen de manera alternada. Si reorganizamos los factores, dejando los impares al principio y los pares al final, podemos escribir:

$$1000! = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 995 \cdot 997 \cdot 999) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 996 \cdot 998 \cdot 1000).$$

Para simplificar la escritura, denotaremos por I el producto de los números impares del primer paréntesis, resultando, obviamente, un número impar. Con esta notación, tenemos:

$$1000! = I \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 996 \cdot 998 \cdot 1000).$$

Puesto que en el paréntesis hay 500 números pares, podemos «extraer» un 2 de cada uno de ellos, quedando:

$$1000! = I \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 498 \cdot 499 \cdot 500) \cdot 2^{500}.$$

(obsérvese que en el paréntesis están las mitades de los números que estaban anteriormente).

De nuevo, en el paréntesis, están los números pares y los impares alternados. Si reorganizamos estos números, como antes, dejando los impares delante y los pares detrás, tenemos:

$$1000! = I \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 495 \cdot 497 \cdot 499) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 496 \cdot 498 \cdot 500) \cdot 2^{500}.$$

Agrupando los números impares del primer paréntesis con los incluidos en la expresión I , y utilizando esta misma letra para designar la nueva expresión resultante, podemos escribir:

$$1000! = I \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 496 \cdot 498 \cdot 500) \cdot 2^{500}.$$

También como antes, «extrayendo» un 2 de cada uno de los 250 números pares del paréntesis, podemos escribir:

$$1000! = I \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 248 \cdot 249 \cdot 250) \cdot 2^{750}.$$

Reordenando los números del paréntesis, colocando los impares en primer lugar y los pares en segundo:

$$1000! = I \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 245 \cdot 247 \cdot 249) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 246 \cdot 248 \cdot 250) \cdot 2^{750}.$$

Agrupando nuevamente los factores impares del primer paréntesis con los incluidos en la letra I, y denotando con esta misma letra la nueva expresión resultante, tenemos:

$$1000! = I \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 247 \cdot 248 \cdot 250) \cdot 2^{750}.$$

«Extrayendo» un 2 de cada uno de los 125 números pares del paréntesis, resulta:

$$1000! = I \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 123 \cdot 124 \cdot 125) \cdot 2^{875}.$$

De nuevo, reorganizamos los factores, situando los impares en primer lugar y los pares a continuación, dándose la igualdad:

$$1000! = I \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 121 \cdot 123 \cdot 125) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 120 \cdot 122 \cdot 124) \cdot 2^{875}.$$

Volvemos a incluir los factores impares del primer paréntesis en la letra I, y «extraemos» un 2 de cada uno de los 62 números pares presentes en el segundo paréntesis, quedando:

$$1000! = I \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 60 \cdot 61 \cdot 62) \cdot 2^{937}.$$

Reordenamos nuevamente los factores, incluimos los impares en la letra I, y «extraemos» un 2 de cada uno de los 31 números pares del paréntesis:

$$1000! = I \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 57 \cdot 59 \cdot 61) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 58 \cdot 60 \cdot 62) \cdot 2^{937} \Leftrightarrow$$

$$1000! = I \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 58 \cdot 60 \cdot 62) \cdot 2^{937} \Leftrightarrow 1000! = I \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 29 \cdot 30 \cdot 31) \cdot 2^{968}.$$

Repitiendo el proceso, teniendo en cuenta que en esta ocasión aparecen 15 factores pares:

$$1000! = I \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 27 \cdot 29 \cdot 31) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 26 \cdot 28 \cdot 30) \cdot 2^{968} \Leftrightarrow$$

$$1000! = I \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 26 \cdot 28 \cdot 30) \cdot 2^{968} \Leftrightarrow 1000! = I \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 13 \cdot 14 \cdot 15) \cdot 2^{983}.$$

Actuando de la misma manera, con 7 números pares:

$$1000! = I \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14) \cdot 2^{983} \Leftrightarrow$$

$$1000! = I \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) \cdot 2^{990}.$$

Reiterando el procedimiento:

$$1000! = I \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6) \cdot 2^{990} \Leftrightarrow 1000! = I \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2^{993},$$

y, finalmente:

$$1000! = I \cdot (1 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 2^{993} \Leftrightarrow 1000! = I \cdot 2^{994}.$$

A partir de esta última expresión, es claro que $1000!$ es divisible por 2^{994} , puesto que este número aparece explícitamente como un factor de $1000!$. Asimismo, podemos ver que no lo es por 2^{995} , ya que I es un número impar.

Con esta manera de proceder, hemos conseguido cerrar la primera parte del problema, si bien lo hemos hecho un poco con «la cuenta de la vieja». Para los otros dos casos, conviene seguir una estrategia más sistemática, que podemos establecer a partir del trabajo realizado.

Observemos que, para llegar al exponente del factor 2, en realidad, basta con conocer la cantidad de números pares que tenemos en el último paréntesis en cada etapa del proceso, y finalmente sumar estas cantidades.

En efecto, la secuencia formada por la cantidad de números pares que hemos escrito en el último paréntesis es 500, 250, 125, 62, 31, 15, 7, 3 y 1, y el exponente buscado resulta de la suma, $500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994$.

Ahora bien, es fácil observar que esta secuencia resulta de dividir por 2 la cantidad de factores totales que no están incluidos en la expresión I en la etapa anterior, salvo cuando esta cantidad no es par, en cuyo caso se considera la parte entera. En otras palabras, hemos calculado la mitad de 1000, luego la mitad de esa mitad (es decir, la cuarta parte de 1000), luego la mitad de este último resultado (la octava parte de 1000), y así, sucesivamente, hemos dividido el número 1000 por las potencias 2^k , con $k \geq 1$ natural, hasta llegar al 1, teniendo en cuenta tomar la parte entera cuando la división no es exacta.

Con este razonamiento, podemos decir que si escribimos $1000! = I \cdot 2^s$, siendo I un número impar y s un natural, entonces:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{1000}{2^k}\right),$$

donde la letra «E» representa la parte entera.

Ahora bien, puesto que, para $k \geq 10$, se tiene:

$$E\left(\frac{1000}{2^k}\right) = 0,$$

(como es fácil de comprobar), en realidad, la suma anterior tiene una cantidad finita de términos, puesto que a partir de uno dado todos son nulos. Así pues, aunque tiene el aspecto de una serie, en realidad es una suma finita.

Para la segunda parte del problema, procedemos de manera similar (aunque ya tenemos bastante avanzado el método general).

Puesto que $1000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots 995 \cdot 996 \cdot 997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000$, podemos reorganizar los factores, de manera que queden los múltiplos de 3 al final, y los que no lo son, al principio:

$$1000! = (1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 \cdots 995 \cdot 997 \cdot 998 \cdot 1000) \cdot (3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdots 990 \cdot 993 \cdot 996 \cdot 999).$$

Para simplificar la escritura, representamos por A el producto de todos los factores que no son múltiplo de 3, quedando:

$$1000! = A \cdot (3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdots 990 \cdot 993 \cdot 996 \cdot 999).$$

Puesto que en el paréntesis hay 333 múltiplos de 3, podemos «extraer» el factor 3 ese número de veces, y escribir:

$$1000! = A \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 330 \cdot 331 \cdot 332 \cdot 333) \cdot 3^{333}.$$

Obsérvese que el número 333 es el resultado de tomar la parte entera del cociente de 1000 entre 3, de forma análoga al caso anterior.

A continuación, procedemos de manera similar, reorganizando los factores, agrupando en la expresión A los que no son múltiplos de 3, y «extrayendo» el factor 3 del paréntesis 111 veces:

$$1000! = A \cdot (1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 328 \cdot 329 \cdot 331 \cdot 332) \cdot (3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 327 \cdot 330 \cdot 333) \cdot 3^{333} \Leftrightarrow$$

$$1000! = A \cdot (3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 327 \cdot 330 \cdot 333) \cdot 3^{333} \Leftrightarrow$$

$$1000! = A \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 109 \cdot 110 \cdot 111) \cdot 3^{444}.$$

Obsérvese que el número 111 resulta de dividir por 3 el número de la etapa anterior, el 333, de forma similar a la primera parte del problema.

Con todo lo dicho, es claro que no es necesario seguir con «la cuenta de la vieja», y podemos pasar a resolver la segunda parte del problema de forma sistemática.

Si escribimos $1000! = A \cdot 3^q$, siendo A un número no divisible por 3 y q un natural, entonces:

$$q = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{1000}{3^k}\right).$$

Como antes, la suma indicada tiene una cantidad finita de términos, ya que, para $k \geq 7$, todos los sumandos son nulos, como es fácil de comprobar. Así pues, tenemos:

$$q = E\left(\frac{1000}{3}\right) + E\left(\frac{1000}{3^2}\right) + E\left(\frac{1000}{3^3}\right) + E\left(\frac{1000}{3^4}\right) + E\left(\frac{1000}{3^5}\right) + E\left(\frac{1000}{3^6}\right),$$

y, realizando los cálculos, $q = 333 + 111 + 37 + 12 + 4 + 1 = 498$, que es el número que da respuesta a la segunda parte del problema.

Para el caso general, planteado en la tercera parte del problema, podemos decir que, dado el natural n , si $n! = N \cdot p^t$, siendo N un número no divisible por p , p un número primo menor que n , y t un natural, entonces:

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{n}{p^k}\right).$$

Observemos de nuevo que, pese a su aspecto, se trata de la suma de una cantidad finita de términos, puesto que existe un valor de k , digamos k_0 , tal que si $k \geq k_0$, entonces:

$$E\left(\frac{n}{p^k}\right) = 0.$$

(Agrupación de problemas de Oposiciones de Secundaria y de examen de Universidad)

Problema 1.28

¿Cuántos números enteros del 1 al 1000 no son divisibles ni por 3, ni por 5 ni por 7?

Para cada número natural k , con $1 \leq k \leq 1000$, denotemos por M_k el conjunto formado por los números naturales comprendidos entre 1 y 1000 que son múltiplos de k , y por $\overline{M_k}$ el conjunto formado por los números del 1 al 1000 que no son múltiplos de k . Con esta notación:

$$M_k = \left\{ n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 1000, n = k \cdot \dot{} \right\} \text{ y } \overline{M_k} = \left\{ n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 1000, n \neq k \cdot \dot{} \right\},$$

y el problema se reduce a calcular el cardinal del conjunto:

$$\overline{M_3} \cap \overline{M_5} \cap \overline{M_7}.$$

Por el álgebra de conjuntos, se tiene:

$$\overline{M_3} \cap \overline{M_5} \cap \overline{M_7} = \overline{M_3 \cup M_5 \cup M_7},$$

lo que implica:

$$\left| \overline{M_3} \cap \overline{M_5} \cap \overline{M_7} \right| = \left| \overline{M_3 \cup M_5 \cup M_7} \right|,$$

donde las barras verticales denotan el cardinal del correspondiente conjunto. Pero:

$$\left| \overline{M_3 \cup M_5 \cup M_7} \right| = 1000 - \left| M_3 \cup M_5 \cup M_7 \right|,$$

puesto que el conjunto universal considerado es el formado por los números del 1 al 1000, luego basta con calcular:

$$\left| M_3 \cup M_5 \cup M_7 \right|.$$

Por el principio de inclusión-exclusión:

$$\begin{aligned} \left| M_3 \cup M_5 \cup M_7 \right| &= \\ &= \left| M_3 \right| + \left| M_5 \right| + \left| M_7 \right| - \left| M_3 \cap M_5 \right| - \left| M_3 \cap M_7 \right| - \left| M_5 \cap M_7 \right| + \left| M_3 \cap M_5 \cap M_7 \right|. \end{aligned} \tag{I}$$

Ahora bien, para cada k comprendido entre 1 y 1000, el número de múltiplos de k que hay entre 1 y 1000 viene dado por:

$$E\left(\frac{1000}{k}\right),$$

donde la letra «E» representa la parte entera (como hemos visto en el problema anterior). Por tanto:

$$\left| M_k \right| = E\left(\frac{1000}{k}\right).$$

Por otro lado, para cualesquiera i y j naturales comprendidos entre 1 y 1000, es claro que $M_i \cap M_j$ es el conjunto formado por los múltiplos comunes de i y j que están comprendidos entre 1 y 1000, de donde se deduce que $M_i \cap M_j$ es el conjunto formado por los números del 1 al 1000 que son múltiplos de $\text{mcm}(i, j)$. Así pues:

$$\left| M_i \cap M_j \right| = E\left(\frac{1000}{\text{mcm}(i, j)}\right).$$

De la misma manera, podemos llegar a que, para cualesquiera i, j y k comprendidos entre 1 y 1000, se tiene:

$$|M_i \cap M_j \cap M_k| = E\left(\frac{1000}{\text{mcm}(i, j, k)}\right).$$

Particularizando y sustituyendo estas expresiones en (I), resulta:

$$\begin{aligned} |M_3 \cup M_5 \cup M_7| &= \\ &= E\left(\frac{1000}{3}\right) + E\left(\frac{1000}{5}\right) + E\left(\frac{1000}{7}\right) - E\left(\frac{1000}{15}\right) - E\left(\frac{1000}{21}\right) - E\left(\frac{1000}{35}\right) + E\left(\frac{1000}{105}\right), \end{aligned}$$

por lo que:

$$|M_3 \cup M_5 \cup M_7| = 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543.$$

Podemos concluir, entonces, con que:

$$|\overline{M_3 \cup M_5 \cup M_7}| = 1000 - |M_3 \cup M_5 \cup M_7| = 1000 - 543 = 457$$

es la cantidad de números naturales del 1 al 1000 que no son múltiplos ni de 3, ni de 5, ni de 7, que es lo que se planteaba en el enunciado.

(Examen de Universidad)

Problema 1.29

Sea p un número primo. Demuestra que $n^p \equiv n \pmod{p}$, para todo n natural (Teorema de Fermat).

Si no fuera por la nota entre paréntesis, el problema podría resolverse usando el Pequeño Teorema de Fermat, como se muestra a continuación.

Sea n un número natural cualquiera. Si n es múltiplo de p , entonces, obviamente n^p también lo es, por lo que $n \equiv 0 \pmod{p}$ y $n^p \equiv 0 \pmod{p}$, de donde se sigue, trivialmente, que $n^p \equiv n \pmod{p}$; si, por el contrario, n no es múltiplo de p , entonces, por el Pequeño Teorema de Fermat, resulta que $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, y, multiplicando ambos miembros de la congruencia por n , se llega a $n^p \equiv n \pmod{p}$, como se quería demostrar.

Sin embargo, la nota entre paréntesis del enunciado hace pensar que no puede usarse el Pequeño Teorema de Fermat, salvo que se demuestre previamente. Por tanto, podemos proceder de dos maneras: demostrar el Pequeño Teorema de Fermat (y usar el argumento anterior) o demostrar directamente la certeza de la congruencia dada en el

enunciado. Puesto que la demostración del Pequeño Teorema de Fermat es un resultado más teórico que práctico, optaremos por resolver el problema de manera directa, sin usar el Pequeño Teorema de Fermat, lo cual es posible por el método de inducción.

Para $n = 1$, claramente se cumple el enunciado, pues $1^p \equiv 1 \pmod{p}$.

Supongamos ahora que el enunciado es cierto para el natural $n \geq 1$, y veamos que, en tal situación, también lo es para $n + 1$, es decir, veamos que:

$$(n+1)^p \equiv n+1 \pmod{p}.$$

Aplicando la fórmula del desarrollo de Newton, tenemos:

$$(n+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k \cdot 1^{p-k} = \sum_{k=0}^p \frac{p!}{k!(p-k)!} n^k,$$

y, separando el primer y el último sumando del sumatorio, resulta:

$$(n+1)^p = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p!}{k!(p-k)!} n^k + n^p + 1.$$

Ahora bien, en el sumatorio, k se extiende desde 1 hasta $p - 1$, de lo que se deduce que tanto k como $p - k$ son estrictamente menores que p , lo que implica, a su vez, que todos los factores de la expresión $k!(p-k)!$ son estrictamente menores que p . Como p es primo, no tiene divisores menores (salvo el 1, lógicamente), lo cual se traduce en que el factor p está presente en todos los términos incluidos en el sumatorio (al simplificar cada fracción, el factor p no desaparece, puesto que no hay divisores de p en el denominador). Así pues, es posible extraer p como factor común de todos los términos del sumatorio, lo que significa que:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{p!}{k!(p-k)!} n^k,$$

es múltiplo de p , y, en consecuencia:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{p!}{k!(p-k)!} n^k \equiv 0 \pmod{p}.$$

Además, por la hipótesis de inducción, tenemos $n^p \equiv n \pmod{p}$. Entonces, tomando módulo p , llegamos a la congruencia:

$$(n+1)^p = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p!}{k!(p-k)!} n^k + n^p + 1 \equiv 0 + n + 1 \pmod{p} \equiv n+1 \pmod{p},$$

como se pretendía demostrar.

Así pues, por inducción, tenemos probado que $n^p \equiv n \pmod{p}$, para todo natural n , lo que concluye el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2005)

Problema 1.30

Sea p un número primo mayor que 2. Demuestra que si $m^p + n^p \equiv 0 \pmod{p}$, entonces, $m^p + n^p \equiv 0 \pmod{p^2}$.

En primer lugar, por el binomio de Newton, tenemos:

$$(m+n)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} m^k \cdot n^{p-k} = \sum_{k=0}^p \frac{p!}{k!(p-k)!} m^k \cdot n^{p-k},$$

y, separando del sumatorio el primer y el último sumando, se sigue:

$$(m+n)^p = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p!}{k!(p-k)!} m^k \cdot n^{p-k} + m^p + n^p.$$

Ahora, por la hipótesis establecida en el enunciado, $m^p + n^p$ es múltiplo de p , y, razonando de la misma manera que en el problema anterior, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{p!}{k!(p-k)!} m^k \cdot n^{p-k},$$

también lo es. Por tanto, la suma de ambas expresiones es múltiplo de p , lo que se traduce en que $(m+n)^p$ es múltiplo de p . Entonces, como p es primo, podemos afirmar que el factor p aparece en la descomposición en factores primos de $(m+n)^p$ y, en consecuencia, p también es un factor primo de $m+n$ (tengamos en cuenta que, para cualesquiera naturales a y k , a^k tiene los mismos factores primos que a , solo que con mayor exponente, si $k \geq 2$). En otras palabras, $m+n$ es múltiplo de p . De aquí se deduce que existe un número natural, digamos q , tal que $m+n = qp$, de donde se sigue que $m = qp - n$.

Sustituyendo esta expresión de m , tenemos:

$$m^p + n^p = (qp - n)^p + n^p,$$

y, aplicando de nuevo el binomio de Newton:

$$m^p + n^p = (qp - n)^p + n^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (qp)^k (-n)^{p-k} + n^p.$$

Separando los dos primeros sumandos del sumatorio, resulta:

$$m^p + n^p = (-n)^p + \binom{p}{1} qp (-n)^{p-1} + \sum_{k=2}^p \binom{p}{k} (qp)^k (-n)^{p-k} + n^p.$$

Como p es un número primo mayor que 2, en particular, p es impar, por lo que se verifica $(-n)^p = -n^p$, y, en consecuencia, los términos $(-n)^p$ y n^p se cancelan. Teniendo en cuenta también que:

$$\binom{p}{1} = p,$$

llegamos a:

$$m^p + n^p = qp^2 (-n)^{p-1} + \sum_{k=2}^p \binom{p}{k} (qp)^k (-n)^{p-k}.$$

Ahora bien, por una parte, el término $qp^2(-n)^{p-1}$ es múltiplo de p^2 , puesto que en él aparece explícitamente el factor p^2 ; por otra, todos los términos incluidos en el sumatorio también son múltiplos de p^2 , ya que en todos ellos está el factor p^k , cuando k se extiende desde 2 hasta p (es decir, el exponente de p es mayor o igual que 2 en todos los sumandos). Por tanto, la suma de ambas expresiones, que resulta ser $m^p + n^p$, también es múltiplo de p^2 , lo que equivale a decir que se satisface la congruencia:

$$m^p + n^p \equiv 0 \pmod{p^2},$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar.

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1977)

Problema 1.31

Consideremos la sucesión de Fibonacci: $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, y $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, para todo n mayor o igual que 1. Se pide:

a) Demuestra que dos términos consecutivos cualesquiera de esta sucesión son primos entre sí.

b) Demuestra la relación:

$$u_{n+2} = 1 + \sum_{k=1}^n u_k, \forall n \geq 1.$$

c) Demuestra que cualesquiera tres términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci verifican la igualdad:

$$u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Apartado a)

En primer lugar, hemos de hacer constar que todos los términos de la sucesión de Fibonacci son números naturales, pues los dos primeros lo son, y, a partir de ellos, cada término se obtiene sumando los dos anteriores, esto es, sumando dos números naturales. Así pues, tiene sentido plantear el hecho de que dos términos consecutivos sean primos entre sí.

Si consideramos los dos primeros términos de la sucesión de Fibonacci, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, es claro que son primos entre sí, pues su máximo común divisor es 1 (es un caso particular un tanto diferente; cuando se habla de primos entre sí, normalmente se piensa en números distintos, pero hemos de tener presente que se entiende por números primos entre sí aquellos cuyo máximo común divisor es igual a la unidad). Por su parte, el segundo y el tercer término también son primos entre sí, ya que $u_2 = 1$ y $u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$ son primos entre sí.

Para continuar, fijemos un número natural $n \geq 2$, consideremos los dos términos consecutivos u_n y u_{n+1} , y denotemos $d = \text{mcd}(u_n, u_{n+1})$. Con esta notación, la resolución del apartado se reduce a demostrar que $d = 1$, como haremos a continuación.

Al ser d el máximo común divisor de u_n y u_{n+1} , en particular, se tiene que d es divisor de u_n y de u_{n+1} , luego ha de ser también divisor de su diferencia, $u_{n+1} - u_n$.

Ahora bien, por la definición de la sucesión de Fibonacci, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, de donde, trasponiendo, se sigue $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$. Por tanto, tenemos probado que d es divisor de u_{n-1} .

Del mismo modo, como d es divisor de u_{n-1} y de u_n , también lo es de $u_n - u_{n-1}$. Pero, como antes, por la definición de la sucesión de Fibonacci, se tiene $u_n - u_{n-1} = u_{n-2}$, luego d es divisor de u_{n-2} .

Reiterando este razonamiento, podemos ir «bajando el subíndice», hasta llegar a la conclusión de que d es divisor de los términos u_{n+1} , u_n , u_{n-1} , u_{n-2} , u_{n-3} , ..., u_2 y u_1 . Ahora bien, tanto u_2 como u_1 son igual a la unidad, lo que implica que d es divisor de 1, hecho que solo es posible si $d = 1$, como queríamos demostrar.

Apartado b)

Lo haremos por inducción.

En primer lugar, para $n = 1$, la igualdad se convierte en:

$$u_{1+2} = 1 + \sum_{k=1}^1 u_k,$$

es decir, $u_3 = 1 + u_1 = 1 + 1 = 2$, lo cual es cierto.

Ahora, supongamos que la fórmula es cierta para cualquier natural $n \geq 1$, y veamos que, en tal caso, también debe serlo para $n + 1$. Se trata, pues, de probar la igualdad:

$$u_{n+3} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} u_k,$$

admitiendo como cierto que:

$$u_{n+2} = 1 + \sum_{k=1}^n u_k .$$

Por la definición de la sucesión de Fibonacci, se tiene $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1}$, luego, aplicando la hipótesis de inducción, esto es, sustituyendo u_{n+2} por

$$1 + \sum_{k=1}^n u_k ,$$

se sigue:

$$u_{n+3} = 1 + \sum_{k=1}^n u_k + u_{n+1} .$$

Incluyendo el último sumando del segundo miembro en el sumatorio, obtenemos:

$$u_{n+3} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} u_k ,$$

que es la igualdad buscada. Así pues, por inducción, tenemos ya demostrado que:

$$u_{n+2} = 1 + \sum_{k=1}^n u_k , \forall n \geq 1 ,$$

como pretendíamos.

Apartado c)

Usaremos también el método de inducción, teniendo en cuenta que hemos de fijar la base en $n = 2$, ya que para $n = 1$ aparece en la fórmula a demostrar el término u_0 , que no está definido. Así pues, para $n = 2$, resulta la fórmula:

$$u_2^2 - u_{2-1} \cdot u_{2+1} = (-1)^{2+1} ,$$

es decir:

$$u_2^2 - u_1 \cdot u_3 = (-1)^3 .$$

Sustituyendo cada uno de estos términos por su valor, queda $1^2 - 1 \cdot 2 = (-1)^3$, y, operando, $-1 = -1$, que es, obviamente, una igualdad cierta. Por tanto, la fórmula es cierta para $n = 2$.

Supongamos ahora que la fórmula se verifica para cualquier natural $n \geq 2$, y veamos que, entonces, también se cumple para $n + 1$. Hemos de probar, pues, la validez de la igualdad:

$$u_{n+1}^2 - u_n \cdot u_{n+2} = (-1)^{n+2},$$

dando por supuesto que se cumple:

$$u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Por la definición de la sucesión de Fibonacci, tenemos $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, luego, sustituyendo, resulta:

$$u_{n+1}^2 - u_n \cdot u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n \cdot (u_{n+1} + u_n),$$

de donde, efectuando el paréntesis y escribiendo el cuadrado de u_{n+1} como el producto de este término por sí mismo, llegamos a:

$$u_{n+1}^2 - u_n \cdot u_{n+2} = u_{n+1} \cdot u_{n+1} - u_n \cdot u_{n+1} - u_n^2.$$

Teniendo en cuenta nuevamente la definición de la sucesión de Fibonacci, podemos sustituir el término u_{n+1} por $u_n + u_{n-1}$, resultando:

$$u_{n+1}^2 - u_n \cdot u_{n+2} = u_{n+1} \cdot (u_n + u_{n-1}) - u_n \cdot u_{n+1} - u_n^2,$$

y, operando y simplificando, tenemos:

$$u_{n+1}^2 - u_n \cdot u_{n+2} = \cancel{u_{n+1} \cdot u_n} + u_{n+1} \cdot u_{n-1} - \cancel{u_n \cdot u_{n+1}} - u_n^2 = -(u_n^2 - u_{n+1} \cdot u_{n-1}).$$

Finalmente, aplicando la hipótesis de inducción e incluyendo el signo negativo en la potencia, llegamos a:

$$u_{n+1}^2 - u_n \cdot u_{n+2} = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2},$$

que es precisamente la igualdad que queríamos demostrar.

De este modo, por inducción, tenemos que la fórmula

$$u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

es cierta, para todo natural $n \geq 2$, lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.32

Demuestra que todos los números de la forma $n^4 + 4$ son compuestos, para $n > 1$.

Nota: Este problema es, realmente, un caso particular de un teorema establecido por Sophie Germain (1776–1831).

Sea $n > 1$. Demostraremos el enunciado escribiendo explícitamente $n^4 + 4$ como producto de dos números naturales distintos de uno, lo que garantizará que se trata de un número compuesto.

Completando cuadrados, podemos escribir:

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2,$$

lo cual es una diferencia de cuadrados, y, aplicando la conocida identidad algebraica, obtenemos la igualdad:

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n).$$

Puesto que $n > 1$, es obvio que $n^2 + 2 + 2n > 1$, al ser todos los sumandos positivos (es decir, el número $n^2 + 2 + 2n$ no es igual a la unidad).

Por otro lado:

$$n^2 + 2 - 2n > 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 > 0 \Leftrightarrow (n - 1)^2 > 0,$$

lo cual es cierto siempre que $n > 1$.

Además, tanto $n^2 + 2 + 2n$ como $n^2 + 2 - 2n$ son números naturales, al serlo n . De este modo, hemos escrito $n^4 + 4$ como el producto de dos números naturales, ambos distintos de uno, lo que se traduce en que, para $n > 1$, el número $n^4 + 4$ es compuesto, como se quería demostrar.

(Oposiciones de Secundaria, 1993, y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 1.33

Demuestra que, dado cualquier número natural n , por grande que sea, siempre es posible encontrar n números naturales consecutivos que no sean primos.

Lo que plantea el enunciado es la posibilidad de encontrar una lista de números naturales consecutivos, tan larga como se desee, formada exclusivamente por números compuestos. Intuitivamente, ello puede «chocar» un poco con el hecho de que los números primos son infinitos, si bien no tiene nada de contradictorio: los números primos son infinitos, pero se distribuyen de manera que van dejando grandes «lagunas» entre uno y otro.

Para resolver el problema, basta con considerar la siguiente lista de números:

$$(n+1)!+2, (n+1)!+3, (n+1)!+4, (n+1)!+5, \dots, (n+1)!+n+1.$$

En efecto, esta lista está formada por n números consecutivos y, además, todos son compuestos, puesto que $(n+1)!+2$ es divisible por 2, al serlo ambos sumandos (tenemos en cuenta que la expresión $(n+1)!$ está formada por el producto de todos los números naturales menores o iguales que $n+1$, entre ellos el 2); $(n+1)!+3$ es divisible por 3; $(n+1)!+4$ lo es por 4; y así, sucesivamente, podemos ver que todos los números de la lista son divisibles por algún número menor, por lo que se tiene probado que todos son compuestos.

(Oposiciones de Secundaria y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 1.34

Sea k un número natural no nulo, y sea $\{x_n\}_{n \geq 1}$ la sucesión de números naturales definida, para cada n natural, por $x_n = a_0 + a_1n + a_2n^2 + \dots + a_kn^k$, donde a_i son números naturales dados, para $0 \leq i \leq k$, y $a_0 \neq 1$. Demuestra que existen infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ que no son primos.

Como vemos, se trata de una sucesión dada por un polinomio de grado k , con coeficientes naturales. Distinguiremos dos casos: que el término independiente sea nulo, y que no lo sea.

En primer lugar, si $a_0 = 0$, entonces, extrayendo el factor común n , tenemos:

$$x_n = a_1n + a_2n^2 + \dots + a_kn^k = n(a_1 + a_2n + a_3n^2 + \dots + a_kn^{k-1}).$$

En tal situación, basta con elegir un número compuesto como valor de n , y ya tendremos que el término x_n no es primo, pues es igual al producto de dos números, uno de los cuales es compuesto. Como n puede tomar infinitos valores, tenemos probado que existen infinitos términos de $\{x_n\}_{n \geq 1}$ que no son primos, como pretendíamos demostrar.

Supongamos ahora que el término independiente no es nulo. Sea r un número natural no nulo, y consideremos el término de $\{x_n\}_{n \geq 1}$ asociado a $n = r \cdot a_0$, esto es, el término $x_{r \cdot a_0}$. Sustituyendo en la expresión de x_n , tenemos:

$$x_{r \cdot a_0} = a_0 + a_1(r \cdot a_0) + a_2(r \cdot a_0)^2 + \dots + a_k(r \cdot a_0)^k,$$

y, extrayendo el factor común a_0 , resulta:

$$x_{r \cdot a_0} = a_0(1 + a_1r + a_0a_2r^2 + a_0^2a_3r^3 + \dots + a_0^{k-1}a_kr^k).$$

Ahora bien, según el enunciado, k no es nulo, por lo que debemos entender que $a_k \neq 0$, con $k \geq 1$. Como, además, r tampoco es nulo, y los restantes números a_i son naturales (no negativos, por tanto), es claro que:

$$a_1 r + a_0 a_2 r^2 + a_0^2 a_3 r^3 + \cdots + a_0^{k-1} a_k r^k \neq 0$$

y, en consecuencia, sumando uno a cada miembro:

$$1 + a_1 r + a_0 a_2 r^2 + a_0^2 a_3 r^3 + \cdots + a_0^{k-1} a_k r^k \neq 1.$$

De este modo, puesto que $a_0 \neq 1$ (según el enunciado), hemos escrito x_{r, a_0} como producto de dos números naturales distintos de uno, lo que se traduce en que el término x_{r, a_0} no es primo. Además, como r puede tomar infinitos valores, resulta que existen infinitos términos de $\{x_n\}_{n \geq 1}$ que no son primos, como queríamos ver.

Obsérvese que, en particular, el enunciado de este problema implica que la sucesión de los números primos no puede venir dada por una expresión polinómica de coeficientes naturales cuyo término independiente sea distinto de la unidad.

(Problema original)

Problema 1.35

Demuestra que, para cualesquiera enteros no negativos m y n , se cumple la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}.$$

Lo demostraremos por inducción en n , para cualquier valor fijo de m .

Sea, pues, m un número natural cualquiera. Para $n = 0$, tenemos:

$$\sum_{k=0}^0 \binom{m+k}{k} = \binom{m+0}{0} = 1 = \binom{m+1}{0},$$

por lo que la fórmula es cierta.

Supongamos ahora que la fórmula es cierta para $n \geq 0$, y veamos que, entonces, también debe serlo para $n + 1$:

Separando el último sumando del sumatorio, podemos escribir:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} + \binom{m+n+1}{n+1},$$

y, aplicando la hipótesis de inducción, resulta:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} + \binom{m+n+1}{n+1}.$$

Ahora bien, por las propiedades de los números combinatorios (concretamente, la fórmula de Stifel), se sabe que:

$$\binom{p+1}{q+1} = \binom{p}{q} + \binom{p}{q+1},$$

para cualesquiera p y q naturales, luego tomando $p = m + n + 1$ y $q = n$, resulta:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} + \binom{m+n+1}{n+1} = \binom{m+n+2}{n+1},$$

que es lo que queríamos demostrar.

Así pues, por inducción, se tiene que la fórmula es cierta para cualquier número natural n , lo que cierra el problema.

(Examen de Universidad)

Problema 1.36

Demuestra que $2^n > n^3$, $\forall n \geq 10$.

Lo veremos por inducción.

En primer lugar, para $n = 10$, es claro que $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$, luego ya tenemos probada la «base» de la inducción.

Supongamos ahora que la desigualdad $2^n > n^3$ es cierta para un natural $n \geq 10$, y veamos que, en tal caso, también debe serlo para el sucesor de n , el número $n + 1$:

Aplicando la hipótesis de inducción, podemos escribir:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^3.$$

Así pues, si probamos que se cumple la desigualdad:

$$2n^3 > (n+1)^3,$$

ya tendremos:

$$2^{n+1} > (n+1)^3,$$

que es la desigualdad buscada.

Ahora bien:

$$2n^3 > (n+1)^3 \Leftrightarrow 2n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \Leftrightarrow n^3 > 3n^2 + 3n + 1,$$

lo cual es cierto, siempre que $n \geq 4$, puesto que n^3 puede interpretarse como el número 1000 en base n , mientras que $3n^2 + 3n + 1$ se puede entender como el 331 en la misma base (tengamos presente que, obviamente, un número de cuatro cifras es estrictamente mayor que uno de tres, sea cual sea la base del sistema de numeración).

Por tanto, se cumple la desigualdad:

$$2^{n+1} > (n+1)^3,$$

y, por inducción, tenemos probado el enunciado.

(Examen de Universidad)

Problema 1.37

Sea n un número natural cualquiera, y sea $\phi(n)$ el valor de la función indicatriz de Euler en n , es decir, $\phi(n)$ es igual a la cantidad de números coprimos con n que son menores que n . Calcula la suma de todos los números coprimos con n que son menores que n , en función de n y $\phi(n)$.

Sea S el valor de la suma de todos los números coprimos con n que son menores que n .

Veamos, en primer lugar, que los números coprimos con n que son menores que n están «emparejados», de manera que la suma de los dos números que componen cada pareja es, precisamente, igual a n . En efecto, sea $p < n$ un número coprimo con n . Pretendemos demostrar que, en tal situación, $n - p$ es también un número coprimo con n . Para ello, consideremos el número $d = \text{mcd}(n, n - p)$, y veamos que necesariamente se debe cumplir $d = 1$.

De la definición de máximo común divisor, tenemos que, en particular, d es un divisor de n y de $n - p$; por tanto, d debe ser también un divisor de la diferencia de estos dos números, es decir, d es un divisor de $n - (n - p) = p$. Tenemos, entonces, que d es un divisor de n y de p , luego, por definición del máximo común divisor, d ha de ser un divisor del número $\text{mcd}(n, p)$. Pero p y n son coprimos, por hipótesis, lo cual significa que $\text{mcd}(n, p) = 1$. Así pues, hemos probado que d es un divisor de 1, circunstancia que solo es posible si $d = 1$, que es lo que queríamos demostrar.

De este modo, hemos demostrado que, dado un número coprimo con n , menor que n , su «complemento a n » también es coprimo con n —y menor que n —, lo que permite emparejar los números coprimos con n —y menores que n —, de manera que la suma de los dos números que forman cada pareja sea igual a n .

Estamos ya en condiciones de resolver el problema de sumar todos los números coprimos con n que son menores que n : basta con multiplicar el número n por la cantidad de parejas que pueden formarse. Ahora bien, puesto que hay $\phi(n)$ números coprimos con

n que son menores que n, con ellos se pueden formar exactamente $\phi(n)/2$ parejas. Por tanto, el número buscado es:

$$S = n \frac{\phi(n)}{2}.$$

Veamos un ejemplo. Consideremos el caso $n = 26$. Los números coprimos con 26 que son menores que 26 son: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23 y 25. Podemos realizar la suma de todos ellos directamente –ya que son pocos, y conocidos–, u organizándolos por parejas «complementadas a 26»: (1,25), (3,23), (5,21), (7,19), (9,17) y (11,15). De este último modo, la suma de todos estos números es igual al producto de 26 y 6, que son las parejas que se han formado.

Obsérvese que el razonamiento empleado para determinar el valor de S es similar al que se utiliza para obtener la fórmula que permite calcular la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética.

(Oposiciones de Secundaria)

Problema 1.38

Demuestra que $\text{mcd}(a,b) = \text{mcd}(a + b, \text{mcm}(a,b))$. Como aplicación, determina dos números naturales que sumen 282, cuyo mínimo común múltiplo sea 2772.

Sean a y b dos números naturales, y sean $d = \text{mcd}(a,b)$ y $m = \text{mcm}(a,b)$. Con esta notación, el problema consiste en demostrar que $d = \text{mcd}(a + b, m)$, si bien, para verlo, partiremos del segundo miembro y llegaremos al primero. Asimismo, la conocida igualdad $a \cdot b = \text{mcd}(a,b) \cdot \text{mcm}(a,b)$ se escribe como $a \cdot b = d \cdot m$. (I)

Por la definición del máximo común divisor, sabemos que existen dos números coprimos, digamos a' y b' , tales que $a = a' \cdot d$ y $b = b' \cdot d$. Sustituyendo estas expresiones de a y b en (I), tenemos $a' \cdot d \cdot b' \cdot d = d \cdot m$, y, cancelando d, resulta $a' \cdot d \cdot b' = m$, puesto que $d \neq 0$, como es obvio.

Por otro lado, es claro que:

$$a + b = a' \cdot d + b' \cdot d = d(a' + b'),$$

luego, sustituyendo, podemos escribir:

$$\text{mcd}(a + b, m) = \text{mcd}(d(a' + b'), a' \cdot d \cdot b'),$$

de donde, «extrayendo» el factor d, resulta:

$$\text{mcd}(a + b, m) = d \cdot \text{mcd}(a' + b', a' \cdot b').$$

Observemos que esta expresión es muy parecida a la que estamos buscando, salvo que en ella está el factor $\text{mcd}(a' + b', a' \cdot b')$. Ahora bien, si este factor fuera igual a la

unidad, ya tendríamos lo que queremos, por lo que el problema se reduce a demostrar que se cumple la igualdad $\text{mcd}(a' + b', a' \cdot b') = 1$.

Sea, pues, $e = \text{mcd}(a' + b', a' \cdot b')$, y veamos que $e = 1$.

Puesto que $e = \text{mcd}(a' + b', a' \cdot b')$, en particular, e es divisor de $a' + b'$ y de $a' \cdot b'$. Ahora bien, como a' y b' son coprimos, del hecho de que e sea divisor de $a' \cdot b'$, se deduce que e debe ser divisor de a' o de b' . Así pues, tenemos dos posibilidades, que estudiamos a continuación.

Si se da la primera posibilidad, sucede que e es divisor de a' . Pero como también lo es de $a' + b'$, debe serlo de la diferencia entre estos dos números, es decir, e es divisor de $a' + b' - a'$, lo que significa que e también es divisor de b' . Ya que e es divisor de a' y b' , por la definición del máximo común divisor, podemos decir que e es divisor de $\text{mcd}(a', b') = 1$, lo cual solo es posible si $e = 1$. Por tanto, ya hemos probado lo que queríamos.

Si, por el contrario, se da la segunda posibilidad, tenemos que e es divisor de b' . Análogamente al caso anterior, teniendo en cuenta que e también es divisor de $a' + b'$, podemos decir que e es divisor de $a' + b' - b' = a'$, de donde obtenemos, como antes, que $e = 1$.

En conclusión, hemos visto que, en cualquier caso, $\text{mcd}(a' + b', a' \cdot b') = 1$, de donde se sigue que el enunciado de la primera parte del problema es cierto.

Para la aplicación, sean a y b los números buscados. Por el enunciado demostrado en la primera parte del problema, tenemos:

$$\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a + b, \text{mcm}(a, b)) = \text{mcd}(282, 2772) = 6,$$

por lo que, sustituyendo los valores de $\text{mcd}(a, b)$ y $\text{mcm}(a, b)$ en la igualdad $a \cdot b = d \cdot m$, se sigue que $a \cdot b = 6 \cdot 2772 = 16632$. De esta manera, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} a + b = 282 \\ a \cdot b = 16632 \end{cases}.$$

Resolviendo:

$$\begin{cases} a = 282 - b \\ a \cdot b = 16632 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 282 - b \\ (282 - b) \cdot b = 16632 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 282 - b \\ 282b - b^2 = 16632 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 282 - b \\ b^2 - 282b + 16632 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 282 - b \\ b = \frac{282 \pm 114}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 84, b_1 = 198 \\ a_2 = 198, b_2 = 84 \end{cases}.$$

Como es evidente, las dos soluciones obtenidas son realmente una sola, por el papel «simétrico» que tienen los números a y b . Así pues, los números buscados son 84 y 198.

(Examen de Universidad)

Problema 1.39

Demuestra que un número natural n se puede descomponer en diferencia de cuadrados solo si es impar o múltiplo de 4.

Supongamos que el número n se puede descomponer en diferencia de cuadrados. Entonces, existen dos números naturales, digamos x e y , tales que $n = x^2 - y^2$. Usando la conocida identidad algebraica, podemos escribir $n = (x + y)(x - y)$, y, denotando $p = x + y$, $q = x - y$, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} n = pq \\ x + y = p, \\ x - y = q \end{cases}$$

que es equivalente a:

$$\begin{cases} n = pq \\ x = \frac{p+q}{2} \\ y = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

Puesto que x e y son números naturales, de la segunda y de la tercera ecuación se deduce que es necesario que tanto $p + q$ como $p - q$ sean divisibles por 2 (sean pares), lo cual solo es posible si p y q tienen la misma paridad, es decir, si p y q son ambos pares, o si p y q son ambos impares.

Ahora bien, si p y q son pares, el producto de ambos debe ser un múltiplo de 4, luego ya tenemos que $n = pq$ es un múltiplo de 4.

Si se da la otra posibilidad, entonces, tanto p como q son impares, lo que implica que $n = pq$ también debe serlo.

Por tanto, hemos probado que si n se descompone como diferencia de cuadrados, entonces, o es impar o es múltiplo de 4, como se pretendía.

(Examen de Universidad y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 1.40

Demuestra que el número de divisores de un número natural n es impar si, y solo si, n es un cuadrado perfecto.

Consideremos el número n descompuesto en factores primos:

$$n = n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2} \cdot n_3^{k_3} \cdots n_p^{k_p}.$$

Con esta notación, el número de divisores de n , $ND(n)$, viene dado por la expresión:

$$ND(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) \cdots (k_p + 1),$$

por lo que tenemos la siguiente cadena de equivalencias.

El número de divisores de n es impar $\Leftrightarrow ND(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) \cdots (k_p + 1)$ es impar $\Leftrightarrow$ Todos los factores de $ND(n)$ son impares $\Leftrightarrow k_i + 1$ es impar, $\forall i = 1, \dots, p \Leftrightarrow k_i$ es par, $\forall i = 1, \dots, p \Leftrightarrow \exists q_i \in \mathbb{N} / k_i = 2q_i$, $\forall i = 1, \dots, p \Leftrightarrow \exists q_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, p$, tales que $n = n_1^{2q_1} \cdot n_2^{2q_2} \cdot n_3^{2q_3} \cdots n_p^{2q_p} \Leftrightarrow \exists q_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, p$, tales que $n = (n_1^{q_1})^2 (n_2^{q_2})^2 \cdots (n_p^{q_p})^2 \Leftrightarrow \exists q_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, p$, tales que $n = (n_1^{q_1} n_2^{q_2} \cdots n_p^{q_p})^2 \Leftrightarrow n$ es un cuadrado perfecto.

(Oposiciones de Secundaria, 1993, y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 1.41

Demuestra que el producto de cuatro números naturales consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto (el cero no se considera un número natural).

Lo haremos por reducción al absurdo.

Sean n , $n + 1$, $n + 2$ y $n + 3$ cuatro números naturales consecutivos, y supongamos que su producto es un cuadrado perfecto (lo cual nos llevará a una contradicción). Entonces, existe un número natural, digamos x , tal que:

$$x^2 = n(n + 1)(n + 2)(n + 3).$$

Multiplicando el primer factor por el cuarto, y el segundo por el tercero, conseguimos una expresión con dos factores «parejos»:

$$x^2 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2).$$

A fin de incorporar una suma por una diferencia, sumamos 1 en el primer paréntesis (y restamos 1, para «compensar»), y escribimos el 2 del segundo paréntesis como la suma $1 + 1$, resultando:

$$x^2 = (n^2 + 3n + 1 - 1)(n^2 + 3n + 1 + 1).$$

Aplicando la conocida identidad algebraica, tenemos:

$$x^2 = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1,$$

y, trasponiendo términos:

$$(n^2 + 3n + 1)^2 - x^2 = 1.$$

Escribiendo la diferencia de cuadrados del primer miembro como una suma por una diferencia, tenemos:

$$(n^2 + 3n + 1 + x)(n^2 + 3n + 1 - x) = 1,$$

lo cual solo es posible si los dos factores del primer miembro son iguales a 1, puesto que estamos trabajando con números naturales (para que el producto de dos naturales sea igual a 1, ambos deben ser igual a 1). Así pues, hemos llegado al sistema:

$$\begin{cases} n^2 + 3n + 1 + x = 1 \\ n^2 + 3n + 1 - x = 1 \end{cases}.$$

Restando las dos ecuaciones, resulta $x = 0$, y, sustituyendo este valor, se tiene que el sistema es equivalente a la ecuación $n^2 + 3n = 0$, cuyas soluciones son $n = -3$, $n = 0$, ninguna de las cuales es admisible como solución del problema (obsérvese que en el enunciado se ha aclarado que el cero no se considera un natural, por lo que esta solución, que sería realmente la solución trivial del problema, no se acepta).

Así pues, hemos llegado a una contradicción, y, en consecuencia, la suposición inicial es insostenible. Ello se traduce en que el producto de cuatro números naturales consecutivos no puede ser igual a un cuadrado perfecto, como se quería demostrar.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.42

Demuestra que la suma de cuatro números naturales consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.

Lo haremos por reducción al absurdo.

Como en el problema anterior, sean n , $n + 1$, $n + 2$ y $n + 3$ cuatro números naturales consecutivos, y supongamos que su suma es un cuadrado perfecto (lo cual nos llevará a una contradicción). Entonces, existe un número natural, digamos x , tal que:

$$x^2 = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3).$$

Operando y extrayendo factor común, resulta:

$$x^2 = 4n + 6 = 2(2n + 3),$$

de donde se sigue que x^2 es un número par, y, en consecuencia, x también (tengamos en cuenta que x y x^2 tienen los mismos factores primos, aunque con distinto exponente). Entonces, debe existir un número natural, digamos k , tal que $x = 2k$. Sustituyendo esta expresión de x en la igualdad anterior, tenemos:

$$(2k)^2 = 2(2n + 3),$$

y, resolviendo el cuadrado y simplificando, llegamos a:

$$4k^2 = 2(2n + 3) \Leftrightarrow 2k^2 = 2n + 3.$$

Ahora, basta observar que el primer miembro de la última ecuación es un número par, mientras que el segundo es impar, lo cual es absurdo, pues no es posible que un número par y otro impar sean iguales.

De este modo, hemos visto que la suposición de que existen cuatro números naturales consecutivos cuya suma es igual a un cuadrado perfecto es insostenible, lo cual nos permite afirmar que esa situación es imposible, lo que cierra el problema.

(Olimpiadas Matemáticas)

Problema 1.43

Demuestra que el producto de ocho números naturales consecutivos no es nunca la cuarta potencia de un número natural (el cero no se considera un número natural).

Sean $n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5, n + 6, n + 7$ ocho números naturales consecutivos, y consideremos el producto de todos ellos:

$$P = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)(n + 5)(n + 6)(n + 7).$$

Hagamos, de manera similar a como actuamos en el problema 1.41, el producto del primer factor por el último, el del segundo por el penúltimo, el del tercero por el antepenúltimo, y el del cuarto por el quinto, a fin de conseguir cuatro factores lo más «parejos» posible. De este modo, tenemos:

$$P = (n^2 + 7n)(n^2 + 7n + 6)(n^2 + 7n + 10)(n^2 + 7n + 12).$$

Haciendo el cambio de variable $m = n^2 + 7n$, la igualdad anterior se escribe:

$$P = m(m + 6)(m + 10)(m + 12),$$

y, realizando los productos indicados, llegamos a:

$$P = m^4 + 28m^3 + 252m^2 + 720m.$$

Como pretendemos ver si P es igual a una cuarta potencia, y P está expresado mediante un polinomio de cuarto grado en la indeterminada m , buscamos un binomio en m , de la forma $am + b$, cuya cuarta potencia sea igual a P . Para determinar los coeficientes de este binomio, es suficiente observar que el polinomio que define P es mónico (su coeficiente principal es igual a 1), que su segundo coeficiente es 28, y que, en el desarrollo de Newton de la cuarta potencia del binomio $am + b$, el coeficiente principal es a^4 , y el segundo, $4a^3b$. De este modo, identificando coeficientes, podemos afirmar que $a = 1$ y $b = 7$. Así pues, consideramos el monomio $m + 7$.

Sin embargo, desarrollando la cuarta potencia del binomio, se tiene:

$$(m + 7)^4 = m^4 + 28m^3 + 294m^2 + 1372m + 2401,$$

que es claramente mayor que P , puesto que cada coeficiente del desarrollo de $(m + 7)^4$ es mayor que el correspondiente de P , a partir del tercero, mientras que los dos primeros son iguales.

Hemos encontrado, pues, una cuarta potencia que excede a P . Por ello, consideramos la cuarta potencia inmediatamente anterior a esta, es decir, la cuarta potencia de $m + 6$, a fin de ver si es posible que $P = (m + 6)^4$.

Desarrollando, tenemos:

$$(m + 6)^4 = m^4 + 24m^3 + 216m^2 + 864m + 1296,$$

que es menor que P , ya que la diferencia $P - (m + 6)^4$ es mayor que cero, como podemos ver a continuación:

$$P - (m + 6)^4 = m^4 + 28m^3 + 252m^2 + 720m - (m^4 + 24m^3 + 216m^2 + 864m + 1296) \Leftrightarrow$$

$$P - (m + 6)^4 = 4m^3 + 36m^2 - 144m - 1296 = \underbrace{4m^3 - 1296}_{>0} + \underbrace{36m^2 - 144m}_{>0} > 0.$$

En efecto, puesto que $n \geq 1$ (por el enunciado, el cero no se considera un natural), se tiene que $m = n^2 + 7n \geq 8$, y, en consecuencia, tanto $4m^3 - 1296$ como $36m^2 - 144m$ son números mayores que cero, luego la suma de ambos también lo es.

Así pues, hemos demostrado que se cumple la acotación:

$$(m + 6)^4 < P < (m + 7)^4,$$

es decir, P está estrictamente comprendido entre dos cuartas potencias consecutivas, pues es claro que no existe ninguna cuarta potencia entre $(m + 6)^4$ y $(m + 7)^4$. Por tanto, es imposible que P sea igual a una cuarta potencia, tal y como queríamos demostrar.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.44

Demuestra que el número dado por la expresión $a_n = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ es un cuadrado perfecto, para cada natural n .

Procediendo de manera similar a como actuamos en el problema 1.41 y en el anterior, realizamos el producto del primer factor por el cuarto, y del segundo por el tercero, en la expresión que define a_n , con el objetivo de obtener dos factores lo más «parejos» posibles. De este modo, tenemos:

$$a_n = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1,$$

de donde, haciendo el cambio $m = n^2 + 3n$, se sigue:

$$a_n = m(m+2) + 1,$$

y, efectuando el producto indicado, llegamos a la igualdad:

$$a_n = m^2 + 2m + 1,$$

que, a partir de la conocida identidad algebraica, podemos escribir como:

$$a_n = (m+1)^2.$$

Así pues, hemos escrito explícitamente a_n como el cuadrado de un número natural (como n es un número natural, m también debe serlo, pues está definido a partir de la suma del cuadrado de un natural y el producto de dos naturales; y, en consecuencia, $m+1$ también lo es), lo que significa que a_n es un cuadrado perfecto, como queríamos demostrar.

(Oposiciones de Secundaria, 2012, y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 1.45

¿Cuántas cifras tiene el número $n = 762939453125^{89} \cdot 80^{503}$?

Descomponiendo en factores primos, tenemos:

$$n = (5^{17})^{89} \cdot (2^4 \cdot 5)^{503},$$

y, operando:

$$n = 5^{1513} \cdot 2^{2012} \cdot 5^{503} = 5^{2016} \cdot 2^{2012} = 5^4 \cdot 5^{2012} \cdot 2^{2012} = 5^4 \cdot 10^{2012} = 625 \cdot 10^{2012} \Leftrightarrow$$

$$n = 625 \underbrace{000 \dots 00}_{2012 \text{ ceros}}.$$

Resulta claro, pues, que n está formado por las tres cifras 6, 2, 5, seguidas de 2012 ceros. Por tanto, n tiene 2015 cifras.

(Adaptado de Olimpiadas Matemáticas)

Problema 1.46

Calcula el producto de todos los números naturales menores de 2012 que tengan exactamente 7 divisores positivos. Comprueba además que dicho número es un cuadrado perfecto.

Sea n un número natural que satisface las condiciones dadas en el enunciado. Teniendo en cuenta la descomposición en factores primos de n , podemos escribir:

$$n = n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2} \cdot n_3^{k_3} \cdots n_p^{k_p}.$$

Con esta notación, a partir de la fórmula que nos permite calcular el número de divisores de n , $ND(n)$, tenemos la igualdad:

$$ND(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) \cdots (k_p + 1) = 7.$$

Puesto que n_i es un factor primo de n solo si $k_i \geq 1$, sumando 1 en cada miembro, resulta que el factor n_i está presente en la descomposición de n únicamente si se satisface que $k_i + 1 \geq 2$. Entonces, como 7 es un número primo que aparece igualado a un producto de números naturales no menores que 2, la única posibilidad es que el producto $(k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) \cdots (k_p + 1)$ esté formado realmente por un único factor, precisamente el 7. Por tanto, tenemos $p = 1$ y $k_1 + 1 = 7$, de donde $k_1 = 6$. Así pues, denotando $a = n_1$, podemos escribir n de una forma más sencilla, como $n = a^6$, siendo a un número primo. Además, n es menor de 2012, luego, tomando raíz sexta, tenemos que a es menor de 3,55.

De este modo, los números que cumplen las condiciones del enunciado son las sextas potencias de los primos menores que 3,55; es decir, los números 2^6 y 3^6 , cuyo producto es igual a 46656, que es la respuesta a la primera parte del problema. La segunda parte es trivial, pues $(216)^2 = 46656$.

(Adaptado de Olimpiadas Matemáticas)

Problema 1.47

Determina todas las maneras posibles de escribir 2012 como la suma de los cuadrados de dos números naturales.

El problema consiste en encontrar todos los números naturales m y n que cumplan que $m^2 + n^2 = 2012$.

Veremos que esta ecuación no tiene solución dentro de los naturales, por reducción al absurdo, suponiendo que tiene solución y viendo que ello nos lleva a una contradicción, lo que permitirá afirmar que la ecuación no tiene solución.

Supongamos, pues, que m y n son dos naturales que verifican esa ecuación. Puesto que 2012 es par, necesariamente m^2 y n^2 deben tener la misma paridad, esto es, o son ambos pares o son ambos impares (la suma de un número par y otro impar da como resultado un número impar). Estamos entonces ante dos situaciones distintas, que estudiaremos por separado.

Si m^2 y n^2 son pares, entonces, también lo son m y n (recordemos que m^2 tiene los mismos factores primos que m , aunque con mayor exponente, y análogamente con n^2 y n). Por tanto, existen dos naturales, digamos p y q , tales que $m = 2p$, $n = 2q$. Sustituyendo en la ecuación de partida, resulta:

$$(2p)^2 + (2q)^2 = 2012,$$

y, operando y simplificando, se sigue:

$$4p^2 + 4q^2 = 2012 \Leftrightarrow p^2 + q^2 = 503.$$

Ahora, puesto que 503 es un número impar, es necesario que p^2 y q^2 tengan distinta paridad, esto es, que uno sea par y otro impar. Por el papel «simétrico» de ambos números, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que p^2 es par y q^2 es impar, luego deben existir dos números naturales, digamos r y s , tales que $p = 2r$ y $q = 2s + 1$. Sustituyendo estas expresiones en la última ecuación y desarrollando los cuadrados, se tiene:

$$(2r)^2 + (2s + 1)^2 = 503 \Leftrightarrow 4r^2 + 4s^2 + 4s + 1 = 503,$$

y, trasponiendo:

$$4r^2 + 4s^2 + 4s = 502 \Leftrightarrow r^2 + s^2 + s = \frac{502}{4} \Leftrightarrow r^2 + s^2 + s = 125'5,$$

lo cual es absurdo, puesto que el primer miembro de la última ecuación debe ser un número natural, al serlo r y s , mientras que el segundo no lo es. Por tanto, hemos visto que la suposición de que m^2 y n^2 sean pares nos lleva a una contradicción, por lo que tal situación es insostenible.

Si m^2 y n^2 son impares, entonces, deben existir dos naturales, digamos t y u , tales que $m = 2t + 1$ y $n = 2u + 1$. Sustituyendo en la ecuación inicial, resulta:

$$(2t + 1)^2 + (2u + 1)^2 = 2012.$$

Desarrollando los cuadrados:

$$4t^2 + 4t + 1 + 4u^2 + 4u + 1 = 2012,$$

y, trasponiendo:

$$4t^2 + 4t + 4u^2 + 4u = 2010 \Leftrightarrow t^2 + t + u^2 + u = \frac{2010}{4} \Leftrightarrow t^2 + t + u^2 + u = 502'5,$$

igualdad que también representa una contradicción, por la misma razón de antes: el primer miembro debe ser un natural, por serlo t y u , pero el segundo no lo es.

De este modo, hemos visto que ninguna de las dos posibilidades señaladas es admisible, lo cual prueba, por reducción al absurdo, que la ecuación de partida no tiene solución, como habíamos dicho al principio. Así pues, no es posible escribir 2012 como la suma de los cuadrados de dos números naturales.

(Adaptado de Olimpiadas Matemáticas)

Problema 1.48

Demuestra que la suma de todas las cifras del número $n = 10^{2012} - 9991$ es múltiplo de 2009. Determina si también n es múltiplo de 2009.

Para la primera parte del problema, denotemos por s el resultado de sumar todas las cifras del número n .

Realizando la diferencia indicada en la definición de n , tenemos:

$$n = \underbrace{1000\dots000}_{2012 \text{ ceros}} - 9991 = \underbrace{999\dots99}_{2008 \text{ nueves}}0009.$$

Entonces, para calcular s , hemos de sumar el número 9 un total de 2009 veces, es decir, $s = 9 \cdot 2009$, lo que permite ver claramente que s es múltiplo de 2009, como queríamos demostrar.

Para la segunda parte del problema, tengamos presente, en primer lugar, la descomposición en factores primos $2009 = 7^2 \cdot 41$, que implica que, para que n sea múltiplo de 2009, es necesario, en particular, que lo sea también de 41. Sin embargo, n no es múltiplo de 41, como veremos a continuación, luego n no es múltiplo de 2009.

En efecto, para calcular el valor de 10^{2012} módulo 41, hemos de hallar 10^k módulo 41, para los sucesivos valores naturales de k , comenzando por $k = 0$, hasta encontrar el «gaussiano», pues a partir de ahí los valores se repetirán cíclicamente.

Para $k = 0$, tenemos trivialmente $10^0 = 1 \equiv 1(\text{mod } 41)$.

Para $k = 1$, resulta $10^1 = 10 \equiv 10(\text{mod } 41)$.

Para $k = 2$, $10^2 = 100 \equiv 18(\text{mod } 41)$.

Para $k = 3$, $10^3 = 10^2 \cdot 10 \equiv 18 \cdot 10(\text{mod } 41) \equiv 180(\text{mod } 41) \equiv 16(\text{mod } 41)$.

Para $k = 4$, $10^4 = 10^3 \cdot 10 \equiv 16 \cdot 10(\text{mod } 41) \equiv 160(\text{mod } 41) \equiv 37(\text{mod } 41)$.

Para $k = 5$, ya tenemos $10^5 = 10^4 \cdot 10 \equiv 37 \cdot 10(\text{mod } 41) \equiv 370(\text{mod } 41) \equiv 1(\text{mod } 41)$, luego el gaussiano es $g = 5$.

Ahora, haciendo la división euclídea de 2012 entre 5, tenemos $2012 = 402 \cdot 5 + 2$, luego:

$$10^{2012} = 10^{402 \cdot 5 + 2} = 10^{402 \cdot 5} \cdot 10^2 = (10^5)^{402} \cdot 10^2 \equiv 1^{402} \cdot 18 \pmod{41} \equiv 18 \pmod{41}.$$

Por otro lado, tenemos la congruencia:

$$9991 \equiv 28 \pmod{41}.$$

Restando, resulta:

$$n = 10^{2012} - 9991 \equiv 18 - 28 \pmod{41} \equiv -10 \pmod{41},$$

de donde se desprende que n no es múltiplo de 41, pues el resultado de la congruencia n módulo 41 no es nulo.

Con lo dicho, queda claro que n no es múltiplo de 2009, lo que cierra el problema.

(Adaptado de examen de Universidad)

Problema 1.49

Resuelve los siguientes apartados, donde todos los números se expresan en el sistema decimal.

- Encuentra el menor número tal que al suprimir su primera cifra de la izquierda quede reducido a su quinta parte.*
- Demuestra que no existe ningún número tal que al suprimir su primera cifra de la izquierda quede reducido a su doceava parte.*
- Establece un criterio general que permita determinar cuándo existe un número que quede reducido k veces al suprimir su primera cifra.*

En todos los apartados utilizaremos la notación que se detalla a continuación:

Supongamos que el número buscado, n , tiene $p + 1$ cifras en base 10, con $p \geq 1$ (si $p = 0$, entonces, el número tendría 1 cifra, y sería absurdo plantear la posibilidad de suprimir su primera cifra de la izquierda). Entonces, podemos escribir:

$$n = n_p n_{p-1} n_{p-2} \cdots n_1 n_0 = n_p 10^p + n_{p-1} 10^{p-1} + n_{p-2} 10^{p-2} + \cdots + n_1 10^1 + n_0 10^0,$$

donde n_i son las cifras de n en base 10.

Sea m el número resultante de suprimir la primera cifra de la izquierda de n . Entonces, m se escribe en base 10 como:

$$m = n_{p-1} n_{p-2} \cdots n_1 n_0 = n_{p-1} 10^{p-1} + n_{p-2} 10^{p-2} + \cdots + n_1 10^1 + n_0 10^0,$$

de donde podemos obtener la siguiente relación entre n y m :

$$n = n_p 10^p + \underbrace{n_{p-1} 10^{p-1} + n_{p-2} 10^{p-2} + \cdots + n_1 10^1 + n_0 10^0}_m = n_p 10^p + m. \quad (I)$$

Ahora, ya estamos en condiciones de abordar los tres apartados del problema por separado.

Con la notación introducida, el enunciado del apartado a) se traduce en buscar el menor número n que cumpla la ecuación:

$$m = \frac{n}{5}.$$

Sustituyendo la igualdad (I) en esta ecuación, resulta:

$$m = \frac{n_p 10^p + m}{5},$$

y, operando y trasponiendo términos, se sigue:

$$5m = n_p 10^p + m \Leftrightarrow 4m = n_p 10^p \Leftrightarrow m = \frac{n_p 10^p}{4}.$$

Como $p \geq 1$, tiene sentido escribir:

$$m = \frac{n_p 10 \cdot 10^{p-1}}{4},$$

y, simplificando, llegamos a la ecuación:

$$m = \frac{n_p 5 \cdot 10^{p-1}}{2}. \quad (II)$$

Puesto que m es un número natural, el cociente indicado por la fracción debe ser exacto, lo cual solo se cumple si 2 es divisor de n_p y/o 2 es divisor de 10^{p-1} . Ahora bien, como estamos buscando el menor número que cumpla esta propiedad, hemos de pedir que p sea lo menor posible, ya que cuantas menos cifras tenga n , menor será. Así pues, como cabe la posibilidad de que $p = 1$, siempre que n_p sea múltiplo de 2, elegimos este valor de p , y exigimos que n_p , es decir, n_1 , sea múltiplo de 2. De este modo, n tendrá dos cifras. Tengamos también en cuenta que, en esta situación, n_1 es la primera cifra de la izquierda de n , por lo que este número será menor cuanto menor

sea n_1 . Eligiendo $n_1 = 2$, que es el menor múltiplo de 2, sustituyendo estos valores en (II), y operando, tenemos:

$$m = \frac{n_1 \cdot 5 \cdot 10^{1-1}}{2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^0}{2} = 5,$$

es decir, la segunda (y última) cifra de n es 5. Así pues, tenemos $n = 25$, que cumple lo pedido, como es claro.

Resolvamos ahora el apartado b), por reducción al absurdo. Para ello, supondremos que existe tal número y veremos que ello nos lleva a una contradicción.

Si existe un número así, debe cumplirse la ecuación:

$$m = \frac{n}{12}.$$

Procediendo de manera análoga a como actuamos en el apartado a), tenemos:

$$m = \frac{n}{12} \Leftrightarrow m = \frac{n_p 10^p + m}{12} \Leftrightarrow 12m = n_p 10^p + m \Leftrightarrow 11m = n_p 10^p \Leftrightarrow m = \frac{n_p 10^p}{11}.$$

Para que la división sea exacta, es necesario que 11 sea divisor del numerador, lo cual solo es posible si 11 es divisor de n_p o si lo es de 10^p , al ser 11 un número primo. Ahora bien, la primera posibilidad es absurda, puesto que $1 \leq n_p \leq 9$ (tengamos en cuenta que n_p es la primera cifra de un número escrito en base 10), y no existe ningún múltiplo de 11 comprendido entre 1 y 9; la segunda tampoco es aceptable, ya que, en virtud del criterio de divisibilidad, 11 no puede ser divisor de 10^p . Así pues, vemos que, en cualquier caso, llegamos a una contradicción, de donde se desprende que la suposición inicial es insostenible y, en consecuencia, el enunciado del apartado b) es cierto.

Como hemos visto, para algunos valores del número natural k es posible encontrar un número tal que al suprimir su primera cifra de la izquierda quede reducido a su k -ésima parte, mientras que para otros valores de k no lo es. Así pues, cabe preguntarse qué condiciones deben darse para que se produzca esta situación, que es precisamente lo que se plantea en el apartado c), enfocado desde un punto de vista general. Lo veremos de manera análoga a los casos anteriores.

Supongamos que k y n son dos números naturales que cumplen la condición dada en el enunciado. Entonces, tenemos la ecuación:

$$m = \frac{n}{k},$$

de la que, sustituyendo, operando y trasponiendo términos, se sigue:

$$m = \frac{n}{k} \Leftrightarrow m = \frac{n_p 10^p + m}{k} \Leftrightarrow km = n_p 10^p + m \Leftrightarrow (k-1)m = n_p 10^p \Leftrightarrow m = \frac{n_p 10^p}{k-1}.$$

Así pues, es necesario y suficiente que $k - 1$ sea divisor de $n_p 10^p$. Por tanto, los factores primos de $k - 1$ deben ser los mismos de 10^p (es decir, 2 y 5) y/o de n_p , y deben aparecer con menor exponente que en 10^p y/o n_p . Lo dicho se traduce en que $k - 1$ debe ser de la forma $k - 1 = q \cdot 2^t \cdot 5^s$, siendo t y s dos naturales menores o iguales que p (eventualmente nulos), y q un divisor de n_p . Ahora bien, como se verifica $1 \leq n_p \leq 9$, resulta también $1 \leq q \leq 9$. En consecuencia, la condición que buscamos es que k pueda expresarse de la forma $k = q \cdot 2^t \cdot 5^s + 1$, siendo $1 \leq q \leq 9$, $0 \leq t \leq p$, $0 \leq s \leq p$, con q divisor de n_p .

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.50

Dado un número natural $n \geq 1$, determina la cantidad de pares de números naturales (a, b) que satisfacen la ecuación:

$$\frac{ab}{a+b} = n.$$

Supongamos que a y b son dos números naturales que cumplen la ecuación. Entonces, trasponiendo términos y operando, resulta:

$$ab = n(a+b) \Leftrightarrow ab = an + bn \Leftrightarrow ab - an = bn \Leftrightarrow a(b-n) = bn \Leftrightarrow a = \frac{bn}{b-n}.$$

Obsérvese que es posible trasponer la diferencia $b - n$, ya que esta es nula solo si $b = n$, en cuyo caso la penúltima ecuación sería $0 = n^2$, lo cual no tiene sentido, pues, según el enunciado, $n \geq 1$.

Considerando el numerador y el denominador de la fracción del segundo miembro de la última ecuación como polinomios de primer grado en la indeterminada b y haciendo la división correspondiente, tenemos:

$$a = n + \frac{n^2}{b-n}.$$

Ahora bien, como a es un número natural, es claro que la división indicada por la fracción debe ser exacta, lo cual se traduce en que $b - n$ tiene que ser divisor de n^2 . Entonces, ha de existir un número natural, digamos k , tal que $n^2 = k(b - n)$, de donde, trasponiendo y operando, se sigue:

$$n^2 = kb - kn \Leftrightarrow kb = n^2 + kn \Leftrightarrow b = \frac{n^2 + kn}{k} \Leftrightarrow b = \frac{n^2}{k} + \frac{kn}{k} \Leftrightarrow b = \frac{n^2}{k} + n.$$

Pero sucede que b también es un número natural, lo que hace necesario, como antes, que la división indicada por la fracción sea exacta, situación que se da solo si k es divisor de n^2 .

Por otro lado, sustituyendo la expresión de b dada por:

$$b = \frac{n^2 + kn}{k},$$

en la de a que obtuvimos antes, y simplificando, resulta:

$$a = \frac{bn}{b-n} = \frac{\frac{n^2 + kn}{k} \cdot n}{\frac{n^2 + kn}{k} - n} = \frac{\frac{(n^2 + kn)n}{k}}{\frac{n^2 + \cancel{kn} - \cancel{kn}}{k}} = \frac{\frac{(n+k)\cancel{n^2}}{\cancel{k}}}{\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{k}}} = n + k.$$

De este modo, hemos demostrado que si a y b son dos naturales que verifican la ecuación del enunciado, entonces, han de ser de la forma:

$$a = n + k, \quad b = \frac{n^2 + kn}{k}, \quad (I)$$

siendo k un divisor de n^2 .

Veamos ahora que el recíproco también es cierto, esto es, que siempre que k sea divisor de n^2 , los números a y b dados por las relaciones (I) verifican la ecuación de partida.

En efecto, sea k un divisor de n^2 y consideremos los números a y b definidos por las relaciones (I). Sustituyendo estas expresiones de a y b en el primer miembro de la ecuación del enunciado y operando, resulta:

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{(n+k)\frac{n^2 + kn}{k}}{n+k + \frac{n^2 + kn}{k}} = \frac{\frac{(n+k)(n^2 + kn)}{\cancel{k}}}{\frac{kn + k^2 + n^2 + kn}{\cancel{k}}} = \frac{(n+k)(n+k)n}{k^2 + n^2 + 2kn} = \frac{\cancel{(n^2 + k^2 + 2kn)}n}{\cancel{k^2 + n^2 + 2kn}} = n,$$

luego tenemos que a y b cumplen la ecuación inicial, como pretendíamos demostrar.

Con todo lo visto, podemos decir que cada pareja de números naturales (a,b) que constituye una solución de la ecuación está determinada por un divisor de n^2 y, en consecuencia, existen tantas parejas de soluciones de la ecuación como divisores tiene el número n^2 , lo que responde a la pregunta del enunciado y cierra el problema.

(Examen de Universidad y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 1.51

Halla un número capicúa de 4 cifras que sea múltiplo de 45.

Puesto que el número es capicúa y tiene 4 cifras, escrito en base 10 debe ser de la forma $abba$. Por otro lado, como debe ser múltiplo de 45, en particular, debe serlo de 5 y de 9.

Entonces, al ser múltiplo de 5, la última cifra debe ser 0 o 5, por el criterio de divisibilidad del 5; pero no puede ser 0, pues en tal caso sería de la forma $0bb0$, y no tendría 4 cifras, sino 3. Por tanto, la última cifra es 5, y el número tiene la forma $5bb5$.

Como, además, es múltiplo de 9, por el criterio de divisibilidad del 9, la suma de sus cifras también debe serlo, luego $5 + b + b + 5 = 2b + 10$ es múltiplo de 9.

Ahora bien, b es una cifra del número escrito en base 10, lo cual implica $0 \leq b \leq 9$. Multiplicando por 2 y sumando 10, tenemos $10 \leq 2b + 10 \leq 28$.

Así, estamos buscando un múltiplo de 9 comprendido entre 10 y 28. Como solo el 18 y el 27 cumplen estas condiciones, tenemos dos posibilidades: $2b + 10 = 18$ o $2b + 10 = 27$.

En el primer caso, se obtiene $b = 4$, por lo que el número 5445 constituye una solución del problema; en el segundo, llegamos a $b = 8.5$, lo cual no es una solución válida, pues no es un número natural comprendido entre 0 y 9, como cabe esperar de una cifra en base 10. Por tanto, el 5445 es la única solución posible.

(Examen de Universidad)

Problema 1.52

En la descomposición en factores primos de un número natural n solo aparecen las potencias de 2, de 5 y de 7. Se sabe que el número $5n$ tiene 8 divisores más que n y que $8n$ tiene 18 divisores más que n . Halla el número n y calcula la suma de todos sus divisores.

Puesto que en la descomposición en factores primos de n solo aparecen las potencias de 2, de 5 y de 7, podemos escribir:

$$n = 2^x \cdot 5^y \cdot 7^z,$$

para ciertos números naturales x, y, z , que debemos calcular.

En consecuencia:

$$5n = 2^x \cdot 5^{y+1} \cdot 7^z \quad \text{y} \quad 8n = 2^{x+3} \cdot 5^y \cdot 7^z.$$

A partir de esta descomposición en factores primos, podemos escribir el número de divisores de cada uno de estos números, en función de x, y, z , mediante las expresiones:

$$\begin{cases} ND(n) = (x+1)(y+1)(z+1) \\ ND(5n) = (x+1)(y+2)(z+1) \\ ND(8n) = (x+4)(y+1)(z+1) \end{cases} \quad (I)$$

Por otro lado, de la relación existente entre el número de divisores de estos números, dada en el enunciado, se tiene el sistema:

$$\begin{cases} \text{ND}(5n) = \text{ND}(n) + 8 \\ \text{ND}(8n) = \text{ND}(n) + 18 \end{cases} \quad (\text{II})$$

Sustituyendo (I) en (II), obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} (x+1)(y+2)(z+1) = (x+1)(y+1)(z+1) + 8 \\ (x+4)(y+1)(z+1) = (x+1)(y+1)(z+1) + 18 \end{cases}$$

del que, trasponiendo términos, extrayendo factores comunes, y operando, resulta:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x+1)(y+2)(z+1) - (x+1)(y+1)(z+1) = 8 \\ (x+4)(y+1)(z+1) - (x+1)(y+1)(z+1) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} (x+1)(z+1)[(y+2) - (y+1)] = 8 \\ (y+1)(z+1)[(x+4) - (x+1)] = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(z+1) = 8 \\ 3(y+1)(z+1) = 18 \end{cases} \end{aligned}$$

Simplificando la segunda ecuación y factorizando los números del segundo miembro, queda:

$$\begin{cases} (x+1)(z+1) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ (y+1)(z+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \end{cases}$$

Ahora bien, puesto que en la descomposición en factores primos de n están presentes las potencias de 2, de 5 y de 7, es necesario que los exponentes de cada una de estas bases sean estrictamente mayores que cero, pues de otro modo no estarían las tres potencias. Entonces, se tiene $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$, y, en consecuencia, $x+1 \geq 2$, $y+1 \geq 2$, $z+1 \geq 2$.

Ello se traduce, en particular, en que ninguno de los factores que aparecen en el primer miembro de las ecuaciones del último sistema puede ser igual a 1. Teniendo en cuenta esto, y que las soluciones que buscamos son números naturales, de la factorización expresada en la segunda ecuación del sistema, se deducen, en principio, dos posibilidades:

- 1) $y+1 = 2$, $z+1 = 3$.
- 2) $y+1 = 3$, $z+1 = 2$.

Ahora bien, la primera de estas dos posibilidades lleva a una contradicción, pues al sustituir en la primera ecuación del sistema, resulta $3(x+1) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, lo cual es absurdo, ya que en la factorización de la izquierda aparece el número 3, y en la de la derecha no

(tenemos en cuenta que x es un número natural). Así, tenemos que la segunda posibilidad ha de ser cierta y, por tanto, $y = 2$, $z = 1$. Sustituyendo en la primera ecuación del sistema y despejando, obtenemos el valor de x :

$$2(x+1) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ya podemos sustituir los valores de x , y , z en la descomposición factorial de n , para calcular este número, como se pretendía:

$$n = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 1400.$$

Finalmente, podemos obtener la suma de todos los divisores del número, que denotamos por S , a partir de la conocida fórmula, resultando:

$$S = \frac{2^{3+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^{2+1} - 1}{5 - 1} \cdot \frac{7^{1+1} - 1}{7 - 1} = \frac{15}{1} \cdot \frac{124}{4} \cdot \frac{48}{6} = 3720.$$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.53

La descomposición en factores primos de un natural n es de la forma $n = a^x \cdot b^y \cdot c^z$. Se sabe que n tiene 60 divisores, y que el máximo común divisor de todos los posibles valores de n es 900. Determina los valores que puede tomar n .

Sean n_i , $i = 1, \dots, p$, los distintos valores que puede tomar el número n . Puesto que el máximo común divisor de los n_i es 900, podemos escribir:

$$\text{mcd}(n_i, i = 1, \dots, p) = 900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2.$$

Teniendo en cuenta que n es de la forma $n = a^x \cdot b^y \cdot c^z$, de la anterior descomposición en factores primos se deduce que $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, y que $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$, ya que el máximo común divisor de los n_i está formado por los factores primos comunes a todos ellos, con el menor exponente.

Solo falta, pues, hallar el valor de los exponentes. Para ello, usamos la expresión que nos da el número de divisores de n , que, según el enunciado, debe ser igual a 60, obteniéndose la igualdad:

$$ND(n) = (x+1)(y+1)(z+1) = 60,$$

de donde, factorizando, se sigue la ecuación:

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Tengamos en cuenta, a la hora de identificar unos factores con otros en la ecuación (las incógnitas son números naturales), que todos los del primer miembro son mayores o iguales que 3, puesto que $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$, como hemos dicho antes. En consecuencia, los factores del segundo miembro deben «emparejarse» de manera que no quede ningún factor 2 «suelto», manteniendo un total de 3 factores. De este modo, la ecuación queda $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 3 \cdot 4 \cdot 5$. Identificando de todas las maneras posibles unos factores con otros, obtenemos todos los posibles valores de n , como se pretendía:

$$\left. \begin{array}{l} x+1=3 \\ y+1=4 \\ z+1=5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{array} \right., \text{ luego } n_1 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4 = 67500.$$

$$\left. \begin{array}{l} x+1=3 \\ y+1=5 \\ z+1=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ y=4 \\ z=3 \end{array} \right., \text{ luego } n_2 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 = 40500.$$

$$\left. \begin{array}{l} x+1=4 \\ y+1=3 \\ z+1=5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \\ z=4 \end{array} \right., \text{ luego } n_3 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 = 45000.$$

$$\left. \begin{array}{l} x+1=4 \\ y+1=5 \\ z+1=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=4 \\ z=2 \end{array} \right., \text{ luego } n_4 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 16200.$$

$$\left. \begin{array}{l} x+1=5 \\ y+1=3 \\ z+1=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ y=2 \\ z=3 \end{array} \right., \text{ luego } n_5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 18000.$$

$$\left. \begin{array}{l} x+1=5 \\ y+1=4 \\ z+1=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ y=3 \\ z=2 \end{array} \right., \text{ luego } n_6 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 10800.$$

(Adaptado de Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1975)

Problema 1.54

Un número natural tiene dos factores primos y 8 divisores naturales. La suma de sus divisores es igual a 320. Halla el número.

Sea n el número natural buscado. Puesto que n tiene dos factores primos, podemos escribir $n = a^x \cdot b^y$, donde $x \geq 1$, $y \geq 1$. A partir de la conocida expresión que proporciona el número de divisores de n , $ND(n)$, teniendo en cuenta que, según el enunciado, deben ser 8, obtenemos la igualdad:

$$ND(n) = (x+1)(y+1) = 8,$$

que, factorizando, nos lleva a la ecuación:

$$(x+1)(y+1) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Puesto que los factores del primer miembro son mayores o iguales que 2 (tengamos en cuenta que $x \geq 1$, $y \geq 1$), ninguno de ellos puede ser 1, de lo que resulta, «emparejando» los factores primos de la única manera posible, la ecuación:

$$(x+1)(y+1) = 2 \cdot 4.$$

Ahora bien, como en la descomposición en factores primos de n no se ha establecido el valor de cada base, podemos asociar libremente los factores de ambos miembros, obteniéndose:

$$\left. \begin{array}{l} x+1=2 \\ y+1=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \end{array} \right.,$$

de donde se desprende $n = a \cdot b^3$.

Para hallar las bases, igualamos la suma de los divisores de n a 320, como plantea el enunciado, obteniéndose la igualdad:

$$S = \frac{a^{1+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{3+1} - 1}{b - 1} = 320.$$

Teniendo en cuenta que en la igualdad hay dos diferencias de cuadrados, podemos factorizar, y, simplificando, resulta:

$$\frac{a^2 - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^4 - 1}{b - 1} = 320 \Leftrightarrow \frac{(a+1)(a-1)}{a-1} \cdot \frac{(b^2+1)(b+1)(b-1)}{b-1} = 320 \Leftrightarrow$$

$$(a+1)(b^2+1)(b+1) = 320.$$

Ahora bien, puesto que a es uno de los factores primos de n , necesariamente ha de ser $a \geq 2$, de donde se sigue $a + 1 \geq 3$. Podemos, pues, escribir:

$$320 = (a + 1)(b^2 + 1)(b + 1) \geq 3(b^2 + 1)(b + 1),$$

y, en consecuencia:

$$(b^2 + 1)(b + 1) \leq \frac{320}{3} = 106, \bar{6}.$$

De esta manera, los valores del número natural $(b^2 + 1)(b + 1)$ están acotados por 106, lo cual reduce los posibles valores de b . Veamos los distintos casos, teniendo en cuenta que $b \geq 2$, al ser también un factor primo de n .

Si $b = 2$, entonces, al sustituir, la igualdad:

$$(a + 1)(b^2 + 1)(b + 1) = 320 = 2^6 \cdot 5,$$

se convierte en la ecuación:

$$(a + 1) \cdot 5 \cdot 3 = 2^6 \cdot 5,$$

lo cual es absurdo, puesto que el factor primo 3 aparece en el primer miembro, y en el segundo no.

Si $b = 3$, tenemos:

$$(a + 1) \cdot 10 \cdot 4 = 2^6 \cdot 5,$$

y, simplificando, $a + 1 = 8$, de donde $a = 7$. Ello da lugar al número:

$$n = ab^3 = 7 \cdot 3^3 = 189,$$

que es una solución del problema (la única, en realidad, como veremos a continuación).

Finalmente, si $b \geq 5$, que es el siguiente número primo (tenemos en cuenta que b es un número primo, por lo que no puede ser $b = 4$), la expresión $(b^2 + 1)(b + 1)$ supera la cota marcada por el 106, por lo que no hay más posibles valores de b .

Así pues, en conclusión, la única solución posible es $n = 189$.

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1971)

Problema 1.55

Halla un número que tiene 6 divisores, sabiendo además que el producto de los mismos es igual a 8000.

Sea n el número buscado, y denotemos por P el producto de todos sus divisores.

Puesto que $P = 8000 = 2^6 \cdot 5^3$ es el producto de todos los divisores de n , es claro que los factores primos de n son 2 y 5, por lo que podemos escribir $n = 2^x \cdot 5^y$, para ciertos números naturales x e y que calcularemos a continuación.

Como n tiene 6 divisores, esto es, $ND(n) = 6$, de la fórmula que proporciona el producto de los mismos, resulta:

$$P = \sqrt{n^{ND(n)}} = \sqrt{n^6} = n^3,$$

luego:

$$P = 2^6 \cdot 5^3 = (2^x \cdot 5^y)^3.$$

Operando e identificando exponentes, se sigue:

$$2^6 \cdot 5^3 = 2^{3x} \cdot 5^{3y} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ 3y = 3 \end{cases},$$

de donde $x = 2$, $y = 1$. Así pues, el número buscado es $n = 2^2 \cdot 5^1 = 20$.

(Examen de Universidad)

Problema 1.56

Consideremos un triángulo rectángulo cuyos lados son naturales. Demuestra que el producto de los catetos es múltiplo de 12.

Denotemos la hipotenusa del triángulo rectángulo por a , y los catetos por b y c . Con esta notación, se trata de demostrar que el producto bc es múltiplo de 12, para lo cual es suficiente con probar separadamente que bc es múltiplo de 3 y de 4, ya que estos números son coprimos, y su producto es igual a 12.

Veamos, pues, que bc es múltiplo de 3:

Lo haremos por reducción al absurdo. Para ello, supondremos que el producto bc no es múltiplo de 3, y veremos que en tal caso llegamos a una contradicción, lo que hará insostenible esta hipótesis y, en consecuencia, tendremos que bc sí que es múltiplo de 3.

En efecto, si el producto bc no es múltiplo de 3, es claro que ni b ni c son múltiplos de 3. Entonces, tanto b y 3 como c y 3 están en las hipótesis del Pequeño Teorema de Fermat, por lo que podemos escribir:

$$b^2 \equiv 1 \pmod{3} \text{ y } c^2 \equiv 1 \pmod{3},$$

y, sumando estas dos congruencias, tenemos:

$$b^2 + c^2 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Ahora bien, por el Teorema de Pitágoras, sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, de donde, sustituyendo en la congruencia, se sigue:

$$a^2 \equiv 2 \pmod{3},$$

lo cual es absurdo, puesto que si a es múltiplo de 3, entonces:

$$a \equiv 0 \pmod{3},$$

y, por tanto:

$$a^2 \equiv 0 \pmod{3};$$

pero si a no es múltiplo de 3, entonces, a y 3 también están en las hipótesis del Pequeño Teorema de Fermat, de donde se sigue:

$$a^2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Así pues, vemos que en ningún caso es posible que se cumpla la congruencia:

$$a^2 \equiv 2 \pmod{3},$$

y ya hemos encontrado la contradicción que perseguíamos.

Veamos ahora que bc es múltiplo de 4:

En principio, cabe plantear tres situaciones distintas, que estudiaremos por separado: que b y c sean ambos pares, que sean los dos impares, o que uno sea par y el otro impar.

Si son los dos pares, es claro que el producto bc es múltiplo de 4, y no hay nada más que demostrar.

Si los dos fueran impares, entonces, podríamos escribir $b = 2p + 1$ y $c = 2q + 1$, para ciertos números naturales p y q . Elevando al cuadrado los dos miembros de ambas ecuaciones, resulta:

$$b^2 = 4p^2 + 4p + 1 \text{ y } c^2 = 4q^2 + 4q + 1,$$

lo que implica:

$$b^2 \equiv 1 \pmod{4} \text{ y } c^2 \equiv 1 \pmod{4},$$

puesto que los dos primeros términos del segundo miembro de cada ecuación son múltiplos de 4, es decir, son congruentes con 0 módulo 4. Sumando las dos congruencias obtenidas, se sigue:

$$b^2 + c^2 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras, tenemos $a^2 = b^2 + c^2$, y sustituyendo, como antes, llegamos a:

$$a^2 \equiv 2 \pmod{4}. \quad (I)$$

Ahora bien, también por el Teorema de Pitágoras, vemos con claridad que a^2 es par, al ser la suma de dos números impares (si b y c son impares, como estamos suponiendo, entonces, sus cuadrados también lo son). Pero que a^2 sea par significa que a también lo es, pues a^2 no tiene más factores primos que los de a . Entonces, a^2 no solo es par, sino que, además, es múltiplo de 4, al ser el cuadrado de un número par, lo que se traduce en la congruencia:

$$a^2 \equiv 0 \pmod{4},$$

que contradice (I), por lo que hemos llegado a una situación absurda. Puesto que esta contradicción proviene de la suposición de que b y c son impares, llegamos a la conclusión de que tal situación no puede producirse.

Supongamos, por último, que uno de estos números es par y el otro es impar. Por el papel simétrico que tienen los números b y c , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que b es par y c es impar. Por el Teorema de Pitágoras, tenemos que a^2 es impar, ya que es igual a la suma de un número par (b^2) y uno impar (c^2). En consecuencia, a también es impar, por lo que puede escribirse como $a = 2k + 1$, para cierto número natural k . Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$a^2 = 4k^2 + 4k + 1,$$

y, extrayendo factores comunes:

$$a^2 = 4k(k+1) + 1.$$

Ahora bien, como k y $k + 1$ son dos números consecutivos, uno de ellos tiene que ser par, por lo que el producto $k(k + 1)$ es par, y, en consecuencia, el número $4k(k + 1)$ es múltiplo de 8, al ser el producto de 4 y un número par. Así pues, tenemos:

$$4k(k + 1) \equiv 0 \pmod{8},$$

de donde, sumando 1 a ambos miembros, resulta:

$$4k(k + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{8},$$

es decir:

$$a^2 \equiv 1 \pmod{8}.$$

Un razonamiento idéntico nos lleva a que, al ser c impar, también se tiene:

$$c^2 \equiv 1 \pmod{8}.$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras y teniendo en cuenta estas dos congruencias, resulta:

$$b^2 = a^2 - c^2 \equiv 1 - 1 \pmod{8} \equiv 0 \pmod{8},$$

lo que significa que b^2 es múltiplo de 8. Si denotamos por x el exponente del factor 2 en la descomposición en factores primos de b , podemos escribir $b = 2^x \cdot B$, siendo B un número natural impar. Elevando al cuadrado, tenemos $b^2 = 2^{2x} \cdot B^2$, y como b^2 es múltiplo de $8 = 2^3$, resulta claro que $2x \geq 3$, de donde se sigue:

$$x \geq \frac{3}{2} = 1'5.$$

Ahora, puesto que x es un número natural, la inecuación $x \geq 1'5$ nos lleva a $x \geq 2$, lo que se traduce en que $b = 2^x \cdot B$ es múltiplo de 4. Por tanto, hemos demostrado que, en el caso que nos ocupa, b es múltiplo de 4, por lo que el producto bc también lo es, como queríamos ver. Con todo lo dicho, hemos demostrado que el producto bc es múltiplo de 3 y de 4, en cualquier caso, lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.57

Los lados de un rectángulo vienen dados por números naturales. Determina la longitud de dichos lados para que el perímetro y la superficie del rectángulo se expresen con el mismo número.

Sean n y m las longitudes respectivas de dos lados perpendiculares del rectángulo. Puesto que el área y el perímetro del rectángulo se expresan con el mismo número, podemos escribir la ecuación $mn = 2m + 2n$. Trasponiendo términos y operando, tenemos:

$$mn - 2m = 2n \Leftrightarrow m(n - 2) = 2n \Leftrightarrow m = \frac{2n}{n - 2},$$

y, dividiendo los dos polinomios que forman la fracción algebraica del segundo miembro, se sigue:

$$m = 2 + \frac{4}{n - 2}. \quad (I)$$

Ahora bien, puesto que m es un número natural, es necesario que la división indicada por la fracción sea exacta, lo cual solo es posible si $n - 2$ es un divisor de 4. Teniendo en cuenta que los divisores (positivos) de 4 son 1, 2 y 4, existen tres posibilidades, que estudiamos a continuación.

Si $n - 2 = 1$, entonces, $n = 3$, y, sustituyendo en (I), $m = 6$. Tenemos el rectángulo de dimensiones 3×6 unidades.

Si $n - 2 = 2$, se sigue $n = 4$, y, sustituyendo en (I), $m = 4$. Se trata de un cuadrado, cuyo lado mide 4 unidades.

Por último, si $n - 2 = 4$, se obtienen los valores $n = 6$ y $m = 3$. En realidad, es el mismo rectángulo obtenido anteriormente, pero con los valores intercambiados, como si lo giráramos 90° .

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.58

Determina las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que sus lados miden un número entero de centímetros, pero no un número exacto de palmos, y que su área expresada en palmos cuadrados es igual a su perímetro expresado en palmos lineales. Un palmo son 20 cm.

Denotemos por m y n las longitudes respectivas de dos lados perpendiculares del rectángulo, expresadas en centímetros, que, convertidas en palmos lineales, son $m/20$ y $n/20$. Obsérvese que, puesto que los lados no miden un número exacto de palmos, ni m ni n son divisibles por 20.

A partir de la igualdad numérica entre el área y el perímetro del rectángulo, expresados en palmos cuadrados y lineales, respectivamente, podemos establecer la ecuación:

$$\frac{m}{20} \cdot \frac{n}{20} = 2 \left(\frac{m}{20} + \frac{n}{20} \right),$$

de la que, operando y trasponiendo términos, llegamos a:

$$mn = 40(m + n) \Leftrightarrow mn - 40m = 40n \Leftrightarrow m(n - 40) = 40n \Leftrightarrow m = \frac{40n}{n - 40}.$$

Dividiendo el polinomio del numerador entre el del denominador, tenemos:

$$m = 40 + \frac{1600}{n - 40},$$

y, descomponiendo en factores primos, resulta:

$$m = 40 + \frac{2^6 \cdot 5^2}{n - 40}.$$

Puesto que m es un número natural, es necesario que la división indicada por la fracción sea exacta, lo que significa que $n - 40$ es divisor de $2^6 \cdot 5^2$. Entonces, ha de ser $n - 40 = 2^p \cdot 5^q$, siendo p y q números naturales tales que $p \leq 6$ y $q \leq 2$, y, trasponiendo, $n = 2^p \cdot 5^q + 40$.

Ahora bien, como 40 es múltiplo de 20, el producto $2^p \cdot 5^q$ no puede serlo, pues en caso contrario, n también lo sería, al ser igual a la suma de dos números con esta característica, lo que contradice el enunciado; pero el resultado del cociente indicado, que es igual a $2^{6-p} \cdot 5^{2-q}$, tampoco puede ser divisible por 20, ya que, de serlo, m estaría escrito como la suma de dos múltiplos de 20, y también lo sería, hecho que igualmente está en contra del enunciado.

Así pues, tenemos que ni $2^p \cdot 5^q$ ni $2^{6-p} \cdot 5^{2-q}$ son múltiplos de 20, condición que limita los posibles valores de los exponentes p y q , como vemos a continuación.

Si $p = 0$ y $q = 2$, entonces:

$$n = 2^0 \cdot 5^2 + 40 = 65, \text{ y } m = 40 + \frac{2^6 \cdot 5^2}{5^2} = 104,$$

y tenemos el rectángulo de dimensiones $104 \text{ cm} \times 65 \text{ cm}$, que es una solución válida.

Si $p = 1$ y $q = 2$, entonces:

$$n = 2^1 \cdot 5^2 + 40 = 90, \text{ y } m = 40 + \frac{2^6 \cdot 5^2}{2^1 \cdot 5^2} = 72,$$

lo que proporciona el rectángulo de dimensiones $72 \text{ cm} \times 90 \text{ cm}$, que es otra solución lícita.

Si $p = 5$ y $q = 0$, entonces:

$$n = 2^5 \cdot 5^0 + 40 = 72, \text{ y } m = 40 + \frac{2^6 \cdot 5^2}{2^5 \cdot 5^0} = 90,$$

de donde resulta el mismo rectángulo que en el caso anterior, pero con los lados intercambiados, como si se girara 90° .

Si $p = 6$ y $q = 0$, entonces:

$$n = 2^6 \cdot 5^0 + 40 = 104, \text{ y } m = 40 + \frac{2^6 \cdot 5^2}{2^6 \cdot 5^0} = 65,$$

obteniéndose el mismo rectángulo que en el primer caso, también con los lados intercambiados.

Como podemos comprobar fácilmente, los restantes valores naturales de p y q , con $p \leq 6$ y $q \leq 2$, dan lugar a números múltiplos de 20, por lo que podemos cerrar el problema diciendo que solo existen las dos soluciones antes encontradas.

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1969)

Problema 1.59

Varios gorrones llegan al tejado de un edificio, donde hay cierta cantidad de antenas. Si sobre cada antena se coloca un único gorrión, quedan n gorrones volando; si se posan n gorrones en cada antena, quedan n antenas desocupadas. ¿Cuántas antenas hay en el tejado?

Denotemos por g el número de gorrones, y por a el de antenas.

La primera condición del enunciado significa que, de los g gorrones, hay a gorrones colocados en las antenas y n volando, lo cual se traduce en la ecuación $g = a + n$.

De la segunda condición, como hay n antenas desocupadas, debe haber $a - n$ antenas ocupadas, en cada una de las cuales hay n gorrones. Eso significa que en total hay $n(a - n)$ gorrones, puesto que no queda ninguno en el aire, lo cual se traduce en la ecuación $g = n(a - n)$.

Iguando las dos expresiones encontradas, tenemos $a + n = n(a - n)$, de donde, operando y trasponiendo términos, se sigue:

$$a + n = an - n^2 \Leftrightarrow an - a = n^2 + n \Leftrightarrow a(n - 1) = n^2 + n \Leftrightarrow a = \frac{n^2 + n}{n - 1},$$

ecuación que, dividiendo el polinomio del numerador entre el del denominador, podemos escribir como:

$$a = n + 2 + \frac{2}{n - 1}. \quad (I)$$

Como la cantidad de antenas debe ser un número natural, es necesario que la división indicada por la fracción sea exacta, lo cual significa que $n - 1$ debe ser divisor de 2. Ahora bien, los únicos divisores naturales de 2 son 1 y 2, luego hay dos posibilidades: $n - 1 = 1$, en cuyo caso, $n = 2$; o $n - 1 = 2$, de donde se sigue $n = 3$. Sustituyendo estos dos valores en la expresión (I), obtenemos el mismo resultado, $a = 6$, que es la respuesta a la pregunta planteada en el enunciado.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.60

Determina dos números naturales tales que la diferencia de sus inversos sea igual al inverso de 15.

Sean m y n los números naturales buscados. A partir de las condiciones del enunciado, obtenemos la ecuación:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{1}{15},$$

y, trasponiendo términos y operando, llegamos a:

$$\frac{m - n}{mn} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow 15m - 15n = mn \Leftrightarrow mn + 15n = 15m \Leftrightarrow (m + 15)n = 15m \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{15m}{m + 15},$$

ecuación que, dividiendo el polinomio del numerador entre el del denominador, podemos escribir como:

$$n = 15 - \frac{225}{m + 15}.$$

Ahora bien, como n debe ser un número natural, es necesario que la división indicada por la fracción sea exacta, para lo cual es imprescindible que $m + 15$ sea divisor de 225. Por tanto, en principio, $m + 15$ debe ser igual a alguno de los números de la lista formada por los divisores de 225, a saber, los números 1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225. Pero m también debe ser natural (y no nulo, puesto que si lo fuera, no tendría inverso y el problema no estaría bien planteado), luego $m \geq 1$, lo que implica que $m + 15 \geq 16$. De este modo, descartamos los valores 1, 3, 5, 9 y 15, y solo tendremos que considerar los otros cuatro «candidatos», como veremos a continuación.

Si $m + 15 = 25$, entonces, $m = 10$, y, sustituyendo en la última ecuación, tenemos:

$$n = 15 - \frac{225}{25} = 6.$$

Si $m + 15 = 45$, entonces, $m = 30$, y, como antes, resulta:

$$n = 15 - \frac{225}{45} = 10.$$

Si $m + 15 = 75$, entonces, $m = 60$, y:

$$n = 15 - \frac{225}{75} = 12.$$

Por último, si $m + 15 = 225$, entonces, $m = 210$, y:

$$n = 15 - \frac{225}{225} = 14.$$

Así pues, el problema tiene cuatro soluciones, constituidas por las parejas encontradas.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 1.61

Sea A el menor número natural que tiene 50 divisores naturales; sea B el número que expresa el área limitada por una tangente cualquiera a la hipérbola $xy = 6$ y los ejes coordenados; y sea C el coeficiente de x^5 en el desarrollo de $(1 + x + x^2)^3$. Demuestra que el número A es congruente con B módulo C .

Resolveremos el problema calculando el valor de cada uno de estos números.

Cálculo del número A

Consideremos el número A , descompuesto en factores primos:

$$A = n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2} \cdots n_p^{k_p}.$$

Puesto que A tiene 50 divisores, a partir de la expresión que proporciona el número de ellos, podemos escribir:

$$ND(A) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_p + 1) = 50 = 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

Así pues, como en la descomposición en factores primos de 50 hay tres factores, y sabemos que, para cada i comprendido entre 1 y p , $k_i + 1 \geq 2$, al ser $k_i \geq 1$ (si fuera k_i nulo, para algún valor de i , entonces, el factor n_i no estaría presente en la descomposición en factores primos de A , y no lo tendríamos en cuenta), podemos afirmar que la

expresión $ND(A)$ tiene, a lo sumo, tres factores, es decir, $p \leq 3$, de donde se sigue que podemos reescribir A , de manera más sencilla, como:

$$A = n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2} \cdot n_3^{k_3}.$$

Pero, además, estamos buscando el número natural más pequeño que cumpla la condición dada en el enunciado, lo cual solo se consigue si los números n_1 , n_2 y n_3 son lo menor posible, es decir, si estos factores son 2, 3 y 5, por lo que podemos escribir $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 5$, y, en consecuencia:

$$A = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3}.$$

De este modo, ya tenemos las bases de la descomposición en factores primos de A . Para hallar los exponentes, hemos de resolver la ecuación obtenida anteriormente:

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

Obsérvese que hemos incluido también el factor 1 en el segundo miembro, puesto que es posible que algún exponente sea nulo y, en realidad, el número A tenga menos de tres factores.

Agrupando los factores del segundo miembro para formar solo tres, de todas las maneras posibles, e identificando los factores de uno y otro miembro (tengamos en cuenta que se trata de una ecuación cuyas incógnitas son números naturales), obtenemos las distintas soluciones de la ecuación:

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) = \begin{cases} 2 \cdot 5 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 \cdot 25 \\ 1 \cdot 5 \cdot 10 \\ 1 \cdot 1 \cdot 50 \end{cases} \Leftrightarrow \{k_1, k_2, k_3\} = \begin{cases} \{1, 4, 4\} \\ \{0, 1, 24\} \\ \{0, 4, 9\} \\ \{0, 0, 49\} \end{cases}.$$

Esta expresión indica los valores que pueden tomar los números k_1 , k_2 y k_3 , pero sin asociar ninguno de ellos con un valor concreto de los que forman cada terna de la derecha. Ahora bien, como se pretende que el número obtenido sea lo menor posible, la asociación de k_1 , k_2 y k_3 con los números de cada terna debe hacerse de manera que el mayor exponente acompañe a la base más pequeña. Por tanto, las posibles soluciones son las que resultan de las asociaciones:

$$(k_1, k_2, k_3) = \begin{cases} (4, 4, 1) \\ (24, 1, 0) \\ (9, 4, 0) \\ (49, 0, 0) \end{cases},$$

lo que implica que los posibles valores de A son $A = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^1 = 6480$, $A = 2^{24} \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 50331648$, $A = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^0 = 41472$ y $A = 2^{49} \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 562949953421312$. Así pues, nos quedamos con $A = 6480$, por ser el menor de los cuatro «candidatos».

Cálculo del número B

(Los elementos indicados a continuación pueden verse en el diagrama de la página siguiente)

La hipérbola dada se corresponde con la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{6}{x},$$

cuya derivada es:

$$f'(x) = -\frac{6}{x^2}.$$

Sea a un número real no nulo, y consideremos la recta tangente a la función f en el punto de abscisa $x = a$. A partir de la expresión que proporciona la ecuación de la recta tangente a una función en un punto, sabemos que la ecuación de esta recta es:

$$y - \frac{6}{a} = -\frac{6}{a^2}(x - a).$$

Los puntos de corte de esta recta con los ejes coordenados, digamos P y Q, se obtienen resolviendo los sistemas:

$$P \equiv \begin{cases} y - \frac{6}{a} = -\frac{6}{a^2}(x - a) \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad Q \equiv \begin{cases} y - \frac{6}{a} = -\frac{6}{a^2}(x - a) \\ x = 0 \end{cases},$$

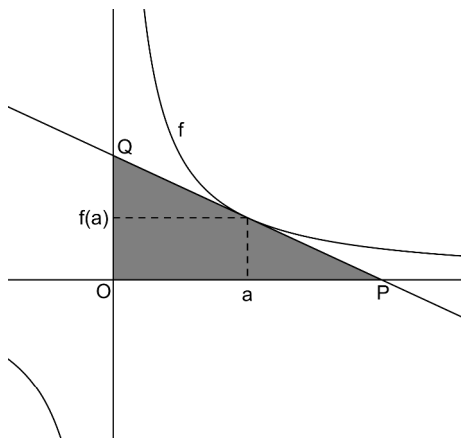
de donde, sustituyendo y operando, se sigue:

$$P = (2a, 0) \quad \text{y} \quad Q = \left(0, \frac{12}{a}\right).$$

En consecuencia, el número B, que se corresponde con el valor del área del triángulo POQ (sombreado en el diagrama), viene dado por:

$$B = \frac{1}{2}(2a)\frac{12}{a} = 12.$$

Es claro, pues, que el valor de B no depende del punto a elegido.



Cálculo del número C

Desarrollando el cubo del trinomio, con la conocida identidad algebraica, tenemos:

$$(1+x+x^2)^3 = 1^3 + x^3 + x^6 + 3(1^2 \cdot x + 1^2 \cdot x^2 + 1 \cdot x^2 + x^2 \cdot x^2 + 1 \cdot x^4 + x \cdot x^4) + 6 \cdot 1 \cdot x \cdot x^2,$$

donde ya se ve claro, sin más operaciones, que el coeficiente de x^5 es igual a 3, es decir, $C = 3$.

Para terminar el problema, solo queda sustituir los valores encontrados y comprobar que A es congruente con B módulo C. Así pues, tenemos que ver que se verifica la congruencia $6480 \equiv 12 \pmod{3}$, lo cual es evidente, al ser 6480 y 12 múltiplos de 3.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Capítulo II. Problemas de Álgebra

Problema 2.1

Dado un conjunto S y una ley de composición interna asociativa, denotada por $\otimes$, que verifica la propiedad:

$$\forall x \in S, \forall y \in S, x^2 \otimes y = y = y \otimes x^2,$$

donde $x^2 = x \otimes x$, se pide:

a) Demuestra que $(S, \otimes)$ es un grupo abeliano.

b) ¿Puede tener orden 3? ¿Y orden 4? ¿Y orden 5? Elabora la tabla en los casos posibles.

Apartado a)

Veamos que $\otimes$ cumple las propiedades necesarias para que $(S, \otimes)$ sea un grupo abeliano:

- Asociativa: lo es por la hipótesis establecida en el enunciado.
- Elemento neutro: puesto que:

$$\forall x \in S, \forall y \in S, x^2 \otimes y = y = y \otimes x^2,$$

es claro que x^2 (para cualquier elemento x del conjunto S), cumple la propiedad del elemento neutro de la operación $\otimes$. Además, este elemento es único, puesto que si e es un elemento con la misma propiedad, esto es, tal que:

$$e \otimes y = y = y \otimes e, \forall y \in S,$$

entonces, particularizando $y = x^2$ (para cualquier x perteneciente a S), se tiene:

$$e \otimes x^2 = x^2 = x^2 \otimes e,$$

pero como también sucede:

$$\forall y \in S, x^2 \otimes y = y = y \otimes x^2,$$

tomando $y = e$, resulta:

$$x^2 \otimes e = e = e \otimes x^2.$$

Por tanto, necesariamente ha de ser $e = x^2$, y ya tenemos demostrado que $\otimes$ tiene un único elemento neutro.

- Elemento simétrico: dado cualquier elemento x perteneciente a S , por la definición de x^2 , se tiene que:

$$x \otimes x = x^2,$$

lo cual se traduce en que el elemento simétrico de x es el propio x , al ser x^2 el elemento neutro. Además, es el único elemento que cumple esta propiedad, ya que si s fuera otro elemento que la cumpliera, sería:

$$x \otimes s = s \otimes x = x^2,$$

y, entonces, multiplicando por x a la derecha en los dos miembros de la segunda igualdad, resultaría:

$$s \otimes x^2 = x^2 \otimes x,$$

de donde $s = x$, puesto que x^2 es el elemento neutro. Obsérvese que multiplicando por x a la izquierda en los dos miembros de la primera igualdad llegaríamos a la misma conclusión. Así pues, ya tenemos probado que x es el único elemento simétrico de x :

- Conmutativa: dados cualesquiera dos elementos de S , digamos x e y , consideremos el elemento:

$$(x \otimes y) \otimes (y \otimes x).$$

Aplicando la propiedad asociativa, podemos escribir:

$$(x \otimes y) \otimes (y \otimes x) = x \otimes (y \otimes y) \otimes x = x \otimes y^2 \otimes x.$$

Ahora bien, puesto que el cuadrado de cualquier elemento de S es igual al elemento neutro, en particular, lo es y^2 , por lo que tenemos:

$$(x \otimes y) \otimes (y \otimes x) = x \otimes y^2 \otimes x = x \otimes x = x^2.$$

De este modo, al efectuar la operación $\otimes$ entre $x \otimes y$ e $y \otimes x$, resulta el elemento neutro, lo que se traduce en que $x \otimes y$ es el elemento simétrico de $y \otimes x$. Pero el elemento simétrico de cualquier elemento de S es él mismo, como vimos antes, así que necesariamente ha de ser $x \otimes y = y \otimes x$, que es precisamente la propiedad conmutativa, como queríamos demostrar.

Apartado b)

Como ya hemos comentado, el cuadrado de cualquier elemento de S es igual al elemento neutro. Ello significa que el subgrupo generado por cada uno de los elementos de S tiene 2 elementos (el elemento en cuestión y el neutro), es decir, todos los elementos de S tienen orden 2.

Así pues, S no puede tener ni orden 3 ni orden 5, en virtud del Teorema de Lagrange, que establece que el orden de un grupo es múltiplo del orden de cada uno de sus elementos.

En cuanto a la posibilidad de que S tenga orden 4, la respuesta afirmativa viene de considerar el conjunto $A = \{x, y\}$, donde x e y son dos elementos distintos, definir S como el grupo generado por A , esto es, $S = \langle A \rangle$, y comprobar que $S = \{x, y, z, e\}$, siendo $z = x \otimes y = y \otimes x$, $y \otimes e = y \otimes y = x \otimes x$.

Efectuando la tabla, como se pide en el enunciado, y teniendo en cuenta las propiedades de $\otimes$ vistas en el apartado a), podemos cerciorarnos de que, efectivamente, el grupo S así construido tiene exactamente esos 4 elementos:

	x	y	z	e
x	$x \otimes x = e$	$x \otimes y = z$	$x \otimes z = x \otimes x \otimes y = y$	$x \otimes e = x$
y	$y \otimes x = z$	$y \otimes y = e$	$y \otimes z = y \otimes y \otimes x = x$	$y \otimes e = y$
z	$z \otimes x = y \otimes x \otimes x = y$	$z \otimes y = x \otimes y \otimes y = x$	$z \otimes z = e$	$z \otimes e = z$
e	$e \otimes x = x$	$e \otimes y = y$	$e \otimes z = z$	$e \otimes e = e$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.2

Sean $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} - \{0\}$ y $G = \mathbb{Q}_0 \times \mathbb{Q}$.

Se define en G la operación $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bc + d)$. Demuestra que:

a) $(G, \cdot)$ es un grupo.

b) El subconjunto $S = \{(1, b) / b \in \mathbb{Q}\}$ es un subgrupo normal de G .

c) S es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Q}$.

Apartado a)

Veamos que se cumplen las tres propiedades que caracterizan un grupo:

- Asociativa: dados (a, b) , (c, d) y (e, f) pertenecientes a G , por la definición de la operación, se tiene:

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (ac, bc + d) \cdot (e, f) = (ace, bce + de + f),$$

y:

$$(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] = (a, b) \cdot (ce, de + f) = (ace, bce + de + f),$$

luego, como vemos:

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)],$$

esto es, la operación es asociativa.

- Elemento neutro: supongamos que existe un elemento de G , digamos (m,n) , tal que $(a,b) \cdot (m,n) = (a,b)$, para cualquier elemento (a,b) de G . Entonces, por la definición de la operación, debe cumplirse la igualdad $(am, bm + n) = (a,b)$, por lo que, identificando componentes, debe ser $am = a$ y $bm + n = b$. De la primera igualdad, al ser a un elemento de $\mathbb{Q}_0$ (no nulo, por tanto), se sigue $m = 1$ y, de la segunda, sustituyendo este valor de m , $n = 0$. Así pues, en caso de existir el elemento neutro, este debe ser $(1,0)$. Pero sucede que, efectivamente, $(1,0)$ es el elemento neutro, pues para todo elemento (a,b) de G , se tiene:

$$(a,b) \cdot (1,0) = (a \cdot 1, b \cdot 1 + 0) = (a,b) = (1 \cdot a, 0 \cdot a + b) = (1,0) \cdot (a,b).$$

- Elemento simétrico: dado (a,b) perteneciente a G , supongamos que existe un elemento de G , digamos (p,q) , tal que $(a,b) \cdot (p,q) = (1,0)$. Entonces, realizando la operación, tenemos $(ap, bp + q) = (1,0)$, de donde, igualando componentes, resulta $ap = 1$ y $bp + q = 0$, y, en consecuencia, $p = 1/a$ y $q = -b/a$, lo cual tiene sentido, al ser a un número racional no nulo. De este modo, de existir el elemento simétrico de (a,b) , ha de ser $(1/a, -b/a)$. Pero ocurre:

$$(a,b) \cdot \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) = \left(a \frac{1}{a}, b \frac{1}{a} - \frac{b}{a}\right) = (1,0) = \left(\frac{1}{a} a, -\frac{b}{a} a + b\right) = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) \cdot (a,b),$$

por lo que se tiene que ciertamente $(1/a, -b/a)$ es el elemento simétrico de (a,b) .

Así pues, al cumplirse las tres propiedades vistas, podemos concluir con que $(G, \cdot)$ es un grupo, como queríamos ver.

Apartado b)

Recordemos que, dados un grupo, H , y un subgrupo, K , se dice que K es normal en H si, y solo si, para cualquier elemento x perteneciente a H , se cumple $x \cdot K \cdot x^{-1} = K$, lo cual equivale a decir que, para cualesquiera elementos $x \in H$, $y \in K$, se cumple que $x \cdot y \cdot x^{-1}$ es un elemento de K .

Para el caso que nos ocupa, sean (a,b) y $(1,c)$ elementos respectivos de G y S . Como hemos visto antes, el simétrico de (a,b) es $(1/a, -b/a)$, por lo que se trata de probar que $(a,b) \cdot (1,c) \cdot (1/a, -b/a)$ es un elemento de S . Pero, por la definición de la operación y por la propiedad asociativa (ya vista), tenemos:

$$(a,b) \cdot (1,c) \cdot \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) = (a \cdot 1, b \cdot 1 + c) \cdot \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) = \left(a \frac{1}{a}, b \frac{1}{a} + c \frac{1}{a} - \frac{b}{a}\right) = \left(1, \frac{c}{a}\right),$$

que claramente pertenece al conjunto S .

Así pues, para concluir el apartado, solo nos falta ver que S es un subgrupo de G , para lo cual es suficiente con comprobar que $S \subset G$ (obvio), que el elemento neutro de G está en S (como también es claro), y que el simétrico de cualquier elemento de S es

también un elemento de S , lo cual es cierto, ya que, dado un elemento cualquiera de S , $(1, b)$, como hemos visto, su simétrico es $(1/1, -b/1) = (1, -b)$, que evidentemente es un elemento de S .

Por tanto, tenemos probado que S es un subgrupo normal de G , como pretendíamos.

Apartado c)

Para ver que S es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Q}$, estableceremos una aplicación entre los grupos $(\mathbb{Q}, +)$ y $(S, \cdot)$, y veremos que se trata de un isomorfismo de grupos, esto es, que es biyectiva y «mantiene la estructura». Con este fin, consideraremos la aplicación «más natural» entre $(\mathbb{Q}, +)$ y $(S, \cdot)$, digamos φ , dada por $\varphi(x) = (1, x)$, para cada racional x , que claramente está bien definida.

Veamos que φ es biyectiva:

Es inyectiva, ya que si $\varphi(x) = \varphi(y)$, entonces, por la definición de φ , se satisface la igualdad $(1, x) = (1, y)$, de donde, identificando componentes, se sigue que $x = y$; y es sobreyectiva, puesto que cualquier elemento de S es de la forma $(1, b)$, donde b es un número racional, con lo que ya tenemos el elemento $b \in \mathbb{Q}$ tal que $\varphi(b) = (1, b)$. Así pues, al ser inyectiva y sobreyectiva, ya tenemos probado que es biyectiva.

Veamos que φ «conserva la estructura», esto es, que para cualesquiera racionales a y b , se cumple $\varphi(a + b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ (tengamos en cuenta que estamos considerando la operación «+» en $\mathbb{Q}$ y la operación « $\cdot$ » en S):

Dados los racionales a y b , se verifica:

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) = (1, a) \cdot (1, b) = (1 \cdot 1, a \cdot 1 + b) = (1, a + b) = \varphi(a + b),$$

y ya tenemos lo que queríamos.

Por lo visto, podemos afirmar que S es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Q}$, lo que cierra el apartado, y, con él, el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2001)

Problema 2.3

Se consideran los conjuntos M , U y N :

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{C} / ad - bc \neq 0 \right\},$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{C} / ad - bc = 1 \right\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, c, d \in \mathbb{C} / ad \neq 0 \right\}.$$

- a) Prueba que $(M, \cdot)$ tiene estructura de grupo, donde « $\cdot$ » representa el producto de matrices.
 b) Demuestra que $(U, \cdot)$ y $(N, \cdot)$ son subgrupos de $(M, \cdot)$.

En primer lugar, observemos que M es precisamente el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2, con coeficientes complejos, cuyo determinante es distinto de cero, lo cual nos permitirá resolver el problema con mayor facilidad. Asimismo, U es el subconjunto de M formado por las matrices cuyo determinante es igual a 1, mientras que N es el subconjunto de M cuyas matrices tienen nulo el elemento situado por debajo de la diagonal principal.

Apartado a)

El problema está bien planteado, ya que la operación « $\cdot$ » es cerrada en M , esto es, el producto de dos matrices pertenecientes a M también es una matriz de M . En efecto, si A y B son matrices de M , entonces, la matriz resultante del producto de A por B , $A \cdot B$, es cuadrada, y tiene orden 2; además, por las propiedades de los determinantes, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, de donde se deduce $|A \cdot B| \neq 0$, al ser A y B matrices con determinante no nulo. Así pues, ya tenemos probado que $A \cdot B$ es una matriz de M .

Veamos ahora que $(M, \cdot)$ cumple las propiedades de un grupo:

- Asociativa: puesto que el producto de matrices cumple la propiedad asociativa, también ha de cumplirlo el de matrices de M , como caso particular.
- Elemento neutro: consideremos la matriz identidad de orden 2, I_2 , definida como:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es claro que I_2 es una matriz de M , puesto que es cuadrada, con coeficientes complejos, tiene orden 2, y su determinante es distinto de cero. Además, para toda matriz A perteneciente a M , se cumple $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$, lo que se traduce en que I_2 es el elemento neutro de « $\cdot$ ».

- Elemento simétrico: dada una matriz A perteneciente a M , sabemos que existe la matriz inversa de A , A^{-1} , puesto que el determinante de A es distinto de 0. Así pues, tenemos $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$. En particular, tomando determinantes, $|A \cdot A^{-1}| = |I_2| = 1$. Además, por las propiedades de los determinantes, $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$, de donde se sigue $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ y, en consecuencia, $|A^{-1}| \neq 0$. Así pues, A^{-1} pertenece a M , por lo que tenemos probado que existe el elemento simétrico para la operación « $\cdot$ » en M .

Por todo lo dicho, ya tenemos probado que $(M, \cdot)$ es un grupo. Obsérvese que no se trata de un grupo abeliano, pues, como es sabido, el producto de matrices no es conmutativo en general.

Apartado b)

Como ya hemos comentado, es claro que tanto U como N son subconjuntos de M , por lo que tiene sentido plantearse si $(U, \cdot)$ y $(N, \cdot)$ son subgrupos de $(M, \cdot)$.

Veamos, en primer lugar, que $(U, \cdot)$ es subgrupo de $(M, \cdot)$:

La operación « $\cdot$ » es cerrada, puesto que si A y B son dos matrices de U , entonces, $|A| = |B| = 1$, de donde se sigue, aplicando una de las propiedades de los determinantes, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 1 \cdot 1 = 1$, lo que implica que $A \cdot B$ pertenece a U ; la propiedad asociativa está «heredada» del conjunto de matrices; el elemento neutro, I_2 , pertenece a U , puesto que su determinante es igual a 1; y, por último, dada la matriz A perteneciente a U , es claro que $|A^{-1}| = 1$, puesto que $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ y $|A| = 1$, de donde se sigue que A^{-1} pertenece a U .

Con todo lo dicho, podemos concluir con que $(U, \cdot)$ es subgrupo de $(M, \cdot)$, como queríamos probar.

Veamos ahora que $(N, \cdot)$ es subgrupo de $(M, \cdot)$:

Dadas dos matrices de N , digamos A y B , deben ser de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & d' \end{pmatrix},$$

para ciertos números complejos a, d, c, a', d' y c' , tales que $ad \neq 0$ y $a'd' \neq 0$.

De este modo, el producto de A y B es:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ac' + cd' \\ 0 & dd' \end{pmatrix},$$

cuyo determinante no es nulo, puesto que:

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} aa' & ac' + cd' \\ 0 & dd' \end{vmatrix} = aa' dd' = \underbrace{(ad)}_{\neq 0} \underbrace{(a'd')}_{\neq 0} \neq 0.$$

Resulta claro entonces que $A \cdot B$ pertenece a N , puesto que tiene nulo el elemento situado por debajo de la diagonal principal, y su determinante es distinto de cero. En otras palabras, la operación « $\cdot$ » es cerrada en N .

Por otro lado, la operación « $\cdot$ » cumple la propiedad asociativa (heredada de M); el elemento neutro, I_2 , está en N , ya que su determinante no es nulo, y tiene nulo el elemento situado debajo de la diagonal principal; y, finalmente, dada la matriz A perteneciente a N , se tiene que A^{-1} también pertenece a N , como podemos ver a continuación.

Puesto que A pertenece a N , existe A^{-1} , al ser $|A| \neq 0$. Además, si:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

con $ad \neq 0$, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}A)^t = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -c \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad} \begin{pmatrix} d & -c \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d/ad & -c/ad \\ 0/ad & a/ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -c/ad \\ 0 & 1/d \end{pmatrix},$$

$$\text{con } \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{d} \neq 0,$$

por lo que está en N , al cumplir las condiciones necesarias y suficientes para ello.

Con todo lo dicho, podemos afirmar que, efectivamente, $(N, \cdot)$ es subgrupo de $(M, \cdot)$, lo que concluye el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.4

Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales y $\mathbb{N}$ el de los naturales, incluyendo el cero. Se define en $\mathbb{Q}$ la relación R , dada por:

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, xRy \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / y = x + n.$$

- Demuestra que R es una relación de orden.
- Determina si se trata de un orden total.
- Prueba que el conjunto $C = \{1/2, 2/3\}$ no está acotado, ni superior ni inferiormente.

Apartado a)

Veamos que R cumple las propiedades necesarias para ser una relación de orden:

- Reflexiva: para todo x racional, es claro que $x = x + 0$, luego xRx (estamos considerando el cero como natural).
- Antisimétrica: sean x e y racionales tales que xRy , yRx . Hay que demostrar que, entonces, $x = y$. En efecto, como xRy , existe un natural, digamos m , tal que $y = x + m$; como también yRx , existe un natural, digamos n , tal que $x = y + n$. Sustituyendo en esta última igualdad la anterior, resulta $x = x + m + n$, lo cual solo es posible si se cumple la igualdad $m + n = 0$. Ahora bien, como m y n son naturales (y por tanto no negativos), la suma de ambos es nula únicamente si $m = n = 0$, lo cual se traduce en que x e y son iguales.
- Transitiva: sean x, y, z racionales tales que xRy , yRz . Hemos de probar que, en tal caso, ha de cumplirse que xRz . En efecto, puesto que xRy (respectivamente yRz), existe un número natural, digamos p (respectivamente q), tal que $y = x + p$ (respectivamente $z = y + q$). Sustituyendo, como antes, en esta última igualdad la anterior, se tiene que $z = x + p + q$, lo que se traduce en que xRz , puesto que $p + q$ es un número natural.

Al cumplir R estas tres propiedades, tenemos ya demostrado que R es una relación de orden.

Apartado b)

Sería un orden total si se cumpliera la propiedad de conexión, esto es, si dados cualesquiera racionales x e y , se tiene necesariamente que xRy o que yRx . Ahora bien, por la definición de R , tenemos que xRy si, y solo si, existe un natural, digamos r , tal que $y = x + r$; trasponiendo la x , esto equivale a $y - x = r$, lo cual significa que la diferencia entre y y x es igual a un número natural. Lógicamente, la relación yRx conduce a un resultado análogo. Así pues, podemos decir que dos racionales están relacionados por R (en alguno de los dos sentidos) si, y solo si, se diferencian en un número natural. Por tanto, basta con elegir dos racionales cuya diferencia no sea natural, y tendremos dos racionales que no están relacionados (ni en un sentido ni en otro). Por tanto, la relación R no es un orden total.

Apartado c)

Demostraremos que el conjunto C no está acotado superiormente por reducción al absurdo, suponiendo que existe una cota superior y comprobando que, en tal caso, nos encontramos con una contradicción, lo que hará insostenible la hipótesis de que C esté acotado superiormente y, por tanto, habremos probado que no lo está.

Sea, pues, s una cota superior de C . Entonces, por la definición de cota superior, xRs , para cualquier elemento de C , es decir:

$$\frac{1}{2}Rs \text{ y } \frac{2}{3}Rs.$$

En consecuencia, existen dos naturales, digamos u y v , tales que:

$$s = \frac{1}{2} + u \text{ y } s = \frac{2}{3} + v.$$

Igualando, tenemos:

$$\frac{1}{2} + u = \frac{2}{3} + v,$$

y, trasponiendo términos, resulta:

$$u - v = \frac{2}{3} - \frac{1}{2},$$

lo cual es absurdo, puesto que el primer miembro está constituido por un número entero (es la diferencia de dos naturales), mientras que el segundo no lo es, pues:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Para ver que C tampoco está acotado inferiormente, se sigue una demostración análoga, que presentamos a continuación, sin comentar con demasiado detalle.

Supongamos que C está acotado inferiormente. Sea, pues, t una cota inferior de C . Entonces:

$$\begin{cases} tR \frac{1}{2} \\ tR \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists a \in \mathbb{N} / \frac{1}{2} = t + a \\ \exists b \in \mathbb{N} / \frac{2}{3} = t + b \end{cases} \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{N} / \frac{1}{2} - a = \frac{2}{3} - b \Leftrightarrow$$

$$\exists a, b \in \mathbb{N} / b - a = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

lo cual es una contradicción.

De este modo, tenemos ya demostrado que C no está acotado ni superior ni inferiormente, como se pide en el enunciado.

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1971)

Problema 2.5

En el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales se define la siguiente relación binaria:

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, xRy \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z} / x = \frac{3y + h}{3}.$$

- Demuestra que R es de equivalencia.
- Determina el conjunto cociente.
- Razona si los elementos $2/3$ y $4/5$ pertenecen a una misma clase.

Apartado a)

Veamos que R cumple las propiedades de una relación de equivalencia.

- Reflexiva: para todo racional x es claro que

$$x = \frac{3x + 0}{3},$$

lo que se traduce en que xRx (hemos tomado $h = 0$, que obviamente es un entero).

- Simétrica: sean x e y racionales tales que xRy . Hemos de probar que, entonces, yRx . En efecto, como xRy , por la definición de R , existe un número entero, digamos h , tal que:

$$x = \frac{3y + h}{3}.$$

Trasponiendo términos, se sigue:

$$x = \frac{3y + h}{3} \Leftrightarrow 3x = 3y + h \Leftrightarrow y = \frac{3x - h}{3},$$

lo que significa que yRx , pues $-h$ es un número entero que cumple las condiciones dadas en la definición de R .

- Transitiva: sean x, y, z racionales tales que xRy, yRz . Tenemos que ver que, en esta situación, se cumple también xRz . En efecto, como xRy , existe un entero, digamos h , tal que:

$$x = \frac{3y + h}{3}.$$

Puesto que también yRz , existe otro entero, digamos k , tal que:

$$y = \frac{3z + k}{3}.$$

Sustituyendo esta expresión de y en la primera ecuación, resulta:

$$x = \frac{3 \cdot \frac{3z + k}{3} + h}{3},$$

y, simplificando:

$$x = \frac{3z + k + h}{3},$$

lo cual implica xRz , puesto que $k + h$ un número entero.

Así pues, al cumplir R estas tres propiedades, tenemos ya probado que se trata de una relación de equivalencia, como queríamos ver.

Apartado b)

Sea x un número racional, y denotemos por $[x]$ su clase de equivalencia, esto es, el conjunto de todos los números racionales que están relacionados con x mediante la relación R . Con esta notación:

$$[x] = \{y \in \mathbb{Q} / xRy\},$$

y la resolución del apartado consiste en determinar el conjunto cociente, definido por:

$$\mathbb{Q} / \sim_R = \{[x] / x \in \mathbb{Q}\}.$$

Dado un número racional, digamos y , veamos qué condiciones deben darse para que y pertenezca a $[x]$:

$$y \in [x] \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z} / x = \frac{3y+h}{3} \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z} / x = y + \frac{h}{3} \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z} / x - y = \frac{h}{3}.$$

Así pues, hemos probado que un elemento está en la clase de otro (es decir, determinan la misma clase) si, y solo si, se diferencian en un múltiplo entero de $1/3$. Ello permite establecer una partición del conjunto de los números racionales, en intervalos de la forma:

$$\left[\frac{h}{3}, \frac{h+1}{3} \right) \cap \mathbb{Q}, \text{ con } h \in \mathbb{Z},$$

de manera que cada uno de ellos es equivalente al intervalo:

$$\left[0, \frac{1}{3} \right) \cap \mathbb{Q},$$

lo que permite entender el conjunto cociente como este mismo intervalo, o en términos más exactos, permite establecer un isomorfismo entre los conjuntos:

$$\mathbb{Q}/R \text{ y } \left[0, \frac{1}{3} \right) \cap \mathbb{Q},$$

por lo que podemos escribir:

$$\mathbb{Q}/R = \left[0, \frac{1}{3} \right) \cap \mathbb{Q}.$$

Apartado c)

Ya hemos visto en el apartado anterior que dos racionales están en la misma clase si, y solo si, su diferencia es un múltiplo entero de $1/3$. Sin embargo:

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{2}{15} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3},$$

lo que evidencia que la diferencia entre $2/3$ y $4/5$ no es un múltiplo entero de $1/3$, y, en consecuencia, los elementos $2/3$ y $4/5$ no están en la misma clase.

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1974, y examen de Universidad)

Problema 2.6

En el conjunto de los números naturales se considera la relación binaria R , definida por:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, mRn \Leftrightarrow m + n = \dot{2}$$

(El número 2 con un punto encima representa un múltiplo de 2).

Demuestra que R es de equivalencia e indica cuál es el conjunto cociente.

Veamos que R satisface las propiedades de una relación de equivalencia:

- Reflexiva: dado un número natural n , es claro que $n + n = 2n$ es múltiplo de 2, luego nRn .
- Simétrica: si dos números naturales m y n verifican mRn , entonces:

$$m + n = \dot{2},$$

de donde se sigue trivialmente que $n + m$ también es múltiplo de 2, pues, por la propiedad conmutativa, sabemos que se verifica la igualdad $m + n = n + m$.

- Transitiva: sean tres naturales m , n y p tales que mRn y nRp . Se trata de demostrar que, en tal situación, se cumple también mRp . En efecto, puesto que mRn y nRp , tenemos:

$$m + n = \dot{2} \text{ y } n + p = \dot{2}.$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades, resulta:

$$m + n + n + p = \dot{2} + \dot{2},$$

luego:

$$m + 2n + p = \dot{2},$$

y, trasponiendo:

$$m + p = \dot{2} - 2n,$$

lo que implica que la suma de m y p es múltiplo de 2 y, por tanto, mRp , como queríamos demostrar.

De este modo, tenemos ya probado que R es de equivalencia.

Veamos ahora cuál es el conjunto cociente correspondiente a la relación R , para lo cual determinaremos la clase de equivalencia de un número natural cualquiera n , que, como en el problema anterior, denotaremos por $[n]$. Por definición:

$$[n] = \{m \in \mathbb{N} / nRm\} = \left\{m \in \mathbb{N} / n + m = 2 \cdot \dot{}\right\},$$

lo cual se traduce en que un número natural m está en la clase de n si, y solo si, $n + m$ es par, situación que se da únicamente si m y n tienen la misma paridad, esto es, si son los dos pares o son los dos impares. Así pues, es claro que si n es par, entonces, $[n]$ es el conjunto formado por todos los números pares, mientras que si n es impar, $[n]$ es el conjunto de los números impares. Por tanto, el conjunto cociente está formado solo por dos elementos: la clase de los números pares y la clase de los impares.

(Examen de Universidad)

Problema 2.7

Sea A un anillo, y sean x e y elementos nilpotentes de A que conmutan. Demuestra que los elementos xy , $x + y$, $x - y$ son nilpotentes de A .

Como x e y son elementos nilpotentes de A , existen dos naturales, digamos m y n , tales que $x^m = 0$, $y^n = 0$. Veamos por separado que los elementos xy , $x + y$, $x - y$ son nilpotentes de A .

xy es nilpotente

Consideremos la potencia m -ésima de xy . Por definición:

$$(xy)^m = \overbrace{(xy) \cdot (xy) \cdots (xy)}^{m \text{ veces}}.$$

Puesto que A es un anillo, se cumple la propiedad asociativa, por lo que podemos prescindir de los paréntesis, teniéndose:

$$(xy)^m = \overbrace{xy \cdot xy \cdots xy}^{m \text{ veces}}.$$

Como x e y conmutan, podemos intercambiar el orden en que aparecen en el anterior producto, por lo que podemos escribir:

$$(xy)^m = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{m \text{ veces}} \cdot \overbrace{y \cdot y \cdots y}^{m \text{ veces}} = x^m \cdot y^m.$$

Ahora bien, tenemos $x^m = 0$, luego, sustituyendo:

$$(xy)^m = x^m \cdot y^m = 0 \cdot y^m = 0.$$

Así pues, hemos encontrado un exponente natural (m) tal que la potencia formada por la base xy y este exponente es nula, lo cual se traduce en que xy es nilpotente, como se quería demostrar.

Obsérvese que podríamos haber llegado a la misma conclusión usando el exponente n en lugar del m , al ser $y^n = 0$.

$x + y$ es nilpotente

Consideremos la potencia $(m + n)$ -ésima de $x + y$. Como se cumple la propiedad asociativa, y los elementos x e y conmutan, podemos emplear la fórmula del binomio de Newton, resultando:

$$(x + y)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k}.$$

Separando el sumatorio en dos sumandos (uno extendido de 0 a m , y otro de $m + 1$ hasta $m + n$), tenemos:

$$(x + y)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k} = \sum_{k=0}^m \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k} + \sum_{k=m+1}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k}.$$

Extrayendo la potencia y^n como factor común de todos los sumandos del primer sumatorio (tengamos en cuenta que el exponente $m + n - k$ es mayor o igual que n , al extenderse k de 0 a m) y la potencia x^m como factor común de todos los sumandos del segundo (como en este sumatorio k se extiende desde $m + 1$ hasta $m + n$, es claro que todos los exponentes de x son mayores que m), llegamos a:

$$(x + y)^{m+n} = y^n \sum_{k=0}^m \binom{m+n}{k} x^k y^{m-k} + x^m \sum_{k=m+1}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^{k-m} y^{m+n-k}$$

(obsérvese que este paso es posible al ser x e y dos elementos que conmutan, y verificarse la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, lo cual está garantizado, pues A es un anillo).

Ahora, como $x^m = 0$, $y^n = 0$, sustituyendo:

$$(x + y)^{m+n} = 0 \cdot \sum_{k=0}^m \binom{m+n}{k} x^k y^{m-k} + 0 \cdot \sum_{k=m+1}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^{k-m} y^{m+n-k} = 0.$$

Por tanto, existe una potencia de $x + y$ que es nula, lo cual significa que $x + y$ es nilpotente, como queríamos demostrar.

$x - y$ es nilpotente

Veamos, en primer lugar, que si z es un elemento nilpotente de A , entonces, $-z$ también lo es. En efecto, al ser z nilpotente, existe un natural, digamos p , tal que $z^p = 0$, de donde se sigue que $(-z)^p = 0$, lo que se traduce en que $-z$ es nilpotente.

En el caso que nos ocupa, como y es nilpotente, por lo dicho, $-y$ también lo es, y, al ser $x - y = x + (-y)$, tenemos que $x - y$ es igual a la suma de dos elementos nilpotentes, lo que reduce el problema al caso anterior, ya demostrado. Así pues, sabemos ya que $x - y$ es nilpotente, y el problema queda cerrado.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.8

Sea A un anillo, no necesariamente conmutativo. Demuestra que si a es un elemento nilpotente de A , entonces, $(1 - a)^{-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$. Como aplicación, calcula la matriz inversa de M , sin hacer uso de determinantes ni del método de Gauss, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea a un elemento nilpotente del anillo A . Entonces, existe un número natural, digamos n , tal que $a^n = 0$ y, en consecuencia, $a^m = 0$, para todo $m \geq n$. Así pues, la suma expresada en el enunciado tiene una cantidad finita de términos, a pesar de que pueda parecer ilimitada, quedando, por tanto, escrita como $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$ (estamos suponiendo que n es el menor exponente que anula la potencia de base a).

Ahora, por definición, el inverso multiplicativo de $1 - a$ es el elemento de A , digamos b , tal que $b(1 - a) = (1 - a)b = 1$, luego para ver que el inverso de $1 - a$ es precisamente $1 + a + a^2 + a^3 + \dots$, como se pide en el enunciado, basta con efectuar el producto y comprobar que el resultado es igual a uno.

En efecto, aplicando la propiedad distributiva por la izquierda, tenemos:

$$\begin{aligned} (1 - a)(1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}) &= \\ &= (1 - a) + (1 - a)a + (1 - a)a^2 + (1 - a)a^3 + \dots + (1 - a)a^{n-1}, \end{aligned}$$

y, aplicándola nuevamente, esta vez por la derecha:

$$\begin{aligned} & (1-a)(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1}) = \\ & = (1-a) + (a-a^2) + (a^2-a^3) + (a^3-a^4) + \cdots + (a^{n-1}-a^n). \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad asociativa, podemos prescindir de los paréntesis, quedando:

$$\begin{aligned} & (1-a)(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1}) = \\ & = 1-a+a-a^2+a^2-a^3+a^3-a^4+\cdots-a^{n-1}+a^{n-1}-a^n. \end{aligned}$$

Es claro que en el segundo miembro de esta igualdad aparecen términos idénticos, pero de distinto signo, por lo que unos se compensan con otros, manteniéndose únicamente el primero y el último. De este modo, teniendo en cuenta, además, la igualdad $a^n = 0$, resulta:

$$(1-a)(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1}) = 1-a^n = 1-0 = 1,$$

y ya tenemos probada la igualdad que queríamos.

Sin embargo, puesto que A no tiene por qué ser conmutativo, hemos de probar que también resulta la unidad si se invierte el orden de los factores.

De manera similar, aplicando la propiedad distributiva por la derecha, podemos escribir:

$$\begin{aligned} & (1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1})(1-a) = \\ & = (1-a) + a(1-a) + a^2(1-a) + a^3(1-a) + \cdots + a^{n-1}(1-a). \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad distributiva por la izquierda, llegamos a:

$$\begin{aligned} & (1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1})(1-a) = \\ & = (1-a) + (a-a^2) + (a^2-a^3) + (a^3-a^4) + \cdots + (a^{n-1}-a^n). \end{aligned}$$

Esta expresión es la misma que encontramos antes, y ya vimos que es igual a la unidad. Por tanto, tenemos ya demostrada la otra igualdad y, en consecuencia:

$$(1-a)^{-1} = 1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1},$$

como queríamos probar.

Para la aplicación del resultado, hemos de ver cuál es el elemento nilpotente, digamos N , que permite hallar la matriz inversa de M . Para ello, escribimos $M = I - N$, siendo I la matriz identidad, que tiene el papel del 1, por ser el elemento neutro del producto, y, trasponiendo, resulta $N = I - M$. Así pues, tenemos:

$$N = I - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para ver que, efectivamente, N es nilpotente, hallamos sus sucesivas potencias, hasta encontrar el exponente que hace nulo el resultado:

$$N^2 = N \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^3 = N^2 \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^4 = N^3 \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^5 = N^4 \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y ya tenemos probado que N es nilpotente.

Aplicando el resultado general que hemos demostrado en la primera parte del problema, resulta:

$$M^{-1} = (I - N)^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + N^4,$$

y, realizando las sumas:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que es posible comprobar que este resultado es correcto, sin más que hacer el producto (por la derecha y por la izquierda) de esta matriz por M , viendo que da como resultado la matriz identidad.

(Examen de Universidad)

Problema 2.9

Sea E_n el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que $n - 1$ con coeficientes reales. Se considera la aplicación $u: E_n \rightarrow E_{n+1}$ tal que $u(P) = Q$, estando Q definido por:

$$Q(x) = e^{x^2} \frac{d}{dx} (e^{-x^2} P(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se pide:

- Demuestra que la aplicación u es lineal.
- Halla el núcleo de u .
- Halla la dimensión de la imagen de u .
- Determina la matriz de u en las bases canónicas.

Apartado a)

En primer lugar, hemos de ver que u está bien definida. Para ello, hay que comprobar que, dado un polinomio P perteneciente a E_n , su transformado mediante u , esto es, $u(P) = Q$, pertenece a E_{n+1} .

En efecto, puesto que Q está definido para todo real x como:

$$Q(x) = e^{x^2} \frac{d}{dx} (e^{-x^2} P(x)),$$

realizando la derivada, obtenemos:

$$Q(x) = e^{x^2} \left(-2xe^{-x^2} P(x) + e^{-x^2} P'(x) \right),$$

y, aplicando la propiedad distributiva y simplificando:

$$Q(x) = -2xe^{-x^2} e^{x^2} P(x) + e^{-x^2} e^{x^2} P'(x) = -2xP(x) + P'(x).$$

Así pues, es claro que, al ser P un polinomio de grado menor o igual que $n-1$, Q es otro polinomio, de grado n , como máximo, es decir, Q pertenece a E_{n+1} , y ya tenemos que u está bien definida.

Veamos ahora que u cumple las propiedades de una aplicación lineal. Para ello, consideraremos la expresión de $u(P)$ que hemos encontrado, que resulta más simple y operativa que la dada en el enunciado, para cualquier polinomio P de E_n .

Sean a y b dos números reales, y sean R y S dos polinomios de E_n . Entonces, por lo visto, para cualquier número real x , tenemos:

$$u(a \cdot R(x) + b \cdot S(x)) = -2x(a \cdot R(x) + b \cdot S(x)) + (a \cdot R(x) + b \cdot S(x))'.$$

Efectuando el primer paréntesis y aplicando las propiedades de la derivada, se sigue:

$$u(a \cdot R(x) + b \cdot S(x)) = -2x \cdot a \cdot R(x) - 2x \cdot b \cdot S(x) + a \cdot R'(x) + b \cdot S'(x).$$

Extrayendo factores comunes y teniendo en cuenta la expresión del transformado de un polinomio de E_n , resulta:

$$u(a \cdot R(x) + b \cdot S(x)) = a \cdot (-2xR(x) + R'(x)) + b \cdot (-2xS(x) + S'(x)) \Leftrightarrow$$

$$u(a \cdot R(x) + b \cdot S(x)) = a \cdot u(R(x)) + b \cdot u(S(x)),$$

luego ya tenemos probada la igualdad $u(a \cdot R + b \cdot S) = a \cdot u(R) + b \cdot u(S)$, es decir, que u es lineal.

Apartado b)

Recordemos que el núcleo de una aplicación lineal f , denotado por $\ker(f)$, es el subespacio vectorial del espacio vectorial de partida formado por todos los vectores cuyo transformado es el vector nulo del espacio vectorial de llegada.

En el caso que nos ocupa, el núcleo está formado por todos los polinomios $P(x)$ de E_n tales que $(u(P))(x) = -2xP(x) + P'(x)$ es el polinomio idénticamente nulo.

Se trata, pues, de encontrar los polinomios de E_n que verifican la ecuación diferencial $-2xP(x) + P'(x) = 0$, que, trasponiendo, se convierte en $P'(x) = 2xP(x)$. Ahora bien, es claro que el polinomio del primer miembro tiene grado una unidad menos que el grado de

P, puesto que es su derivada, mientras que el del segundo miembro tiene grado una unidad más que el grado de P, ya que se está multiplicando por el monomio x . Tenemos, pues, que dos polinomios de distinto grado y diferentes coeficientes son idénticos, lo cual solo es posible si P es el polinomio nulo. De esta manera, podemos afirmar que solo el polinomio nulo cumple la ecuación diferencial y, en consecuencia, $\ker(u) = \{0\}$.

Apartado c)

Por el primer Teorema de Isomorfía, se sabe que, dada una aplicación lineal f de un espacio vectorial V , de dimensión finita, en otro W , también de dimensión finita, se cumple la relación $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$, donde $\text{Im}(f)$ denota la imagen de f , definida como el subespacio vectorial de W en que se transforma todo V mediante la aplicación lineal f .

En el caso que nos ocupa, es sabido que $\dim(E_n) = n$, puesto que el conjunto $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ es una base de E_n (la base canónica), y tiene n elementos. Además, por el apartado b), sabemos que $\ker(u) = \{0\}$, lo que se traduce en que $\dim(\ker(u)) = 0$.

Así pues, sustituyendo estos valores en la fórmula de la dimensión dada por el primer Teorema de Isomorfía, resulta $n = 0 + \dim(\text{Im}(u))$, es decir, $\dim(\text{Im}(u)) = n$.

Apartado d)

Como sabemos, la matriz de una aplicación lineal f de un espacio vectorial V en otro V' , ambos de dimensión finita, respecto de las bases B de V y B' de V' , denotada por $M(f; B, B')$, es aquella cuyas filas están formadas por las coordenadas de los transformados de los vectores de la base B respecto de la base B' , ordenadas en el mismo orden que los vectores de la base B . En tal situación, la ecuación de la aplicación lineal f viene dada por la expresión $f(x) = x \cdot M(f; B, B')$, la cual permite hallar las coordenadas del transformado de cualquier vector de V respecto de la base B' , sin más que multiplicar el vector formado por sus coordenadas respecto de la base B por la matriz $M(f; B, B')$.

En el caso que nos ocupa, hemos de considerar las bases canónicas de E_n y E_{n+1} , que son, como es sabido, $B = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ y $B' = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n\}$, respectivamente. Así pues, para determinar la matriz de la aplicación lineal u , es suficiente con hallar las coordenadas respecto de B' de $u(x^k)$, para $0 \leq k \leq n-1$, teniendo en cuenta la expresión de u que hemos encontrado, como vemos a continuación:

$$u(1) = -2x \cdot 1 + (1)' = -2x = (0, -2, 0, 0, \dots, 0)_{B'},$$

$$u(x) = -2x \cdot x + (x)' = -2x^2 + 1 = (1, 0, -2, 0, 0, \dots, 0)_{B'},$$

$$u(x^2) = -2x \cdot x^2 + (x^2)' = -2x^3 + 2x = (0, 2, 0, -2, 0, 0, \dots, 0)_{B'},$$

$$u(x^3) = -2x \cdot x^3 + (x^3)' = -2x^4 + 3x^2 = (0, 0, 3, 0, -2, 0, 0, \dots, 0)_{B'},$$

$$\vdots$$

$$u(x^k) = -2x \cdot x^k + (x^k)' = -2x^{k+1} + kx^{k-1} = (0, \dots, 0, k, 0, -2, 0, 0, \dots, 0)_{B'},$$

$$\vdots$$

$$u(x^{n-1}) = -2x \cdot x^{n-1} + (x^{n-1})' = -2x^n + (n-1)x^{n-2} = (0, \dots, 0, n-1, 0, -2)_B.$$

Y, por tanto, la matriz de la aplicación lineal pedida es:

$$M(u; B, B') = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & k & 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1979)

Problema 2.10

En el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de las funciones reales de variable real que admiten derivadas de todos los órdenes, que denotaremos por E , definimos el endomorfismo F de la siguiente manera:

$$(F(h))(x) = xh(x) + h'(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in E.$$

a) Calcula el núcleo de F .

b) Demuestra que los elementos g del núcleo verifican $F^n(g \cdot h) = g \cdot h^{(n)}$, válida para toda función h perteneciente a E , y para todo natural n , donde $F^n = F \circ F \circ \cdots \circ F$ (n veces) y $h^{(n)}$ es la derivada n -ésima de h .

En primer lugar, aunque no se pide explícitamente en el enunciado, habría que ver que la aplicación dada está bien definida y que es, efectivamente, un endomorfismo, como haremos a continuación. Obsérvese que se trata de una expresión muy similar a la encontrada en el problema anterior, por lo que la demostración también será muy parecida.

Dada una función real de variable real indefinidamente derivable, digamos $h(x)$, es claro que, por las propiedades de la derivada, su transformada por F , que viene dada por $(F(h))(x) = xh(x) + h'(x)$, es una función real de variable real, también indefinidamente derivable, por lo que F va de E en E . Además, F es lineal, pues si a y b son dos números reales, y g y h pertenecen a E , entonces, para cualquier número real x , se tiene:

$$(F(a \cdot g + b \cdot h))(x) = x(a \cdot g(x) + b \cdot h(x)) + (a \cdot g(x) + b \cdot h(x))',$$

de donde, eliminando paréntesis y aplicando la linealidad de la derivada, se sigue:

$$(F(a \cdot g + b \cdot h))(x) = a \cdot x \cdot g(x) + b \cdot x \cdot h(x) + a \cdot g'(x) + b \cdot h'(x),$$

y, agrupando y extrayendo factores comunes:

$$(F(a \cdot g + b \cdot h))(x) = a(x \cdot g(x) + g'(x)) + b(x \cdot h(x) + h'(x)),$$

lo que se traduce en:

$$(F(a \cdot g + b \cdot h))(x) = a(F(g))(x) + b(F(h))(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

y, por tanto:

$$F(a \cdot g + b \cdot h) = a \cdot F(g) + b \cdot F(h),$$

y ya tenemos probado que F es un endomorfismo (recordemos que un endomorfismo es una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo).

Pasemos ahora a resolver los dos apartados del enunciado.

Apartado a)

Un elemento h perteneciente a E está en el núcleo de F si, y solo si, $F(h)$ es la función idénticamente nula, es decir, si $xh(x) + h'(x) = 0$, para todo número real x . Así pues, para determinar el núcleo de F hay que resolver esta ecuación diferencial. Obsérvese que, a pesar de ser muy parecida a la ecuación diferencial planteada en el problema anterior, el argumento que allí utilizamos no puede aplicarse a este problema, puesto que aquí estamos tratando con funciones indefinidamente derivables de todo tipo, no necesariamente polinómicas. Ahora bien, se trata de una ecuación diferencial de «variables separables», razón por la que procederemos, en primer lugar, a trasponer términos, de manera que «lo que va con x » quede en un miembro y «lo que va con h » en el otro. De este modo, obtenemos la ecuación:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = -x,$$

e, integrando en ambos miembros:

$$\int \frac{h'(x)}{h(x)} dx = -\int x dx,$$

de donde se sigue:

$$\ln(h(x)) = -\frac{x^2}{2} + C,$$

siendo C una constante real arbitraria.

Tomando exponenciales, para aislar $h(x)$, resulta:

$$h(x) = e^{-\frac{x^2}{2} + C} = e^C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

y, denotando $k = e^C$, llegamos a:

$$h(x) = k \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

(obsérvese que, aunque en principio k debe ser una constante positiva, pues e^C lo es, para cualquier valor real de C , en esta última expresión de h podemos hacer variar k en todo el campo real, ya que, como es fácil de comprobar, la función h así determinada verifica la ecuación diferencial de partida, independientemente del valor real de k , incluso aunque sea negativo o nulo).

Por tanto, podemos escribir:

$$\text{kef}(F) = \left\{ h(x) = k \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Apartado b)

Dados g perteneciente a $\ker(F)$ y h perteneciente a E , demostraremos la igualdad pedida por inducción.

En primer lugar, si $n = 1$, es claro que $F^1(g \cdot h) = F(g \cdot h)$ y, por definición de F , para cualquier real x , se verifica $(F(g \cdot h))(x) = x \cdot (g \cdot h)(x) + (g \cdot h)'(x)$. Aplicando la definición del producto de dos funciones y derivando el producto correspondiente, se sigue $(F(g \cdot h))(x) = x \cdot g(x) \cdot h(x) + g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$, y, extrayendo $h(x)$ como factor común, $(F(g \cdot h))(x) = [x \cdot g(x) + g'(x)] \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$. Ahora, puesto que g pertenece al núcleo de F , ha de cumplirse $x \cdot g(x) + g'(x) = 0$, para cualquier valor real de x , luego $(F(g \cdot h))(x) = g(x) \cdot h'(x)$, para todo x real, lo que se traduce en que $F(g \cdot h) = g \cdot h'$, como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que la fórmula se verifica para un natural $n \geq 1$, y veamos que, en tal situación, también debe cumplirse para $n + 1$. Dicho de otro modo, estamos suponiendo que se satisface la igualdad $F^n(g \cdot h) = g \cdot h^{(n)}$, y hemos de probar que, entonces, también debe verificarse $F^{n+1}(g \cdot h) = g \cdot h^{(n+1)}$. En efecto, por la definición de la composición de funciones, tenemos $F^{n+1}(g \cdot h) = F(F^n(g \cdot h))$, de donde, aplicando la hipótesis de inducción, se sigue $F^{n+1}(g \cdot h) = F(g \cdot h^{(n)})$, lo cual significa que, para cualquier real x , se cumple $(F^{n+1}(g \cdot h))(x) = (F(g \cdot h^{(n)}))(x)$. (I)

Ahora, teniendo en cuenta la definición de F , la definición del producto de funciones, la igualdad $(h^{(n)})' = h^{(n+1)}$ (derivando la derivada n -ésima se obtiene la derivada $(n + 1)$ -ésima), y derivando el producto correspondiente, para todo real x , se cumple $(F(g \cdot h^{(n)}))(x) = x \cdot (g \cdot h^{(n)})(x) + (g \cdot h^{(n)})'(x) = x \cdot g(x) \cdot h^{(n)}(x) + g'(x) \cdot h^{(n)}(x) + g(x) \cdot h^{(n+1)}(x)$.

Extrayendo $h^{(n+1)}(x)$ como factor común, $(F(g \cdot h^{(n)}))(x) = [x \cdot g(x) + g'(x)] \cdot h^{(n+1)}(x) + g(x) \cdot h^{(n+1)}(x)$, para todo x real. Pero, como antes, al estar g en el núcleo de F , se cumple $x \cdot g(x) + g'(x) = 0$, para todo valor real de x , luego $(F(g \cdot h^{(n)}))(x) = g(x) \cdot h^{(n+1)}(x)$,

para todo real x, y , en consecuencia, $F(g \cdot h^{(n)}) = g \cdot h^{(n+1)}$. Teniendo en cuenta la igualdad (I), resulta $F^{n+1}(g \cdot h) = g \cdot h^{(n+1)}$, como queríamos probar.

Así pues, por inducción, tenemos ya demostrado que la igualdad dada en el enunciado es cierta para cualquier valor natural de n , lo que cierra el apartado y, con él, el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 1999, y Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1977)

Problema 2.11

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, y sea $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x, y, z) = (5x, -z, y)$.

a) Halla el núcleo y la imagen de f . ¿Se puede deducir alguna propiedad sobre f de los resultados obtenidos?

b) Da las dimensiones y unas bases de los subespacios hallados en a).

c) Calcula los autovalores y los autovectores de la matriz A asociada a f respecto de la base canónica. Indica los subespacios vectoriales propios.

d) Justifica si A es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentra la matriz diagonal D y la matriz de paso P . ¿Es la matriz D hermitica?

e) Halla la expresión general de la matriz A^n para n natural, y comprueba que para $n = 1$ se obtiene la matriz A , lo que es necesario para que los apartados c), d) y e) estén bien resueltos.

f) Halla la expresión general de la matriz A^n cuando $n \equiv 3 \pmod{4}$.

g) Demuestra que si n es par, la matriz A^n es diagonal y calcula su determinante.

En primer lugar, aunque no se pide explícitamente en el enunciado, hemos de ver que, efectivamente, la aplicación dada es lineal. Para ello, consideremos los complejos x e y (tengamos en cuenta que estamos tratando con un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$) y los vectores $u = (a, b, c)$ y $v = (d, e, f)$ de $\mathbb{C}^3$, y veamos que $f(x \cdot u + y \cdot v) = x \cdot f(u) + y \cdot f(v)$. En efecto, por definición de las operaciones en $\mathbb{C}^3$, tenemos:

$$\begin{aligned} f(x \cdot u + y \cdot v) &= f(x \cdot (a, b, c) + y \cdot (d, e, f)) = f((x \cdot a, x \cdot b, x \cdot c) + (y \cdot d, y \cdot e, y \cdot f)) = \\ &= f(x \cdot a + y \cdot d, x \cdot b + y \cdot e, x \cdot c + y \cdot f), \end{aligned}$$

y por definición de f :

$$f(x \cdot a + y \cdot d, x \cdot b + y \cdot e, x \cdot c + y \cdot f) = (5(x \cdot a + y \cdot d), -x \cdot c - y \cdot f, x \cdot b + y \cdot e),$$

de donde, multiplicando, se sigue:

$$f(x \cdot a + y \cdot d, x \cdot b + y \cdot e, x \cdot c + y \cdot f) = (5 \cdot x \cdot a + 5 \cdot y \cdot d, -x \cdot c - y \cdot f, x \cdot b + y \cdot e).$$

Así pues, podemos escribir $f(x \cdot u + y \cdot v) = (5 \cdot x \cdot a + 5 \cdot y \cdot d, -x \cdot c - y \cdot f, x \cdot b + y \cdot e)$.

Ahora, calcularemos por separado $x \cdot f(u) + y \cdot f(v)$, y veremos que obtenemos el mismo resultado, por lo que tendremos la igualdad buscada.

En primer lugar, $x \cdot f(u) + y \cdot f(v) = x \cdot f(a,b,c) + y \cdot f(d,e,f)$, y, por definición de f , tenemos $x \cdot f(a,b,c) + y \cdot f(d,e,f) = x \cdot (5a, -c, b) + y \cdot (5d, -f, e)$, de donde, por las operaciones definidas en $\mathbb{C}^3$, se sigue $x \cdot f(a,b,c) + y \cdot f(d,e,f) = (5 \cdot x \cdot a, -x \cdot c, x \cdot b) + (5 \cdot y \cdot d, -y \cdot f, y \cdot e) = (5 \cdot x \cdot a + 5 \cdot y \cdot d, -x \cdot c - y \cdot f, x \cdot b + y \cdot e)$, y ya tenemos lo que queríamos.

Así pues, f es lineal y ya podemos pasar a resolver los apartados dados en el enunciado.

Apartado a)

Un vector $u = (a,b,c)$ está en el núcleo de f si, y solo si, se verifica la relación $f(a,b,c) = (5a, -c, b) = (0,0,0)$, lo cual ocurre solo si $a = 0$, $c = 0$, $b = 0$, esto es, solo si $u = 0$. Así pues, el núcleo de f contiene únicamente al vector nulo, por lo que podemos escribir $\ker(f) = \{0\}$ y, en consecuencia, $\dim(\ker(f)) = 0$.

Por el Primer Teorema de Isomorfía, tenemos $\dim(\mathbb{C}^3) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$, luego, sustituyendo, resulta $3 = 0 + \dim(\text{Im}(f))$, es decir, $\dim(\text{Im}(f)) = 3$, lo que se traduce en que $\text{Im}(f)$ coincide con el espacio vectorial completo, $\mathbb{C}^3$.

Como es evidente, la propiedad de f que podemos extraer de estos resultados es que f es biyectiva (recordemos que, para una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de la misma dimensión finita, ser inyectiva, ser sobreyectiva y ser biyectiva son equivalentes).

Apartado b)

A partir de lo visto en el apartado a), es claro que no podemos obtener una base de $\ker(f)$, pues solo contiene el vector nulo, mientras que una base de $\text{Im}(f)$ es cualquier base del espacio vectorial total, por ejemplo, la base canónica, digamos B , definida por $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Apartado c)

Para calcular la matriz A asociada a f respecto de la base canónica, hemos de calcular las coordenadas (en la base canónica) de los transformados de los vectores de la misma base canónica, y escribirlos en filas, siguiendo el mismo orden de los vectores en la base. Según la definición de f , tenemos $f(1,0,0) = (5,0,0)$, $f(0,1,0) = (0,0,1)$ y $f(0,0,1) = (0,-1,0)$, luego la matriz de f es:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, como es sabido, los autovalores de la matriz A son las raíces de la ecuación característica, dada por $|\lambda \cdot I - A| = 0$, donde I representa la matriz identidad.

Realizando los cálculos, tenemos:

$$|\lambda \cdot I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda-5 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \right| = (\lambda-5)(\lambda^2+1) = 0,$$

de donde se sigue que los autovalores de A son $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ (tengamos en cuenta que estamos considerando un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos, por lo que no debe sorprender que aparezcan valores complejos para los autovalores de A).

Por su parte, los autovectores de A son todos aquellos vectores $u = (a, b, c)$ de $\mathbb{C}^3$ que verifican la ecuación $f(u) = \lambda \cdot u$, esto es, $f(a, b, c) = \lambda \cdot (a, b, c)$, siendo λ un autovalor de A . Así pues, para hallar los autovectores (que forman los subespacios propios), hemos de proceder separadamente con cada uno de los autovalores, como se ve a continuación.

Para $\lambda_1 = 5$, hemos de resolver la ecuación $f(a, b, c) = 5 \cdot (a, b, c)$, que, por definición de f y del producto de un escalar por un vector, se convierte en $(5a, -c, b) = (5a, 5b, 5c)$. Identificando coordenadas:

$$\begin{cases} 5a = 5a \\ -c = 5b \\ b = 5c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases},$$

de donde se desprende que el subespacio propio asociado a este autovalor es el subespacio vectorial generado por el vector $u_1 = (1, 0, 0)$.

Para $\lambda_2 = i$, resulta la ecuación $f(a, b, c) = i \cdot (a, b, c)$, esto es, $(5a, -c, b) = (ai, bi, ci)$, e identificando coordenadas, como antes:

$$\begin{cases} 5a = ai \\ -c = bi \\ b = ci \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -c = -c \\ b = ci \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = ci \end{cases},$$

y el subespacio propio asociado a este autovalor es, por tanto, el subespacio vectorial generado por el vector $u_2 = (0, i, 1)$.

Por último, para $\lambda_3 = -i$, obtenemos $f(a, b, c) = -i \cdot (a, b, c)$, que nos lleva a la igualdad $(5a, -c, b) = (-ai, -bi, -ci)$, e, identificando coordenadas de nuevo, a:

$$\begin{cases} 5a = -ai \\ -c = -bi \\ b = -ci \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -c = -c \\ b = -ci \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -ci \end{cases},$$

lo que se traduce en que el subespacio propio asociado a este autovalor es el subespacio vectorial generado por el vector $u_3 = (0, -i, 1)$.

Apartado d)

Puesto que los tres autovalores son distintos, es claro que la matriz A es diagonalizable sobre el cuerpo de los números complejos.

La matriz diagonal, denotada por D , que es semejante a A , se construye colocando los autovalores de A en la diagonal, y dejando nulos los restantes elementos. Así pues:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Por su parte, la matriz de paso, que denotamos por P , se forma colocando en filas los autovectores u_1 , u_2 y u_3 antes obtenidos, cuidando de que cada uno de ellos esté situado en la misma fila que su correspondiente autovalor en la matriz D . Por ello:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que una matriz con coeficientes en el cuerpo de los números complejos es hermítica si su traspuesta coincide con su conjugada (la matriz que resulta de escribir el número complejo conjugado de cada uno de los elementos de la matriz dada, en su misma posición).

En el caso que nos ocupa, es claro que D coincide con su traspuesta, puesto que es diagonal, mientras que su matriz conjugada es:

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Se ve, pues, que estas matrices no coinciden y, por tanto, D no es hermítica.

Apartado e)

Calcularemos la expresión de A^n haciendo uso de los anteriores apartados. Para ello, en primer lugar, hemos de tener en cuenta un resultado teórico, que establece que las matrices A , D y P verifican la relación $P \cdot A \cdot P^{-1} = D$ (obsérvese que la matriz P es invertible, pues su determinante es igual a $2i$, que es distinto de cero, como puede comprobarse fácilmente. En realidad, es consecuencia de que los autovalores de A son distintos, pues con ello está garantizado que los autovectores asociados a autovalores diferentes son linealmente independientes).

Multiplicando ambos miembros por P a la derecha (recordemos que, en general, el producto de matrices no es conmutativo), tenemos $P \cdot A \cdot P^{-1} \cdot P = D \cdot P$, y, puesto que $P^{-1} \cdot P = I$, resulta $P \cdot A = D \cdot P$.

De la misma manera, multiplicando ambos miembros por P^{-1} a la izquierda y simplificando, llegamos a $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$.

Elevando los dos miembros de esta igualdad a n , queda $A^n = (P^{-1} \cdot D \cdot P)^n$, expresión que podemos escribir como $A^n = (P^{-1} \cdot D \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot D \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot D \cdot P) \cdots (P^{-1} \cdot D \cdot P)$.

Aplicando la propiedad asociativa del producto de matrices, podemos «emparejar» los factores de manera adecuada, $A^n = P^{-1} \cdot D \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot D \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot D \cdot (P \cdots P^{-1}) \cdot D \cdot P$, y, simplificando nuevamente, resulta $A^n = P^{-1} \cdot D \cdot D \cdot D \cdots D \cdot P$, es decir, $A^n = P^{-1} \cdot D^n \cdot P$.

Como el cálculo de P^{-1} es sencillo, a partir de la fórmula correspondiente, de este modo hemos reducido el problema de hallar la potencia n -ésima de A al problema de hallar la potencia n -ésima de D , el cual es mucho más sencillo, pues, al ser D una matriz diagonal, los elementos de la matriz diagonal D^n son los que resultan de elevar a n los de la diagonal de D . Dicho de otra manera, la matriz D^n viene dada por:

$$D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^n \end{pmatrix}.$$

Por su parte, el cálculo de P^{-1} , antes aludido, se realiza como se muestra a continuación:

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} (\text{Adj}(P))^t = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2i & -1/2i \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i/2 & i/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$A^n = P^{-1} \cdot D^n \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i/2 & i/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix},$$

y, operando:

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & -i \cdot i^n / 2 & i \cdot (-i)^n / 2 \\ 0 & i^n / 2 & (-i)^n / 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & -i^{n+1}/2 & (-1)^n \cdot i^{n+1}/2 \\ 0 & i^n/2 & (-1)^n \cdot i^n/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-i^{n+1} \cdot i + (-1)^n \cdot i^{n+1} \cdot (-i)}{2} & \frac{-i^{n+1} + (-1)^n \cdot i^{n+1}}{2} \\ 0 & \frac{i^n \cdot i + (-1)^n \cdot i^n \cdot (-i)}{2} & \frac{i^n + (-1)^n \cdot i^n}{2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-i^{n+2} + (-1)^{n+1} \cdot i^{n+2}}{2} & \frac{-i^{n+1} + (-1)^n \cdot i^{n+1}}{2} \\ 0 & \frac{i^{n+1} + (-1)^{n+1} \cdot i^{n+1}}{2} & \frac{i^n + (-1)^n \cdot i^n}{2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1 + (-1)^{n+1}}{2} i^{n+2} & \frac{-1 + (-1)^n}{2} i^{n+1} \\ 0 & \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} i^{n+1} & \frac{1 + (-1)^n}{2} i^n \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

que es la expresión pedida.

En particular, para $n = 1$, resulta:

$$\begin{aligned}
A^1 &= \begin{pmatrix} 5^1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1 + (-1)^{1+1}}{2} i^{1+2} & \frac{-1 + (-1)^1}{2} i^{1+1} \\ 0 & \frac{1 + (-1)^{1+1}}{2} i^{1+1} & \frac{1 + (-1)^1}{2} i^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1 + (-1)^2}{2} i^3 & \frac{-1 - 1}{2} i^2 \\ 0 & \frac{1 + (-1)^2}{2} i^2 & \frac{1 - 1}{2} i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
A^1 &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1 + 1}{2} (-i) & \frac{-2}{2} (-1) \\ 0 & \frac{1 + 1}{2} (-1) & 0i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A,
\end{aligned}$$

por lo que la fórmula es cierta en este caso concreto, como se pedía comprobar.

Apartado f)

Si $n \equiv 3 \pmod{4}$, entonces, debe existir un natural, digamos k , tal que $n = 4k + 3$. En este caso, la expresión de A^n queda:

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1 + (-1)^{4k+3+1}}{2} i^{4k+3+2} & \frac{-1 + (-1)^{4k+3}}{2} i^{4k+3+1} \\ 0 & \frac{1 + (-1)^{4k+3+1}}{2} i^{4k+3+1} & \frac{1 + (-1)^{4k+3}}{2} i^{4k+3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1 + (-1)^{4(k+1)}}{2} i^{4(k+1)+1} & \frac{-1 + (-1)^{4k+3}}{2} i^{4(k+1)} \\ 0 & \frac{1 + (-1)^{4(k+1)}}{2} i^{4(k+1)} & \frac{1 + (-1)^{4k+3}}{2} i^{4k+3} \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $(-1)^{4(k+1)} = 1$, por ser el exponente par, y que $(-1)^{4k+3} = -1$, por ser impar, se sigue:

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+1}{2} i^{4(k+1)+1} & \frac{-1-1}{2} i^{4(k+1)} \\ 0 & \frac{1+1}{2} i^{4(k+1)} & \frac{1-1}{2} i^{4k+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(i^4)^{k+1} \\ 0 & (i^4)^{k+1} & 0 \end{pmatrix},$$

y, como $i^4 = 1$, finalmente, tenemos:

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Apartado g)

Si n es par, entonces, existe un número natural, digamos p , tal que $n = 2p$. Sustituyendo en la expresión de A^n , teniendo en cuenta el valor de la potencia $(-1)^k$, según k sea par o impar, resulta:

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+(-1)^{2p+1}}{2} i^{2p+2} & \frac{-1+(-1)^{2p}}{2} i^{2p+1} \\ 0 & \frac{1+(-1)^{2p+1}}{2} i^{2p+1} & \frac{1+(-1)^{2p}}{2} i^{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-1}{2} i^{2p+2} & \frac{-1+1}{2} i^{2p+1} \\ 0 & \frac{1-1}{2} i^{2p+1} & \frac{1+1}{2} i^{2p} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & -i^{2p+2} & 0 \\ 0 & 0 & i^{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & -(i^2)^p \cdot i^2 & 0 \\ 0 & 0 & (i^2)^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & -(-1)^p \cdot (-1) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^p \end{pmatrix},$$

luego:

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^p \end{pmatrix},$$

que, obviamente, es una matriz diagonal, como se pedía probar. En consecuencia, el valor de su determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, luego:

$$|A^n| = 5^n \cdot (-1)^p \cdot (-1)^p = 5^n \cdot (-1)^{2p} = 5^n.$$

(Oposiciones de Secundaria, 2002)

Problema 2.12

Verifica si es lineal la aplicación $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $f(x, y, z) = (x, y, x + y + 2)$.

Es claro que la aplicación dada no es lineal, pues si lo fuera, para cualquier real α , y para cualquier vector (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, se cumpliría la igualdad $f(\alpha(x, y, z)) = \alpha f(x, y, z)$; pero, a partir de la definición de f y de las operaciones en $\mathbb{R}^3$, tenemos las relaciones:

$$f(\alpha(x, y, z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha x + \alpha y + 2),$$

$$\alpha f(x, y, z) = \alpha(x, y, x + y + 2) = (\alpha x, \alpha y, \alpha x + \alpha y + 2\alpha),$$

que evidencian que la igualdad aludida no es cierta en general (solo lo es si $\alpha = 1$).

(Oposiciones de Secundaria, 2000)

Problema 2.13

Sean el cuerpo $K = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_5$ y los espacios vectoriales $V = K \times K \times K$ y $V' = K \times K$.

Se toma en V la base canónica y en V' la base formada por los vectores $v_1 = (1, 0)$ y $v_2 = (1, 1)$.

Consideremos la aplicación $f: V \rightarrow V'$, dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3, 2x_2 + x_3)$. Se pide:

- Demuestra que f es lineal.
- Halla el núcleo de f y una base del mismo.
- Escribe la matriz de f respecto de las bases citadas.

Apartado a)

Sean (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) dos vectores de V , y sean a y b dos elementos del cuerpo K (tenemos presente que V y V' son espacios vectoriales sobre K , por lo que los escalares deben ser tomados de este cuerpo). Se trata de demostrar la igualdad:

$$f(a(x_1, x_2, x_3) + b(y_1, y_2, y_3)) = af(x_1, x_2, x_3) + bf(y_1, y_2, y_3).$$

Por las propiedades de las operaciones definidas en el espacio vectorial V , tenemos:

$$a(x_1, x_2, x_3) + b(y_1, y_2, y_3) = (ax_1, ax_2, ax_3) + (by_1, by_2, by_3) \Leftrightarrow$$

$$a(x_1, x_2, x_3) + b(y_1, y_2, y_3) = (ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3),$$

luego, aplicando f , resulta:

$$f(a(x_1, x_2, x_3) + b(y_1, y_2, y_3)) = f(ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3).$$

Ahora, por definición de f , se verifica:

$$\begin{aligned} & f(ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3) = \\ & = (ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 + 3(ax_3 + by_3), 2(ax_2 + by_2) + ax_3 + by_3), \end{aligned}$$

de donde se sigue:

$$\begin{aligned} & f(a(x_1, x_2, x_3) + b(y_1, y_2, y_3)) = \\ & = (ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 + 3ax_3 + 3by_3, 2ax_2 + 2by_2 + ax_3 + by_3). \end{aligned} \tag{I}$$

Por otro lado, también por definición de f , podemos escribir:

$$af(x_1, x_2, x_3) + bf(y_1, y_2, y_3) = a(x_1 + x_2 + 3x_3, 2x_2 + x_3) + b(y_1 + y_2 + 3y_3, 2y_2 + y_3),$$

expresión que, por las propiedades de las operaciones definidas en el espacio vectorial V' , es igual a:

$$(ax_1 + ax_2 + 3ax_3, 2ax_2 + ax_3) + (by_1 + by_2 + 3by_3, 2by_2 + by_3),$$

la cual, a su vez, es igual a:

$$(ax_1 + ax_2 + 3ax_3 + by_1 + by_2 + 3by_3, 2ax_2 + ax_3 + 2by_2 + by_3).$$

Así pues, de este modo, tenemos:

$$\begin{aligned} &af(x_1, x_2, x_3) + bf(y_1, y_2, y_3) = \\ &= (ax_1 + ax_2 + 3ax_3 + by_1 + by_2 + 3by_3, 2ax_2 + ax_3 + 2by_2 + by_3). \end{aligned}$$

Como resulta claro, el segundo miembro de esta última igualdad es idéntico al segundo miembro de la igualdad (I), salvo por la ordenación de algunos términos, por lo cual ya tenemos probada la igualdad que pretendíamos, lo que se traduce en que f es lineal.

Apartado b)

Como sabemos, un vector (x_1, x_2, x_3) de V pertenece al núcleo de f si, y solo si, se transforma en el vector nulo de V' . Así pues, por la definición de f , para que (x_1, x_2, x_3) esté en el núcleo de f es necesario y suficiente que $(x_1 + x_2 + 3x_3, 2x_2 + x_3)$ sea el vector nulo de V' , lo cual se traduce, identificando componentes, en el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases},$$

que son las ecuaciones del espacio vectorial $\ker(f)$. Aislado x_3 en la segunda ecuación, sustituyendo en la primera y operando, resulta:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3(-2x_2) = 0 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que el cuerpo base es $K = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_5$, es claro que los escalares son realmente clases de equivalencia en módulo 5. Además, se da la congruencia $-5x_2 \equiv 0 \pmod{5}$, puesto que $-5x_2$ es múltiplo de 5 (obviamente), por lo que podemos identificar el término $-5x_2$ con 0 en la primera ecuación. Asimismo, la congruencia $-2 \equiv 3 \pmod{5}$ permite modificar la segunda ecuación, por lo que el último sistema puede escribirse simplificada como:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 3x_2 \end{cases},$$

el cual representa unas ecuaciones más sencillas del espacio vectorial $\ker(f)$.

De este modo, hemos respondido parcialmente al enunciado de este apartado; para completar su resolución, tenemos que determinar una base de $\ker(f)$. Teniendo en cuenta que el sistema tiene un grado de libertad, resulta claro que $\dim(\ker(f)) = 1$, y que, para obtener una base de $\ker(f)$, basta con dar un valor arbitrario no nulo a la variable x_2 , por ejemplo, $x_2 = 1$, resultando el vector $(0, 1, 3)$. Por tanto, una base de $\ker(f)$ es $B_{\ker(f)} = \{(0, 1, 3)\}$.

Apartado c)

Denotemos por B y B' las respectivas bases de V y V' indicadas en el enunciado, es decir, B es la base canónica de V , definida por $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, mientras que $B' = \{v_1, v_2\} = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

Como sabemos, para determinar la matriz de f respecto de las bases B y B' , hemos de calcular las coordenadas (respecto de B') de los transformados de los vectores de B , y escribirlos en filas, en el mismo orden en que están en B .

Por definición de f , tenemos $f(1, 0, 0) = (1 + 0 + 3 \cdot 0, 2 \cdot 0 + 0) = (1, 0)$, que obviamente es el primer vector de la base B' y, en consecuencia, sus coordenadas respecto de esta base son precisamente $(1, 0)$.

Por su parte, $f(0, 1, 0) = (0 + 1 + 3 \cdot 0, 2 \cdot 1 + 0) = (1, 2)$. Para escribir este vector respecto de la base B' , tenemos que calcular sus coordenadas respecto de esta base, esto es, los escalares a y b tales que $(1, 2) = a(1, 0) + b(1, 1)$. Operando en el segundo miembro de esta igualdad, se sigue $(1, 2) = (a + b, b)$, e identificando componentes, llegamos al sistema:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Sustituyendo el valor $b = 2$ en la primera ecuación y despejando a , teniendo presente nuevamente que estamos trabajando en el cuerpo base $K = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_5$, y que se da la congruencia $-1 \equiv 4(\text{mod } 5)$, resulta:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases},$$

lo que se traduce en que las coordenadas de $f(0, 1, 0)$ respecto de B' son $(4, 2)$.

El transformado del último vector de B es $f(0, 0, 1) = (0 + 0 + 3 \cdot 1, 2 \cdot 0 + 1) = (3, 1)$. Para determinar sus coordenadas respecto de B' , procedemos como antes, escribiendo $(3, 1) = c(1, 0) + d(1, 1)$, operando e identificando componentes, lo que nos lleva al sistema:

$$\begin{cases} c + d = 3 \\ d = 1 \end{cases},$$

cuya solución es $c = 2$, $d = 1$. De este modo, las coordenadas de $f(0, 0, 1)$ respecto de B' son $(2, 1)$.

Con todo lo dicho, estamos ya en condiciones de escribir la matriz de f respecto de las bases B y B' :

$$M(f; B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que cierra el apartado y, con él, el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2010, y Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1974)

Problema 2.14

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

siendo a un número real no nulo. Se pide:

- Prueba que A es invertible y calcula A^{-1} .
- Estudia la diagonalización de A según los valores de a y, cuando sea posible, determina una matriz P tal que $P^{-1}AP = D$ sea diagonal.
- Calcula A^n , para todo n natural.

Apartado a)

Para probar que A es invertible, hemos de calcular su determinante y ver que es distinto de cero, independientemente del valor del parámetro a . En efecto, aplicando la regla de Sarrus, tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix} = a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^2 + a^{-2} \cdot a \cdot a = 1 + 1 = 2.$$

Por su parte, para el cálculo de A^{-1} empleamos la conocida fórmula, resultando:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ a^{-1} & -1 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & a/2 & a^2/2 \\ a^{-1}/2 & -1/2 & a/2 \\ a^{-2}/2 & a^{-1}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Apartado b)

Para estudiar la diagonalización de A , hemos de calcular sus autovalores que, como es sabido, son las raíces del polinomio característico, es decir, las soluciones de la ecuación $|\lambda \cdot I - A| = 0$, siendo I la matriz identidad. Sustituyendo I y A por sus respectivas expresiones matriciales, operando y empleando la regla de Sarrus, resulta:

$$|\lambda \cdot I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -a^2 \\ -a^{-1} & \lambda & -a \\ -a^{-2} & -a^{-1} & \lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$|\lambda \cdot I - A| = \lambda^3 - 1 - 1 - \lambda - \lambda - \lambda = \lambda^3 - 3\lambda - 2,$$

luego tenemos la ecuación:

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0,$$

que, factorizando, haciendo uso de la regla de Ruffini, resulta equivalente a:

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0,$$

de donde se sigue que los autovalores de A son $\lambda_1 = -1$ (doble) y $\lambda_2 = 2$.

Ahora bien, la teoría sostiene que una matriz A con autovalores reales es diagonalizable si, y solo si, la dimensión del espacio propio asociado a cada autovalor, mediante la aplicación lineal que tiene por matriz la matriz A , es igual a la multiplicidad del autovalor correspondiente, siendo la matriz de paso, digamos P^{-1} , la que resulta al colocar por filas los vectores de la base de cada espacio propio, y la matriz diagonal, digamos D , la que tiene en la diagonal principal los autovalores de A , en el mismo orden en que aparecen sus autovalores asociados en la matriz de paso, y los restantes elementos nulos. Así pues, hemos de hallar el espacio propio asociado a cada autovalor λ , que está caracterizado por la ecuación:

$$X \cdot (\lambda \cdot I - A) = 0, \quad (I)$$

para después calcular su dimensión y una base, algo que haremos separadamente para cada autovalor, como vemos a continuación.

Para $\lambda_1 = -1$, sustituyendo en la ecuación anterior y operando, resulta:

$$X \cdot (\lambda_1 \cdot I - A) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -a & -a^2 \\ -a^{-1} & -1 & -a \\ -a^{-2} & -a^{-1} & -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x - a^{-1}y - a^{-2}z = 0 \\ -ax - y - a^{-1}z = 0 \\ -a^{-2}x - ay - z = 0 \end{cases}.$$

Obsérvese que se trata de un sistema con una única ecuación independiente, ya que la segunda es igual al resultado de multiplicar la primera por a , mientras que la tercera se obtiene al multiplicar la primera por a^{-2} , como es fácil de comprobar. Así pues, el sistema se reduce a una ecuación (digamos la primera), de manera que, al tener 3 incógnitas, posee 2 grados de libertad, es decir, la dimensión del espacio propio asociado a λ_1 es igual a 2, precisamente la multiplicidad de este autovalor, como hemos visto antes. Para obtener una base, parametrizamos dos incógnitas (por ejemplo y , z), y despejamos la otra (en este caso, x), quedando el sistema:

$$\begin{cases} x = -a^{-1}t - a^{-2}s \\ y = t \\ z = s \end{cases},$$

y, a continuación, asignamos dos valores particulares a los parámetros, que garanticen que los vectores resultantes sean linealmente independientes (al ser dos, es suficiente con que no sean proporcionales), por ejemplo, $t = 1$, $s = 0$, por un lado, y $t = 0$, $s = 1$, por otro. De esta manera, obtenemos la base:

$$B_1 = \{(-a^{-1}, 1, 0), (-a^{-2}, 0, 1)\}.$$

Para $\lambda_2 = 2$, sustituyendo y operando, de la ecuación (I) se sigue:

$$X \cdot (\lambda_2 \cdot I - A) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -a & -a^2 \\ -a^{-1} & 2 & -a \\ -a^{-2} & -a^{-1} & 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - a^{-1}y - a^{-2}z = 0 \\ -ax + 2y - a^{-1}z = 0 \\ -a^2x - ay + 2z = 0 \end{cases},$$

siendo este un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes tiene rango 2 (tenemos presente que el determinante de la matriz es nulo, puesto que anteriormente hemos obtenido λ_2 precisamente de imponer la condición de que lo fuera, por lo que no puede tener rango 3; pero tampoco rango 1, ya que las dos primeras ecuaciones no son proporcionales, como es claro). Así pues, el sistema tiene un grado de libertad, lo que se traduce en que la dimensión del espacio propio asociado a λ_2 es igual a 1, exactamente el valor de su multiplicidad, por lo que tenemos ya probado que A es diagonalizable.

Para obtener una base del espacio propio asociado, prescindimos de la tercera ecuación, por ser combinación lineal de las dos primeras (es consecuencia de lo que hemos comentado sobre el rango), parametrizamos una incógnita (por ejemplo, z), hallamos las otras dos (en este caso, x e y) por el método de Cramer, como vemos a continuación:

$$\begin{cases} 2x - a^{-1}y - a^{-2}z = 0 \\ -ax + 2y - a^{-1}z = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - a^{-1}y = a^{-2}t \\ -ax + 2y = a^{-1}t \\ z = t \end{cases},$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a^{-2}t & -a^{-1} \\ a^{-1}t & 2 \\ 2 & -a^{-1} \\ -a & 2 \end{vmatrix}}{4-1} = \frac{2a^{-2}t + a^{-2}t}{3} = \frac{3a^{-2}t}{3} = a^{-2}t,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a^{-2}t \\ -a & a^{-1}t \\ 2 & -a^{-1} \\ -a & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2a^{-1}t + a^{-1}t}{3} = \frac{3a^{-1}t}{3} = a^{-1}t,$$

y, por último, asignamos cualquier valor no nulo al parámetro t , por ejemplo $t = 1$, resultando la base del espacio propio asociado:

$$B_2 = \{(a^{-2}, a^{-1}, 1)\}.$$

Con todo lo visto, tenemos ya determinadas las matrices P^{-1} y D aludidas en el enunciado:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -a^{-1} & 1 & 0 \\ -a^{-2} & 0 & 1 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

mientras que la matriz P pedida es la inversa de P^{-1} (que es invertible, como veremos a continuación), que calculamos mediante la conocida fórmula, que ya hemos empleado en este mismo problema.

En primer lugar, aplicando la regla de Sarrus, tenemos:

$$|P^{-1}| = \begin{vmatrix} -a^{-1} & 1 & 0 \\ -a^{-2} & 0 & 1 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{vmatrix} = a^{-2} + a^{-2} + a^{-2} = 3a^{-2},$$

que es no nulo, puesto que a^{-2} no puede serlo (y, entonces, P^{-1} es invertible). De este modo, podemos escribir:

$$P = \frac{1}{|P^{-1}|} (\text{Adj}(P^{-1}))^t = \frac{1}{3a^{-2}} \begin{pmatrix} -a^{-1} & -1 & 1 \\ 2a^{-2} & -a^{-1} & a^{-1} \\ -a^{-3} & 2a^{-2} & a^{-2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$P = \begin{pmatrix} -a^{-1}/3a^{-2} & -1/3a^{-2} & 1/3a^{-2} \\ 2a^{-2}/3a^{-2} & -a^{-1}/3a^{-2} & a^{-1}/3a^{-2} \\ -a^{-3}/3a^{-2} & 2a^{-2}/3a^{-2} & a^{-2}/3a^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a/3 & -a^2/3 & a^2/3 \\ 2/3 & -a/3 & a/3 \\ -a^{-1}/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que la comprobación de que, efectivamente, se verifica la igualdad exigida en el enunciado se reduce al cálculo del producto de las tres matrices involucradas, como vemos a continuación:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -a^{-1} & 1 & 0 \\ -a^{-2} & 0 & 1 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a/3 & -a^2/3 & a^2/3 \\ 2/3 & -a/3 & a/3 \\ -a^{-1}/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a^{-1} & -1 & 0 \\ a^{-2} & 0 & -1 \\ 2a^{-2} & 2a^{-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a/3 & -a^2/3 & a^2/3 \\ 2/3 & -a/3 & a/3 \\ -a^{-1}/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

Apartado c)

A partir de la igualdad $P^{-1}AP = D$, multiplicando ambos miembros por P a la izquierda y por P^{-1} a la derecha (tenemos presente que, en general, el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa), tenemos $P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, y, al ser $PP^{-1} = I$, aplicando la propiedad asociativa, resulta la igualdad $A = PDP^{-1}$. Ahora, al elevar los dos miembros de esta igualdad al número natural n , queda $A^n = (PDP^{-1})^n$, que, por definición, es equivalente a $A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})$. Aplicando de nuevo la propiedad asociativa, tenemos $A^n = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1} \cdots P)DP^{-1}$, y, al ser $P^{-1}P = I$, sustituyendo y simplificando, resulta la igualdad $A^n = PDDD \cdots DP^{-1}$, es decir, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Ahora bien, como la matriz D es diagonal, es claro que su potencia n -ésima se obtiene elevando a n cada uno de los elementos de la diagonal principal, resultando:

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Finalmente, sustituyendo y operando, obtenemos la expresión de A^n , como se pide en el enunciado, lo que cierra el problema:

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -a/3 & -a^2/3 & a^2/3 \\ 2/3 & -a/3 & a/3 \\ -a^{-1}/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a^{-1} & 1 & 0 \\ -a^{-2} & 0 & 1 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n(-a/3) & (-1)^n(-a^2/3) & 2^n a^2/3 \\ (-1)^n 2/3 & (-1)^n(-a/3) & 2^n a/3 \\ (-1)^n(-a^{-1}/3) & (-1)^n 2/3 & 2^n/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a^{-1} & 1 & 0 \\ -a^{-2} & 0 & 1 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A^n = \begin{pmatrix} [2^n + 2(-1)^n]/3 & a[2^n - (-1)^n]/3 & a^2[2^n - (-1)^n]/3 \\ a^{-1}[2^n - (-1)^n]/3 & [2^n + 2(-1)^n]/3 & a[2^n - (-1)^n]/3 \\ a^{-2}[2^n - (-1)^n]/3 & a^{-1}[2^n - (-1)^n]/3 & [2^n + 2(-1)^n]/3 \end{pmatrix}$$

(obsérvese que esta fórmula es válida incluso si $n = 0$, ya que si se sustituye n por este valor, se obtiene la igualdad $A^0 = I$, que es cierta por convenio, como es sabido).

(Oposiciones de Secundaria, 1997)

Problema 2.15

Calcula la potencia n -ésima de la matriz A , siendo A la matriz asociada a la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifica las siguientes condiciones:

a) $f(0, 1, 1) = (0, -1, -1)$.

b) $f(2, 0, -1) = (0, 4, 3)$.

c) $f(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$.

En primer lugar, determinaremos la matriz A . Para ello, consideramos una matriz cuadrada genérica de orden 3 (pues la aplicación f va de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$), digamos:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

e imponemos las condiciones del enunciado, lo que, teniendo en cuenta que el transformado por f de un vector se calcula multiplicando sus componentes por la matriz A , nos lleva a las igualdades:

$$f(0, 1, 1) = (0, -1, -1) \Rightarrow (0, 1, 1) \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (0, -1, -1),$$

$$f(2, 0, -1) = (0, 4, 3) \Rightarrow (2, 0, -1) \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (0, 4, 3),$$

$$f(1, 1, 1) = (-1, -1, -1) \Rightarrow (1, 1, 1) \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (-1, -1, -1),$$

de las que, operando e identificando coeficientes, obtenemos, respectivamente, los sistemas:

$$(d+g, e+h, f+i) = (0, -1, -1) \Rightarrow \begin{cases} d+g=0 \\ e+h=-1, \\ f+i=-1 \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$(2a-g, 2b-h, 2c-i) = (0, 4, 3) \Rightarrow \begin{cases} 2a-g=0 \\ 2b-h=4, \\ 2c-i=3 \end{cases} \quad (\text{II})$$

$$(a+d+g, b+e+h, c+f+i) = (-1, -1, -1) \Rightarrow \begin{cases} a+d+g=-1 \\ b+e+h=-1. \\ c+f+i=-1 \end{cases} \quad (\text{III})$$

Como vemos, los sistemas (I) y (III) guardan bastante relación, lo que permite encontrar fácilmente el valor de las incógnitas a , b y c , sin más que sustituir las igualdades de (I) en (III), resultando:

$$\begin{cases} a+0=-1 \\ b-1=-1 \\ c-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}.$$

Sustituyendo estos valores en (II), tenemos:

$$\begin{cases} 2(-1)-g=0 \\ 2 \cdot 0-h=4 \\ 2 \cdot 0-i=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g=-2 \\ h=-4, \\ i=-3 \end{cases}$$

y, por último, sustituyendo en (III) los valores hallados, llegamos a:

$$\begin{cases} -1+d-2=-1 \\ 0+e-4=-1 \\ 0+f-3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2 \\ e=3, \\ f=2 \end{cases}$$

quedando, entonces, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para determinar A^n , comenzamos calculando A^2 , A^3 , etc., hasta encontrar una pauta, la cual es muy sencilla en este caso, como veremos a continuación.

En efecto, al hallar el producto de A por sí misma, resulta:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

de donde, como es claro, se deducen las igualdades:

$$A^3 = AA^2 = A \cdot I = A,$$

$$A^4 = A^2A^2 = I \cdot I = I,$$

$$A^5 = A^3A^2 = A \cdot I = A,$$

y, en general:

$$A^n = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ es impar} \\ I & \text{si } n \text{ es par} \end{cases},$$

lo que da respuesta al problema.

(Examen de Universidad)

Problema 2.16

Calcula la potencia n -ésima de la matriz A , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lo resolveremos calculando las sucesivas potencias de A , hasta que encontremos una pauta común a todas ellas que podamos expresar en función del exponente, lo cual nos permitirá conjeturar una igualdad en la que aparezca despejada la potencia n -ésima de A . Posteriormente, para tener la certeza de que esta igualdad es válida para cualquier exponente natural, la demostraremos por inducción.

En primer lugar, para $n = 1$, es obvio que $A^1 = A$.

Para $n = 2$, tenemos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $n = 3$, resulta:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $n = 4$, obtenemos:

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $n = 5$, la matriz resultante es:

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 15 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, observando la relación existente entre el exponente de la matriz y los coeficientes de la misma, parece claro que la matriz A^n es de la forma:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ S_n & n & 1 \end{pmatrix}, \quad (I)$$

donde S_n denota la suma de los primeros n números naturales.

Como comentamos al principio, para probar que esta fórmula es válida para cualquier valor natural de n , hemos de usar el método de inducción, como vemos a continuación.

Para $n = 1$, la fórmula se convierte en:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ S_1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A,$$

luego la igualdad es cierta para $n = 1$.

Supongamos ahora que la fórmula es válida para $n \geq 1$, y veamos que, en tal caso, también ha de serlo para $n + 1$. Se trata pues, de demostrar la igualdad:

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n+1 & 1 & 0 \\ S_{n+1} & n+1 & 1 \end{pmatrix},$$

aceptando como válida la fórmula (I). En efecto, aplicando la hipótesis de inducción (HI) y realizando el producto, tenemos:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \underset{\text{HI}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ S_n & n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n+1 & 1 & 0 \\ S_n + n + 1 & n+1 & 1 \end{pmatrix},$$

pero $S_n + n + 1 = S_{n+1}$ (S_n es la suma de todos los naturales menores o iguales que n , por tanto, al sumarle $n + 1$, obtenemos la suma de todos los naturales menores o iguales que $n + 1$, esto es, S_{n+1}), luego, sustituyendo, ya tenemos la igualdad deseada.

De este modo, por inducción, podemos afirmar que la fórmula (I) es cierta, para todo número natural n .

Ahora bien, es conocida la expresión:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2},$$

de modo que, sustituyendo, podemos reescribir la fórmula (I) como:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ (n^2 + n)/2 & n & 1 \end{pmatrix},$$

válida para todo número natural n , lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2000, y examen de Universidad)

Problema 2.17

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donde a, b, c y d son números reales que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} a^2 - a + bc = 0 \\ d^2 - d + bc = 0. \\ a \neq d \end{cases}$$

Demuestra que se verifica la igualdad:

$$\sum_{k=1}^n A^k = nA, \forall n \in \mathbb{N}.$$

En principio, por la forma de la igualdad que pretendemos demostrar, se puede pensar en el método de inducción como vía para establecerla. Sin embargo, al no contar, para un número natural dado n , con la expresión de la potencia $(n+1)$ -ésima de A , no parece que podamos aplicar la hipótesis de inducción para probar la certeza del «paso» de la inducción, por lo que este modo de proceder puede resultar estéril. Así pues, elegimos un camino diferente, el cual pasa, como es de esperar, por el cálculo efectivo de la matriz A^k , para los sucesivos valores de k , lo cual es bastante sencillo, como vemos a continuación.

En efecto, realizando la multiplicación, resulta:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix},$$

y, por las condiciones dadas en el enunciado (trasponiendo a y d en la primera y en la segunda ecuación, respectivamente, y sustituyendo), tenemos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & ab + bd \\ ac + cd & d \end{pmatrix},$$

igualdad que, extrayendo factores comunes, podemos escribir como:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b(a+d) \\ c(a+d) & d \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, restando término a término las dos igualdades del enunciado, aplicando la conocida identidad algebraica, extrayendo factor común, y cancelando (lo cual es posible, al ser $a \neq d$), llegamos a:

$$\left[\begin{array}{l} a^2 - a + \cancel{bc} = 0 \\ d^2 - d + \cancel{bc} = 0 \\ \hline a^2 - d^2 - a + d = 0 \end{array} \right] \Rightarrow (a+d)(a-d) - (a-d) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\cancel{a-d})[(a+d)-1] = 0 \Leftrightarrow a+d=1,$$

de donde, sustituyendo en la última expresión de A^2 , se sigue:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

lo que significa que $A^2 = A$ (A es idempotente), y, entonces, $A^3 = A^2A = AA = A^2 = A$, $A^4 = A^3A = AA = A^2 = A$, ..., y, en general, $A^k = A$, para todo número natural k .

Teniendo en cuenta esta expresión de A^k , la igualdad que pretendemos demostrar es trivial, pues, para cualquier número natural n , se cumple:

$$\sum_{k=1}^n A^k = \sum_{k=1}^n A = \overbrace{A + \cdots + A}^{n \text{ veces}} = nA,$$

lo que cierra el problema.

(Problema original)

Problema 2.18

Sea A una matriz cuadrada de orden n con coeficientes reales. Demuestra que si A es simétrica, entonces, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$.

Como resulta evidente, el cálculo directo de A^2 y de su rango, a partir de una matriz genérica A , es bastante laborioso, y los casos que habría que discutir para establecer los rangos de las matrices A y A^2 serían muy numerosos.

Así pues, una resolución «directa» del problema es inabarcable, por lo que procederemos de manera «indirecta», considerando que, como es sabido, la matriz A tiene asociado un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$, digamos f , definido por:

$$f(x) = xA, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

mientras que la matriz A^2 está asociada al endomorfismo f^2 (la composición de f con sí mismo), mediante la expresión:

$$f^2(x) = xA^2, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Además, como también es sabido, en virtud del Primer Teorema de Isomorfía, existe una relación entre el rango de A y las dimensiones de los espacios vectoriales $\text{Im} f$ y $\ker f$ (y, de la misma manera, entre el rango de A^2 y las dimensiones de los espacios $\text{Im} f^2$ y $\ker f^2$), recogidas en las igualdades:

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im } f) = n - \dim(\ker f),$$

$$\text{rg}(A^2) = \dim(\text{Im } f^2) = n - \dim(\ker f^2),$$

por lo que podemos decir que se verifica la igualdad $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$ (que es lo que queremos demostrar) si, y solo si, las dimensiones de los núcleos de f y f^2 coinciden.

De este modo, el problema queda reducido a establecer la igualdad entre estas dos dimensiones, si bien iremos más lejos, demostrando, no solo la coincidencia de las dimensiones, sino que, de hecho, los núcleos de f y f^2 son, en realidad, el mismo espacio vectorial, lo cual haremos por doble inclusión.

En efecto, dado un vector x , perteneciente al núcleo de f , por definición del núcleo, se cumple $f(x) = \theta$ (θ representa el vector nulo), por lo que, «aplicando f », tenemos $f(f(x)) = f(\theta) = \theta$ (f transforma el vector nulo en sí mismo, por ser una aplicación lineal), lo que significa que $f^2(x) = \theta$, y, en consecuencia, x pertenece al núcleo de f^2 .

De este modo, tenemos probada la inclusión $\ker f \subset \ker f^2$. Obsérvese que, para demostrar esta inclusión, no hemos usado la hipótesis de que A es simétrica (ni siquiera la propia matriz A), por lo que esta inclusión es cierta en general, para cualquier aplicación lineal f .

Recíprocamente, sea ahora x un vector perteneciente al núcleo de f^2 , y denotemos por $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ el transformado de x por f , esto es, $y = f(x) = xA$. Se trata, pues, de comprobar que x pertenece también al núcleo de f .

Puesto que x está en el núcleo de f^2 , se satisface la igualdad $f^2(x) = \theta$, que podemos escribir como $xA^2 = \theta$, de donde, teniendo en cuenta que $A = A^t$ (como A es simétrica, coincide con su traspuesta), se sigue:

$$xA^2 = \theta \Leftrightarrow xAA = \theta \Leftrightarrow xAA^t = \theta,$$

y, multiplicando por la matriz columna x^t (por la derecha) ambos miembros de esta última ecuación (obsérvese que ello es posible, por las dimensiones de las matrices involucradas), y aplicando las propiedades de la trasposición de matrices, llegamos a:

$$xAA^t = \theta \Rightarrow xAA^t x^t = \theta x^t \Leftrightarrow xA(xA)^t = 0,$$

(la expresión del segundo miembro de esta última ecuación es el número cero —no el vector nulo—, que es el resultado de multiplicar la matriz fila θ , que tiene todos sus coeficientes nulos, por la matriz columna x^t), ecuación que, teniendo en cuenta la igualdad $y = xA$, podemos escribir como:

$$yy^t = 0.$$

Usando ahora las coordenadas del vector y , operando, y teniendo presente que el resultado de la suma de los cuadrados de varios números solo puede ser nulo si estos lo son, tenemos:

$$(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 0 \Leftrightarrow y_i = 0, \forall i = 1, \dots, n,$$

lo que significa que $y = \theta$, es decir, $f(x) = \theta$, y, por tanto, x pertenece al núcleo de f .

De este modo, tenemos probada también la inclusión $\ker f^2 \subset \ker f$, de modo que ya podemos afirmar que se verifica la igualdad $\ker f = \ker f^2$, y, entonces, como ya comentamos, los rangos de A y A^2 coinciden, lo que cierra el problema.

(Examen de Universidad)

Problema 2.19

Demuestra que si la matriz A verifica la relación $A^2 - A - I = 0$, entonces, existe la matriz inversa de A y calcúlala (I denota la matriz identidad).

De la igualdad dada en el enunciado, trasponiendo y extrayendo la matriz A como factor común, se obtiene $A(A - I) = I$, y, tomando determinantes, $|A(A - I)| = |I|$. Ahora bien, por una parte, sabemos que $|I| = 1$, y, por otra, que las propiedades de los determinantes garantizan la igualdad $|A(A - I)| = |A||A - I|$. Así pues, tenemos $|A||A - I| = 1$, y, en consecuencia, $|A| \neq 0$, lo que equivale a decir que existe la matriz inversa de A , como queríamos demostrar.

Para determinarla, tengamos en cuenta que la inversa de A es aquella matriz, digamos B , tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$. Pero ya hemos visto que $A(A - I) = I$, por lo que intuimos que la matriz inversa de A debe ser $B = A - I$. Para asegurarlo, solo hay que ver que se mantiene la igualdad al intercambiar el orden en la multiplicación, esto es, que A y $A - I$ conmutan, lo cual es cierto, puesto que $(A - I)A = A^2 - A = A(A - I) = I$, y ya tenemos probado que la inversa de A es $A - I$.

(Examen de Universidad)

Problema 2.20

Demuestra, sin calcularlo, que el determinante de la matriz A es múltiplo de 1648, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 24 & 4 & 32 & 37 & 8 \\ 2 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 10 & 4 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por las propiedades de los determinantes, podemos «extraer» un 2 de la quinta columna de A , pues todos sus elementos son pares, quedando:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 24 & 4 & 32 & 37 & 8 \\ 2 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 10 & 4 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 24 & 4 & 32 & 37 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 10 & 2 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

De la misma manera, podemos «extraer» un 2 de la cuarta fila, resultando:

$$|A| = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 24 & 4 & 32 & 37 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ahora, sumando a la tercera fila la segunda previamente multiplicada por 100 y la quinta previamente multiplicada por 10, resulta:

$$|A| = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 24 & 4 & 32 & 37 & 4 \\ 2472 & 412 & 3296 & 3708 & 412 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

determinante en el que todos los elementos de la tercera fila son múltiplos de 412. Así pues, podemos «extraer» el 412 de esta fila, quedando:

$$|A| = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 24 & 4 & 32 & 37 & 4 \\ 6 \cdot 412 & 412 & 8 \cdot 412 & 9 \cdot 412 & 412 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 412 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 24 & 4 & 32 & 37 & 4 \\ 6 & 1 & 8 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$|A| = 1648 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 24 & 4 & 32 & 37 & 4 \\ 6 & 1 & 8 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

De este modo, hemos expresado explícitamente el determinante de la matriz A como el producto de 1648 por un número entero (puesto que todos los números involucrados en el último determinante son naturales, el resultado de este debe ser necesariamente un número entero), lo que prueba que el determinante de A es múltiplo de 1648, como queríamos demostrar.

(Adaptado de examen de Universidad)

Problema 2.21

Para cada número natural n , calcula el determinante D_n , de orden n , siendo:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por adjuntos el determinante, haciendo uso de la primera columna, tenemos:

$$D_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1}.$$

Como es claro, el primer determinante del segundo miembro de esta igualdad corresponde al de una matriz triangular inferior, por lo que es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, esto es, a 2^{n-1} , puesto que la diagonal principal está formada exclusivamente por ceros, y hay $n-1$ elementos en ella. Por su parte, el segundo determinante del segundo miembro coincide con D_{n-1} (tiene la misma forma que la dada en el enunciado, pero su orden es una unidad menor). Por tanto, para cada natural $n \geq 2$, se verifica la relación de recurrencia:

$$D_n = 2^{n-1} + D_{n-1},$$

y, «haciendo descender» el valor de n , se sigue:

$$D_n = 2^{n-1} + D_{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + D_{n-2} = \cdots = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + D_1.$$

Ahora, teniendo presente que $D_1 = 1$ (para $n = 1$, queda el determinante de una matriz con una sola fila y una sola columna, cuyo único elemento es 1), resulta:

$$D_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1,$$

que evidentemente se trata de la suma de los primeros términos de la progresión geométrica de razón 2 cuyo primer término es igual a la unidad. Aplicando la conocida fórmula que permite calcular la suma de tales términos, tenemos, para cada número natural n , la igualdad:

$$D_n = \frac{2^{n-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^n - 1,$$

que da respuesta al enunciado del problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.22

Para cada número natural n , calcula el determinante D_n , de orden n , siendo:

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por adjuntos el determinante, usando la primera fila, podemos escribir:

$$D_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n} = 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1},$$

de donde se sigue:

$$D_n = 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-2},$$

puesto que, desarrollando por adjuntos, usando la primera columna, se tiene la igualdad:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-2}.$$

De este modo, tenemos la relación de recurrencia lineal $D_n = 3 \cdot D_{n-1} - 2 \cdot D_{n-2}$, cuya ecuación característica es $x^2 = 3x - 2$, que, trasponiendo términos, se convierte en la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$. Resolviéndola, obtenemos las soluciones $x = 1$, $x = 2$.

Recordemos que las sucesiones de números reales que verifican una relación de recurrencia lineal (de segundo orden, en nuestro caso) forman un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, cuya dimensión coincide con el orden de la recurrencia, y que, además, una base de dicho espacio vectorial está formada por las sucesiones:

$$\{x_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{x_2^n\}_{n \in \mathbb{N}}, \dots, \{x_p^n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

donde x_i son las raíces de la ecuación característica (suponiendo que son todas reales y simples).

Así pues, en nuestro caso, el espacio vectorial tiene dimensión 2, y la base está formada por las sucesiones $\{1^n\}_{n \geq 1}$ y $\{2^n\}_{n \geq 1}$, lo que significa que cualquier sucesión que verifique la relación de recurrencia obtenida (en particular, el determinante D_n) ha de ser combinación lineal de estas dos sucesiones.

De este modo, podemos asegurar que deben existir dos números reales, digamos r y s , tales que $D_n = r \cdot 1^n + s \cdot 2^n$, para todo natural n , es decir, $D_n = r + s \cdot 2^n$, para cualquier número natural n .

Para determinar los coeficientes de la combinación lineal, r y s , particularizamos n para valores que permitan realizar el cálculo de D_n , como veremos a continuación.

Para $n = 1$, es claro que $D_1 = 3$, pues, en este caso, la matriz correspondiente queda reducida a un solo elemento, el presente en la primera fila y la primera columna. De este modo, obtenemos la ecuación $3 = r + s \cdot 2^1$, es decir, $r + 2s = 3$.

Para $n = 2$, resulta:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7,$$

luego obtenemos la ecuación $7 = r + s \cdot 2^2$, que escribimos como $r + 4s = 7$.

Así pues, hemos de resolver el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas, resultando:

$$\begin{cases} r + 2s = 3 \\ r + 4s = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{r} + 2s = 3 \\ \cancel{r} + 4s = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 \\ r = -1 \end{cases},$$

$$\frac{2s = 4}{2s = 4}$$

lo que se traduce en la igualdad $D_n = -1 + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} - 1$, válida para todo natural n , lo que da respuesta al enunciado del problema.

(Examen de Universidad)

Problema 2.23

Para cada número natural n , calcula el valor del determinante D_n , donde C_k^r representa el número de combinaciones de r elementos tomados de k en k , siendo:

$$D_n = \begin{vmatrix} C_0^p & C_1^p & \dots & C_{n-1}^p \\ C_0^{p+1} & C_1^{p+1} & \dots & C_{n-1}^{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_0^{p+n-1} & C_1^{p+n-1} & \dots & C_{n-1}^{p+n-1} \end{vmatrix}.$$

Expresando C_k^r como el número combinatorio correspondiente, tenemos:

$$D_n = \begin{vmatrix} C_0^p & C_1^p & \dots & C_{n-1}^p \\ C_0^{p+1} & C_1^{p+1} & \dots & C_{n-1}^{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_0^{p+n-1} & C_1^{p+n-1} & \dots & C_{n-1}^{p+n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{p}{0} & \binom{p}{1} & \dots & \binom{p}{n-1} \\ \binom{p+1}{0} & \binom{p+1}{1} & \dots & \binom{p+1}{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{p+n-1}{0} & \binom{p+n-1}{1} & \dots & \binom{p+n-1}{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ahora bien, todo número combinatorio cuyo denominador es nulo es igual a 1, luego:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p}{n-1} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{p+n-1}{1} & \cdots & \binom{p+n-1}{n-1} \end{vmatrix}.$$

Aplicando las propiedades de los determinantes, podemos hacer ceros en la primera columna, escribiendo cada fila, salvo la primera, como la diferencia entre ella misma y la anterior. De este modo, resulta:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p}{n-1} \\ 0 & \binom{p+1}{1} - \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p+1}{n-1} - \binom{p}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \binom{p+n-1}{1} - \binom{p+n-2}{1} & \cdots & \binom{p+n-1}{n-1} - \binom{p+n-2}{n-1} \end{vmatrix}. \quad (I)$$

Por otro lado, por las propiedades de los números combinatorios, sabemos que, para cualesquiera naturales m y k , tales que $k \leq m$, se cumple la igualdad:

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1},$$

que, trasponiendo, podemos escribir como:

$$\binom{m+1}{k} - \binom{m}{k} = \binom{m}{k-1}.$$

Haciendo uso de esta igualdad, podemos sustituir las diferencias de números combinatorios presentes en (I) por los números combinatorios correspondientes, resultando:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p}{n-1} \\ 0 & \binom{p+1}{1} - \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p+1}{n-1} - \binom{p}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \binom{p+n-1}{1} - \binom{p+n-2}{1} & \cdots & \binom{p+n-1}{n-1} - \binom{p+n-2}{n-1} \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p}{n-1} \\ 0 & \binom{p}{0} & \cdots & \binom{p}{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \binom{p+n-2}{0} & \cdots & \binom{p+n-2}{n-2} \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por adjuntos este último determinante, empleando para ello la primera columna, tenemos:

$$D_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p}{n-1} \\ 0 & \binom{p}{0} & \cdots & \binom{p}{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \binom{p+n-2}{0} & \cdots & \binom{p+n-2}{n-2} \end{vmatrix}}_{\text{orden } n} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \binom{p}{0} & \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p}{n-2} \\ \binom{p+1}{0} & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{p+n-2}{0} & \binom{p+n-2}{1} & \cdots & \binom{p+n-2}{n-2} \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1},$$

cuyo resultado coincide con la expresión de D_{n-1} , como es fácil de comprobar.

Así pues, hemos visto que, para todo natural n , se da la igualdad $D_n = D_{n-1}$, lo que nos permite escribir, variando los valores de n , $D_n = D_{n-1} = D_{n-2} = \cdots = D_2 = D_1$. Finalmente, solo hay que observar que $D_1 = 1$ (pues para $n = 1$ tenemos una matriz formada por solo una fila y una columna, cuyo único elemento es 1), para concluir con que $D_n = 1$, para todo natural n , lo que cierra el problema.

(Adaptado de Oposiciones de Secundaria, 2000)

Problema 2.24

Para cada número natural n , calcula el valor del determinante D_n , donde s_n representa la suma de los n primeros números naturales distintos de cero, siendo:

$$D_n = \begin{vmatrix} s_1 & s_1 & s_1 & \cdots & s_1 & s_1 \\ s_1 & s_2 & s_2 & \cdots & s_2 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_3 & s_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{n-1} & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{n-1} & s_n \end{vmatrix}.$$

Aplicando las propiedades de los determinantes, podemos restar a cada columna, salvo la primera, la columna anterior, de manera que el determinante no varíe. De este modo, tenemos:

$$D_n = \begin{vmatrix} s_1 & s_1 & s_1 & \cdots & s_1 & s_1 \\ s_1 & s_2 & s_2 & \cdots & s_2 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_3 & s_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{n-1} & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{n-1} & s_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 & s_1 - s_1 & s_1 - s_1 & \cdots & s_1 - s_1 & s_1 - s_1 \\ s_1 & s_2 - s_1 & s_2 - s_2 & \cdots & s_2 - s_2 & s_2 - s_2 \\ s_1 & s_2 - s_1 & s_3 - s_2 & \cdots & s_3 - s_3 & s_3 - s_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1 & s_2 - s_1 & s_3 - s_2 & \cdots & s_{n-1} - s_{n-2} & s_{n-1} - s_{n-1} \\ s_1 & s_2 - s_1 & s_3 - s_2 & \cdots & s_{n-1} - s_{n-2} & s_n - s_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ahora, es claro que, por una parte, cada elemento situado por encima de la diagonal principal, que es de la forma $s_i - s_i$, para valores de i comprendidos entre 1 y $n - 1$, es nulo; y que, por otra, cada elemento de la diagonal principal, salvo el primero, es de la forma $s_i - s_{i-1}$, variando i entre 2 y n . Pero, por definición, se satisfacen las igualdades $s_i - s_{i-1} = [1 + 2 + 3 + \cdots + (i - 1) + i] - [1 + 2 + 3 + \cdots + (i - 2) + (i - 1)] = i$, para todo valor natural de i , a partir de 2, luego, sustituyendo en el determinante anterior, y teniendo en cuenta también que, por definición, $s_1 = 1$, resulta:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ s_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 - s_1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1 & s_2 - s_1 & s_3 - s_2 & \cdots & n - 1 & 0 \\ s_1 & s_2 - s_1 & s_3 - s_2 & \cdots & s_{n-1} - s_{n-2} & n \end{vmatrix},$$

que es el determinante de una matriz triangular inferior. En consecuencia, este determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, que son,

precisamente, los n primeros números naturales. Así pues, para cualquier valor natural de n , tenemos $D_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n!$, lo que cierra el problema.

(Examen de Universidad)

Problema 2.25

Calcula el polinomio en la indeterminada x , ordenado y en función del número natural n , que resulta del desarrollo del siguiente determinante:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Lo haremos de dos maneras: por recursión y por inducción.

Primera manera (por recursión)

Desarrollando el determinante por adjuntos, usando la primera columna, resulta:

$$D_n = (1+x^2) \underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1} - x \underbrace{\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1},$$

de donde, desarrollando el segundo determinante del segundo miembro por adjuntos, empleando la primera fila, se sigue que D_n es igual a la expresión:

$$(1+x^2) \underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1} - x^2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-2}.$$

Ahora, como es claro, estos dos determinantes tienen la forma dada en el enunciado, aunque sus órdenes son, respectivamente, $n - 1$ y $n - 2$, por lo que tenemos la relación de recurrencia lineal de segundo orden:

$$D_n = (1 + x^2) \cdot D_{n-1} - x^2 \cdot D_{n-2}, \quad (I)$$

cuya ecuación característica es la ecuación de segundo grado (en la incógnita Y):

$$Y^2 = (1 + x^2)Y - x^2,$$

que, trasponiendo, se escribe como:

$$Y^2 - (1 + x^2)Y + x^2 = 0.$$

Aplicando la conocida fórmula que permite resolver ecuaciones de segundo grado, teniendo en cuenta que sus coeficientes son polinomios, empleando la identidad que permite calcular el cuadrado de un binomio, y operando, obtenemos:

$$Y = \frac{(1 + x^2) \pm \sqrt{(1 + x^2)^2 - 4x^2}}{2} = \frac{1 + x^2 \pm \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2}}{2} = \frac{1 + x^2 \pm \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}}{2}.$$

Como resulta claro, el polinomio escrito en el interior de la raíz cuadrada puede escribirse como el cuadrado del binomio $x^2 - 1$, luego, simplificando:

$$Y = \frac{1 + x^2 \pm \sqrt{(x^2 - 1)^2}}{2} = \frac{1 + x^2 \pm |x^2 - 1|}{2},$$

de donde se obtienen las soluciones:

$$Y_1 = \frac{1 + x^2 + x^2 - 1}{2} = x^2, \quad Y_2 = \frac{1 + x^2 - (x^2 - 1)}{2} = \frac{1 + x^2 - x^2 + 1}{2} = 1.$$

Ahora, puesto que las sucesiones que verifican la relación de recurrencia (I) constituyen un espacio vectorial de dimensión 2 sobre el cuerpo de las fracciones algebraicas en la indeterminada x , cuya base está integrada por las sucesiones formadas al considerar las sucesivas potencias de exponente natural de las soluciones de la ecuación característica, esto es, la base formada por las sucesiones:

$$\left\{ (x^2)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \left\{ 1^n \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

sabemos que cualquier sucesión que cumpla la relación de recurrencia en cuestión (en particular, D_n) ha de ser combinación lineal de las sucesiones que forman la base. En

consecuencia, deben existir dos fracciones algebraicas en la indeterminada x , digamos P y Q , tales que, para cualquier valor natural de n , se verifique

$$D_n = P \cdot (x^2)^n + Q \cdot 1^n. \quad (\text{II})$$

Para determinar las fracciones algebraicas P y Q , consideramos dos valores particulares de n , de manera que podamos calcular D_n , como vemos a continuación.

Para $n = 1$, resulta:

$$D_1 = P \cdot (x^2)^1 + Q \cdot 1^1 = P \cdot x^2 + Q.$$

Teniendo en cuenta que $D_1 = 1 + x^2$ (D_1 es el determinante de la matriz formada por una sola fila y una sola columna, cuyo único elemento es $1 + x^2$), tenemos la ecuación:

$$1 + x^2 = P \cdot x^2 + Q.$$

Por su parte, para $n = 2$, resulta:

$$D_2 = P \cdot (x^2)^2 + Q \cdot 1^2 = P \cdot x^4 + Q,$$

pero, por definición:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix},$$

y, calculando el determinante, teniendo presente la identidad que permite desarrollar el cuadrado de un binomio, y operando:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^2 - x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = x^4 + x^2 + 1,$$

luego, sustituyendo, obtenemos la ecuación:

$$x^4 + x^2 + 1 = P \cdot x^4 + Q.$$

Así pues, hemos de resolver el sistema:

$$\begin{cases} 1+x^2 = P \cdot x^2 + Q \\ x^4 + x^2 + 1 = P \cdot x^4 + Q \end{cases} \quad (\text{III})$$

cuyas incógnitas son P y Q. Restando miembro a miembro, podemos reducir Q, quedando:

$$\begin{cases} 1 + x^2 = P \cdot x^2 + Q \\ x^4 + x^2 + 1 = P \cdot x^4 + Q \end{cases}$$

$$-x^4 = P \cdot x^2 - P \cdot x^4$$

y, extrayendo el factor común P en el segundo miembro y despejando, tenemos:

$$-x^4 = P \cdot x^2 - P \cdot x^4 \Leftrightarrow -x^4 = P(x^2 - x^4) \Leftrightarrow P = -\frac{x^4}{x^2 - x^4}.$$

Extrayendo ahora el factor común x^2 en el denominador de la fracción algebraica y simplificando, resulta:

$$P = -\frac{x^4}{x^2 - x^4} = -\frac{x^4}{x^2(1 - x^2)} = -\frac{x^2}{1 - x^2}.$$

Ahora, para hallar Q, sustituimos esta expresión de P en la primera ecuación del sistema (III), despejamos Q, y operamos:

$$1 + x^2 = -\frac{x^2}{1 - x^2} \cdot x^2 + Q \Leftrightarrow 1 + x^2 = -\frac{x^4}{1 - x^2} + Q \Leftrightarrow$$

$$Q = 1 + x^2 + \frac{x^4}{1 - x^2} \Leftrightarrow Q = \frac{(1 + x^2)(1 - x^2) + x^4}{1 - x^2}.$$

Finalmente, aplicando la identidad que permite desarrollar el producto de una suma por una diferencia, y agrupando, se sigue:

$$Q = \frac{1 - x^4 + x^4}{1 - x^2} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{1 - x^2}.$$

De este modo, sustituyendo los valores obtenidos de P y Q en la expresión (II) y operando, resulta:

$$D_n = -\frac{x^2}{1 - x^2} \cdot (x^2)^n + \frac{1}{1 - x^2} \cdot 1^n = -\frac{x^2 \cdot (x^2)^n}{1 - x^2} + \frac{1}{1 - x^2} \Leftrightarrow$$

$$D_n = -\frac{(x^2)^{n+1}}{1 - x^2} + \frac{1}{1 - x^2} = \frac{1 - (x^2)^{n+1}}{1 - x^2} = \frac{1 - (x^{n+1})^2}{1 - x^2},$$

y, cambiando de signo el numerador y el denominador:

$$D_n = \frac{(x^{n+1})^2 - 1}{x^2 - 1},$$

que es una fracción reducible, puesto que tanto el polinomio del numerador como el del denominador admiten como raíces los valores $x = 1$ y $x = -1$ (ambos polinomios se escriben como la diferencia entre una potencia de x de exponente par y 1). Efectuando el paréntesis:

$$D_n = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1},$$

y, teniendo en cuenta también que el denominador es igual al producto $(x - 1)(x + 1)$, y aplicando la regla de Ruffini para dividir el numerador entre $x - 1$ y $x + 1$, resulta:

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \underline{0} \\ -1 & & -1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & -1 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & \underline{0} & \end{array},$$

lo que se traduce en la igualdad:

$$D_n = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} = x^{2n} + x^{2n-2} + x^{2n-4} + \cdots + x^2 + 1,$$

que es un polinomio ordenado, como se pide en el enunciado (tengamos en cuenta que el polinomio «entrante» en la división tiene grado $2n + 2$, por lo que el polinomio «saliente» debe tener grado $2n$, ya que se baja un grado en cada división, y se han realizado dos).

Segunda manera (por inducción)

Calculemos D_n para los primeros valores de n , a fin de encontrar una pauta, que posteriormente demostraremos por inducción.

Para $n = 1$, resulta $D_1 = 1 + x^2$ (ya hemos visto su cálculo directo anteriormente).

Para $n = 2$, tenemos $D_2 = 1 + x^2 + x^4$ (también lo hemos calculado antes de manera directa).

Para $n = 3$, haciendo el cálculo directo, desarrollando el determinante por adjuntos, usando la primera columna, sin tener en cuenta los cálculos realizados:

$$\begin{aligned}
D_3 &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & 0 \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = \\
&= (1+x^2) \left[(1+x^2)^2 - x^2 \right] - x^2 (1+x^2) = (1+x^2) (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) - x^2 - x^4 = \\
&= (1+x^2) (x^4 + x^2 + 1) - x^2 - x^4 = x^4 + x^2 + 1 + x^6 + \cancel{x^4} + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - \cancel{x^4} \Leftrightarrow \\
D_3 &= x^6 + x^4 + x^2 + 1.
\end{aligned}$$

Para $n = 4$, el cálculo directo del determinante por adjuntos, usando la primera la columna, pero empleando los resultados ya obtenidos en esta parte, permiten escribir:

$$\begin{aligned}
D_4 &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = \\
&= (1+x^2) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = \\
&= (1+x^2) D_3 - x^2 \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2) D_3 - x^2 D_2 = \\
&= (1+x^2) (x^6 + x^4 + x^2 + 1) - x^2 (x^4 + x^2 + 1) = \\
&= x^6 + x^4 + x^2 + 1 + x^8 + \cancel{x^6} + \cancel{x^4} + \cancel{x^2} - \cancel{x^4} - \cancel{x^2} - \cancel{x^2} \Leftrightarrow \\
D_4 &= x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1.
\end{aligned}$$

Así pues, a partir de estos resultados, podemos intuir que, para cada natural n , se tiene:

$$D_n = x^{2n} + x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + x^2 + 1.$$

Para ver que, efectivamente, es así, usaremos el método de inducción.

Para $n = 1$, la fórmula que pretendemos demostrar se convierte en $D_1 = x^2 + 1$, lo cual es cierto, como ya hemos visto antes, con el cálculo directo de D_1 . Para $n = 2$, resulta $D_2 = x^4 + x^2 + 1$, que también es cierto, por idéntica razón. Para $n = 3$ y $n = 4$, la fórmula sigue siendo válida, por lo visto antes (tengamos presente que, de hecho, hemos intuido la fórmula que pretendemos demostrar a partir de los cálculos realizados al sustituir n por los números del 1 al 4).

Sea ahora n un número natural mayor que 4. Supongamos que la fórmula es cierta para cualquier natural menor que n , y veamos que, en tal situación, también ha de serlo para n . En efecto, recordando la fórmula recurrente (I), hallada al principio, mediante el cálculo directo por adjuntos de D_n , sabemos que se cumple:

$$D_n = (1 + x^2) \cdot D_{n-1} - x^2 \cdot D_{n-2}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción a D_{n-1} y D_{n-2} , tenemos:

$$D_{n-1} = x^{2n-2} + x^{2n-4} + x^{2n-6} + \dots + x^2 + 1, \quad D_{n-2} = x^{2n-4} + x^{2n-6} + x^{2n-8} + \dots + x^2 + 1,$$

y, sustituyendo en la fórmula de recurrencia:

$$D_n = (1 + x^2)(x^{2n-2} + x^{2n-4} + x^{2n-6} + \dots + x^2 + 1) - x^2(x^{2n-4} + x^{2n-6} + x^{2n-8} + \dots + x^2 + 1).$$

Operando y simplificando, se sigue:

$$\begin{aligned} D_n &= x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + x^2 + 1 + x^{2n} + \cancel{x^{2n-2}} + \cancel{x^{2n-4}} + \dots + \cancel{x^4} + \cancel{x^2} - \\ &\quad - \cancel{x^{2n-2}} - \cancel{x^{2n-4}} - \dots - \cancel{x^4} - \cancel{x^2} \Rightarrow D_n = x^{2n} + x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + x^2 + 1, \end{aligned}$$

que es, precisamente, lo que se quería probar. Así pues, por inducción, tenemos demostrada la validez de la fórmula para cualquier número natural, lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.26

Sea $k \in \mathbb{N}$ no nulo, y sea f la función real de variable real dada por:

$$f(x) = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & 0 & \dots & 0 & x^2 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \dots & 0 & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \dots & \binom{k}{k-1} & x^k \\ \binom{k+1}{0} & \binom{k+1}{1} & \binom{k+1}{2} & \dots & \binom{k+1}{k-1} & x^{k+1} \end{vmatrix}.$$

a) Calcula $f(x+1) - f(x)$.

b) Expresa la suma $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ mediante esta función.

Apartado a)

Por definición de f , la diferencia $f(x+1) - f(x)$ es igual a:

$$\begin{vmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 & x+1 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & 0 & \dots & 0 & (x+1)^2 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \dots & 0 & (x+1)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \dots & \binom{k}{k-1} & (x+1)^k \\ \binom{k+1}{0} & \binom{k+1}{1} & \binom{k+1}{2} & \dots & \binom{k+1}{k-1} & (x+1)^{k+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & 0 & \dots & 0 & x^2 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \dots & 0 & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \dots & \binom{k}{k-1} & x^k \\ \binom{k+1}{0} & \binom{k+1}{1} & \binom{k+1}{2} & \dots & \binom{k+1}{k-1} & x^{k+1} \end{vmatrix}.$$

Aplicando las propiedades de los determinantes, podemos escribir esta diferencia en un solo determinante, restando las últimas columnas de ambos determinantes, al ser las restantes columnas exactamente iguales, resultando:

$$f(x+1) - f(x) = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 & x+1-x \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & 0 & \dots & 0 & (x+1)^2 - x^2 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \dots & 0 & (x+1)^3 - x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \dots & \binom{k}{k-1} & (x+1)^k - x^k \\ \binom{k+1}{0} & \binom{k+1}{1} & \binom{k+1}{2} & \dots & \binom{k+1}{k-1} & (x+1)^{k+1} - x^{k+1} \end{vmatrix}.$$

Ahora, teniendo en cuenta la fórmula del binomio de Newton, este determinante puede escribirse como:

$$\begin{vmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 & x+1-x \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & 0 & \dots & 0 & x^2 + \binom{2}{1}x + 1 - x^2 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \dots & 0 & x^3 + \binom{3}{2}x^2 + \binom{3}{1}x + 1 - x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \dots & \binom{k}{k-1} & x^k + \binom{k}{k-1}x^{k-1} + \binom{k}{k-2}x^{k-2} + \dots + \binom{k}{1}x + 1 - x^k \\ \binom{k+1}{0} & \binom{k+1}{1} & \binom{k+1}{2} & \dots & \binom{k+1}{k-1} & x^{k+1} + \binom{k+1}{k}x^k + \binom{k+1}{k-1}x^{k-1} + \dots + \binom{k+1}{1}x + 1 - x^{k+1} \end{vmatrix},$$

y, simplificando la potencia x^i con $-x^i$, para $i = 1, \dots, k+1$, en el elemento situado en la fila i -ésima y la última columna, la diferencia $f(x+1) - f(x)$ queda igual a:

$$\begin{vmatrix}
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + 1 \\
 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & 0 & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x + 1 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix} x^{k-1} + \dots + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} x + 1 \\
 \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} k+1 \\ k-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix} x^k + \begin{pmatrix} k+1 \\ k-1 \end{pmatrix} x^{k-1} + \dots + \begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \end{pmatrix} x + 1
 \end{vmatrix}.$$

Aplicando las propiedades de los determinantes, podemos restar a la última columna cada una de las restantes, previamente multiplicada por x^{i-1} , siendo i , con $i = 1, \dots, k$, el número de la columna de que se trate en cada caso, sin que el valor del determinante varíe, de manera que, al realizar las operaciones correspondientes, se formen ceros en la última columna, resultando:

$$f(x+1) - f(x) = \begin{vmatrix}
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix} & 0 \\
 \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} k+1 \\ k-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix} x^k
 \end{vmatrix},$$

que es el determinante de una matriz triangular inferior y, en consecuencia, el determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. Por tanto, tenemos:

$$f(x+1) - f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix} x^k,$$

de donde, escribiendo la expresión de los números combinatorios, y simplificando, obtenemos la expresión buscada:

$$f(x+1) - f(x) = 1 \cdot \frac{2!}{1!1!} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdots \frac{k!}{(k-1)!1!} \cdot \frac{(k+1)!}{k!1!} x^k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \cdot (k+1) x^k \Leftrightarrow$$

$$f(x+1) - f(x) = (k+1)! x^k.$$

Apartado b)

Lo resolveremos aplicando el resultado obtenido en el apartado a). Para ello, dado el número natural n , asignaremos a la variable x los valores particulares $1, 2, 3, \dots, n$, como vemos a continuación.

$$\text{Tomando } x = 1, f(2) - f(1) = (k+1)! \cdot 1^k.$$

$$\text{Tomando } x = 2, f(3) - f(2) = (k+1)! \cdot 2^k.$$

$$\text{Tomando } x = 3, f(4) - f(3) = (k+1)! \cdot 3^k.$$

$$\vdots$$

$$\text{Tomando } x = n-1, f(n) - f(n-1) = (k+1)! \cdot (n-1)^k.$$

$$\text{Tomando } x = n, f(n+1) - f(n) = (k+1)! \cdot n^k.$$

Ahora, sumando miembro a miembro todas estas igualdades, en el primer miembro obtenemos una suma en la que aparecen los mismos términos, pero con distinto signo (una suma telescópica), salvo el primer y el último término, que solo aparecen una vez, de manera que unos se compensan con otros, resultando:

$$f(n+1) - f(1) = (k+1)! \cdot 1^k + (k+1)! \cdot 2^k + (k+1)! \cdot 3^k + \cdots + (k+1)! (n-1)^k + (k+1)! n^k,$$

y, extrayendo el factor común $(k+1)!$, tenemos:

$$f(n+1) - f(1) = \left[1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k + n^k \right] (k+1)!,$$

de donde, despejando:

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k + n^k = \frac{f(n+1) - f(1)}{(k+1)!}.$$

Por último, observemos que $f(1) = 0$, puesto que, para este valor de x , el determinante dado en la expresión que define f tiene dos columnas iguales (la primera y la última, que están formadas solo por unos), por lo que el determinante es nulo, en virtud de las propiedades de los determinantes.

De este modo, podemos escribir la suma de las potencias k -ésimas de los primeros n números naturales de manera algo más sencilla, quedando:

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k + n^k = \frac{f(n+1)}{(k+1)!},$$

lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2003, y examen de Universidad)

Problema 2.27

Se considera el conjunto M de las matrices de orden 3×3 cuyos elementos son todos 1 o -1 . Se pide:

- El cardinal de M .
- Prueba que el determinante de cualquier matriz de M es múltiplo de 4.
- Determina el conjunto $B = \{\det(A) / A \in M\}$.

Apartado a)

Puesto que las matrices pertenecientes a M son de orden 3×3 , cada una de ellas está formada por 9 elementos, los cuales deben ser 1 o -1 . Así pues, cada uno de los 9 elementos de una matriz de M puede tomar dos valores, por lo que el número total de matrices que pueden formarse es igual a $2^9 = 512$. En otras palabras, el cardinal de M es 512.

Apartado b)

Sea A una matriz cualquiera de M . Entonces:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

donde cada elemento a_{ij} es igual a 1 o -1 , para todo i y j comprendidos entre 1 y 3, lo que implica, en particular, que cada uno de estos elementos es impar.

Por las propiedades de los determinantes, en el determinante de A podemos sumar la segunda fila a la primera, y la tercera a la segunda, resultando:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} \\ a_{21} + a_{31} & a_{22} + a_{32} & a_{23} + a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ahora, al ser impar cada elemento a_{ij} , es claro que la suma de dos de ellos es un número par (pudiendo ser cero, que también es par), por lo que todos los elementos de la primera y la segunda fila son pares y, por las propiedades de los determinantes, podemos «extraer» un 2 de la primera fila y otro de la segunda, quedando:

$$|A| = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{a_{11} + a_{21}}{2} & \frac{a_{12} + a_{22}}{2} & \frac{a_{13} + a_{23}}{2} \\ \frac{a_{21} + a_{31}}{2} & \frac{a_{22} + a_{32}}{2} & \frac{a_{23} + a_{33}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} \frac{a_{11} + a_{21}}{2} & \frac{a_{12} + a_{22}}{2} & \frac{a_{13} + a_{23}}{2} \\ \frac{a_{21} + a_{31}}{2} & \frac{a_{22} + a_{32}}{2} & \frac{a_{23} + a_{33}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

De este modo, hemos escrito explícitamente el determinante de A como el producto de 4 y un número entero (tengamos en cuenta que todos los coeficientes del último determinante son enteros, por lo que su valor también ha de serlo), lo que prueba, como queríamos, que el determinante de A es múltiplo de 4.

Apartado c)

Con la misma notación del apartado anterior para una matriz A perteneciente a M , usando la regla de Sarrus, tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Ahora, al ser cada elemento a_{ij} igual a 1 o -1 , es claro que el producto de tres de ellos también es igual a 1 o -1 , lo cual nos permite acotar los posibles valores del determinante de A . En efecto, puesto que el determinante de A es igual a la suma (o diferencia) de seis números iguales a 1 o -1 , es claro que el mayor valor posible es 6, mientras que el menor posible es -6 , es decir, el determinante de A se encuentra en el intervalo $[-6, 6]$. Como además, según hemos visto en el apartado anterior, el determinante de A es múltiplo de 4, resulta claro que no puede tomar valores distintos de -4 , 0 y 4, que son los múltiplos de 4 comprendidos entre -6 y 6. Dicho de otro modo, hemos probado la inclusión:

$$B = \{\det(A) / A \in M\} \subset \{-4, 0, 4\}.$$

Finalmente, para demostrar la otra inclusión, basta con encontrar tres matrices de M cuyos determinantes sean respectivamente iguales a -4 , 0 y 4. Es sencillo escribir una matriz de M con determinante nulo (es suficiente con que tenga dos filas iguales); por ensayo-error, podemos encontrar también una con determinante distinto de cero (será igual a -4 o 4) y, cambiando el signo de los elementos de una fila cualquiera, ya tendremos otra con determinante igual al opuesto (que será 4 o -4). Así,

podemos considerar las matrices A_1 , A_2 y A_3 , cuyos determinantes son, respectivamente, 0, 4 y -4 , como es fácil de comprobar, siendo:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, al darse también la otra inclusión, podemos cerrar el problema escribiendo:

$$B = \{\det(A) / A \in M\} = \{-4, 0, 4\}.$$

(Oposiciones de Secundaria, 2005)

Problema 2.28

Un polinomio $P(x)$ dividido por $x - 1$ da de resto -8 , y dividido por $x + 2$ da de resto 25. Se pide:

- ¿Qué resto dará al dividirlo por $x^2 + x - 2$?
- Determina $P(x)$, sabiendo que es de tercer grado y divisible por $x^2 - 9$.

Apartado a)

Denotemos por $Q(x)$ y $R(x)$, respectivamente, el cociente y el resto de la división de $P(x)$ entre el polinomio $x^2 + x - 2$. Con esta notación, por el algoritmo de la división de polinomios, tenemos la igualdad:

$$P(x) = Q(x)(x^2 + x - 2) + R(x).$$

Ahora bien, puesto que el grado del resto ha de ser estrictamente menor que el grado del divisor, es claro que $R(x)$ debe ser de grado menor o igual que 1, por lo que podemos escribir $R(x) = ax + b$, para ciertos números a y b que tenemos que determinar, quedando la igualdad anterior como:

$$P(x) = Q(x)(x^2 + x - 2) + ax + b. \quad (I)$$

Por otro lado, en virtud del teorema del resto, las condiciones dadas en el enunciado se traducen en las igualdades $P(1) = -8$, $P(-2) = 25$, y, al ser precisamente 1 y -2 las raíces del polinomio $x^2 + x - 2$ (como es evidente), sustituyendo x por 1 y por -2 en la igualdad (I), obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} a + b = -8 \\ -2a + b = 25 \end{cases}.$$

Resolviéndolo por el método de reducción, resulta:

$$\begin{cases} a + b = -8 \rightarrow b = -8 + 11 = 3 \\ -2a + b = 25 \end{cases},$$

$$3a = -33 \leftrightarrow a = -11$$

luego el resto de la división es $R(x) = -11x + 3$, lo que responde a la cuestión planteada en el primer apartado.

Apartado b)

Sustituyendo la expresión del resto hallado en el apartado anterior, la igualdad (I) se reescribe como:

$$P(x) = Q(x)(x^2 + x - 2) - 11x + 3,$$

y, al ser $P(x)$ de tercer grado (según el enunciado de este apartado), es claro que $Q(x)$ ha de ser de grado uno. Entonces, como antes, podemos escribir $Q(x) = mx + n$, para ciertos números m y n que debemos calcular, por lo que la anterior igualdad se convierte en:

$$P(x) = (mx + n)(x^2 + x - 2) - 11x + 3. \quad (II)$$

Por otra parte, como en este apartado estamos suponiendo que $P(x)$ es divisible por $x^2 - 9$, resulta que las raíces de este último polinomio (que claramente son -3 y 3) también lo son de $P(x)$, es decir, tenemos la relación $P(-3) = P(3) = 0$. En consecuencia, sustituyendo x por -3 y por 3 , y operando, la ecuación (II) proporciona el sistema:

$$\begin{cases} (-3m + n)(9 - 3 - 2) + 33 + 3 = 0 \\ (3m + n)(9 + 3 - 2) - 33 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m + n = -9 \\ 3m + n = 3 \end{cases},$$

cuya solución podemos obtener fácilmente por el método de reducción, como vemos a continuación:

$$\begin{cases} -3m + n = -9 \rightarrow -3m - 3 = -9 \leftrightarrow m = 2 \\ 3m + n = 3 \end{cases}.$$

$$2n = -6 \leftrightarrow n = -3$$

Por último, sustituyendo los valores obtenidos de m y n en (II), y operando, llegamos a la expresión de $P(x)$ pedida en el enunciado, quedando:

$$P(x) = (2x - 3)(x^2 + x - 2) - 11x + 3 = 2x^3 + 2x^2 - 4x - 3x^2 - 3x + 6 - 11x + 3 \Leftrightarrow$$

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9.$$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.29

Sea $P(x)$ un polinomio tal que $P(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$. Determina $P(x^2 - 1)$.

Observemos, en primer lugar, que $P(x)$ debe ser un polinomio de segundo grado, puesto que al evaluarlo en $x^2 + 1$, que es una expresión de segundo grado, da como resultado $x^4 + 4x^2$, que es de cuarto grado.

Así pues, $P(x)$ tiene que ser de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$, siendo a , b y c ciertos números reales, que hemos de calcular.

Ahora, a partir de la igualdad $P(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$, empleando la expresión aludida de $P(x)$, podemos escribir:

$$a(x^2 + 1)^2 + b(x^2 + 1) + c = x^4 + 4x^2,$$

de donde, aplicando la conocida identidad algebraica, operando, agrupando términos, identificando coeficientes, y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante (sustituyendo «de arriba abajo»), se sigue:

$$ax^4 + 2ax^2 + a + bx^2 + b + c = x^4 + 4x^2 \Leftrightarrow ax^4 + (2a + b)x^2 + a + b + c = x^4 + 4x^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 4 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases},$$

y, entonces, $P(x) = x^2 + 2x - 3$.

Finalmente, para determinar $P(x^2 - 1)$, basta con sustituir, aplicar nuevamente la identidad algebraica, y operar, resultando:

$$P(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 + 2(x^2 - 1) - 3 = x^4 - \cancel{2x^2} + 1 + \cancel{2x^2} - 2 - 3 \Leftrightarrow$$

$$P(x^2 - 1) = x^4 - 4,$$

lo que cierra el problema.

(Olimpiadas Matemáticas)

Problema 2.30

Encuentra un polinomio de grado 7 de variable real, $P(x)$, tal que $P(x) - 1$ sea divisible por $(x + 1)^4$ y $P(x) + 1$ sea divisible por $(x - 1)^4$.

En primer lugar, al ser $(x + 1)^4$ divisor de $P(x) - 1$, es claro que $x = -1$ es una raíz de multiplicidad 4 de $P(x) - 1$, y, en consecuencia, es una raíz de multiplicidad 3 de su derivada, es decir, de $P'(x)$, lo que se traduce en que $(x + 1)^3$ es divisor de $P'(x)$.

De la misma manera, como $(x - 1)^4$ es divisor de $P(x) + 1$, resulta que $x = 1$ también es una raíz triple de $P'(x)$, luego sucede también que $P'(x)$ es múltiplo de $(x - 1)^3$.

Ahora, como, según el enunciado, $P(x)$ es de grado 7, $P'(x)$ necesariamente debe ser de grado 6, luego, por ser múltiplo de los polinomios antes citados, podemos escribir $P'(x) = a(x + 1)^3(x - 1)^3$, ya que el producto de estos dos polinomios es igual a un polinomio de grado 6, donde a es un número real que debemos determinar. Aplicando las conocidas identidades algebraicas, tenemos:

$$P'(x) = a(x + 1)^3(x - 1)^3 = a[(x + 1)(x - 1)]^3 = a(x^2 - 1)^3 = a(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1),$$

e, integrando en ambos miembros:

$$P(x) = \int P'(x)dx = \int a(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)dx = a\left(\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + x^3 - x\right) + C, \quad (I)$$

donde C es la constante de integración, que también debemos determinar.

Para ello, tengamos en cuenta que del hecho de que $(x + 1)^4$ es divisor de $P(x) - 1$ se deduce la igualdad $P(x) - 1 = (x + 1)^4 \cdot Q(x)$, siendo $Q(x)$ un polinomio cuya expresión es irrelevante para los fines que perseguimos aquí. Entonces, sustituyendo x por -1 , resulta $P(-1) - 1 = (-1 + 1)^4 \cdot Q(-1) = 0$, de donde se sigue $P(-1) = 1$.

De la misma manera, puesto que $(x - 1)^4$ es divisor de $P(x) + 1$, obtenemos la igualdad $P(1) = -1$.

Particularizando estos valores de x en (I), resulta:

$$\begin{cases} a\left(\frac{(-1)^7}{7} - \frac{3(-1)^5}{5} + (-1)^3 - (-1)\right) + C = 1 \\ a\left(\frac{1^7}{7} - \frac{3 \cdot 1^5}{5} + 1^3 - 1\right) + C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16}{35}a + C = 1 \\ -\frac{16}{35}a + C = -1 \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones del último sistema, resulta $C = 0$, y, sustituyendo y despejando, $a = 35/16$.

Finalmente, sustituyendo estos valores de a y C en (I), obtenemos el polinomio $P(x)$ pedido en el enunciado:

$$P(x) = \frac{35}{16}\left(\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + x^3 - x\right) = \frac{5}{16}x^7 - \frac{21}{16}x^5 + \frac{35}{16}x^3 - \frac{35}{16}x.$$

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1977)

Problema 2.31

Dado el polinomio $P(x) = x^{2^n-1} - x^{2^n-2} + x^{2^n-3} - \dots + x^3 - x^2 + x - 1$, siendo n un número natural estrictamente mayor que 1, se pide:

- a) Demuestra que $P(x)$ es divisible por $x^{2^{n-1}} + 1$, sin efectuar la división, y halla el cociente.
 b) Demuestra que $P(x)$ tiene una única raíz real y calcúlala.

Apartado a)

Como podemos observar, el polinomio $P(x)$ está expresado como la suma de los primeros términos de la progresión geométrica de razón $-x$, y primer elemento -1 . Por tanto, aplicando la conocida fórmula que permite hallar la suma de estos términos, y operando, tenemos:

$$P(x) = \frac{x^{2^n-1} \cdot (-x) - (-1)}{(-x) - 1} = \frac{-x^{2^n} + 1}{-x - 1} = \frac{x^{2^n} - 1}{x + 1}.$$

Ahora, al ser el binomio del numerador de la última fracción algebraica de grado par, es claro que admite $x = -1$ como raíz, que es precisamente la única raíz del denominador, lo cual se traduce en que la fracción algebraica es reducible.

Para simplificarla, factorizamos el numerador, aplicando de forma reiterada la conocida identidad algebraica que permite escribir una diferencia de cuadrados como una suma por una diferencia, resultando:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{x^{2^n} - 1}{x + 1} = \frac{(x^{2^{n-1}})^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x^{2^{n-1}} + 1)(x^{2^{n-1}} - 1)}{x + 1} = \frac{(x^{2^{n-1}} + 1)(x^{2^{n-2}} + 1)(x^{2^{n-2}} - 1)}{x + 1} = \dots = \\ &= \dots = \frac{(x^{2^{n-1}} + 1)(x^{2^{n-2}} + 1)(x^{2^{n-3}} + 1) \dots (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{x + 1}, \end{aligned}$$

y, simplificando:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(x^{2^{n-1}} + 1)(x^{2^{n-2}} + 1) \dots (x^2 + 1) \cancel{(x + 1)} (x - 1)}{\cancel{x + 1}} \Leftrightarrow \\ P(x) &= (x^{2^{n-1}} + 1)(x^{2^{n-2}} + 1) \dots (x^2 + 1)(x - 1). \end{aligned}$$

Denotando por $Q(x)$ el polinomio factorizado resultante de suprimir el primer factor de esta última expresión de $P(x)$, esto es:

$$Q(x) = (x^{2^{n-2}} + 1)(x^{2^{n-3}} + 1) \cdots (x^2 + 1)(x - 1),$$

podemos escribir:

$$P(x) = (x^{2^{n-1}} + 1)Q(x),$$

igualdad que presenta explícitamente $P(x)$ como el producto del polinomio:

$$x^{2^{n-1}} + 1$$

por $Q(x)$, lo cual prueba que, efectivamente, $P(x)$ es divisible por el mencionado polinomio, como queríamos demostrar, siendo precisamente $Q(x)$ el cociente de la correspondiente división, que también se pide en el enunciado de este apartado.

Apartado b)

Como podemos observar en la igualdad obtenida en el apartado anterior:

$$P(x) = (x^{2^{n-1}} + 1)(x^{2^{n-2}} + 1)(x^{2^{n-3}} + 1) \cdots (x^2 + 1)(x - 1),$$

cada uno de los binomios presentes en la factorización de $P(x)$ es irreducible en el cuerpo de los números reales, salvo el último, ya que, al ser cada uno de grado par y tener el término independiente positivo, no existe ningún valor de x que lo anule, mientras que el último factor, por su parte, admite $x = 1$ como única raíz. Como es evidente, esto se traduce en que $P(x)$ tiene una única raíz real, precisamente $x = 1$, lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1979)

Problema 2.32

Dado el polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + n$, se pide:

a) Encuentra todos los posibles polinomios $Q_i(x)$ tales que:

$$P(x) = [Q_i(x)]^2 + mQ_i(x) + n$$

b) Calcula el valor de n , sabiendo que si $R(x) = \sum [Q_i(x)]^2$, $R(x)$ tiene un máximo relativo en $x_0 = n/2$.

c) Obtén las raíces de $P(x)$ para ese valor de n .

Apartado a)

Puesto que $P(x)$ es un polinomio de grado 4, a partir de la igualdad que caracteriza los polinomios $Q_i(x)$, es claro que estos deben ser de grado 2. En consecuencia, podemos

escribir $Q_i(x) = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son números reales que hemos de determinar. Sustituyendo esta expresión de $Q_i(x)$ en la igualdad dada en el enunciado, tenemos:

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)^2 + m(ax^2 + bx + c) + n.$$

Desarrollando el cuadrado mediante la conocida fórmula, operando y agrupando términos semejantes, resulta:

$$P(x) = a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2abx^3 + 2acx^2 + 2bcx + max^2 + mbx + mc + n \Leftrightarrow$$

$$P(x) = a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac + ma)x^2 + (2bc + mb)x + c^2 + mc + n \Leftrightarrow$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + n = a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac + ma)x^2 + (2bc + mb)x + c^2 + mc + n,$$

e, identificando los coeficientes de los polinomios de ambos miembros de la última igualdad, se deduce el sistema:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = -4 \\ b^2 + 2ac + ma = 1, \\ 2bc + mb = 6 \\ c^2 + mc + n = n \end{cases}$$

que, cancelando n y extrayendo c como factor común en la última ecuación, es equivalente a:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = -4 \\ b^2 + 2ac + ma = 1. \\ 2bc + mb = 6 \\ (c + m)c = 0 \end{cases} \quad (I)$$

De la primera ecuación se obtienen dos posibilidades, que estudiaremos por separado: $a = 1$ o $a = -1$.

Si $a = 1$, sustituyendo en el sistema (I), resulta:

$$\begin{cases} 2b = -4 \\ b^2 + 2c + m = 1 \\ 2bc + mb = 6 \\ (c + m)c = 0 \end{cases},$$

de donde se sigue $b = -2$ (primera ecuación) y, sustituyendo este valor de b en las restantes y operando:

$$\begin{cases} 2c + m = -3 \\ -4c - 2m = 6, \\ (c + m)c = 0 \end{cases}$$

donde se observa claramente que la primera ecuación y la segunda son equivalentes (son proporcionales), por lo que podemos prescindir de una de ellas, digamos de la segunda, quedando el sistema:

$$\begin{cases} 2c + m = -3 \\ (c + m)c = 0 \end{cases}.$$

Ahora, de la segunda ecuación se deducen dos posibles soluciones: $c = 0$ o $c = -m$, que también estudiaremos por separado.

Si $c = 0$, obtenemos el polinomio $Q_1(x) = x^2 - 2x$, que es una posible solución del problema. Asimismo, en este caso, la primera ecuación arroja el valor $m = -3$.

Si $c = -m$, sustituyendo en la primera ecuación, resulta $c = -3$ y $m = 3$, lo que proporciona el polinomio $Q_2(x) = x^2 - 2x - 3$, que es otra posible solución del problema.

Veamos ahora los posibles polinomios que se obtienen si $a = -1$, que es el otro caso que teníamos que ver. En esta situación, sustituyendo en (I), resulta el sistema:

$$\begin{cases} -2b = -4 \\ b^2 - 2c - m = 1 \\ 2bc + mb = 6 \\ (c + m)c = 0 \end{cases},$$

obteniéndose $b = 2$ de la primera ecuación. Sustituyendo este valor de b en las demás ecuaciones y operando, se sigue:

$$\begin{cases} -2c - m = -3 \\ 4c + 2m = 6 \\ (c + m)c = 0 \end{cases},$$

donde, de nuevo, las dos primeras ecuaciones son equivalentes, por ser proporcionales, lo que nos permite suprimir una de ellas, digamos la segunda, quedando el sistema:

$$\begin{cases} -2c - m = -3 \\ (c + m)c = 0 \end{cases}.$$

Ahora, como sucedía antes, la segunda ecuación abre dos posibles valores para c : $c = 0$ o $c = -m$. Si $c = 0$, resulta el polinomio $Q_3(x) = -x^2 + 2x$, que es otra posible solución al problema, y, sustituyendo en el sistema, $m = 3$; si, por el contrario, $c = -m$, sustituyendo en la primera ecuación, resulta $c = 3$ y $m = -3$, y, entonces, obtenemos el polinomio $Q_4(x) = -x^2 + 2x + 3$, que es la última posible solución que nos quedaba por encontrar, quedando concluido, por tanto, este apartado.

Apartado b)

En primer lugar, vamos a calcular $R(x)$ a partir de la expresión que lo define, dada en el enunciado, sustituyendo $Q_i(x)$ por los cuatro polinomios calculados en el apartado anterior. Así, tenemos:

$$R(x) = \sum [Q_i(x)]^2 = (x^2 - 2x)^2 + (x^2 - 2x - 3)^2 + (-x^2 + 2x)^2 + (-x^2 + 2x + 3)^2.$$

Ahora bien, puesto que $Q_1(x)$ es el opuesto de $Q_3(x)$, y $Q_2(x)$ lo es de $Q_4(x)$, es claro que sus cuadrados son iguales, por lo que podemos agruparlos, quedando:

$$R(x) = 2(x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x - 3)^2.$$

En segundo lugar, calcularemos n , a partir de la expresión encontrada de $R(x)$, como vemos a continuación.

Según el enunciado, $R(x)$ tiene un máximo relativo en $x_0 = n/2$, luego, para determinar el valor de n , calcularemos la abscisa del máximo relativo de la función polinómica definida por $R(x)$, e impondremos que sea igual a $n/2$, de donde podremos despejar n .

Como sabemos, para determinar el máximo relativo de una función derivable definida en toda la recta real (como es el caso de $R(x)$), hemos de hallar los puntos críticos, igualando a cero su derivada y resolviendo la ecuación resultante, para posteriormente comprobar cuál de ellos es un (el) máximo relativo. Así pues, hemos de derivar $R(x)$, resultando:

$$R'(x) = 4(x^2 - 2x)(2x - 2) + 4(x^2 - 2x - 3)(2x - 2).$$

Extrayendo factores comunes, igualando a cero y agrupando, se sigue:

$$4(2x - 2)[(x^2 - 2x) + (x^2 - 2x - 3)] = 0 \Leftrightarrow 4(2x - 2)(2x^2 - 4x - 3) = 0,$$

lo cual solo es posible si se cumple alguna de estas dos igualdades:

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases}.$$

De la primera ecuación se obtiene el punto crítico $x = 1$, mientras que de la segunda, resultan los puntos:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+24}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Ahora, para ver cuál de los tres puntos críticos es el máximo relativo, podemos usar el criterio del signo de la primera derivada, el criterio de la segunda derivada, o, sencillamente, tener en cuenta que $R(x)$ es una función polinómica de cuarto grado, por lo que, a partir de la forma de su gráfica, podemos asegurar que el máximo relativo debe alcanzarse en la abscisa «de en medio», esto es, en $x = 1$, puesto que los otros dos puntos críticos son, aproximadamente, $x = -0,58$ y $x = 2,58$.

En consecuencia, tenemos $n/2 = 1$, de donde se sigue $n = 2$, lo que responde a la pregunta planteada en este apartado.

Apartado c)

Puesto que se verifica la igualdad $P(x) = [Q_1(x)]^2 + mQ_1(x) + n$ para los cuatro polinomios hallados en el apartado a), podemos sustituir $Q_i(x)$ por cualquiera de ellos, por ejemplo, por $Q_1(x)$. Asimismo, teniendo en cuenta que el valor de m «asociado» a este polinomio es $m = -3$ (lo habíamos calculado antes) y que $n = 2$, podemos escribir $P(x) = [Q_1(x)]^2 - 3Q_1(x) + 2$, luego las raíces de $P(x)$ son precisamente las soluciones de la ecuación $[Q_1(x)]^2 - 3Q_1(x) + 2 = 0$, que podemos interpretar como una ecuación de segundo grado en la incógnita $Q_1(x)$ (aunque, de hecho, este polinomio es conocido). Aplicando la fórmula que permite resolver la ecuación de segundo grado, tenemos:

$$Q_1(x) = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2},$$

de donde resultan las igualdades $Q_1(x) = 2$ y $Q_1(x) = 1$, que, al sustituir $Q_1(x)$ por su expresión polinómica, se convierten en las ecuaciones $x^2 - 2x = 2$ y $x^2 - 2x = 1$, cuyas soluciones podemos ver a continuación:

$$x^2 - 2x = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3},$$

$$x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Así pues, las raíces de $P(x)$ son:

$$x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3},$$

$$x_3 = 1 + \sqrt{2}, x_4 = 1 - \sqrt{2}.$$

Obsérvese que en este problema hemos mostrado un método para resolver ecuaciones polinómicas de cuarto grado, si bien no se trata de un método general, ya que no siempre es posible encontrar un polinomio $Q_i(x)$ que permita escribir $P(x)$ de la manera que nos interesa para proceder como hemos hecho aquí.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.33

Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Dados los polinomios:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

siendo $a_0 \neq 0$ y $a_n \neq 0$, ¿qué relación hay entre las raíces de $P(x)$ y las de $Q(x)$?

b) Si a , b y c son las soluciones de $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, encuentra la ecuación que tiene por soluciones a^2 , b^2 y c^2 , expresándola en función de p , q y r .

c) Si a , b y c verifican la igualdad:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

demuestra que dos de estos números son opuestos.

Apartado a)

Supongamos que $x = a$ es una raíz de $P(x)$. Entonces, se cumple la igualdad:

$$a_0 + a_1a + a_2a^2 + \cdots + a_na^n = 0,$$

y, como, según el enunciado, el término independiente de $P(x)$ no es nulo, es claro que a tampoco lo es. En consecuencia, podemos dividir todos los sumandos de la anterior igualdad por a^n , resultando:

$$a_0 \frac{1}{a^n} + a_1 \frac{a}{a^n} + a_2 \frac{a^2}{a^n} + \cdots + a_n \frac{a^n}{a^n} = 0.$$

Simplificando y reescribiendo las potencias, se sigue:

$$a_0 \frac{1}{a^n} + a_1 \frac{1}{a^{n-1}} + a_2 \frac{1}{a^{n-2}} + \cdots + a_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_0 \left(\frac{1}{a}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} + a_2 \left(\frac{1}{a}\right)^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

lo que se traduce en que $x = 1/a$ es una raíz de $Q(x)$.

Recíprocamente, si $x = b$ es una raíz de $Q(x)$, entonces:

$$a_0b^n + a_1b^{n-1} + \cdots + a_{n-1}b + a_n = 0,$$

y, como antes, dividiendo todos los sumandos por b^n (tengamos presente que b es no nulo, al no serlo el término independiente de $Q(x)$, según el enunciado), tenemos:

$$a_0 \frac{b^n}{b^n} + a_1 \frac{b^{n-1}}{b^n} + \cdots + a_{n-1} \frac{b}{b^n} + a_n \frac{1}{b^n} = 0,$$

y, simplificando y reescribiendo las potencias, resulta:

$$a_0 + a_1 \frac{1}{b} + \cdots + a_{n-1} \frac{1}{b^{n-1}} + a_n \frac{1}{b^n} = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1 \frac{1}{b} + \cdots + a_{n-1} \left(\frac{1}{b}\right)^{n-1} + a_n \left(\frac{1}{b}\right)^n = 0,$$

lo que significa que $x = 1/b$ es una raíz de $P(x)$.

Así pues, en respuesta a la pregunta planteada en este apartado, podemos decir que las raíces de un polinomio son los inversos multiplicativos de las raíces del otro.

Apartado b)

En primer lugar, puesto que estamos buscando una ecuación (que suponemos polinómica) con tres raíces, es claro que se trata de una ecuación polinómica de tercer grado. Además, podemos suponer que el coeficiente principal es no nulo (de serlo, sería de grado menor que 3), por lo que, dividiendo cada término por el coeficiente principal, sería equivalente a una ecuación cuyo polinomio es mónico. De este modo, podemos escribir la ecuación buscada como $x^3 + sx^2 + tx + u = 0$, siendo s , t y u tres números reales que debemos determinar, expresándolos en función de p , q y r .

Ahora, por las ecuaciones de Cardano-Viète, aplicadas a la ecuación del enunciado, tenemos:

$$\begin{cases} a + b + c = -p \\ ab + ac + bc = q, \\ abc = -r \end{cases} \quad (I)$$

mientras que, aplicadas a la ecuación $x^3 + sx^2 + tx + u = 0$, permiten obtener las relaciones:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = -s \\ a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = t. \\ a^2b^2c^2 = -u \end{cases} \quad (II)$$

Elevando al cuadrado la tercera ecuación del sistema (I), resulta $a^2b^2c^2 = r^2$, de donde, sustituyendo en la tercera ecuación del sistema (II), se sigue $-u = r^2$, que podemos escribir como $u = -r^2$.

Por otro lado, sustituyendo las expresiones correspondientes de (I) y (II) en la conocida identidad algebraica $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$, obtenemos $p^2 = -s + 2q$, y, trasponiendo, resulta $s = 2q - p^2$. Por otro lado, a partir de la conocida identidad $(ab + ac + bc)^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2(a^2bc + ab^2c + abc^2)$, extrayendo el factor común abc en la expresión entre paréntesis del segundo miembro, obtenemos la igualdad $(ab + ac + bc)^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c)$, y, sustituyendo las correspondientes expresiones de (I) y (II), resulta $q^2 = t + 2(-r)(-p)$, de donde se sigue que $t = q^2 - 2rp$.

Finalmente, sustituyendo los valores encontrados de s , t y u en la expresión de la ecuación buscada, podemos decir que esta es $x^3 + (2q - p^2)x^2 + (q^2 - 2rp)x - r^2 = 0$, lo que concluye este apartado.

Apartado c)

Operando en la igualdad dada en el enunciado de este apartado, tenemos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Ahora, sustituyendo las correspondientes expresiones dadas por el sistema (I) en esta última igualdad, se sigue:

$$\frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{q}{-r} = \frac{1}{-p},$$

de donde, despejando, resulta $r = pq$.

Teniendo presente esta relación entre p , q y r , la ecuación del enunciado del apartado b) se convierte en $x^3 + px^2 + qx + pq = 0$, que, factorizando el polinomio del primer miembro, podemos escribir de forma equivalente, resultando $(x + p)(x^2 + q) = 0$, cuyas soluciones (reales y/o complejas) son:

$$x_1 = -p, x_2 = \sqrt{-q}, x_3 = -\sqrt{-q}.$$

Como podemos observar, las soluciones x_2 y x_3 son opuestas, y, al ser también a , b y c las soluciones de esta ecuación, resulta claro que dos de estos números son opuestos, como queríamos demostrar.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.34

Dada la ecuación $x^3 - 7x + \lambda = 0$, se pide:

- a) Calcula λ para que una raíz sea doble de otra.
b) Resuelve la ecuación.

Resolveremos los dos apartados de manera conjunta, por lo que no estableceremos separación en la resolución de cada uno.

Por el Teorema Fundamental del Álgebra, sabemos que la ecuación tiene exactamente tres soluciones (reales o complejas), que denotaremos por a , b y c . Puesto que se pide que una solución sea doble de otra, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que c es igual al doble de a , por lo que las soluciones de la ecuación son $x = a$, $x = 2a$ y $x = b$.

Ahora, aplicando las ecuaciones de Cardano-Viète y operando, tenemos:

$$\begin{cases} a + 2a + b = 0 \\ a \cdot 2a + ab + 2ab = -7 \\ a \cdot 2ab = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ 2a^2 + 3ab = -7 \\ 2a^2b = -\lambda \end{cases}.$$

Despejando b en la primera ecuación de este último sistema, sustituyendo en las otras dos, y operando, resulta:

$$\begin{cases} b = -3a \\ 2a^2 + 3a(-3a) = -7 \\ 2a^2(-3a) = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ 2a^2 - 9a^2 = -7 \\ -6a^3 = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ a^2 = 1 \\ 6a^3 = \lambda \end{cases},$$

sistema cuya segunda ecuación indica que a puede tomar dos valores, que estudiaremos separadamente: $a = 1$ o $a = -1$.

Si $a = 1$, entonces, sustituyendo en las otras dos ecuaciones, resulta $b = -3$, $\lambda = 6$; si, por el contrario, $a = -1$, se obtiene $b = 3$, $\lambda = -6$.

Así pues, en respuesta al apartado a), podemos decir que los valores de λ son 6 y -6.

En cuanto al apartado b), como las tres soluciones de la ecuación son $x = a$, $x = 2a$ y $x = b$, resulta que, dependiendo del valor de λ , son $x = 1$, $x = 2$, $x = -3$ (si $\lambda = 6$), o $x = -1$, $x = -2$, $x = 3$ (si $\lambda = -6$).

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1978, y examen de Universidad)

Problema 2.35

Dada la ecuación $z^4 - (9 + 14i)z^3 + az^2 + bz + c = 0$, siendo a , b y c números complejos cualesquiera, se sabe que los afijos de sus raíces son cuatro de los vértices de un pentágono regular, cuyo quinto vértice es el afijo del complejo $1 + i$. Calcula el afijo del centro del mencionado pentágono.

Denotemos por A el número complejo cuyo afijo es el centro del pentágono, y por z_1, z_2, z_3 y z_4 las raíces de la ecuación.

Teniendo en cuenta que las coordenadas del centro de un polígono regular pueden calcularse «hallando la media» de las coordenadas de los vértices, con la notación presentada antes, tenemos la relación:

$$A = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + (1 + i)}{5}.$$

Ahora, por las ecuaciones de Cardano-Viète, se verifica $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 9 + 14i$, luego, sustituyendo en la igualdad anterior y operando, resulta:

$$A = \frac{9 + 14i + 1 + i}{5} = \frac{10 + 15i}{5} = 2 + 3i,$$

de donde se sigue que el centro del pentágono es el punto $C = (2,3)$, lo que da respuesta al enunciado del problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.36

Demuestra que si la ecuación $x^3 + x + p = 0$, donde p es un número real, tiene dos soluciones complejas, z_1 y z_2 , y una solución real positiva x_0 , entonces, se verifica que $|z_1| = |z_2| \geq x_0$.

Observemos, en primer lugar, que en el enunciado no se pide comprobar que la ecuación tiene dos soluciones complejas y una real, sino probar una relación entre sus soluciones, suponiendo que, efectivamente, la ecuación tiene dos soluciones complejas y una real positiva. Así pues, puesto que no se pide comprobarlo, no lo haremos con detalle, aunque una parte de ello es posible, teniendo en cuenta que se trata de una ecuación de tercer grado con coeficientes reales (lo que garantiza que tiene al menos una raíz real), y analizando el crecimiento de la función asociada, $f(x) = x^3 + x + p$, mediante el uso de la derivada, que resulta ser estrictamente positiva en todo punto (de donde se sigue que f es estrictamente creciente, no pudiendo tener, por tanto, más de una raíz real).

Como los coeficientes de la ecuación son reales, es claro que las raíces z_1 y z_2 son números complejos conjugados, por lo que podemos escribirlos en forma binómica

como $z_1 = a + bi$, $z_2 = a - bi$, para ciertos reales a y b , resultando, en particular, que z_1 y z_2 tienen el mismo módulo, que es precisamente una de las relaciones que queríamos demostrar.

Para demostrar la otra relación, aplicamos las ecuaciones de Cardano-Viète, obteniéndose el sistema:

$$\begin{cases} x_0 + z_1 + z_2 = 0 \\ x_0 z_1 + x_0 z_2 + z_1 z_2 = 1, \\ x_0 z_1 z_2 = -p \end{cases}$$

en el que prescindiremos de la tercera ecuación, pues no nos será necesaria para nuestro objetivo. Así pues, nos quedaremos con el sistema:

$$\begin{cases} x_0 + z_1 + z_2 = 0 \\ x_0 z_1 + x_0 z_2 + z_1 z_2 = 1 \end{cases}.$$

Sustituyendo las raíces complejas z_1 y z_2 por su expresión binómica y operando, resulta:

$$\begin{cases} x_0 + a + bi + a - bi = 0 \\ x_0(a + bi) + x_0(a - bi) + (a + bi)(a - bi) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2a = 0 \\ 2ax_0 + a^2 + b^2 = 1 \end{cases},$$

y, despejando el monomio $2a$ en la primera ecuación, sustituyéndolo en la segunda y trasponiendo, se sigue:

$$\begin{cases} 2a = -x_0 \\ -x_0 x_0 + a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -x_0 \\ a^2 + b^2 = 1 + x_0^2 \end{cases}.$$

Ahora bien, como podemos observar, el primer miembro de la segunda ecuación es precisamente el cuadrado del módulo de z_1 (y de z_2), por lo que tenemos la relación:

$$|z_1|^2 = 1 + x_0^2,$$

de la que se deduce claramente la desigualdad:

$$|z_1|^2 > x_0^2.$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros, resulta $|z_1| > |x_0|$, que, al ser x_0 un número positivo, es equivalente a $|z_1| > x_0$, lo que, en particular, implica $|z_1| \geq x_0$, como queríamos probar.

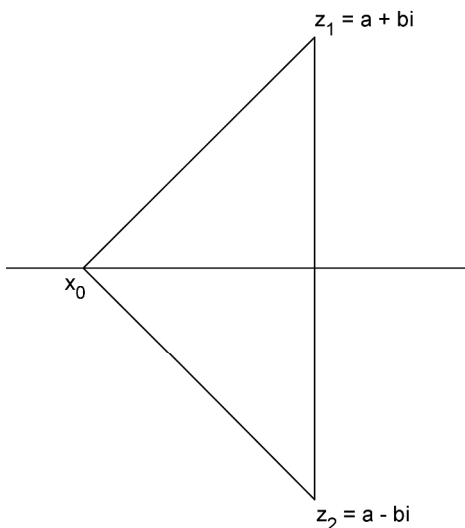
(Oposiciones de Secundaria, 1998)

Problema 2.37

Sea la ecuación $x^3 + px + q = 0$, con p y q números reales. ¿Qué relación debe existir entre p y q para que los afijos de las soluciones de la ecuación formen un triángulo rectángulo isósceles?

Como se trata de una ecuación de tercer grado con coeficientes reales, es claro que tiene, al menos, una solución real. Además, los afijos de las soluciones forman un triángulo, por lo que no pueden estar alineados, y, en consecuencia, no es posible que sean reales las tres raíces. Así pues, la ecuación debe tener una solución real, digamos x_0 , y dos complejas conjugadas, digamos z_1 y z_2 , que escribiremos en forma binómica como $z_1 = a + bi$, $z_2 = a - bi$, para ciertos números reales a y b . Además, debe verificarse que $a \neq x_0$, pues, en caso contrario, los tres afijos estarían en una misma recta vertical, y no formarían un triángulo.

También es claro que el lado que une los vértices correspondientes a los afijos de z_1 y z_2 es vertical, luego el ángulo recto del triángulo no puede estar en estos vértices, pues, de ser así, el triángulo tendría un lado horizontal, que no cortaría al eje de abscisas, donde necesariamente se encuentra el tercer vértice, como hemos visto antes, lo cual sería absurdo. Así pues, el ángulo recto debe estar situado en el punto $(x_0, 0)$, quedando el triángulo en la posición mostrada en el gráfico.



Por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1 - x_0|^2 + |z_2 - x_0|^2,$$

que, al ser un triángulo isósceles, podemos reescribir como:

$$|z_1 - z_2|^2 = 2|z_1 - x_0|^2.$$

Sustituyendo las raíces complejas z_1 y z_2 por su expresión binómica, hallando los módulos, operando y trasponiendo, resulta:

$$|a + bi - (a - bi)|^2 = 2|a + bi - x_0|^2 \Leftrightarrow |2bi|^2 = 2|a - x_0 + bi|^2 \Leftrightarrow$$

$$4b^2 = 2(a - x_0)^2 + 2b^2 \Leftrightarrow b^2 = (a - x_0)^2. \quad (I)$$

Por otro lado, aplicando las ecuaciones de Cardano-Viète, tenemos:

$$\begin{cases} x_0 + z_1 + z_2 = 0 \\ x_0 z_1 + x_0 z_2 + z_1 z_2 = p, \\ x_0 z_1 z_2 = -q \end{cases}$$

y, sustituyendo las raíces complejas z_1 y z_2 por su expresión binómica y operando, se sigue:

$$\begin{cases} x_0 + a + bi + a - bi = 0 \\ x_0(a + bi) + x_0(a - bi) + (a + bi)(a - bi) = p \Leftrightarrow \\ x_0(a + bi)(a - bi) = -q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2a = 0 \\ 2ax_0 + a^2 + b^2 = p. \\ x_0(a^2 + b^2) = -q \end{cases}$$

Sustituyendo la expresión de b^2 obtenida en (I) en este último sistema, resulta:

$$\begin{cases} x_0 + 2a = 0 \\ 2ax_0 + a^2 + (a - x_0)^2 = p, \\ x_0[a^2 + (a - x_0)^2] = -q \end{cases}$$

y, despejando x_0 en la primera ecuación, sustituyendo en las otras dos y operando, llegamos a:

$$\begin{cases} x_0 = -2a \\ 2a(-2a) + a^2 + [a - (-2a)]^2 = p \Leftrightarrow \\ -2a[a^2 + [a - (-2a)]^2] = -q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2a \\ -4a^2 + a^2 + 9a^2 = p \Leftrightarrow \\ -2a(a^2 + 9a^2) = -q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2a \\ 6a^2 = p \\ 20a^3 = q \end{cases},$$

sistema del que solo nos interesan las dos últimas ecuaciones (que es donde se encuentran p y q), por lo que nos quedamos con las relaciones:

$$\begin{cases} 6a^2 = p \\ 20a^3 = q \end{cases}.$$

Con el fin de eliminar a de este sistema, elevamos al cubo la primera ecuación, y al cuadrado la segunda, resultando:

$$\begin{cases} 216a^6 = p^3 \\ 400a^6 = q^2 \end{cases}$$

Observemos ahora que no es posible que a sea nulo, pues, en tal caso, de la igualdad $x_0 = -2a$, se seguiría $x_0 = 0 = a$, y, entonces, las tres raíces estarían alineadas, lo cual no puede ser, como ya hemos señalado. En consecuencia, teniendo en cuenta las igualdades presentes en el sistema, podemos decir que ni p ni q pueden ser nulos, y, por tanto, podemos dividir miembro a miembro ambas ecuaciones, llegando a la relación buscada entre p y q , como vemos a continuación:

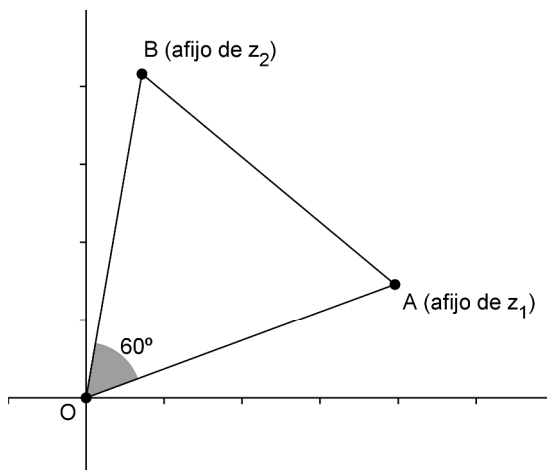
$$\frac{216a^6}{400a^6} = \frac{p^3}{q^2} \Leftrightarrow \frac{27}{50} = \frac{p^3}{q^2} \Leftrightarrow 27q^2 = 50p^3.$$

(Oposiciones de Secundaria, 2001, Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1975, y examen de Universidad)

Problema 2.38

Halla la condición que deben cumplir los complejos a , b , c para que los afijos de las soluciones de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$ formen con el origen un triángulo equilátero.

Denotemos por z_1 y z_2 las raíces de la ecuación, y por A y B sus correspondientes afijos. Observemos, en primer lugar, que, puesto que se trata de una ecuación con coeficientes complejos, no podemos afirmar que las raíces sean necesariamente conjugadas. Ahora, como los puntos A , B y O (el origen) han de ser los vértices de un triángulo equilátero, tenemos una situación como la mostrada en el gráfico.



Como podemos ver, los segmentos orientados OA y OB deben tener la misma longitud y formar un ángulo de 60° , lo cual se traduce en que uno de estos segmentos, digamos OB (sin pérdida de generalidad), es el resultado de aplicar al otro (esto es, OA) un giro de 60° , con centro en O. Entonces, teniendo presente que 60° es igual a $\pi/3$, escrito en radianes, y que para girar el afijo de un complejo un ángulo de $\pi/3$ radianes es suficiente con multiplicar por la exponencial compleja de exponente $i\pi/3$, resulta la relación:

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot z_1. \quad (I)$$

Por otra parte, puesto que $a \neq 0$ (en caso contrario, se trataría de una ecuación de primer grado, y no tendríamos ningún triángulo, pues solo contaríamos con dos puntos), las ecuaciones de Cardano-Viète nos permiten escribir el sistema:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases},$$

que, sustituyendo la expresión dada en (I), se convierte en:

$$\begin{cases} z_1 + e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot z_1 = -\frac{b}{a} \\ z_1 e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot z_1 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

Agrupando en la segunda ecuación, extrayendo z_1 como factor común en la primera, y elevando al cuadrado ambos miembros, llegamos a:

$$\begin{cases} z_1 + e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot z_1 = -\frac{b}{a} \\ z_1 e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot z_1 = \frac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{b}{a} \\ z_1^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1^2 \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} \\ z_1^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

Ahora, si fuera $c = 0$, la ecuación de partida tendría una solución nula, lo que haría imposible que A, B y O formaran un triángulo, ya que solo tendríamos dos puntos, y no tres. En consecuencia, ha de ser $c \neq 0$, lo que permite dividir miembro a miembro las ecuaciones del último sistema, resultando la igualdad:

$$\frac{z_1^2 \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}{z_1^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}}.$$

Aplicando la fórmula que permite calcular el cuadrado de un binomio, simplificando, y operando, tenemos:

$$\frac{z_1^2 \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}{z_1^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{b^2}{\frac{a^2}{\frac{c}{a}}} \Leftrightarrow \frac{\cancel{z_1^2} \left(1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}{\cancel{z_1^2} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{ab^2}{a^2c} \Leftrightarrow e^{-i\frac{\pi}{3}} \left(1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{b^2}{ac} \Leftrightarrow$$

$$e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}-i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i\frac{\pi}{3}-i\frac{\pi}{3}} = \frac{b^2}{ac} \Leftrightarrow e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}} + 2 = \frac{b^2}{ac}.$$

Teniendo en cuenta que, por definición de la exponencial compleja, se verifica que $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$, la igualdad anterior puede escribirse como:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 = \frac{b^2}{ac},$$

de donde, por la paridad del coseno y la imparidad del seno, operando, se sigue:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 = \frac{b^2}{ac} \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 = \frac{b^2}{ac} \Leftrightarrow$$

$$2\frac{1}{2} + 2 = \frac{b^2}{ac} \Leftrightarrow \frac{b^2}{ac} = 3,$$

que es la relación pedida en el enunciado.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.39

Dada la ecuación $z^2 - 8iz - (19 + 4i) = 0$, cuyas raíces son z_1 y z_2 , halla los complejos z_3 tales que los afijos de z_1 , z_2 y z_3 formen un triángulo rectángulo isósceles, con el vértice del ángulo recto en el afijo de la raíz de mayor componente imaginaria.

Se trata de una ecuación de segundo grado con coeficientes complejos, que podemos resolver usando la conocida fórmula:

$$z = \frac{8i \pm \sqrt{-64 + 76 + 16i}}{2} = \frac{8i \pm \sqrt{12 + 16i}}{2} = \frac{8i \pm 2\sqrt{3 + 4i}}{2} = 4i \pm \sqrt{3 + 4i}.$$

Ahora, para calcular la raíz, pasamos el número $3 + 4i$ a la forma polar, para posteriormente, una vez determinado el resultado de la raíz, volver a la forma binómica, a

fin de poder hacer la operación correspondiente con el número complejo $4i$, como vemos a continuación.

Por una parte, es claro que el módulo de $3 + 4i$ es igual a 5, mientras que su argumento es igual a la arcotangente de $4/3$, que vale, aproximadamente, $53,13^\circ$. De esta manera, tenemos:

$$\sqrt{3+4i} = \sqrt{5_{53,13}} = \sqrt{5}_{26,57} = \sqrt{5} [\cos(26,57) + i \operatorname{sen}(26,57)] = 2 + i,$$

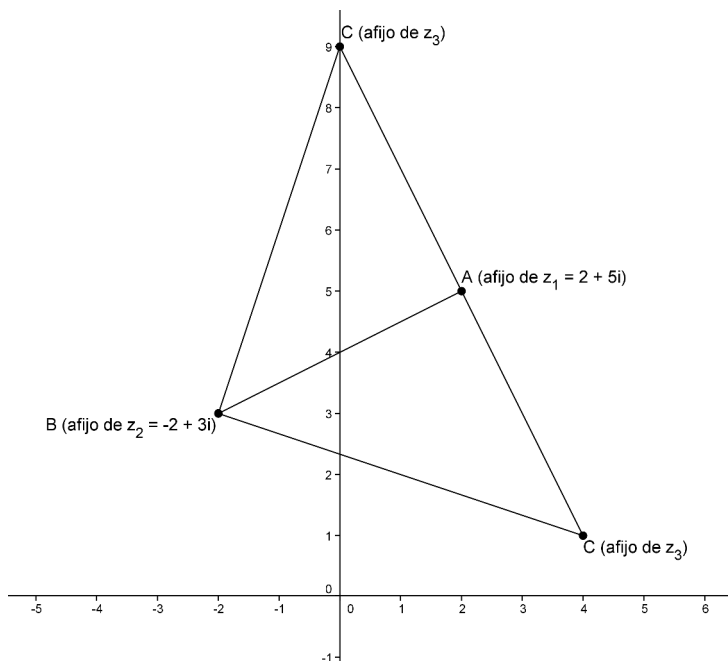
y, sustituyendo en la expresión anterior, se sigue:

$$z = 4i \pm \sqrt{3+4i} = 4i \pm (2+i),$$

de donde resultan las soluciones $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -2 + 3i$.

Así pues, el problema consiste en encontrar el tercer vértice, que denotaremos por C, del triángulo rectángulo isósceles que tiene dos vértices en los puntos de coordenadas $A = (2,5)$ y $B = (-2,3)$, que son los afijos de las soluciones de la ecuación, estando el ángulo recto en A, por ser el afijo de la solución con mayor componente imaginaria (que es 5, mientras que la del otro número vale 3).

Ello puede llevarse a cabo por procedimientos propios de la Geometría analítica plana, o mediante el uso de números complejos. Aquí lo haremos de las dos maneras, a fin de ilustrar las dos vías, si bien la primera parece más sencilla. Con este propósito, razonaremos sobre el siguiente gráfico.



En primer lugar, es claro que cabe esperar la existencia de dos soluciones (de hecho, en el enunciado se habla de «los complejos», en plural), ya que, trazando por A la perpendicular a la recta AB, obtenemos la recta que contiene el lado AC del triángulo, y, como, además, pretendemos que sea un triángulo isósceles, resulta que la distancia entre A y B debe ser igual a la distancia entre A y C, lo cual puede conseguirse de dos maneras, midiendo la distancia considerada sobre la perpendicular desde A, en un sentido, y en el contrario, dentro de la recta (en el gráfico se ve claramente cuál es la situación).

Para resolver el problema por procedimientos puramente geométricos, hallamos el vector que va de A a B:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, -2),$$

y consideramos uno de los dos vectores perpendiculares a este del mismo módulo, por ejemplo, el vector:

$$\overrightarrow{AB}^{\perp} = (-2, 4),$$

que podemos obtener, sencillamente, invirtiendo el orden de las coordenadas y cambiando uno de los signos.

Ahora, es claro que, al tratarse de un triángulo rectángulo isósceles, podemos determinar el punto C sumando o restando este vector al punto A, resultando las dos soluciones:

$$C = A + \overrightarrow{AB}^{\perp} = (2, 5) + (-2, 4) = (0, 9),$$

$$C = A - \overrightarrow{AB}^{\perp} = (2, 5) - (-2, 4) = (4, 1),$$

que son, respectivamente, los afijos de los números $z_3 = 9i$ y $z_3 = 4 + i$, que dan respuesta a la pregunta planteada en el enunciado.

Si optamos por el uso de los números complejos en la resolución de esta parte del problema, podemos considerar que, por la posición de los afijos involucrados, es claro que el segmento orientado AC puede obtenerse al girar el segmento orientado AB, con centro en A, un ángulo de 90° , en un sentido o en otro, esto es, un ángulo de 90° o de -90° . Teniendo en cuenta también que, en el contexto de los números complejos, realizar un giro de 90° es equivalente a multiplicar por i , y que el giro de -90° se corresponde con el producto por $-i$, podemos establecer la relación:

$$z_3 - z_1 = \pm i(z_2 - z_1).$$

Despejando z_3 , sustituyendo z_1 y z_2 por sus correspondientes valores y operando, se sigue:

$$z_3 = z_1 \pm i(z_2 - z_1) = 2 + 5i \pm i[-2 + 3i - (2 + 5i)] = 2 + 5i \pm i(-4 - 2i) = 2 + 5i \pm (2 - 4i),$$

de donde obtenemos las dos soluciones antes determinadas:

$$z_3 = 2 + 5i + (2 - 4i) = 4 + i,$$

$$z_3 = 2 + 5i - (2 - 4i) = 9i.$$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.40

Resuelve, en el anillo de los enteros, la ecuación $x^2 - 14x - 256 = y^2$.

Puesto que pretendemos resolver la ecuación en el anillo de los enteros, nos resulta conveniente factorizar las expresiones, lo cual podemos hacer empleando las conocidas identidades algebraicas, una vez que logremos tener una diferencia de cuadrados, que es el primer objetivo que vamos a alcanzar. En efecto, «completando cuadrados» en el primer miembro, la ecuación dada en el enunciado es equivalente a:

$$(x - 7)^2 - 305 = y^2,$$

y, trasponiendo términos, resulta:

$$(x - 7)^2 - y^2 = 305,$$

ecuación en la que el primer miembro está expresado como una diferencia de cuadrados. Aplicando la conocida identidad en el primer miembro y descomponiendo en factores primos el 305, tenemos:

$$(x - 7 + y)(x - 7 - y) = 1 \cdot 5 \cdot 61.$$

Ahora bien, puesto que la expresión del primer miembro debe ser un número entero (al serlo x e y), esta igualdad solo puede darse si los dos factores del primer miembro engloban los mismos factores que el segundo (tengamos en cuenta que la descomposición en factores primos debe ser la misma en ambos miembros, al ser iguales), lo cual únicamente es posible si se «emparejan» los dos factores del primer miembro de una de las ocho maneras que se describen a continuación:

$$(x - 7 + y)(x - 7 - y) = 1 \cdot 305 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 + y = 1 \\ x - 7 - y = 305 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 312 \end{cases},$$

$$(x - 7 + y)(x - 7 - y) = (-1)(-305) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 + y = -1 \\ x - 7 - y = -305 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = -298 \end{cases},$$

$$(x-7+y)(x-7-y) = 61 \cdot 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-7+y=61 \\ x-7-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=68 \\ x-y=12 \end{cases},$$

$$(x-7+y)(x-7-y) = (-61)(-5) \Leftrightarrow \begin{cases} x-7+y=-61 \\ x-7-y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-54 \\ x-y=2 \end{cases},$$

$$(x-7+y)(x-7-y) = 5 \cdot 61 \Leftrightarrow \begin{cases} x-7+y=5 \\ x-7-y=61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=12 \\ x-y=68 \end{cases},$$

$$(x-7+y)(x-7-y) = (-5)(-61) \Leftrightarrow \begin{cases} x-7+y=-5 \\ x-7-y=-61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=-54 \end{cases},$$

$$(x-7+y)(x-7-y) = 305 \cdot 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-7+y=305 \\ x-7-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=312 \\ x-y=8 \end{cases},$$

$$(x-7+y)(x-7-y) = (-305)(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-7+y=-305 \\ x-7-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-298 \\ x-y=6 \end{cases}.$$

Finalmente, resolviendo cada uno de estos ocho sistemas –por el método de reducción–, obtenemos todas las posibles soluciones de la ecuación inicial, en el anillo de los enteros, resultando:

$$\begin{cases} x \cancel{+y} = 8 \rightarrow y = -152 \\ x \cancel{-y} = 312 \\ \hline 2x = 320 \Leftrightarrow x = 160 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cancel{+y} = 6 \rightarrow y = 152 \\ x \cancel{-y} = -298 \\ \hline 2x = -292 \Leftrightarrow x = -146 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cancel{+y} = 68 \rightarrow y = 28 \\ x \cancel{-y} = 12 \\ \hline 2x = 80 \Leftrightarrow x = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cancel{+y} = -54 \rightarrow y = -28 \\ x \cancel{-y} = 2 \\ \hline 2x = -52 \Leftrightarrow x = -26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cancel{+y} = 12 \rightarrow y = -28 \\ x \cancel{-y} = 68 \\ \hline 2x = 80 \Leftrightarrow x = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cancel{+y} = 2 \rightarrow y = 28 \\ x \cancel{-y} = -54 \\ \hline 2x = -52 \Leftrightarrow x = -26 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} x \cancel{+y} = 312 \rightarrow y = 152 \\ x \cancel{-y} = 8 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x \cancel{+y} = -298 \rightarrow y = -152 \\ x \cancel{-y} = 6 \end{array} \right. \\ \hline 2x = 320 \leftrightarrow x = 160 & 2x = -292 \leftrightarrow x = -146 \end{array}$$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.41

Resuelve la ecuación $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 = 0$.

Como podemos observar, los términos de la ecuación forman una progresión geométrica de razón $x/2$, cuyo primer elemento es 16. Así pues, podemos sumar estos cinco términos haciendo uso de la conocida fórmula que permite sumar los términos de una progresión geométrica, resultando:

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 = \frac{x^4 \cdot \frac{x}{2} - 16}{\frac{x}{2} - 1} = \frac{x^5 - 32}{x - 2},$$

expresión que carece de sentido solo si $x = 2$. Ahora bien, puesto que $x = 2$ no es solución de la ecuación, podemos suponer que x no toma este valor, y admitir como válida la expresión hallada, por lo que la ecuación original se convierte en

$$\frac{x^5 - 32}{x - 2} = 0,$$

de donde se sigue:

$$\frac{x^5 - 32}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow x^5 - 32 = 0 \Leftrightarrow x^5 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = \left(\sqrt[5]{32}\right)_{\frac{2k\pi}{5}}, k = 0, 1, 2, 3, 4 \Leftrightarrow$$

$$x = 2_{\frac{2k\pi}{5}}, k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Como ya hemos comentado, $x = 2$ no es solución, luego hemos de descartar el caso $k = 0$, que es el valor de k que proporciona esta solución real; en consecuencia, las 4 soluciones de la ecuación del enunciado son:

$$x_k = 2_{\frac{2k\pi}{5}}, k = 1, 2, 3, 4.$$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.42

Calcula el valor del parámetro m para que las ecuaciones $x^5 - 3x^3 + x^2 + mx - 1 = 0$ y $x^4 - x^2 - 2x - 1 = 0$ tengan el mayor número de raíces comunes, y calcúlalas.

Por comodidad, notaremos $P(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 + mx - 1$ y $Q(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1$, de manera que las dos ecuaciones dadas en el enunciado pueden escribirse, respectivamente, como $P(x) = 0$ y $Q(x) = 0$.

Observemos, en primer lugar, que la ecuación $Q(x) = 0$ es fácil de resolver, empleando las conocidas identidades algebraicas, como vemos a continuación:

$$x^4 - x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - (x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^4 - (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Por otro lado, como la ecuación $P(x) = 0$ tiene todos sus coeficientes reales, es claro que si tiene una solución compleja, su conjugada también debe serlo, luego hay dos posibilidades: o las dos raíces complejas de $Q(x) = 0$, antes calculadas, son soluciones de $P(x) = 0$ (lo que implica que $P(x)$ debe ser divisible por $x^2 + x + 1$, que es el polinomio que las tiene por raíces, como hemos visto) o ninguna de ellas lo es (lo que se traduce en que $P(x)$ no es divisible por $x^2 + x + 1$).

De este modo, podemos plantearnos si existe algún valor de m que haga que la división de $P(x)$ entre $x^2 + x + 1$ sea exacta, para ver si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen estas dos raíces en común.

Dividiendo $P(x)$ entre $x^2 + x + 1$, obtenemos el polinomio $x^3 - x^2 - 3x + 5$ como cociente, y, de resto, el polinomio $(m - 2)x - 6$, lo que nos permite asegurar que $P(x)$ no es divisible por $x^2 + x + 1$, ya que no existe ningún valor de m que haga que el resto de la división sea el polinomio nulo. En consecuencia, las dos raíces complejas de $Q(x)$ no lo son de $P(x)$ y, por tanto, las dos ecuaciones dadas en el enunciado tendrán, a lo sumo, dos raíces en común.

Ahora bien, para que las dos raíces reales de $Q(x)$, halladas con anterioridad, también lo sean de $P(x)$, es necesario y suficiente que el polinomio $x^2 - x - 1$ (que es el polinomio que las tiene como raíces) sea divisor de $P(x)$, lo que podemos comprobar realizando la división.

El cociente de esta división resulta ser el polinomio $x^3 + x^2 - x + 1$, mientras que el resto, que es lo que nos interesa ver, es el monomio mx . De este modo, podemos observar que el resto de la división es el polinomio nulo si, y solo si, $m = 0$, que es precisamente el valor de m que hace que las dos ecuaciones dadas en el enunciado tengan el mayor número de soluciones comunes, que resulta ser dos.

En cuanto a los valores de estas soluciones, son los encontrados anteriormente, a saber:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.43

Sean m y n dos números enteros. Demuestra que el siguiente sistema tiene solución si, y solo si, m y n son primos entre sí:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{cases}.$$

Lo resolveremos por doble implicación.

Supongamos, pues, en primer lugar, que el sistema tiene solución, y veamos que, en tal situación, m y n han de ser primos entre sí.

Sea x una solución del sistema. Entonces, deben existir dos números enteros, digamos p y q , tales que $x = pm$, $x = qn + 1$, de donde, por igualación, resulta la ecuación $pm = qn + 1$.

Sea $d = \text{mcd}(m, n)$. Por definición, sabemos que, en particular, d es divisor de m y de n , luego también lo es de pm y de qn . En consecuencia, d es divisor de la diferencia de estos números, $pm - qn$, que resulta ser igual a 1 (trasponiendo términos en la igualdad anterior), lo que se traduce en que $d = 1$, puesto que los únicos divisores enteros de 1 son 1 y -1 , y, por definición del máximo común divisor, d ha de ser positivo.

De este modo, hemos visto que $\text{mcd}(m, n) = 1$, lo que significa que m y n son primos entre sí, como queríamos demostrar.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\text{mcd}(m, n) = 1$, y veamos que, entonces, el sistema dado en el enunciado debe tener solución.

En efecto, teniendo en cuenta la identidad de Bezout, podemos asegurar que existen dos enteros, digamos r y s , tales que $rm + sn = 1$.

Haciendo el cambio $x = rm$ y trasponiendo en la última igualdad, resulta $x = 1 - sn$, por lo que x satisface el sistema:

$$\begin{cases} x = rm \\ x = 1 - sn \end{cases},$$

el cual es equivalente al sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{cases}.$$

Así pues, hemos probado que el número x es solución del sistema dado en el enunciado, lo que garantiza que dicho sistema tiene solución, como queríamos demostrar.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 2.44

Prueba que si m y n son enteros positivos primos entre sí, y a y b son enteros cualesquiera, entonces, existe solución del sistema:

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}.$$

Como vemos, se trata de un problema bastante parecido al anterior, que vamos a resolver de forma similar.

Puesto que m y n son primos entre sí, es claro que $\text{mcd}(m, n) = 1$, por lo que, aplicando la identidad de Bezout, podemos asegurar la existencia de dos enteros, digamos p y q , tales que $pm + qn = 1$. Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por $a - b$, tenemos $(a - b)pm + (a - b)qn = a - b$, de donde, trasponiendo términos, resulta $b + (a - b)qn = a - (a - b)pm$, y, haciendo el cambio $x = b + (a - b)qn$, la igualdad anterior se convierte en el sistema:

$$\begin{cases} x = a - (a - b)pm \\ x = b + (a - b)qn \end{cases}.$$

Ahora, tomando módulo m en la primera ecuación y módulo n en la segunda, teniendo en cuenta que, claramente, se cumplen las congruencias $(a - b)pm \equiv 0 \pmod{m}$ y $(a - b)qn \equiv 0 \pmod{n}$, llegamos a que x satisface el sistema:

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases},$$

lo que garantiza, lógicamente, que este sistema tiene solución, como pretendíamos demostrar.

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1976)

Problema 2.45

Halla, usando un sistema de dos congruencias, el menor número natural terminado en 3 cuyo doble tiene resto 5 al dividirlo por 7.

Como es claro, si en el enunciado no se indicara que hay que resolverlo usando un sistema de dos congruencias, podríamos proceder por ensayo-error, probando con los

números terminados en 3, de menor a mayor. Indudablemente, este método es poco eficaz (y menos elegante), especialmente si la solución del problema es un número elevado; sin embargo, en el caso que nos ocupa, podemos encontrar rápidamente la solución por este método.

En efecto, el menor número natural acabado en 3 es el propio número 3, cuyo doble, el número 6, no deja de resto 5 al dividirlo por 7. Así pues, descartamos el 3 como solución al problema.

El siguiente número acabado en 3 es el número 13, cuyo doble, el número 26, deja precisamente un resto igual a 5 al dividirse por 7. Así pues, el número buscado es 13.

Veamos ahora cómo llegar a esta solución (y, de hecho, a la solución general, encontrando no solo el menor, sino todos los números que cumplen estas condiciones), siguiendo la indicación del enunciado.

Denotemos por n el número buscado. Al ser un número terminado en 3, es evidente que debe cumplirse la congruencia $n \equiv 3 \pmod{10}$; y, al dejar su doble 5 como resto de la división por 7, se debe satisfacer también la congruencia $2n \equiv 5 \pmod{7}$. Por tanto, tenemos el sistema de dos congruencias:

$$\begin{cases} n \equiv 3 \pmod{10} \\ 2n \equiv 5 \pmod{7} \end{cases},$$

a partir del cual, por definición de congruencia, se deduce que deben existir dos números naturales, digamos p y q , tales que:

$$\begin{cases} n = 10p + 3 \\ 2n = 7q + 5 \end{cases}.$$

Ahora bien, como vemos, el primer miembro de la segunda ecuación del sistema es un número par, por lo que también debe serlo el segundo miembro, esto es, el número $7q + 5$, lo cual solo es posible si q es impar (si q fuera par, entonces, $7q$ también lo sería, y al sumarle 5, que es impar, daría como resultado un número impar, puesto que «par más impar es impar»), lo que se traduce en que debe existir un número natural, digamos k , tal que $q = 2k + 1$, y, sustituyendo esta expresión de q en el sistema anterior, operando, y simplificando, tenemos:

$$\begin{cases} n = 10p + 3 \\ 2n = 7q + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10p + 3 \\ 2n = 7(2k + 1) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10p + 3 \\ 2n = 14k + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10p + 3 \\ n = 7k + 6 \end{cases}.$$

Aplicando el método de igualación, este último sistema nos lleva a la ecuación $10p + 3 = 7k + 6$, de la que, trasponiendo, se sigue $10p = 7k + 3$, lo que se traduce en que $7k + 3$ es múltiplo de 10, y, en consecuencia, $7k + 3$ termina en cero, lo que implica, a su vez, que el número $7k$ termina en 7.

Ahora bien, esta situación solo puede darse si k termina en uno (es obvio, teniendo en cuenta la última cifra de los números de la tabla del 7), por lo que podemos escribir

$k = 10s + 1$, siendo s un número natural, pudiendo ser nulo. Sustituyendo en la segunda ecuación del último sistema, tenemos $n = 7(10s + 1) + 6$, de donde, operando, llegamos a $n = 70s + 13$, que es la solución general del sistema de congruencias, puesto que, para todo natural s (incluyendo el cero), se satisfacen ambas congruencias:

$$\begin{cases} n = 70s + 13 \equiv 0 + 13(\text{mod } 10) \equiv 3(\text{mod } 10) \\ 2n = 2(70s + 13) = 140s + 26 \equiv 0 + 5(\text{mod } 7) \equiv 5(\text{mod } 7) \end{cases}.$$

De este modo, para encontrar todos los números que verifican las condiciones del enunciado, basta con dar valores naturales al parámetro s en la igualdad $n = 70s + 13$. En particular, para encontrar el menor número, que es el pedido en el enunciado, tomamos $s = 0$, quedando $n = 13$, como habíamos adelantado al principio.

(Examen de Universidad)

Capítulo III. Problemas de Análisis Matemático

Problema 3.1

Demuestra que el número $\sqrt[3]{15+13\sqrt{2}} + \sqrt[3]{15-13\sqrt{2}}$ no es entero.

Denotemos:

$$n = \sqrt[3]{15+13\sqrt{2}} + \sqrt[3]{15-13\sqrt{2}}.$$

Elevando al cubo ambos miembros y desarrollando el binomio correspondiente, tenemos:

$$n^3 = 15+13\sqrt{2} + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{15+13\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{15-13\sqrt{2}} + 3 \cdot \sqrt[3]{15+13\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{15-13\sqrt{2}}\right)^2 + 15-13\sqrt{2},$$

y, operando y extrayendo factores comunes, llegamos a:

$$n^3 = 30 + 3 \cdot \sqrt[3]{15+13\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{15-13\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{15+13\sqrt{2}} + \sqrt[3]{15-13\sqrt{2}}\right).$$

Ahora, puesto que la expresión entre paréntesis vuelve a ser la del principio, que hemos denotado por n , podemos escribir:

$$n^3 = 30 + 3 \cdot \sqrt[3]{15+13\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{15-13\sqrt{2}} \cdot n.$$

Agrupando las raíces, aplicando la conocida identidad y operando, se sigue

$$n^3 = 30 + 3 \cdot \sqrt[3]{(15+13\sqrt{2})(15-13\sqrt{2})} \cdot n = 30 + 3 \cdot \sqrt[3]{225-338} \cdot n = 30 + 3 \cdot \sqrt[3]{-113} \cdot n,$$

de donde, trasponiendo términos, y teniendo en cuenta que n no puede ser nulo, resulta:

$$\frac{n^3 - 30}{3n} = \sqrt[3]{-113},$$

lo cual hace imposible que n sea entero, ya que, de serlo, la fracción del primer miembro representaría un número racional, mientras que el número del segundo miembro claramente es irracional. Así pues, por reducción al absurdo, podemos concluir con que n no es entero, como se quería demostrar.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.2

Demuestra que $\lambda = \frac{\log 3}{\log 2}$ es un número irracional.

Lo demostraremos por reducción al absurdo, suponiendo que λ es un número racional, y viendo que esta afirmación conduce necesariamente a una contradicción, lo que invalidará tal hipótesis y, en consecuencia, podremos afirmar que λ es irracional.

Supongamos, pues, que λ es racional. Entonces, debe existir un número entero, digamos p , y un número natural, digamos q , tales que:

$$\lambda = \frac{p}{q},$$

lo que, teniendo en cuenta la definición de λ , equivale a escribir:

$$\frac{p}{q} = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Trasponiendo términos, y aplicando las propiedades de los logaritmos, se sigue:

$$\frac{p}{q} = \frac{\log 3}{\log 2} \Leftrightarrow p \log 2 = q \log 3 \Leftrightarrow \log 2^p = \log 3^q \Leftrightarrow 2^p = 3^q,$$

lo cual no tiene sentido, puesto que, como es evidente, una potencia de exponente entero de 2 nunca puede ser igual a una potencia de exponente natural de 3.

Así pues, por reducción al absurdo, tenemos probado que λ es irracional, lo que concluye el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2012)

Problema 3.3

Demuestra que los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ no pueden ser términos de una progresión aritmética.

Lo demostraremos por reducción al absurdo, suponiendo que estos tres números forman parte de una progresión aritmética, y viendo que ello nos lleva a una contradicción, lo que hará insostenible tal suposición y, en consecuencia, tendremos probado el enunciado.

Supongamos, pues, que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ forman parte de una progresión aritmética, cuya diferencia es d . Entonces, existen dos números naturales, digamos m y n , tales que:

$$\sqrt{3} = \sqrt{2} + md \text{ y } \sqrt{5} = \sqrt{2} + nd.$$

Trasponiendo términos, tenemos:

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = md \text{ y } \sqrt{5} - \sqrt{2} = nd ,$$

de donde, dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones, resulta:

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{md}{nd} = \frac{m}{n} ,$$

lo cual implica que el número:

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

es racional y, en consecuencia, también lo es su inverso:

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} .$$

Racionalizando ambas expresiones y operando, resulta:

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{6} - \sqrt{10} - 2}{3} ,$$

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2}{-1} ,$$

de donde se sigue que tanto:

$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{6} - \sqrt{10} - 2}{3}$$

como:

$$\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2$$

son racionales, y, de aquí, que:

$$\sqrt{15} + \sqrt{6} - \sqrt{10} \text{ y } \sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6}$$

también lo son. Por tanto, la suma de ambos números debe ser racional, es decir, $2\sqrt{15}$ debe ser racional, lo cual es absurdo.

Así pues, hemos visto que al suponer que los números dados en el enunciado forman parte de una progresión aritmética llegamos a una contradicción, lo cual nos lleva a afirmar que no puede darse tal situación, y el problema queda cerrado.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.4

Demuestra que un número x es racional si, y solo si, la sucesión $x, x + 1, x + 2, \dots, x + n, \dots$ contiene, al menos, tres términos distintos en progresión geométrica.

Lo haremos por doble implicación.

Supongamos, en primer lugar, que x es un número racional, y veamos que la sucesión $x, x + 1, x + 2, \dots, x + n, \dots$ tiene, al menos, tres términos en progresión geométrica. Para fijar el primero de los tres términos, que llamamos y , elegimos un número natural, digamos k , tal que $x + k > 0$ (es claro que existe un tal k), y tomamos $y = x + k$. Los otros dos términos serán $y + p$ e $y + q$, para ciertos números naturales p y q que pretendemos calcular (obsérvese que no se pide que los términos que están en progresión geométrica sean consecutivos en la sucesión dada en el enunciado, lo cual ni siquiera sería posible).

Imponiendo la condición de que estos tres términos estén en progresión geométrica, obtenemos la ecuación:

$$\frac{y+q}{y+p} = \frac{y+p}{y},$$

de la que, trasponiendo términos y operando, llegamos a:

$$y^2 + qy = y^2 + p^2 + 2py \Leftrightarrow qy = p^2 + 2py \Leftrightarrow (q - 2p)y = p^2.$$

Ahora, como estamos suponiendo que x es racional, el número y también tiene que serlo (es la suma de x y k , esto es, la suma de un racional y un natural), además de ser positivo (por la elección de k), por lo que deben existir dos números naturales no nulos, digamos r y s , tales que $y = r/s$.

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos:

$$(q - 2p)\frac{r}{s} = p^2,$$

de donde, trasponiendo, se sigue:

$$(q - 2p)r = p^2s.$$

Con el objetivo de simplificar esta ecuación, elegimos $p = r$, lo cual es posible, al ser r un número natural (luego veremos que esta elección permite demostrar lo que queremos).

Sustituyendo, cancelando, y trasponiendo términos, resulta:

$$(q - 2r)r = r^2s \Rightarrow q - 2r = rs \Rightarrow q = rs + 2r,$$

lo que implica, en particular, que q es natural, al serlo r y s .

De este modo, hemos obtenido los siguientes términos:

$$y = \frac{r}{s},$$

$$y + p = \frac{r}{s} + r = \frac{r + rs}{s} = \frac{r(s+1)}{s} = \frac{r}{s}(s+1),$$

$$y + q = \frac{r}{s} + rs + 2r = \frac{r + rs^2 + 2rs}{s} = \frac{r(1 + s^2 + 2s)}{s} = \frac{r(s+1)^2}{s} = \frac{r}{s}(s+1)^2.$$

A la vista de los valores obtenidos, resulta evidente que son tres términos consecutivos de una progresión geométrica de razón $s + 1$, que, además, son distintos (solo serían iguales si $s = 0$, lo cual es imposible, puesto que s es el denominador de la expresión fraccionaria de y). Por otro lado, es claro que están incluidos en la sucesión dada en el enunciado, al ser k , p y q naturales. Así pues, ya tenemos demostrado lo que queríamos.

Recíprocamente, supongamos que la sucesión dada contiene tres términos distintos en progresión geométrica, digamos $x + a$, $x + b$ y $x + c$, con a , b y c números naturales, y veamos que, en tal caso, x es racional. Al ser tres términos en progresión geométrica, debe satisfacerse la ecuación:

$$\frac{x + c}{x + b} = \frac{x + b}{x + a},$$

y, trasponiendo términos y operando, llegamos a:

$$x^2 + (a + c)x + ac = x^2 + b^2 + 2bx \Leftrightarrow (a + c - 2b)x = b^2 - ac.$$

Ahora, si $a + c - 2b = 0$, entonces, la última ecuación se convierte en $b^2 - ac = 0$, por lo que obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} a + c - 2b = 0 \\ b^2 - ac = 0 \end{cases}.$$

Resolviéndolo por el método de sustitución, resulta:

$$\begin{aligned} \begin{cases} b = \frac{a+c}{2} \\ b^2 - ac = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a+c}{2} \\ \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a+c}{2} \\ \frac{a^2 + c^2 + 2ac}{4} - ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} b = \frac{a+c}{2} \\ a^2 + c^2 - 2ac = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a+c}{2} \\ (a-c)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a+c}{2} \\ a = c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c, \end{aligned}$$

lo cual se traduce en que los términos $x + a$, $x + b$ y $x + c$ son iguales. Este resultado contradice la hipótesis de partida, pues estábamos suponiendo que los tres términos son distintos. En consecuencia, la suposición de que se dé la igualdad $a + c - 2b = 0$ es insostenible, y ha de ser $a + c - 2b \neq 0$. Entonces, aislando x , queda:

$$x = \frac{b^2 - ac}{a + c - 2b},$$

y es claro que este cociente es un número racional, puesto que a , b y c son números naturales. De este modo, tenemos el resultado buscado, lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria, examen de Universidad y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 3.5

Determina una condición necesaria y suficiente para que N sea racional, para todo número irracional x , siendo:

$$N = \frac{a + bx}{c + dx},$$

donde a , b , c y d son números racionales, con c y d no simultáneamente nulos.

Para encontrar una condición necesaria, supongamos que N es racional. Entonces, deben existir dos números enteros (que dependerán de x), digamos p y q ($q \neq 0$), tales que $N = p/q$, por lo que debe cumplirse la igualdad:

$$\frac{a + bx}{c + dx} = \frac{p}{q},$$

de la que, trasponiendo términos, operando, y extrayendo x como factor común, llegamos a:

$$q(a + bx) = p(c + dx) \Rightarrow qa + qbx = pc + pdx \Rightarrow (qb - pd)x = pc - qa.$$

Ahora bien, el segundo miembro de esta última igualdad es racional (ya que p y q son enteros, y a y c son racionales), mientras que el primero podría ser irracional, al serlo x , y ser $qb - pd$ racional (por razones análogas a las señaladas para el segundo miembro). Evidentemente, ello supone una contradicción, salvo que se dé la circunstancia de que $qb - pd = 0$, en cuyo caso, el primer miembro sería nulo, para todo x (y, por tanto, racional), y la igualdad se correspondería, en realidad, con la identidad $0 = 0$. Así pues, podemos decir que, para evitar llegar a una contradicción, tenemos que exigir que se cumplan simultáneamente las igualdades $qb - pd = 0$ y $pc - qa = 0$, de las que, trasponiendo términos, llegamos, respectivamente, a las igualdades:

$$\frac{p}{q} = \frac{b}{d}; \quad \frac{p}{q} = \frac{a}{c}$$

(admitiendo, por un momento, que $c \neq 0$ y $d \neq 0$), cuyos primeros miembros son iguales, lo cual permite igualar los segundos, resultando la relación $b/d = a/c$, que podemos escribir equivalentemente como $bc = ad$, siendo esta la condición necesaria buscada.

Veamos los dos casos «descartados» anteriormente: $c = 0$ o $d = 0$ (tengamos en cuenta que no pueden ser ambos nulos, por el enunciado).

Si $c = 0$, entonces, la segunda igualdad se transforma en $qa = 0$, de donde se sigue $a = 0$ (ya que $q \neq 0$), y, en consecuencia, la condición $bc = ad$ se convierte en la identidad $0 = 0$, por lo que también es válida en este caso.

Análogamente, si $d = 0$, entonces, la primera ecuación se reduce a $qb = 0$, lo que implica $b = 0$ (al ser $q \neq 0$), y, de nuevo, la condición $bc = ad$ se transforma en la identidad $0 = 0$, de modo que también es válida en este caso.

Con todo lo visto, podemos concluir la primera parte del problema diciendo que la condición necesaria para que N sea racional, para todo irracional x , es que se verifique la relación $bc = ad$.

Veamos ahora que esta condición también es suficiente, esto es, supongamos que se verifica la relación $bc = ad$, y demosremos que, en tal situación, N es racional, para todo irracional x .

Supongamos, por un momento, que $c \neq 0$. Entonces, multiplicando por c el numerador y el denominador de la expresión que define N , tenemos:

$$N = \frac{c(a + bx)}{c(c + dx)} = \frac{ac + bcx}{c(c + dx)},$$

donde, por la relación $bc = ad$, podemos sustituir bc por ad , quedando:

$$N = \frac{ac + adx}{c(c + dx)},$$

y, extrayendo a como factor común en el numerador, y cancelando, resulta:

$$N = \frac{a \cancel{(c+dx)}}{c \cancel{(c+dx)}} \Leftrightarrow N = \frac{a}{c},$$

lo que significa que, efectivamente, N es racional, independientemente del valor del irracional x , al ser igual al cociente de dos números racionales.

Si, por el contrario, se cumple $c = 0$, entonces, la relación $bc = ad$ se transforma en $ad = 0$, de donde se deduce $a = 0$, puesto que c y d no pueden ser nulos a la vez, según el enunciado. Sustituyendo estos valores en la expresión que define N , tenemos:

$$N = \frac{0 + bx}{0 + dx} = \frac{bx}{dx},$$

de donde, cancelando x , llegamos a $N = b/d$, lo que implica que N es racional (es cociente de racionales), independientemente del valor irracional de x , quedando así el problema cerrado.

(Oposiciones de Secundaria, 2014)

Problema 3.6

Resuelve los siguientes apartados:

a) Sea x un número racional. ¿Qué condición debe cumplir x para que existan y sean distintos los números:

$$x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}?$$

b) Sean x e y dos números racionales que cumplen la condición del apartado a) y además las siguientes:

$$x < y, \quad \frac{1}{x} < \frac{1}{y}.$$

Indica cuáles de los números del siguiente conjunto H son positivos:

$$H = \left\{ x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, y, -y, \frac{1}{y}, -\frac{1}{y} \right\}.$$

c) Si además se cumple:

$$y = \max H, \frac{1}{x} < x,$$

ordena de menor a mayor los números del conjunto:

$$H \cup \{0, -1, 1\}.$$

Apartado a)

Para que los números existan, es necesario que $x \neq 0$. Para que, además, sean distintos, ha de ser:

$$x \neq -x, x \neq \frac{1}{x}, x \neq -\frac{1}{x}, -x \neq \frac{1}{x}, -x \neq -\frac{1}{x} \text{ y } \frac{1}{x} \neq -\frac{1}{x},$$

lo cual equivale a que $x \neq 0$ (ya exigido antes), $x \neq 1$ y $x \neq -1$. Así pues, la condición que debe cumplir x es pertenecer al conjunto:

$$A = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}.$$

Apartado b)

Como $x < y$, y ninguno es nulo (pues cumplen las condiciones del apartado anterior), tenemos tres posibilidades: $0 < x < y$, $x < 0 < y$, $x < y < 0$.

Si fuera cierta la primera posibilidad, tanto x como y serían números positivos y, trasponiendo, tendríamos:

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{x},$$

lo cual contradice la segunda condición dada en este apartado. Por tanto, este caso no puede darse.

De manera similar, si se cumpliera la tercera hipótesis, al ser los dos números negativos, trasponiendo, también llegaríamos a:

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{x},$$

por lo que tampoco podemos aceptar como válida esta posibilidad.

En consecuencia, tiene que ser cierta la segunda opción, esto es, $x < 0 < y$, la cual no arroja contradicción alguna, pues si trasponemos términos, teniendo en cuenta que x es negativo y y positivo, tenemos:

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y},$$

justo lo que se pide en la segunda condición de este apartado.

Así pues, x es negativo e y positivo, y , por tanto, los números positivos del conjunto H son los del conjunto B , dado por:

$$B = \left\{ -x, -\frac{1}{x}, y, \frac{1}{y} \right\}.$$

Apartado c)

Ordenaremos únicamente los números positivos, ya que ello hará que los negativos también lo estén, al ser simétricos unos de otros respecto del 0.

Puesto que $y = \max H$, es claro que y es el mayor de todos los positivos. En particular, se tiene:

$$-\frac{1}{x} < y,$$

de donde, trasponiendo los números positivos $-x$ e y , resulta también:

$$\frac{1}{y} < -x.$$

Por otro lado, el enunciado establece:

$$\frac{1}{x} < x,$$

lo que implica que $1 > x^2$ (trasponiendo el número negativo x). Extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros, tenemos:

$$1 > |x|,$$

de donde, al ser x negativo, se sigue $1 > -x$. Trasponiendo el número positivo $-x$ en esta última desigualdad, tenemos también:

$$-\frac{1}{x} > 1.$$

Con todo lo dicho, ya podemos ordenar los números positivos del conjunto $H \cup \{0, -1, 1\}$, quedando:

$$0 < \frac{1}{y} < -x < 1 < -\frac{1}{x} < y.$$

Como comentamos anteriormente, por simetría, también quedan ordenados los negativos, siendo la secuencia ordenada de los números de $H \cup \{0, -1, 1\}$ la que se indica a continuación:

$$-y < \frac{1}{x} < -1 < x < -\frac{1}{y} < 0 < \frac{1}{y} < -x < 1 < -\frac{1}{x} < y.$$

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1971, y examen de Universidad)

Problema 3.7

La asociación «Amigos de las Matemáticas» invita todos los años a todos sus afiliados a su congreso anual. Este año, exactamente el $27,18\%$ de los asistentes eran mujeres, el $55,5\%$ eran mayores de 30 años, y el 37% llevaba algún libro de Matemáticas. Sabiendo que el número de afiliados no es mayor que 15000, calcula el número de asistentes al congreso.

Denotemos por n el número de asistentes al congreso, por m el número de mujeres, y por p el número de personas mayores de 30 años.

Según el enunciado, el $27,18\%$ de los asistentes eran mujeres, lo que significa que:

$$m = 27,18 \cdot \frac{n}{100}.$$

Expresando este número periódico puro en forma fraccionaria, operando y simplificando, resulta:

$$m = \frac{2691}{99} \cdot \frac{n}{100} = \frac{2691n}{9900} = \frac{299n}{1100}.$$

Por otra parte, el $55,5\%$ de los asistentes eran mayores de 30 años, lo que se traduce en que:

$$p = 55,5 \cdot \frac{n}{100}.$$

De manera análoga, escribiendo la fracción generatriz correspondiente, tenemos:

$$p = \frac{500}{9} \cdot \frac{n}{100} = \frac{5n}{9}.$$

Ahora bien, como m y p tienen que ser números naturales (se trata de dos cantidades de personas), es claro que 1100 debe ser divisor de $299n$, y que 9 debe serlo de $5n$. Pero, además, 1100 y 299 son coprimos, al igual que 9 y 5, por lo que se deduce, en virtud del teorema de Euclides, que n debe ser múltiplo de 1100 y de 9, y, en consecuencia, de su mínimo común múltiplo, que justamente es igual al producto de ambos, al tratarse de dos números coprimos. De este modo, tenemos que n es múltiplo de 9900. Pero el enunciado establece que la asociación cuenta con 15000 afiliados a lo sumo, lo cual evidencia que n no puede ser mayor de 15000. Así pues, estamos buscando un múltiplo de 9900 que no sea superior a 15000, lo cual solo es posible si $n = 9900$, que es el número que da respuesta al problema.

Observemos que el enunciado nos da otro dato: el 37% llevaba algún libro de Matemáticas. Como hemos visto, se trata de un dato superfluo, que no da información necesaria para calcular el número de asistentes, si bien debemos comprobar que el número encontrado es coherente con este requisito, esto es, debemos comprobar que el 37% de 9900 es un número natural, pues se trata también de una cantidad de personas. Como cabe esperar, se trata de un cálculo muy sencillo:

$$37\% \text{ de } 9900 = \frac{37 \cdot 9900}{100} = 3663.$$

(Oposiciones de Secundaria, 2004)

Problema 3.8

Si $a > 0$ es una aproximación de una medida positiva con un error relativo menor que R , ¿en qué intervalo se encuentra su valor exacto x ?

Puesto que el error relativo es menor que R , tenemos:

$$\frac{|x - a|}{x} < R,$$

y, al ser x positivo:

$$|x - a| < Rx,$$

lo que se traduce en que el número $x - a$ pertenece al intervalo $(-Rx, Rx)$, o equivalentemente, se cumplen las desigualdades $-Rx < x - a$, $x - a < Rx$. De la primera desigualdad se sigue:

$$x + Rx > a \Leftrightarrow x(1 + R) > a \Leftrightarrow x > \frac{a}{1 + R},$$

puesto que $1 + R$ es positivo, al serlo R (tengamos presente que es una cota superior del error relativo de la aproximación de un número positivo). La segunda desigualdad, por su parte, nos lleva a:

$$x - Rx < a \Leftrightarrow x(1 - R) < a,$$

y tendremos que analizar el signo de $1 - R$, según los distintos casos, para poder aislar x , como vemos a continuación.

Si $1 - R < 0$, esto es, si $R > 1$, entonces, trasponiendo:

$$x > \frac{a}{1 - R}.$$

Como ya teníamos:

$$x > \frac{a}{1 + R},$$

ha de ser:

$$x > \max \left\{ \frac{a}{1 - R}, \frac{a}{1 + R} \right\}.$$

Ahora bien, puesto que $1 + R > 0 > 1 - R$ (estamos suponiendo $1 - R < 0$), al trasponer, resulta:

$$\frac{a}{1 - R} < \frac{a}{1 + R},$$

luego:

$$\max \left\{ \frac{a}{1 - R}, \frac{a}{1 + R} \right\} = \frac{a}{1 + R},$$

y, en consecuencia:

$$x > \frac{a}{1 + R},$$

lo que se traduce en que x se encuentra en el intervalo:

$$\left(\frac{a}{1 + R}, +\infty \right).$$

Si $1 - R = 0$, es decir, si $R = 1$, entonces, la segunda desigualdad se convierte en $0 < a$, lo cual no aporta nada nuevo, ya que, por el enunciado, a es positivo. En este caso, la única restricción sobre x es la dada por la primera desigualdad:

$$x > \frac{a}{1+R},$$

lo que implica que x está en el intervalo:

$$\left(\frac{a}{1+R}, +\infty \right).$$

Sustituyendo R por su valor en este caso, $R = 1$, resulta el intervalo:

$$\left(\frac{a}{2}, +\infty \right).$$

Por último, si $1 - R > 0$, es decir, si $0 < R < 1$, entonces, trasponiendo:

$$x < \frac{a}{1-R},$$

y, como ya teníamos:

$$x > \frac{a}{1+R},$$

resulta que x pertenece al intervalo:

$$\left(\frac{a}{1+R}, \frac{a}{1-R} \right).$$

Obsérvese que este intervalo no es vacío, pues en este caso estamos suponiendo que $1 - R > 0$, lo que implica que $1 + R > 1 - R > 0$ (R es positivo), y, trasponiendo:

$$\frac{a}{1+R} < \frac{a}{1-R}.$$

De este modo, hemos encontrado el intervalo en que se encuentra el valor exacto x , dependiendo del valor de R , lo que cierra el problema.

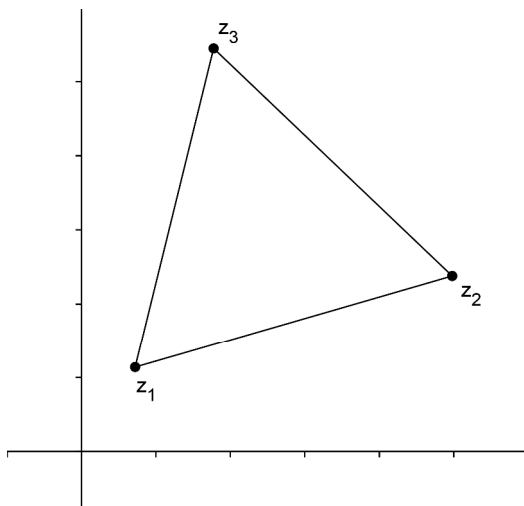
(Oposiciones de Secundaria, 2000)

Problema 3.9

Demuestra que una condición necesaria para que los afijos de los números complejos z_1 , z_2 y z_3 formen un triángulo equilátero es que se cumpla la igualdad:

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

Para que los afijos de z_1 , z_2 y z_3 formen un triángulo equilátero, como se ve en el gráfico, debe ocurrir que el segmento orientado determinado por los afijos de z_1 y z_3 sea el resultado de aplicar un giro de 60° con centro en el afijo de z_1 al segmento orientado determinado por los afijos de z_1 y z_2 . De la misma manera, el segmento orientado determinado por los afijos de z_2 y z_1 ha de ser el resultado de aplicar un giro de 60° con centro en el afijo de z_2 al segmento orientado determinado por los afijos de z_2 y z_3 .



Ahora bien, teniendo en cuenta que para realizar los giros descritos hay que multiplicar por la exponencial compleja de exponente $i\pi/3$, las relaciones anteriores se traducen en el sistema:

$$\begin{cases} z_3 - z_1 = e^{i\pi/3} (z_2 - z_1) \\ z_1 - z_2 = e^{i\pi/3} (z_3 - z_2) \end{cases}.$$

Puesto que ninguno de los miembros de estas ecuaciones es nulo (si alguno lo fuera, dos de estos números complejos serían iguales, y no tendríamos un triángulo), podemos dividir miembro a miembro ambas ecuaciones, resultando:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2} = \frac{e^{i\pi/3} (z_2 - z_1)}{e^{i\pi/3} (z_3 - z_2)}.$$

Simplificando, trasponiendo términos y operando, se sigue:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2} = \frac{e^{i\pi/3}(z_2 - z_1)}{e^{i\pi/3}(z_3 - z_2)} \Leftrightarrow z_3^2 - z_2 z_3 - z_1 z_3 + \cancel{z_1 z_2} = z_1 z_2 - z_1^2 - z_2^2 + \cancel{z_1 z_2} \Leftrightarrow$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3,$$

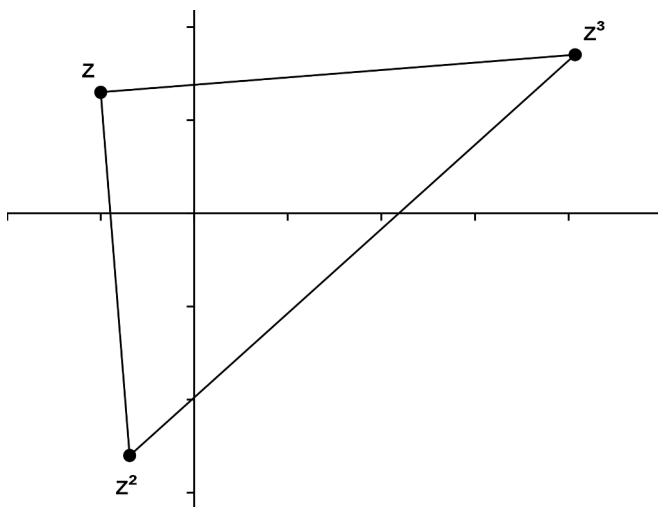
que es precisamente la igualdad que pretendíamos demostrar.

(Oposiciones de Secundaria, examen de Universidad y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 3.10

Halla un número complejo z tal que los afijos de z , z^2 y z^3 formen un triángulo rectángulo con el vértice del ángulo recto en el afijo de z .

Puesto que los afijos de z , z^2 y z^3 forman un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el afijo de z , teniendo en cuenta que el argumento de z^2 es el doble del de z , y que el de z^3 es el triple, la posición relativa de estos afijos ha de ser como se muestra en el gráfico.



Como podemos observar, al girar el segmento orientado determinado por los afijos de z y z^2 un ángulo de 90° con centro en el afijo de z , resulta un segmento contenido en la recta determinada por los afijos de z y z^3 . Sin embargo, al no tratarse necesariamente de un triángulo isósceles, no podemos decir que este segmento orientado contenido en la recta que pasa por los afijos de z y z^3 coincida con el segmento orientado determinado por estos afijos, ya que pueden tener distinta longitud.

En cambio, sí podemos asegurar que ambos segmentos orientados son proporcionales, lo que significa que existe un número real no nulo, digamos k , tal que el cociente de sus longitudes es igual a k . Así pues, teniendo en cuenta que girar un segmento orientado un ángulo de 90° es equivalente a multiplicar por la unidad imaginaria el número complejo correspondiente, las condiciones comentadas se traducen en la ecuación:

$$\frac{z^3 - z}{i(z^2 - z)} = k,$$

que tiene perfecto sentido, al ser el denominador no nulo, puesto que $z^2 \neq z$ (si se diera la igualdad, lo cual solo ocurre si $z = 0$ o $z = 1$, no tendríamos tres afijos, y no podríamos hablar del triángulo formado por ellos). Factorizando mediante la extracción de factor común y el uso de las conocidas identidades algebraicas, simplificando y trasponiendo términos, se sigue:

$$\frac{z^3 - z}{i(z^2 - z)} = k \Leftrightarrow \frac{\cancel{z}(z+1)\cancel{(z-1)}}{i\cancel{z}\cancel{(z-1)}} = k \Leftrightarrow z+1 = ki \Leftrightarrow z = -1 + ki,$$

expresión que proporciona, para cada real $k \neq 0$, un complejo que satisface las condiciones pedidas.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.11

Sean $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ las raíces n -ésimas de la unidad. Estudia qué valores toma E , cuando k es un número natural, siendo:

$$E = r_1^k + r_2^k + r_3^k + \dots + r_n^k.$$

Sea r cualquier raíz n -ésima de la unidad, con $r \neq 1$. Como es sabido, las n raíces n -ésimas de la unidad son $1, r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}$, luego los conjuntos $\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$ y $\{1, r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}\}$ son iguales. De este modo, podemos identificar cada complejo del primer conjunto con uno del segundo, y reescribir E , resultando:

$$E = r_1^k + r_2^k + r_3^k + \dots + r_n^k = 1^k + r^k + (r^2)^k + (r^3)^k + \dots + (r^{n-1})^k.$$

Intercambiando la posición de los exponentes de la última expresión, podemos escribir:

$$E = 1 + r^k + (r^k)^2 + (r^k)^3 + \dots + (r^k)^{n-1},$$

que es la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica de razón r^k y primer término igual a 1. Así pues, para calcular el valor de E , hemos de sumar los términos de esta progresión, para lo cual contamos con la conocida fórmula, válida únicamente si la razón no es igual a la unidad, esto es, si $r^k \neq 1$. Por ello, distinguiremos dos casos por separado: $r^k = 1$ y $r^k \neq 1$.

Si $r^k = 1$, entonces, los n sumandos son iguales a 1, de donde se sigue $E = n$. Observemos que, puesto que r es una raíz n -ésima de la unidad, es decir, $r^n = 1$, la igualdad $r^k = 1$ solo puede darse si k es múltiplo de n .

Si $r^k \neq 1$ (lo cual sucede si k no es múltiplo de n), entonces, aplicando la fórmula para sumar los términos de la progresión geométrica, tenemos:

$$E = \frac{(r^k)^n - 1}{r^k - 1},$$

de donde, intercambiando los exponentes y teniendo en cuenta que r es una raíz n -ésima de la unidad, resulta:

$$E = \frac{(r^k)^n - 1}{r^k - 1} = \frac{(r^n)^k - 1}{r^k - 1} = \frac{1^k - 1}{r^k - 1} = 0.$$

Así pues, recapitulando, podemos decir que si k es múltiplo de n , entonces, $E = n$, mientras que si no lo es, resulta $E = 0$.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.12

Siendo $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ los sucesivos términos de una progresión aritmética, calcula, en función de los extremos y del número de términos, la suma:

$$S = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n}.$$

En primer lugar, observemos que S está bien definido únicamente si todos los términos de la progresión son no nulos, razón por la que supondremos que estamos en estas condiciones.

Denotemos por d la diferencia de la progresión aritmética, de manera que, como es sabido, el término general de la progresión se obtiene a partir del primero, mediante la fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Ahora, si $d = 0$, es claro que todos los términos son iguales al primero, a_1 , por lo que podemos calcular S , como vemos a continuación, teniendo en cuenta, además, que en la expresión que define S hay $n - 1$ sumandos:

$$S = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{1}{a_1 \cdot a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot a_1} + \cdots + \frac{1}{a_1 \cdot a_1} \Leftrightarrow$$

$$S = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} + \cdots + \frac{1}{a_1^2} = (n-1) \frac{1}{a_1^2} = \frac{n-1}{a_1^2}.$$

Sin embargo, como en el enunciado se pide que S se exprese en función de los extremos y del número de términos, hemos de «perfeccionar» esta expresión, sustituyendo a_1 por a_n (que son iguales, al ser $d = 0$), quedando:

$$S = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n},$$

que es la expresión buscada.

Si, por el contrario, $d \neq 0$, entonces, podemos multiplicar y dividir por d todos los sumandos de la expresión que define S , resultando:

$$S = \frac{1}{d} \left(\frac{d}{a_1 \cdot a_2} + \frac{d}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{d}{a_{n-1} \cdot a_n} \right).$$

Ahora, puesto que d es igual a la diferencia entre dos términos consecutivos de la progresión, esto es, $d = a_i - a_{i-1}$, para todo $i \geq 2$, podemos reescribir la expresión anterior como:

$$S = \frac{1}{d} \left(\frac{a_2 - a_1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} \cdot a_n} \right),$$

de donde, «rompiendo» cada fracción en dos y simplificando, se sigue:

$$S = \frac{1}{d} \left(\frac{a_2}{a_1 \cdot a_2} - \frac{a_1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{a_3}{a_2 \cdot a_3} - \frac{a_2}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1} \cdot a_n} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} \cdot a_n} \right) \Leftrightarrow$$

$$S = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right).$$

Como podemos ver, en el segundo miembro de esta última igualdad aparecen algunas fracciones iguales, alternando sus signos, por lo que podemos «compensar» unas con otras, quedando:

$$S = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{a_2}} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{a_2}} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{a_3}} + \cdots + \frac{\cancel{1}}{\cancel{a_{n-1}}} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right).$$

Operando, llegamos a:

$$S = \frac{1}{d} \cdot \frac{a_n - a_1}{a_1 \cdot a_n}.$$

Por otro lado, despejando d en la fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)d$, tenemos:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1},$$

y, sustituyendo en la igualdad anterior, operando y simplificando, resulta:

$$S = \frac{1}{d} \cdot \frac{a_n - a_1}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{\frac{a_n - a_1}{n - 1}} \cdot \frac{a_n - a_1}{a_1 \cdot a_n} = \frac{n - 1}{\cancel{a_n - a_1}} \cdot \frac{\cancel{a_n - a_1}}{a_1 \cdot a_n} = \frac{n - 1}{a_1 \cdot a_n}.$$

Como podemos observar, esta expresión de S no se diferencia en nada de la obtenida para el caso en que $d = 0$, por lo que podemos decir que, en cualquier caso, tenemos:

$$S = \frac{n - 1}{a_1 \cdot a_n},$$

lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.13

Demuestra que un subconjunto A de los números reales es abierto si, y solo si, para toda sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ de números reales, convergente a un punto $a \in A$, se verifica que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, a_n \in A$.

Haremos una demostración «epsilónica», por doble implicación.

En primer lugar, supongamos que A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ (que consideramos dotado de la topología usual), y sea $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales convergente a un punto a , perteneciente a A . Se trata de demostrar que, en tal situación, existe un número natural, digamos n_0 , tal que para todo $n \geq n_0$, se cumple que a_n pertenece a A .

En efecto, al ser A un conjunto abierto, tenemos que A es entorno de todos sus puntos, lo que equivale a decir que:

$$\forall y \in A, \exists \varepsilon_y > 0 / |x - y| < \varepsilon_y \Rightarrow x \in A.$$

En particular, esta afirmación se cumple para $y = a$, siendo a el punto de A al que converge la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$, luego:

$$\exists \varepsilon_a > 0 / |x - a| < \varepsilon_a \Rightarrow x \in A. \quad (I)$$

Por otro lado, al ser $\{a_n\}_{n \geq 1}$ convergente al punto $a \in A$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, |a_n - a| < \varepsilon,$$

así que, tomando $\varepsilon = \varepsilon_a$, se cumple:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, |a_n - a| < \varepsilon_a,$$

lo que, por (I), implica:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, a_n \in A,$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Recíprocamente, supongamos que para toda sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ contenida en $\mathbb{R}$, convergente a un punto $a \in A$, se verifica:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, a_n \in A,$$

y veamos que, entonces, A debe ser un conjunto abierto.

Lo haremos por reducción al absurdo, suponiendo que A no es abierto (lo cual no implica que sea cerrado), y viendo que esta suposición nos lleva inevitablemente a una contradicción, lo que hará insostenible esta postura y, en consecuencia, A será abierto.

Si A no es abierto, entonces, A no es entorno de todos sus puntos, lo cual significa que existe un punto de A , digamos c , tal que, sea cual sea el número real $\varepsilon > 0$, se tiene que el intervalo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ no está contenido en A . Por tanto, tomando $\varepsilon_n = 1/n$, para cada número natural n , podemos decir que el intervalo:

$$\left(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n} \right)$$

no está contenido en A , para cualquier valor natural de n , lo cual implica que, para cada natural n , existe un punto, digamos c_n , tal que:

$$c_n \in \left(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n} \right) \text{ y } c_n \notin A.$$

De esta manera, hemos construido una sucesión de números reales, $\{c_n\}_{n \geq 1}$, tal que:

$$|c_n - c| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde se deduce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c,$$

es decir, la sucesión $\{c_n\}_{n \geq 1}$ es convergente al punto c , perteneciente a A . En consecuencia, aplicando a la sucesión $\{c_n\}_{n \geq 1}$ la hipótesis del enunciado que estamos considerando en esta implicación, resulta:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, c_n \in A,$$

lo cual es una contradicción, pues, como hemos visto, $c_n \notin A$, para todo número natural n .

Así pues, hemos demostrado que el hecho de suponer que A no es abierto nos lleva a una situación absurda, por lo que podemos afirmar que A es abierto, como queríamos demostrar, y el problema queda cerrado.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.14

Sea $\{a_n\}_{n \geq 1}$ la sucesión de números reales definida por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 1 + a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$, para cada $n \geq 1$. Calcula:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right)$.

Por la forma en que $\{a_n\}_{n \geq 1}$ está definida, cabe pensar que se trata de una sucesión divergente, idea que se ve apoyada por el hecho de que se pregunta sobre la convergencia de la serie formada a partir de los inversos de los términos de $\{a_n\}_{n \geq 1}$ (tengamos en cuenta que si $\{a_n\}_{n \geq 1}$ no fuera divergente, la sucesión formada por los inversos de sus términos no tendería a cero, y, en consecuencia, la serie correspondiente no sería sumable). Veamos que, efectivamente, estas «sospechas» son ciertas, y que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Para ello, a continuación comprobemos, en primer lugar, que $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es monótona creciente.

Por definición, para $n \geq 2$, $a_n = 1 + a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}$, de donde, trasponiendo, obtenemos $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} = a_n - 1$. Sustituyendo el producto de estos factores en la expresión de a_{n+1} , resulta $a_{n+1} = 1 + a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n = 1 + (a_n - 1) \cdot a_n$, y, operando, llegamos a:

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1. \quad (I)$$

Entonces, restando a_n a ambos miembros, agrupando y aplicando la conocida identidad algebraica, tenemos:

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1 - a_n = a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2,$$

que es una expresión positiva, al ser el cuadrado de un número distinto de cero (tengamos en cuenta que, por la definición de a_n , no es posible que se dé la igualdad $a_n = 1$, para $n \geq 2$). De este modo, $a_{n+1} - a_n > 0$, para todo $n \geq 2$, lo que equivale a decir que $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es monótona creciente (lo hemos visto a partir del segundo término; luego aclararemos que ocurre lo mismo con los restantes términos).

Veamos ahora, por reducción al absurdo, que, además, $\{a_n\}_{n \geq 1}$ no está acotada.

Si $\{a_n\}_{n \geq 1}$ estuviera acotada, al ser monótona creciente, tendría que ser convergente. En tal situación, existiría un número real, digamos L , tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Entonces, tomando límite en (I), resultaría:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - a_n + 1),$$

de donde $L = L^2 - L + 1$. Trasponiendo, se tendría $L^2 - 2L + 1 = 0$, y, por la conocida identidad algebraica, $(L - 1)^2 = 0$, de donde se seguiría $L = 1$, lo cual es absurdo, ya que, al ser $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + 1 = 2$ y $a_{n+1} > a_n$, para todo $n \geq 2$, tendría que ser $L > 1$ (aquí hemos precisado que la sucesión es monótona creciente «por completo», no solo a partir del segundo término, como comentamos antes).

Así pues, hemos visto que la suposición de que $\{a_n\}_{n \geq 1}$ esté acotada es insostenible, por lo que tenemos probado que no lo está. Por tanto, $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión monótona creciente no acotada, lo que implica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

como queríamos demostrar.

Pasemos ahora a resolver la segunda parte del problema, calculando el límite de las sumas parciales de la sucesión formada por los inversos de los términos de $\{a_n\}_{n \geq 1}$, o lo que es lo mismo, la suma de la serie. Para ello, nos serviremos de un artificio que nos permitirá escribir la suma de los citados términos como una serie telescópica, es decir,

como una serie en la que los términos aparecen alternando los signos, de manera que se compensan unos con otros, quedando solo el primero y el último de ellos en la sucesión de sumas parciales.

Como comentamos antes, para cualquier natural $n \geq 2$, por definición, tenemos que $a_n = 1 + a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}$. Dividiendo todos los términos por el producto $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n$ (que, evidentemente, no es nulo), resulta:

$$\frac{a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n} + \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n},$$

y, simplificando, queda:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n} + \frac{1}{a_n}.$$

Trasponiendo, llegamos a:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}} - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n},$$

expresión que nos permitirá escribir la serie de la manera que nos interesa.

En efecto, sustituyendo cada término:

$$\frac{1}{a_i}, \quad 2 \leq i \leq n,$$

por dicha expresión, tenemos

$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 \cdot a_2},$$

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3},$$

$\vdots$

$$\frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-2}} - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}},$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}} - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n}.$$

Sumando todas las igualdades miembro a miembro (teniendo en cuenta que unos términos se cancelan con otros), tenemos

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n},$$

de donde, añadiendo el sumando $1/a_1$, llegamos a:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n}.$$

Teniendo presente que $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n = a_{n+1} - 1$, para $n \geq 1$ (por la definición de la sucesión), y tomando límites, resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} \right) = \frac{2}{1} = 2, \end{aligned}$$

puesto que $a_1 = 1$ y:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1} - 1} = 0,$$

al ser:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

como vimos en la primera parte del problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2005)

Problema 3.15

Dos sucesiones de naturales $\{a_n\}_{n \geq 1}$ y $\{b_n\}_{n \geq 1}$ se definen por recurrencia del siguiente modo:

$$a_1 = b_1 = 1.$$

Para $n \geq 2$, a_n y b_n se obtienen igualando las partes racionales e irracionales de la ecuación:

$$a_n + b_n \sqrt{2} = (a_{n-1} + b_{n-1} \sqrt{2})^2.$$

a) Demuestra que $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$, para todo $n \geq 2$.

b) Deduce que:

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \sqrt{2},$$

cuando n tiende a infinito, mediante valores mayores que $\sqrt{2}$.

c) Deduce que:

$$\frac{2b_n}{a_n} \rightarrow \sqrt{2},$$

cuando n tiende a infinito, mediante valores menores que $\sqrt{2}$.

Apartado a)

Sea $n \geq 2$. Aplicando la conocida identidad algebraica en la igualdad dada en el enunciado, tenemos:

$$a_n + b_n \sqrt{2} = (a_{n-1} + b_{n-1} \sqrt{2})^2 = a_{n-1}^2 + 2b_{n-1}^2 + 2\sqrt{2}a_{n-1}b_{n-1},$$

de donde, igualando partes racionales y partes irracionales, se sigue:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}^2 + 2b_{n-1}^2 \\ b_n = 2a_{n-1}b_{n-1} \end{cases} \quad (I)$$

Sustituyendo estas expresiones de a_n y b_n en la dada en el enunciado del apartado a), resulta:

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (a_{n-1}^2 + 2b_{n-1}^2)^2 - 2(2a_{n-1}b_{n-1})^2,$$

y, desarrollando el cuadrado del binomio mediante la conocida identidad y operando, llegamos a:

$$\begin{aligned} (a_{n-1}^2 + 2b_{n-1}^2)^2 - 2(2a_{n-1}b_{n-1})^2 &= a_{n-1}^4 + 4b_{n-1}^4 + 4a_{n-1}^2b_{n-1}^2 - 8a_{n-1}^2b_{n-1}^2 = \\ &= a_{n-1}^4 + 4b_{n-1}^4 - 4a_{n-1}^2b_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Finalmente, como la última expresión es igual al cuadrado del binomio:

$$a_{n-1}^2 - 2b_{n-1}^2,$$

resulta:

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (a_{n-1}^2 - 2b_{n-1}^2)^2,$$

lo cual se traduce en una relación de recurrencia, válida para cualquier valor de $n \geq 2$, en la que aparecen las mismas operaciones con los términos de las sucesiones, pero «rebajando» en una unidad el subíndice, y elevado al cuadrado.

Así pues, «descendiendo» con el subíndice, podemos escribir:

$$\begin{aligned} a_n^2 - 2b_n^2 &= (a_{n-1}^2 - 2b_{n-1}^2)^2 = \left((a_{n-2}^2 - 2b_{n-2}^2)^2 \right)^2 = (a_{n-2}^2 - 2b_{n-2}^2)^{2^2} = \\ &= \left((a_{n-3}^2 - 2b_{n-3}^2)^2 \right)^{2^2} = (a_{n-3}^2 - 2b_{n-3}^2)^{2^3}, \end{aligned}$$

y, reiterando el procedimiento, llegamos a:

$$a_n^2 - 2b_n^2 = \dots = (a_1^2 - 2b_1^2)^{2^{n-1}}.$$

Sustituyendo los valores de a_1 y b_1 , dados en el enunciado, queda:

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (a_1^2 - 2b_1^2)^{2^{n-1}} = (1^2 - 2 \cdot 1^2)^{2^{n-1}} = (-1)^{2^{n-1}} = 1,$$

puesto que, al ser $n \geq 2$, el exponente es par, y ya tenemos probado lo que queríamos.

Apartado b)

Partiendo de igualdad demostrada en el apartado a), dividiendo ambos miembros por b_n^2 (que obviamente es distinto de cero) y trasponiendo términos, resulta:

$$a_n^2 - 2b_n^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{a_n^2}{b_n^2} - 2 = \frac{1}{b_n^2} \Leftrightarrow \frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{1}{b_n^2} + 2.$$

Puesto que se verifica la desigualdad;

$$\frac{1}{b_n^2} > 0,$$

(al ser b_n^2 positivo), tenemos:

$$\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{1}{b_n^2} + 2 > 0 + 2 = 2,$$

y, extrayendo raíz cuadrada, se sigue:

$$\frac{a_n}{b_n} > \sqrt{2},$$

lo que prueba una parte de lo que queremos.

Veamos ahora que, efectivamente, se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}.$$

Para ello, en primer lugar, demostraremos que $\{b_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión divergente:

Por las relaciones (I), para cada natural $n \geq 2$, se cumple $b_n = 2a_{n-1}b_{n-1}$, de donde, al ser $a_{n-1} \geq 1$, se sigue $b_n \geq 2b_{n-1}$, y, por tanto, $b_n > b_{n-1}$, es decir, $\{b_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión estrictamente creciente.

Si $\{b_n\}_{n \geq 1}$ estuviera acotada, al ser estrictamente creciente, sería convergente, por lo que existiría un número real, digamos L , tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

Entonces, tomando límite en ambos miembros de la igualdad $b_n = 2a_{n-1}b_{n-1}$, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_{n-1}b_{n-1},$$

es decir:

$$L = 2L \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1},$$

puesto que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n-1}.$$

Trasponiendo términos, se sigue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2},$$

lo cual es absurdo, ya que $a_n \geq 1$, para todo n natural.

Así pues, como del hecho de suponer que la sucesión $\{b_n\}_{n \geq 1}$ está acotada llegamos a una contradicción, por reducción al absurdo, tenemos probado que $\{b_n\}_{n \geq 1}$ no está acotada, y, al ser estrictamente creciente, necesariamente debe ser divergente, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty.$$

Por último, tomando límite en la igualdad:

$$\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{1}{b_n^2} + 2,$$

resulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n^2} + 2 \right) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2} + 2 = \frac{1}{+\infty} + 2 = 0 + 2 = 2,$$

de donde, extrayendo la raíz cuadrada, se sigue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2},$$

como queríamos demostrar.

Apartado c)

Por el apartado b), sabemos que, para todo n natural, se satisface la desigualdad:

$$\frac{a_n}{b_n} > \sqrt{2},$$

que, trasponiendo términos, podemos escribir como:

$$\frac{b_n}{a_n} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Racionalizando el denominador y trasponiendo, se sigue:

$$\frac{b_n}{a_n} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{2b_n}{a_n} < \sqrt{2},$$

lo que demuestra una parte de lo que queremos.

Veamos ahora el límite. También por el apartado b), tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2},$$

expresión que, invirtiendo las fracciones y racionalizando, nos lleva a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

y, finalmente, multiplicando por 2, resulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b_n}{a_n} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

como queríamos demostrar.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.16

Dada la matriz $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$, siendo:

$$t_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

se pide:

- a) Demuestra que $\forall k \geq 1, \exists a_k, b_k \in \mathbb{R} / T^k = a_k T + b_k I$.
- b) Encuentra una relación de recurrencia para los escalares a_k, b_k .
- c) Calcula los límites:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k-1}}.$$

- d) Prueba que existen cuatro constantes p, q, r y s tales que $a_k = 2^k p + (-1)^k q$ y $b_k = 2^k r + (-1)^k s$. Calcula el valor de dichas constantes.

Apartados a) y b)

Como podemos ver, a pesar de la aparente complejidad con que la matriz T está definida, en realidad tenemos:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dicho esto, vamos a demostrar la relación dada en el enunciado usando el método de inducción, como vemos a continuación.

Para $k = 1$, es claro que $T^1 = T = 1 \cdot T + 0 \cdot I$, luego la relación se cumple, tomando los valores $a_1 = 1$, $b_1 = 0$.

Ahora, dado $k > 1$, supongamos que la relación es cierta para todo natural p tal que $p < k$, y veamos que, en tal situación, ha de cumplirse también para k . En efecto, por definición, $T^k = T \cdot T^{k-1}$, y como estamos suponiendo que la relación es cierta para $k - 1$ (que es la hipótesis de inducción), podemos escribir $T^k = T(a_{k-1}T + b_{k-1}I)$, y, aplicando la propiedad distributiva, $T^k = a_{k-1}T^2 + b_{k-1}T$. Ahora bien, la hipótesis de inducción también es aplicable a T^2 , por lo que podemos sustituir T^2 por $a_2T + b_2I$ en la igualdad anterior, resultando $T^k = a_{k-1}(a_2T + b_2I) + b_{k-1}T$, que, operando y reorganizando términos, nos lleva a $T^k = a_{k-1}a_2T + a_{k-1}b_2I + b_{k-1}T = (a_{k-1}a_2 + b_{k-1})T + a_{k-1}b_2I$, que es precisamente lo que pretendíamos demostrar, tomando $a_k = a_{k-1}a_2 + b_{k-1}$ y $b_k = a_{k-1}b_2$.

Así pues, por el segundo principio de inducción, ya tenemos probado que la igualdad dada en el enunciado es cierta, para todo natural $k \geq 1$.

Al mismo tiempo, las relaciones $a_k = a_{k-1}a_2 + b_{k-1}$ y $b_k = a_{k-1}b_2$ dan respuesta al enunciado del apartado b), si bien podemos simplificarlas, determinando los valores de a_2 y b_2 , para lo cual efectuamos el cálculo de T^2 :

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

que podemos reescribir como:

$$T^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T + 2I.$$

De este modo, tenemos $a_2 = 1$, $b_2 = 2$, y, sustituyendo en las relaciones anteriores, obtenemos:

$$\begin{cases} a_k = a_{k-1} + b_{k-1} \\ b_k = 2a_{k-1} \end{cases}.$$

Apartado c)

Si denotamos por L el primero de los límites, teniendo en cuenta las relaciones de recurrencia obtenidas antes, resulta:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2a_{k-1}},$$

de donde se sigue:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{a_{k-1}}}{2\cancel{a_{k-1}}} + \frac{b_{k-1}}{2a_{k-1}} \right) \Leftrightarrow L = \frac{1}{2} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{k-1}}{2a_{k-1}} \Leftrightarrow L = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}}. \quad (I)$$

Ahora bien, como el límite de una sucesión no depende de los primeros términos, es claro que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k},$$

por lo que, invirtiendo los cocientes (L no es nulo, por las relaciones de recurrencia obtenidas y los primeros valores hallados), llegamos a:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k}} = \frac{1}{L}.$$

Sustituyendo en (I), operando, y resolviendo la ecuación resultante, obtenemos:

$$L = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{L} \Rightarrow 2L^2 = L + 1 \Rightarrow 2L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} L = 1 \\ L = -1/2 \end{cases}.$$

Sin embargo, la solución $L = -1/2$ no es válida, puesto que todos los términos de la sucesión son positivos, como resulta claro a partir de las relaciones de recurrencia obtenidas y de los valores de a_1 , a_2 , b_1 y b_2 . Por tanto, ha de ser $L = 1$.

En esta forma de proceder, puede objetarse que hemos partido de que el límite considerado existe y es finito. Así pues, para validar este método, habríamos de probar que efectivamente es así, algo que no es especialmente difícil.

También es posible calcular este límite siguiendo otro procedimiento, que seguidamente detallamos.

Restando miembro a miembro en las relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_k = a_{k-1} + b_{k-1} \\ b_k = 2a_{k-1} \end{cases},$$

y operando, obtenemos:

$$b_k - a_k = 2a_{k-1} - a_{k-1} - b_{k-1} \Leftrightarrow b_k - a_k = a_{k-1} - b_{k-1} \Leftrightarrow b_k - a_k = -(b_{k-1} - a_{k-1}).$$

Puesto que esta última igualdad es válida para todo natural $k > 1$, podemos «ir bajando», hasta llegar a los primeros términos, a_1 y b_1 , cuyos valores son conocidos, resultando:

$$b_k - a_k = -(b_{k-1} - a_{k-1}) = -[-(b_{k-2} - a_{k-2})] = (-1)^2(b_{k-2} - a_{k-2}) = (-1)^2[-(b_{k-3} - a_{k-3})] \Leftrightarrow$$

$$b_k - a_k = (-1)^3(b_{k-3} - a_{k-3}) = \dots = (-1)^{k-1}(b_1 - a_1) = (-1)^{k-1}(0 - 1) \Leftrightarrow b_k - a_k = (-1)^k.$$

Trasponiendo términos en esta última igualdad, tenemos:

$$a_k = b_k - (-1)^k \Leftrightarrow a_k = b_k + (-1)^{k+1},$$

y, sustituyendo en el límite que pretendemos hallar, se sigue:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k + (-1)^{k+1}}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{b_k}{b_k} + \frac{(-1)^{k+1}}{b_k} \right) = 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{k+1}}{b_k}.$$

Por otro lado, sustituyendo la expresión de b_{k-1} que proporciona la segunda relación de recurrencia en la primera, tenemos:

$$\begin{cases} a_k = a_{k-1} + b_{k-1} \\ b_k = 2a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2} \\ b_k = 2a_{k-1} \end{cases}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la regla de formación establecida por la primera de estas dos últimas relaciones de recurrencia, que relaciona tres términos consecutivos de la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$, y los valores iniciales, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, resulta claro que todos los términos de la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ son números naturales, y que se trata de una sucesión estrictamente creciente, lo que implica, en particular, que la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ diverge a infinito.

En consecuencia, tomando límite en ambos miembros de la segunda relación de recurrencia, resulta que la sucesión $\{b_n\}_{n \geq 1}$ también es divergente, por lo que el límite que queremos calcular es:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{k+1}}{b_k} = 1 + \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{k+1}}{+\infty} = 1 + 0 = 1,$$

que es el mismo valor que obtuvimos por el otro método, como cabía esperar.

Pasemos ahora a realizar el cálculo del segundo límite pedido. Por la segunda de las relaciones de recurrencia obtenidas, podemos escribir:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{2a_{k-1}},$$

de donde, trasponiendo y operando, se sigue:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{2a_{k-1}} \Leftrightarrow L = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k-1}} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k-1}} = 2L = 2,$$

y ya tenemos calculado el límite pedido.

También podríamos haberlo calculado haciendo uso de la primera relación de recurrencia, en lugar de la segunda, como vemos a continuación:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{a_{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k-1}}{a_{k-1}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} = 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}}} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k-1}} = 1 + \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}}} = 1 + \frac{1}{L} = 1 + 1 = 2.$$

Apartado d)

Puesto que pretendemos demostrar que se satisface la igualdad $a_k = 2^k p + (-1)^k q$, de ser cierta, debe serlo, en particular, para $k = 1$ y $k = 2$, por lo que, sustituyendo k por estos dos valores, y teniendo presente que $a_1 = a_2 = 1$ (como ya vimos), p y q han de verificar el sistema:

$$\begin{cases} 1 = 2p - q \\ 1 = 4p + q \end{cases},$$

que, resolviéndolo por el método de reducción, nos lleva a:

$$\begin{cases} 1 = 2p - q \rightarrow q = 2/3 - 1 \rightarrow q = -1/3 \\ 1 = 4p + q \\ 2 = 6p \rightarrow p = 1/3 \end{cases}.$$

De este modo, la relación que pretendemos demostrar se transforma en:

$$a_k = 2^k \cdot \frac{1}{3} + (-1)^k \cdot \left(-\frac{1}{3}\right),$$

que podemos escribir como:

$$a_k = \frac{2^k}{3} + \frac{(-1)^{k+1}}{3} = \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}.$$

Para ver que, efectivamente, se cumple esta igualdad utilizaremos el segundo principio de inducción.

Para $k = 1$ y $k = 2$, es evidente que se cumple, pues los valores de p y q han sido calculados precisamente tomando $k = 1$ y $k = 2$.

Ahora, dado $k > 2$, supongamos que la relación es cierta para todo natural p tal que $p < k$, y veamos que, en tal situación, también ha de serlo para k , lo que, por inducción, significará que la relación es válida para todo natural k .

Teniendo presente la relación de recurrencia $a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2}$ (obtenida antes), aplicando la hipótesis de inducción, operando, y extrayendo factores comunes, tenemos:

$$a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2} = \frac{2^{k-1} + (-1)^k}{3} + 2 \cdot \frac{2^{k-2} + (-1)^{k-1}}{3} = \frac{2^{k-1} + (-1)^k}{3} + \frac{2^{k-1} + 2(-1)^{k-1}}{3} \Leftrightarrow$$

$$a_k = \frac{2^{k-1} + (-1)^k + 2^{k-1} + 2(-1)^{k-1}}{3} = \frac{2 \cdot 2^{k-1} + (-1)^{k-1}(-1 + 2)}{3} = \frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3}.$$

Ahora bien, como el valor de $(-1)^n$ solo depende de la paridad de n , es claro que $(-1)^n$ y $(-1)^{n+2}$ son iguales, pues n y $n + 2$ tienen la misma paridad. En consecuencia, se verifica $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$, lo que permite escribir a_k como:

$$a_k = \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3},$$

que es la igualdad que pretendíamos demostrar.

Así pues, ya tenemos probado por inducción que la relación $a_k = 2^k p + (-1)^k q$ es cierta para todo natural k , siendo $p = 1/3$, $q = -1/3$.

Para acabar el problema, solo nos queda demostrar la igualdad $b_k = 2^k r + (-1)^k s$, y encontrar los valores de r y s , lo cual resulta bastante sencillo, teniendo en cuenta la relación de recurrencia $b_k = 2a_{k-1}$ y la expresión de a_k demostrada por inducción. De este modo, resulta:

$$b_k = 2a_{k-1} = 2 \cdot \frac{2^{k-1} + (-1)^k}{3} = \frac{2^k + 2(-1)^k}{3} = 2^k \cdot \frac{1}{3} + (-1)^k \cdot \frac{2}{3},$$

que es la expresión buscada, tomando $r = 1/3$ y $s = 2/3$.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.17

Prueba que la siguiente sucesión es monótona y acotada. Calcula su límite.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \sqrt{4 + 3a_{n-1}}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Veamos, en primer lugar, que la sucesión es monótona creciente, demostrando que, para todo número natural $n \geq 1$, se verifica la relación $a_n - a_{n-1} > 0$, para lo cual usaremos el método de inducción.

En efecto, para $n = 1$, es claro que:

$$a_1 = \sqrt{4 + 3a_0} = \sqrt{4 + 3 \cdot 1} = \sqrt{7} > 1 = a_0,$$

luego, trasponiendo, resulta $a_1 - a_0 > 0$, lo que significa que la relación es válida cuando $n = 1$.

Supongamos ahora que la relación es cierta para un número natural $n \geq 1$, es decir, que se verifica la desigualdad $a_n - a_{n-1} > 0$, y veamos que, en tal caso, también ha de serlo para $n + 1$, o sea, debe satisfacerse la relación $a_{n+1} - a_n > 0$.

Por una parte, según la igualdad que define la sucesión, tomando los términos n y $n + 1$ y elevando al cuadrado ambos miembros, tenemos las igualdades:

$$\begin{cases} a_{n+1}^2 = 4 + 3a_n \\ a_n^2 = 4 + 3a_{n-1} \end{cases},$$

así que, restando miembro a miembro, cancelando, extrayendo factor común, y aplicando la hipótesis de inducción, llegamos a:

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \cancel{4} + 3a_n - \cancel{4} - 3a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - a_n^2 = 3(a_n - a_{n-1}) > 3 \cdot 0 \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - a_n^2 > 0.$$

Por otra parte, aplicando la conocida identidad algebraica y teniendo en cuenta esta última desigualdad, resulta:

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) > 0,$$

lo que se traduce en que los números $a_{n+1} + a_n$ y $a_{n+1} - a_n$ tienen el mismo signo, ya que su producto es positivo. Pero, como es claro a partir de la definición de a_n , todos los términos de esta sucesión son positivos, lo que implica que la suma de dos cualesquiera de ellos también lo es; por tanto, $a_{n+1} + a_n$ es positivo y, por lo dicho, $a_{n+1} - a_n$ también tiene que serlo, de manera que ha de ser $a_{n+1} - a_n > 0$, que es, precisamente, lo que queríamos demostrar.

Así pues, por inducción, podemos afirmar que la desigualdad $a_{n+1} - a_n > 0$ se satisface para todo número natural $n \geq 1$, lo que significa que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente.

Para ver que la sucesión está acotada, solo hay que probar que lo está superiormente, ya que, al ser creciente, es obvio que, para todo natural $n \geq 1$ se cumple $a_0 < a_n$, lo que significa que $a_n > 1$, para todo número natural $n \geq 1$, estando por tanto la sucesión acotada inferiormente. Veamos que, efectivamente, está acotada superiormente.

Fijado un número natural cualquiera n , partiendo de la igualdad:

$$a_{n+1}^2 = 4 + 3a_n,$$

trasponiendo, llegamos a:

$$a_{n+1} = \frac{4 + 3a_n}{a_{n+1}},$$

de donde, al ser $a_n < a_{n+1}$, se sigue:

$$a_{n+1} = \frac{4 + 3a_n}{a_{n+1}} < \frac{4 + 3a_{n+1}}{a_{n+1}},$$

y, operando, resulta:

$$a_{n+1} < \frac{4 + 3a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{4}{a_{n+1}} + \frac{3a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{4}{a_{n+1}} + 3.$$

Como, además, $1 < a_{n+1}$ (1 es la cota inferior vista antes), trasponiendo, tenemos:

$$\frac{1}{a_{n+1}} < 1,$$

lo que permite establecer la relación:

$$a_{n+1} < \frac{4}{a_{n+1}} + 3 = 4 \frac{1}{a_{n+1}} + 3 < 4 \cdot 1 + 3 = 7,$$

que prueba que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente, siendo el número 7 una cota superior.

Ahora, como $\{a_n\}$ es monótona creciente y acotada, necesariamente debe ser convergente, por lo que podemos asegurar la existencia de un número, digamos L , tal que:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Tomando límite en la igualdad:

$$a_{n+1} = \sqrt{4 + 3a_n},$$

y teniendo en cuenta que a_n y a_{n+1} tienen el mismo límite, pues son dos términos de una misma sucesión, llegamos a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4 + 3a_n} \Leftrightarrow L = \sqrt{4 + 3L},$$

de donde, operando y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante, se sigue:

$$L^2 = 4 + 3L \Leftrightarrow L^2 - 3L - 4 = 0 \Leftrightarrow L = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} L = 4 \\ L = -1 \end{cases}.$$

Pero todos los términos de la sucesión $\{a_n\}$ son positivos, lo que hace imposible la igualdad $L = -1$, y, en consecuencia, $L = 4$ (que es realmente una solución de la ecuación) es el límite pedido.

(Oposiciones de Secundaria, 2009, y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 3.18

Calcula el número máximo de términos de una sucesión tal que la suma de cualesquiera 7 términos consecutivos es negativa y la suma de cualesquiera 11 términos consecutivos es positiva.

Sea $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión que verifica las condiciones del enunciado, y sea $k \geq 1$ un número natural cualquiera. Para cada p y q naturales, denotemos por $S(p, q)$ la suma de q términos consecutivos de la sucesión $\{a_n\}$, comenzando en el término a_p . Entonces, por las hipótesis del enunciado, se verifican las relaciones:

$$\begin{cases} S(k, 11) = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} + a_{k+5} + a_{k+6} + a_{k+7} + a_{k+8} + a_{k+9} + a_{k+10} > 0 \\ S(k, 7) = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} + a_{k+5} + a_{k+6} < 0 \end{cases},$$

por lo que la diferencia $S(k, 11) - S(k, 7)$ debe ser un número positivo (tengamos en cuenta que restar un número negativo es equivalente a sumar su valor absoluto, de modo que, realmente, estamos sumando dos números positivos). Pero, cancelando términos, tenemos:

$$S(k, 11) - S(k, 7) = a_{k+7} + a_{k+8} + a_{k+9} + a_{k+10},$$

de donde se sigue:

$$S(k + 7, 4) = a_{k+7} + a_{k+8} + a_{k+9} + a_{k+10} > 0,$$

lo que significa que la suma de cuatro términos consecutivos de $\{a_n\}$, a partir del término a_{k+7} , es positiva, y, al ser $k \geq 1$ un número natural cualquiera, resulta que esta afirmación es válida para cualesquiera cuatro términos consecutivos, a partir del octavo.

Ahora, según el enunciado, el número $S(k+7, 7)$ es negativo, por lo que, considerando conjuntamente las relaciones:

$$\begin{cases} S(k+7, 7) = a_{k+7} + a_{k+8} + a_{k+9} + a_{k+10} + a_{k+11} + a_{k+12} + a_{k+13} < 0 \\ S(k+7, 4) = a_{k+7} + a_{k+8} + a_{k+9} + a_{k+10} > 0 \end{cases}$$

y restando, llegamos a la conclusión de que el número $S(k+7, 7) - S(k+7, 4)$ es negativo (estamos restando un número positivo de un número negativo), siendo, claramente:

$$S(k+7, 7) - S(k+7, 4) = a_{k+11} + a_{k+12} + a_{k+13} = S(k+11, 3).$$

Así pues, hemos probado que la suma de tres términos consecutivos de $\{a_n\}$, a partir del término a_{k+11} , es negativa, y, como antes, al ser $k \geq 1$ un número natural cualquiera, esta afirmación debe ser cierta para cualesquiera tres términos consecutivos, a partir del duodécimo.

Empleando ahora las relaciones:

$$\begin{cases} S(k+11, 4) = a_{k+11} + a_{k+12} + a_{k+13} + a_{k+14} > 0 \\ S(k+11, 3) = a_{k+11} + a_{k+12} + a_{k+13} < 0 \end{cases},$$

ya demostradas, y restando, resulta que su diferencia, que es precisamente el término a_{k+14} , debe ser positivo (de nuevo estamos restando un número negativo de un número positivo), lo que se traduce en que todos los términos de la sucesión, a partir del decimoquinto, son positivos, puesto que $k \geq 1$ es un número natural cualquiera.

Así pues, tenemos que, en particular, en caso de que existan los términos a_{15} , a_{16} y a_{17} , estos deben ser positivos, lo que implica que su suma también ha de serlo. Pero antes habíamos probado que la suma de cualesquiera tres términos consecutivos, a partir del duodécimo, debe ser negativa, lo cual es una contradicción, de la que únicamente podemos «escapar» si no existiera el término a_{17} .

Por tanto, hemos llegado a la conclusión de que la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ no puede tener 17 términos, lo que significa que, como máximo, puede tener 16, lo que da respuesta al enunciado del problema.

(Oposiciones de Secundaria, examen de Universidad y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 3.19

Sabiendo que:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n},$$

calcula los valores del número complejo k para los que la ecuación $x^3 + kx - 4em = 0$ tiene una solución real.

En primer lugar, calcularemos el valor de m . Ello puede hacerse de varias maneras: usando la regla de la raíz, mediante una integral de Riemann, o empleando la fórmula de Stirling. Elegiremos esta última opción, por parecer la más sencilla.

Recordemos que la fórmula de Stirling establece:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n},$$

por lo que podemos escribir:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}}}{n},$$

y, extrayendo los factores n^n y e^{-n} de la raíz, simplificando y operando, resulta:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot e^{-1} \cdot \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1} \cdot \sqrt[2n]{2\pi n} = e^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}}. \quad (I)$$

Calculemos ahora, aparte, el valor de:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}},$$

que da lugar a una indeterminación del tipo ∞^0 .

Tomando logaritmos y aplicando sus propiedades, tenemos:

$$\ln A = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} \ln (2\pi n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (2\pi n)}{2n},$$

que es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hôpital y operando,

llegamos a:

$$\ln A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (2\pi n)}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\pi}{2n}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

luego, tomando exponenciales, queda $A = e^0 = 1$. Finalmente, sustituyendo el valor:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} = 1$$

en (I), resulta:

$$m = e^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} = e^{-1} \cdot 1 = e^{-1}.$$

Teniendo en cuenta el valor hallado de m , la ecuación dada en el enunciado queda $x^3 + kx - 4e^{-1} = 0$, es decir, $x^3 + kx - 4 = 0$.

Veamos ahora qué condiciones debe cumplir el complejo $k = a + bi$ para que esta ecuación tenga una solución real, como se pide en el enunciado.

Supongamos que $x = x_0$ es una solución real de la ecuación. Entonces:

$$x_0^3 + (a + bi)x_0 - 4 = 0,$$

y, operando e identificando partes reales e imaginarias en ambos miembros, se sigue:

$$x_0^3 + ax_0 + bx_0i - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 + ax_0 - 4 = 0 \\ bx_0 = 0 \end{cases}.$$

Ahora bien, puesto que el término independiente de la ecuación no es nulo, es claro que $x = 0$ no es solución, por lo que $x_0 \neq 0$. Entonces, la condición $bx_0 = 0$ se convierte en $b = 0$, lo que significa que k es un número real. Obsérvese también que la condición:

$$x_0^3 + ax_0 - 4 = 0$$

se convierte en la ecuación de partida, al considerar que k es real y que, por tanto, coincide con su parte real, a .

De este modo, hemos demostrado que si la ecuación dada tiene una solución real, entonces k es real, lo que responde a las expectativas del enunciado.

Sin embargo, es fácil ver que el recíproco también es cierto. Para ello, recordemos que, en una ecuación con coeficientes reales, las raíces complejas aparecen por parejas (si un número complejo es una raíz, entonces, su conjugado también lo es), por lo que, si un polinomio tiene grado impar, necesariamente debe tener alguna raíz real, ya que, en virtud del Teorema Fundamental del Álgebra, la ecuación tiene tantas raíces como el valor de su grado.

Así pues, en este caso, si k es real, entonces, la ecuación $x^3 + kx - 4 = 0$ tiene todos sus coeficientes reales, y es de grado impar, lo que garantiza que tiene una raíz real.

De este modo, el problema queda cerrado, aunque haremos una observación más antes de concluir.

Cabe preguntarse si realmente es necesario calcular el valor de m para responder a la pregunta planteada, ya que, como $n!$ toma valores naturales, para todo n , es claro que la expresión $\sqrt[n]{n!}$ se mantiene dentro del campo de los números reales, para todo n , por lo que, en caso de existir y ser finito el límite que lo define, el número m es real, y podemos seguir el mismo razonamiento empleado para llegar a la conclusión de que k debe ser real, aun desconociendo el valor de m . Por supuesto, si el límite no existe o es infinito, este modo de proceder no es válido, pero es que tal situación no es admisible, pues, en tal caso, el problema estaría mal planteado, ya que la ecuación dada no tendría sentido. Con esta idea, podemos decir que el cálculo efectivo de m sirve, más que para simplificar el problema, para verificar que está bien planteado, razón por la que hemos incluido aquí su cálculo, si bien podría entenderse como algo prescindible.

(Oposiciones de Secundaria, 2001)

Problema 3.20

Sea $P(x)$ una función polinómica de grado n con coeficientes reales, tal que la ecuación $P(x) = 0$ admite n raíces distintas $x_1, x_2, \dots, x_n$, ninguna de las cuales es nula.

a) Expresa en función de estas raíces las funciones $f(x)$ y $g(x)$, siendo:

$$f(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}, \quad g(x) = \frac{P''(x)}{P(x)} - \left(\frac{P'(x)}{P(x)} \right)^2.$$

b) Calcula los números S_{-1} , S_{-2} y S , donde:

$$S_{-1} = \sum_{j=1}^n x_j^{-1}, \quad S_{-2} = \sum_{j=1}^n x_j^{-2}, \quad S = \sum_{i < j} (x_i x_j)^{-1}.$$

Apartado a)

A partir de sus raíces, denotando su coeficiente principal por a_n , el polinomio $P(x)$ puede escribirse factorizado como $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, cuya derivada, $P'(x)$, es igual a:

$$a_n(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) + a_n(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_n) + \cdots + a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Por definición, podemos obtener $f(x)$ dividiendo cada sumando de $P'(x)$ por $P(x)$, resultando que $f(x)$ es igual a la expresión:

$$\frac{a_n(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)} + \frac{a_n(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)} + \cdots + \frac{a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})}{a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}.$$

Simplificando, llegamos a:

$$f(x) = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_n},$$

que podemos escribir abreviadamente como:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i},$$

que es una expresión de $f(x)$ en función de las raíces de $P(x)$, como se pide en el enunciado.

Por otra parte, para expresar $g(x)$ en función de estas raíces, operamos en la igualdad que define $g(x)$, resultando:

$$g(x) = \frac{P''(x)}{P'(x)} - \left(\frac{P'(x)}{P(x)} \right)^2 = \frac{P''(x)}{P'(x)} - \frac{P'(x)P'(x)}{P(x)P(x)} = \frac{P''(x)P(x) - P'(x)P'(x)}{P(x)P(x)}.$$

Ahora bien, como podemos observar, el último cociente es el resultado de derivar la función:

$$\frac{P'(x)}{P(x)},$$

que es precisamente $f(x)$, luego se verifica la igualdad $g(x) = f'(x)$. En consecuencia, usando la expresión de $f(x)$ antes obtenida, podemos escribir:

$$g(x) = f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i} \right),$$

y, derivando término a término, llegamos a:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{(x - x_i)^2},$$

que es la expresión de $g(x)$ pedida en el enunciado.

Apartado b)

Teniendo en cuenta las expresiones de $f(x)$ y $g(x)$ determinadas en el apartado anterior, es fácil observar que se satisfacen las igualdades:

$$S_{-1} = \sum_{j=1}^n x_j^{-1} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} = -\sum_{j=1}^n \frac{1}{0 - x_j} = -f(0),$$

$$S_{-2} = \sum_{j=1}^n x_j^{-2} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^2} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{(0 - x_j)^2} = -g(0),$$

así que, escribiendo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, teniendo en cuenta que, entonces, $P'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + (n-2)a_{n-2} x^{n-3} + \dots + 2a_2 x + a_1$ y $P''(x) = n(n-1) \cdot a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n-3} + (n-2)(n-3)a_{n-2} x^{n-4} + \dots + 2a_2$, resulta:

$$S_{-1} = -f(0) = -\frac{P'(0)}{P(0)} = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$S_{-2} = -g(0) = -\frac{P''(0)P(0) - P'(0)P'(0)}{P(0)P(0)} = -\frac{2a_2 a_0 - a_1^2}{a_0^2} = \frac{a_1^2 - 2a_2 a_0}{a_0^2}.$$

Obsérvese que los cocientes anteriores tienen sentido, ya que $a_0 \neq 0$, pues si fuera $a_0 = 0$, entonces, una de las raíces de $P(x)$ sería nula, al ser $P(x)$ un polinomio homogéneo, lo cual contradiría una de las hipótesis del enunciado.

Para calcular S , tendremos presente la conocida identidad algebraica que permite hallar el cuadrado de la suma de n monomios:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j,$$

la cual se transforma en:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-1} \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^{-2} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^{-1} x_j^{-1},$$

al sustituir a_i por $(x_i)^{-1}$, como es fácil de comprobar. Trasponiendo términos y aplicando las propiedades de las potencias, se sigue:

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^{-1} x_j^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^{-1} \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^{-2} \Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i x_j)^{-1} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-1} \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^{-2} \right],$$

lo cual, sustituyendo por las expresiones correspondientes, se traduce en:

$$S = \frac{1}{2} \left[(S_{-1})^2 - S_{-2} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{a_1}{a_0} \right)^2 - \frac{a_1^2 - 2a_2 a_0}{a_0^2} \right].$$

Por último, operando y simplificando, resulta:

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{a_1^2 - 2a_2a_0}{a_0^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_1^2 - a_1^2 + 2a_2a_0}{a_0^2} = \frac{2a_2a_0}{2a_0^2} = \frac{a_2}{a_0},$$

lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.21

Sea $P(x)$ un polinomio cualquiera de grado n . Se considera la ecuación:

$$\frac{x-a}{2} (P'(x) + P'(a)) + P(a) - P(x) = 0.$$

Demuestra que $x = a$ es una raíz múltiple. ¿Cuál es su multiplicidad?

Denotemos por m la multiplicidad de $x = a$ como raíz de la ecuación dada en el enunciado.

Considerando la función asociada a esta ecuación:

$$f(x) = \frac{x-a}{2} (P'(x) + P'(a)) + P(a) - P(x),$$

el problema consiste en demostrar que f , su derivada, y las derivadas sucesivas de f (hasta un cierto orden) se anulan en $x = a$, lo que haremos, sencillamente, realizando los cálculos correspondientes, como vemos a continuación.

En primer lugar:

$$f(a) = \frac{a-a}{2} (P'(a) + P'(a)) + \cancel{P(a)} - \cancel{P(a)} = 0(P'(a) + P'(a)) = 0,$$

luego $x = a$ es una raíz de la ecuación.

Derivando:

$$f'(x) = \frac{1}{2} (P'(x) + P'(a)) + \frac{x-a}{2} P''(x) - P'(x),$$

y, evaluando en $x = a$:

$$f'(a) = \frac{1}{2} (P'(a) + P'(a)) + \frac{a-a}{2} P''(a) - P'(a) = \cancel{\frac{1}{2} P'(a)} + 0P''(a) - P'(a) = P'(a) - P'(a) = 0,$$

por lo que $x = a$ es raíz de f' , y, por tanto, $m \geq 2$, lo que garantiza que $x = a$ es una raíz múltiple.

No obstante, a fin de determinar el valor de su multiplicidad, hemos de continuar con los cálculos.

Volviendo a derivar:

$$f''(x) = \frac{1}{2}P''(x) + \frac{1}{2}P''(x) + \frac{x-a}{2}P'''(x) - P''(x) = P''(x) + \frac{x-a}{2}P'''(x) - P''(x) = \frac{x-a}{2}P'''(x),$$

y, haciendo $x = a$:

$$f''(a) = \frac{a-a}{2}P'''(a) = 0P'''(a) = 0,$$

de donde se sigue $m \geq 3$.

Derivando nuevamente:

$$f'''(x) = \frac{1}{2}P'''(x) + \frac{x-a}{2}P^{IV}(x),$$

y, particularizando en $x = a$, resulta:

$$f'''(a) = \frac{1}{2}P'''(a) + \frac{a-a}{2}P^{IV}(a) = \frac{1}{2}P'''(a),$$

cuyo valor es desconocido, pues depende exclusivamente del polinomio P , que es muy general. Así pues, no sabemos si la tercera derivada de f se anula o no en $x = a$, por lo que no es posible determinar la multiplicidad de $x = a$ como raíz de la ecuación de partida, sin conocer su multiplicidad como raíz del polinomio P''' ; sí podemos decir, a la vista de los resultados, que, si denotamos por m_P la multiplicidad de $x = a$ como raíz de P''' , entonces, $m = m_P + 3$, lo que puede ser una respuesta a la pregunta planteada en el enunciado.

Por otro lado, en lo dicho anteriormente, no hemos tenido en cuenta el valor de n ; desde luego, los cálculos realizados y las conclusiones alcanzadas siguen siendo válidos incluso si n fuera tan pequeño que alguna de las funciones obtenidas al derivar sucesivamente resultara ser idénticamente nula, mientras que, en otro caso, el valor de n podría redundar en el de m_P , por lo que podemos decir que, al introducir el número m_P en la respuesta a la pregunta, no es necesario hacer discusiones sobre los posibles valores de n , de manera que, con lo visto, podemos dar por cerrado el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.22

Se considera el polinomio $P(x) = nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$. Prueba que $x = 1$ es una raíz de multiplicidad mayor o igual que 3.

En primer lugar, es claro que si $n = 0$, entonces, el polinomio dado en el enunciado se convierte en el polinomio nulo, por lo que el problema no tendría mucho sentido. Así pues, supondremos que $n \geq 1$.

Se trata de demostrar que tanto el polinomio $P(x)$ como su primera y segunda derivada se anulan en $x = 1$, lo cual haremos realizando los cálculos correspondientes.

Por su parte, $P(1) = n \cdot 1^{n+2} - (n+2) \cdot 1^{n+1} + (n+2) \cdot 1 - n = n - n - 2 + n + 2 - n = 0$, luego, efectivamente, $x = 1$ es una raíz de $P(x)$.

Derivando, tenemos $P'(x) = n(n+2)x^{n+1} - (n+2)(n+1)x^n + n + 2$, luego en $x = 1$, $P'(1) = n(n+2) \cdot 1^{n+1} - (n+2)(n+1) \cdot 1^n + n + 2 = n^2 + 2n - n^2 - 3n - 2 + n + 2 = 0$, como queríamos ver.

Derivando nuevamente, tenemos $P''(x) = n(n+2)(n+1)x^n - (n+2)(n+1)nx^{n-1}$, que sigue siendo un polinomio, puesto que estamos suponiendo que $n \geq 1$. Evaluando esta función polinómica en $x = 1$, $P''(1) = n(n+2)(n+1) \cdot 1^n - (n+2)(n+1)n \cdot 1^{n-1} = 0$, como esperábamos.

Así pues, con lo dicho, queda claro que $x = 1$ es una raíz de $P(x)$ de multiplicidad 3, al menos, como queríamos demostrar, lo que cierra el problema.

Sin embargo, cabe la posibilidad de ver que la multiplicidad no es mayor de 3, pues la tercera derivada no se anula en $x = 1$, como vemos a continuación.

Derivando otra vez, $P'''(x) = n(n+2)(n+1)nx^{n-1} - (n+2)(n+1)n(n-1)x^{n-2}$, y en $x = 1$, $P'''(1) = n(n+2)(n+1)n - (n+2)(n+1)n(n-1) = (n+2)(n+1)n(n - n + 1) = (n+2)(n+1)n$, que es mayor que cero, al ser $n \geq 1$.

Por tanto, dando una respuesta más amplia que la pedida en el enunciado, podemos decir que la multiplicidad de $x = 1$ como raíz de $P(x)$ es exactamente igual a 3.

(Examen de Universidad)

Problema 3.23

Discute, en función del valor de a , la existencia de soluciones de la ecuación $a^x = x^a$, siendo a y x números reales estrictamente positivos.

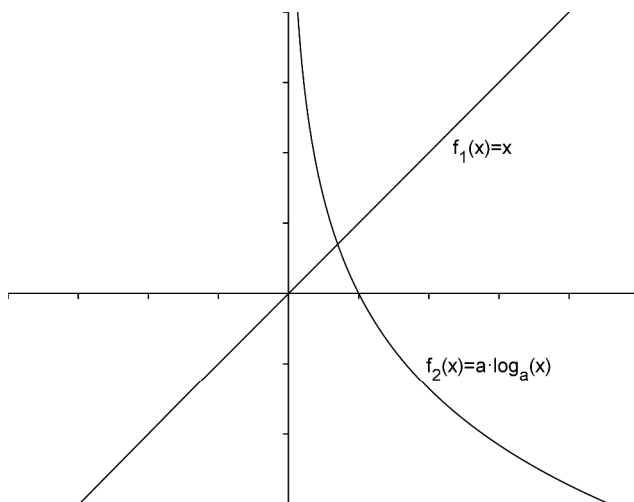
En primer lugar, es claro que la ecuación admite la solución $x = a$, para cualquier valor de a estrictamente positivo, por lo que podemos afirmar que la ecuación tiene, al menos, una solución. Queda, pues, estudiar si existen valores de a para los que la ecuación tenga más de una solución.

Evidentemente, si $a = 1$, entonces, la ecuación dada tiene una única solución, $x = 1$ (es realmente la solución $x = a$). Así pues, en lo siguiente, podemos suponer $a \neq 1$, y, en consecuencia, podemos tomar logaritmo en base a en ambos miembros de la ecuación,

resultando $\log_a(a^x) = \log_a(x^a)$, que es equivalente a $x = \log_a(x^a)$, y, aplicando una propiedad de los logaritmos, llegamos a la ecuación $x = a \cdot \log_a x$.

Denotando $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = a \cdot \log_a x$, el problema se puede plantear ahora en términos funcionales, pues consiste en estudiar la posición relativa de las gráficas de estas dos funciones, concretamente en determinar el número de puntos en que se cortan, dependiendo de los valores de a . Ahora bien, puesto que la gráfica de la función logarítmica es esencialmente distinta para valores de a pertenecientes al intervalo $(0,1)$ y para valores mayores que 1, es razonable distinguir estos dos casos, y estudiarlos por separado, como haremos a continuación.

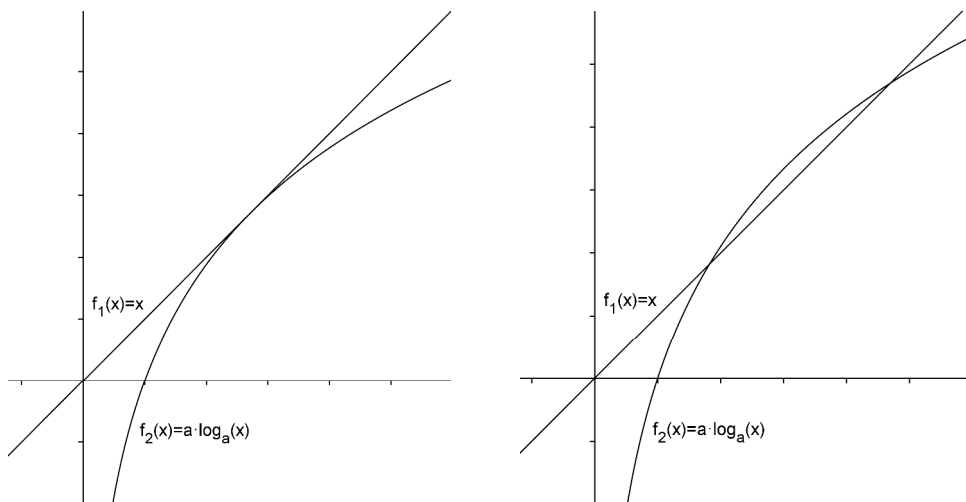
Si $0 < a < 1$, entonces, las gráficas de las funciones presentan la posición relativa que vemos en el gráfico, resultando claro que tienen un único punto de corte.



Observemos que, además de llegar a esta conclusión de manera intuitiva, a partir de la gráfica, puede hacerse de forma más rigurosa, observando que $f_1(x)$ es estrictamente creciente, $f_2(x)$ es estrictamente decreciente, ambas son funciones continuas, y se verifican las condiciones:

$$\begin{cases} f_1(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} a \log_a x = +\infty \end{cases}, \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a \log_a x = -\infty \end{cases}$$

Si, por el contrario, $a > 1$, entonces, a partir de la representación gráfica de ambas funciones, podemos observar que pueden darse dos situaciones: que $f_1(x)$ sea tangente a $f_2(x)$ en un punto (lo que daría lugar a una solución doble de la ecuación), o que se corten en dos puntos, como se muestra en los gráficos (tengamos en cuenta que la posibilidad de que no se corten está descartada, pues ya sabemos que la ecuación tiene, al menos, una solución).



Evidentemente, si se da la primera situación, la solución doble ha de ser $x = a$, lo cual se traduce en que el punto de tangencia está en la abscisa $x = a$, y, en consecuencia, tanto las funciones como sus respectivas derivadas deben coincidir en este punto, lo que, en particular, nos lleva a:

$$f_1'(a) = f_2'(a) \Leftrightarrow 1 = \frac{a}{a \cdot \ln a} \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e.$$

Así pues, vemos que la ecuación tiene una solución doble si, y solo si, $a = e$, y, como la otra posibilidad es que tenga dos soluciones, en caso de que sea $a \neq e$, la ecuación debe tener dos soluciones.

Recapitulando, podemos decir que si a pertenece al intervalo $(0, 1]$, entonces, la ecuación tiene una única solución, dada por $x = a$; si $a = e$, existe una única solución, precisamente $x = e$, de multiplicidad 2; y, por último, si $a > 1$ y $a \neq e$, la ecuación tiene dos soluciones distintas.

(Oposiciones de Secundaria, 2006, y examen de Universidad)

Problema 3.24

Si r , s y t son las tres raíces de la ecuación $x(x-2)(3x-7) = 2$, se pide:

- Prueba que las tres raíces son positivas.
- Calcula $\arctg r + \arctg s + \arctg t$.

Apartado a)

Consideremos la función asociada a la ecuación, $f(x) = x(x-2)(3x-7) - 2$, que, claramente, es continua. Además, un sencillo cálculo permite comprobar que se verifican las

igualdades $f(0) = -2$, $f(1) = 2$, $f(2) = -2$ y $f(3) = 4$, de manera que los valores de la función van alternando el signo en estos puntos, y, en consecuencia, la función f está en las hipótesis del teorema de Bolzano en los intervalos $[0,1]$, $[1,2]$ y $[2,3]$. Aplicando este teorema, podemos afirmar que existen tres números, digamos a , b y c , pertenecientes, respectivamente, a los intervalos abiertos $(0,1)$, $(1,2)$ y $(2,3)$, que verifican la relación $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, lo cual se traduce, como es evidente, en que a , b y c son soluciones de la ecuación dada en el enunciado. Como, además, esta ecuación es polinómica de tercer grado, resulta que, en virtud del Teorema Fundamental del Álgebra, tiene exactamente tres soluciones, por lo que ha de cumplirse que las soluciones r , s y t son las mismas que a , b y c , y, al ser estas tres positivas (pertenecen a intervalos situados en la parte positiva de la recta real), resulta que r , s y t son positivas, como se quería demostrar.

Apartado b)

Puesto que en la expresión que pretendemos calcular aparecen tres arcotangentes, podemos considerar la tangente de dicha expresión, a fin de deshacer las arcotangentes, lo cual podemos conseguir aplicando la conocida fórmula que permite expresar la tangente de la suma de dos ángulos en función de la tangente de los mismos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

resultando:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\operatorname{arctgr} + \operatorname{arctgs} + \operatorname{arctgt}) &= \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctgr}) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctgs} + \operatorname{arctgt})}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctgr})\operatorname{tg}(\operatorname{arctgs} + \operatorname{arctgt})} \Leftrightarrow \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctgr} + \operatorname{arctgs} + \operatorname{arctgt}) &= \frac{r + \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctgs}) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctgt})}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctgs})\operatorname{tg}(\operatorname{arctgt})}}{1 - r \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctgs}) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctgt})}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctgs})\operatorname{tg}(\operatorname{arctgt})}} = \frac{r + \frac{s + t}{1 - st}}{1 - r \frac{s + t}{1 - st}}. \end{aligned}$$

Operando, se sigue:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\operatorname{arctgr} + \operatorname{arctgs} + \operatorname{arctgt}) &= \frac{r + \frac{s + t}{1 - st}}{1 - r \frac{s + t}{1 - st}} = \frac{\frac{r - rst + s + t}{1 - st}}{1 - \frac{rs + rt}{1 - st}} = \frac{\frac{r + s + t - rst}{1 - st}}{\frac{1 - st - rs - rt}{1 - st}} \Leftrightarrow \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctgr} + \operatorname{arctgs} + \operatorname{arctgt}) &= \frac{\cancel{(1 - st)} (r + s + t - rst)}{\cancel{(1 - st)} (1 - st - rs - rt)} = \frac{r + s + t - rst}{1 - st - rs - rt} = \frac{r + s + t - rst}{1 - (st + rs + rt)}. \end{aligned}$$

Como podemos ver, en el último cociente aparecen unas operaciones «muy conocidas» entre las soluciones de la ecuación, que podemos relacionar con los coeficientes de la misma, mediante la aplicación de las relaciones de Cardano-Viète.

Para ello, antes necesitamos expresar la función polinómica $f(x)$ en forma canónica, lo cual podemos lograr sin más que efectuar los cálculos correspondientes, resultando $f(x) = 3x^3 - 13x^2 + 14x - 2$.

Así, por las ecuaciones de Cardano-Viète, tenemos:

$$\begin{cases} r + s + t = \frac{13}{3} \\ st + rs + rt = \frac{14}{3} \\ rst = \frac{2}{3} \end{cases},$$

y, sustituyendo en la expresión anterior y operando, resulta:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctgr} + \operatorname{arctgs} + \operatorname{arctgt}) = \frac{r + s + t - rst}{1 - (st + rs + rt)} = \frac{\frac{13}{3} - \frac{2}{3}}{1 - \frac{14}{3}} = \frac{\frac{11}{3}}{-\frac{11}{3}} = -1.$$

Por último, tomando arcotangente, llegamos a:

$$\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(\operatorname{arctgr} + \operatorname{arctgs} + \operatorname{arctgt})] = \operatorname{arctg}(-1) \Leftrightarrow \operatorname{arctgr} + \operatorname{arctgs} + \operatorname{arctgt} = -\frac{\pi}{4},$$

que es justamente el valor que pretendíamos determinar.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.25

Dada la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, con soluciones r_1 , r_2 y r_3 , se sabe que se verifica la relación $-a + b + c = 1$. Halla el valor de $\operatorname{arctgr}_1 + \operatorname{arctgr}_2 + \operatorname{arctgr}_3$.

Como vemos, se trata de un problema prácticamente idéntico al apartado b) del problema anterior, por lo que utilizaremos los resultados obtenidos allí para resolverlo. En concreto, nos serviremos de la expresión:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctgr}_1 + \operatorname{arctgr}_2 + \operatorname{arctgr}_3) = \frac{r_1 + r_2 + r_3 - r_1 r_2 r_3}{1 - (r_2 r_3 + r_1 r_2 + r_1 r_3)},$$

a la que llegamos antes, y usaremos asimismo las relaciones de Cardano-Viète, que proporcionan el sistema:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -a \\ r_2 r_3 + r_1 r_2 + r_1 r_3 = b, \\ r_1 r_2 r_3 = -c \end{cases}$$

de manera que, sustituyendo, tenemos:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctgr}_1 + \operatorname{arctgr}_2 + \operatorname{arctgr}_3) = \frac{-a + c}{1 - b}.$$

Ahora, según el enunciado, se verifica $-a + b + c = 1$, por lo que, trasponiendo, se sigue $-a + c = 1 - b$, y sustituyendo en la expresión anterior y simplificando, llegamos a:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctgr}_1 + \operatorname{arctgr}_2 + \operatorname{arctgr}_3) = \frac{1 - b}{1 - b} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{arctgr}_1 + \operatorname{arctgr}_2 + \operatorname{arctgr}_3) = 1.$$

Finalmente, tomando arcotangente en ambos miembros de esta última igualdad, resulta:

$$\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(\operatorname{arctgr}_1 + \operatorname{arctgr}_2 + \operatorname{arctgr}_3)] = \operatorname{arctg} 1 \Leftrightarrow \operatorname{arctgr}_1 + \operatorname{arctgr}_2 + \operatorname{arctgr}_3 = \frac{\pi}{4},$$

que es el resultado buscado.

(Oposiciones de Secundaria, 2010)

Problema 3.26

Si $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales tales que:

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

demuestra que la ecuación $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$ tiene al menos una raíz real.

Consideremos la función real de variable real dada por:

$$f(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

que claramente es indefinidamente derivable en toda la recta real, al ser una función polinómica. Además, se cumple $f(0) = 0$, por ser homogénea, y $f(1) = 0$, por la hipótesis del enunciado, ya que:

$$f(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1}.$$

Por tanto, la función f está en las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo cerrado $[0,1]$. Aplicando este teorema, podemos afirmar que existe un número real perteneciente al intervalo abierto $(0,1)$, digamos c , tal que $f'(c) = 0$.

Ahora, derivando y simplificando, tenemos:

$$f'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

luego:

$$f'(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n = 0,$$

lo cual se traduce en que c es una solución de la ecuación $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$, y ya tenemos probado que tiene al menos una raíz real, lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.27

Sea f una función real definida en el intervalo (a,b) , y sea x un punto interior a este intervalo. Consideremos las dos igualdades:

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x)| = 0 \quad (I)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x-h)| = 0 \quad (II)$$

- a) Demuestra que (I) siempre implica (II).
b) Da un ejemplo en que (II) sea cierta pero (I) no.

Como podemos ver, la igualdad (I) equivale a decir que f es continua en el punto x , mientras que la igualdad (II) se traduce en que la función f no presenta un salto en este punto. Así pues, tiene sentido pensar que (I) implica (II), ya que una función continua en un punto no debe tener un salto en dicho punto, mientras que es posible encontrar funciones que no tengan salto en un punto, pero que no sean continuas en él, pues bastará con considerar una función que presente una discontinuidad evitable, lo cual constituye un ejemplo de una función que verifica (II), pero no (I). A continuación lo veremos con más detalle.

Supongamos que f verifica la condición (I). Entonces, por definición:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |h| < \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon / 2.$$

Así pues, dados $\varepsilon > 0$ y h tal que $|h| < \delta$, sumando y restando la expresión $f(x)$, y aplicando la desigualdad triangular, podemos establecer la acotación:

$$|f(x+h) - f(x-h)| = |f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)| \leq |f(x+h) - f(x)| + |f(x) - f(x-h)|,$$

de donde, teniendo en cuenta lo dicho antes, se sigue:

$$|f(x+h) - f(x-h)| \leq |f(x+h) - f(x)| + |f(x) - f(x-h)| < \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon,$$

de modo que hemos probado que se satisface que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |h| < \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x-h)| < \varepsilon,$$

lo cual es equivalente a decir que la igualdad (II) es cierta.

Así pues, hemos probado que (I) implica (II), lo que da respuesta al enunciado del apartado a).

Para responder al apartado b), teniendo en cuenta el comentario anterior, podemos considerar, por ejemplo, la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases},$$

en el punto $x = 1$.

Como podemos comprobar, en este caso, tenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x-h)| = \lim_{h \rightarrow 0} |f(1+h) - f(1-h)| = \lim_{h \rightarrow 0} |1+h - (1-h)| = \lim_{h \rightarrow 0} |2h| = 0,$$

lo que significa que, en efecto, f cumple (II) para $x = 1$, pero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} |f(1+h) - f(1)| = \lim_{h \rightarrow 0} |1+h - 0| = 1 \neq 0,$$

y, por tanto, f no cumple (I).

(Examen de Universidad)

Problema 3.28

Sea f una función real continua en el intervalo I , y sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ puntos cualesquiera de I . Demuestra que existe un punto c , interior a I , tal que:

$$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Puesto que el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es finito, podemos elegir dos puntos de este conjunto, digamos x_m y x_M , tales que:

$$f(x_m) = \min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \text{ y } f(x_M) = \max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}.$$

Entonces, para cualquier valor de i comprendido entre 1 y n , se verifica $f(x_m) \leq f(x_i)$ y $f(x_M) \geq f(x_i)$, por lo que, sumando miembro a miembro estas desigualdades, variando i desde 1 hasta n , resulta:

$$\sum_{i=1}^n f(x_m) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad \sum_{i=1}^n f(x_M) \geq \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Ahora, teniendo en cuenta que los términos presentes en el sumatorio del primer miembro de cada desigualdad no dependen de i , es claro que estos sumatorios expresan la suma de la misma cantidad n veces, por lo que las relaciones anteriores se pueden escribir como:

$$nf(x_m) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad nf(x_M) \geq \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

que podemos expresar encadenadas, resultando:

$$nf(x_m) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq nf(x_M).$$

Dividiendo por n cada miembro de esta cadena de desigualdades y simplificando, se sigue:

$$\frac{nf(x_m)}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n} \leq \frac{nf(x_M)}{n} \Leftrightarrow f(x_m) \leq \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n} \leq f(x_M),$$

que es equivalente a:

$$f(x_m) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq f(x_M),$$

expresión que permite ver el cociente:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

como un valor comprendido entre $f(x_m)$ y $f(x_M)$.

Ahora bien, puesto que la función f es continua en I , y los puntos x_m y x_M están en este intervalo, como consecuencia del teorema de Bolzano, sabemos que f alcanza todos los valores comprendidos entre $f(x_m)$ y $f(x_M)$, lo que se traduce en que existe un punto de I , digamos c , tal que:

$$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

que es lo que queríamos demostrar.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.29

Si $0 < x < y < \pi/2$, demuestra que $(y-x)\cos y < \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x < (y-x)\cos x$.

Dados x e y en las condiciones del enunciado, es claro que la función $f(t) = \operatorname{sen} t$ está en las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[x, y]$, por lo que sabemos que existe un punto en el intervalo (x, y) , digamos c , tal que $f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x)$, esto es, tal que $\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x = \cos c \cdot (y - x)$, y, trasponiendo, resulta que c cumple:

$$\cos c = \frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{y - x}.$$

Por otro lado, como es sabido, la función coseno es decreciente en el intervalo $(0, \pi/2)$, así que debe satisfacerse la relación $\cos y < \cos c < \cos x$, de donde, sustituyendo la igualdad anterior, se sigue:

$$\cos y < \frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{y - x} < \cos x,$$

y, multiplicando por $y - x$ y simplificando, llegamos finalmente a:

$$(y-x)\cos y < \frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{\cancel{y-x}} (\cancel{y-x}) < (y-x)\cos x \Leftrightarrow$$

$$(y-x)\cos y < \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x < (y-x)\cos x,$$

que es precisamente la relación que pretendíamos probar, lo que concluye el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.30

Calcula la siguiente suma:

$$S = Cha + Ch(a + b) + Ch(a + 2b) + Ch(a + 3b) + \cdots + Ch[a + (n - 1)b].$$

Como es sabido, el coseno hiperbólico está definido, para todo real x , mediante la expresión:

$$\text{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

por lo que, a partir de ella, podemos escribir la suma dada en el enunciado como:

$$S = \frac{e^a + e^{-a}}{2} + \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} + \frac{e^{a+2b} + e^{-(a+2b)}}{2} + \frac{e^{a+3b} + e^{-(a+3b)}}{2} + \cdots + \frac{e^{a+(n-1)b} + e^{-[a+(n-1)b]}}{2}.$$

Extrayendo $1/2$ como factor común, y reorganizando los sumandos, tenemos:

$$S = \frac{1}{2} \left(\underbrace{e^a + e^{a+b} + e^{a+2b} + e^{a+3b} + \cdots + e^{a+(n-1)b}}_{\text{PG1}} + \underbrace{e^{-a} + e^{-(a+b)} + e^{-(a+2b)} + e^{-(a+3b)} + \cdots + e^{-[a+(n-1)b]}}_{\text{PG2}} \right),$$

expresión que, como podemos ver, incluye dentro del paréntesis la suma de los primeros términos de dos progresiones geométricas, denotadas por PG1 y PG2, siendo PG1 la progresión geométrica de primer término e^a y razón e^b , y PG2 la progresión geométrica de primer término e^{-a} y razón e^{-b} .

Aplicando, pues, la conocida fórmula que permite sumar los primeros términos de una progresión geométrica, resulta:

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{a+nb} - e^a}{e^b - 1} + \frac{e^{-(a+nb)} - e^{-a}}{e^{-b} - 1} \right),$$

y, extrayendo e^a como factor común en el primer cociente y e^{-a} en el segundo, llegamos a:

$$S = \frac{1}{2} \left(e^a \frac{e^{nb} - e^0}{e^b - e^0} + e^{-a} \frac{e^{-nb} - e^0}{e^{-b} - e^0} \right).$$

Ahora bien, como pretendemos encontrar una expresión más «compacta» de S , mediante la introducción de funciones hiperbólicas, necesitamos «nivelar» las expresiones de cada cociente, a fin de que aparezcan las exponenciales de los mismos números, pero alternando los signos, objetivo que podemos lograr hallando la media aritmética de los exponentes de las potencias situadas en los mismos numeradores y en los mismos denominadores, escribiendo las exponenciales cuyos exponentes son

las correspondientes medias aritméticas como factores comunes, y «compensando» las que queden dentro de los paréntesis, como vemos a continuación:

$$S = \frac{1}{2} \left(e^a \frac{e^{\frac{nb}{2}} \left(e^{\frac{nb}{2}} - e^{-\frac{nb}{2}} \right)}{e^{\frac{b}{2}} \left(e^{\frac{b}{2}} - e^{-\frac{b}{2}} \right)} + e^{-a} \frac{e^{-\frac{nb}{2}} \left(e^{\frac{nb}{2}} - e^{-\frac{nb}{2}} \right)}{e^{-\frac{b}{2}} \left(e^{\frac{b}{2}} - e^{-\frac{b}{2}} \right)} \right).$$

Aclaremos esto: en el numerador del primer cociente hemos dejado fuera del paréntesis la exponencial de exponente $nb/2$, que hemos calculado como la media aritmética de los exponentes de las potencias situadas en el numerador del primer cociente, que eran nb y 0 ; de la misma manera, el exponente del factor común del denominador del primer cociente, que es $b/2$, se ha obtenido haciendo la media aritmética de los exponentes correspondientes, que eran b y 0 ; con el segundo cociente se ha procedido de igual manera.

Ahora, aplicando las propiedades de las potencias, dividiendo los dos numeradores y los dos denominadores por 2, y teniendo en cuenta la expresión que define el seno hiperbólico, dada, para todo x real, por:

$$\text{Sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

la anterior expresión de S nos lleva a:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(e^{a + \frac{nb}{2} - \frac{b}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{nb}{2}} - e^{-\frac{nb}{2}}}{e^{\frac{b}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}} + e^{-a - \frac{nb}{2} + \frac{b}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{nb}{2}} - e^{-\frac{nb}{2}}}{e^{\frac{b}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}} \right) \Leftrightarrow \\ S &= \frac{1}{2} \left(e^{a + \frac{(n-1)b}{2}} \cdot \frac{\frac{e^{\frac{nb}{2}} - e^{-\frac{nb}{2}}}{2}}{\frac{e^{\frac{b}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}}{2}} + e^{-a - \frac{(n-1)b}{2}} \cdot \frac{\frac{e^{\frac{nb}{2}} - e^{-\frac{nb}{2}}}{2}}{\frac{e^{\frac{b}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}}{2}} \right) \Leftrightarrow \\ S &= \frac{1}{2} \left(e^{a + \frac{(n-1)b}{2}} \cdot \frac{\text{Sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\text{Sh}\left(\frac{b}{2}\right)} + e^{-a - \frac{(n-1)b}{2}} \cdot \frac{\text{Sh}\left(-\frac{nb}{2}\right)}{\text{Sh}\left(-\frac{b}{2}\right)} \right). \end{aligned}$$

Por otra parte, al ser el seno hiperbólico una función impar (esto es, para todo real x , se cumple la igualdad $\text{Sh}(-x) = -\text{Sh}(x)$, como es fácil de comprobar a partir de su

definición), podemos «extraer» el signo de los senos hiperbólicos del segundo cociente, y cancelar el del numerador con el del denominador, resultando:

$$S = \frac{1}{2} \left(e^{a + \frac{(n-1)b}{2}} \cdot \frac{\text{Sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\text{Sh}\left(\frac{b}{2}\right)} + e^{-a - \frac{(n-1)b}{2}} \cdot \frac{-\text{Sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{-\text{Sh}\left(\frac{b}{2}\right)} \right) \Leftrightarrow$$

$$S = \frac{1}{2} \left(e^{a + \frac{(n-1)b}{2}} \cdot \frac{\text{Sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\text{Sh}\left(\frac{b}{2}\right)} + e^{-a - \frac{(n-1)b}{2}} \cdot \frac{\text{Sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\text{Sh}\left(\frac{b}{2}\right)} \right).$$

Finalmente, extrayendo factores comunes y teniendo presente la definición del coseno hiperbólico, obtenemos:

$$S = \frac{\text{Sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\text{Sh}\left(\frac{b}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{a + \frac{(n-1)b}{2}} + e^{-a - \frac{(n-1)b}{2}} \right) = \frac{\text{Sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\text{Sh}\left(\frac{b}{2}\right)} \cdot \frac{e^{a + \frac{(n-1)b}{2}} + e^{-a - \frac{(n-1)b}{2}}}{2} \Leftrightarrow$$

$$S = \frac{\text{Sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\text{Sh}\left(\frac{b}{2}\right)} \cdot \text{Ch}\left(a + \frac{(n-1)b}{2}\right),$$

expresión que, aun no siendo demasiado simple, es lo suficientemente compacta como para considerarla una buena respuesta al problema planteado.

(Examen de Universidad)

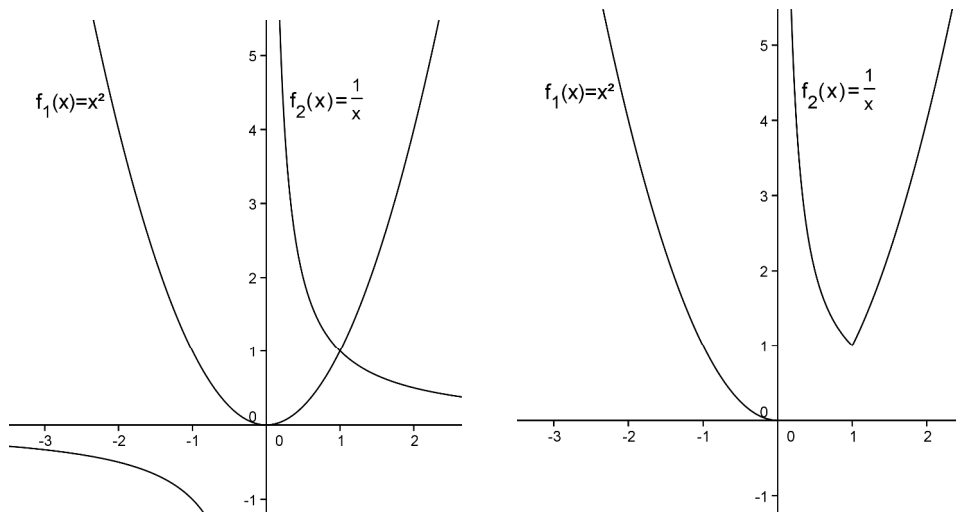
Problema 3.31

Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \max\{x^2, 1/x\}.$$

Si representamos las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = 1/x$ en un mismo sistema de referencia, como vemos en el gráfico de la izquierda, es sencillo observar que la gráfica de f ha de ser la que resulta de seleccionar, en cada tramo, la gráfica que esté por encima, que podemos ver en el gráfico de la derecha, lo que, a su vez, permite escribir f

como una función a trozos, teniendo en cuenta la abscisa del punto en que se cortan las gráficas de f_1 y f_2 , que es $x = 1$, como es muy fácil de comprobar.



Así pues, la expresión de f como función a trozos es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in (0, 1) \end{cases}.$$

A partir de la gráfica (de manera intuitiva) y de la definición de f como función a trozos (de manera más rigurosa), es claro que f es continua en toda la recta real, salvo en $x = 0$, donde presenta una discontinuidad de salto infinito, con continuidad lateral por la izquierda, ya que se cumplen las condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \\ f(0) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1. \\ f(1) = 1 \end{array} \right.$$

En cuanto al estudio de la derivabilidad, podemos decir que, como es claro, cada función parcial es derivable en el interior de su correspondiente subdominio (siendo, por tanto, f derivable en estos conjuntos), mientras que f no es derivable en los puntos de nexo; no lo es en $x = 0$, porque no es continua en este punto (recordemos que si una función es derivable en un punto, entonces, ha de ser continua en dicho punto, por lo que, de no ser continua, resulta imposible que sea derivable), y tampoco en $x = 1$, ya que la gráfica revela la presencia de un «pico» en esta abscisa, si bien esta es una cuestión que hemos de probar con más rigor, como haremos a continuación,

estudiando el comportamiento en $x = 1$ de la derivada a trozos de f , que es la función dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } x \in (0, 1) \end{cases}.$$

En efecto, considerando los límites laterales de esta función en el punto $x = 1$, podemos ver que no coinciden, pues:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{1}{x^2} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2,$$

lo que deja patente que la derivada a trozos de f no puede extenderse a $x = 1$, y, en consecuencia, f no es derivable en este punto, como habíamos adelantado.

Con todo lo dicho, recapitulando, podemos afirmar que f es continua en toda la recta real, salvo en $x = 0$, y que es derivable en toda la recta real, salvo en los puntos $x = 0$, $x = 1$, lo que concluye el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.32

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x},$$

se pide:

a) Representala.

b) Halla, según los valores del número real a , el número de soluciones de la ecuación $x - a \cdot \ln x = 0$.

Apartado a)

En primer lugar, es claro que el dominio de f es:

$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty),$$

donde, además de estar definida, f es derivable.

En cuanto a los valores a los que tiende la función en los puntos de frontera de $\text{Dom}(f)$, podemos decir que se verifican las igualdades:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'H}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty,$$

lo que nos permite asegurar, en particular, que f tiene una asíntota vertical en la recta de ecuación $x = 1$, y que no tiene asíntota horizontal. Además:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0,$$

por lo que f tampoco tiene asíntota oblicua.

Por otro lado, al no estar definida para $x = 0$, es obvio que f no tiene punto de corte con el eje OY , mientras que la ecuación $f(x) = 0$ solo arroja la solución $x = 0$, por lo que tampoco corta al eje OX .

Estudiemos ahora la derivada de f , a fin de determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y localizar los posibles extremos.

Derivando y simplificando, tenemos:

$$f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2},$$

e, igualando a cero, obtenemos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e,$$

lo que se traduce en que f tiene un único punto crítico, en $x = e$.

Derivando por segunda vez y operando, tenemos:

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x)^2 - (\ln x - 1) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{\frac{(\ln x)^2 - (\ln x - 1) \cdot 2 \ln x}{x}}{(\ln x)^4} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{(\ln x)^2 - (\ln x - 1) \cdot 2 \ln x}{x(\ln x)^4} = \frac{(\ln x - 2 \ln x + 2) \cancel{\ln x}}{x(\ln x)^3 \cancel{\ln x}} = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3},$$

y, evaluando esta función en el punto crítico, resulta:

$$f''(e) = \frac{2 - \ln e}{e(\ln e)^3} = \frac{2 - 1}{e} = \frac{1}{e} > 0,$$

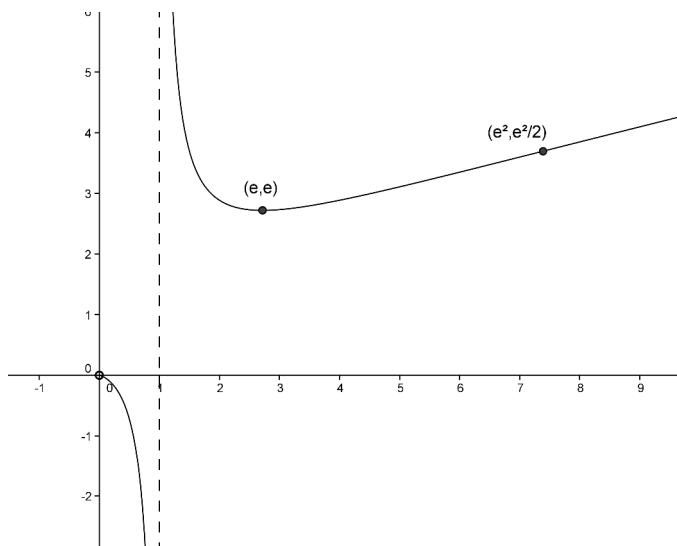
por lo que f tiene un mínimo relativo en $x = e$, donde toma el valor $f(e) = e/\ln e = e$.

Por otro lado, igualando a cero la segunda derivada, nos encontramos con:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2,$$

lo que indica que $x = e^2$ es un posible punto de inflexión, que, de hecho, lo es, pues, como podemos comprobar sin más que sustituir por un punto de cada intervalo, se cumple que la segunda derivada es positiva en el intervalo $(1, e^2)$, mientras que es negativa en $(0, 1)$ y en $(e^2, +\infty)$. Además, el valor de la función en el punto de inflexión es $f(e^2) = e^2/\ln e^2 = e^2/2$.

Con todo lo dicho, ya podemos hacer un esbozo de la gráfica de f , que queda como vemos a continuación:



Apartado b)

Trasponiendo términos en la ecuación dada en el enunciado, tenemos:

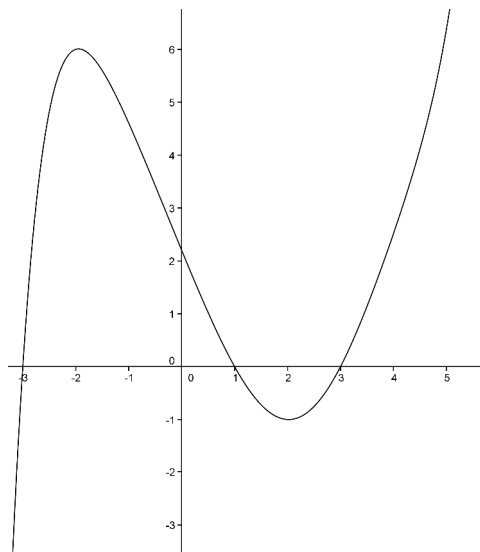
$$x - a \ln x = 0 \Leftrightarrow x = a \ln x \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x} = a \Leftrightarrow f(x) = a ,$$

de manera que el número de soluciones de la ecuación dada coincide con el número de veces que la función f corta a la función constante $g(x) = a$, que podemos calcular sin dificultad a partir de la gráfica construida en el apartado anterior. Como podemos ver, tenemos los siguientes resultados: si $a < 0$, entonces, existe un único punto de corte, por lo que existe una única solución de la ecuación, que pertenece al intervalo $(0,1)$; si $0 \leq a < e$, entonces, la ecuación no tiene solución, ya que las gráficas de estas funciones no se cortan; si $a = e$, entonces, la ecuación tiene una única solución, $x = e$, que es doble, ya que la recta $y = e$ es tangente a f en el punto de abscisa $x = e$, por alcanzarse en este punto el mínimo relativo; por último, si $a > e$, entonces, la ecuación tiene dos soluciones distintas, una en el intervalo $(1,e)$ y otra en la semirrecta $(e,+\infty)$.

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1977)

Problema 3.33

Estudia el crecimiento, el decrecimiento, los extremos relativos y la curvatura de una función desconocida, f , sabiendo que la gráfica de su derivada, f' , es la que se muestra a continuación:



Como podemos ver en la gráfica, la derivada de f corta al eje OX en los puntos de abscisa $x = -3$, $x = 1$ y $x = 3$, lo que significa que f' se anula en estas abscisas, y, por

tanto, los puntos críticos de f se sitúan en estos valores de x . Como, además, la derivada de f toma valores negativos en la semirrecta $(-\infty, -3)$ y en el intervalo $(1, 3)$, mientras que toma valores positivos en el intervalo $(-3, 1)$ y en la semirrecta $(3, +\infty)$, podemos asegurar que f es estrictamente creciente en $(-3, 1) \cup (3, +\infty)$, y estrictamente decreciente en $(-\infty, -3) \cup (1, 3)$, lo que implica, a su vez, que f posee dos mínimos relativos, en las abscisas $x = -3$ y $x = 3$, y un máximo relativo, en la abscisa $x = 1$.

En cuanto a la curvatura, debido la controversia que suele haber entre los distintos manuales, y entre el profesorado, sobre qué se entiende por concavidad y qué por convexidad, aclararemos, informalmente, que entendemos por «convexidad» la situación en que la gráfica de la función se sitúa por encima de su tangente, quedando con ello claro, asimismo, el significado de la «concavidad». Dicho esto, pasemos a estudiar la curvatura de f , a partir de la gráfica de f' .

En primer lugar, observemos que la gráfica de f' es continua y no presenta ningún «pico», por lo que podemos asegurar que f' es derivable en todo su dominio (toda la recta real), es decir, podemos hablar de la derivada de f' , que, obviamente, es la segunda derivada de f , f'' .

Ahora, como f' es estrictamente creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$, su derivada, f'' , debe ser positiva en los puntos pertenecientes a alguna de estas dos semirrectas, lo que se traduce en que f es convexa en ambos conjuntos. Razonando de la misma manera, tenemos que, al ser f' estrictamente decreciente en $(-2, 2)$, f'' es negativa en los puntos de este intervalo, por lo que f es cóncava en dicho intervalo. Por su parte, en los extremos de f' , de abscisas $x = -2$ y $x = 2$, la función f pasa de ser convexa a cóncava, o de ser cóncava a convexa, lo cual se traduce en que f tiene un punto de inflexión en cada una de estas abscisas.

(Adaptado de examen de Universidad)

Problema 3.34

Sea f una función real de variable real que cumple:

1) $f(x + y) = f(x)f(y)$, para cualesquiera números reales x e y .

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1.$$

a) Prueba que f es derivable en todo punto de la recta real.

b) Encuentra la expresión explícita de $f(x)$.

Resolveremos los dos apartados conjuntamente.

Sea x un número real cualquiera. Para ver que f es derivable en x , según la definición de la derivada de una función en un punto, hemos de demostrar que existe y es finito el límite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Pero, aplicando la propiedad 1) dada en el enunciado, extrayendo factor común, y aplicando la propiedad 2), resulta:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(f(h) - 1)}{h} = \\ &= f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = f(x) \cdot 1 = f(x),\end{aligned}$$

lo que prueba, no solo que la función f es derivable, sino que, además, su derivada coincide con ella misma. Por tanto, solo caben dos posibilidades: $f(x) = e^x$ o $f(x) = \theta$ (la función idénticamente nula), pues, como es sabido, no existe ninguna otra función que permanezca invariable al derivarse y que, además, cumpla la condición 1) del enunciado. Sin embargo, el último caso no puede darse, pues si fuera $f(x) = \theta$, resultaría:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 1}{x} = \frac{-1}{0} = \infty,$$

lo que contradice la condición 2). Así pues, la única función que cumple las dos propiedades dadas en el enunciado es $f(x) = e^x$, y ya tenemos su expresión explícita.

(Oposiciones de Secundaria, 2010)

Problema 3.35

Encuentra todas las funciones $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ que cumplan las dos condiciones siguientes:

a) $f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y > 0.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$

Sea f una tal función. Entonces, en primer lugar, podemos observar que, por la primera condición dada en el enunciado, $f(y) > 0$, para todo y positivo, por lo que tiene sentido evaluar la función f en el punto $xf(y)$, ya que se cumple $xf(y) > 0$, siempre que x e y sean positivos, lo que permite considerar la propiedad expresada en a).

Ahora, puesto que no tenemos ningún dato sobre las características de las funciones que verifican estas propiedades, la única forma de proceder que tenemos pasa por dar valores concretos a las variables x e y , a fin de encontrar algún resultado que nos pueda servir para caracterizar estas funciones de una manera más operativa.

Con esta idea, podemos ver que, si tomamos $x = y$, entonces, por la propiedad a), resulta $f(xf(x)) = xf(x)$, lo cual se traduce en que $xf(x)$ es un punto fijo, pues se transforma en sí mismo mediante la acción de f .

Por otro lado, podemos demostrar que f es inyectiva, pues si se cumple $f(x) = f(y)$, entonces, sustituyendo $f(y)$ por $f(x)$ en la igualdad que expresa la propiedad a), leída de derecha a izquierda, tenemos $yf(x) = f(xf(y)) = f(xf(x))$, y, como $f(xf(x)) = xf(x)$,

sustituyendo, llegamos a $yf(x) = xf(x)$, de donde, cancelando $f(x)$ (tenemos en cuenta que $f(x)$ es estrictamente positivo, por lo que no es nulo y, por tanto, podemos cancelarlo), se sigue $y = x$. De este modo, hemos visto que la suposición $f(x) = f(y)$ nos lleva a que necesariamente ha de ser $x = y$, lo cual significa que f es inyectiva.

Ahora, si particularizamos aún más, haciendo $x = y = 1$, la propiedad a) se transforma en la igualdad $f(f(1)) = f(1)$, que, por ser f inyectiva, nos lleva a $f(1) = 1$, igualdad que muestra que 1 es un punto fijo de f . Supongamos por un momento que este es el único punto fijo de f (¡he aquí una idea feliz!). Si fuera así, como $xf(x)$ es un punto fijo, habría de ser $xf(x) = 1$, y, despejando, obtendríamos que la función $f(x) = 1/x$ es la única que satisface las condiciones del enunciado (observemos que también cumple la propiedad b)), lo que cerraría el problema.

De este modo, el problema queda reducido a demostrar que el único punto fijo de f es 1, lo cual haremos por reducción al absurdo, suponiendo que existe un número positivo, digamos p , $p \neq 1$, tal que $f(p) = p$, y viendo que esta suposición nos lleva necesariamente a una contradicción.

En efecto, tomando $x = y = p$, la propiedad a) se transforma en $f(pf(p)) = pf(p)$, y, al ser p un punto fijo de f , sustituyendo $f(p)$ por p , llegamos a $f(p \cdot p) = p \cdot p$, es decir, $f(p^2) = p^2$, lo que muestra que p^2 también es un punto fijo de f . De este modo, hemos demostrado que si p es un punto fijo distinto de la unidad, entonces su cuadrado también lo es. Aplicando este resultado a p^2 (que es distinto de uno, al serlo p), resulta que p^4 (el cuadrado de p^2) también es un punto fijo, por lo que también ha de serlo p^8 (que es su cuadrado), y también p^{16} (el cuadrado de p^8) y así, sucesivamente, todas las potencias de p cuyo exponente sea de la forma 2^k , con k natural. Dicho de otro modo, para todo k natural, se verifica la igualdad:

$$f(p^{2^k}) = p^{2^k}.$$

Ahora bien, como p es distinto de la unidad, existen dos posibilidades, que estudiaremos por separado: $p > 1$ o $p < 1$.

Si $p > 1$, entonces, tomando límite cuando k tiende a infinito en la última igualdad, resulta:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(p^{2^k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} p^{2^k} = +\infty,$$

lo que contradice la condición b), luego no es posible que sea $p > 1$.

Si, por el contrario, $p < 1$, haciendo $x = 1/p$, $y = p$, la condición a), leída de derecha a izquierda, se convierte en:

$$pf\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{1}{p}f(p)\right),$$

y, al ser p un punto fijo, sustituyendo $f(p)$ por p en el segundo miembro, se sigue:

$$pf\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{1}{p} \cdot p\right),$$

que, simplificando, teniendo en cuenta que $f(1) = 1$, y trasponiendo, nos lleva a:

$$pf\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{1}{p} \cdot p\right) \Leftrightarrow pf\left(\frac{1}{p}\right) = f(1) \Leftrightarrow pf\left(\frac{1}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p},$$

lo que prueba que $1/p$ también es un punto fijo (distinto de la unidad, al serlo p), y, aplicando el resultado antes obtenido, podemos afirmar que todas las potencias de $1/p$ cuyo exponente sea de la forma 2^k , con k natural, son puntos fijos de f . Es decir, para todo k natural, se verifica:

$$f\left(\left(\frac{1}{p}\right)^{2^k}\right) = \left(\frac{1}{p}\right)^{2^k},$$

que podemos escribir como:

$$f\left(\frac{1}{p^{2^k}}\right) = \frac{1}{p^{2^k}}.$$

Tomando límite cuando k tiende a infinito, resulta:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{p^{2^k}}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{2^k}} = \frac{1}{0} = +\infty,$$

que, como antes, contradice la condición b), luego tampoco puede ser $p < 1$.

Así pues, con todo lo dicho, queda probado, por reducción al absurdo, que 1 es el único punto fijo de f , lo que, como ya comentamos, concluye el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 1996, y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 3.36

Determina las funciones reales f , definidas en toda la recta real, salvo, quizá, en un punto, y derivables en todo su dominio, que satisfacen la ecuación funcional:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)[f(x) + f(y)] = 2f(x)f(y),$$

para todo par de números reales x e y donde la ecuación tenga sentido, siendo, además, $f(x) \neq 0$, para todo x real donde f esté definida.

Sea f una función que verifica las condiciones del enunciado. Entonces, puesto que f es derivable en todos los puntos de su dominio, podemos calcular la derivada de f

respecto de x , esto es, considerar el número y como un valor fijo dado, y derivar la función de x resultante. De este modo, tenemos:

$$\frac{1}{2}f'\left(\frac{x+y}{2}\right)[f(x)+f(y)]+f\left(\frac{x+y}{2}\right)f'(x)=2f'(x)f(y).$$

De la misma manera, podemos considerar x como un valor fijo, y derivar la función de y correspondiente, resultando:

$$\frac{1}{2}f'\left(\frac{x+y}{2}\right)[f(x)+f(y)]+f\left(\frac{x+y}{2}\right)f'(y)=2f(x)f'(y).$$

Restando miembro a miembro ambas igualdades y simplificando, se sigue:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)f'(x)-f\left(\frac{x+y}{2}\right)f'(y)=2f'(x)f(y)-2f(x)f'(y),$$

de donde, extrayendo factores comunes, llegamos a:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)[f'(x)-f'(y)]=2[f'(x)f(y)-f(x)f'(y)].$$

Multiplicando ambos miembros por el factor $f(x)+f(y)$, obtenemos la igualdad:

$$[f(x)+f(y)]f\left(\frac{x+y}{2}\right)[f'(x)-f'(y)]=2[f'(x)f(y)-f(x)f'(y)][f(x)+f(y)],$$

que, teniendo presente la ecuación dada en el enunciado, puede escribirse como:

$$2f(x)f(y)[f'(x)-f'(y)]=2[f'(x)f(y)-f(x)f'(y)][f(x)+f(y)].$$

Operando y simplificando, resulta:

$$\cancel{f(x)f(y)f'(x)} - \cancel{f(x)f(y)f'(y)} = \cancel{f'(x)f(y)f(x)} + f'(x)f(y)f(y) - f(x)f'(y)f(x) - \cancel{f(x)f'(y)f(y)} \Leftrightarrow$$

$$f'(x)f(y)f(y) = f(x)f'(y)f(x) \Leftrightarrow f'(x)[f(y)]^2 = f'(y)[f(x)]^2,$$

y, al ser $f(x) \neq 0$ y $f(y) \neq 0$ (según el enunciado), podemos trasponer factores, quedando:

$$\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{f'(y)}{[f(y)]^2}.$$

Ahora bien, como x e y son números cualesquiera del dominio de f , esta última igualdad pone de manifiesto que la función que a cada número real x , perteneciente al dominio de f , le asocia el valor:

$$\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

es constante, ya que siempre vale lo mismo, independientemente de cuál sea el punto en el que se evalúe, y, en consecuencia, debe existir un número real, digamos K , tal que:

$$\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = K,$$

para todo x perteneciente al dominio de f .

Integrando ambos miembros, teniendo en cuenta que en el numerador del cociente del primer miembro está presente la derivada de la función que aparece elevada al cuadrado en el denominador, tenemos:

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int K dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = Kx + C,$$

siendo C una constante (la constante de integración), de donde, despejando, llegamos a la expresión buscada de f , resultando ser:

$$f(x) = -\frac{1}{Kx + C}.$$

Para terminar, solo falta comprobar que, efectivamente, la función f así definida cumple las condiciones del enunciado, para cualesquiera constantes reales K y C no simultáneamente nulas (si lo fueran, el cociente no tendría sentido), como veremos a continuación.

En primer lugar, si $K = 0$ (en cuyo caso debe ser $C \neq 0$), entonces, resulta que f se convierte en una función constante no nula, que claramente está definida en toda la recta real, es derivable en todo su dominio, y satisface la ecuación dada en el enunciado, puesto que, denotando $f(x) = -1/C = A$, la ecuación se transforma en la igualdad $A(A + A) = 2AA$, que obviamente es cierta, para todo valor de A , o lo que es lo mismo, para todo valor no nulo de C . Si, por el contrario, $K \neq 0$, entonces, para cualquier valor real de C , es evidente que f está definida en toda la recta real, salvo en $x = -C/K$, y, por tanto, f está definida en toda la recta real, salvo en un punto, como se pide en el enunciado; además, f es derivable en todo su dominio y no se anula en ningún punto, como también resulta evidente. En cuanto a la ecuación, se trata de demostrar que se cumple:

$$-\frac{1}{\frac{x+y}{K} + C} \left(-\frac{1}{Kx + C} - \frac{1}{Ky + C} \right) = 2 \left(-\frac{1}{Kx + C} \right) \left(-\frac{1}{Ky + C} \right),$$

para cualesquiera dos números reales x e y que hagan que esta expresión tenga sentido (es decir, distintos de $-C/K$, y tales que $x + y \neq -2C/K$), lo cual podemos constatar, operando y simplificando, como sigue:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{K \frac{x+y}{2} + C} \left(-\frac{1}{Kx+C} - \frac{1}{Ky+C} \right) &= 2 \left(-\frac{1}{Kx+C} \right) \left(-\frac{1}{Ky+C} \right) \Leftrightarrow \\
 \frac{1}{\frac{Kx+Ky}{2} + C} \left(\frac{1}{Kx+C} + \frac{1}{Ky+C} \right) &= 2 \frac{1}{Kx+C} \cdot \frac{1}{Ky+C} \Leftrightarrow \\
 \frac{1}{\frac{Kx+Ky+2C}{2}} \cdot \frac{Ky+C+Kx+C}{(Kx+C)(Ky+C)} &= \frac{2}{(Kx+C)(Ky+C)} \Leftrightarrow \\
 \frac{\cancel{2}}{\cancel{Kx+Ky+2C}} \cdot \frac{\cancel{Ky+Kx+2C}}{(\cancel{Kx+C})(\cancel{Ky+C})} &= \frac{\cancel{2}}{(\cancel{Kx+C})(\cancel{Ky+C})} \Leftrightarrow 1=1,
 \end{aligned}$$

que es una igualdad trivialmente cierta, lo que se traduce en que, como pretendíamos probar, f verifica la ecuación dada en el enunciado, lo que cierra el problema.

(Examen de Universidad)

Problema 3.37

Calcula el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin 2t)^{1/t} dt.$$

Como podemos ver, se trata de una indeterminación, pues, si sustituimos x por el valor al que tiende, esto es, si hacemos $x = 0$, resulta:

$$\frac{1}{0} \int_0^0 (1 + \sin 2t)^{1/t} dt = \frac{1}{0} \cdot 0 = \frac{0}{0}.$$

Ahora bien, escribiendo el límite como:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin 2t)^{1/t} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 + \sin 2t)^{1/t} dt}{x},$$

es claro que, en virtud del Primer Teorema Fundamental del Cálculo, estamos en las hipótesis de la regla de L'Hôpital, por lo que, aplicándola en combinación con la regla de Barrow, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin 2t)^{1/t} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_0^x (1 + \sin 2t)^{1/t} dt \right)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{1/x},$$

resultando una indeterminación «del número e». Para resolverla, tendremos en cuenta que, como es sabido, $\sin x$ y x son infinitésimos equivalentes cuando x tiende a cero, es decir, se satisface la igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

y, en consecuencia, también:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1,$$

la cual nos permite escribir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x},$$

y, operando:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2x}} \right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2x}} \right)^{1/2x} \right]^2 = e^2,$$

y ya tenemos calculado el límite pedido:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin 2t)^{1/t} dt = e^2.$$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.38

Calcula el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2 \cos(3x)} e^{-t^2} dt.$$

Se trata de un problema similar al anterior, por lo que lo resolveremos siguiendo los mismos pasos, ya que, como vemos, estamos ante otra indeterminación del tipo 0/0, pues al sustituir x por el valor al que tiende, esto es, por cero, resulta:

$$\frac{1}{0^2} \int_0^{0^2 \cos(3 \cdot 0)} e^{-t^2} dt = \frac{1}{0} \int_0^0 e^{-t^2} dt = \frac{1}{0} \cdot 0 = \frac{0}{0}.$$

Para simplificar la escritura, denotaremos por L el límite pedido. Procediendo como en el problema anterior, reescribimos la expresión cuyo límite pretendemos calcular en forma de cociente, y aplicamos la regla de L'Hôpital (estamos en las hipótesis adecuadas, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo) en combinación con la regla de Barrow, resultando:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2 \cos(3x)} e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2 \cos(3x)} e^{-t^2} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2 \cos(3x)} e^{-t^2} dt \right)}{2x} \Leftrightarrow$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-[x^2 \cos(3x)]^2} [2x \cos(3x) - 3x^2 \sin(3x)]}{2x},$$

de donde, extrayendo x como factor común en el numerador, y simplificando, se sigue:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-[x^2 \cos(3x)]^2} \cancel{x} [2 \cos(3x) - 3x \sin(3x)]}{2 \cancel{x}},$$

y, finalmente, tomando límite, y operando, llegamos a:

$$L = \frac{e^{-[0^2 \cdot \cos(3 \cdot 0)]^2} [2 \cos(3 \cdot 0) - 3 \cdot 0 \cdot \sin(3 \cdot 0)]}{2} = \frac{e^0 (2 \cdot 1 - 0)}{2} = 1.$$

(Examen de Universidad)

Problema 3.39

Estudia el crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos de la siguiente función:

$$f(x) = \int_0^{(x-1)^2} \frac{t^2 - 5t + 4}{2 + e^t} dt.$$

Como es evidente, se trata de derivar la función, igualar su derivada a cero, y resolver la ecuación resultante, cuyas soluciones serán los puntos críticos de la función, para, posteriormente, estudiar el signo de la derivada en los correspondientes intervalos. Ahora bien, puesto que $f(x)$ es una función que depende de los límites de integración de otra, uno de los cuales es, a su vez, una función de x , para calcular f' hemos de conjugar el Primer Teorema Fundamental del Cálculo y la regla de la cadena (es claro que estamos en las hipótesis de ambos), resultando:

$$f'(x) = \frac{\left[(x-1)^2 \right]^2 - 5(x-1)^2 + 4}{2 + e^{(x-1)^2}} \cdot 2(x-1).$$

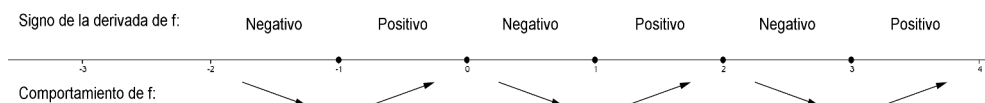
Igualando a cero y resolviendo la ecuación (que está factorizada), tenemos:

$$\frac{\left[(x-1)^2 \right]^2 - 5(x-1)^2 + 4}{2 + e^{(x-1)^2}} \cdot 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \left[(x-1)^2 \right]^2 - 5(x-1)^2 + 4 = 0 \end{cases},$$

lo cual indica que $x = 1$ es un punto crítico de f , mientras que los restantes se obtendrán de la ecuación bicuadrada en $x - 1$, que resolvemos seguidamente, aplicando directamente la fórmula que permite resolver la ecuación de segundo, sin hacer ningún cambio de variable:

$$(x-1)^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 4 \rightarrow x-1 = \pm 2 \rightarrow x = \pm 2 + 1 \rightarrow x = -1; x = 3 \\ (x-1)^2 = 1 \rightarrow x-1 = \pm 1 \rightarrow x = \pm 1 + 1 \rightarrow x = 0; x = 2 \end{cases}.$$

Por tanto, f tiene cinco puntos críticos, que dividen la recta real en seis tramos (tengamos presente que, como es claro, el dominio de f se extiende a toda la recta real, por lo que no hay que distinguir más intervalos que los determinados por los puntos críticos), en los que hemos de ver el signo de la derivada, para lo cual es suficiente con sustituir un punto del tramo correspondiente en la expresión de f' , dándose la situación que vemos a continuación:



Así pues, f presenta máximos relativos en las abscisas $x = 0$ y $x = 2$; mínimos relativos en las abscisas $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$; es creciente en $(-1, 0) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (2, 3)$.

(Examen de Universidad)

Problema 3.40

Sea f una función real de variable real derivable en toda la recta real, tal que $f(0) = 0$ y $f'(x) > 0$, para todo x real. Sea F la función dada por:

$$F(x) = \int_0^{x^2 - 3x + 2} f(t) dt.$$

Estudia el crecimiento y los extremos locales de la función F .

Como en el problema anterior, se trata de derivar la función, igualar su derivada a cero, resolver la ecuación resultante, y determinar si sus soluciones, que son los puntos críticos de la función, son máximos o mínimos relativos de esta, estudiando para ello el signo de la derivada en los distintos intervalos que se obtienen, lo que nos servirá también para establecer los intervalos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

Asimismo, como en el problema anterior, tenemos una función que depende de los límites de integración de otra, por lo que habremos de servirnos del Primer Teorema Fundamental del Cálculo y de la regla de la cadena para hallar su derivada (claramente estamos en las hipótesis de ambos), resultando $F'(x) = f(x^2 - 3x + 2) \cdot (2x - 3)$. Así, al igualar a cero, teniendo en cuenta que $F'(x)$ es igual al producto de 2 factores, tenemos:

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^2 - 3x + 2) = 0 \\ 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 1,5 \end{cases}.$$

Ahora bien, por las hipótesis del enunciado, se verifica que $f'(x) > 0$, para todo punto x de la recta real, lo que implica que la función f es estrictamente creciente, y, en consecuencia, no puede haber dos puntos distintos con una misma imagen (esto es, f es inyectiva). Por tanto, como, por el enunciado, $f(0)$ es nulo y $f(x^2 - 3x + 2)$ también lo es cuando x es un punto crítico, ambos argumentos deben ser necesariamente iguales, lo que nos lleva a la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, cuyas soluciones son $x = 1$ y $x = 2$.

De este modo, tenemos tres puntos críticos, que dividen la recta real en cuatro tramos (como, según el enunciado, la función f está definida en toda la recta real, es claro que F también lo está, por lo que no hay que considerar más tramos que los determinados por los puntos críticos), en cada uno de los cuales hemos de estudiar el signo de F' , algo que, como ya sabemos, podemos hacer, sencillamente, determinando el signo de esta función en un punto de cada intervalo.

Sin embargo, puesto que el signo de F' depende del signo de $f(x^2 - 3x + 2)$, cuyo valor es desconocido, conviene tener en cuenta que, al ser f estrictamente creciente y cumplirse $f(0) = 0$, resulta que $f(x)$ es negativo solo si x es negativo, mientras que $f(x)$ es positivo únicamente para valores positivos de x . Dicho de otro modo, el signo de $f(x)$ coincide con el de x , y, en consecuencia, $f(x^2 - 3x + 2)$ debe tener el mismo signo que $x^2 - 3x + 2$.

Elegimos ahora un punto de cada tramo, por ejemplo, los puntos $x = 0$, $x = 1,2$, $x = 1,7$ y $x = 3$, pertenecientes, respectivamente, a $(-\infty, 1)$, $(1, 3/2)$, $(3/2, 2)$ y $(2, +\infty)$, que son los tramos determinados por los puntos críticos, y, evaluando F' en cada uno de ellos, tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} F'(0) = f(0^2 - 3 \cdot 0 + 2)(2 \cdot 0 - 3) = \underbrace{f(+2)}_{>0} \underbrace{(-3)}_{<0} < 0 \\ F'(1,2) = f((1,2)^2 - 3 \cdot 1,2 + 2)(2 \cdot 1,2 - 3) = \underbrace{f(-0,16)}_{<0} \underbrace{(-0,6)}_{<0} > 0 \\ F'(1,7) = f((1,7)^2 - 3 \cdot 1,7 + 2)(2 \cdot 1,7 - 3) = \underbrace{f(-0,21)}_{<0} \underbrace{(+0,4)}_{>0} < 0 \\ F'(3) = f(3^2 - 3 \cdot 3 + 2)(2 \cdot 3 - 3) = \underbrace{f(+2)}_{>0} \underbrace{(+3)}_{>0} > 0 \end{array} \right.$$

lo cual se traduce en que la función F es creciente en $(1, 3/2) \cup (2, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3/2, 2)$, y, por tanto, tiene un máximo relativo en la abscisa $x = 3/2$ y dos mínimos relativos, uno en la abscisa $x = 1$, y otro en $x = 2$.

(Oposiciones de Secundaria, 2004, Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1971, y examen de Universidad)

Problema 3.41

Sea p un número real y sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ la sucesión de funciones dada por:

$$f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n.$$

Determina los valores de p que hacen que la sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converja uniformemente en el intervalo $[0, 1]$.

En primer lugar, estudiaremos el límite puntual de la sucesión de funciones en el intervalo $[0, 1]$, para lo cual consideraremos fijado un número x_0 perteneciente a dicho intervalo, y veremos qué comportamiento tiene la sucesión numérica $\{f_n(x_0)\}_{n \geq 1}$, resultante de evaluar cada una de las funciones que integran la sucesión en el citado punto x_0 . Ahora, al estar x_0 en el intervalo cerrado $[0, 1]$, caben tres posibilidades, que estudiaremos por separado: que se dé la igualdad $x_0 = 0$, que sea $x_0 = 1$, o que x_0 esté en el interior del intervalo, esto es, que x_0 esté estrictamente comprendido entre 0 y 1.

Si $x_0 = 0$, es evidente que $f_n(x_0) = n^p \cdot 0 \cdot (1 - 0^2)^n = 0$, para todo natural n , y para todo real p .

Si $x_0 = 1$, entonces, claramente $f_n(x_0) = n^p \cdot 1 \cdot (1 - 1^2)^n = 0$, para cualquier natural n y para cualquier real p .

Por último, si $0 < x_0 < 1$, la sucesión numérica $f_n(x_0) = n^p x_0 (1 - x_0^2)^n$ es convergente a cero, cuando n tiende a infinito, para cualquier valor de p , ya que, al ser $0 < x_0 < 1$, también tenemos $0 < x_0^2 < 1$ y, en consecuencia, $0 < 1 - x_0^2 < 1$. De este modo, el factor $(1 - x_0^2)^n$ tiende a cero, cuando n tiende a infinito, al tratarse de una expresión exponencial de base positiva y menor que uno, mientras que los otros dos factores son x_0 , que es un valor constante comprendido entre 0 y 1, y n^p , que tiende también a cero si $p < 0$, es igual a 1, si $p = 0$, y tiende a infinito, si $p > 0$, pero lo hace «más lento» que la exponencial, al ser una expresión potencial, lo que se traduce en que, al tomar límite, «gana» el factor exponencial, que tiende a cero. En realidad, esta última cuestión, que hemos zanjado de manera algo informal, es una consecuencia directa de la aplicación reiterada de la regla de L'Hôpital, con el fin de resolver la indeterminación resultante en ese caso.

Con todo lo visto, podemos afirmar que la sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es puntualmente convergente en el intervalo $[0,1]$ a la función idénticamente nula, que denotaremos por θ , y, por tanto, de ser uniformemente convergente, ha de serlo también a esta función.

Ahora bien, por definición, sabemos que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es uniformemente convergente en el intervalo $[0,1]$ a la función θ si, y solo si, se verifica la condición:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, |f_n(x) - \theta| < \varepsilon, \forall x \in [0,1],$$

la cual es equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| < \varepsilon,$$

que, al ser $f_n(x) \geq 0$, para todo x perteneciente al intervalo $[0,1]$, y para todo natural n (como es fácil de comprobar), puede escribirse, prescindiendo del valor absoluto, como:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \sup_{x \in [0,1]} f_n(x) < \varepsilon.$$

Ahora bien, es claro que, para todo natural n , la función f_n es continua en el compacto $[0,1]$, lo cual implica, en virtud del teorema de Weierstrass, que f_n alcanza el máximo absoluto en el intervalo $[0,1]$, lo que permite escribir la condición anterior como:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \max_{x \in [0,1]} f_n(x) < \varepsilon,$$

que claramente es equivalente a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{x \in [0,1]} f_n(x) \right) = 0.$$

Por otro lado, sucede que, para cada natural n , la función f_n no solo es continua en $[0,1]$, sino que, además, es derivable (como es evidente), verificándose también las condiciones $f_n(0) = f_n(1) = 0$ (ya lo hemos visto), por lo que, para cada n natural, la función f_n está en las hipótesis del teorema de Rolle. Así pues, aplicando este teorema, podemos afirmar que, para cada n natural, existe un punto perteneciente al intervalo

$(0,1)$, digamos x_n , tal que $f'_n(x_n) = 0$, que es precisamente el punto donde se alcanza el máximo absoluto de la función f_n en el intervalo $[0,1]$, lo que, en particular, permite transformar la condición anterior en la siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_n) = 0. \quad (I)$$

Ahora, para calcular este punto, vamos a igualar a cero la derivada de la función f_n y a resolver la ecuación resultante, cuyas soluciones son los puntos críticos de la función, entre los cuales se encuentra el punto buscado.

Así pues, derivamos la función f_n , operamos y extraemos factores comunes, resultando:

$$f'_n(x) = n^p \left[(1-x^2)^n - 2nx^2(1-x^2)^{n-1} \right] = n^p (1-x^2)^{n-1} (1-x^2 - 2nx^2) \Leftrightarrow$$

$$f'_n(x) = n^p (1-x^2)^{n-1} [1-x^2(1+2n)].$$

Igualando a cero, obtenemos la ecuación:

$$n^p (1-x^2)^{n-1} [1-x^2(1+2n)] = 0,$$

formada por tres factores, uno de los cuales ha de ser nulo. El primero de ellos no lo es, como es evidente, y, teniendo en cuenta que el punto x_n que estamos buscando está estrictamente comprendido entre 0 y 1, es claro que tampoco el segundo factor puede ser cero, luego la única opción posible es que sea nulo el tercer factor, resultando, por tanto, la ecuación:

$$1-x^2(1+2n) = 0,$$

cuya única solución positiva es:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+2n}},$$

que es el punto buscado.

Sustituyendo este valor y la expresión de f_n en (I), y operando, resulta:

$$f_n \rightarrow \theta \text{ uniformemente} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \left(\frac{1}{\sqrt{1+2n}} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \frac{1}{\sqrt{1+2n}} \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+2n}} \right)^2 \right]^n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{\sqrt{1+2n}} \left(1 - \frac{1}{1+2n} \right)^n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{\sqrt{1+2n}} \left(\frac{2n}{1+2n} \right)^n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{\sqrt{1+2n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{1+2n} \right)^n = 0.$$

Como podemos ver, el primer miembro de la última igualdad está formado por el producto de dos límites, que vamos a calcular por separado.

El cálculo del límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{\sqrt{1+2n}}$$

se reduce, sencillamente, a comparar el grado del numerador (que es p) y el grado del denominador (que es igual a $1/2$), resultando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{\sqrt{1+2n}} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ \infty & \text{si } p > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Por su parte, el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{1+2n} \right)^n$$

presenta una indeterminación «del número e », que podemos resolver como se muestra a continuación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{1+2n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2n}{2n} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{2n}{2n} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{2n} + 1 \right)^{2n} \right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Así pues, el límite que pretendemos evaluar, que es igual al producto de estos dos, resulta ser:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{\sqrt{1+2n}} \left(\frac{2n}{1+2n} \right)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } p < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2e}} & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ \infty & \text{si } p > \frac{1}{2} \end{cases},$$

y, como la sucesión f_n es uniformemente convergente si, y solo si, este límite es nulo, llegamos a la conclusión de que tal situación se da únicamente cuando $p < 1/2$, lo que da respuesta al enunciado del problema.

(Oposiciones de Secundaria, 1996, y examen de Universidad)

Problema 3.42

Sea la sucesión de funciones:

$$f_n(x) = n(1-x)^n \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2},$$

para $n \geq 1$, y sea x_n un punto perteneciente al intervalo $[0, 1]$ tal que:

$$f_n(x_n) = \sup_{x \in [0, 1]} f_n(x).$$

a) Demuestra que x_n se caracteriza por la expresión $\operatorname{tg} \frac{\pi x_n}{2} = \frac{\pi}{2n}(1-x_n)$.

b) Deduce $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n = 1$.

c) Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$.

Apartado a)

Como resulta evidente, para cada $n \geq 1$, la función f_n es derivable, con derivada continua, en $[0, 1]$, y $f_n(0) = f_n(1) = 0$, mientras que $f_n(x) > 0$, para todo x perteneciente al intervalo abierto $(0, 1)$. Así pues, para cada $n \geq 1$, la función f_n está en las hipótesis del teorema de Weierstrass y del teorema de Rolle, por lo que podemos afirmar que, para cada $n \geq 1$, existe un punto perteneciente a $(0, 1)$, que es precisamente el punto x_n dado en el enunciado, tal que:

$$f_n(x_n) = \max_{x \in [0, 1]} f_n(x), \quad f'_n(x_n) = 0.$$

En consecuencia, resulta que, por una parte, el enunciado del problema tiene sentido (pues existe el punto x_n aludido), mientras que, por otra, para cada $n \geq 1$, x_n es un punto crítico de la función f_n , de manera que podemos caracterizarlo derivando esta función e igualando a cero. Así pues, derivando y extrayendo factores, tenemos:

$$f'_n(x) = -n^2(1-x)^{n-1} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2} n(1-x)^n \cos \frac{\pi x}{2} \Leftrightarrow$$

$$f'_n(x) = n(1-x)^{n-1} \left[-n \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2} (1-x) \cos \frac{\pi x}{2} \right],$$

y, puesto que $x_n \neq 1$ (este punto está en el intervalo abierto, como hemos visto), al igualar a cero la derivada, obtenemos la ecuación:

$$-n \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2} (1-x) \cos \frac{\pi x}{2} = 0,$$

de la que, trasponiendo términos, resulta:

$$n \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2}(1-x) \cos \frac{\pi x}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2n}(1-x),$$

por lo que ya tenemos probado que x_n verifica la condición dada en el enunciado. Sin embargo, para terminar de resolver este apartado, es necesario demostrar que x_n es el único punto que verifica esta condición, que es lo que veremos a continuación.

Si consideramos, para cada $n \geq 1$, las funciones:

$$g(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}, \quad g_n(x) = \frac{\pi}{2n}(1-x),$$

resulta evidente que g es continua y estrictamente creciente en $(0,1)$, mientras que, para cada $n \geq 1$, g_n es continua y estrictamente decreciente en este mismo intervalo, cumpliéndose, además, las condiciones:

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g_n(0) = \frac{\pi}{2n} > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = +\infty, \\ g_n(1) = 0 \end{cases},$$

lo cual se traduce en que, para cada $n \geq 1$, las funciones g y g_n se cortan en un único punto, que claramente ha de ser x_n , y ya tenemos probado que este punto es el único que verifica la condición dada en el enunciado, lo que concluye el apartado.

Apartado b)

La palabra «deduce» es bastante explícita: se trata de calcular los límites indicados, empleando para ello la igualdad probada en el apartado anterior. Así pues, tomando límite en ambos miembros, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{\pi x_n}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n}(1-x_n) = 0,$$

puesto que $\pi/2n$ tiende a cero, mientras que $1-x_n$ es un valor acotado entre 0 y 1 (tenemos presente que al tender a cero uno de los factores, el límite debe ser cero, salvo que se produzca la indeterminación «cero por infinito», algo que no puede ocurrir en este caso, ya que el otro factor está comprendido entre 0 y 1), lo cual, teniendo en cuenta el intervalo que estamos considerando, solo es posible si el argumento de la tangente tiende a cero, esto es, si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi x_n}{2} = 0,$$

de donde se desprende:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

y ya tenemos calculado el primero de los límites.

Para calcular el segundo, multiplicamos y dividimos por 2 y π , a fin de obtener la expresión del argumento de la tangente, quedando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\pi} \frac{\pi x_n}{2}.$$

Ahora, teniendo presente que $\pi x_n/2$ tiende a cero cuando n tiende a infinito (como hemos visto antes), y que, como es sabido, $\operatorname{tg} x$ y x son infinitésimos equivalentes cuando x tiende a cero, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x_n}{2}}{\frac{\pi x_n}{2}} = 1,$$

igualdad que permite sustituir la expresión $\pi x_n/2$ por $\operatorname{tg}(\pi x_n/2)$ en el límite que pretendemos calcular, resultando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi x_n}{2},$$

y, al ser:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x_n}{2} = \frac{\pi}{2n} (1 - x_n),$$

sustituyendo en el límite anterior, simplificando, y teniendo en cuenta que x_n tiende a cero, llegamos a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2n}}{\cancel{\pi}} \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2n}} (1 - x_n) = 1,$$

y ya tenemos resuelto este apartado.

Apartado c)

Por definición de f_n , tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - x_n)^n \operatorname{sen} \frac{\pi x_n}{2},$$

que podemos escribir como el producto de dos límites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_n)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen} \frac{\pi x_n}{2},$$

que vamos a calcular por separado.

El primero de estos límites presenta una indeterminación «del número e», cuya resolución exponemos a continuación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{1}{x_n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{1}{x_n}} \right)^{-\frac{1}{x_n}} \right]^{-x_n n} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} x_n n} = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

ya que nx_n tiende a uno, como hemos visto antes.

Para calcular el segundo límite, vamos a tener en cuenta que, como es sabido, $\sin x$ y x son infinitésimos equivalentes cuando x tiende a cero, es decir, se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

lo cual nos permite escribir $\pi x_n/2$ en lugar de $\sin(\pi x_n/2)$ en el límite que queremos calcular (recordemos que $\pi x_n/2$ tiende a cero cuando n tiende a infinito), y, como nx_n tiende a uno, resulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi x_n}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\pi x_n}{2} = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \frac{\pi}{2}.$$

Finalmente, sustituyendo los valores obtenidos, logramos calcular el límite pedido:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \frac{1}{e} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2e}.$$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.43

Sea la sucesión funcional $\{f_n\}_{n \geq 1}$, donde $f_n(x) = n \cdot \cos^n x \cdot \sin x$, para $x \in [0, \pi/2]$ y $n \geq 1$.

Se pide:

a) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \pi/2]} |f_n(x) - f(x)|.$

c) Comprueba que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx \neq \int_0^{\pi/2} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$

Apartado a)

Se trata de calcular el límite puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \geq 1}$ en el intervalo $[0, \pi/2]$. Para ello, consideremos fijado un punto x_0 perteneciente a este intervalo, y

veamos qué comportamiento tiene la sucesión numérica $\{f_n(x_0)\}_{n \geq 1}$, que resulta al evaluar cada función de la sucesión en x_0 . Puesto que x_0 está en el intervalo $[0, \pi/2]$, ha de darse una de estas tres situaciones, que estudiaremos por separado: $x_0 = 0$, $x_0 = \pi/2$, o $0 < x_0 < \pi/2$.

Si $x_0 = 0$, entonces, $f_n(x_0) = n \cdot \cos^n 0 \cdot \sin 0 = n \cdot 1 \cdot 0 = 0$, para todo n natural.

Si $x_0 = \pi/2$, resulta $f_n(x_0) = n \cdot \cos^n(\pi/2) \cdot \sin(\pi/2) = n \cdot 0 \cdot 1 = 0$, para todo n natural.

Si $0 < x_0 < \pi/2$, se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = 0,$$

ya que, en este caso, $f_n(x_0) = n \cdot \cos^n x_0 \cdot \sin x_0$ está definido por tres factores, uno de los cuales es un número positivo menor que uno (el factor $\sin x_0$), otro tiende a cero (el factor $\cos^n x_0$, pues se trata de una expresión exponencial de base positiva menor que uno), y el otro tiende a infinito (el factor n), pero lo hace «más lento» de lo que el factor $\cos^n x_0$ lo hace a cero (es una consecuencia directa de la aplicación de la regla de L'Hôpital, que no merece la pena analizar con detalle).

Así pues, con lo dicho, podemos concluir escribiendo:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \forall x \in [0, \pi/2],$$

es decir, diciendo que el límite puntual de la sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ es la función idénticamente nula, lo que da respuesta a este apartado.

Apartado b)

Denotemos por L el límite que pretendemos calcular. Puesto que $f(x)$ es la función idénticamente nula (lo hemos visto en el apartado anterior), tenemos la igualdad:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |f_n(x)|,$$

y, como, además, $f_n \geq 0$ en todo el intervalo $[0, \pi/2]$, ya que en este intervalo tanto la función seno como la función coseno son no negativas, podemos prescindir del valor absoluto en la expresión anterior, resultando:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f_n(x).$$

Por otra parte, para cada n natural, la función f_n es continua en el compacto $[0, \pi/2]$ (es producto de funciones continuas), por lo que, en virtud del teorema de Weierstrass, sabemos que f_n alcanza el máximo absoluto en un punto de este intervalo, que denotaremos por x_n . Esto significa, en particular, que se alcanza el supremo expresado antes y, por tanto, podemos escribir:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n). \quad (I)$$

Además, al ser $f_n \geq 0$ una función no constante (como es evidente) y cumplirse $f_n(0) = f_n(\pi/2) = 0$ (lo hemos visto en el apartado anterior), resulta que x_n es un punto interior al intervalo $[0, \pi/2]$, y como f_n no solo es continua en $[0, \pi/2]$, sino que, además, es derivable en este intervalo (es producto de funciones derivables), resulta que ha de satisfacerse la igualdad $f'_n(x_n) = 0$. De esta manera, para hallar x_n , hemos de igualar a cero la derivada de f_n y resolver la ecuación resultante, cuyas soluciones son los puntos críticos de f_n , uno de los cuales (realmente el único, como veremos a continuación) es el punto x_n . Derivando y operando, tenemos:

$$f'_n(x) = n \cos^{n-1} x (-\sin x) \sin x + n \cos^n x \cos x = n \cos^{n+1} x - n^2 \cos^{n-1} x \sin^2 x,$$

y, extrayendo factor común:

$$f'_n(x) = n \cos^{n-1} x (\cos^2 x - n \sin^2 x).$$

Igualando a cero y teniendo en cuenta que $\cos x_n$ no puede ser nulo (x_n pertenece al interior del intervalo $[0, \pi/2]$, como ya habíamos comentado), resulta:

$$n \cos^{n-1} x (\cos^2 x - n \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - n \sin^2 x = 0.$$

Empleando la conocida fórmula $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, y despejando, tenemos:

$$1 - \sin^2 x - n \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 1 - (n+1) \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

y, por otro lado:

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Así pues, el punto x_n satisface las condiciones:

$$\sin x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \cos x_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

que, al sustituir en (I), permiten hallar el límite pedido, resolviendo las indeterminaciones que se presentan, resultando:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}} \right)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}} \right)^n \Leftrightarrow$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-\frac{n}{2}} \Leftrightarrow$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-\frac{1}{2}} = +\infty \cdot e^{-\frac{1}{2}} = +\infty.$$

Como podemos observar, este resultado implica, en particular, que la sucesión f_n no converge uniformemente a su límite puntual, ya que para ello es necesario que se satisfaga la igualdad $L = 0$. Esta situación hace posible que se verifique el enunciado del apartado c), ya que, como es sabido, si fuera la convergencia uniforme, se podría intercambiar el límite con la integral, y las dos expresiones serían iguales, algo que no ocurre, como veremos a continuación.

Apartado c)

Para resolver este apartado, calcularemos por separado cada una de las dos expresiones dadas en el enunciado, y veremos que no coinciden.

La expresión de la izquierda es fácil de integrar, teniendo en cuenta que se trata de una potencial, al estar como factor la derivada (el seno) de la función que sirve de base (el coseno), salvo que con distinto signo. Así pues, tenemos:

$$\int_0^{\pi/2} f_n(x) dx = \int_0^{\pi/2} n \cos^n x \sen x dx = -n \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} \Big|_0^{\pi/2} = -n \frac{\cos^{n+1}(\pi/2)}{n+1} + n \frac{\cos^{n+1} 0}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

y, tomando límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Por su parte, teniendo en cuenta que el límite puntual de la sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ es la función idénticamente nula, como vimos en el apartado a), la segunda expresión del enunciado resulta ser:

$$\int_0^{\pi/2} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^{\pi/2} 0 dx = 0,$$

que, como vemos, es diferente de la hallada para la primera expresión, lo que cierra este apartado y, con él, el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 1999, y examen de Universidad)

Problema 3.44

Obtén el desarrollo en serie de la integral $I = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$.

En primer lugar, usando la conocida identidad trigonométrica $\sen^2 x + \cos^2 x = 1$, tenemos:

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{1 - \sen^2 x}}} = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sqrt[4]{1 - \sen^2 x}}.$$

Haciendo el cambio de variable $t = \text{sen} x$, es claro que, derivando en ambos miembros, obtenemos $dt = \cos x \cdot dx$, de donde se sigue $dx = dt/\cos x$; para los límites de integración, basta tener en cuenta que si $x = 0$, entonces, $t = \text{sen} 0 = 0$, mientras que si $x = \pi/6$, entonces, $t = \text{sen}(\pi/6) = 1/2$. Así pues, sustituyendo en la integral, usando nuevamente la identidad trigonométrica fundamental, y agrupando radicales, resulta:

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dt}{\cos x \sqrt[4]{1-t^2}} = \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-\text{sen}^2 x} \sqrt[4]{1-t^2}} = \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt[4]{1-t^2}} = \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt[4]{(1-t^2)^3}},$$

cuyo integrando podemos escribir en forma de potencia, quedando:

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dt}{(1-t^2)^{3/4}} = \int_0^{1/2} (1-t^2)^{-3/4} dt.$$

Ahora, es conocida la expresión:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

válida para cualquier número real α , que permite escribir una potencia del tipo presente en el miembro de la izquierda en forma de serie, donde el número combinatorio del segundo miembro se define como:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!},$$

que, como podemos observar, se trata de una expresión análoga al número combinatorio correspondiente a un valor natural de α , cuando $k \leq \alpha$.

Teniendo en cuenta esta expresión en forma de serie, para $\alpha = -3/4$ y $x = -t^2$, el integrando de la última integral puede escribirse como:

$$(1-t^2)^{-3/4} = (1+(-t^2))^{-3/4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3/4}{k} (-t^2)^k. \quad (I)$$

Calculamos ahora por separado el número combinatorio, aplicando la definición y operando, resultando:

$$\begin{aligned} \binom{-3/4}{k} &= \frac{\frac{-3}{4} \left(\frac{-3}{4} - 1 \right) \left(\frac{-3}{4} - 2 \right) \cdots \left(\frac{-3}{4} - (k-1) \right)}{k!} = \frac{\frac{-3}{4} \left(\frac{-3-4}{4} \right) \left(\frac{-3-4 \cdot 2}{4} \right) \cdots \left(\frac{-3-4(k-1)}{4} \right)}{k!} \Leftrightarrow \\ \binom{-3/4}{k} &= \frac{\frac{-3}{4} \left(\frac{-7}{4} \right) \left(\frac{-11}{4} \right) \cdots \left(\frac{-4k+1}{4} \right)}{k!} = \frac{-3(-7)(-11)\cdots(-4k+1)}{4^k k!} = \frac{(-1)^k \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4k-1)}{4^k k!}, \end{aligned}$$

que podemos escribir de una manera algo más «compacta» como:

$$\binom{-3/4}{k} = \frac{(-1)^k \prod_{i=1}^k (4i-1)}{4^k k!}.$$

Sustituyendo esta expresión en (I) y operando, llegamos a:

$$\begin{aligned} (1-t^2)^{-3/4} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \prod_{i=1}^k (4i-1)}{4^k k!} (-t^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \prod_{i=1}^k (4i-1)}{4^k k!} (-1)^k (t^2)^k \Leftrightarrow \\ (1-t^2)^{-3/4} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k (4i-1)}{4^k k!} (-1)^{2k} (t^2)^k \Leftrightarrow (1-t^2)^{-3/4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k (4i-1)}{4^k k!} (t^2)^k, \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

que es una serie de potencias en la variable t .

Para estudiar la convergencia de esta serie, empleamos el procedimiento habitual en estos casos, consistente en calcular el límite, cuando k tiende a infinito, del cociente a_{k+1}/a_k , donde $\{a_k\}$ es el término general de la serie, y ver para qué valores de la variable este límite es estrictamente menor que uno, en valor absoluto. De este modo, sustituyendo, operando y simplificando, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{\prod_{i=1}^{k+1} (4i-1)}{4^{k+1} (k+1)!} (t^2)^{k+1}}{\frac{\prod_{i=1}^k (4i-1)}{4^k k!} (t^2)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4^k k! \prod_{i=1}^{k+1} (4i-1) (t^2)^{k+1}}{4^{k+1} (k+1)! \prod_{i=1}^k (4i-1) (t^2)^k} \Leftrightarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(4(k+1)-1)t^2}{4(k+1)} = t^2, \end{aligned}$$

lo cual se traduce en que si $t^2 < 1$, esto es, si $-1 < t < 1$, entonces, la serie es convergente.

Ahora bien, es sabido que una serie de potencias puede integrarse término a término dentro de cualquier compacto contenido en su intervalo de convergencia, lo que equivale a decir que podemos intercambiar el símbolo de la integral y del sumatorio, siempre que la variable se mueva dentro de un compacto contenido en este intervalo de convergencia. En el caso que nos ocupa, los límites de integración son 0 y $1/2$, por lo que la variable t recorre el intervalo $[0, 1/2]$, que claramente está dentro del intervalo de convergencia, que es, como hemos dicho antes, el intervalo $(-1, 1)$. Por tanto, después

de integrar ambos miembros de la igualdad (II) entre 0 y 1/2, podemos intercambiar la integral con el sumatorio, resultando:

$$I = \int_0^{1/2} (1-t^2)^{-3/4} dt = \int_0^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k (4i-1)}{4^k k!} (t^2)^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{1/2} \frac{\prod_{i=1}^k (4i-1)}{4^k k!} (t^2)^k dt.$$

Como podemos ver, la función de t presente en el integrando es una potencial, puesto que tanto el productorio como el denominador del cociente en que se encuentra no dependen de t (son constantes para la integral), por lo que estamos ante una integral inmediata. Calculando la correspondiente primitiva, haciendo uso de la regla de Barrow, y operando, se sigue:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{1/2} \frac{\prod_{i=1}^k (4i-1)}{4^k k!} (t^2)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k (4i-1)}{4^k k!} \int_0^{1/2} t^{2k} dt \Leftrightarrow \\ I &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k (4i-1)}{4^k k!} \cdot \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \Big|_0^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k (4i-1)}{4^k k!} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \Leftrightarrow \\ I &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k (4i-1)}{(2^2)^k k!} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{2^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k (4i-1)}{2^{2k} k! (2k+1) 2^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k (4i-1)}{2^{4k+1} k! (2k+1)}, \end{aligned}$$

que es el desarrollo en serie que buscábamos, lo que concluye el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.45

Estudia la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx.$$

En caso de que sea convergente, calcula su suma.

Como es sabido, para todo número real x comprendido entre 0 y $\pi/2$, se verifica $0 \leq \operatorname{sen}^{2n+1} x \leq 1$, por lo que, integrando entre 0 y $\pi/2$, tenemos:

$$\int_0^{\pi/2} 0 \cdot dx \leq \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} 1 \cdot dx \Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx \leq \frac{\pi}{2},$$

y, en consecuencia:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

De este modo, la serie (de términos positivos) dada en el enunciado está mayorada por la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^{n+1}},$$

que claramente es convergente (tengamos en cuenta que puede expresarse como el producto de π por una serie geométrica de razón $1/2$). Así pues, en virtud del criterio de la mayorante, podemos asegurar que la serie dada en el enunciado es convergente.

Para calcular la suma, que denotaremos por S , en primer lugar, vamos a intercambiar la serie con la integral, algo que es perfectamente válido, por el criterio M de Weierstrass (en realidad, ya hemos comprobado que estamos en las hipótesis adecuadas), resultando:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^{2n+1} x}{2^n} \right) dx.$$

Ahora, extrayendo $\operatorname{sen} x$ como factor común y aplicando las propiedades de las potencias, tenemos:

$$S = \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^{2n} x}{2^n} \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen} x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} \right)^n \right) dx,$$

expresión que evidencia que estamos ante una serie geométrica de razón $\operatorname{sen}^2 x/2$, que, para valores de x comprendidos entre 0 y $\pi/2$, es claramente positiva y menor que uno.

Así pues, haciendo uso de la conocida fórmula que permite sumar los infinitos términos de una serie geométrica de estas características, resulta:

$$S = \int_0^{\pi/2} \text{sen } x \cdot \frac{\frac{\text{sen}^2 x}{2}}{1 - \frac{\text{sen}^2 x}{2}} dx.$$

Operando, y teniendo en cuenta la conocida identidad trigonométrica fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, se sigue:

$$S = \int_0^{\pi/2} \text{sen } x \cdot \frac{\frac{\text{sen}^2 x}{2}}{\frac{2 - \text{sen}^2 x}{2}} dx = \int_0^{\pi/2} \text{sen } x \cdot \frac{\text{sen}^2 x}{2 - \text{sen}^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \text{sen } x \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Para calcular esta última integral, hacemos el cambio de variable $t = \cos x$, de donde, derivando, obtenemos $dt = -\text{sen } x \cdot dx$, y, trasponiendo, $dx = -dt/\text{sen } x$; para los límites de integración, si $x = 0$, entonces, $t = 1$, mientras que si $x = \pi/2$, resulta $t = 0$. Así pues, sustituyendo, simplificando e intercambiando los límites de integración, tenemos:

$$S = \int_1^0 \cancel{\text{sen } x} \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \cdot \frac{-dt}{\cancel{\text{sen } x}} = \int_0^1 \frac{1 - t^2}{1 + t^2} dt,$$

que es la integral de una función racional en la que el grado del numerador coincide con el del denominador. Por tanto, como es sabido, hemos de dividir el numerador entre el denominador, lo que permite escribir la integral en dos sumandos, quedando dos integrales inmediatas, resultando:

$$S = \int_0^1 \frac{1 - t^2}{1 + t^2} dt = \int_0^1 -dt + \int_0^1 \frac{2}{1 + t^2} dt = -t \Big|_0^1 + 2 \arctg t \Big|_0^1 \Leftrightarrow$$

$$S = -1 + 2 \arctg 1 - 2 \arctg 0 = -1 + 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi - 2}{2}.$$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.46

Suma la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{1+n(n-1)x^2}.$$

En primer lugar, es claro que si $x = 0$, entonces, todos los términos de la serie son nulos, por lo que su suma vale cero. Así pues, en lo sucesivo supondremos $x \neq 0$.

Como es sabido, es posible escribir una serie como el límite de la sucesión de sumas parciales correspondientes, por lo que tenemos la igualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{1+n(n-1)x^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \operatorname{arctg} \frac{x}{1+n(n-1)x^2}.$$

Puesto que no se trata de una serie geométrica, ni parece que pueda reducirse a una integral de Riemann (como haremos en algunos problemas más adelante), trataremos de escribirla como una suma telescópica, esto es, como una sucesión de sumas parciales en la que aparezcan los mismos términos, pero alternando los signos, de manera que se compensen unos con otros.

Para alcanzar este objetivo, la primera dificultad que encontramos radica en la presencia de la función arcotangente, que no permite desglosar el término general. Por ello, observamos que necesitamos escribir el argumento de la arcotangente como una función de la tangente, para deshacer una función con otra, esto es, hemos de encontrar una expresión adecuada a nuestros intereses, digamos A, que permita escribir:

$$\frac{x}{1+n(n-1)x^2} = \operatorname{tg} A,$$

ya que, al tomar arcotangente en ambos miembros, tendremos:

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{1+n(n-1)x^2} = A,$$

lo que permitirá escribir la serie de una manera más operativa.

Ahora bien, como hemos comentado, queremos que la expresión A incorpore los sucesivos términos de la sucesión formada por el término general de la serie, alternando los signos, para lo cual resulta conveniente interpretar A como la diferencia de dos expresiones, digamos B y C, por lo que podemos escribir :

$$\frac{x}{1+n(n-1)x^2} = \operatorname{tg}(B - C). \quad (I)$$

Por otro lado, aplicando la conocida fórmula trigonométrica que relaciona la tangente del ángulo diferencia con las tangentes de los ángulos correspondientes:

$$\operatorname{tg}(B - C) = \frac{\operatorname{tg}B - \operatorname{tg}C}{1 + \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C},$$

la anterior igualdad se escribe como:

$$\frac{x}{1 + n(n-1)x^2} = \frac{\operatorname{tg}B - \operatorname{tg}C}{1 + \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C},$$

de manera que podemos determinar la expresión de $\operatorname{tg}B$ y $\operatorname{tg}C$ identificando los numeradores y los denominadores, debiéndose satisfacer el sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}B - \operatorname{tg}C = x \\ 1 + \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C = 1 + n(n-1)x^2 \end{cases},$$

para lo cual es suficiente elegir $\operatorname{tg}B = nx$ y $\operatorname{tg}C = (n-1)x$ (como es fácil de comprobar), y, en consecuencia, resulta $B = \operatorname{arctg}(nx)$ y $C = \operatorname{arctg}((n-1)x)$. Sustituyendo estas expresiones de B y C en (I), tenemos:

$$\frac{x}{1 + n(n-1)x^2} = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(nx) - \operatorname{arctg}((n-1)x)),$$

y, tomando arcotangente y simplificando, llegamos a:

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{1 + n(n-1)x^2} = \operatorname{arctg} [\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(nx) - \operatorname{arctg}((n-1)x))] \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{1 + n(n-1)x^2} = \operatorname{arctg}(nx) - \operatorname{arctg}((n-1)x),$$

por lo que la serie dada en el enunciado queda:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + n(n-1)x^2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + n(n-1)x^2} \Leftrightarrow \\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + n(n-1)x^2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (\operatorname{arctg}(nx) - \operatorname{arctg}((n-1)x)), \end{aligned}$$

que es una suma telescópica, como pretendíamos obtener. De este modo, desarrollando el sumatorio y cancelando, tenemos:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^k (\operatorname{arctg}(nx) - \operatorname{arctg}((n-1)x)) = \\ &= \cancel{\operatorname{arctg}x} - \cancel{\operatorname{arctg}0} + \cancel{\operatorname{arctg}(2x)} - \cancel{\operatorname{arctg}x} + \cancel{\operatorname{arctg}(3x)} - \cancel{\operatorname{arctg}(2x)} + \cancel{\operatorname{arctg}(4x)} - \\ &- \cancel{\operatorname{arctg}(3x)} + \dots + \cancel{\operatorname{arctg}((k-1)x)} - \cancel{\operatorname{arctg}((k-2)x)} + \operatorname{arctg}(kx) - \cancel{\operatorname{arctg}((k-1)x)}, \end{aligned}$$

y, al ser $\arctg 0 = 0$, resulta:

$$\sum_{n=1}^k (\arctg(nx) - \arctg((n-1)x)) = \arctg(kx) - \arctg 0 = \arctg(kx).$$

Así pues, tomando límite cuando k tiende a infinito, y teniendo en cuenta que estamos suponiendo que x no es nulo, llegamos a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{1+n(n-1)x^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (\arctg(nx) - \arctg((n-1)x)) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{1+n(n-1)x^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \arctg(kx) = \arctg(\infty \cdot x) = \arctg(\infty),$$

cuyo valor es $\pi/2$ o $-\pi/2$, dependiendo de si x es positivo o negativo, respectivamente.

Con todo lo dicho, podemos concluir el problema escribiendo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{1+n(n-1)x^2} = \begin{cases} -\pi/2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \pi/2 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

(Examen de Universidad)

Problema 3.47

Demuestra que si la sucesión $\{a_n\}$ es tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente, entonces,

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ también lo es.

Como es sabido, si una serie es absolutamente convergente, entonces, también es convergente, por lo que, para resolver el problema, es suficiente con demostrar que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

es convergente.

Ahora bien, como no conocemos muchos detalles sobre la sucesión $\{a_n\}$, para ver que esta última serie es convergente, trataremos de mayorar su término general, empleando para ello el de la serie que resulta de elevar al cuadrado los términos de $\{a_n\}$ (que, por hipótesis, es convergente), y alguna otra serie «conocida», cuyo carácter

convergente podamos afirmar. Dicho de otro modo, nos interesaría establecer una desigualdad de la forma:

$$\frac{|a_n|}{n} \leq a_n^2 + E_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

siendo E_n el término general de una serie convergente, pues, a partir de ella, podríamos escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n < +\infty$$

(la notación “ $< +\infty$ ” significa «convergente»), lo que concluiría el problema.

Ahora, dado un número natural n , trasponiendo, tenemos:

$$\frac{|a_n|}{n} \leq a_n^2 + E_n \Leftrightarrow a_n^2 - \frac{|a_n|}{n} + E_n \geq 0,$$

lo que sugiere que sería útil expresar el primer miembro de esta última inecuación como un cuadrado perfecto, si fuera posible. Con este objetivo, «completamos cuadrados», escribiendo:

$$a_n^2 - \frac{|a_n|}{n} = \left(|a_n| - \frac{1}{2n} \right)^2 - \frac{1}{4n^2},$$

de donde, trasponiendo, se sigue:

$$a_n^2 - \frac{|a_n|}{n} + \frac{1}{4n^2} = \left(|a_n| - \frac{1}{2n} \right)^2$$

(hemos conseguido expresarlo como un cuadrado perfecto), y, al ser:

$$\left(|a_n| - \frac{1}{2n} \right)^2 \geq 0$$

(un cuadrado siempre es no negativo), llegamos a:

$$a_n^2 - \frac{|a_n|}{n} + \frac{1}{4n^2} \geq 0$$

(que es la desigualdad que pretendíamos establecer, si consideramos:

$$E_n = \frac{1}{4n^2}).$$

De este modo, el problema está concluido, puesto que, como habíamos adelantado, a partir de esta última desigualdad, trasponiendo, y sumando todos los términos, resulta:

$$a_n^2 - \frac{|a_n|}{n} + \frac{1}{4n^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{|a_n|}{n} \leq a_n^2 + \frac{1}{4n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} < +\infty,$$

ya que, como es sabido, la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente (su suma es igual a 2), y, en consecuencia, también lo es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}.$$

(Examen de Universidad)

Problema 3.48

Calcula el siguiente límite:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right).$$

Calcularemos el límite escribiéndolo como una integral de Riemann, para lo cual necesitaremos encontrar una función adecuada, un intervalo en el que esté definida, y una partición del mismo, como vemos a continuación.

Multiplicando y dividiendo cada denominador por n^2 , tenemos:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 \cdot \frac{1+n^2}{n^2}} + \frac{1}{n^2 \cdot \frac{2^2+n^2}{n^2}} + \cdots + \frac{1}{n^2 \cdot \frac{n^2+n^2}{n^2}} \right),$$

y, operando y extrayendo factor común, se sigue:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} + \frac{n^2}{n^2} \right)} + \frac{1}{n^2 \cdot \left(\frac{2^2}{n^2} + \frac{n^2}{n^2} \right)} + \cdots + \frac{1}{n^2 \cdot \left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{n^2}{n^2} \right)} \right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 \cdot \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + 1 \right)} + \frac{1}{n^2 \cdot \left(\left(\frac{2}{n} \right)^2 + 1 \right)} + \cdots + \frac{1}{n^2 \cdot \left(\left(\frac{n}{n} \right)^2 + 1 \right)} \right) \Leftrightarrow \\
L &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{n} \right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{2}{n} \right)^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{n}{n} \right)^2 + 1} \right) \Leftrightarrow \\
L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{n} \right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{2}{n} \right)^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{n}{n} \right)^2 + 1} \right),
\end{aligned}$$

con lo que ya tenemos la expresión buscada, pues para escribir L como una integral de Riemann basta con considerar la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

definida en el intervalo $[0,1]$, donde, para cada natural n , consideramos la partición dada por $P_n = \{0, 1/n, 2/n, 3/n, \dots, n/n = 1\}$, cuyos puntos están igualmente espaciados. En efecto, como es evidente, la norma de P_n , esto es, la máxima diferencia entre dos puntos consecutivos de P_n (que es igual a $1/n$), tiende a cero cuando n tiende a infinito, lo que permite definir la integral de Riemann de f en el intervalo $[0,1]$ como:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \left(\frac{1}{\left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1} \right),$$

de donde se sigue:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{n} \right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{2}{n} \right)^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{n}{n} \right)^2 + 1} \right) \Leftrightarrow \\
L &= \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx.
\end{aligned}$$

Ahora, es claro que estamos ante una integral inmediata, cuya primitiva es la función arcotangente, por lo que, aplicando la regla de Barrow, tenemos:

$$L = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.49

Calcula el límite:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[\sqrt{2n-1} + \sqrt{2(2n-2)} + \sqrt{3(2n-3)} + \dots + \sqrt{n(2n-n)} \right].$$

Procederemos como en el problema anterior, reduciendo el cálculo del límite al de una integral de Riemann, buscando la función idónea, que estará definida en un intervalo, en el que consideraremos una partición adecuada.

Aplicando la propiedad distributiva, tenemos:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{\sqrt{2n-1}}{n} + \frac{\sqrt{2(2n-2)}}{n} + \frac{\sqrt{3(2n-3)}}{n} + \dots + \frac{\sqrt{n(2n-n)}}{n} \right],$$

y, operando:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{2n-1}{n^2}} + \sqrt{\frac{2(2n-2)}{n^2}} + \sqrt{\frac{3(2n-3)}{n^2}} + \dots + \sqrt{\frac{n(2n-n)}{n^2}} \right) \Leftrightarrow$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n} \cdot \frac{2n-2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n} \cdot \frac{2n-3}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n} \cdot \frac{2n-n}{n}} \right) \Leftrightarrow$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2n}{n} - \frac{1}{n} \right)} + \sqrt{\frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2n}{n} - \frac{2}{n} \right)} + \sqrt{\frac{3}{n} \cdot \left(\frac{2n}{n} - \frac{3}{n} \right)} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n} \cdot \left(\frac{2n}{n} - \frac{n}{n} \right)} \right] \Leftrightarrow$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left(2 - \frac{1}{n} \right)} + \sqrt{\frac{2}{n} \cdot \left(2 - \frac{2}{n} \right)} + \sqrt{\frac{3}{n} \cdot \left(2 - \frac{3}{n} \right)} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n} \cdot \left(2 - \frac{n}{n} \right)} \right],$$

lo que nos permite interpretar L como la integral de Riemann de la función:

$$f(x) = \sqrt{x(2-x)},$$

cuyo dominio, como es claro, es $D = [0,2]$, en el que está incluido el intervalo $[0,1]$, donde consideramos, como en el problema anterior, para cada natural n , la partición dada por $P_n = \{0, 1/n, 2/n, 3/n, \dots, n/n = 1\}$, puesto que, por la definición de la integral de Riemann, se verifica:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x(2-x)}dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \sqrt{\frac{k}{n} \cdot \left(2 - \frac{k}{n} \right)},$$

que es equivalente a:

$$\int_0^1 \sqrt{x(2-x)}dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left(2 - \frac{1}{n} \right)} + \sqrt{\frac{2}{n} \cdot \left(2 - \frac{2}{n} \right)} + \sqrt{\frac{3}{n} \cdot \left(2 - \frac{3}{n} \right)} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n} \cdot \left(2 - \frac{n}{n} \right)} \right],$$

es decir:

$$L = \int_0^1 \sqrt{x(2-x)}dx.$$

Ahora, si bien es posible calcular esta integral definida recurriendo a las técnicas de cálculo de primitivas y aplicando la regla de Barrow, resulta más sencillo hacerlo teniendo presente su interpretación geométrica, como vemos a continuación.

Denotando $y = f(x)$, elevando al cuadrado ambos miembros, y operando, tenemos:

$$y = \sqrt{x(2-x)} \Rightarrow y^2 = \left(\sqrt{x(2-x)} \right)^2 \Leftrightarrow y^2 = x(2-x) \Leftrightarrow y^2 = 2x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

y, completando cuadrados:

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

lo que significa que los puntos de coordenadas $(x, f(x))$, con $0 \leq x \leq 2$, se encuentran en la semicircunferencia de radio $r = 1$, centrada en $C = (1,0)$, situada por encima del eje OX (en el primer cuadrante). Así pues, como la integral que estamos considerando tiene por límites de integración 0 y 1, resulta evidente que el valor de esta integral se corresponde con el área de la mitad del semicírculo correspondiente a la semicircunferencia aludida, esto es, con la cuarta parte del área de un círculo de radio $r = 1$, cuyo valor es $\pi/4$, como es claro. De este modo, tenemos $L = \pi/4$, lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2000)

Problema 3.50

Halla el valor al que tiende el valor medio de la función $y = e^{-ax} \cdot \text{sen}(\omega x)$, en el intervalo $(0, \pi/\omega)$, cuando ω tiende a infinito.

Recordemos que, dada una función real de variable real continua f , y dado un intervalo $I = (\alpha, \beta)$, contenido en el dominio de f , se define el valor medio de f en I , que denotamos por $M(f, I)$, como:

$$M(f, I) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx .$$

Así pues, el valor medio de la función dada en el enunciado, en el intervalo considerado, está definido por la expresión:

$$\frac{1}{\pi/\omega - 0} \int_0^{\pi/\omega} e^{-ax} \cdot \text{sen}(\omega x) dx ,$$

que, operando en el cociente que precede a la integral, podemos escribir como:

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} e^{-ax} \cdot \text{sen}(\omega x) dx ,$$

y, en consecuencia, el problema consiste en hallar el límite:

$$L = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} e^{-ax} \cdot \text{sen}(\omega x) dx .$$

Considerando el cambio de variable $t = \omega x$, trasponiendo, queda $x = t/\omega$, y, derivando en ambos miembros, resulta $dx = dt/\omega$; para los límites de integración, vemos que si $x = 0$, entonces, $t = 0$, mientras que si $x = \pi/\omega$, entonces, $t = \pi$. De esta manera, sustituyendo en la anterior integral y simplificando, resulta:

$$L = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \cancel{\omega} \int_0^{\pi} e^{-\frac{at}{\omega}} \cdot \text{sen } t \frac{dt}{\cancel{\omega}} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{at}{\omega}} \cdot \text{sen } t dt .$$

Ahora bien, como no necesitamos calcular el valor exacto de la integral, pues lo que nos interesa es el límite L , y estamos en las hipótesis del teorema del valor medio integral (como es evidente), podemos usar este teorema, a fin de simplificar los cálculos, de modo que estamos en condiciones de afirmar la existencia de un punto en el intervalo $(0, \pi)$, digamos c , para el que se cumple la igualdad:

$$\int_0^{\pi} e^{-\frac{at}{\omega}} \cdot \text{sen } t dt = e^{-\frac{ac}{\omega}} \int_0^{\pi} \text{sen } t dt ,$$

y, entonces, sustituyendo, calculando la integral inmediata del seno, aplicando la regla de Barrow, y operando, llegamos a:

$$L = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{ac}{\omega}} \int_0^{\pi} \sin t dt = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{ac}{\omega}} \left(-\cos t \Big|_0^{\pi} \right) \Leftrightarrow$$

$$L = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{ac}{\omega}} (1 + 1) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} e^{-\frac{ac}{\omega}} = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{ac}{+\infty}} = \frac{2}{\pi} e^0 = \frac{2}{\pi},$$

que es el valor pedido en el enunciado.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.51

Calcula la integral:

$$I = \int_0^1 \frac{x^y - 1}{\ln x} dx.$$

La calcularemos como una «integral paramétrica», para lo cual consideraremos la integral I dependiente de un parámetro real no negativo, digamos y , escribiendo:

$$I(y) = \int_0^1 \frac{x^y - 1}{\ln x} dx,$$

que es una expresión muy adecuada para los fines que perseguimos, como veremos después.

Observemos que, como es evidente, $I(1) = I$, esto es, podemos obtener la integral I a partir de $I(y)$, sin más que particularizar $y = 1$.

Ahora bien, puesto que el integrando de $I(y)$, interpretado como una función de las variables x e y , admite derivada parcial respecto de y , resulta que $I(y)$ es derivable, siendo:

$$I'(y) = \frac{d}{dy} \left(\int_0^1 \frac{x^y - 1}{\ln x} dx \right) = \int_0^1 \frac{d}{dy} \left(\frac{x^y - 1}{\ln x} \right) dx.$$

Así pues, derivando respecto de y el cociente presente en esta última integral (para lo cual consideramos x como una constante), tenemos:

$$I'(y) = \int_0^1 \frac{1}{\ln x} \cdot x^y \ln x dx,$$

de donde, simplificando, se sigue:

$$I'(y) = \int_0^1 \frac{1}{\cancel{\ln x}} \cdot x^y \cancel{\ln x} dx = \int_0^1 x^y dx ,$$

que es una integral inmediata.

Calculando una primitiva de esta función en la variable x (considerando y como una constante) y aplicando la regla de Barrow, llegamos a:

$$I'(y) = \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 = \frac{1^{y+1}}{y+1} - \frac{0^{y+1}}{y+1} \Leftrightarrow I'(y) = \frac{1}{y+1} ,$$

que, como era de esperar, es una función que tiene a y como única variable.

Ahora, es claro que, para obtener $I(y)$ hemos de integrar en ambos miembros, teniendo en cuenta que estamos ante una integral inmediata, resultando:

$$\int I'(y) dy = \int \frac{1}{y+1} dy \Leftrightarrow I(y) = \ln(y+1) + C ,$$

donde C es la constante de integración.

Para determinar el valor de C , podemos observar que $I(0) = 0$, ya que:

$$I(0) = \int_0^1 \frac{x^0 - 1}{\ln x} dx = \int_0^1 \frac{1-1}{\ln x} dx = \int_0^1 0 dx = 0 ,$$

por lo que, sustituyendo, queda $0 = I(0) = \ln(0+1) + C$, de donde se sigue $C = 0$, y, en consecuencia, $I(y) = \ln(y+1)$.

Por último, como ya habíamos adelantado, solo queda tomar $y = 1$, para llegar al resultado $I = I(1) = \ln 2$, lo que cierra el problema.

(Examen de Universidad)

Problema 3.52

Calcula la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - E(x)}{2^{E(x)}} dx,$$

siendo $E(x)$ la parte entera de x .

En primer lugar, a fin de simplificar las expresiones posteriores, denotemos por I el valor de la integral dada en el enunciado.

Ahora, puesto que los límites de integración de esta integral son cero e infinito, la variable x no toma valores negativos, por lo que podemos considerar que $E(x)$ es el número natural inmediatamente menor que x (entendiendo que el cero es natural). Así pues, como el valor de $E(x)$ depende de entre qué dos números naturales consecutivos se encuentre el número x , es claro que resulta útil «romper» la integral dada en la suma (una serie, en realidad) de integrales cuyos límites de integración sean dos números naturales consecutivos. Por ello, escribimos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - E(x)}{2^{E(x)}} dx = \int_0^1 \frac{x - E(x)}{2^{E(x)}} dx + \int_1^2 \frac{x - E(x)}{2^{E(x)}} dx + \cdots + \int_k^{k+1} \frac{x - E(x)}{2^{E(x)}} dx + \cdots,$$

igualdad que podemos expresar de una manera más abreviada como:

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{x - E(x)}{2^{E(x)}} dx.$$

Sustituyendo $E(x)$ por su valor, según el intervalo en que esté el número x , tenemos:

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{x - k}{2^k} dx,$$

de donde, «extrayendo» de la integral la constante $1/2^k$ (no depende de x), calculando la integral inmediata que resulta, aplicando la regla de Barrow, y operando, se sigue:

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int_k^{k+1} (x - k) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{x^2}{2} - kx \right) \Big|_k^{k+1} \Leftrightarrow$$

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{(k+1)^2}{2} - k(k+1) - \frac{k^2}{2} + k^2 \right) \Leftrightarrow$$

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{k^2 + 2k + 1}{2} - k^2 - k - \frac{k^2}{2} + k^2 \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}},$$

que es una serie geométrica de razón $1/2$, puesto que se verifica la igualdad:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

Finalmente, aplicando la conocida fórmula que permite calcular la suma de todos los términos de una progresión geométrica ilimitada de razón (positiva) menor que uno, y operando, llegamos a:

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1,$$

lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2012)

Problema 3.53

Demuestra la igualdad:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx,$$

y deduce de ella esta otra:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx.$$

En primer lugar, denotemos por I la integral del primer miembro, esto es:

$$I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx.$$

Si consideramos el cambio de variable $x = \pi - t$, es claro que, derivando en ambos miembros, se sigue $dx = -dt$; para los límites de integración, tenemos que si $x = 0$, entonces, $t = \pi$, mientras que si $x = \pi$, entonces, $t = 0$. De este modo, sustituyendo, resulta:

$$I = \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) (-dt),$$

donde podemos prescindir del signo negativo de dt , intercambiando los límites de integración, quedando:

$$I = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) dt.$$

Ahora, teniendo presente que, como es claro, se satisface $\sin(\pi - t) = \sin t$, para cualquier número real t , llegamos a:

$$I = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt,$$

de donde, multiplicando y aplicando la propiedad lineal de la integral, se sigue:

$$I = \int_0^{\pi} (\pi f(\sin t) - t f(\sin t)) dt \Leftrightarrow I = \int_0^{\pi} \pi f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt.$$

Como podemos observar, la segunda integral del segundo miembro es precisamente la integral I (evidentemente, es indiferente que usemos la variable t en lugar de x), por lo que podemos escribir:

$$I = \int_0^{\pi} \pi f(\sin t) dt - I,$$

y, de aquí, «extrayendo» la constante π de la integral, y trasponiendo:

$$2I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin t) dt,$$

que es la igualdad que queríamos demostrar (de nuevo, es indistinto que usemos la variable t en lugar de x , como es obvio).

Para deducir la segunda igualdad a partir de esta, vamos a escribir el integrando de la integral del primer miembro como el producto de la variable x por una función f , que dependa solo del seno de x , para lo que usaremos la conocida identidad trigonométrica fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, resultando:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + 1 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} x \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx,$$

siendo:

$$f(x) = \frac{x}{2 - x^2}.$$

Así pues, aplicando la primera igualdad, tenemos:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \operatorname{sen}^2 x} dx ,$$

y, volviendo a usar la identidad trigonométrica fundamental, llegamos a:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx .$$

Ahora solo nos queda reescribir la integral del segundo miembro, para que adopte la forma que presenta en el enunciado, lo cual podemos conseguir mediante el cambio de variable $t = \cos x$. Derivando en ambos miembros, resulta $dt = -\operatorname{sen} x \cdot dx$, de donde $dx = -dt/\operatorname{sen} x$; para los límites de integración, vemos que si $x = 0$, entonces, $t = 1$, mientras que si $x = \pi$, ha de ser $t = -1$. Por tanto, sustituyendo, simplificando e intercambiando los límites de integración, tenemos:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{1 + t^2} \cdot \frac{-dt}{\cancel{\operatorname{sen} x}} = \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{-dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{1 + t^2} .$$

Finalmente, teniendo en cuenta que el integrando de esta última integral es una función par, es claro que:

$$\int_{-1}^0 \frac{dt}{1 + t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} ,$$

por lo que, aplicando una propiedad de la integral definida y sustituyendo, resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx &= \frac{\pi}{2} \left(\int_{-1}^0 \frac{dt}{1 + t^2} + \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} + \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} \right) = \frac{\pi}{2} 2 \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \pi \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} , \end{aligned}$$

y ya tenemos probada la segunda igualdad, como pretendíamos (tengamos en cuenta, una vez más, que es indiferente usar la letra t o la letra x para designar la variable en la última integral, la cual es inmediata, y su valor es $\pi/4$, como ya hemos visto en un problema anterior).

(Oposiciones de Secundaria, 2012 y convocatoria anterior, y examen de Universidad)

Problema 3.54

Para cada natural $n \geq 1$, se considera la integral:

$$I_n = \int_0^\pi \frac{dx}{(1 + \lambda \cos x)^n},$$

donde λ es un número real tal que $|\lambda| < 1$. Se pide:

- a) Encuentra una ley de recurrencia entre tres términos consecutivos de I_n .
 b) Se considera la integral:

$$J_n^m = \int_0^\pi \frac{\cos^m x}{(1 + \lambda \cos x)^n} dx,$$

donde m es un número natural tal que $1 \leq m \leq n$. Demuestra que se cumple la igualdad:

$$\lambda^m J_n^m = I_{n-m} - \binom{m}{1} I_{n-m+1} + \binom{m}{2} I_{n-m+2} - \cdots + (-1)^m I_n.$$

En primer lugar, podemos observar que, al ser $|\lambda| < 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, la expresión $1 + \lambda \cos x$ no es nula, por lo que tienen sentido las integrales dadas en el enunciado. Dicho esto, pasemos a resolver los dos apartados por separado.

Apartado a)

Multiplicando el numerador y el denominador del integrando de I_n por $1 + \lambda \cos x$, y aplicando la linealidad de la integral, tenemos:

$$I_n = \int_0^\pi \frac{1 + \lambda \cos x}{(1 + \lambda \cos x)^{n+1}} dx = \int_0^\pi \frac{1}{(1 + \lambda \cos x)^{n+1}} dx + \int_0^\pi \frac{\lambda \cos x}{(1 + \lambda \cos x)^{n+1}} dx,$$

de donde, según la definición de I_n , se sigue:

$$I_n = I_{n+1} + \int_0^\pi \frac{\lambda \cos x}{(1 + \lambda \cos x)^{n+1}} dx,$$

de manera que ya hemos conseguido introducir un término consecutivo de I_n .

Ahora, aplicamos la integración por partes a la integral del segundo miembro, realizando las identificaciones:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{(1 + \lambda \cos x)^{n+1}} \rightarrow du = (n+1) \frac{\lambda \sin x}{(1 + \lambda \cos x)^{n+2}} dx, \\ dv = \lambda \cos x dx \rightarrow v = \lambda \sin x \end{cases}$$

lo que da lugar a:

$$I_n = I_{n+1} + \frac{\lambda \operatorname{sen} x}{(1 + \lambda \cos x)^{n+1}} \Big|_0^\pi - (n+1) \int_0^\pi \frac{\lambda^2 \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \lambda \cos x)^{n+2}} dx,$$

y, como $\operatorname{sen} \pi = \operatorname{sen} 0 = 0$, llegamos a:

$$I_n = I_{n+1} - (n+1) \int_0^\pi \frac{\lambda^2 \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \lambda \cos x)^{n+2}} dx,$$

de donde, empleando la identidad trigonométrica fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y multiplicando, se sigue:

$$I_n = I_{n+1} - (n+1) \int_0^\pi \frac{\lambda^2 (1 - \cos^2 x)}{(1 + \lambda \cos x)^{n+2}} dx = I_{n+1} - (n+1) \int_0^\pi \frac{\lambda^2 - \lambda^2 \cos^2 x}{(1 + \lambda \cos x)^{n+2}} dx.$$

Tengamos ahora en cuenta que podemos escribir $\lambda^2 \cos^2 x$ como $(\lambda \cos x)^2$, es decir, se verifica $\lambda^2 \cos^2 x = (\lambda \cos x)^2$; sumando y restando 1 dentro de este paréntesis, tenemos $\lambda^2 \cos^2 x = (1 + \lambda \cos x - 1)^2$, y, aplicando la conocida identidad algebraica, resulta $\lambda^2 \cos^2 x = 1 + (1 + \lambda \cos x)^2 - 2(1 + \lambda \cos x)$.

Sustituyendo esta expresión en la última integral, aplicando las propiedades de la integral definida, y simplificando, tenemos:

$$I_n = I_{n+1} - (n+1) \int_0^\pi \frac{\lambda^2 - 1 - (1 + \lambda \cos x)^2 + 2(1 + \lambda \cos x)}{(1 + \lambda \cos x)^{n+2}} dx \Leftrightarrow$$

$$I_n = I_{n+1} - (n+1) \left[\int_0^\pi \frac{\lambda^2 - 1}{(1 + \lambda \cos x)^{n+2}} dx - \int_0^\pi \frac{(1 + \lambda \cos x)^2}{(1 + \lambda \cos x)^{n+2}} dx + 2 \int_0^\pi \frac{1 + \lambda \cos x}{(1 + \lambda \cos x)^{n+2}} dx \right] \Leftrightarrow$$

$$I_n = I_{n+1} - (n+1) \left[\int_0^\pi \frac{\lambda^2 - 1}{(1 + \lambda \cos x)^{n+2}} dx - \int_0^\pi \frac{1}{(1 + \lambda \cos x)^n} dx + 2 \int_0^\pi \frac{1}{(1 + \lambda \cos x)^{n+1}} dx \right],$$

igualdad que, teniendo presente la definición de I_n , podemos escribir como:

$$I_n = I_{n+1} - (n+1) \left[(\lambda^2 - 1) I_{n+2} - I_n + 2 I_{n+1} \right],$$

y, operando:

$$I_n = I_{n+1} - (n+1)(\lambda^2 - 1) I_{n+2} + n I_n + I_n - 2n I_{n+1} - 2 I_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$(n+1)(\lambda^2 - 1) I_{n+2} + (2n+1) I_{n+1} - n I_n = 0,$$

que es la ley de recurrencia pedida.

Apartado b)

Como es claro, aplicando las propiedades de la integral y de las potencias, tenemos:

$$\lambda^m J_n^m = \lambda^m \int_0^\pi \frac{\cos^m x}{(1 + \lambda \cos x)^n} dx = \int_0^\pi \frac{\lambda^m \cos^m x}{(1 + \lambda \cos x)^n} dx = \int_0^\pi \frac{(\lambda \cos x)^m}{(1 + \lambda \cos x)^n} dx ,$$

y, sumando y restando 1 dentro del paréntesis del numerador del integrando (como hicimos en el apartado anterior), y usando la fórmula de Newton que permite desarrollar la potencia m -ésima de un binomio, resulta:

$$\lambda^m J_n^m = \int_0^\pi \frac{(1 + \lambda \cos x - 1)^m}{(1 + \lambda \cos x)^n} dx = \int_0^\pi \frac{\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (1 + \lambda \cos x)^{m-k} (-1)^k}{(1 + \lambda \cos x)^n} dx .$$

Ahora bien, como se trata de una suma finita, las propiedades lineales de la integral permiten intercambiar la integral con el sumatorio, además de «extraer» las constantes, de manera que, operando posteriormente y teniendo en cuenta la definición de I_n , queda:

$$\begin{aligned} \lambda^m J_n^m &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \int_0^\pi \frac{(1 + \lambda \cos x)^{m-k}}{(1 + \lambda \cos x)^n} dx = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \int_0^\pi \frac{dx}{(1 + \lambda \cos x)^{n-m+k}} \Leftrightarrow \\ &\lambda^m J_n^m = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} I_{n-m+k} , \end{aligned}$$

de donde, desarrollando este último sumatorio, se sigue:

$$\lambda^m J_n^m = I_{n-m} - \binom{m}{1} I_{n-m+1} + \binom{m}{2} I_{n-m+2} - \binom{m}{3} I_{n-m+3} + \cdots + (-1)^m I_n ,$$

que es precisamente la igualdad que queríamos demostrar.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.55

Demuestra la siguiente relación de recurrencia:

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2},$$

siendo:

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Como es claro, podemos escribir:

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos x \cos^{n-1} x dx,$$

e integrar por partes, haciendo las identificaciones:

$$\begin{cases} u = \cos^{n-1} x \rightarrow du = -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x dx \\ dv = \sin^m x \cos x dx \rightarrow v = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \end{cases},$$

de donde resulta:

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \int (n-1) \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \cos^{n-2} x \sin x dx.$$

Ahora, extrayendo las constantes de la integral, «reorganizando» las potencias de base $\sin x$, y empleando la identidad trigonométrica fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, tenemos:

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \Leftrightarrow$$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx,$$

y, multiplicando, aplicando la propiedad lineal de la integral, y teniendo en cuenta la definición de $I_{m,n}$, llegamos a:

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \left(\int \sin^m x \cos^{n-2} x dx - \int \sin^m x \cos^{n-2} x \cos^2 x dx \right) \Leftrightarrow$$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \left(\int \sin^m x \cos^{n-2} x dx - \int \sin^m x \cos^n x dx \right) \Leftrightarrow$$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} (I_{m,n-2} - I_{m,n}) \Leftrightarrow$$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2} - \frac{n-1}{m+1} I_{m,n}.$$

Finalmente, trasponiendo términos y operando, resulta:

$$I_{m,n} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{n-1}{m+1} \right) I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{m+n}{m+1} I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2} \Leftrightarrow$$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2},$$

que es la igualdad que pretendíamos demostrar.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 3.56

Demuestra la igualdad:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx = 2\pi \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2}.$$

Sea $a_n = \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx$, y se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, y determina si la serie es convergente.

Demostraremos la igualdad de dos maneras distintas: mediante el uso de una regla de recurrencia, y por el método de inducción, para lo cual nos serviremos del resultado probado en el problema anterior.

Primera manera (por recurrencia)

En primer lugar, «extrayendo» $\sin x$ de la potencia del integrando, queda:

$$a_n = \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin^{2n-1} x dx ,$$

que podemos integrar por partes haciendo las identificaciones:

$$\begin{cases} u = \sin^{2n-1} x \rightarrow du = (2n-1) \sin^{2n-2} x \cos x dx \\ dv = \sin x dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases} ,$$

resultando:

$$a_n = -\cos x \sin^{2n-1} x \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (2n-1) \sin^{2n-2} x \cos^2 x dx .$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $\sin(2\pi) = \sin 0 = 0$, y usando la identidad trigonométrica fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, podemos escribir:

$$a_n = \int_0^{2\pi} (2n-1) \sin^{2n-2} x (1 - \sin^2 x) dx ,$$

de donde, multiplicando, aplicando las propiedades lineales de la integral, y teniendo en cuenta la definición de a_n , se sigue:

$$a_n = \int_0^{2\pi} (2n-1) \sin^{2n-2} x dx - \int_0^{2\pi} (2n-1) \sin^{2n} x dx \Leftrightarrow a_n = (2n-1)a_{n-1} - (2n-1)a_n ,$$

y, trasponiendo y operando, llegamos a:

$$a_n + (2n-1)a_n = (2n-1)a_{n-1} \Leftrightarrow \cancel{a_n} + 2na_n - \cancel{a_n} = (2n-1)a_{n-1} \Leftrightarrow a_n = \frac{2n-1}{2n} a_{n-1} .$$

De esta manera, hemos obtenido una relación de recurrencia que relaciona cada término de la sucesión $\{a_n\}$ con el anterior, y, por tanto, «descendiendo» en el valor de n , tenemos:

$$a_n = \frac{2n-1}{2n} a_{n-1} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} a_{n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} a_{n-3} \Leftrightarrow$$

$$a_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \frac{2n-7}{2n-6} a_{n-4} = \dots = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \frac{2n-7}{2n-6} \dots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} a_0 ,$$

expresión que permite calcular cualquier término de la sucesión, una vez determinado el término a_0 . Pero, $a_0 = 2\pi$, pues:

$$a_0 = \int_0^{2\pi} \sin^0 x dx = \int_0^{2\pi} dx = x \Big|_0^{2\pi} = 2\pi,$$

luego:

$$a_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \frac{2n-7}{2n-6} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} 2\pi.$$

Extrayendo el factor común 2 de cada denominador y agrupando los factores, resulta:

$$a_n = 2\pi \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \frac{2n-5}{2(n-2)} \cdot \frac{2n-7}{2(n-3)} \cdots \frac{3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$a_n = 2\pi \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7) \cdots 3 \cdot 1}{2^n n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$a_n = 2\pi \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7) \cdots 3 \cdot 1}{2^n \cdot n!}.$$

Como podemos observar, se trata de una expresión que tiene bastante similitud con la dada en el enunciado (la que queremos demostrar), pero que no termina de ser la misma. En concreto, llama la atención que en el denominador de la expresión que hemos obtenido aparece $2^n \cdot n!$, mientras que en la dada en el enunciado aparece este mismo denominador, pero elevado al cuadrado.

De este modo, para llegar a la igualdad que tratamos de probar, vemos la necesidad de multiplicar el denominador de la expresión hallada por $2^n \cdot n!$, lo cual podemos hacer, a condición de multiplicar también el numerador por este número. Así pues, podemos escribir:

$$a_n = 2\pi \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7) \cdots 3 \cdot 1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{2^n \cdot n!},$$

y, desarrollando el factorial de n del numerador, «asociando» cada factor resultante con uno de los 2 que forman la potencia 2^n (en realidad, es el proceso inverso al seguido antes con el denominador), operando, y reordenando los factores, resulta:

$$a_n = 2\pi \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7) \cdots 3 \cdot 1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{2^n n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 2 \cdot 1}{2^n \cdot n!} \Leftrightarrow$$

$$a_n = 2\pi \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7) \cdots 3 \cdot 1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{(2n)[2(n-1)][2(n-2)][2(n-3)] \cdots (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1)}{2^n \cdot n!} \Leftrightarrow$$

$$a_n = 2\pi \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)\cdots 3 \cdot 1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{(2n)(2n-2)(2n-4)(2n-6)\cdots 4 \cdot 2}{2^n \cdot n!} \Leftrightarrow$$

$$a_n = 2\pi \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)(2n-6)(2n-7)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2^n \cdot n!)^2} \Leftrightarrow$$

$$a_n = 2\pi \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2},$$

que es justamente la igualdad que pretendíamos probar.

Segunda manera (por inducción)

Para la base de la inducción, es claro que si $n = 0$, entonces, como ya hemos visto, $a_0 = 2\pi$, mientras que la expresión del segundo miembro queda:

$$2\pi \frac{(2 \cdot 0)!}{(2^0 \cdot 0!)^2} = 2\pi \frac{0!}{(0!)^2} = 2\pi \frac{1}{1^2} = 2\pi,$$

por lo que ya tenemos probada la igualdad para $n = 0$.

Si, en lugar de fijar la base de la inducción en $n = 0$, lo hacemos en $n = 1$ (es una cuestión de interpretación), por una parte, haciendo uso de la conocida fórmula trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

y de las propiedades de la integral, tenemos:

$$a_1 = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dx - \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2x)}{2} dx \Leftrightarrow$$

$$a_1 = \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

mientras que, por otra parte, la expresión del segundo miembro queda:

$$2\pi \frac{(2 \cdot 1)!}{(2^1 \cdot 1!)^2} = 2\pi \frac{2}{2^2} = \pi,$$

lo que prueba que también en este caso la igualdad es cierta.

Supongamos ahora que la fórmula es cierta para un número natural $n \geq 1$, y veamos que, en tal caso, también ha de serlo para $n + 1$, es decir, se trata de demostrar la igualdad:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n+2} x dx = 2\pi \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1} \cdot (n+1)!)^2}, \quad (I)$$

suponiendo que se verifica:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx = 2\pi \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2}.$$

Escribiendo el integrando de la integral del primer miembro de (I) como producto de dos potencias de $\sin x$, empleando la conocida identidad trigonométrica fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, aplicando las propiedades de la integral, y teniendo en cuenta la definición de a_n , resulta:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_0^{2\pi} \sin^{2n+2} x dx = \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x \cdot \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x (1 - \cos^2 x) dx \Leftrightarrow \\ a_{n+1} &= \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx - \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x \cdot \cos^2 x dx \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n - \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x \cdot \cos^2 x dx. \quad (II) \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta la relación recurrente probada en el problema anterior, colocando en la fórmula del enunciado $2n$ en lugar de m y 2 en lugar de n , tenemos:

$$I_{2n,2} = \frac{\sin^{2n+1} x \cos^{2-1} x}{2n+2} + \frac{2-1}{2n+2} I_{2n,2-2} \Leftrightarrow I_{2n,2} = \frac{\sin^{2n+1} x \cos x}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} I_{2n,0},$$

es decir:

$$\int \sin^{2n} x \cdot \cos^2 x dx = \frac{\sin^{2n+1} x \cos x}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} \int \sin^{2n} x \cdot \cos^0 x dx,$$

por lo que, fijando los límites de integración 0 y 2π , podemos escribir:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x \cdot \cos^2 x dx = \left. \frac{\sin^{2n+1} x \cos x}{2n+2} \right|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n+2} \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx,$$

y, al ser $\sin(2\pi) = \sin 0 = 0$, resulta:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x \cdot \cos^2 x dx = \frac{1}{2n+2} \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx,$$

de donde, recordando la definición de a_n , llegamos a:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x \cdot \cos^2 x dx = \frac{1}{2n+2} a_n.$$

Sustituyendo esta integral en (II), queda:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2n+2} a_n,$$

y, extrayendo factor común y operando, se sigue:

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) a_n \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} a_n.$$

Ahora bien, por la hipótesis de inducción, tenemos:

$$a_n = 2\pi \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2},$$

y, sustituyendo, resulta:

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot 2\pi \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2},$$

expresión cuyo numerador precisa del factor $2n+2$ para tener el número $(2n+2)!$, como figura en la igualdad (I), que tratamos de demostrar. Así pues, hemos de multiplicar numerador y denominador por $2n+2$, de manera que, operando posteriormente, llegamos a:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2n+1}{2n+2} \cdot 2\pi \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \cdot \frac{2n+2}{2n+2} = 2\pi \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(n+1)2(n+1)(2^n \cdot n!)^2} \Leftrightarrow \\ a_{n+1} &= 2\pi \frac{(2n+2)!}{2^2(n+1)^2(2^n \cdot n!)^2} = 2\pi \frac{(2n+2)!}{(2^n \cdot 2 \cdot (n+1)n!)^2} = 2\pi \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1} \cdot (n+1)!)^2}, \end{aligned}$$

que es precisamente la igualdad (I). Así pues, por inducción, podemos decir que la igualdad dada en el enunciado es cierta para todo natural $n \geq 0$, como queríamos demostrar.

Una vez probada la igualdad en cuestión, de dos maneras distintas, pasamos a resolver la segunda parte del problema, esto es, a calcular el límite de a_n cuando n tiende a infinito, y a comprobar si la serie que tiene por término general la sucesión $\{a_n\}$ es

convergente, para lo cual, como parecía previsible, usaremos la igualdad demostrada, junto con la fórmula de Stirling, que, como es sabido, establece la igualdad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}.$$

Así pues, sustituyendo y operando, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \frac{\sqrt{2\pi(2n)} \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n}}{(2^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n})^2} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \frac{\cancel{2} \sqrt{\pi n} \cdot \cancel{2}^{2n} \cdot \cancel{n}^{2n} \cdot e^{-2n}}{\cancel{2}^{2n} \cdot \cancel{2} \pi n \cdot \cancel{n}^{2n} \cdot e^{-2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{\sqrt{\pi n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt{\frac{\pi n}{n^2}} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt{\frac{\pi}{n}} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{\infty}} = 0,$$

y ya tenemos calculado el límite pedido.

Obsérvese que era de esperar este valor, ya que, como es sabido, una condición necesaria (que no suficiente) para que una serie sea convergente es que su término general tienda a cero. De haberse obtenido otro valor para el límite calculado, la serie asociada a la sucesión $\{a_n\}$ no sería convergente, y ya habríamos terminado el problema, pero no es el caso; puesto que su término general tiende a cero, la serie puede ser convergente, o no serlo, que es lo que vamos a determinar a continuación.

Siguiendo la forma general de proceder en este tipo de situaciones, en primer lugar, usaremos el criterio de D'Alembert, calculando el límite del cociente a_{n+1}/a_n , cuando n tiende a infinito.

Sustituyendo, operando y simplificando, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1} \cdot (n+1)!)^2}}{2\pi \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi(2n+2)!(2^n \cdot n!)^2}{2\pi(2n)!(2^{n+1} \cdot (n+1)!)^2} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi(2n+2)! \cdot 2^{2n} \cdot n! \cdot n!}{2\pi(2n)! \cdot 2^{2n+2} \cdot (n+1)! \cdot (n+1)!} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2} \pi (2n+2)(2n+1) \cancel{(2n)!} \cdot \cancel{2}^{2n} \cdot \cancel{n}! \cdot \cancel{n}!}{\cancel{2} \pi \cancel{(2n)!} \cdot \cancel{2}^{2n} \cdot 2^2 \cdot (n+1) \cdot \cancel{n}! \cdot (n+1) \cdot \cancel{n}!} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(n+1)}(2n+1)}{2^{\cancel{2}}(n+1)\cancel{(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{2}{2} = 1,$$

por lo que este criterio no proporciona información, y hemos de recurrir al criterio de Raabe-Duhamel, para lo cual debemos hallar el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right). \quad (\text{III})$$

A partir de los cálculos realizados antes (cuando aún no habíamos tomado límite), sustituyendo y operando, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{2n+1}{2n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2},$$

de donde se deduce que la serie es divergente, lo que concluye el problema.

Recordemos que el criterio de Raabe-Duhamel establece que si el límite (III) es estrictamente menor que uno, entonces, la serie de término general a_n es divergente, mientras que si este límite es estrictamente mayor que uno, la serie es convergente; en caso de que el límite sea igual a uno, el criterio no proporciona información suficiente.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Capítulo IV. Problemas de Geometría

Problema 4.1

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Demuestra que $|V| \leq |E| + 1$ (las barras verticales indican el cardinal del conjunto correspondiente).

Lo demostraremos por inducción en el número de vértices del grafo, $|V|$.

Si el grafo tiene un único vértice, $|V| = 1$, entonces, no puede tener aristas (es decir, $|E| = 0$), por lo que es evidente que $|V| \leq |E| + 1$, ya que $1 \leq 0 + 1$.

Supongamos ahora que la desigualdad es cierta para cualquier grafo conexo con n vértices, siendo $n \geq 1$, y veamos que, en tal situación, también debe serlo para cualquier grafo conexo con $n + 1$ vértices.

Sea, pues, $G_{n+1} = (V_{n+1}, F)$ un grafo conexo con $n + 1$ vértices. Como G_{n+1} es conexo, y tiene al menos dos vértices (tengamos en cuenta que $n + 1 \geq 2$, al ser $n \geq 1$), dos cualesquiera de ellos están conectados, lo que implica que el grado de los vértices de G_{n+1} es estrictamente mayor que cero (dicho de otro modo, G_{n+1} no tiene vértices aislados). Podemos escribir, entonces, $\text{gr}(v) \geq 1$, para cualquier v perteneciente a V_{n+1} . De este modo, caben dos posibilidades: que exista algún vértice de grado 1, o que todos sean de grado mayor que 1.

Si existe un vértice, digamos w , tal que $\text{gr}(w) = 1$, entonces, existe una única arista incidente con él, que denotaremos por x .

Consideremos el grafo $G_n = (V_n, F')$, donde $V_n = V_{n+1} - \{w\}$ y $F' = F - \{x\}$, es decir, G_n es el grafo que resulta de G_{n+1} al suprimir el vértice w y la única arista incidente con él.

Como es evidente, G_n tiene n vértices y es conexo, ya que la arista suprimida solo conectaba el vértice w con el resto del grafo, por lo que su supresión no «rompe» la conexión, puesto que también se ha eliminado el vértice w .

Así pues, estamos en condiciones de aplicar la hipótesis de inducción al grafo G_n , por lo que podemos afirmar que $|V_n| \leq |F'| + 1$. Sumando una unidad en cada miembro de la desigualdad, se sigue $|V_n| + 1 \leq |F'| + 1 + 1$ y, teniendo en cuenta las igualdades $|F| = |F'| + 1$ y $|V_{n+1}| = |V_n| + 1$, resulta $|V_{n+1}| \leq |F| + 1$, que es lo que queríamos demostrar.

Si, por el contrario, todos los vértices son de grado mayor que 1, podemos escribir:

$$\text{gr}(v) \geq 2, \forall v \in V_{n+1},$$

de donde, sumando los grados de todos los vértices de G_{n+1} , tenemos:

$$\sum_{v \in G_{n+1}} \text{gr}(v) \geq 2|V_{n+1}|.$$

Ahora bien, por un teorema fundamental de la Teoría de grafos, se sabe que:

$$\sum_{v \in G_{n+1}} \text{gr}(v) = 2|F|,$$

lo que se traduce en que $2|F| \geq 2|V_{n+1}|$, y, cancelando el factor 2, $|V_{n+1}| \leq |F|$. Obviamente, esta desigualdad se mantiene si incrementamos el segundo miembro, por lo que podemos escribir $|V_{n+1}| \leq |F| + 1$, y ya tenemos lo que pretendíamos demostrar. Por decirlo de alguna manera, en este caso hemos demostrado más de lo que se pedía.

Así pues, cualquiera que sea el caso, hemos probado la desigualdad para cualquier grafo conexo con $n + 1$ vértices, y, por inducción, podemos concluir con que la desigualdad es cierta para cualquier grafo conexo, con independencia del número de vértices que tenga.

(Examen de Universidad)

Problema 4.2

Demuestra que todo grafo completo es hamiltoniano.

Sea n un número natural, y denotemos por $G = (V, E) = K_n$ el grafo completo de n vértices, donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, con $v_i \neq v_j$, si $i \neq j$.

Desde luego, si $n = 0$ o $n = 1$, no hay nada que probar, por lo que supondremos que $n \geq 2$. Al ser G un grafo completo, podemos escribir:

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j, (v_i, v_j) \in E,$$

es decir, dos vértices cualesquiera están conectados por una arista.

Así pues, considerando la secuencia de vértices $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$, y teniendo en cuenta que todas las aristas $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$ pertenecen a E , podemos formar el ciclo de Hamilton formado por las mismas, esto es, el ciclo $\{v_1 - v_2 - \dots - v_n - v_1\}$, lo que prueba que G es hamiltoniano, como se pretendía.

(Examen de Universidad)

Problema 4.3

Calcula el número máximo de puntos diagonales de un polígono convexo de ocho lados.

Recordemos, en primer lugar, que una diagonal de un polígono convexo es una cualquiera de las rectas (o segmentos) que pasan por dos vértices no consecutivos del polígono, esto es, dos vértices que no estén unidos por un lado. Asimismo, un punto diagonal es aquel que resulta de la intersección de dos diagonales.

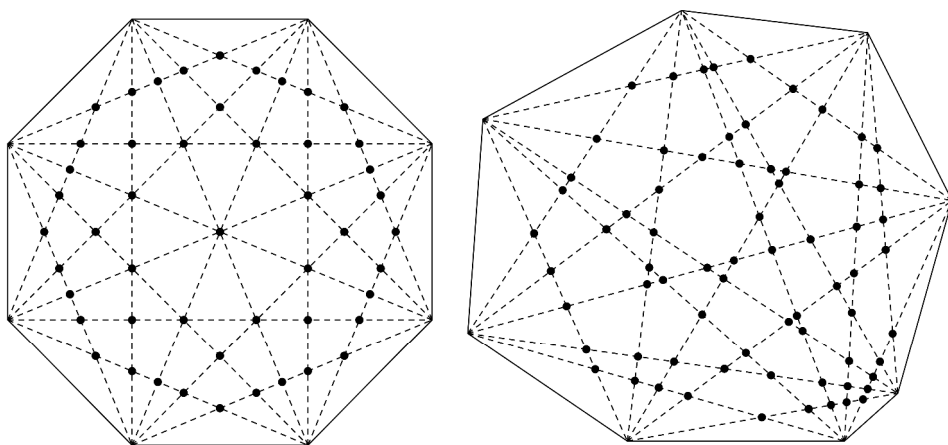
Ahora bien, puesto que el polígono que estamos considerando es convexo, cualquier segmento que una dos de sus puntos «no se sale» de él, lo que implica, en particular, que todos los puntos diagonales son interiores al polígono, y que cada uno de ellos viene determinado por cuatro vértices, ya que podemos considerar cada punto diagonal del polígono como el punto de intersección de las dos diagonales del cuadrilátero formado por los cuatro vértices del polígono que son incidentes con alguna de las dos diagonales que determinan el punto diagonal en cuestión.

De esta manera, el número máximo de puntos diagonales del polígono coincide con la cantidad de cuadriláteros que se pueden formar a partir de sus ocho vértices, cuyo cálculo puede hacerse mediante el uso de la combinatoria, teniendo en cuenta que

esta cantidad coincide con el número de maneras de tomar cuatro vértices de entre los ocho existentes. Así pues, el número máximo de puntos diagonales es:

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 70.$$

Obsérvese que hemos calculado el número «máximo» de puntos diagonales (como se pretendía), ya que hemos supuesto que todos los puntos diagonales son distintos. Tengamos en cuenta que, según el polígono de que se trate, es posible que dos puntos diagonales sean iguales, situación que se da si el polígono tiene tres diagonales (o más) concurrentes en un mismo punto. En el gráfico se muestran dos ejemplos: a la izquierda, un octógono regular, con 49 puntos diagonales; a la derecha, un octógono con 70 puntos diagonales (el máximo posible, como hemos visto).



(Oposiciones de Secundaria, examen de Universidad y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 4.4

Se trazan en un plano n rectas secantes dos a dos y tres no concurrentes en un mismo punto. Determina en cuántas regiones queda dividido el plano.

Para cada natural n , denotemos por R_n el número de regiones en que queda dividido el plano al trazar n rectas en las condiciones del enunciado. Calcularemos R_n a partir de una relación de recurrencia, que encontraremos como se detalla a continuación.

Si $n = 0$, es claro que $R_0 = 1$, pues si no hay recta alguna, hay una única región (el plano entero).

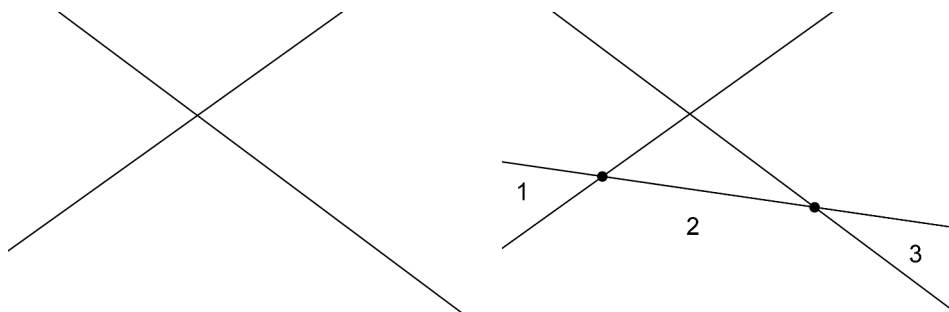
Si $n = 1$, entonces, $R_1 = 2$, ya que una recta divide el plano en dos semiplanos.

Si $n = 2$, podemos observar que, puesto que las dos rectas son secantes, tenemos que $R_2 = 4$, lo cual podemos interpretar como que, al añadir una recta a la anterior, se forman dos nuevas regiones.

Si $n = 3$, tenemos tres rectas que se cortan dos a dos, sin coincidir las tres en un mismo punto. Si interpretamos esta situación como el añadido de una nueva recta a dos previamente trazadas, podemos darnos cuenta de que se están creando tres nuevas regiones en el plano (una más que el número de puntos de intersección de la nueva recta con las dos anteriores). De esta manera, podemos escribir:

$$R_3 = R_2 + 3 = 4 + 3 = 7.$$

En el gráfico se puede ver con más claridad el argumento que hemos utilizado: en el diagrama de la izquierda hay dos rectas, que dividen el plano en cuatro partes, como es claro y ya hemos dicho; el diagrama de la derecha muestra la incorporación de una nueva recta, que corta a las dos anteriores, generando con ello tres nuevas partes, que aparecen numeradas.



Si $n = 4$, con un argumento similar, podemos decir que $R_4 = R_3 + 4$, ya que, si tenemos tres rectas, al trazar una nueva, cortará a las tres presentes, generándose tres puntos de intersección y, en consecuencia, cuatro nuevas regiones. Sustituyendo el valor de R_3 , resulta:

$$R_4 = R_3 + 4 = 7 + 4 = 11.$$

De esta manera, podemos llegar a la expresión general $R_n = R_{n-1} + n$, y, «descendiendo», resulta:

$$R_n = R_{n-1} + n = R_{n-2} + (n-1) + n = R_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \dots = R_1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n.$$

Sustituyendo R_1 por su valor (anteriormente hallado), aplicando la fórmula que nos permite calcular la suma de los primeros n números naturales, y operando, tenemos:

$$R_n = 2 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2},$$

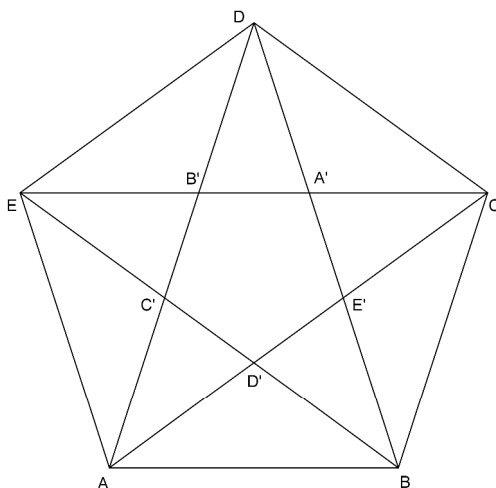
que es el valor que pretendíamos averiguar.

(Oposiciones de Secundaria, examen de Universidad y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 4.5

Consideremos un pentágono regular. Al trazar sus diagonales, se forma en su interior un nuevo pentágono regular. ¿Qué relación existe entre las áreas de los dos pentágonos?

Sea un pentágono regular, de vértices A, B, C, D y E, en el que se han trazado sus cinco diagonales, dando lugar al pentágono regular de vértices A', B', C', D' y E', mostrados en el gráfico. Como vemos, el lado del pentágono mayor es igual a la longitud del segmento que une A y B, que denotaremos por AB o p, según el contexto; de la misma manera, la medida del lado del pentágono menor es igual a la longitud del segmento A'B', que denotaremos también por q.



Como sabemos, cualesquiera dos pentágonos regulares son semejantes, siendo la razón de semejanza, que denotaremos por k, igual al cociente entre los lados de ambos polígonos: $k = q/p$. Además, es conocido el hecho de que la razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza, por lo que el problema planteado consiste en hallar el número:

$$k^2 = \left(\frac{q}{p} \right)^2, \quad (I)$$

que podemos determinar teniendo en cuenta la proporción entre ciertos segmentos, consecuencia de la presencia de algunos triángulos semejantes.

En concreto, a partir del resultado básico que sostiene que cada una de las diagonales de un pentágono regular es paralela a uno de los lados, resulta que los triángulos ABD' y ECD tienen sus lados respectivamente paralelos, lo que se traduce en que ambos triángulos son semejantes y, en consecuencia, tienen sus lados proporcionales, de donde resulta la relación:

$$\frac{EC}{AB} = \frac{ED}{AD'}.$$

Pero, además, como es sabido, los segmentos EA' , $B'C$, AE' y CD' tienen la misma longitud, que es igual a la longitud del lado del pentágono mayor, esto es, p , de donde resulta $EC = EA' + B'C - A'B' = 2p - q$ y $AD' = AE' - D'E' = p - q$ (observemos que $D'E'$ también es un lado del pentágono menor, por lo que $D'E' = q$), así que, sustituyendo en la expresión anterior y operando, llegamos a:

$$\frac{EC}{AB} = \frac{ED}{AD'} \Leftrightarrow \frac{2p-q}{p} = \frac{p}{p-q} \Leftrightarrow 2p^2 - 3pq + q^2 = p^2 \Leftrightarrow q^2 - 3pq + p^2 = 0,$$

que podemos interpretar como una ecuación de segundo grado en la incógnita q , de manera que, resolviéndola, resulta:

$$q = \frac{3p \pm \sqrt{9p^2 - 4p^2}}{2} = \frac{3p \pm \sqrt{5}p}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}p \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}p \\ q = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}p \end{cases}.$$

Ahora bien, como q es el lado del pentágono menor, ha de ser $q < p$, por lo que la primera solución de la ecuación es inaceptable, ya que en ese caso el coeficiente de p es mayor que uno. Por tanto, debe cumplirse la segunda de estas dos igualdades, de donde, sustituyendo en (I) y operando, se sigue:

$$k^2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}p}{p}\right)^2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

lo que da respuesta al enunciado del problema.

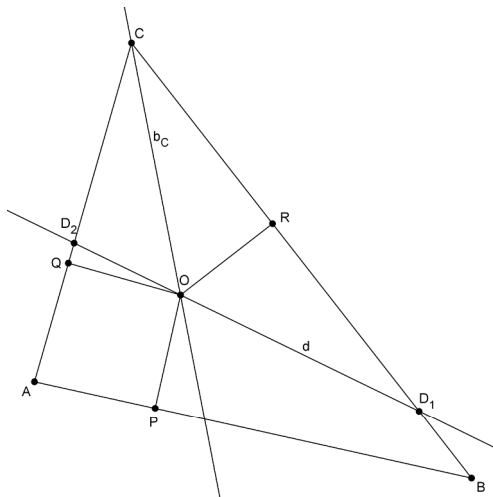
(Oposiciones de Secundaria, 1993)

Problema 4.6

Demuestra que una recta d que divide a un triángulo ABC en dos polígonos del mismo perímetro y de la misma superficie pasa por el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC .

Sea ABC un triángulo cualquiera y sea d una recta que satisface las condiciones dadas en el enunciado, que corta dos de los lados del triángulo, en los puntos que llamaremos D_1 y D_2 . Como sabemos, el centro de la circunferencia inscrita en un triángulo es el incentro, que es el punto de intersección de las tres bisectrices interiores del triángulo. Así pues, si consideramos la bisectriz interior relativa a un ángulo, por ejemplo el correspondiente al vértice C , que denotaremos por b_c , y hallamos el punto de intersección de esta bisectriz con la recta d , que denotaremos por O , es claro que el problema consiste en probar que el punto O es precisamente el incentro del triángulo,

lo cual equivale a demostrar que O está a igual distancia de los tres lados del triángulo. Para ello, trazamos por O la perpendicular a cada uno de los lados del triángulo, que lo cortará, respectivamente, en los puntos que denominaremos P , Q y R , quedando la situación mostrada en el gráfico.



De este modo, con la notación introducida, se trata de probar que los segmentos OP , OQ y OR tienen la misma longitud. Sin embargo, como b_C es una bisectriz interior y O pertenece a esta recta, necesariamente ha de ser $OQ = OR$, por lo que el problema se reduce a demostrar que también el segmento OP tiene esta medida.

Ahora bien, según el enunciado, el triángulo D_1D_2C y el cuadrilátero D_1D_2AB tienen la misma superficie, por lo que, triangulando ambas figuras, usando para ello los segmentos que unen O y los vértices A , B y C , podemos establecer la igualdad:

$$\frac{D_1C \cdot OR}{2} + \frac{CD_2 \cdot OQ}{2} = \frac{D_1B \cdot OR}{2} + \frac{AB \cdot OP}{2} + \frac{AD_2 \cdot OQ}{2}$$

(tengamos en cuenta que el triángulo D_1D_2C puede triangularse empleando los triángulos D_1CO y CD_2O , mientras que el cuadrilátero D_1D_2AB puede fragmentarse en los triángulos D_1BO , ABO y AD_2O), de donde, cancelando denominadores, se sigue:

$$D_1C \cdot OR + CD_2 \cdot OQ = D_1B \cdot OR + AB \cdot OP + AD_2 \cdot OQ,$$

y, sustituyendo OR por OQ , puesto que son iguales, como ya comentamos, llegamos a:

$$D_1C \cdot OQ + CD_2 \cdot OQ = D_1B \cdot OQ + AB \cdot OP + AD_2 \cdot OQ. \quad (I)$$

Por otro lado, también por las condiciones del enunciado, el triángulo D_1D_2C y el cuadrilátero D_1D_2AB tienen el mismo perímetro, por lo que debe cumplirse la igualdad:

$$D_1D_2 + CD_2 + D_1C = D_1D_2 + AD_2 + AB + D_1B,$$

que, cancelando el término D_1D_2 de cada miembro, se convierte en:

$$CD_2 + D_1C = AD_2 + AB + D_1B,$$

y, multiplicando por OQ ambos miembros, nos lleva a:

$$CD_2 \cdot OQ + D_1C \cdot OQ = AD_2 \cdot OQ + AB \cdot OQ + D_1B \cdot OQ. \quad (II)$$

Finalmente, restando miembro a miembro las igualdades (I) y (II), simplificando, y operando, obtenemos:

$$AB \cdot OP - AB \cdot OQ = 0 \Leftrightarrow AB(OP - OQ) = 0 \Leftrightarrow OP - OQ = 0 \Leftrightarrow OP = OQ,$$

de manera que hemos llegado a la igualdad que pretendíamos probar.

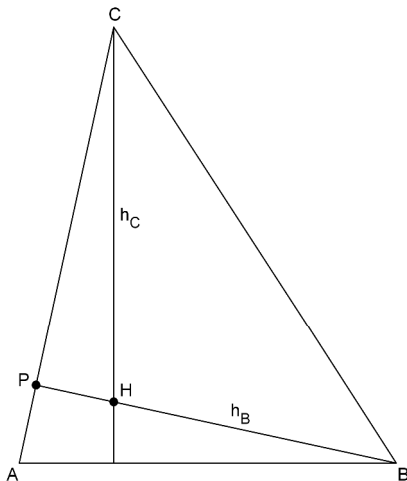
(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1979, y examen de Universidad)

Problema 4.7

Las alturas de un triángulo ABC se cortan en un punto H . Determina el valor del ángulo BCA , sabiendo que $AB = CH$.

Dado el triángulo ABC , y trazadas las alturas relativas a los vértices B y C , que denotaremos, respectivamente, por h_B y h_C , es claro que el punto H aludido en el enunciado, que resulta de la intersección de ambas alturas, es el ortocentro del triángulo. Además, la altura h_B corta al lado AC (o a su prolongación) en un punto, que denominaremos P , formándose así dos triángulos rectángulos en este mismo punto: el ABP y el HCP .

Una posible situación del triángulo y los elementos mencionados se muestra en el gráfico, sobre el que realizaremos los razonamientos que siguen.



Como h_C es perpendicular a AB y h_B lo es a AC , resulta claro que los ángulos ABP y HCP son iguales (los segmentos que los determinan son respectivamente perpendiculares), y, en consecuencia, los triángulos ABP y HCP son semejantes, puesto que son dos triángulos rectángulos que tienen un ángulo agudo igual. Pero, según el enunciado, $AB = CH$, luego estos dos triángulos tienen un lado de la misma longitud, lo que, junto al hecho de que son semejantes, implica que son iguales.

Así pues, en particular, tenemos que los segmentos BP y CP son iguales, lo que significa que el triángulo BPC es isósceles, y, puesto que es un triángulo rectángulo en P , resulta que sus dos ángulos agudos (los ángulos PBC y PCB) son iguales a 45° .

Finalmente, solo hay que observar que, como es obvio, el ángulo ACB es el mismo que PCB , por lo que, en respuesta al enunciado del problema, podemos decir que el ángulo ACB es de 45° .

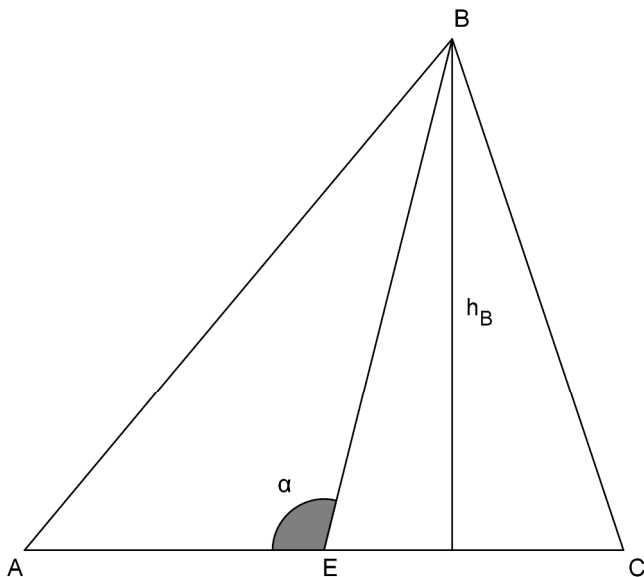
(Oposiciones de Secundaria, 2004)

Problema 4.8

Si E es el punto medio del lado AC de un triángulo cualquiera ABC , y si S es el área de dicho triángulo, prueba la igualdad:

$$\cotg(\angle AEB) = \frac{BC^2 - BA^2}{4S}.$$

Denotando por h_B la altura relativa al vértice B y por α el ángulo AEB , tenemos la situación mostrada en el gráfico, sobre la que razonaremos seguidamente.



Aplicando el teorema del coseno a los triángulos EBC y EBA, y teniendo en cuenta que los ángulos AEB y CEB son suplementarios, resultan las igualdades:

$$\begin{cases} BC^2 = EC^2 + BE^2 - 2EC \cdot BE \cos(180 - \alpha) \\ AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2AE \cdot BE \cos \alpha \end{cases},$$

que, al ser $\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$ (como es sabido) y $EC = AE$ (E es el punto medio de A y C), se pueden escribir como:

$$\begin{cases} BC^2 = AE^2 + BE^2 + 2AE \cdot BE \cos \alpha \\ AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2AE \cdot BE \cos \alpha \end{cases},$$

y, restándolas miembro a miembro y simplificando, llegamos a:

$$BC^2 - AB^2 = 4AE \cdot BE \cos \alpha. \quad (I)$$

Por otro lado, es claro que la superficie del triángulo ABC viene dada por la fórmula:

$$S = \frac{AC \cdot h_B}{2},$$

pero, como $AC/2 = AE$ (al ser E el punto medio de A y C) y, según la definición del seno, se satisface la igualdad $h_B = BE \cdot \sin(180 - \alpha)$, sustituyendo, obtenemos la relación $S = AE \cdot BE \cdot \sin(180 - \alpha)$, de la que se sigue $S = AE \cdot BE \cdot \sin \alpha$, ya que, como es sabido, para todo α , se verifica $\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$.

Así pues, dividiendo los dos miembros de la igualdad (I) por $4S$, sustituyendo esta última expresión de S , y simplificando, llegamos a:

$$\frac{BC^2 - AB^2}{4S} = \frac{4AE \cdot BE \cos \alpha}{4S} = \frac{\cancel{4AE} \cdot \cancel{BE} \cos \alpha}{\cancel{4AE} \cdot \cancel{BE} \sin \alpha} = \cotg \alpha,$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 4.9

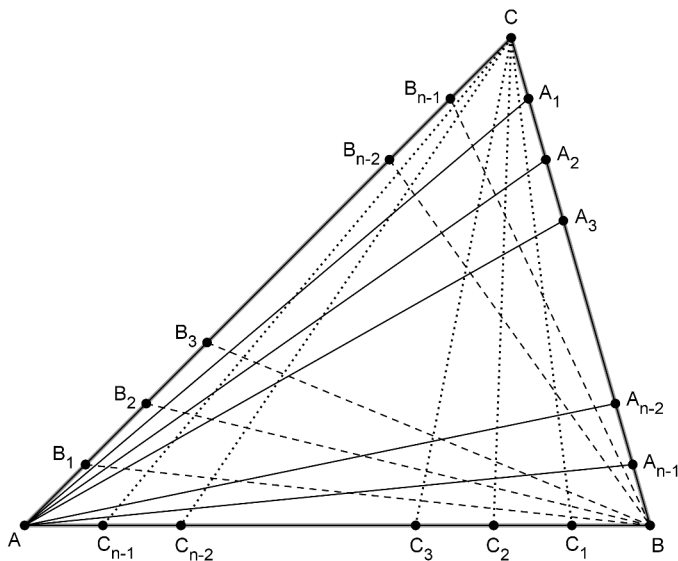
Se divide cada uno de los tres lados a , b , c de un triángulo en el mismo número n de partes iguales. Demuestra que la suma de los cuadrados de los segmentos obtenidos uniendo los puntos de división con los vértices opuestos es igual a la siguiente expresión:

$$\frac{(5n-1)(n-1)}{6n}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Usando la notación habitual para los triángulos, denotemos por A , B y C los vértices opuestos a los lados a , b y c , respectivamente.

Sean $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ los $n-1$ puntos que dividen el lado a en n partes iguales, sean $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}$ los $n-1$ puntos que dividen el lado b en n partes iguales, y sean $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}$ los $n-1$ puntos que dividen el lado c en n partes iguales. Para cada número natural i , comprendido entre 1 y $n-1$, sea a_i el segmento que une el punto A_i con A , sea b_i el segmento que va de B_i a B , y sea c_i el segmento que une los puntos C_i y C (entendemos que a_i , b_i y c_i denotan tanto el segmento propiamente dicho como la longitud del mismo).

Con esta notación, tenemos la situación del gráfico, donde se muestran los segmentos a_i con líneas continuas, los b_i con líneas discontinuas, y los c_i con líneas punteadas.



Aplicando el teorema del coseno a los triángulos AA_iC , para cada natural i comprendido entre 1 y $n-1$, y teniendo en cuenta que los segmentos que unen los puntos A_i con C miden $i \cdot a/n$ (como hemos dividido el lado a en n partes iguales, la distancia entre los puntos de división es a/n , y como entre C y A_i hay i de estos segmentos, habrá que multiplicar i por el cociente a/n para determinar su medida), resulta:

$$a_i^2 = b^2 + \left(i \frac{a}{n}\right)^2 - 2bi \frac{a}{n} \cos C.$$

De manera análoga, aplicando el teorema del coseno a los triángulos BB_iA y CC_iB , para cada natural i comprendido entre 1 y $n - 1$, obtenemos las igualdades:

$$\begin{cases} b_i^2 = c^2 + \left(i \frac{b}{n}\right)^2 - 2ci \frac{b}{n} \cos A \\ c_i^2 = a^2 + \left(i \frac{c}{n}\right)^2 - 2ai \frac{c}{n} \cos B \end{cases},$$

por lo que, sumando miembro a miembro cada una de estas igualdades, extendiendo el sumatorio desde 1 hasta $n - 1$, llegamos a la igualdad:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) = \\ & = \sum_{i=1}^{n-1} \left(b^2 + \left(i \frac{a}{n}\right)^2 - 2bi \frac{a}{n} \cos C + c^2 + \left(i \frac{b}{n}\right)^2 - 2ci \frac{b}{n} \cos A + a^2 + \left(i \frac{c}{n}\right)^2 - 2ai \frac{c}{n} \cos B \right), \end{aligned}$$

de donde, extrayendo factores comunes y desarrollando los sumatorios en el segundo miembro, resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) &= (n-1)(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{n^2} (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) (a^2 + b^2 + c^2) - \\ & - \frac{1}{n} (1 + 2 + \dots + (n-1)) (2ab \cos C + 2bc \cos A + 2ac \cos B). \end{aligned}$$

Ahora, por una parte, aplicando el teorema del coseno al triángulo ABC , tenemos:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2 \\ 2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2 \\ 2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2 \end{cases};$$

y, por otra, utilizando la conocida fórmula que permite sumar los cuadrados de los primeros $n - 1$ números naturales, y la que proporciona la suma de los primeros $n - 1$ números naturales, se verifica:

$$\begin{cases} 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \end{cases},$$

por lo que, sustituyendo estas expresiones en la igualdad anterior, llegamos a:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) = (n-1)(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2} (a^2 + b^2 - c^2 + b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2),$$

de donde, operando, se sigue:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) = (n-1)(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{n-1}{2} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Finalmente, extrayendo $a^2 + b^2 + c^2$ como factor común en el segundo miembro, agrupando las fracciones resultantes, extrayendo factor común en el numerador, y agrupando términos, tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) &= \left[(n-1) + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} - \frac{n-1}{2} \right] (a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) &= \frac{6n(n-1) + (n-1)(2n-1) - 3n(n-1)}{6n} (a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) &= \frac{(6n + 2n - 1 - 3n)(n-1)}{6n} (a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) &= \frac{(5n-1)(n-1)}{6n} (a^2 + b^2 + c^2), \end{aligned}$$

que es la igualdad que queríamos demostrar.

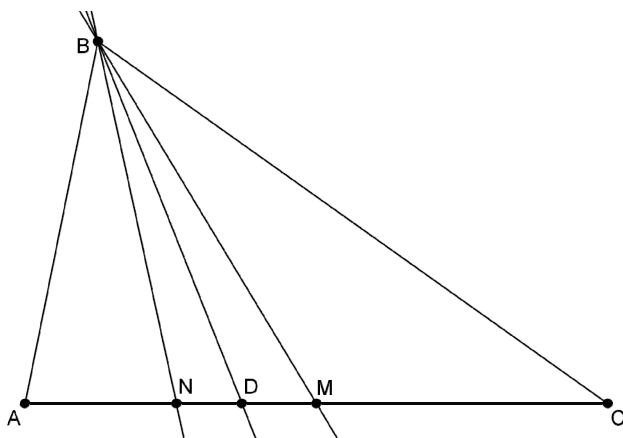
(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1979)

Problema 4.10

En el triángulo ABC , de lados a , b y c , sea BM la mediana (M sobre el lado b), BD la bisectriz interior (D sobre el lado b) y BN (con N en b) la recta simétrica de la mediana respecto a la bisectriz. Demuestra que:

$$\frac{|AN|}{|NC|} = \frac{c^2}{a^2}.$$

Representando el triángulo ABC y los elementos aludidos en el enunciado, tenemos la situación del gráfico, sobre el que realizaremos los razonamientos que siguen.



En primer lugar, teniendo en cuenta que BN es la recta simétrica de BM respecto de BD , es claro que los ángulos NBD y DBM son iguales, así que podemos denotar por α ambos ángulos. Además, por ser BD la bisectriz interior del ángulo ABC , los ángulos ABD y DBC son iguales, por lo que también han de serlo los ángulos ABN y MBC , que denotaremos por β .

Ahora, teniendo en cuenta que, con la notación introducida, el ángulo NBC es igual a $2\alpha + \beta$, aplicando el teorema del seno a los triángulos ABN y NBC , tenemos:

$$\begin{cases} \frac{|AN|}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin(\text{ANB})} \\ \frac{|NC|}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{a}{\sin(\text{CNB})} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |AN| = \frac{c \sin \beta}{\sin(\text{ANB})} \\ |NC| = \frac{a \sin(2\alpha + \beta)}{\sin(\text{CNB})} \end{cases},$$

de donde, dividiendo miembro a miembro estas dos últimas igualdades, se sigue:

$$\frac{|AN|}{|NC|} = \frac{\frac{c \sin \beta}{\sin(\text{ANB})}}{\frac{a \sin(2\alpha + \beta)}{\sin(\text{CNB})}} \Leftrightarrow \frac{|AN|}{|NC|} = \frac{c \sin \beta \sin(\text{CNB})}{a \sin(2\alpha + \beta) \sin(\text{ANB})}.$$

Ahora bien, como podemos ver, los ángulos ANB y CNB son suplementarios, por lo que, como es sabido, se satisface la igualdad $\text{sen}(\text{ANB}) = \text{sen}(\text{CNB})$, y, en consecuencia, podemos simplificar el cociente anterior, resultando:

$$\frac{|AN|}{|NC|} = \frac{c \text{sen} \beta}{a \text{sen}(2\alpha + \beta)}. \quad (\text{I})$$

Por otro lado, aplicando nuevamente el teorema del seno, esta vez a los triángulos MBA y MBC, tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen} \beta}{|MC|} = \frac{\text{sen}(\text{CMB})}{a} \\ \frac{\text{sen}(2\alpha + \beta)}{|AM|} = \frac{\text{sen}(\text{AMB})}{c} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{sen} \beta = \frac{|MC| \text{sen}(\text{CMB})}{a} \\ \text{sen}(2\alpha + \beta) = \frac{|AM| \text{sen}(\text{AMB})}{c} \end{array} \right\},$$

por lo que, dividiendo miembro a miembro estas dos últimas igualdades, y teniendo en cuenta, como antes, que los ángulos CMB y AMB son suplementarios (lo que implica que tienen el mismo seno), podemos escribir:

$$\frac{\text{sen} \beta}{\text{sen}(2\alpha + \beta)} = \frac{\frac{|MC| \text{sen}(\text{CMB})}{a}}{\frac{|AM| \text{sen}(\text{AMB})}{c}} \Leftrightarrow \frac{\text{sen} \beta}{\text{sen}(2\alpha + \beta)} = \frac{c |MC| \text{sen}(\text{CMB})}{a |AM| \text{sen}(\text{AMB})} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\text{sen} \beta}{\text{sen}(2\alpha + \beta)} = \frac{c |MC|}{a |AM|},$$

y, sustituyendo esta expresión en (I), llegamos a:

$$\frac{|AN|}{|NC|} = \frac{c^2 |MC|}{a^2 |AM|}.$$

Por último, teniendo presente que M es el punto medio de A y C (recordemos que BM es una mediana del triángulo ABC), ha de ser $|AM| = |MC|$, por lo que podemos simplificar estos factores en la igualdad anterior, resultando:

$$\frac{|AN|}{|NC|} = \frac{c^2}{a^2},$$

que es la igualdad pedida.

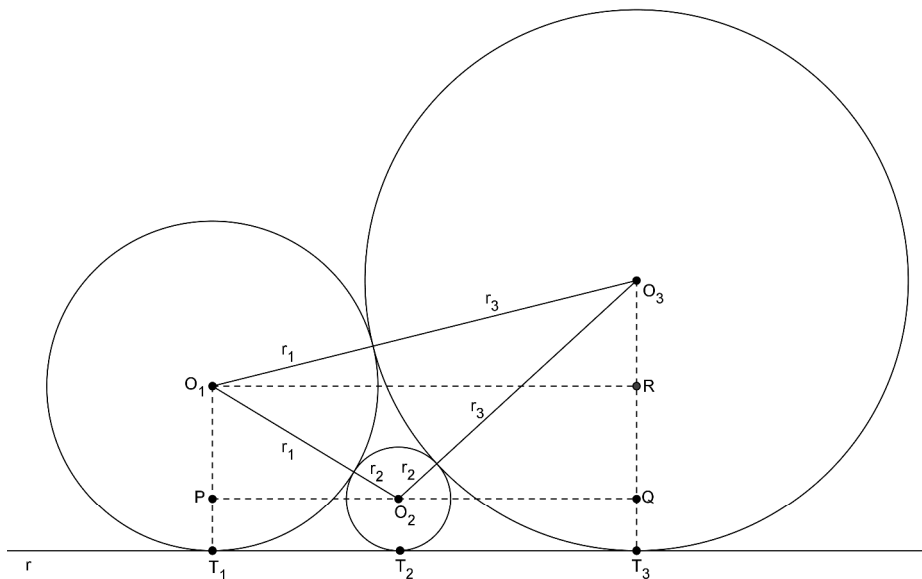
(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 4.11

En el plano nos dan una recta r y tres circunferencias tangentes a r y exteriormente tangentes entre sí (cada una de ellas tangente a las otras dos). Prueba que el triángulo que tiene por vértices los centros de las circunferencias es obtusángulo.

Denotemos por O_1 , O_2 y O_3 los centros de las tres circunferencias, por r_1 , r_2 y r_3 sus correspondientes radios, y por T_1 , T_2 y T_3 los puntos de tangencia entre cada una de las circunferencias y la recta r . Teniendo en cuenta la posición relativa de la recta r y las tres circunferencias, estamos en la situación mostrada en el gráfico, donde también se han construido los puntos P , Q y R , trazando los segmentos indicados con líneas discontinuas. Como vemos, con esta notación, el problema consiste en probar que el ángulo $O_1O_2O_3$ es obtuso, lo cual equivale, como es sabido, a demostrar que se verifica la desigualdad:

$$|O_1O_3|^2 > |O_1O_2|^2 + |O_2O_3|^2.$$



Ahora bien, el hecho de que dos circunferencias sean tangentes exteriores implica que la longitud del segmento que une sus centros es igual a la suma de sus radios, por lo que la desigualdad anterior se puede escribir como:

$$(r_1 + r_3)^2 > (r_1 + r_2)^2 + (r_2 + r_3)^2.$$

Desarrollando los cuadrados mediante el uso de la conocida identidad algebraica, y cancelando términos, tenemos:

$$(r_1 + r_3)^2 > (r_1 + r_2)^2 + (r_2 + r_3)^2 \Leftrightarrow \cancel{r_1^2} + \cancel{r_3^2} + 2r_1r_3 > \cancel{r_1^2} + r_2^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 + \cancel{r_3^2} + 2r_2r_3 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{2r_1r_3} > \cancel{2r_2^2} + \cancel{2r_1r_2} + \cancel{2r_2r_3} \Leftrightarrow r_1r_3 > r_2^2 + r_1r_2 + r_2r_3.$$

De este modo, el problema de probar que el ángulo $O_1O_2O_3$ es obtuso queda reducido al de demostrar que se cumple la desigualdad:

$$r_1r_3 > r_2^2 + r_1r_2 + r_2r_3, \quad (I)$$

que es lo que vamos a hacer a continuación.

Teniendo en cuenta que se satisfacen las igualdades $|O_1R| = |PO_2| + |O_2Q|$, $|O_1P| = |O_1T_1| - |PT_1| = r_1 - r_2$, $|QO_3| = |O_3T_3| - |QT_3| = r_3 - r_2$, $|RO_3| = |O_3T_3| - |RT_3| = r_3 - r_1$ (como consecuencia de que las circunferencias y la recta r son tangentes), y aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos O_1RO_3 , O_1PO_2 y O_2QO_3 , tenemos:

$$\begin{cases} |O_1O_3|^2 = |O_1R|^2 + |RO_3|^2 & (r_1 + r_3)^2 = |O_1R|^2 + (r_3 - r_1)^2 \\ |O_1O_2|^2 = |O_1P|^2 + |PO_2|^2 & (r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + |PO_2|^2 \\ |O_2O_3|^2 = |O_2Q|^2 + |QO_3|^2 & (r_2 + r_3)^2 = |O_2Q|^2 + (r_3 - r_2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |O_1R| = \sqrt{(r_1 + r_3)^2 - (r_3 - r_1)^2} \\ |PO_2| = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} \\ |O_2Q| = \sqrt{(r_2 + r_3)^2 - (r_3 - r_2)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(r_1 + r_3)^2 - (r_3 - r_1)^2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} + \sqrt{(r_2 + r_3)^2 - (r_3 - r_2)^2},$$

de donde, aplicando la conocida identidad algebraica y operando, se sigue:

$$\begin{aligned} & \sqrt{r_1^2 + r_3^2 + 2r_1r_3 - r_3^2 - r_1^2 + 2r_1r_3} = \\ & = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2 + 2r_1r_2} + \sqrt{r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3 - r_3^2 - r_2^2 + 2r_2r_3} \Leftrightarrow \\ & \sqrt{4r_1r_3} = \sqrt{4r_1r_2} + \sqrt{4r_2r_3} \Leftrightarrow 2\sqrt{r_1r_3} = 2\sqrt{r_1r_2} + 2\sqrt{r_2r_3} \Leftrightarrow \sqrt{r_1r_3} = \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3}, \end{aligned}$$

y, elevando al cuadrado ambos miembros, desarrollando nuevamente el cuadrado de una suma, agrupando las dos raíces resultantes y extrayendo r_2 , se sigue:

$$(\sqrt{r_1r_3})^2 = (\sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3})^2 \Leftrightarrow r_1r_3 = r_1r_2 + r_2r_3 + 2\sqrt{r_1r_2}\sqrt{r_2r_3} \Leftrightarrow$$

$$r_1r_3 = r_1r_2 + r_2r_3 + 2r_2\sqrt{r_1r_3},$$

por lo que, sustituyendo en (I), el problema se transforma en demostrar la desigualdad:

$$r_1r_2 + r_2r_3 + 2r_2\sqrt{r_1r_3} > r_2^2 + r_1r_2 + r_2r_3,$$

que, cancelando términos, es equivalente a:

$$2\sqrt{r_1 r_3} > r_2 .$$

Ahora bien, por la notación elegida, resulta claro que deben verificarse las relaciones $r_2 < r_1$, $r_2 < r_3$, así que, multiplicando miembro a miembro, tenemos $r_2 \cdot r_2 < r_1 \cdot r_3$, y, tomando raíz cuadrada, llegamos a:

$$r_2 < \sqrt{r_1 r_3} ,$$

que es una condición «más fuerte» que la que pretendíamos demostrar, ya que, como es obvio, se satisface:

$$\sqrt{r_1 r_3} < 2\sqrt{r_1 r_3} ,$$

y, en consecuencia, también:

$$r_2 < 2\sqrt{r_1 r_3} .$$

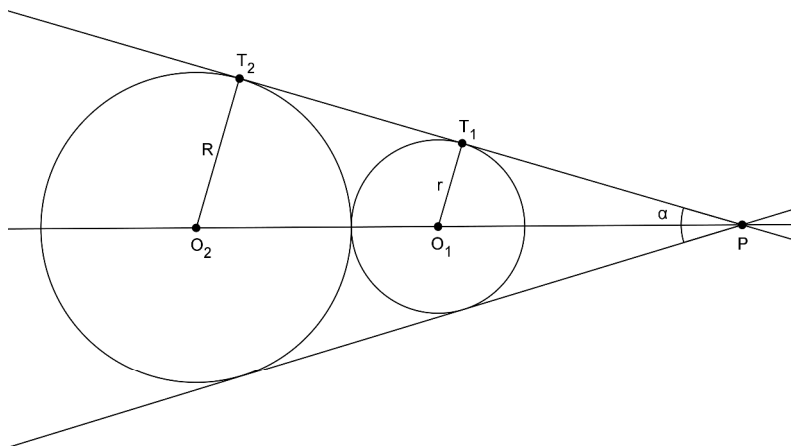
Así pues, con todo lo visto, podemos afirmar que el ángulo $O_1 O_2 O_3$ es obtuso, como queríamos probar, lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2004)

Problema 4.12

Dadas dos circunferencias de radios R y r , tangentes exteriores entre ellas, calcula el ángulo formado por las rectas tangentes comunes exteriores a las dos circunferencias, en función de R y r .

Denotemos por O_1 y O_2 los centros de las circunferencias, por T_1 y T_2 los puntos de tangencia de una tangente común exterior con cada circunferencia, por P el punto de intersección de las dos tangentes exteriores comunes, y por α el ángulo formado por estas dos rectas, que es precisamente lo que debemos calcular. Con esta notación, tenemos la situación mostrada en el gráfico, donde hemos representado, además, la recta que une los centros, en la que, como es sabido, también está el punto P .



Puesto que los segmentos O_2T_2 y O_1T_1 son perpendiculares a la recta PT_1 (por ser tangente a ambas circunferencias), resulta que los triángulos O_2T_2P y O_1T_1P son rectángulos, y como, además, estos triángulos comparten el ángulo agudo O_1PT_1 , cuya medida es precisamente $\alpha/2$, aplicando la definición del seno, tenemos las igualdades:

$$\operatorname{sen}(\alpha/2) = \frac{r}{|PO_1|} = \frac{R}{|PO_2|}.$$

Ahora bien, es evidente que $|PO_2| = |PO_1| + |O_1O_2|$, y que, al ser las dos circunferencias tangentes, $|O_1O_2| = R + r$, por lo que podemos escribir $|PO_2| = |PO_1| + R + r$, y, sustituyendo, tenemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha/2) = \frac{r}{|PO_1|} = \frac{R}{|PO_1| + R + r}.$$

A partir de la segunda igualdad, trasponiendo y operando, llegamos a:

$$\frac{r}{|PO_1|} = \frac{R}{|PO_1| + R + r} \Leftrightarrow r(|PO_1| + R + r) = R|PO_1| \Leftrightarrow R|PO_1| - r|PO_1| = r(R + r) \Leftrightarrow$$

$$|PO_1|(R - r) = r(R + r) \Leftrightarrow |PO_1| = r \frac{R + r}{R - r},$$

y, sustituyendo en la primera y operando, resulta:

$$\operatorname{sen}(\alpha/2) = \frac{r}{|PO_1|} = \frac{r}{r \frac{R + r}{R - r}} = \frac{R - r}{R + r} \Leftrightarrow \alpha/2 = \arcsen \frac{R - r}{R + r} \Leftrightarrow \alpha = 2 \arcsen \frac{R - r}{R + r},$$

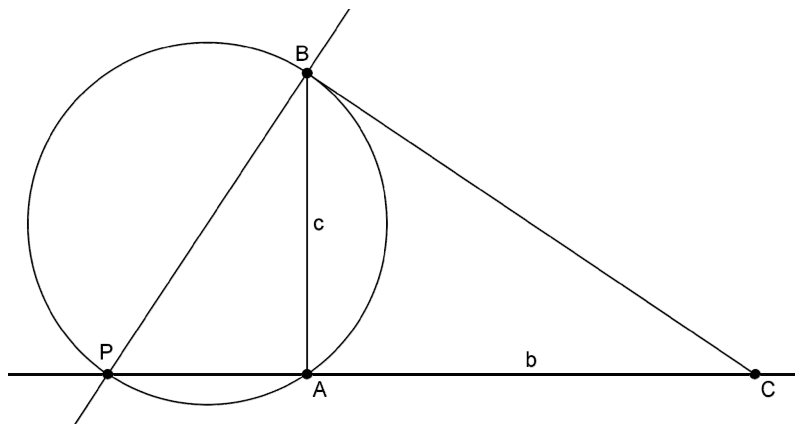
que es la expresión que estábamos buscando, lo que concluye el problema.

(Oposiciones de Secundaria, examen de Universidad y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 4.13

Dado un triángulo rectángulo ABC , con el ángulo recto en A , se traza la perpendicular a BC por el punto B , se corta esta recta con la prolongación del cateto AC y se obtiene así el punto P . Determina el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABP en función de las longitudes b y c de los catetos del triángulo inicial.

Representando el triángulo rectángulo ABC y llevando a cabo los pasos indicados en el enunciado, llegamos a la situación mostrada en el gráfico, sobre la que razonaremos a continuación.



En primer lugar, observemos que el ángulo PAB es recto (ya que el ángulo CAB también lo es, y ambos ángulos son suplementarios), por lo que el segmento PB «se ve» bajo un ángulo de 90 grados desde el punto A ; dicho de otro modo, el punto A pertenece al arco capaz de 90 grados relativo al segmento PB , lo cual se traduce, como es sabido, en que el segmento PB es un diámetro de la circunferencia que pasa por A , P y B . Así pues, para hallar el radio de esta circunferencia, que denotaremos por r , basta con determinar la longitud del segmento que une P y B , ya que, como es obvio, $r = |PB|/2$.

Ahora, como los triángulos PAB y BAC son semejantes (ambos triángulos son rectángulos, y tienen un ángulo agudo formado por dos lados respectivamente perpendiculares), sus correspondientes lados son proporcionales, por lo que, en particular, podemos escribir:

$$\frac{|PB|}{c} = \frac{|BC|}{b},$$

de donde, despejando $|PB|$ y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ABC , se sigue:

$$|PB| = \frac{c|BC|}{b} = \frac{c\sqrt{b^2 + c^2}}{b},$$

y, de aquí:

$$r = \frac{c\sqrt{b^2 + c^2}}{2b},$$

que es la expresión buscada.

(Oposiciones de Secundaria, 1996)

Problema 4.14

El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo es 6,5 y el radio de su circunferencia inscrita es 2. Calcula los lados a , b y c .

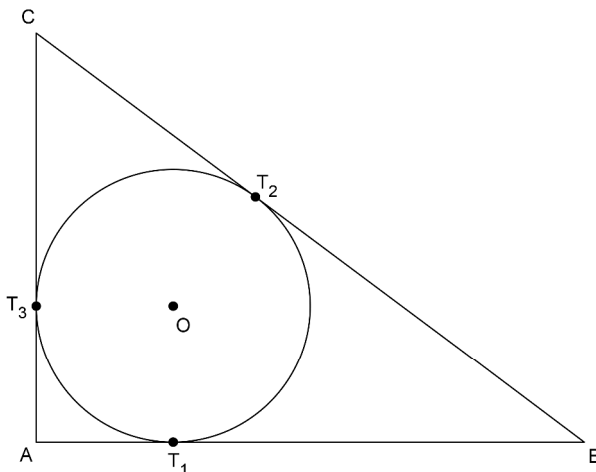
Observemos, en primer lugar, que los datos del enunciado carecen de unidades de medida, por lo que los resultados que obtendremos compartirán esa característica, entendiéndose que estarían expresados en la misma unidad en que estuvieran los del enunciado.

Denotemos por A , B y C los vértices opuestos a los lados a , b y c , respectivamente, siendo A el ángulo recto.

Como es evidente, A pertenece al arco capaz de 90 grados relativo al segmento que une B y C , lo que, como sabemos, se traduce en que el segmento BC , cuya longitud es a , es un diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo, resultando, por tanto, $a = 2 \cdot 6,5 = 13$ (según el enunciado, el radio de la circunferencia circunscrita mide 6,5), y ya tenemos calculado el lado a .

Ahora, sea O el centro de la circunferencia inscrita, y denotemos por T_1 , T_2 y T_3 los puntos de tangencia de cada lado del triángulo con esta circunferencia.

Con esta notación, tenemos la situación mostrada en el gráfico, cumpliéndose las igualdades $|OT_1| = |OT_2| = |OT_3| = 2$ (el radio de la circunferencia inscrita es 2), lo que implica, en particular, que el cuadrilátero AT_1OT_3 es un cuadrado de lado 2, y, entonces, $|AT_1| = |AT_3| = 2$.



Por otro lado, es claro que se verifica la igualdad $|BC| = |BT_2| + |T_2C|$, lo que nos lleva a $|BT_2| + |T_2C| = 13$, al ser $a = 13$. Pero, además, por ser O el punto de intersección de las bisectrices interiores del triángulo, se satisfacen las igualdades $|BT_2| = |BT_1|$ y $|T_2C| = |CT_3|$, por lo que, sustituyendo, tenemos $|BT_1| + |CT_3| = 13$.

Ahora bien, $|BT_1| = |BA| - |AT_1| = c - 2$, y $|CT_3| = |CA| - |AT_3| = b - 2$, lo que nos permite escribir la ecuación $c - 2 + b - 2 = 13$, que es equivalente a $c = 17 - b$, de manera que hemos encontrado una ligadura entre c y b .

Para encontrar otra ecuación que ligue c y b , y disponer así de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, recurrimos al teorema de Pitágoras, resultando:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c = 17 - b \\ b^2 + c^2 = 13^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 17 - b \\ b^2 + (17 - b)^2 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 17 - b \\ b^2 + 289 + b^2 - 34b = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} c = 17 - b \\ 2b^2 - 34b + 120 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 17 - b \\ b^2 - 17b + 60 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 17 - b \\ b = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} b = 12, c = 5 \\ b = 5, c = 12 \end{cases} \end{aligned}$$

Como podemos observar, las dos soluciones halladas son realmente la misma, teniendo en cuenta el papel «simétrico» de los catetos c y b , por lo que podemos concluir el problema diciendo que los lados del triángulo miden 5, 12 y 13.

(Oposiciones de Secundaria, 2003)

Problema 4.15

Se traza una recta r por el baricentro de un triángulo equilátero (en el mismo plano que este). Demuestra que la suma de los cuadrados de las distancias de los tres vértices del triángulo a la recta r no depende de la elección de esta.

Sean A, B y C los vértices del triángulo. Sin pérdida de generalidad, podemos elegir el sistema de referencia en el que $A = (0,0)$ y $B = (1,0)$, lo que implica, como es claro, que el lado del triángulo es igual a la unidad, y que, por tanto, $C = (1/2, \text{sen}60^\circ)$.

Denotemos por H el baricentro del triángulo, cuyas coordenadas podemos calcular hallando la media aritmética de las coordenadas de A, B y C, resultando:

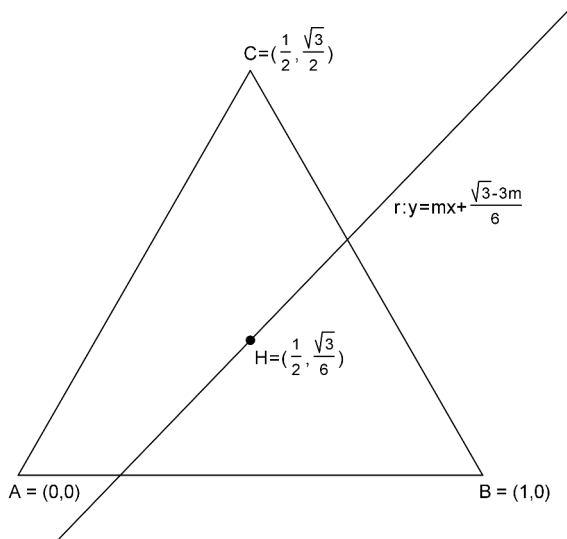
$$H = \frac{A + B + C}{3} = \frac{(0,0) + (1,0) + (1/2, \sqrt{3}/2)}{3} = \frac{(3/2, \sqrt{3}/2)}{3} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right).$$

Sea r una recta cualquiera que pase por H . Entonces, caben dos posibilidades, que estudiaremos por separado: que r tenga por pendiente el número real m , o que r sea la recta vertical de ecuación $x = 1/2$.

Si estamos en el primer caso, a partir de la ecuación de la recta en forma punto-pendiente, operando, tenemos:

$$r: y - \frac{\sqrt{3}}{6} = m \left(x - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow r: y = mx - \frac{m}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow r: y = mx + \frac{\sqrt{3} - 3m}{6},$$

dándose una situación como la mostrada en el gráfico.



Aplicando la conocida fórmula que permite calcular la distancia de un punto a una recta y operando, obtenemos las igualdades:

$$d(A, r) = \frac{\left| m \cdot 0 - 0 + \frac{\sqrt{3} - 3m}{6} \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\left| \frac{\sqrt{3} - 3m}{6} \right|}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

$$d(B, r) = \frac{\left| m \cdot 1 - 0 + \frac{\sqrt{3} - 3m}{6} \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\left| \frac{6m + \sqrt{3} - 3m}{6} \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\left| \frac{\sqrt{3} + 3m}{6} \right|}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

$$d(C, r) = \frac{\left| m \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 3m}{6} \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\left| \frac{3m - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3m}{6} \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\left| \frac{-2\sqrt{3}}{6} \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{3}}{6\sqrt{m^2 + 1}},$$

de modo que, elevando al cuadrado (teniendo en cuenta que al hacerlo podemos prescindir del valor absoluto, por ser no negativo el cuadrado de un número), sumando, aplicando la conocida identidad algebraica, y operando, resulta:

$$[d(A,r)]^2 + [d(B,r)]^2 + [d(C,r)]^2 = \left(\frac{|\sqrt{3}-3m|}{6\sqrt{m^2+1}} \right)^2 + \left(\frac{|\sqrt{3}+3m|}{6\sqrt{m^2+1}} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{6\sqrt{m^2+1}} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$[d(A,r)]^2 + [d(B,r)]^2 + [d(C,r)]^2 = \frac{3+9m^2-6\sqrt{3}m}{36(m^2+1)} + \frac{3+9m^2+6\sqrt{3}m}{36(m^2+1)} + \frac{12}{36(m^2+1)} \Leftrightarrow$$

$$[d(A,r)]^2 + [d(B,r)]^2 + [d(C,r)]^2 = \frac{18m^2+18}{36(m^2+1)} = \frac{18\cancel{(m^2+1)}}{36\cancel{(m^2+1)}} = \frac{1}{2},$$

por lo que el valor de la suma de los cuadrados de las distancias de los tres vértices del triángulo a la recta r es constante, es decir, no depende de m , lo que se traduce en que tampoco depende de la recta elegida, como queríamos demostrar.

Ahora, si, por el contrario, r es la recta vertical de ecuación $x = 1/2$, es claro que tenemos las igualdades:

$$d(A,r) = \frac{1}{2}, \quad d(B,r) = \frac{1}{2}, \quad d(C,r) = 0,$$

de donde, elevando al cuadrado y sumando, se sigue:

$$[d(A,r)]^2 + [d(B,r)]^2 + [d(C,r)]^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

que es el mismo valor que obtuvimos en el otro caso.

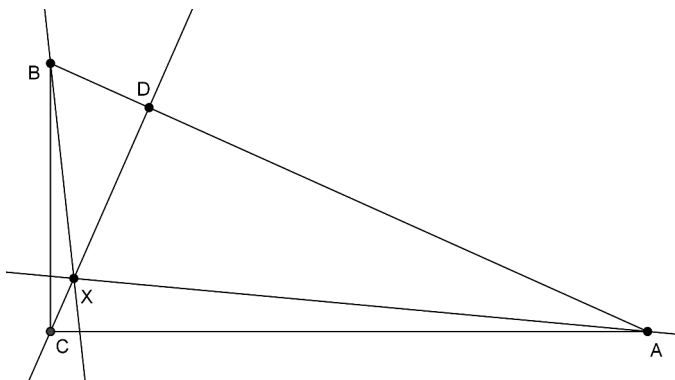
Así pues, hemos visto que, independientemente de la recta r que pase por H , el valor de la suma considerada es constante, como queríamos probar.

(Oposiciones de Secundaria, 2005)

Problema 4.16

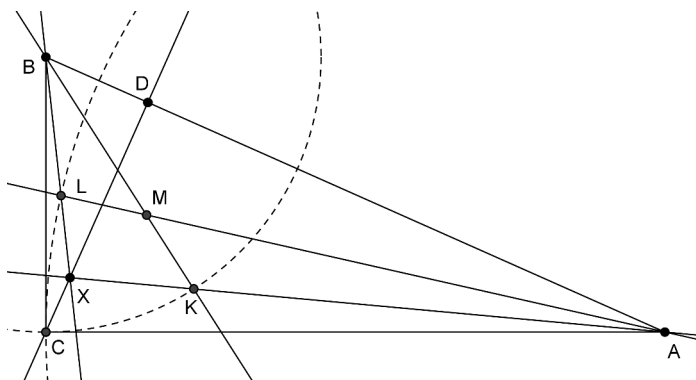
Sea ABC un triángulo rectángulo en C , y sea D el pie de la altura desde C . Sea X un punto interior del segmento CD . Sea K el punto en el segmento AX tal que $BK = BC$. Análogamente, sea L el punto en el segmento BX tal que $AL = AC$. Sea M el punto de intersección de AL y BK . Demuestra que $MK = ML$.

Representando el triángulo ABC (rectángulo en C), trazando la altura correspondiente al vértice C (que da lugar al punto D al intersectarse con el lado AB), eligiendo un punto arbitrario X en el interior del segmento CD , y trazando las rectas AX y BX , tenemos la situación mostrada en el diagrama.



Ahora, para construir el punto K según las indicaciones del enunciado, hemos de encontrar el punto del segmento AX cuya distancia a B sea igual a la distancia entre B y C , el cual resulta, como es claro, de la intersección de la circunferencia de centro B y radio BC con el segmento AX . Denotaremos esta circunferencia por C_1 . De manera análoga, para construir el punto L , intersecamos el segmento BX con la circunferencia de centro A y radio AC , que denotaremos por C_2 . Una vez localizados los puntos K y L , trazamos las rectas AL y BK , de cuya intersección resulta el punto M .

Siguiendo estos pasos, tenemos la situación mostrada en el siguiente diagrama, donde se representan con trazo discontinuo los correspondientes arcos de las circunferencias C_1 y C_2 .



y, como, por definición de la potencia de un punto respecto de una circunferencia, se verifican las igualdades:

$$\text{Pot}(G, C_1) = |GK|^2,$$

$$\text{Pot}(G, C_2) = |GL|^2,$$

sustituyendo, resulta $|GK|^2 = |GL|^2$, de donde, extrayendo raíces cuadradas, llegamos a $|GK| = |GL|$, lo que se traduce en que los triángulos GKM y GLM tienen dos lados respectivamente iguales (los lados GK y GL, como acabamos de ver, y el lado GM, que es común a ambos). Además, el ángulo GKM (que es igual al ángulo GKB) y el ángulo GLM (que es igual al ángulo GLA) son rectos, puesto que la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia, lo que significa que los triángulos GKM y GLM son rectángulos.

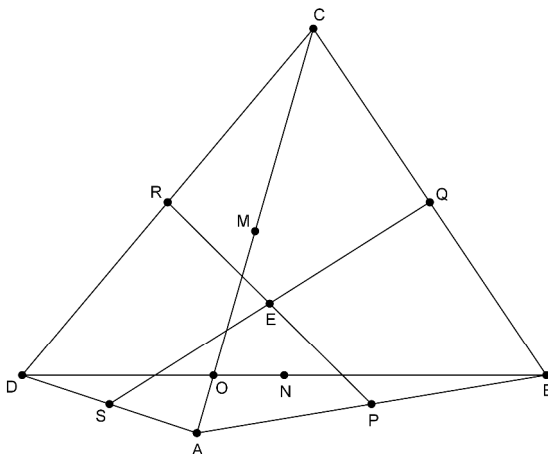
Así pues, tenemos dos triángulos rectángulos que comparten la hipotenusa y que poseen sendos catetos con la misma longitud, lo que, con el teorema de Pitágoras, nos permite afirmar que los otros catetos también deben ser iguales, es decir, el segmento MK y el segmento ML tienen la misma longitud, que es precisamente lo que queríamos demostrar.

(Olimpiadas Matemáticas)

Problema 4.17

Demuestra que las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero convexo se cortan en el punto medio del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

Sean A, B, C y D los cuatro vértices de un cuadrilátero convexo, sean P, Q, R y S los puntos medios de los lados AB, BC, CD y AD, respectivamente, y sea O el punto de intersección de las diagonales. Consideremos, asimismo, los puntos medios de las diagonales, que denotaremos por M y N, y el punto de intersección de las rectas PR y QS, que denotaremos por E. Con esta notación, tenemos la situación mostrada en el gráfico, y resulta claro que el problema consiste en demostrar que E es el punto medio de M y N.



Eligiendo un sistema de referencia de origen O y ejes cartesianos OB y OC (que no tienen por qué ser ortogonales), podemos escribir $A = (0,a)$, $B = (b,0)$, $C = (0,c)$ y $D = (d,0)$, siendo $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$ y $d < 0$.

De este modo, podemos determinar las coordenadas de P, Q, R, S, M y N, haciendo la media aritmética de las coordenadas de los puntos correspondientes, resultando:

$$P = \frac{A+B}{2} = \frac{(0,a)+(b,0)}{2} = \left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right), \quad Q = \frac{B+C}{2} = \frac{(b,0)+(0,c)}{2} = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right),$$

$$R = \frac{C+D}{2} = \frac{(0,c)+(d,0)}{2} = \left(\frac{d}{2}, \frac{c}{2}\right), \quad S = \frac{A+D}{2} = \frac{(0,a)+(d,0)}{2} = \left(\frac{d}{2}, \frac{a}{2}\right),$$

$$M = \frac{A+C}{2} = \frac{(0,a)+(0,c)}{2} = \left(0, \frac{a+c}{2}\right), \quad N = \frac{B+D}{2} = \frac{(b,0)+(d,0)}{2} = \left(\frac{b+d}{2}, 0\right).$$

Así pues, el punto medio de M y N es:

$$F = \frac{M+N}{2} = \frac{\left(0, \frac{a+c}{2}\right) + \left(\frac{b+d}{2}, 0\right)}{2} = \left(\frac{b+d}{4}, \frac{a+c}{4}\right),$$

por lo que el problema consiste en probar que, en realidad, E y F son el mismo punto.

Ahora, para determinar las coordenadas de E, hemos de hallar las ecuaciones de las rectas PR y QS (lo cual podemos hacer a partir de las coordenadas obtenidas), y, posteriormente, resolver el sistema formado por ambas ecuaciones, que es lo que haremos a continuación.

Utilizando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, tenemos:

$$PR: \frac{x - \frac{b}{2}}{\frac{d}{2} - \frac{b}{2}} = \frac{y - \frac{a}{2}}{\frac{c}{2} - \frac{a}{2}} \Leftrightarrow PR: \frac{\cancel{2}x - b}{\cancel{d} - b} = \frac{\cancel{2}y - a}{c - a} \Leftrightarrow PR: \frac{2x - b}{d - b} = \frac{2y - a}{c - a},$$

$$QS: \frac{x - \frac{b}{2}}{\frac{d}{2} - \frac{b}{2}} = \frac{y - \frac{c}{2}}{\frac{a}{2} - \frac{c}{2}} \Leftrightarrow QS: \frac{\cancel{2}x - b}{\cancel{d} - b} = \frac{\cancel{2}y - c}{a - c} \Leftrightarrow QS: \frac{2x - b}{d - b} = \frac{2y - c}{a - c},$$

por lo que las coordenadas de E se obtienen del sistema:

$$\begin{cases} \frac{2x - b}{d - b} = \frac{2y - a}{c - a} \\ \frac{2x - b}{d - b} = \frac{2y - c}{a - c} \end{cases},$$

que podemos resolver igualando el segundo miembro de ambas ecuaciones, ya que el primer miembro de cada una es el mismo, de donde, operando, resulta:

$$\frac{2y-a}{c-a} = \frac{2y-c}{a-c} \Leftrightarrow \frac{2y-a}{\cancel{c-a}} = -\frac{2y-c}{\cancel{c-a}} \Leftrightarrow 4y = a+c \Leftrightarrow y = \frac{a+c}{4},$$

y, sustituyendo esta expresión de y en la primera ecuación del sistema y operando, llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{2x-b}{d-b} &= \frac{2\frac{a+c}{4}-a}{c-a} \Leftrightarrow \frac{2x-b}{d-b} = \frac{\frac{a+c}{2}-a}{c-a} \Leftrightarrow \frac{2x-b}{d-b} = \frac{\frac{a+c-2a}{2}}{c-a} \Leftrightarrow \\ \frac{2x-b}{d-b} &= \frac{\frac{\cancel{c-a}}{2}}{\cancel{c-a}} \Leftrightarrow \frac{2x-b}{d-b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x-2b = d-b \Leftrightarrow x = \frac{b+d}{4}. \end{aligned}$$

Como vemos, las coordenadas de E son las mismas que obtuvimos para F , lo que significa que E y F son el mismo punto, como queríamos demostrar.

(Examen de Universidad)

Problema 4.18

Si en el interior de un círculo de radio r se toman 100 puntos, prueba que, al menos, dos de ellos distan menos de $2r/9$.

Lo resolveremos por reducción al absurdo, suponiendo que todos los puntos distan, como mínimo, $2r/9$, y viendo que ello nos lleva necesariamente a una contradicción.

En efecto, si la distancia entre dos cualesquiera de estos 100 puntos fuera mayor o igual que $2r/9$, entonces, es claro que podríamos formar 100 círculos de radio $r/9$ (la mitad de la distancia mínima), cada uno de ellos centrado en uno de estos 100 puntos, de manera que todos los círculos fueran exteriores o tangentes (ninguno sería interior a otro, ni se cortarían), y, en consecuencia, el área total ocupado por los 100 círculos sería:

$$A_{100} = 100\pi \left(\frac{r}{9}\right)^2 = \frac{100}{81}\pi r^2.$$

Ahora bien, como los 100 puntos están en el interior de un círculo de radio r , teniendo en cuenta que algún punto podría estar «muy cerca» del borde de este círculo, resulta que los 100 círculos deben estar contenidos, sin solaparse, en el interior de un círculo de radio $r + r/9$ (el círculo resultante de añadir una corona circular de anchura $r/9$ alrededor del círculo original, de radio r), cuyo área es:

$$A = \pi \left(r + \frac{r}{9}\right)^2 = \pi \left(\frac{10r}{9}\right)^2 = \frac{100}{81}\pi r^2.$$

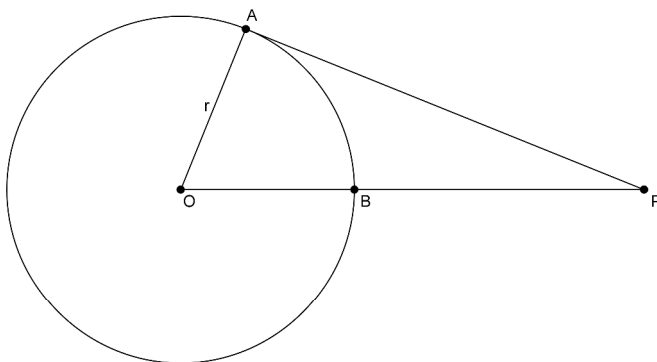
Así pues, vemos que los 100 círculos ocupan exactamente la misma superficie que el círculo que los contiene, lo cual es absurdo, pues ello solo sería posible si no quedaran «huecos» entre un círculo y otro, situación que, como sabemos, no se da, ya que no es posible pavimentar el plano empleando círculos exclusivamente.

De esta manera, como la suposición de que todos los puntos distan al menos $2r/9$ nos lleva a una situación insostenible, por reducción al absurdo, tenemos probado que deben existir dos puntos, al menos, que disten menos de $2r/9$, que es lo que queríamos demostrar.

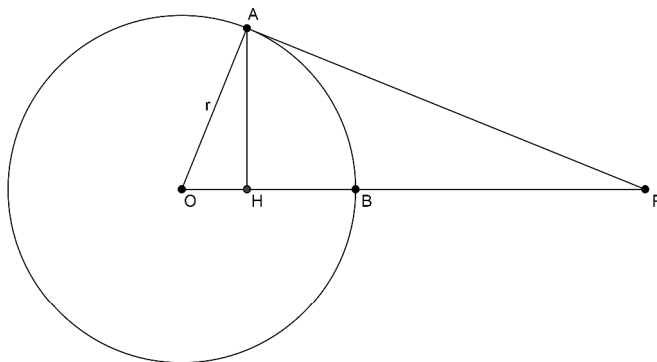
(Oposiciones de Secundaria, examen de Universidad y Olimpiadas Matemáticas)

Problema 4.19

Halla (figura adjunta), en función de r , la distancia OP de forma que el área engendrada por el segmento de tangente AP al girar en torno del eje OP sea el triple del área engendrada por el arco AB al girar en torno del mismo eje OP .



Denotando por H el pie de la perpendicular a OP que pasa por A, tenemos la situación mostrada en el gráfico, y es claro que el área engendrada por el segmento AP al girar en torno de OP es igual al área lateral del cono de altura $|PH|$ y radio $|AH|$, mientras que el área engendrada por el arco AB al girar en torno de OP es igual al área del casquete esférico de radio r y altura $|BH|$.



Así pues, teniendo en cuenta las conocidas fórmulas que permiten hallar la superficie lateral del cono y la del casquete esférico, y la relación entre las áreas dada en el enunciado, tenemos:

$$\pi|AH||AP| = 3 \cdot 2\pi r|BH|,$$

de donde, simplificando y trasponiendo, se sigue:

$$\frac{|AH||AP|}{r|BH|} = 6.$$

Ahora bien, puesto que los triángulos AHO y PAO son semejantes (ambos tienen un ángulo recto, y un ángulo agudo en común), podemos establecer la proporción:

$$\frac{|AH|}{r} = \frac{|AP|}{|OP|},$$

por lo que, sustituyendo en la igualdad anterior, resulta:

$$\frac{|AP||AP|}{|OP||BH|} = 6,$$

es decir:

$$\frac{|AP|^2}{|OP||BH|} = 6,$$

que, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo PAO, podemos escribir como:

$$\frac{|OP|^2 - r^2}{|OP||BH|} = 6. \quad (I)$$

Por otro lado, es claro que $|BH| = |BO| - |OH| = r - |OH|$, y, también, por ser semejantes los triángulos AOH y PAO, se verifica la igualdad:

$$\frac{|OH|}{r} = \frac{r}{|OP|},$$

por lo que, despejando $|OH|$ y sustituyendo en la anterior, resulta:

$$|BH| = r - \frac{r^2}{|OP|}.$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión de $|BH|$ en (I), operando, aplicando la conocida identidad algebraica, extrayendo r como factor común, y trasponiendo, llegamos a:

$$\frac{|OP|^2 - r^2}{|OP| \left(r - \frac{r^2}{|OP|} \right)} = 6 \Leftrightarrow \frac{|OP|^2 - r^2}{r|OP| - \frac{r^2|OP|}{|OP|}} = 6 \Leftrightarrow \frac{(|OP| + r)(\cancel{|OP| - r})}{r(\cancel{|OP| - r})} = 6 \Leftrightarrow$$

$$|OP| + r = 6r \Leftrightarrow |OP| = 5r,$$

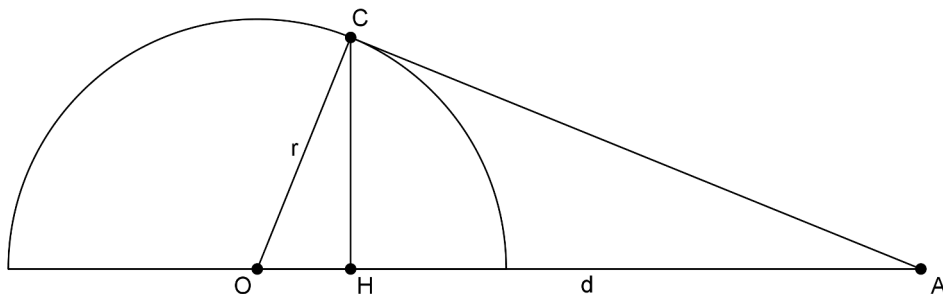
lo que responde a la cuestión planteada en el enunciado.

(Oposiciones de Secundaria, 2009, Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1974, y examen de Universidad)

Problema 4.20

Un punto A se encuentra a distancia d del centro O de un semicírculo. Halla el radio r de este, en función de d , para que, al girar toda la figura en torno de AO , el volumen engendrado por el triángulo AOC sea igual al de la esfera, siendo AC tangente al semicírculo.

Denotando por H el pie de la perpendicular a AO que pasa por C , tenemos la situación mostrada en el gráfico, y es claro que el volumen engendrado por el triángulo AOC al girar en torno de AO es igual al volumen del «doble cono» formado por el cono de radio CH y altura AH y el cono del mismo radio y altura OH .



Así pues, aplicando las conocidas fórmulas que permiten calcular el volumen de la esfera y del cono, y teniendo en cuenta que, por lo pedido en el enunciado, el volumen del «doble cono» y el de la esfera deben ser iguales, tenemos:

$$\frac{1}{3}\pi|CH|^2|AH| + \frac{1}{3}\pi|CH|^2|OH| = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

de donde, extrayendo factores comunes, teniendo en cuenta que, como es evidente, se satisface $d = |OA| = |AH| + |OH|$, y simplificando, se sigue:

$$\frac{1}{2} \pi |CH|^2 (|AH| + |OH|) = \frac{4}{2} \pi r^3 \Leftrightarrow |CH|^2 d = 4r^3. \quad (I)$$

Por otra parte, como los triángulos AHC y ACO son semejantes (tienen un ángulo agudo en común y ambos son triángulos rectángulos), podemos establecer la proporción:

$$\frac{|CH|}{|AC|} = \frac{r}{d},$$

que, despejando $|CH|$ y elevando al cuadrado, nos lleva a:

$$|CH|^2 = |AC|^2 \frac{r^2}{d^2},$$

y, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ACO, resulta:

$$|CH|^2 = (d^2 - r^2) \frac{r^2}{d^2}.$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión de $|CH|^2$ en (I), operando, y resolviendo la ecuación de segundo grado en la incógnita r resultante, llegamos a:

$$|CH|^2 d = 4r^3 \Leftrightarrow (d^2 - r^2) \frac{r^2}{d^2} d = 4r^3 \Leftrightarrow \frac{d^2 - r^2}{d} = 4r \Leftrightarrow d^2 - r^2 = 4dr \Leftrightarrow r^2 + 4dr - d^2 = 0 \Rightarrow$$

$$r = \frac{-4d \pm \sqrt{16d^2 + 4d^2}}{2} = \frac{-4d \pm \sqrt{20d^2}}{2} = \frac{-4d \pm 2\sqrt{5}d}{2} = -2d \pm \sqrt{5}d \Rightarrow \begin{cases} r = (-2 + \sqrt{5})d \\ r = (-2 - \sqrt{5})d \end{cases}.$$

Ahora bien, la segunda solución de la ecuación es inaceptable, puesto que proporciona un valor negativo para el radio del semicírculo, y, en consecuencia, la única solución al problema es:

$$r = (-2 + \sqrt{5})d.$$

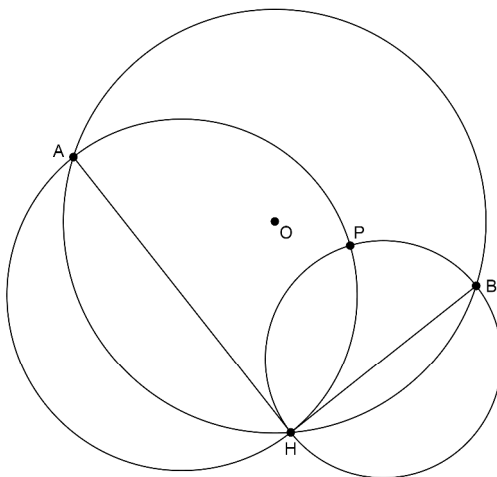
(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 4.21

Se considera la circunferencia de centro O y radio r que pasa por un punto fijo H . Dos cuerdas variables HA y HB , perpendiculares entre sí, se toman como diámetros de sendas circunferencias, que se cortan en H y en otro punto P . Se pide:

- Prueba que P pertenece a la recta AB .
- Halla el lugar geométrico de P .
- Construye la figura transformada del lugar geométrico hallado por la homotecia de centro H y razón -2 .

La situación de los distintos elementos contruidos a partir de las indicaciones dadas en el enunciado se muestra en el gráfico, sobre el que razonaremos posteriormente.

Apartado a)

Puesto que el punto P pertenece a la circunferencia de diámetro HB , es claro que P pertenece al arco capaz de 90 grados relativo al segmento HB , lo que se traduce en que el ángulo BPH es recto, y, de la misma manera, por pertenecer P a la circunferencia de diámetro HA , el ángulo HPA también es recto.

Por tanto, el ángulo BPA , que es igual a la suma de los ángulos BPH y HPA , tiene una medida de 180 grados, lo que significa que los puntos A , P y B están alineados, como queríamos demostrar.

Apartado b)

Por construcción, las cuerdas HA y HB , aunque variables, siempre son perpendiculares, lo que implica que el punto H siempre pertenece al arco capaz de 90 grados relativo al segmento AB , es decir, H pertenece en todo momento a la circunferencia de diámetro AB .

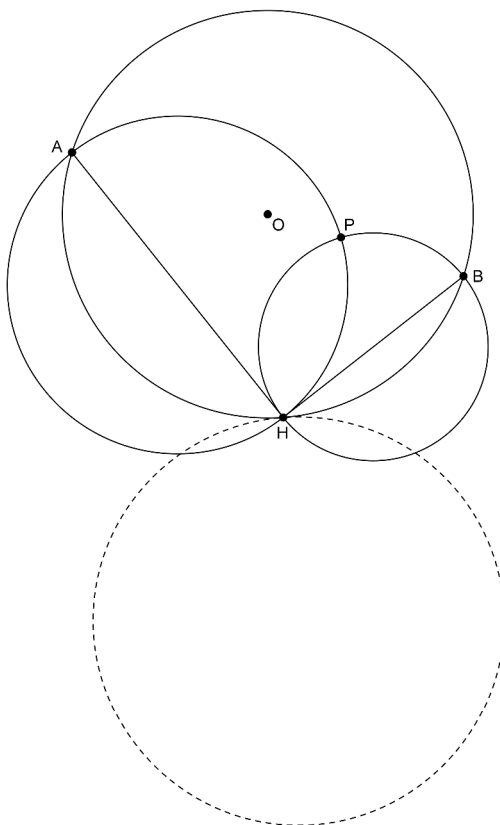
Pero, como solo existe una circunferencia que pase por tres puntos no alineados, y los puntos A , B y H pertenecen a la circunferencia dada en el enunciado, resulta que

AB es un diámetro de esta circunferencia, lo que implica, a su vez, que el punto O está alineado con A y B. Entonces, teniendo en cuenta lo visto en el apartado a), podemos afirmar que los puntos A, O, P y B están alineados, de donde se desprende que el ángulo OPH también es recto (siempre que O y P no sean el mismo punto, lo cual sucede cuando las cuerdas HA y HB tienen la misma longitud, o lo que es lo mismo, cuando los segmentos AB y OH son perpendiculares).

Ahora bien, al ser el punto P variable, los puntos O y H fijos (según el enunciado), y el ángulo OPH siempre recto, resulta que el punto P recorre el arco capaz de 90 grados relativo al segmento OH, es decir, la circunferencia de diámetro OH, lo que se traduce en que el lugar geométrico pedido es precisamente la circunferencia de diámetro OH.

Apartado c)

Como es sabido, una homotecia de razón k transforma una circunferencia de radio r en una circunferencia de radio $|k| \cdot r$, quedando los centros de ambas circunferencias alineados con el centro de la homotecia.



En el caso que nos ocupa, estamos transformando la circunferencia de diámetro OH, cuyo radio mide $r/2$, mediante la homotecia de razón -2 y centro H, por lo que el resultado debe ser una circunferencia de radio r , con centro en un punto de la recta OH,

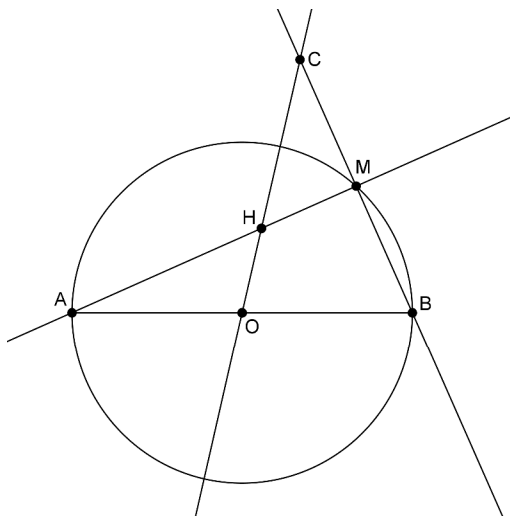
digamos O' , de manera que el punto H quede entre los dos centros, por ser negativa la razón de la homotecia. Como, además, el punto H pertenece a la circunferencia de diámetro OH y es el centro de la homotecia, debe transformarse en sí mismo, por lo que ha de pertenecer a la circunferencia resultante de la homotecia, lo cual solo es posible si la distancia entre H y O' es igual a r . De este modo, resulta que H es el punto medio de O y O' , lo que se traduce en que la circunferencia resultante, mostrada con trazo discontinuo en el siguiente gráfico, es la simétrica de la dada en el enunciado mediante la simetría central de centro H .

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 4.22

Sea una circunferencia de centro O y en ella el diámetro AB . Se traza por B una recta que corta a la circunferencia en M . Sobre dicha recta se toma el segmento $MC = MB$. Las rectas OC y AM se cortan en H . Halla el lugar geométrico de los puntos H cuando BM gira alrededor de B y construye la figura homotética del lugar geométrico hallado en la homotecia de centro A y razón $-3/2$.

Representando la circunferencia de centro O , considerando en ella el diámetro AB , y realizando la construcción de los elementos descritos en el enunciado, tenemos la situación mostrada en el gráfico.



Si consideramos el triángulo de vértices A , B y C , teniendo en cuenta que O es el punto medio de A y B (O es el centro de la circunferencia y AB es un diámetro) y que M es el punto medio de B y C (es así por construcción de C , ya que lo hemos elegido de manera que $MB = MC$), es claro que las rectas AM y CO son medianas del triángulo ABC (son rectas que unen un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto), por lo que el punto H es el baricentro del triángulo ABC .

Ahora bien, como es sabido, el baricentro de un triángulo cualquiera tiene la propiedad de dividir el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto en dos partes, de manera que el segmento que une el vértice con el baricentro tiene una longitud igual a las dos terceras partes del segmento que une el vértice con el punto medio del lado opuesto, lo que significa que, en nuestro caso, tenemos:

$$|AH| = \frac{2}{3}|AM|,$$

que podemos expresar vectorialmente como:

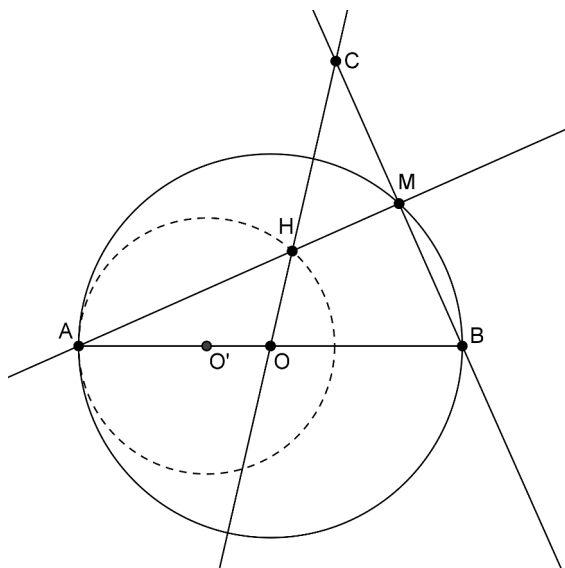
$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}.$$

Así pues, recordando la definición de una homotecia, podemos decir que H es el transformado de M mediante la homotecia de centro A y razón $2/3$. Además, es claro que cuando el segmento BM gira alrededor de B, el punto M recorre toda la circunferencia, lo que se traduce en que el lugar geométrico descrito por H, que es lo que queremos determinar, es el resultado de aplicar la homotecia de centro A y razón $2/3$ a toda la circunferencia, que, como sabemos, se corresponde con la circunferencia que tiene por radio las dos terceras partes de la longitud del segmento OA (el radio de la circunferencia dada), y cuyo centro, que denotamos por O', satisface la relación:

$$\overrightarrow{AO'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO},$$

por ser O' el transformado de O mediante la mencionada homotecia.

De este modo, el lugar geométrico pedido es la circunferencia que se muestra con trazo discontinuo en el gráfico.



focal, puesto que, en tal caso, A, B y C estarían alineados y no tendríamos un triángulo (recordemos que una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante).

Ahora, por la propiedad fundamental del baricentro (ya comentada en el problema anterior), sabemos que se verifica la relación vectorial:

$$\overrightarrow{MH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MC},$$

que muestra que el punto H es el resultado de aplicar una homotecia de centro M y razón $1/3$ al punto C.

Así pues, dado que C recorre la elipse E, cuyo centro coincide con el de la homotecia (exceptuando los dos vértices del eje focal), el punto H debe estar sobre la elipse homotética de E, que también tiene su centro en M y posee los mismos ejes de simetría que E (sin incluir los vértices del eje focal).

Si nos interesa obtener la ecuación reducida de esta elipse, que se corresponde con el lugar geométrico pedido (excluyendo los vértices del eje focal), podemos fijar un sistema de referencia cuyo origen sea el punto M, de manera que el eje de abscisas coincida con la recta AB. En esta situación, teniendo en cuenta que la longitud del segmento AB es de 16 unidades, y que M es su punto medio, es claro que podemos asignar a A y B las coordenadas (8,0) y (−8,0), respectivamente.

Ahora, si denotamos por a el semieje principal de la elipse E, por b su semieje secundario, y por c la distancia del centro a los focos, tenemos que $c = 8$ (sus focos son A y B), y, al ser la constante de E igual a 20 unidades, debe ser $a = 10$, de manera que, a partir de la relación $a^2 = b^2 + c^2$ (por el teorema de Pitágoras), podemos determinar b , resultando $b = 6$.

En consecuencia, la elipse transformada de E mediante la homotecia de centro M y razón $1/3$ tiene como semieje principal $a' = 1/3 \cdot a = 10/3$, y como semieje secundario $b' = 1/3 \cdot b = 2$, por lo que su ecuación reducida es:

$$\frac{x^2}{(10/3)^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1,$$

o bien:

$$\frac{x^2}{100/9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

que es la ecuación del lugar geométrico pedido, excluyendo los vértices del eje focal, que, como es claro, son los puntos de coordenadas (10/3,0) y (−10/3,0).

(Oposiciones de Secundaria, 2005)

Problema 4.24

Dos puntos variables del plano, P y Q , que están alineados con el origen, cumplen la condición de que la razón simple (OPQ) es $-1/2$. Halla el lugar geométrico del punto P cuando Q describe la circunferencia de centro $(4,4)$ y radio 2.

En primer lugar, recordemos que, dados tres puntos alineados, digamos A , B y C , se define la razón simple, que denotamos por (ABC) , como el número que verifica la relación vectorial:

$$\overrightarrow{AC} = (ABC) \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Así pues, en el caso que nos ocupa, a partir de la condición dada en el enunciado, tenemos la igualdad:

$$\overrightarrow{OQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OP},$$

o, equivalentemente:

$$\overrightarrow{OP} = -2\overrightarrow{OQ},$$

lo que se traduce en que el punto P es el transformado de Q mediante la homotecia de centro O (el origen) y razón -2 .

De este modo, es claro que cuando Q recorre la circunferencia de centro $(4,4)$ y radio 2, el punto P recorre también una circunferencia (las homotecias transforman circunferencias en circunferencias), de radio 4 (que es el producto del radio de la circunferencia que recorre el punto Q por el valor absoluto de la razón de la homotecia), y cuyo centro es el transformado por la homotecia del punto $(4,4)$, que es el centro de la circunferencia recorrida por Q , es decir, el punto $(-8,-8)$, como es fácil de comprobar.

Por tanto, podemos afirmar que el lugar geométrico pedido en el enunciado es precisamente la circunferencia de centro $(-8,-8)$ y radio 4, lo que concluye el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

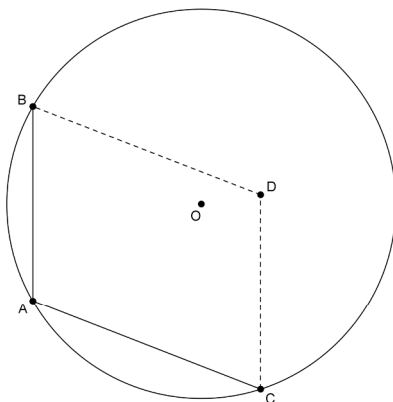
Problema 4.25

En una circunferencia de radio R se consideran la cuerda AB , fija de longitud R , y la cuerda AC variable. Sobre estas dos cuerdas se construye el paralelogramo $BACD$. Se pide determinar los siguientes lugares:

- Del punto medio de AC .*
- Del centro del paralelogramo.*
- Del vértice D .*

En primer lugar, representamos la cuerda fija AB , de longitud R , y la cuerda variable AC (lo cual significa que el punto C recorre toda la circunferencia). A continuación,

trazamos por C la paralela a AB y por B la paralela a AC, resultando el punto D como intersección de ambas rectas. De este modo, denotando por O el centro de la circunferencia, tenemos la situación mostrada en el gráfico, a partir de la cual resolveremos separadamente cada apartado del problema.



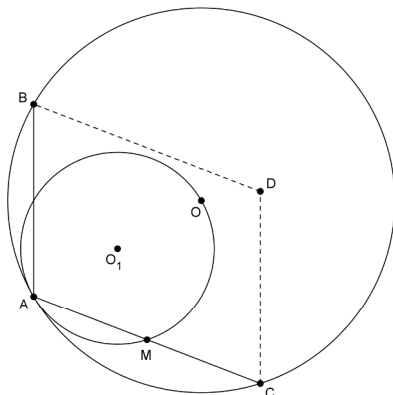
Apartado a)

Denotemos por M el punto medio del segmento AC. Entonces, como es claro, tenemos la relación vectorial

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC},$$

lo que significa que M es el trasformado de C mediante la homotecia de centro A (que es un punto fijo, no variable) y razón $1/2$. Por tanto, como C recorre la circunferencia dada, el punto M debe describir la circunferencia que resulta de aplicar la mencionada homotecia a la circunferencia dada, esto es, la circunferencia de radio $R/2$ (la razón de la homotecia es $1/2$) cuyo centro, que denotamos por O_1 , está alineado con A y O (en realidad, es el punto medio de ambos, al ser $1/2$ la razón de la homotecia).

Dicho de otro modo, el lugar geométrico descrito por M coincide con la circunferencia de diámetro OA, que podemos ver en el gráfico.



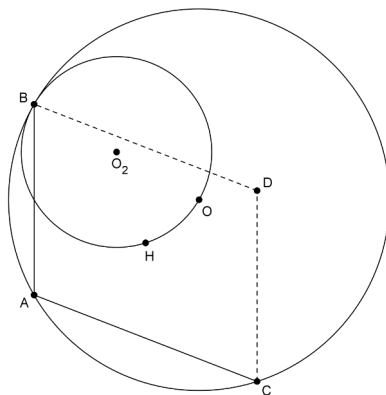
Apartado b)

Como es sabido, el centro de un paralelogramo es el punto medio de las diagonales, por lo que, denotando por H el centro del paralelogramo, se debe cumplir la relación vectorial:

$$\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC},$$

la cual evidencia que H es el transformado de C mediante la homotecia de centro B (que, como antes ocurría con A, es un punto fijo, no variable) y razón 1/2.

Así pues, razonando de manera análoga al apartado anterior, llegamos a la conclusión de que el lugar geométrico descrito por el centro del paralelogramo se corresponde con la circunferencia de diámetro OB, como se muestra en el gráfico, donde hemos denotado por O_2 su centro.

Apartado c)

A partir de la clara relación:

$$D = C + \overrightarrow{CD},$$

teniendo en cuenta la igualdad:

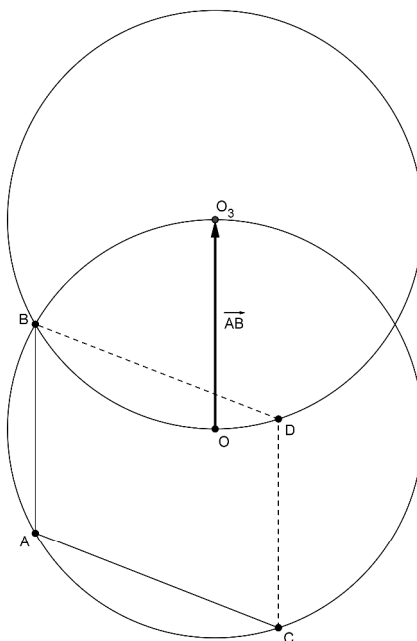
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$$

(consecuencia de que los puntos B, A, C y D forman un paralelogramo), podemos escribir:

$$D = C + \overrightarrow{AB},$$

que indica que el punto D se obtiene a partir de C mediante la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$, que es fijo, no variable.

De este modo, al recorrer C la circunferencia dada, el punto D describe la resultante de aplicar a la misma la traslación mencionada, obteniéndose, de este modo, la circunferencia mostrada en el gráfico, cuyo centro hemos denotado por O_3 .



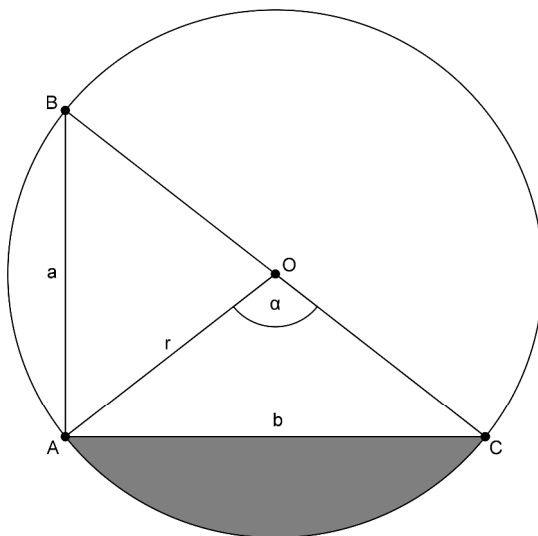
(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1974, y examen de Universidad)

Problema 4.26

En un triángulo rectángulo, el cateto AB es constante de longitud a , siendo el otro cateto AC variable de longitud b . En la circunferencia circunscrita al triángulo, sea S el área del menor de los dos segmentos circulares determinados por el cateto AC . Halla el límite:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{S}{b^3}.$$

Denotando por O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC , por r su radio, y por α el ángulo AOC , tenemos la situación mostrada en el gráfico, donde aparece sombreada la superficie S . Obsérvese que, como el ángulo BAC es recto, A pertenece al arco capaz de 90 grados relativo al segmento BC , lo cual se traduce en que el segmento BC , que es la hipotenusa del triángulo ABC , es un diámetro de la circunferencia circunscrita, lo que implica, a su vez, que O es el punto medio de B y C .



Por su parte, como es claro, S es igual a la diferencia entre la superficie del sector circular OAC y el triángulo OAC , por lo que, a partir de las conocidas fórmulas que permiten hallar la superficie de ambas figuras (considerando α expresado en radianes), teniendo en cuenta que la altura del triángulo OAC relativa al lado AC es precisamente $a/2$ (por ser O el punto medio de BC y ser a la medida del lado AB), podemos escribir:

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{2\pi} - \frac{b \cdot a/2}{2},$$

que, operando, queda:

$$S = \frac{\alpha}{2} r^2 - \frac{ab}{4}. \quad (I)$$

Por otro lado, podemos ver que el ángulo ABC es el ángulo del triángulo relativo al vértice B (por lo que también lo denotaremos por B) y, a la vez, un ángulo inscrito en la circunferencia, que abarca el arco AC . Ahora bien, como es sabido, un ángulo inscrito en una circunferencia tiene una amplitud igual a la mitad de la amplitud del ángulo central que abarca el mismo arco, por lo que se satisface la igualdad $B = \alpha/2$, ya que α es el ángulo central que abarca el arco AC , como es evidente. Como, además, por la definición de la tangente, es $\operatorname{tg} B = b/a$, resulta $B = \operatorname{arctg}(b/a)$, de donde, sustituyendo en la anterior igualdad, llegamos a $\alpha/2 = \operatorname{arctg}(b/a)$, que es una expresión que depende únicamente de a y b .

Para expresar también r^2 en función de a y b , aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo ABC , teniendo en cuenta que, como hemos comentado, el segmento BC es un diámetro de la circunferencia, resultando:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 \Leftrightarrow (2r)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 4r^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Ahora, sustituyendo la expresión encontrada de $\alpha/2$ y de r^2 en (I), y operando, resulta:

$$S = \frac{\alpha}{2} r^2 - \frac{ab}{4} = \arctg(b/a) \frac{a^2 + b^2}{4} - \frac{ab}{4} = \frac{(a^2 + b^2)\arctg(b/a) - ab}{4},$$

por lo que el límite que queremos calcular, que denotamos por L , es:

$$L = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{S}{b^3} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{(a^2 + b^2)\arctg(b/a) - ab}{4b^3}.$$

Como vemos, este límite presenta una indeterminación del tipo $0/0$, que podemos resolver aplicando la regla de L'Hôpital (es claro que se satisfacen las hipótesis), quedando:

$$L = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2b \cdot \arctg(b/a) + (a^2 + b^2) \frac{1/a}{1 + (b/a)^2} - a}{12b^2}.$$

Ahora bien, es claro que, operando, tenemos:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) \frac{1/a}{1 + (b/a)^2} - a &= \frac{a^2 + b^2}{a[1 + (b/a)^2]} - a = \\ &= \frac{a^2 + b^2 - a^2[1 + (b/a)^2]}{a[1 + (b/a)^2]} = \frac{a^2 + b^2 - a^2 - b^2}{a[1 + (b/a)^2]} = 0, \end{aligned}$$

por lo que, sustituyendo en la igualdad anterior y simplificando, se sigue:

$$L = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2b \cdot \arctg(b/a) + 0}{12b^2} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\arctg(b/a)}{6b},$$

y estamos otra vez ante una indeterminación del tipo $0/0$. Aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital (se dan las condiciones adecuadas para ello) y operando, resulta:

$$L = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\frac{1/a}{1 + (b/a)^2}}{6} = \frac{\frac{1/a}{1 + (0/a)^2}}{6} = \frac{1/a}{6} = \frac{1}{6a},$$

lo que da respuesta a la cuestión planteada en el enunciado.

(Oposiciones de Secundaria, 1996)

Problema 4.27

Dadas las circunferencias:

$$r \equiv x^2 + y^2 - x - y - 1 = 0, \quad s \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0, \quad t \equiv x^2 + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0,$$

se pide:

- La ecuación del eje radical de las circunferencias r y s .
- Las coordenadas del centro radical de las tres circunferencias.
- Comprobar si r y s son tangentes exteriores.
- Comprobar si r y s son ortogonales.
- La ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y pertenece al haz generado por r y s .

Apartado a)

Como es sabido, el eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto de ambas circunferencias, que resulta ser una recta perpendicular a la recta que pasa por los dos centros. Para hallar la ecuación del eje radical de dos circunferencias, es suficiente con restar miembro a miembro las respectivas ecuaciones de las circunferencias, por lo que, en el caso que nos ocupa, el eje radical de las circunferencias r y s , denotado por e_{rs} , viene dado por la ecuación:

$$e_{rs} \equiv x^2 + y^2 - x - y - 1 - (x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2) = 0,$$

que, operando, se transforma en:

$$e_{rs} \equiv x - 5y + 1 = 0.$$

Apartado b)

El centro radical de tres circunferencias, cuyos centros no están alineados, es el punto que tiene la misma potencia respecto de las tres circunferencias. Es evidente, por tanto, que el centro radical debe pertenecer a los tres ejes radicales que podemos formar tomando las circunferencias de dos en dos, por lo que, para determinarlo, basta con intersectar dos de los tres ejes radicales, pues los tres ejes radicales (que son rectas) son concurrentes en el centro radical. Así pues, en nuestro caso, como ya disponemos de la ecuación del eje radical de las circunferencias r y s , podemos hallar, por ejemplo, la ecuación del eje radical de las circunferencias s y t , que denotamos por e_{st} , y posteriormente resolver el sistema formado por ambas ecuaciones. Restando las ecuaciones de s y t , y operando, tenemos:

$$e_{st} \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 - (x^2 + y^2 + 2x + 2y - 4) = 0 \Leftrightarrow e_{st} \equiv -2x + y + 1 = 0,$$

y, en consecuencia, el sistema que proporciona las coordenadas del centro radical es:

$$\begin{cases} x - 5y + 1 = 0 \\ -2x + y + 1 = 0 \end{cases}.$$

Resolviéndolo por el método de reducción, resulta:

$$\begin{cases} \cancel{2x} - 10y + 2 = 0 \rightarrow 2x - 10/3 + 2 = 0 \rightarrow x = 2/3 \\ \cancel{-2x} + y + 1 = 0 \\ \hline -9y + 3 = 0 \rightarrow y = 1/3 \end{cases},$$

de manera que el centro radical es el punto $C = (2/3, 1/3)$.

Apartado c)

Como sabemos, dos circunferencias son tangentes exteriores si, y solo si, la distancia entre sus centros es igual a la suma de sus radios. Así pues, para resolver este apartado, necesitamos conocer los radios y las coordenadas de los centros de las circunferencias r y s , lo cual podemos lograr sin más que «completar cuadrados» en sus respectivas ecuaciones, trasponer términos, y operar, como vemos a continuación:

$$r \equiv x^2 + y^2 - x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow r \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$r \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2},$$

$$s \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0 \Leftrightarrow s \equiv (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$s \equiv (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 7.$$

De este modo, la distancia entre los centros de ambas circunferencias, que denotamos, respectivamente, por C_r y C_s , es:

$$|C_r C_s| = d\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1, -2)\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2},$$

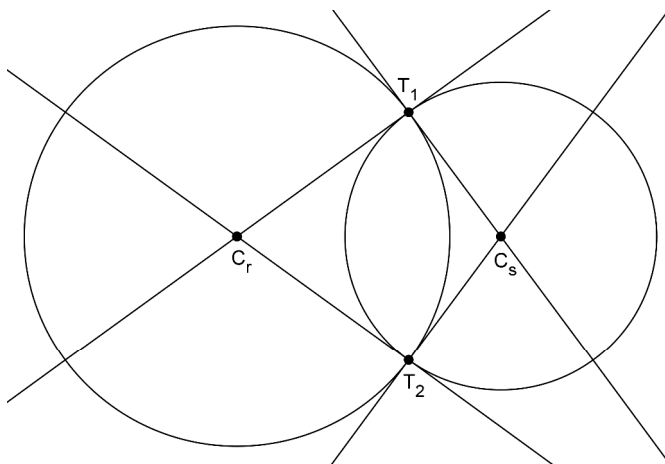
mientras que la suma de sus radios, que denotamos, respectivamente, por R_r y R_s , resulta ser:

$$R_r + R_s = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{7},$$

que, claramente, es un valor distinto de la distancia entre los centros hallada antes, lo que se traduce en que las circunferencias r y s no son tangentes exteriores.

Apartado d)

Recordemos que dos circunferencias son ortogonales si se cortan en dos puntos, de manera que los radios de cualquiera de ellas correspondientes a los dos puntos de corte son tangentes a la otra circunferencia en dichos puntos. Dicho de otro modo, dos circunferencias son ortogonales si son secantes y las tangentes a cualquiera de ellas en los puntos de corte pasan por el centro de la otra. En el gráfico podemos ver la situación descrita, para mayor claridad, donde hemos denotado por T_1 y T_2 los puntos de corte de las circunferencias.



Así pues, como una recta tangente a una circunferencia es siempre perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia, podemos decir que, con la notación del gráfico, las circunferencias r y s son ortogonales si, y solo si, el triángulo $C_r C_s T_1$ (y también el $C_r C_s T_2$) es rectángulo, lo que, haciendo uso del teorema de Pitágoras, equivale a decir que se verifica la igualdad:

$$|C_r C_s|^2 = |C_r T_1|^2 + |C_s T_1|^2.$$

Sin embargo, en el caso que nos ocupa, a partir del cálculo realizado en el apartado c), tenemos:

$$|C_r C_s|^2 = \left(\frac{\sqrt{26}}{2} \right)^2 = \frac{26}{4} = \frac{13}{2},$$

mientras que:

$$|C_r T_1|^2 + |C_s T_1|^2 = R_r^2 + R_s^2 = \frac{3}{2} + 7 = \frac{17}{2},$$

por lo que no se satisface el teorema de Pitágoras, lo cual significa que las circunferencias r y s no son ortogonales.

Apartado e)

Como es sabido, para obtener el haz de circunferencias generado por r y s , hemos de sumar miembro a miembro las ecuaciones de ambas circunferencias, previamente multiplicadas por sendos escalares, digamos λ y μ , como si hiciéramos «una combinación lineal» de r y s . De este modo, la ecuación del haz es:

$$\lambda(x^2 + y^2 - x - y - 1) + \mu(x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2) = 0,$$

y el problema planteado en este apartado se reduce a determinar el valor de los escalares λ y μ para que las coordenadas del origen satisfagan la ecuación. Sin embargo, haciendo $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación, obtenemos la igualdad $-\lambda - 2\mu = 0$, la cual no permite hallar los valores de estos escalares, sino encontrar una ligadura entre ellos. Para superar este obstáculo, podemos observar que el origen no pertenece a la circunferencia s (como es claro, no satisface su ecuación), por lo que la circunferencia del haz que pasa por el origen no puede obtenerse para $\lambda = 0$. Así pues, al ser necesariamente $\lambda \neq 0$, podemos dividir por λ los dos miembros de la ecuación del haz, de modo que, simplificando y «renombrando» el cociente μ/λ como un nuevo parámetro, digamos α , tenemos:

$$\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}}(x^2 + y^2 - x - y - 1) + \frac{\mu}{\lambda}(x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - x - y - 1 + \alpha(x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2) = 0,$$

de donde, imponiendo las condiciones $x = 0$, $y = 0$, para que la circunferencia del haz pase por el origen, se sigue:

$$-1 + \alpha(-2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1/2.$$

Finalmente, sustituyendo este valor de α en la ecuación del haz, operando y agrupando, resulta:

$$x^2 + y^2 - x - y - 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 6y = 0,$$

que es la ecuación de la circunferencia pedida. Si se prefiere, podemos «completar cuadrados» y trasponer, lo que nos lleva a:

$$x^2 + y^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 9,$$

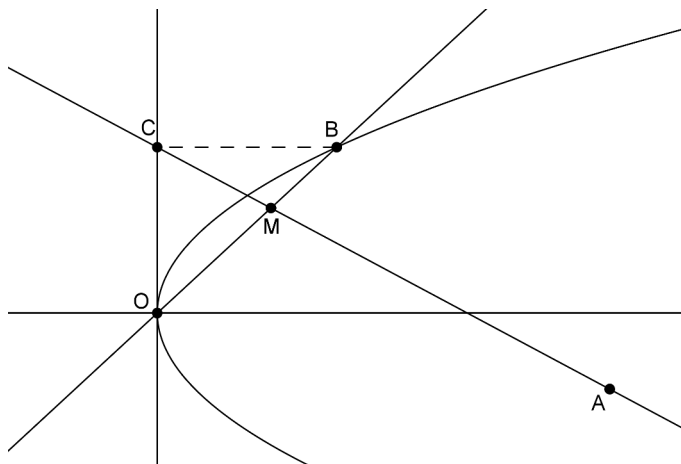
donde puede verse claramente que la circunferencia pedida es la de radio 3 centrada en el punto $(0,3)$.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 4.28

Consideremos la parábola $y^2 = 2px$ y el punto fijo $A(a,b)$, siendo $a \neq 0$. Por el vértice de la parábola se traza la cuerda variable OB , y se proyecta B sobre la tangente a la parábola en el vértice, resultando el punto C . Halla el lugar geométrico de los puntos M , intersección de las rectas OB y AC .

Denotando por (s,t) las coordenadas del punto variable B , perteneciente a la parábola, y teniendo en cuenta que la tangente a la parábola en el vértice (que es el origen de coordenadas, O) coincide con el eje OY , es claro que las coordenadas de C son $(0,t)$. Trazando ahora las rectas OB y AC , e intersecándolas, obtenemos el punto M , cuyo lugar geométrico pretendemos determinar, quedando una situación como la mostrada en el gráfico, en la que hemos situado el punto A en un lugar arbitrario.



Teniendo en cuenta las coordenadas de A , B , C y O , a partir de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, podemos hallar las ecuaciones de OB y AC , resultando:

$$OB \equiv \frac{x-0}{s-0} = \frac{y-0}{t-0} \Leftrightarrow OB \equiv \frac{x}{s} = \frac{y}{t},$$

$$AC \equiv \frac{x-0}{a-0} = \frac{y-t}{b-t} \Leftrightarrow AC \equiv \frac{x}{a} = \frac{y-t}{b-t},$$

de manera que el punto M queda determinado como solución del sistema formado por las ecuaciones encontradas de OB y AC .

Obsérvese que la recta OB no está definida si $B = O$ (esto es, si s y t son ambos nulos, o si lo es alguno de los dos, puesto que al pertenecer B a la parábola, debe satisfacerse la relación $t^2 = 2ps$, a partir de la cual podemos deducir que si uno de los dos es nulo, entonces, también lo es el otro), mientras que la recta AC está definida siempre, ya que, según el enunciado, se verifica $a \neq 0$, lo que implica que A no pertenece al eje OY, y, en consecuencia, no puede ser $A = C$. Así pues, para que tenga sentido la construcción de M , en principio, supondremos que ni s ni t son nulos.

Con lo visto, podemos decir que el problema de determinar el lugar geométrico de M consiste en eliminar s y t del sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{s} = \frac{y}{t} \\ \frac{x}{a} = \frac{y-t}{b-t} \\ t^2 = 2ps \end{cases}$$

Despejando s de la primera ecuación, sustituyendo en la tercera, y simplificando (estamos suponiendo que t no es nulo), tenemos:

$$\begin{cases} s = \frac{x}{y}t \\ \frac{x}{a} = \frac{y-t}{b-t} \\ t^2 = 2ps \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{x}{y}t \\ \frac{x}{a} = \frac{y-t}{b-t} \\ t^2 = 2p \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{x}{y}t \\ \frac{x}{a} = \frac{y-t}{b-t} \\ t = 2p \frac{x}{y} \end{cases},$$

y, despejando ahora t de la segunda (para lo cual es necesario trasponer términos, operar y extraer factores comunes), y sustituyendo también en la tercera, llegamos a:

$$\begin{cases} s = \frac{x}{y}t \\ bx - tx = ay - at \\ t = 2p \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{x}{y}t \\ (a-x)t = ay - bx \\ t = 2p \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{x}{y}t \\ t = \frac{ay - bx}{a-x} \\ t = 2p \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{x}{y}t \\ t = \frac{ay - bx}{a-x} \\ \frac{ay - bx}{a-x} = 2p \frac{x}{y} \end{cases},$$

y, en consecuencia, la ecuación del lugar geométrico pedido es:

$$\frac{ay - bx}{a - x} = 2p \frac{x}{y},$$

si bien podemos presentarla de una manera más sencilla, operando y trasponiendo, como vemos a continuación:

$$\frac{ay - bx}{a - x} = 2p \frac{x}{y} \Leftrightarrow ay^2 - bxy = 2apx - 2px^2 \Leftrightarrow 2px^2 + ay^2 - bxy - 2apx = 0.$$

Obsérvese que, como es evidente, el origen de coordenadas satisface la ecuación del lugar, por lo que cabe pensar que debe pertenecer al mismo. Sin embargo, este punto no puede resultar de la intersección de las rectas OB y AC, puesto que, de ser así, O pertenecería a la recta AC, lo que implicaría que los puntos O, C (que están sobre el eje OY) y A tendrían que estar alineados, lo cual es imposible, pues, según el enunciado, A no está sobre el eje OY, salvo que se diera la circunstancia de que $O = C$. Ahora bien, como las coordenadas de C son $(0, t)$, la igualdad $O = C$ solo puede darse si $t = 0$, situación que hemos descartado, por no estar definida la recta OB (sería el caso en que $B = O = C$).

Caben aquí dos interpretaciones: que el origen de coordenadas no puede estar en el lugar geométrico descrito por M, en cuyo caso la solución del problema consistiría en eliminar O del lugar geométrico que hemos determinado; o aceptar que es posible formar la recta OB, aun en el caso en que $B = O$, entendiendo esta recta como el límite de las rectas secantes OB, cuando B tiende a O recorriendo la parábola, es decir, como la tangente a la parábola en el punto O (el eje OY), en cuyo caso la intersección de esta recta con la recta AC sería, precisamente, el origen de coordenadas, con lo que el lugar geométrico hallado daría respuesta al problema, sin excluir ningún punto.

No entraremos en controversia sobre las dos posibles interpretaciones, sino que aceptaremos que ambas son igualmente válidas, dando así por concluido el problema.

(Examen de Universidad)

Problema 4.29

En una parábola de ecuación $y^2 = 2px$ se traza la normal por un punto M. Sea N el punto de intersección de dicha normal y la directriz. Si C es el centro de curvatura de la parábola en M, determina el valor de la relación entre la longitud del segmento CM y la del segmento MN.

En primer lugar, como el punto M pertenece a la parábola dada, sus coordenadas han de ser de la forma:

$$M = (m, \pm\sqrt{2pm}),$$

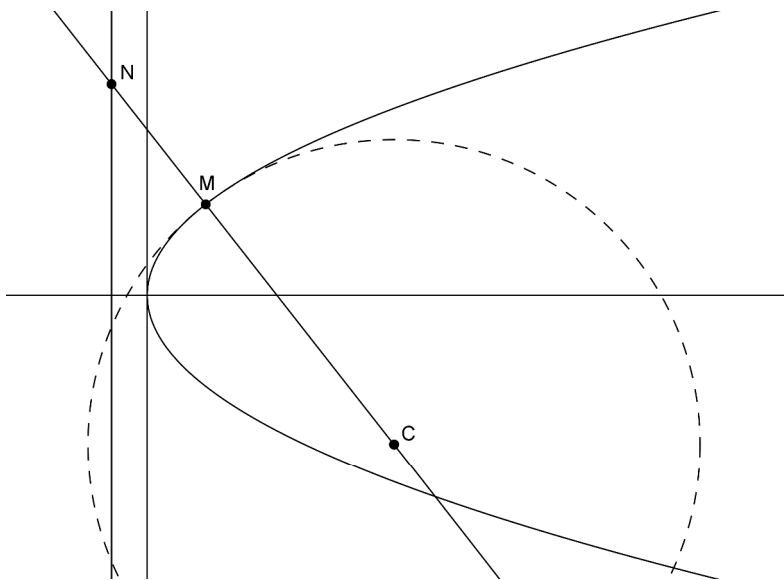
siendo $m \geq 0$. Ahora bien, puesto que la parábola es simétrica respecto del eje OX, y las dos posibles ordenadas de M son opuestas para un mismo valor de m (lo cual se traduce en los dos puntos M correspondientes a un mismo valor de m también son simétricos el uno del otro respecto del eje OX), podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que M se encuentra en el primer cuadrante, ya que los resultados que

obtendríamos en el otro caso serían los mismos, por la simetría mencionada. Así pues, partimos de que el punto M tiene coordenadas:

$$M = (m, \sqrt{2pm}).$$

Conviene recordar que la directriz de una parábola es la recta perpendicular al eje situada a una distancia del vértice igual a la que separa este del foco, y que el centro de curvatura de la parábola en M se corresponde con el centro de la circunferencia osculatriz, esto es, la circunferencia que, pasando por M, «más se aproxima» a la parábola en un entorno de M, lo que, desde el punto de vista analítico, significa que la parábola y la circunferencia osculatriz tienen un contacto de segundo orden (tanto la primera como la segunda derivada de las funciones que definen la parábola y la circunferencia son iguales en el punto M), lo que, en particular, implica que la parábola y la circunferencia osculatriz comparten la recta tangente en el punto M. Teniendo en cuenta esto último, y que la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que une el punto de tangencia con el centro, resulta claro que el centro de curvatura pertenece a la recta normal, por lo que los puntos C, M y N están alineados.

Representando la parábola y realizando la construcción del resto de elementos involucrados en el problema como se indica en el enunciado, estamos en una situación como la mostrada en el gráfico, donde se muestra la circunferencia osculatriz con trazo discontinuo.



Ahora, como es sabido, la ecuación de la recta normal a una curva dada por la fórmula $y = f(x)$ en un punto de la misma, de coordenadas $(a, f(a))$, siendo f derivable en a , es:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a),$$

por lo que, en el caso que nos ocupa, la ecuación de la recta normal a la parábola en M es:

$$y - \sqrt{2pm} = -\frac{1}{\cancel{2p}^{\cancel{\sqrt{2pm}}}}(x - m) \Leftrightarrow y - \sqrt{2pm} = -\frac{\sqrt{2pm}}{p}(x - m),$$

puesto que estamos trabajando con la función:

$$f(x) = \sqrt{2px}.$$

En cuanto a la directriz de la parábola, dada en forma canónica, como también es sabido, se trata de la recta vertical de ecuación $x = -p/2$, por lo que las coordenadas del punto N, resultado de la intersección de la normal a la parábola en M con la directriz, se obtienen como solución del sistema:

$$\begin{cases} y - \sqrt{2pm} = -\frac{\sqrt{2pm}}{p}(x - m) \\ x = -p/2 \end{cases},$$

del que, sustituyendo y operando, llegamos a:

$$\begin{cases} y - \sqrt{2pm} = -\frac{\sqrt{2pm}}{p}\left(-\frac{p}{2} - m\right) \\ x = -p/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \left(\frac{p}{2p} + \frac{m}{p}\right)\sqrt{2pm} + \sqrt{2pm} \\ x = -p/2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{p+2m}{2p}\sqrt{2pm} + \sqrt{2pm} \\ x = -p/2 \end{cases},$$

y, entonces:

$$N = \left(-\frac{p}{2}, \frac{p+2m}{2p}\sqrt{2pm} + \sqrt{2pm}\right).$$

Empleando ahora la conocida expresión que permite hallar la distancia entre dos puntos, dadas sus coordenadas, podemos obtener la longitud del segmento MN, que, operando, resulta ser:

$$|MN| = \sqrt{\left(-\frac{p}{2} - m\right)^2 + \left(\frac{p+2m}{2p}\sqrt{2pm} + \sqrt{2pm} - \sqrt{2pm}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$|MN| = \sqrt{\left(\frac{p+2m}{2}\right)^2 + \left(\frac{p+2m}{2p}\right)^2 2pm} = \sqrt{\left(\frac{p+2m}{2}\right)^2 + \left(\frac{p+2m}{2}\right)^2 \frac{2\cancel{p}m}{p^{\cancel{x}}}} \Leftrightarrow$$

$$|MN| = \sqrt{\left(\frac{p+2m}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{2m}{p}\right)} = \frac{p+2m}{2} \cdot \sqrt{\frac{p+2m}{p}}.$$

En cuanto al segmento CM, teniendo en cuenta que C es el centro de curvatura de la parábola en el punto M, es claro que la distancia entre C y M es, precisamente, igual al radio de curvatura (el radio de la circunferencia osculatriz), que denotamos por $R_C(M)$, cuyo valor podemos calcular con la conocida expresión:

$$R_C(M) = \frac{\sqrt{\left(1 + (f'(m))^2\right)^3}}{|f''(m)|},$$

ya que hemos escrito la ecuación de la rama de la parábola situada en el primer cuadrante (donde se encuentra el punto M) en forma explícita como $y = f(x)$. Así pues, como:

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\sqrt{2px}} \right) = \frac{-p \cdot \frac{p}{\sqrt{2px}}}{\left(\sqrt{2px}\right)^2} = -\frac{\cancel{p} \cdot \frac{p}{\sqrt{2px}}}{2\cancel{p}x} = -\frac{p}{2x\sqrt{2px}},$$

sustituyendo la expresión de las derivadas primera y segunda de f (evaluadas en la abscisa $x = m$) en la fórmula que permite hallar el radio de curvatura, y operando, llegamos a:

$$|CM| = R_C(M) = \frac{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{p}{\sqrt{2pm}}\right)^2\right)^3}}{\left|-\frac{p}{2m\sqrt{2pm}}\right|} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{p^{\cancel{x}}}{2\cancel{p}m}\right)^3}}{\frac{p}{2m\sqrt{2pm}}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{p+2m}{2m}\right)^3}}{\frac{p}{2m\sqrt{2pm}}} \Leftrightarrow$$

$$|CM| = \frac{\frac{p+2m}{2\cancel{m}} \sqrt{\frac{p+2m}{2\cancel{p}m}}}{\frac{p}{2\cancel{m}\sqrt{2pm}}} = \frac{(p+2m)\sqrt{p+2m}}{\sqrt{p}} = (p+2m) \cdot \sqrt{\frac{p+2m}{p}}.$$

Por último, efectuando el cociente entre las expresiones que determinan la longitud de los segmentos CM y MN, tenemos:

$$\frac{|CM|}{|MN|} = \frac{\frac{(p+2m)}{2} \cdot \sqrt{\frac{p+2m}{p}}}{\frac{p+2m}{2} \cdot \sqrt{\frac{p+2m}{p}}} = 2,$$

que es el valor que pretendíamos calcular, y que, como vemos, no depende del punto M elegido.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 4.30

Se dan un foco F y dos puntos de una hipérbola. Se pide el lugar geométrico del segundo foco de las hipérbolas que tienen comunes los tres puntos dados.

Denotemos por F' el segundo foco de una hipérbola que cumpla las condiciones dadas en el enunciado, y por A y B los puntos fijos por los que debe pasar. Entonces, teniendo en cuenta la definición de la hipérbola como lugar geométrico (una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que su diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante), podemos escribir las igualdades:

$$\begin{cases} |d(A, F) - d(A, F')| = k \\ |d(B, F) - d(B, F')| = k \end{cases},$$

siendo $k > 0$ la constante aludida en la definición (obsérvese que hemos tomado la diferencia de las distancias en valor absoluto, ya que no sabemos, a priori, cuál de las dos distancias es mayor, puesto que ello depende, como es claro, de que los puntos A y B estén en la rama de la hipérbola más próxima a F o en la más cercana a F'), de donde, igualando, resulta:

$$|d(A, F) - d(A, F')| = |d(B, F) - d(B, F')|,$$

igualdad que podemos «desglosar» en estos dos casos:

$$d(A, F) - d(A, F') = d(B, F) - d(B, F')$$

o:

$$d(A, F) - d(A, F') = -[d(B, F) - d(B, F')] \Leftrightarrow d(A, F) - d(A, F') = d(B, F') - d(B, F).$$

Ahora bien, es claro que se dará la primera situación si A y B están simultáneamente más cerca de F que de F' (para que sean negativos los dos miembros de la igualdad) o si, por el contrario, están simultáneamente más cerca de F' que de F (para que ambos miembros sean positivos), lo cual es equivalente a decir que A y B están en la misma rama de la hipérbola. Si es este el caso, trasponiendo términos y teniendo en cuenta la propiedad simétrica de la distancia, obtenemos la igualdad:

$$d(F', B) - d(F', A) = d(F, B) - d(F, A),$$

cuyo segundo miembro es constante, puesto que A, B y F son puntos fijos. De este modo, resulta que la diferencia de distancias de F' a B y a A es constante, e igual a la diferencia de distancias de F a B y a A, por lo que, también por la definición de la hipérbola como lugar geométrico, podemos decir que F' pertenece a una rama de la hipérbola de focos A y B que pasa por F, que, para este caso, es el lugar geométrico pedido.

De manera análoga, podemos decir que se dará la segunda situación si A y B están en distinta rama de la hipérbola, en cuyo caso, también trasponiendo términos y aplicando la propiedad simétrica de la distancia, tenemos la igualdad:

$$d(F', B) + d(F', A) = d(F, B) + d(F, A),$$

en la que, de nuevo, el segundo miembro es constante. Teniendo presente la definición de la elipse como lugar geométrico (una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante), es claro que la anterior igualdad equivale a decir que F' pertenece a la elipse de focos A y B que pasa por F, que es el lugar geométrico pedido en este segundo caso.

(Oposiciones de Secundaria, 2000)

Problema 4.31

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos F y F' están en una razón constante r. Discute la solución según los valores de r.

Con el fin de simplificar los cálculos, podemos fijar, sin pérdida de generalidad, el sistema de referencia ortonormal en el que F es el origen y F' es el punto de coordenadas (1,0).

De este modo, un punto del lugar geométrico descrito en el enunciado, digamos P, de coordenadas (x,y) respecto del sistema de referencia elegido, deberá satisfacer la condición:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, F')} = r, \quad (I)$$

que, empleando las coordenadas de los puntos involucrados y la conocida expresión que permite hallar la distancia entre dos puntos, se convierte en:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = r,$$

de donde, elevando al cuadrado en ambos miembros, aplicando la conocida identidad algebraica, trasponiendo términos, y agrupando, se sigue:

$$\frac{x^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = r^2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{x^2 - 2x + 1 + y^2} = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2 x^2 - 2r^2 x + r^2 + r^2 y^2 \Leftrightarrow$$

$$(r^2 - 1)x^2 + (r^2 - 1)y^2 - 2r^2 x + r^2 = 0.$$

A la vista de la ecuación obtenida (la de una cónica, puesto que se trata de un polinomio de segundo grado en las indeterminadas x e y igualado a cero), en la que los coeficientes de los términos de segundo grado son iguales, parece razonable distinguir dos casos: que el coeficiente común a los términos de segundo grado sea nulo (lo que daría lugar a una cónica degenerada), o que no lo sea (lo que daría lugar a una circunferencia, como veremos más adelante).

Si el coeficiente común, $r^2 - 1$, es nulo, entonces, teniendo en cuenta que r es igual al cociente de dos distancias (lo que exige que r sea no negativo), debe ser $r = 1$, por lo que, sustituyendo, la ecuación anterior se transforma en $-2x + 1 = 0$, es decir, $x = 1/2$, que claramente se corresponde con la ecuación de la mediatriz del segmento que une los puntos F y F' . Obsérvese que es un resultado previsible, pues si hacemos $r = 1$ en (I), trasponiendo, obtenemos la igualdad $d(P, F) = d(P, F')$, que, como sabemos, caracteriza los puntos pertenecientes a la mediatriz del segmento FF' .

Si, por el contrario, $r^2 - 1 \neq 0$, entonces, podemos dividir ambos miembros de la ecuación por este binomio, resultando:

$$\frac{\cancel{(r^2-1)}x^2}{\cancel{r^2-1}} + \frac{\cancel{(r^2-1)}y^2}{\cancel{r^2-1}} - \frac{2r^2x}{r^2-1} + \frac{r^2}{r^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2r^2}{r^2-1}x + \frac{r^2}{r^2-1} = 0.$$

Por último, «completando cuadrados», operando y trasponiendo, tenemos:

$$x^2 + y^2 - \frac{2r^2}{r^2-1}x + \frac{r^2}{r^2-1} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{r^2}{r^2-1}\right)^2 - \left(\frac{r^2}{r^2-1}\right)^2 + y^2 + \frac{r^2}{r^2-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{r^2}{r^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{r^4}{(r^2-1)^2} - \frac{r^2}{r^2-1} \Leftrightarrow \left(x - \frac{r^2}{r^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{r^2}{(r^2-1)^2},$$

ecuación que evidencia, como habíamos adelantado, que, en este caso, el lugar geométrico pedido se corresponde con una circunferencia. Además, como claramente podemos ver, esta circunferencia queda reducida al punto F en caso de que sea $r = 0$ (lo cual también era previsible a partir de la igualdad (I), como es evidente).

Con todo lo visto, recapitulando, podemos decir que el lugar geométrico descrito en el enunciado es el conjunto vacío cuando r es negativo; es el punto F cuando $r = 0$; es la mediatriz del segmento FF' cuando $r = 1$; y es una circunferencia cuando r es positivo y distinto de uno, concretamente, la circunferencia de centro:

$$C = \left(\frac{r^2}{r^2 - 1}, 0 \right)$$

y radio:

$$r = \frac{r}{r^2 - 1}$$

(considerando el sistema de referencia fijado al principio). Obsérvese que, en todo caso, con independencia del sistema de referencia elegido, el centro de la circunferencia es un punto situado en la recta que pasa por F y F'.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

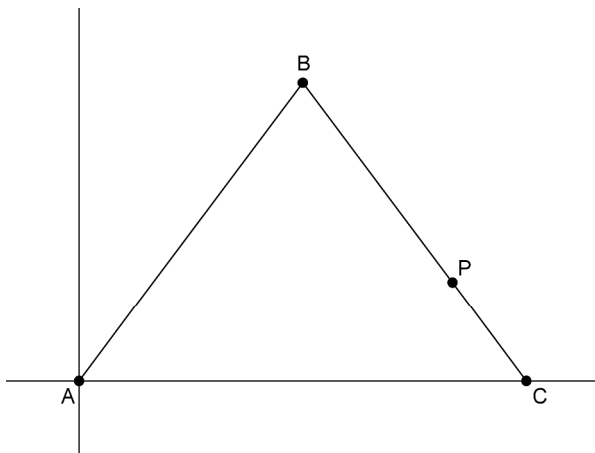
Problema 4.32

Dos varillas AB y BC, de igual longitud y articuladas en B, tienen fijo el punto A, mientras que C se mueve sobre la recta AC. Halla el lugar geométrico descrito por un punto P de la varilla BC.

Para simplificar los cálculos, y sin pérdida de generalidad, podemos elegir un sistema de referencia ortogonal que tenga el punto A por origen, y cuyo eje de abscisas coincida con la recta AC, sobre la que se mueve el punto C.

Así, si denotamos por d la longitud común de las varillas AB y BC, es claro que podemos escribir $A = (0,0)$ y $C = (c,0)$, siendo c un número real perteneciente al intervalo $[-2d, 2d]$.

Sea P un punto arbitrario, pero fijo, de la varilla BC, cuyas coordenadas denotaremos por (x,y) . Se trata de obtener la ecuación del lugar geométrico descrito por P cuando C se mueve sobre el eje de abscisas tanto como la longitud de las dos varillas le permite, o lo que es lo mismo, cuando c recorre el intervalo $[-2d, 2d]$. En el gráfico podemos ver la situación ante la que estamos.



Al ser ABC un triángulo isósceles, es claro que la primera coordenada de B es $c/2$, mientras que la segunda, que denotaremos por b , puede obtenerse aplicando el teorema de Pitágoras, resultando:

$$d^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = d^2 - \frac{c^2}{4} \Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{4d^2 - c^2}{4}} = \frac{\sqrt{4d^2 - c^2}}{2}.$$

Ahora, considerando la relación vectorial:

$$\overline{AP} = \overline{AC} + \overline{CP},$$

y teniendo en cuenta que, al estar C, P y B en una misma recta (y en ese orden), debe existir un número k , comprendido entre 0 y 1, tal que

$$\overline{CP} = k \cdot \overline{CB},$$

llegamos a la igualdad:

$$\overline{AP} = \overline{AC} + k \cdot \overline{CB},$$

que, empleando las coordenadas de los puntos involucrados, podemos escribir como:

$$(x, y) = (c, 0) + k \cdot \left(\frac{c}{2} - c, \frac{\sqrt{4d^2 - c^2}}{2} \right),$$

de donde, operando, se sigue:

$$(x, y) = (c, 0) + k \cdot \left(-\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{4d^2 - c^2}}{2} \right) = \left(c - \frac{ck}{2}, k \frac{\sqrt{4d^2 - c^2}}{2} \right) = \left(\frac{2c - ck}{2}, \frac{k}{2} \sqrt{4d^2 - c^2} \right).$$

Identificando componentes, resulta el sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{2c - ck}{2} \\ y = \frac{k}{2} \sqrt{4d^2 - c^2} \end{cases},$$

de manera que el problema queda reducido a eliminar el parámetro c de entre ambas ecuaciones (obsérvese que tanto d como k son cantidades constantes sin determinar, pero no parámetros que haya que eliminar).

Despejando c en la primera ecuación, y sustituyendo en la segunda, tenemos:

$$\begin{cases} x = \frac{2 - k}{2} c \\ y = \frac{k}{2} \sqrt{4d^2 - c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2x}{2 - k} \\ y = \frac{k}{2} \sqrt{4d^2 - c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2x}{2 - k} \\ y = \frac{k}{2} \sqrt{4d^2 - \left(\frac{2x}{2 - k} \right)^2} \end{cases},$$

por lo que la ecuación del lugar geométrico pedido es:

$$y = \frac{k}{2} \sqrt{4d^2 - \left(\frac{2x}{2-k}\right)^2},$$

si bien podemos escribirla de una manera más sencilla, elevando ambos miembros al cuadrado, operando, y trasponiendo términos, resultando:

$$y^2 = \frac{k^2}{4} \left[4d^2 - \left(\frac{2x}{2-k}\right)^2 \right] \Leftrightarrow \frac{y^2}{k^2} = \frac{\cancel{4}d^2}{\cancel{4}} - \frac{\cancel{4}x^2}{\cancel{4}(2-k)^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{(2-k)^2} + \frac{y^2}{k^2} = d^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{d^2(2-k)^2} + \frac{y^2}{d^2k^2} = 1.$$

Así pues, a la vista de la ecuación obtenida, es claro que el lugar geométrico se corresponde con la elipse de centro A (el origen de coordenadas) y semiejes $d(2-k)$ y dk , que está definida solo si $d \neq 0$ (lo cual damos por hecho, pues en caso contrario las varillas tendrían una longitud nula y no tendría sentido el problema), si $k \neq 2$ (que también es cierto, puesto que k está comprendido entre 0 y 1, como ya hemos comentado) y si $k \neq 0$ (si $k = 0$, entonces, el punto P coincide en todo momento con C, por lo que el lugar geométrico se corresponde claramente con el segmento recto que une los puntos de coordenadas $(-2d,0)$ y $(2d,0)$, situación que podemos entender como un caso degenerado o límite del general, como si la elipse «se hubiera ido aplastando», conforme el punto P se acercara a C, llegando a ser solo un segmento «al final»). Observemos también que la elipse estará completa si se permite al punto B ocupar los cuatro cuadrantes, esto es, si las varillas pueden articularse en B en los dos sentidos; de no ser así, el lugar geométrico quedaría limitado a media elipse.

(Oposiciones de Secundaria, 2009, Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1979, y examen de Universidad)

Problema 4.33

Halla el lugar geométrico de los puntos de intersección de las circunferencias tangentes en el origen O al eje OY y radio variable r con las rectas de pendiente r del haz de vértice O.

Sea C una circunferencia que satisface las condiciones descritas en el enunciado. Como la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que une el centro con el punto de tangencia, podemos decir que, para que el eje OY sea tangente a C en O, es necesario que el centro de C se encuentre sobre el eje OX.

Además, como O pertenece a C y su radio es r, el centro de C debe estar a r unidades de distancia de O, por lo que sus coordenadas han de ser $(r,0)$ o $(-r,0)$, según si C

se encuentra a la derecha o la izquierda del eje OY, respectivamente. Por tanto, la ecuación de C es:

$$C \equiv (x - r)^2 + y^2 = r^2,$$

si C se encuentra a la derecha del eje OY, o:

$$C \equiv (x + r)^2 + y^2 = r^2,$$

si es que está a la izquierda.

Por otra parte, es claro que una recta del haz de vértice O y pendiente r tiene por ecuación $y = rx$, por lo que el problema de determinar el lugar geométrico de los puntos de intersección de estas rectas con sus correspondientes circunferencias consiste en eliminar el parámetro r del sistema formado por la ecuación de la circunferencia y de la recta.

Ahora bien, puesto que tenemos dos ecuaciones distintas para la circunferencia, dependiendo de su posición relativa con respecto al eje OY, parece razonable estudiar los dos casos por separado, que es lo que vamos a hacer a continuación.

Supongamos, en primer lugar, que C está a la derecha del eje OY, esto es, que se verifica $x > 0$, siendo x la primera coordenada de un punto cualquiera de C (si $x = 0$, se trata del punto O, que claramente pertenece al lugar geométrico buscado). Entonces, el sistema del que hay que eliminar r queda:

$$\begin{cases} (x - r)^2 + y^2 = r^2 \\ y = rx \end{cases}.$$

Desarrollando el cuadrado presente en la primera ecuación del sistema, cancelando términos, y sustituyendo el producto rx por y (la segunda ecuación indica que ambas expresiones son iguales), resulta:

$$\begin{cases} x^2 + \cancel{r^2} - 2rx + y^2 = \cancel{r^2} \\ y = rx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y + y^2 = 0 \\ y = rx \end{cases},$$

por lo que el lugar pedido tiene por ecuación:

$$x^2 - 2y + y^2 = 0,$$

y, «completando cuadrados», llegamos a:

$$x^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0,$$

que es la ecuación de la circunferencia de radio 1 cuyo centro se encuentra en el punto (0,1). Sin embargo, como estamos suponiendo que se satisface $x > 0$, no podemos tomar la circunferencia completa, sino su mitad situada a la derecha de OY, sin incluir

sus extremos (aunque, como ya hemos comentado, el punto O pertenecerá finalmente al lugar geométrico).

Si estamos en el otro caso, esto es, si $x < 0$ (la circunferencia está a la izquierda del eje OY), tenemos que eliminar r del sistema:

$$\begin{cases} (x+r)^2 + y^2 = r^2 \\ y = rx \end{cases}.$$

Procediendo de manera similar al caso anterior, tenemos:

$$\begin{cases} x^2 + \cancel{r^2} + 2rx + y^2 = \cancel{r^2} \\ y = rx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y + y^2 = 0 \\ y = rx \end{cases},$$

por lo que el lugar buscado tiene por ecuación:

$$x^2 + 2y + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 - 1 = 0,$$

resultando ser la circunferencia de radio 1 y centro en el punto $(0, -1)$, de la que, en este caso, tomaremos únicamente la mitad situada a la izquierda del eje OY, sin incluir sus extremos.

Así pues, podemos concluir diciendo que el lugar geométrico pedido consiste en la unión de las dos semicircunferencias abiertas antes descritas, junto con el punto O.

(Oposiciones de Secundaria, 2000)

Problema 4.34

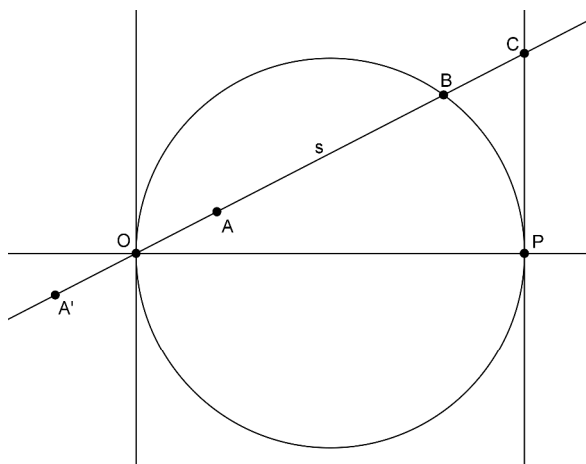
Dada una circunferencia de radio r fijo, se considera sobre ella un punto fijo O y la recta tangente a la circunferencia en el punto diametralmente opuesto a O . Se traza por O una recta secante variable que corta en B a la circunferencia y en C a la recta tangente. Sobre la recta secante se consideran los puntos A tales que $OA = BC$. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos A .

Consideremos, sin pérdida de generalidad, el sistema de referencia que tiene origen en O y cuyo eje de abscisas coincide con la recta OP , siendo P el punto diametralmente opuesto a O , en el que se considera la recta tangente a la circunferencia dada.

Entonces, es claro que si s es una recta secante variable que pasa por O , su ecuación debe ser $s \equiv y = mx$, siendo m un parámetro variable que representa la pendiente de s , mientras que la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en P es $x = 2r$.

Construyendo los puntos A , B y C como se indica en el enunciado (tengamos en cuenta que hay dos puntos A para cada recta s , uno de los cuales hemos denotado por A' , pues entendemos que la igualdad $OA = BC$ dada en el enunciado no es sobre segmentos orientados o vectores, sino sobre longitudes, si bien resolveremos el problema

de determinar la ecuación del lugar geométrico recorrido por A, puesto que A' es el simétrico de A respecto de O, por lo que, una vez determinada la ecuación del lugar geométrico recorrido por A, no tendremos más que aplicar la simetría central de centro O a este lugar, para obtener el lugar geométrico correspondiente a A'. Observemos también, en este sentido, que en el enunciado se habla de «los puntos A» de la recta secante, en plural, por lo que es razonable interpretarlo de esta manera), estamos ante la situación mostrada en el gráfico.



Ahora, puesto que C resulta de la intersección de s con la recta tangente a la circunferencia en P, es claro que podemos determinar sus coordenadas resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas, resultando:

$$\begin{cases} x = 2r \\ y = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2r \\ y = 2mr \end{cases},$$

por lo que $C = (2r, 2mr)$.

Por su parte, las coordenadas de B se obtienen como solución del sistema formado por la ecuación de s y la ecuación de la circunferencia, que es $(x - r)^2 + y^2 = r^2$, puesto que tiene radio r y su centro está en el punto $(r, 0)$, como es evidente, por lo que tenemos el sistema:

$$\begin{cases} y = mx \\ (x - r)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}.$$

Desarrollando el cuadrado presente en la segunda ecuación del sistema, cancelando términos, y resolviendo el sistema por sustitución, resulta:

$$\begin{cases} y = mx \\ x^2 + \cancel{y^2} - 2rx + y^2 = \cancel{r^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ x^2 - 2rx + m^2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ x[(1 + m^2)x - 2r] = 0 \end{cases},$$

de donde (descartando la solución $x = 0, y = 0$, que se corresponde con el punto O, que claramente es un punto de intersección de s con la circunferencia y , en consecuencia, debía aparecer como solución del sistema) obtenemos:

$$\begin{cases} y = mx \\ (1+m^2)x - 2r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ x = \frac{2r}{1+m^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m \frac{2r}{1+m^2} \\ x = \frac{2r}{1+m^2} \end{cases} \Leftrightarrow B = \left(\frac{2r}{1+m^2}, \frac{2mr}{1+m^2} \right).$$

Ahora, por la construcción de los puntos A, B y C, tenemos la igualdad vectorial:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC},$$

que, empleando las coordenadas obtenidas, denotando $A = (x, y)$, siendo $0 \leq x < 2r$, y teniendo en cuenta que las coordenadas del punto A coinciden con las del vector:

$$\overrightarrow{OA},$$

por ser el vector de posición de A, puede escribirse como:

$$(x, y) = (2r, 2mr) - \left(\frac{2r}{1+m^2}, \frac{2mr}{1+m^2} \right),$$

así que, operando e identificando componentes, llegamos a:

$$(x, y) = \left(2r - \frac{2r}{1+m^2}, 2mr - \frac{2mr}{1+m^2} \right) = \left(\frac{\cancel{2r} + 2m^2r - \cancel{2r}}{1+m^2}, \frac{\cancel{2mr} + 2m^3r - \cancel{2mr}}{1+m^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{2m^2r}{1+m^2} \\ y = \frac{2m^3r}{1+m^2} \end{cases},$$

que son las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico recorrido por A. Para eliminar el parámetro m , despejamos m^2 en la primera ecuación, elevamos al cuadrado ambos miembros de la segunda, sustituimos la expresión de m^2 en esta, y operamos:

$$\begin{cases} x + xm^2 = 2m^2r \\ y^2 = \left(\frac{2m^3r}{1+m^2} \right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2(2r - x) = x \\ y^2 = \frac{4r^2m^6}{(1+m^2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \frac{x}{2r-x} \\ y^2 = \frac{4r^2(m^2)^3}{(1+m^2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \frac{x}{2r-x} \\ y^2 = \frac{4r^2 \left(\frac{x}{2r-x} \right)^3}{\left(1 + \frac{x}{2r-x} \right)^2} \end{cases},$$

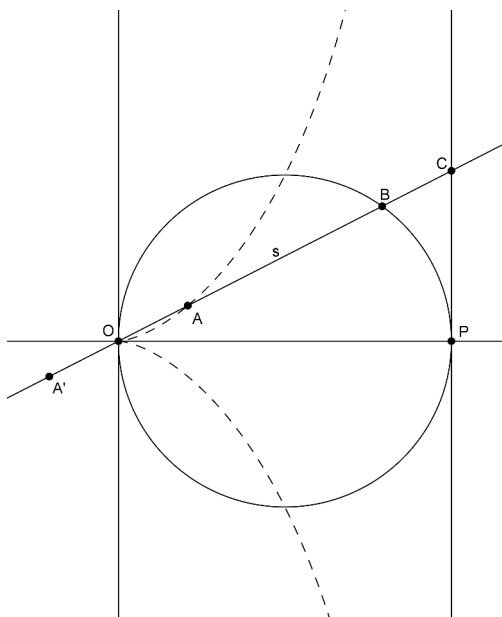
por lo que el lugar geométrico descrito por A viene dado por la ecuación:

$$y^2 = \frac{4r^2 \left(\frac{x}{2r-x} \right)^3}{\left(1 + \frac{x}{2r-x} \right)^2},$$

de la que, operando, llegamos a:

$$y^2 = \frac{4r^2 \left(\frac{x}{2r-x} \right)^3}{\left(1 + \frac{x}{2r-x} \right)^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{\frac{4r^2 x^3}{(2r-x)^3}}{\left(\frac{2r-x+x}{2r-x} \right)^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{\frac{4r^2 x^3}{(2r-x)^3}}{\frac{(2r-x+x)^2}{(2r-x)^2}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{x^3}{2r-x},$$

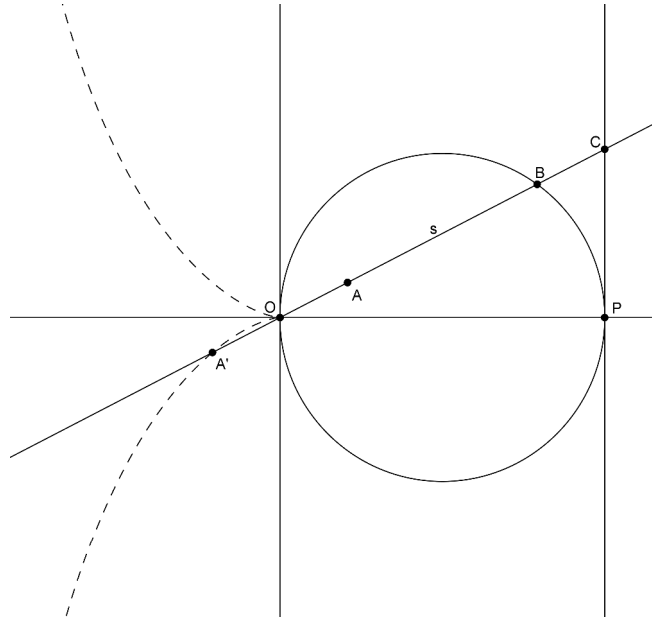
curva cuya representación gráfica se muestra en el diagrama con una línea discontinua (obsérvese que la recta tangente a la circunferencia en P es una asíntota de esta curva, pues el denominador del segundo miembro de la ecuación que la define se anula para $x = 2r$).



En cuanto al lugar geométrico descrito por el punto A', por ser el simétrico de A respecto de O, queda claro que se corresponde con la curva simétrica respecto de O de la obtenida, cuya ecuación podemos obtener sin más que sustituir x por $-x$ y por $-y$ en la anterior ecuación, resultando:

$$y^2 = \frac{-x^3}{2r+x},$$

y cuya representación gráfica se muestra en el diagrama con una línea discontinua (obsérvese que presenta una asíntota en la recta $x = -2r$, que es precisamente la simétrica respecto del origen de la recta tangente a la circunferencia en P, asíntota del lugar geométrico descrito por A).



Así pues, en conclusión, podemos decir que, desde el punto de vista geométrico, el lugar pedido resulta de la yuxtaposición de las dos curvas que aparecen con trazo discontinuo en los dos anteriores diagramas, mientras que, desde el punto de vista algebraico, se corresponde con el conjunto:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = \frac{x^3}{2r - x}, x \geq 0 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = \frac{-x^3}{2r + x}, x < 0 \right\}.$$

(Oposiciones de Secundaria, 2001)

Problema 4.35

Dado el haz de cónicas $x^2 + 2\lambda xy + \lambda y^2 - 2x = 0$, se pide:

- Clasificalas según los distintos valores de λ .
- Lugar geométrico de los centros.
- A cada punto P del plano se le hace corresponder un punto P' por el que pasan las polares de P respecto a las cónicas del haz. Halla las coordenadas de P' en función de P , y el lugar geométrico de P' cuando P se desplaza sobre la recta $ax + by + c = 0$.
- Condición que ha de cumplir esta recta para que el lugar geométrico sea una parábola.

Apartado a)

Para la clasificación de las cónicas del haz dado, escribiremos su ecuación en forma matricial, para posteriormente estudiar el rango de la matriz asociada (que denotaremos por A), el rango de la submatriz que resulta de suprimir la primera fila y la primera columna de A (que denotaremos por A_{00}), y la signatura proyectiva, tanto de A como de A_{00} (que denotaremos por $\text{sp}(A)$ y $\text{sp}(A_{00})$, respectivamente), teniendo en cuenta la tabla que presentamos a continuación:

		$\text{rg}(A)=1$	$\text{rg}(A)=2$		$\text{rg}(A)=3$	
		$\text{sp}(A)=1$	$\text{sp}(A)=0$	$\text{sp}(A)=2$	$\text{sp}(A)=1$	$\text{sp}(A)=3$
$\text{rg}(A_{00})=1$	$\text{sp}(A_{00})=1$	Recta real doble	Par de rectas reales paralelas	Par de rectas imaginarias paralelas	Parábola	No es posible
$\text{rg}(A_{00})=2$	$\text{sp}(A_{00})=0$	No es posible	Par de rectas reales secantes en un punto	No es posible	Hipérbola	No es posible
	$\text{sp}(A_{00})=2$	No es posible	No es posible	Par de rectas imaginarias secantes en un punto real	Elipse real	Elipse imaginaria

Como sabemos, la ecuación del haz en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

y, para discutir el rango de A , según los valores de λ , hemos de calcular el determinante de A , igualar a cero la expresión obtenida, y resolver la ecuación resultante, quedando:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Así pues, vemos que estamos ante una cónica degenerada si, y solo si, $\lambda = 0$. Si es este el caso, para determinar de qué tipo de cónica degenerada se trata, hacemos $\lambda = 0$ en la ecuación del haz, lo que nos proporciona la ecuación $x^2 - 2x = 0$, que claramente se puede factorizar como $x(x - 2) = 0$, de donde se obtienen las igualdades:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases},$$

que evidencian que la cónica degenerada se corresponde con un par de rectas reales paralelas (las rectas determinadas por las ecuaciones indicadas). Obsérvese que no hemos hecho uso de la tabla, al tratarse de un caso que se resuelve directamente de una manera más sencilla; si hubiéramos optado por emplear la tabla, podríamos observar que si $\lambda = 0$, entonces, $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A_{00}) = 1$, por lo que habría que hallar la signatura proyectiva de A , para determinar si las dos rectas paralelas de que se trata son reales o imaginarias (ahora se ve más claro que es un camino más largo que el seguido).

Si, por el contrario, es $\lambda \neq 0$, entonces, $\text{rg}(A) = 3$, y estamos ante una cónica no degenerada. Para clasificarla, hemos de estudiar, en primer lugar, el rango de A_{00} , según los valores de λ , a partir de su determinante, obteniéndose:

$$|A_{00}| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}.$$

El caso $\lambda = 0$ ya está estudiado, y no es compatible con la suposición hecha en este caso; si $\lambda = 1$, entonces, es claro que $\text{rg}(A_{00}) = 1$, lo que implica que se trata de una parábola (como podemos ver en la tabla anterior, no hay otra posibilidad); si $\lambda \neq 1$ (y también $\lambda \neq 0$), entonces, $\text{rg}(A_{00}) = 2$, por lo que, para llevar a cabo la clasificación, precisamos del cálculo de la signatura proyectiva de A y de A_{00} , para lo cual es necesario, a su vez, hallar el polinomio característico de A y de A_{00} , que denotamos, respectivamente, por $P_1(\alpha)$ y $P_2(\alpha)$ (consideramos los polinomios en la variable α , al estar ya «ocupada» la letra λ , habitual en estos cálculos), que se determinan como vemos a continuación:

$$P_1(\alpha) = |A - \alpha I| = \begin{vmatrix} -\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 1 - \alpha & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda - \alpha \end{vmatrix} = -\alpha(1 - \alpha)(\lambda - \alpha) - (\lambda - \alpha) + \alpha\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$P_1(\alpha) = -\lambda\alpha + \alpha^2 + \lambda\alpha^2 - \alpha^3 - \lambda + \alpha + \lambda^2\alpha = -\alpha^3 + (\lambda + 1)\alpha^2 + (\lambda^2 - \lambda + 1)\alpha - \lambda,$$

$$P_2(\alpha) = |A_{00} - \alpha I| = \begin{vmatrix} 1-\alpha & \lambda \\ \lambda & \lambda-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha)(\lambda-\alpha) - \lambda^2 = \lambda - \alpha - \alpha\lambda + \alpha^2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$P_2(\alpha) = \alpha^2 - (\lambda+1)\alpha - \lambda^2 + \lambda.$$

Conviene recordar que la signatura proyectiva es igual al valor absoluto de la diferencia entre el número de permanencias y el número de cambios de signo en la secuencia numérica formada por los coeficientes del polinomio característico, una vez ordenado, considerándose el cero, si estuviera, como un número positivo. En este contexto, se dice que hay permanencia de signo cuando dos números consecutivos tienen el mismo signo, mientras que hay cambio de signo cuando dos números consecutivos tienen distinto signo.

Por tanto, para determinar el valor de $\text{sp}(A)$ y de $\text{sp}(A_{00})$, es necesario estudiar los signos de los números pertenecientes a las secuencias $\{-1, \lambda+1, \lambda^2-\lambda+1, -\lambda\}$ y $\{1, -(\lambda+1), -\lambda^2+\lambda\}$, respectivamente, los cuales dependen, como es claro, del valor del parámetro λ , por lo que tenemos que distinguir varios casos.

En primer lugar, estudiaremos la secuencia $\{-1, \lambda+1, \lambda^2-\lambda+1, -\lambda\}$, que comienza con un número negativo. El segundo número, $\lambda+1$, es negativo si, y solo si, $\lambda < -1$; resolviendo la correspondiente ecuación para determinar el signo del tercer número, $\lambda^2-\lambda+1$, tenemos:

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2},$$

que son dos números no reales, lo que significa que el signo de la expresión cuadrática $\lambda^2 - \lambda + 1$ es siempre el mismo, independientemente del valor de λ , y, como el coeficiente principal es positivo, podemos afirmar que el tercer número de la secuencia es positivo; finalmente, el cuarto número de la secuencia es negativo solo cuando $\lambda > 0$.

Estudiaremos ahora la secuencia $\{1, -(\lambda+1), -\lambda^2+\lambda\}$, cuyo primer número es positivo. El segundo número, $-(\lambda+1)$, es negativo si, y solo si, $\lambda > -1$, como es claro; resolviendo la ecuación pertinente para determinar el signo del tercer número, resulta

$$-\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(-\lambda+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases},$$

y, puesto que el coeficiente principal de esta expresión cuadrática es negativo, resulta que se corresponde con un número negativo si, y solo si, λ no pertenece al intervalo cerrado $[0,1]$. De este modo, vemos que hay tres valores «críticos» de λ ($\lambda = -1$, $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$), por lo que resultan cinco casos, que estudiaremos separadamente: $\lambda < -1$; $\lambda = -1$; $-1 < \lambda < 0$; $0 < \lambda < 1$; $\lambda > 1$ (recordemos que en este caso no podemos aceptar $\lambda = 0$, y que el caso $\lambda = 1$ ya está estudiado).

Si $\lambda < -1$, según lo visto antes, la secuencia $\{-1, \lambda+1, \lambda^2-\lambda+1, -\lambda\}$ tiene la distribución de signos $\{- - + +\}$, que presenta dos permanencias y un cambio, por lo que la signatura proyectiva de A es $\text{sp}(A) = 2 - 1 = 1$, mientras que $\{1, -(\lambda+1), -\lambda^2+\lambda\}$ se

corresponde con la secuencia $\{++-\}$, donde hay una permanencia y un cambio de signo, luego $sp(A_{00}) = 1 - 1 = 0$. Por tanto, se trata de una hipérbola, como podemos ver en la tabla (en realidad, al ser $sp(A_{00}) = 0$, no era necesario determinar el valor de $sp(A)$).

Si $\lambda = -1$, teniendo en cuenta lo visto, y que el cero se considera positivo a estos efectos, obtenemos, respectivamente, las secuencias de signos $\{-++\}$ (un cambio y dos permanencias) y $\{+-\}$ (una permanencia y un cambio), por lo que resulta que $sp(A) = 2 - 1 = 1$ y $sp(A_{00}) = 1 - 1 = 0$. Se trata, como antes, de un hipérbola.

Si $-1 < \lambda < 0$, entonces, obtenemos las secuencias de signos $\{-++\}$ (como en el caso anterior) y $\{+-\}$ (un cambio y una permanencia), por lo que resulta $sp(A) = 1$, $sp(A_{00}) = 0$, y estamos, de nuevo, ante una hipérbola.

Si $0 < \lambda < 1$, las correspondientes secuencias de signos son $\{-++\}$ (dos cambios y una permanencia) y $\{+-\}$ (dos cambios), luego $sp(A) = 2 - 1 = 1$ y $sp(A_{00}) = 2$, lo que se traduce en que se trata de una elipse real.

Si $\lambda > 1$, entonces, las secuencias de signos que resultan son $\{-++\}$ (como en el caso anterior) y $\{+-\}$ (un cambio y una permanencia), por lo que tenemos $sp(A) = 1$ y $sp(A_{00}) = 0$, y, en consecuencia, se trata de una hipérbola.

Resumiendo, con todo lo dicho, tenemos que la cónica correspondiente es degenerada (un par de rectas reales paralelas) si $\lambda = 0$, una elipse real si $0 < \lambda < 1$, una parábola si $\lambda = 1$, y una hipérbola en cualquier otro caso, esto es, si λ no pertenece al intervalo cerrado $[0, 1]$.

Apartado b)

Como es sabido, para determinar el lugar geométrico de los centros, hemos de eliminar el parámetro λ del sistema formado por las ecuaciones $F_x(x, y) = 0$ y $F_y(x, y) = 0$, donde F es la función de dos variables determinada por el primer miembro de la ecuación del haz, $F(x, y) = x^2 + 2\lambda xy + \lambda y^2 - 2x$, y las expresiones F_x y F_y denotan las derivadas parciales de F respecto de x y y , respectivamente.

Además, hemos de tener presente que los valores $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ no están permitidos, ya que ni las cónicas degeneradas ni las parábolas tienen centro.

De esta manera, calculando las derivadas parciales, extrayendo factores comunes, y simplificando (lo cual es posible, al ser $\lambda \neq 0$), tenemos:

$$\begin{cases} F_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2\lambda y - 2 = 0 \\ 2\lambda x + 2\lambda y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x + \lambda y - 1) = 0 \\ 2\lambda(x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases},$$

lo cual indica que los centros son los puntos de la recta $x + y = 0$, ya que la primera ecuación se corresponde con una recta variable, que cortará a la segunda en todos sus puntos, al recorrer λ todos los números reales. Ahora bien, como λ no puede tomar ni el valor 0 ni el valor 1, hemos de quitar los puntos de corte entre ambas rectas que se obtengan para estos dos valores del parámetro λ . Tomando $\lambda = 0$, en la primera ecuación resulta $x = 1$, y, sustituyendo en la segunda, se sigue $y = -1$, lo que significa que la intersección de ambas rectas es el punto $(1, -1)$ para $\lambda = 0$, por lo que dicho punto no se corresponde con el centro de ninguna de las cónicas del haz, y, en consecuencia, hemos de quitarlo del lugar geométrico de los centros. Por su parte, el valor $\lambda = 1$ proporciona un sistema claramente incompatible, por lo que no hay que quitar ningún otro punto al

lugar geométrico buscado. Con todo lo visto, concluimos el apartado diciendo que el lugar geométrico de los centros es el conjunto:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\} - \{(1, -1)\}.$$

Apartado c)

Denotemos por (α, β) las coordenadas del punto variable P. Como sabemos, la ecuación de la recta polar de P respecto de una cónica del haz, que lógicamente dependerá del parámetro λ , viene dada por:

$$(1 \quad \alpha \quad \beta) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

de la que, operando, se sigue:

$$(-\alpha \quad -1 + \alpha + \beta\lambda \quad \alpha\lambda + \beta\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\alpha - x + \alpha x + \beta\lambda x + \alpha\lambda y + \beta\lambda y = 0,$$

y, extrayendo factores comunes, llegamos a:

$$-\alpha + (\alpha - 1)x + \lambda[\beta x + (\alpha + \beta)y] = 0.$$

Ahora bien, como pretendemos que todas y cada una de las rectas resultantes de dar valores reales al parámetro λ pasen por el punto P', cuyas coordenadas denotaremos por (x, y) , hemos de exigir que la anterior igualdad se satisfaga para cualquier valor de λ , lo cual nos lleva a las igualdades:

$$\begin{cases} -\alpha + (\alpha - 1)x = 0 \\ \beta x + (\alpha + \beta)y = 0 \end{cases},$$

que constituyen un sistema del que podemos obtener las coordenadas de P' a partir de las de P, o, recíprocamente, las de P a partir de las de P'.

Para expresar las coordenadas de P' en función de las de P, hemos de despejar x en la primera ecuación del sistema, sustituir en la segunda, y despejar la incógnita y, resultando:

$$\begin{cases} -\alpha + (\alpha - 1)x = 0 \\ \beta x + (\alpha + \beta)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \\ y = \frac{-\beta x}{\alpha + \beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \\ y = \frac{\frac{-\beta\alpha}{\alpha - 1}}{\alpha + \beta} = \frac{-\beta\alpha}{(\alpha + \beta)(\alpha - 1)} \end{cases},$$

por lo que el punto P' , correspondiente a P , tiene por coordenadas:

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}, \frac{-\beta\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha-1)} \right).$$

Obsérvese que estas coordenadas tienen sentido solo si $\alpha - 1 \neq 0$ (el punto P no se encuentra sobre la recta $x = 1$) y $\alpha + \beta \neq 0$ (el punto P no está en la recta donde se encuentran los centros; recordemos que la polar del centro de una cónica se corresponde con la llamada «recta del infinito», por lo que, en el plano afín, el centro de una cónica carece de recta polar).

Para obtener el lugar geométrico descrito por P' cuando P se mueve sobre la recta $ax + by + c = 0$, hemos de proceder de manera contraria a la anterior, esto es, hemos de obtener las coordenadas de P en función de las de P' , lo cual podemos lograr despejando α de la primera ecuación del sistema, sustituyendo en la segunda, y despejando β , resultando:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\alpha + (\alpha-1)x = 0 \\ \beta x + (\alpha+\beta)y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \alpha x - x = 0 \\ \beta x + \alpha y + \beta y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(x-1) - x = 0 \\ \beta(x+y) + \alpha y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{x-1} \\ \beta = \frac{-\alpha y}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \\ &\begin{cases} \alpha = \frac{x}{x-1} \\ \beta = \frac{-xy}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{x-1} \\ \beta = \frac{-xy}{(x-1)(x+y)} \end{cases}, \end{aligned}$$

por lo que las coordenadas de P , dependiendo de las de P' , son:

$$\left(\frac{x}{x-1}, \frac{-xy}{(x-1)(x+y)} \right),$$

expresión que, análogamente a lo visto antes, tiene sentido solo si el punto P' no pertenece ni a la recta de ecuación $x = 1$, ni a la de ecuación $x + y = 0$.

Ahora, para que el punto P se desplace sobre la recta de ecuación $ax + by + c = 0$, debe verificarse la igualdad $a\alpha + b\beta + c = 0$, por lo que, sustituyendo las expresiones de α y β antes determinadas, resulta la ecuación:

$$a \frac{x}{x-1} + b \frac{-xy}{(x-1)(x+y)} + c = 0,$$

y, operando y extrayendo factores comunes, se sigue:

$$\frac{ax}{x-1} + \frac{-bxy}{(x-1)(x+y)} + c = 0 \Leftrightarrow ax(x+y) - bxy + c(x-1)(x+y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$ax^2 + axy - bxy + cx^2 + cxy - cx - cy = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a + c)x^2 + (a - b + c)xy - cx - cy = 0,$$

ecuación, esta última, que evidencia que el lugar geométrico pedido se corresponde con una cónica, que puede ser de distinto tipo, dependiendo de la relación existente entre los coeficientes a , b y c .

Apartado d)

Como sabemos, la forma matricial de la ecuación de la cónica obtenida en el apartado anterior es:

$$(1 \quad x \quad y) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c}{2} & -\frac{c}{2} \\ -\frac{c}{2} & a+c & \frac{a-b+c}{2} \\ -\frac{c}{2} & \frac{a-b+c}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

así que, teniendo en cuenta la tabla de clasificación de cónicas, será una parábola si, y solo si, se cumple que $\text{rg}(B) = 3$ y $\text{rg}(B_{00}) = 1$, siendo B la matriz asociada a la cónica (presente en el primer miembro la igualdad anterior), y B_{00} la submatriz que resulta de suprimir la primera fila y la primera columna de B . Así pues, imponiendo que se satisfagan estas igualdades, obtendremos las condiciones pedidas sobre los coeficientes a , b y c , a partir del cálculo de los determinantes de las matrices B y B_{00} , igualando a cero y operando, como vemos a continuación:

$$|B| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & -\frac{c}{2} & -\frac{c}{2} \\ -\frac{c}{2} & a+c & \frac{a-b+c}{2} \\ -\frac{c}{2} & \frac{a-b+c}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{c^2}{4} \cdot \frac{a-b+c}{2} + \frac{c^2}{4} \cdot \frac{a-b+c}{2} - \frac{c^2}{4} \cdot (a+c) = 0 \Leftrightarrow \cancel{\frac{c^2}{4}} \cdot \frac{a-b+c}{\cancel{2}} - \frac{c^2}{4} \cdot (a+c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{c^2}{4} \cdot (a-b+c-a-c) = 0 \Leftrightarrow \frac{c^2}{4} \cdot (-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=0 \end{cases},$$

por lo que $\text{rg}(B) = 3$ si, y solo si, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

$$|B_{00}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a+c & \frac{a-b+c}{2} \\ \frac{a-b+c}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{a-b+c}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a-b+c}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$a - b + c = 0,$$

de modo que $\text{rg}(B_{00}) < 2$ si, y solo si, $a - b + c = 0$, en cuyo caso la matriz B_{00} se convierte en:

$$B_{00} = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, la condición $a - b + c = 0$ nos lleva, trasponiendo, a que $a + c = b$, y como estamos suponiendo $b \neq 0$ (para que la matriz B tenga rango 3), resulta $a + c \neq 0$, por lo que B_{00} no es la matriz nula y, en consecuencia, su rango no es cero, sino uno, bajo estas condiciones.

Con todo lo visto, recapitulando, podemos decir que el lugar geométrico se corresponde con una parábola si, y solo si, los coeficientes de la recta $ax + by + c = 0$ verifican la igualdad $a - b + c = 0$, siendo b y c no nulos.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 4.36

Halla el lugar geométrico de los centros de las hipérbolas equiláteras que pasan por los vértices del triángulo definido por las rectas $x = 0$; $y = 0$; $x + y - 1 = 0$.

Lo resolveremos por el método de los coeficientes indeterminados, esto es, partiendo de la ecuación general de una hipérbola equilátera, que, como es sabido, viene dada por:

$$ax^2 - ay^2 + 2bxy + 2cx + 2dy + e = 0,$$

e imponiendo las condiciones dadas en el enunciado, para así poder determinar el valor de los coeficientes, o encontrar una relación entre los mismos.

Es evidente que los vértices del triángulo aludido en el enunciado son los puntos $O(0,0)$, $A(1,0)$ y $B(0,1)$, por lo que, sustituyendo en la ecuación general de la hipérbola equilátera, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 - a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + 2c \cdot 0 + 2d \cdot 0 + e = 0 \\ a \cdot 1^2 - a \cdot 0^2 + 2b \cdot 1 \cdot 0 + 2c \cdot 1 + 2d \cdot 0 + e = 0, \\ a \cdot 0^2 - a \cdot 1^2 + 2b \cdot 0 \cdot 1 + 2c \cdot 0 + 2d \cdot 1 + e = 0 \end{cases}$$

del que resulta $e = 0$ y las relaciones $a + 2c = 0$, $-a + 2d = 0$, que, despejando a , equivalen a las ligaduras $a = -2c$, $a = 2d$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación general de la hipérbola equilátera, tenemos:

$$ax^2 - ay^2 + 2bxy - ax + ay = 0.$$

Ahora bien, es claro que debe ser $a \neq 0$ (si fuera $a = 0$, entonces, la ecuación se transformaría en $2bxy = 0$, expresión que no se corresponde con la ecuación de una hipérbola), por lo que podemos dividir los dos miembros de la ecuación por a , quedando:

$$x^2 - y^2 + 2\frac{b}{a}xy - x + y = 0,$$

y, «redefiniendo» el cociente b/a como un nuevo parámetro, digamos t , esto es, denotando $t = b/a$, llegamos a:

$$x^2 - y^2 + 2txy - x + y = 0,$$

que es la ecuación de la familia de hipérbolas equiláteras que pasan por los tres puntos citados, dependiendo únicamente de un parámetro.

Como sabemos, para determinar el lugar geométrico de los centros de una familia de cónicas dada por la ecuación $f(x, y, \lambda) = 0$, siendo λ el parámetro de la familia, basta con eliminar dicho parámetro del sistema:

$$\begin{cases} f'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ f'_y(x, y, \lambda) = 0 \end{cases},$$

donde hemos denotado por f'_x y f'_y la derivada parcial de f respecto de x e y , respectivamente. Así pues, como en el caso que nos ocupa es $f(x, y, t) = x^2 - y^2 + 2txy - x + y$, cuyo parámetro es t , tenemos que eliminar este parámetro del sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2ty - 1 = 0 \\ -2y + 2tx + 1 = 0 \end{cases},$$

ya que, como es claro, $f'_x(x, y, t) = 2x + 2ty - 1$, $f'_y(x, y, t) = -2y + 2tx + 1$.

Multiplicando por y la segunda ecuación del sistema, despejando $2ty$ de la primera, sustituyendo en la segunda, y operando, se sigue:

$$\begin{cases} 2ty = 1 - 2x \\ -2y^2 + 2tyx + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ty = 1 - 2x \\ -2y^2 + (1 - 2x)x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ty = 1 - 2x \\ -2y^2 + x - 2x^2 + y = 0 \end{cases},$$

por lo que el lugar geométrico de los centros de las hipérbolas equiláteras viene dado por la ecuación:

$$-2x^2 - 2y^2 + x + y = 0,$$

que, multiplicando todos los términos por $-1/2$, «completando cuadrados» y operando, se transforma en:

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} = 0,$$

por lo que el lugar geométrico pedido se corresponde con la circunferencia de centro $(1/4, 1/4)$ y radio:

$$r = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 4.37

Dada la familia de cónicas $2t^2x - 2txy + x^2 + y^2 + 2xy = 0$, se pide:

- Envolvente de la familia.
- Clasificación de las cónicas de la familia según los valores del parámetro t .
- Lugar geométrico de los centros de las cónicas de la familia.

Apartado a)

En primer lugar, recordemos que, dada una familia de curvas planas, se llama envolvente de dicha familia a una curva (contenida en el plano de la familia) tal que en cada uno de sus puntos es tangente a alguna de las curvas de la familia, si es que tal curva existe. Si bien este concepto puede resultar un tanto complejo o difícil de concebir, salvo en casos particulares, la determinación efectiva de la envolvente, que es lo que en realidad nos ocupa, puede ser bastante sencilla. En efecto, si la familia de curvas planas está dada por una ecuación implícita de la forma $f(x, y, \lambda) = 0$, siendo λ el parámetro de la familia, para obtener la ecuación de la envolvente basta con eliminar λ del sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ f'_{\lambda}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases},$$

donde hemos denotado por f'_{λ} la derivada parcial de f respecto del parámetro λ , considerado como una variable de la función.

Así pues, para determinar la envolvente de la familia de cónicas dada en el enunciado, consideraremos la función $f(x,y,t) = 2t^2x - 2txy + x^2 + y^2 + 2xy$, dependiente del parámetro t , el cual habremos de eliminar del sistema:

$$\begin{cases} 2t^2x - 2txy + x^2 + y^2 + 2xy = 0 \\ 4tx - 2xy = 0 \end{cases},$$

puesto que $f_t(x,y,t) = 4tx - 2xy$.

Despejando t en la segunda ecuación, simplificando (lo cual es posible si $x \neq 0$; tengamos en cuenta que si $x = 0$, entonces, de la primera ecuación se sigue que $y = 0$, por lo que el único punto que, en principio, estamos excluyendo de la envolvente es el origen de coordenadas), sustituyendo en la primera, y operando, tenemos:

$$\begin{cases} 2t^2x - 2txy + x^2 + y^2 + 2xy = 0 \\ t = \frac{2xy}{4x} \rightarrow t = \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{2}\right)^2 x - \cancel{2} \frac{y}{\cancel{2}} xy + x^2 + y^2 + 2xy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{xy^2}{2} - xy^2 + x^2 + y^2 + 2xy = 0 \Leftrightarrow -xy^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4xy = 0,$$

que es la ecuación de la envolvente buscada. Obsérvese que el origen de coordenadas verifica esta ecuación, por lo que no tenemos que añadir este punto a la curva obtenida, pese a haberlo excluido anteriormente.

Apartado b)

Para la clasificación de las cónicas del haz, escribiremos su ecuación en forma matricial y procederemos como en el problema 4.35, empleando la tabla ahí dada, determinando los rangos y signaturas proyectivas de las matrices involucradas.

La ecuación matricial del haz es:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t^2 & 0 \\ t^2 & 1 & 1-t \\ 0 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

por lo que consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t^2 & 0 \\ t^2 & 1 & 1-t \\ 0 & 1-t & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 1-t & 1 \end{pmatrix},$$

cuyos respectivos rangos estudiaremos a continuación, según los valores del parámetro t , mediante el cálculo de determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & t^2 & 0 \\ t^2 & 1 & 1-t \\ 0 & 1-t & 1 \end{vmatrix} = -t^4 = 0 \Leftrightarrow t = 0,$$

lo que significa que si $t \neq 0$, entonces, $\text{rg}(A) = 3$, y estamos ante una cónica no degenerada, mientras que si $t = 0$, entonces, la matriz A se convierte en:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es claramente igual a uno, lo que se traduce en que la cónica es una recta real doble (es la única posibilidad, como podemos ver en la tabla). Obsérvese que podemos encontrar fácilmente la ecuación de esta recta doble, sin más que tomar $t = 0$ en la ecuación $2t^2x - 2txy + x^2 + y^2 + 2xy = 0$, y factorizar, empleando para ello la conocida identidad algebraica, resultando:

$$\begin{cases} 2t^2x - 2txy + x^2 + y^2 + 2xy = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 0 \Leftrightarrow x + y = 0,$$

que es la ecuación de la mencionada recta.

Por otra parte:

$$|A_{00}| = \begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 1-t & 1 \end{vmatrix} = 1 - (1-t)^2 = 1 - 1 - t^2 + 2t = -t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases},$$

de modo que si $t = 2$ (el caso $t = 0$ ya está estudiado), entonces, la matriz A_{00} se transforma en:

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es igual a uno, y, en consecuencia, la cónica es una parábola (es la única posibilidad, según la tabla, al ser $\text{rg}(A) = 3$ en este caso), mientras que si $t \neq 0$ y $t \neq 2$, entonces, $\text{rg}(A_{00}) = 2$, y, para continuar con la clasificación, hemos de estudiar la signatura proyectiva de A y A_{00} , según los distintos valores de t , mediante el cálculo del polinomio característico correspondiente a cada matriz (que denotaremos por $P_1(\lambda)$ y $P_2(\lambda)$, respectivamente) y el análisis de los cambios y permanencias de signo

de la secuencia formada por los coeficientes de los citados polinomios, como vemos a continuación:

$$P_1(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & t^2 & 0 \\ t^2 & 1-\lambda & 1-t \\ 0 & 1-t & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 - t^4(1-\lambda) + \lambda(1-t)^2 \Leftrightarrow$$

$$P_1(\lambda) = -\lambda - \lambda^3 + 2\lambda^2 - t^4 + t^4\lambda + \lambda + t^2\lambda - 2t\lambda = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + (t^4 + t^2 - 2t)\lambda - t^4,$$

$$P_2(\lambda) = |A_{00} - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-t \\ 1-t & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - (1-t)^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 - t^2 + 2t \Leftrightarrow$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - t^2 + 2t.$$

Así pues, para determinar el valor de $\text{sp}(A)$ y $\text{sp}(A_{00})$, hemos de estudiar, respectivamente, el signo de los números integrantes de las secuencias $\{-1, 2, t^4 + t^2 - 2t, -t^4\}$ y $\{1, -2, -t^2 + 2t\}$, formadas por los coeficientes de los polinomios característicos obtenidos (en la indeterminada λ), según los valores del parámetro t , para lo cual, a su vez, es necesario resolver las ecuaciones $t^4 + t^2 - 2t = 0$ y $-t^2 + 2t = 0$ (habría que resolver también la ecuación $-t^4 = 0$, pero es obvio que su única solución es $t = 0$), y determinar el signo de la expresión del primer miembro de ambas en cada uno de los tramos en que la recta real queda dividida por sus soluciones (incluyendo la solución $t = 0$ encontrada para la ecuación más sencilla). Procediendo de esta manera, para la primera ecuación, tenemos:

$$t^4 + t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow (t^3 + t - 2)t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^3 + t - 2 = 0 \end{cases},$$

y, al ser $t = 1$ una raíz de esta ecuación cúbica (como es evidente), podemos factorizarla empleando la regla de Ruffini, quedando:

$$t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 + t + 2 = 0 \end{cases},$$

no teniendo la ecuación cuadrática soluciones reales, por ser su discriminante negativo.

Por su parte, para la segunda ecuación, resulta:

$$-t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow (-t + 2)t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases},$$

precisamente los dos valores de t estudiados anteriormente.

Teniendo en cuenta todas las soluciones obtenidas, hemos de considerar los tramos de la recta real determinados por los valores $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$, esto es, la semirrecta $(-\infty, 0)$, el valor $t = 0$ (ya estudiado), el intervalo $(0, 1)$, el valor $t = 1$, el intervalo $(1, 2)$, el valor $t = 2$ (ya estudiado también), y la semirrecta $(2, +\infty)$, lo cual llevaremos a cabo por separado.

Si t pertenece a la semirrecta $(-\infty, 0)$, entonces, la secuencia $\{-1, 2, t^4 + t^2 - 2t, -t^4\}$ tiene la distribución de signos $\{- + + -\}$, que presenta dos cambios y una permanencia, lo que implica $sp(A) = 1$, mientras que la secuencia $\{1, -2, -t^2 + 2t\}$ posee los signos $\{+ - -\}$, donde hay un cambio y una permanencia, por lo que $sp(A_{00}) = 0$. A partir de la tabla, podemos ver que se trata de una hipérbola.

Si t se encuentra en el intervalo $(0, 1)$, entonces, los respectivos signos presentes en las secuencias son $\{- + - -\}$ y $\{+ - +\}$, habiendo, pues, dos cambios y una permanencia en el primer conjunto, y dos cambios en el segundo, lo cual se traduce en $sp(A) = 1$, $sp(A_{00}) = 2$ y, por tanto, se trata de una elipse real, como podemos ver en la tabla.

Para $t = 1$, teniendo presente que el cero se considera positivo a estos efectos, las secuencias de signos son $\{- + + -\}$ y $\{+ - +\}$, lo que constituye dos cambios y una permanencia para la primera secuencia, y dos cambios para la segunda. Así pues, estamos en la misma situación que en el caso anterior, por lo que se trata nuevamente de una elipse real.

Si $1 < t < 2$, entonces, las secuencias de signos vuelven a ser $\{- + + -\}$ y $\{+ - +\}$, como antes, luego la cónica correspondiente es de nuevo una elipse real.

Finalmente, si t pertenece a la semirrecta $(2, +\infty)$, entonces, las secuencias de signos son $\{- + + -\}$ y $\{+ - -\}$, las cuales coinciden con el caso en que $t < 0$, visto anteriormente. Por tanto, como antes, la cónica se corresponde con una hipérbola.

Apartado c)

Para determinar el lugar geométrico de los centros de la familia de cónicas, consideramos la función $f(x, y, t) = 2t^2x - 2txy + x^2 + y^2 + 2xy$, de parámetro t , y procedemos como en los dos problemas anteriores, de manera que se trata de eliminar t del sistema:

$$\begin{cases} 2t^2 - 2ty + 2x + 2y = 0 \\ -2tx + 2y + 2x = 0 \end{cases},$$

puesto que:

$$f'_x(x, y, t) = 2t^2 - 2ty + 2x + 2y, \quad f'_y(x, y, t) = -2tx + 2y + 2x.$$

Dividiendo por 2 los dos miembros de ambas ecuaciones del sistema, despejando t de la segunda ecuación (suponiendo $x \neq 0$), sustituyendo en la primera, y operando, tenemos:

$$\begin{cases} t^2 - ty + x + y = 0 \\ t = \frac{x+y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{x} \right)^2 - \frac{x+y}{x} y + x + y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2} - \frac{xy + y^2}{x} + x + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - \cancel{x^2}y - xy^2 + x^3 + \cancel{x^2}y = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - xy^2 + x^2 + y^2 + 2xy = 0.$$

Ahora bien, como antes hemos supuesto $x \neq 0$, hemos de estudiar la situación que se daría si fuera $x = 0$. En este caso, al sustituir este valor de x en la segunda ecuación del sistema, resulta $y = 0$, por lo que parece ser que hemos obtenido el origen de coordenadas como centro de una cónica del haz, punto que, por otro lado, satisface la ecuación del lugar geométrico, como es evidente. Sin embargo, si tomamos $x = 0$, $y = 0$ en la primera ecuación del sistema, llegamos a $t = 0$, lo cual significaría que el punto $(0,0)$ es el centro de la cónica del haz correspondiente al valor $t = 0$. Pero antes vimos que para $t = 0$ estamos ante una cónica degenerada (una recta doble, de ecuación $x + y = 0$), la cual obviamente carece de centro. Por tanto, no podemos permitir que el punto $(0,0)$ pertenezca al lugar geométrico pedido, por lo que hemos de «quitarlo de la ecuación». De este modo, podemos concluir diciendo que el lugar geométrico de los centros de las cónicas del haz es el conjunto:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 - xy^2 + x^2 + y^2 + 2xy = 0\} - \{(0, 0)\},$$

lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 4.38

La ecuación de la parábola descrita por un proyectil lanzado a una velocidad v_0 y con una inclinación α es:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

La envolvente de esta familia de parábolas, cuyo parámetro es α , se llama «parábola de seguridad», pues el proyectil no puede salirse de ella. Determina su ecuación.

A partir de lo visto en el problema anterior, donde hemos perfilado el concepto de envolvente de una familia de curvas planas y hemos indicado el procedimiento de determinación de su ecuación, para resolver este problema, vamos a considerar la función:

$$f(x, y, \alpha) = y - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

que permite escribir la familia de parábolas en forma implícita como $f(x, y, \alpha) = 0$, de manera que la ecuación de la envolvente será el resultado de eliminar α del sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \end{cases},$$

donde, como en el problema anterior, f'_α denota la derivada parcial de f respecto del parámetro α , considerado como una variable de la función.

Ahora bien, antes de calcular esta derivada, parece conveniente escribir las dos expresiones trigonométricas presentes en la fórmula que define f en función de una misma razón trigonométrica, lo cual es posible haciendo uso de la conocida identidad trigonométrica:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

que, sustituyendo, nos lleva a:

$$f(x, y, \alpha) = y - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Derivando f respecto de α , simplificando, y extrayendo factores comunes, resulta:

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = -x(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \cancel{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \left[-x + \frac{gx^2}{v_0^2} \operatorname{tg} \alpha \right] (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha),$$

de modo que el sistema considerado queda:

$$\begin{cases} y - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0 \\ \left[-x + \frac{gx^2}{v_0^2} \operatorname{tg} \alpha \right] (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0 \end{cases}.$$

Como es evidente, $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \neq 0$, por lo que podemos cancelar esta expresión en la segunda ecuación del sistema, despejar $\operatorname{tg} \alpha$ (suponiendo $x \neq 0$), simplificar, y sustituir en la primera ecuación, resultando:

$$\begin{cases} y - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0 \\ \left[-x + \frac{gx^2}{v_0^2} \operatorname{tg} \alpha \right] \cancel{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0 \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{xv_0^2}{gx^2} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gx} \end{cases} \Rightarrow$$

$$y - x \frac{v_0^2}{gx} + \frac{gx^2}{2v_0^2} \left[1 + \left(\frac{v_0^2}{gx} \right)^2 \right] = 0.$$

Aislando la variable y , simplificando, y operando, se sigue:

$$y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \left(1 + \frac{v_0^4}{g^2 x^2} \right) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{\cancel{g} x^2}{2 \cancel{v_0^2}} \cdot \frac{\cancel{v_0^4}}{g \cancel{x^2}} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g} = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{2v_0^2 - v_0^2}{2g} = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g},$$

así que la ecuación de la parábola de seguridad es:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

(Oposiciones de Secundaria, Olimpiadas Matemáticas y examen de Universidad)

Problema 4.39

Halla la envolvente de la familia de rectas que forman con los ejes coordenados triángulos de área $2a^2$.

Sea r una recta que satisface la condición dada en el enunciado, y sean $P(p,0)$ y $Q(0,q)$ los puntos de corte de r con los ejes coordenados (los cuales han de existir, pues en caso contrario la recta sería paralela a alguno de los ejes, y no formaría con ellos un triángulo), donde supondremos, en principio, que tanto p como q son positivos (estrictamente, al no ser r paralela a ningún eje).

Entonces, puesto que el triángulo OPQ es rectángulo en O , sus catetos (que son una base y una altura) miden respectivamente p y q , y su área es $2a^2$, ha de verificarse la igualdad:

$$\frac{1}{2}pq = 2a^2,$$

de donde, despejando p , obtenemos:

$$p = \frac{4a^2}{q}.$$

Por otro lado, partiendo de la ecuación segmentaria (o en forma simétrica) de r , dada por:

$$r \equiv \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

sustituyendo la expresión de p hallada antes (tengamos presente que debe ser $a \neq 0$, para que el enunciado tenga sentido), operando, y trasponiendo, llegamos a :

$$r \equiv \frac{\frac{x}{4a^2} + \frac{y}{q}}{q} = 1 \Leftrightarrow r \equiv \frac{qx}{4a^2} + \frac{y}{q} = 1 \Leftrightarrow r \equiv q^2x + 4a^2y = 4a^2q \Leftrightarrow$$

$$r \equiv q^2x + 4a^2y - 4a^2q = 0.$$

De este modo, denotando $f(x,y,q) = q^2x + 4a^2y - 4a^2q$, obtenemos una familia de rectas que forman con los ejes cartesianos un triángulo de área constante e igual a $2a^2$, de ecuación implícita $f(x,y,q) = 0$, dependiente del parámetro q .

Ahora, si permitimos que q tome cualquier valor real no nulo (no solo positivo), la anterior familia incluirá todas las rectas que cumplen esta propiedad (como es fácil de ver), por lo que el problema consistente en determinar la envolvente de esta familia de rectas puede resolverse, al igual que los dos problemas anteriores, eliminando el parámetro q del sistema:

$$\begin{cases} f(x,y,q) = 0 \\ f'_q(x,y,q) = 0 \end{cases}$$

siendo, como en los dos problemas anteriores, f'_q la derivada parcial de f respecto del parámetro q , considerado como una variable de la función.

Así, sustituyendo y derivando, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} q^2x + 4a^2y - 4a^2q = 0 \\ 2qx - 4a^2 = 0 \end{cases},$$

de donde, despejando q en la segunda ecuación, simplificando, sustituyendo en la primera, operando, y trasponiendo la variable y , se sigue:

$$\begin{cases} q^2x + 4a^2y - 4a^2q = 0 \\ q = \frac{2a^2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{2a^2}{x} \right)^2 x + 4a^2y - 4a^2 \frac{2a^2}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4a^4}{x^2}x + 4a^2y - \frac{8a^4}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{x} + y - \frac{2a^2}{x} = 0 \Leftrightarrow y - \frac{a^2}{x} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{a^2}{x},$$

lo que permite ver que la envolvente buscada coincide con una hipérbola equilátera (una función de proporcionalidad inversa, desde el punto de vista del Análisis matemático).

Obsérvese que, en cierto modo, era previsible que resultara una curva de este tipo, pues, como es sabido, estas curvas son las únicas que verifican que la recta tangente en cada uno de sus puntos corta a los ejes cartesianos formando triángulos de área constante, lo cual equivale, haciendo una lectura inversa y en consonancia con el concepto de envolvente, a decir que la envolvente de estas rectas debe ser una hipérbola equilátera de este tipo.

(Examen de Universidad)

Problema 4.40

Sea un sistema de referencia ortogonal OXY en el plano. Halla la envolvente de los ejes radicales de dos circunferencias C y C' , donde la circunferencia C es fija y tiene su centro en el eje OY y la circunferencia C' es variable, tiene su centro en el eje OX y es tangente en más de un punto a la parábola $y^2 - 2x = 0$.

Denotemos por R el radio de C (que es fijo), y por r el de C' (que es variable). Como la circunferencia variable C' tiene su centro en el eje OX , las coordenadas de este punto serán $(a, 0)$, con a variable, mientras que el centro de C será $(0, b)$, con b fijo, al estar este punto en el eje OY . Con esta notación, podemos escribir las ecuaciones de C y C' como:

$$C \equiv x^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

$$C' \equiv (x - a)^2 + y^2 = r^2.$$

Además, según el enunciado, debe cumplirse que la parábola $y^2 - 2x = 0$, que denotaremos por P , y la circunferencia C' sean tangentes en más de un punto, para lo cual, teniendo en cuenta que el centro de C' está en el eje de simetría de P (el eje OX), es necesario que $a \geq 0$, ya que si el centro de C' estuviera sobre el semieje real negativo, P y C' no podrían ser tangentes en más de un punto (tengamos en cuenta que P está contenida en el primer y el cuarto cuadrante, como es claro). Ahora, a partir del estudio de la posición relativa de una parábola y una circunferencia cuyo centro esté en el eje de simetría de la parábola, y «dentro» de la misma (ya sea desde el punto de vista gráfico o desde el punto de vista analítico), es fácil observar que únicamente pueden darse tres situaciones: que ambas curvas no se corten, que se corten en dos puntos, o que se corten en cuatro. Por supuesto, si no tienen puntos en común, no pueden ser tangentes, pero si son tangentes, no pueden intersectarse en cuatro puntos, por lo que la única situación posible para que sean tangentes es que se corten en dos puntos, que, además, por pertenecer a ambas curvas, deben ser simétricos el uno del otro respecto del eje de la parábola. Así pues, podemos decir que P y C' son tangentes si, y solo si, se cortan exactamente en dos puntos, que, además, han de tener la misma abscisa y ordenadas opuestas, ya que son simétricos el uno del otro respecto del eje OX , que es el eje de la parábola.

Con todo lo dicho, queda claro que el sistema:

$$\begin{cases} C' \equiv (x - a)^2 + y^2 = r^2 \\ P \equiv y^2 - 2x = 0 \end{cases},$$

cuyas soluciones proporcionan las coordenadas de los puntos de corte de P y C', solo debe admitir dos soluciones, pero un único valor de x. Observemos, además, que este valor de x ha de ser positivo, ya que las abscisas de los puntos pertenecientes a P lo son (P está contenida en el primer y el cuarto cuadrante, o lo que es lo mismo, la ecuación de P solo es consistente para valores positivos de x).

Despejando y^2 en la segunda ecuación del sistema, sustituyendo en la primera, operando, extrayendo factores comunes, y trasponiendo, tenemos:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = r^2 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow (x-a)^2 + 2x = r^2 \Leftrightarrow x^2 + a^2 - 2ax + 2x = r^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (2-2a)x + a^2 - r^2 = 0,$$

que es una ecuación de segundo grado en la incógnita x. Pero, como hemos visto, esta ecuación debe tener una única solución, por lo que hemos de exigir que su discriminante sea nulo, lo que proporciona la relación:

$$(2-2a)^2 - 4(a^2 - r^2) = 0,$$

de donde, desarrollando el cuadrado, operando, y trasponiendo, llegamos a:

$$4 + \cancel{4a^2} - 8a - \cancel{4a^2} + 4r^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2a + r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 2a - 1.$$

Obsérvese que esta última igualdad tiene sentido solo si $a \geq 1/2$, lo cual, en principio, no tenemos asegurado. Sin embargo, resolviendo la ecuación de segundo grado en la incógnita x con la conocida fórmula, teniendo en cuenta que su discriminante es nulo, como hemos exigido, resulta:

$$x = \frac{-(2-2a) \pm 0}{2} = a - 1,$$

de donde, trasponiendo, se sigue $a = x + 1$, lo que implica $a > 1$, puesto que x ha de ser positivo, como ya hemos comentado (sucede, sencillamente, que las circunferencias con centro en el eje OX que son tangentes a P no pueden tener su centro «demasiado cerca» del vértice de P). Así pues, queda claro que la relación obtenida entre r y a, dada por $r^2 = 2a - 1$, tiene perfecto sentido. Sustituyendo esta expresión de r^2 en la ecuación de C', resulta $C' \equiv (x-a)^2 + y^2 = 2a - 1$, lo que constituye la ecuación de una familia de circunferencias, dependiente de un único parámetro.

Recordemos ahora que el eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto de ambas circunferencias (que resulta ser una recta perpendicular a la recta que une los dos centros), y que, para obtener su ecuación, basta con restar miembro a miembro las respectivas ecuaciones de las circunferencias. Así pues, el eje radical de C y C', que denotaremos por e, viene dado por la ecuación:

$$e \equiv C - C' \equiv x^2 + (y-b)^2 - (x-a)^2 - y^2 = R^2 - (2a-1),$$

de donde, desarrollando los cuadrados, operando y trasponiendo, se sigue:

$$e \equiv \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + b^2 - 2by - \cancel{x^2} - a^2 + 2ax - \cancel{y^2} = R^2 - 2a + 1 \Leftrightarrow$$

$$e \equiv 2ax - 2by + b^2 - a^2 - R^2 + 2a - 1 = 0.$$

Finalmente, para determinar la ecuación de la envolvente de esta familia de rectas, dependiente del parámetro a , consideraremos la función:

$$f(x, y, a) = 2ax - 2by + b^2 - a^2 - R^2 + 2a - 1,$$

y procederemos, como en los tres problemas anteriores, a eliminar el parámetro a del sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, a) = 0 \\ f'_a(x, y, a) = 0 \end{cases},$$

que, en este caso, resulta ser:

$$\begin{cases} 2ax - 2by + b^2 - a^2 - R^2 + 2a - 1 = 0 \\ 2x - 2a + 2 = 0 \end{cases}.$$

Simplificando la segunda ecuación del sistema, despejando a de la misma, sustituyendo en la primera, y operando, llegamos a:

$$\begin{cases} 2ax - 2by + b^2 - a^2 - R^2 + 2a - 1 = 0 \\ a = x + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2(x+1)x - 2by + b^2 - (x+1)^2 - R^2 + 2(x+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \cancel{2x} - 2by + b^2 - x^2 - 1 - \cancel{2x} - R^2 + 2x + 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x - 2by + b^2 - R^2 = 0,$$

que es la ecuación de la envolvente pedida, siempre que restrinjamos los valores de x al conjunto de los números reales positivos, lo que cierra el problema.

(Adaptado de Oposiciones de Catedráticos de Institutos de Bachillerato, 1975)

Problema 4.41

Por el máximo relativo de la curva:

$$y = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$$

se traza una recta variable que corta a dicha curva en otros dos puntos. Halla la ecuación de la cónica que es lugar geométrico del punto medio de esos dos puntos. Clasifica dicha cónica y da su ecuación reducida.

En primer lugar, determinaremos las coordenadas del punto donde se encuentra el máximo relativo de la curva, para lo cual igualaremos a cero la derivada la función y resolveremos la ecuación resultante, cuyas soluciones serán los puntos críticos, para, posteriormente, mediante el estudio del signo de la derivada, determinar cuál de ellos se corresponde con el máximo relativo. En este sentido, es útil tener presente que la función posee dos asíntotas verticales, una en la recta $x = 1$, y otra en la recta $x = 4$, ya que el denominador de la fracción algebraica que define la función se anula para estos valores de la variable x . De este modo, tenemos:

$$y' = \frac{x^2 - 5x + 4 - x(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 - 5x + 4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,$$

que son los puntos críticos. Tomando un punto arbitrario dentro de cada tramo en que la recta real queda dividida por los valores $x = -2$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$, y evaluando la derivada en los puntos que nos interese, podemos conocer el signo de la derivada a ambos lados de cada punto crítico, resultando ser negativa en $(-\infty, -2)$ y positiva en $(-2, 1)$, lo que implica que en $x = -2$ hay un mínimo relativo, mientras que es positiva en $(1, 2)$ y negativa en $(2, 4)$, por lo que el máximo relativo se encuentra en un punto de abscisa $x = 2$, cuya ordenada podemos determinar sin más que tomar $x = 2$ en la fórmula que define la función, resultando ser $y = -1$, y, por tanto, el máximo relativo de la curva se encuentra en el punto de coordenadas $(2, -1)$, que denotaremos por M .

Ahora, dada una recta variable que pase por M y que verifique las condiciones dadas en el enunciado, que llamaremos r , y cuya pendiente, que es variable, denotaremos por m , a partir de la ecuación de la recta en forma punto-pendiente, tenemos:

$$r \equiv y + 1 = m(x - 2) \Leftrightarrow r \equiv y = mx - 2m - 1,$$

por lo que los puntos de corte de r con la curva dada se obtienen como solución del sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{x^2 - 5x + 4} \\ y = mx - 2m - 1 \end{cases}$$

del que, igualando, operando, trasponiendo términos, y extrayendo factores comunes, llegamos a:

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 4} = mx - 2m - 1 \Leftrightarrow$$

$$x = mx^3 - 5mx^2 + 4mx - 2mx^2 + 10mx - 8m - x^2 + 5x - 4 \Leftrightarrow$$

$$mx^3 - (7m+1)x^2 + (14m+4)x - 8m - 4 = 0,$$

ecuación cúbica que, por las condiciones exigidas en el enunciado, debe tener otras dos soluciones, además de $x = 2$ (abscisa del punto M que, evidentemente, pertenece a la intersección de la recta y la curva), que denotaremos por x_1 y x_2 . Observemos, sin embargo, que no necesitamos conocer el valor de x_1 y x_2 (lo cual podríamos hacer factorizando la ecuación cúbica, mediante la división del polinomio correspondiente por el binomio $x - 2$, haciendo uso de la regla de Ruffini, para después descomponer el factor cuadrático empleando la fórmula que permite resolver la ecuación de segundo grado), pues lo que nos interesa es conocer las coordenadas del punto medio, que denotaremos por (x, y) , cuya abscisa, lógicamente, es:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

valor que podemos determinar haciendo uso de una de las conocidas ecuaciones de Cardano-Viète, que establece la igualdad:

$$x_1 + x_2 + 2 = \frac{7m+1}{m}$$

(la suma de las tres raíces de una ecuación cúbica es igual al opuesto del segundo coeficiente dividido por el coeficiente principal, que debe ser no nulo, puesto que si fuera $m = 0$, entonces, la ecuación sería de segundo grado, y no podría tener tres soluciones, como exige el enunciado, en virtud del Teorema Fundamental del Álgebra), puesto que, trasponiendo el 2, operando, y dividiendo ambos miembros por 2, resulta:

$$x_1 + x_2 = \frac{7m+1}{m} - 2 = \frac{7m+1-2m}{m} = \frac{5m+1}{m} \Leftrightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5m+1}{2m}.$$

Además, como estos dos puntos de corte pertenecen a la recta r , y su punto medio está alineado con ellos (obviamente), resulta que el punto medio también está en la recta r , por lo que, para conocer su segunda coordenada, basta con sustituir el valor de la primera en la ecuación explícita de r , quedando:

$$y = mx - 2m - 1 = \cancel{m} \cdot \frac{5m+1}{2\cancel{m}} - 2m - 1 = \frac{5m+1-4m-2}{2} = \frac{m-1}{2},$$

y, en consecuencia, las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico pedido son:

$$\begin{cases} x = \frac{5m+1}{2m} \\ y = \frac{m-1}{2} \end{cases}.$$

Ahora, para eliminar el parámetro m del sistema, lo despejamos de la segunda ecuación, lo sustituimos en la primera, y operamos, quedando:

$$\begin{cases} x = \frac{5m+1}{2m} \\ m = 2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5(2y+1)+1}{2(2y+1)} \\ m = 2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10y+6}{4y+2} \\ m = 2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy + 2x = 10y + 6 \\ m = 2y+1 \end{cases},$$

de donde, dividiendo ambos miembros de la primera ecuación por 2 y trasponiendo términos, obtenemos la ecuación de la cónica pedida:

$$2xy + x - 5y - 3 = 0.$$

Para determinar qué tipo de cónica es, escribiremos su ecuación en forma matricial, y calcularemos los rangos y las signaturas proyectivas de las matrices involucradas, teniendo en cuenta la tabla de clasificación de cónicas que se presentó en un problema anterior. Así, como la ecuación matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

(la hemos obtenido multiplicando por 2 todos los coeficientes de la ecuación, como si no la hubiéramos simplificado anteriormente, a fin de evitar la presencia de fracciones en las matrices), hemos de considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

y, al ser:

$$|A| = \begin{vmatrix} -6 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -10 - 10 + 24 = 4 \neq 0,$$

resulta $\text{rg}(A) = 3$, lo que indica que estamos ante una cónica no degenerada. Por su parte:

$$|A_{00}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

luego $\text{rg}(A_{00}) = 2$, lo que excluye la posibilidad de que la cónica sea una parábola (tabla de clasificación), y hace necesario el cálculo de las signaturas proyectivas de A y A_{00} , para lo cual es preciso hallar los polinomios característicos correspondientes, denotados respectivamente por $P_1(\lambda)$ y $P_2(\lambda)$, y que vienen dados por:

$$P_1(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 1 & -5 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -5 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -6\lambda^2 - \lambda^3 - 10 - 10 + 25\lambda + \lambda + 24 + 4\lambda \Leftrightarrow$$

$$P_1(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 + 30\lambda + 4,$$

$$P_2(\lambda) = |A_{00} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4.$$

Así pues, la secuencia de signos de los coeficientes de $P_1(\lambda)$ es $\{- - + +\}$, donde podemos apreciar que hay dos permanencias y un cambio, lo que implica la igualdad $\text{sp}(A) = 2 - 1 = 1$, mientras que la secuencia de signos de $P_2(\lambda)$, teniendo en cuenta que el cero se considera positivo a estos efectos, es $\{+ + -\}$, habiendo, por tanto, una permanencia y un cambio, lo que se traduce en que $\text{sp}(A_{00}) = 1 - 1 = 0$, y, en consecuencia, se trata de una hipérbola (como podemos ver en la tabla de clasificación de cónicas).

Por último, para obtener la ecuación reducida de la hipérbola, nos servimos de la conocida fórmula:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -\frac{|A|}{|A_{00}|},$$

donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de A_{00} , esto es, las raíces de $P_2(\lambda)$.

En el caso que nos ocupa, tenemos $|A| = 4$, $|A_{00}| = -4$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ (ya que 2 y -2 son las soluciones de la ecuación $\lambda^2 - 4 = 0$), por lo que, sustituyendo y operando, llegamos a:

$$2x^2 - 2y^2 = -\frac{4}{-4} \Leftrightarrow 2x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = \frac{1}{2},$$

que es la ecuación reducida de la hipérbola, que resulta ser equilátera, puesto que los semiejes a y b son iguales, lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2002, y prueba de Universidad)

Capítulo V. Problemas de Cálculo de Probabilidades

Problema 5.1

Distribuimos 60 monedas, todas distintas, en 12 cajas, al azar. Calcula:

- a) *La probabilidad de que la segunda caja contenga 7 monedas.*
 b) *La probabilidad de que todas las cajas tengan 5 monedas.*

Resolveremos el problema haciendo uso de la regla de Laplace, para lo cual efectuaremos el recuento de los casos posibles (cuyo valor será necesario para los dos apartados) y de los casos favorables al suceso considerado en cada apartado, lo cual haremos por separado. Posteriormente, resolveremos el apartado a) por un método distinto, empleando variables aleatorias.

Calculemos, pues, el número de casos posibles. Si consideramos las monedas numeradas del 1 al 60, es claro que, para colocar la primera moneda, disponemos de 12 cajas; para colocar la segunda, también contamos con 12 cajas; y lo mismo para la tercera, la cuarta, y el resto de monedas, hasta la sexagésima. Así pues, se trata de una variación con repetición, y el número de casos posibles es igual a 12^{60} .

Apartado a)

Para que la segunda caja contenga 7 monedas, hemos de seleccionar este número de monedas de entre las 60, sin importar el orden en que se haga, puesto que lo que cuenta es el número de monedas que finalmente ocupan la caja 2, no el orden seguido en su elección. Como es claro, esta selección se puede hacer de una cantidad de maneras que coincide con el número de combinaciones de 60 elementos tomados de 7 en 7, esto es, con el número:

$$\binom{60}{7}.$$

Por otra parte, las 53 monedas restantes pueden colocarse en cualquiera de las otras 11 cajas, lo cual puede hacerse de 11^{53} maneras (de manera similar al cálculo del número de casos posibles, teniendo en cuenta que cada una de las 53 monedas dispone de 11 posibles ubicaciones).

Por tanto, según el principio del producto, existe un total de:

$$\binom{60}{7} \cdot 11^{53}$$

distribuciones de monedas favorables al suceso considerado en este apartado, por lo que, aplicando la regla de Laplace, y operando, resulta que la probabilidad de que la segunda caja contenga 7 monedas, que denotamos por P_1 , es:

$$P_1 = \frac{\binom{60}{7} \cdot 11^{53}}{12^{60}} = \frac{60!}{7! \cdot 53!} \cdot 11^{53} = \frac{60! \cdot 11^{53}}{7! \cdot 53! \cdot 12^{60}} \Leftrightarrow$$

$$P_1 = \frac{\cancel{60} \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot \cancel{56} \cdot 55 \cdot \cancel{54} \cdot \cancel{53!} \cdot 11^{53}}{\cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{53!} \cdot 12^{60}} \cong 0,10709.$$

Apartado b)

Hagamos el recuento caja por caja.

Para colocar 5 monedas en la primera caja, hemos de elegir 5 monedas de entre las 60, sin importar el orden seguido. Razonando como en el apartado anterior, el número de maneras en que esto puede hacerse es:

$$\binom{60}{5}.$$

Para colocar 5 monedas en la segunda caja, una vez colocadas las 5 de la primera, tenemos que tomar 5 monedas de entre 55, sin importar el orden, lo cual, como antes, puede hacerse de:

$$\binom{55}{5}$$

maneras.

Para la tercera caja, como ya se han colocado 5 en la primera y 5 en la segunda, disponemos de 50 monedas, por lo que el número de maneras de elegir las 5 monedas para la caja 3 es:

$$\binom{50}{5}.$$

Reiterando este procedimiento, vemos que, para cada i comprendido entre 1 y 12, el número de maneras de colocar 5 monedas en la caja i -ésima, una vez colocadas 5 monedas en cada una de las cajas 1, 2, 3, ..., $i - 1$ (las cajas anteriores), viene dado por el número combinatorio:

$$\binom{65 - 5i}{5},$$

por lo que, de acuerdo con el principio del producto, podemos conseguir que cada caja tenga 5 monedas de:

$$\prod_{i=1}^{12} \binom{65 - 5i}{5}$$

maneras, y, en consecuencia, aplicando la regla de Laplace, y operando, resulta que la probabilidad de que cada caja contenga 5 monedas, que denotamos por P_2 , es:

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \frac{\prod_{i=1}^{12} \binom{65-5i}{5}}{12^{60}} = \frac{\binom{60}{5} \binom{55}{5} \binom{50}{5} \binom{45}{5} \binom{40}{5} \binom{35}{5} \binom{30}{5} \binom{25}{5} \binom{20}{5} \binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5}}{12^{60}} = \\
 &= \frac{\frac{60!}{5! \cancel{55}!} \cdot \frac{\cancel{55}!}{5! \cancel{50}!} \cdot \frac{\cancel{50}!}{5! \cancel{45}!} \cdot \frac{\cancel{45}!}{5! \cancel{40}!} \cdot \frac{\cancel{40}!}{5! \cancel{35}!} \cdot \frac{\cancel{35}!}{5! \cancel{30}!} \cdot \frac{\cancel{30}!}{5! \cancel{25}!} \cdot \frac{\cancel{25}!}{5! \cancel{20}!} \cdot \frac{\cancel{20}!}{5! \cancel{15}!} \cdot \frac{\cancel{15}!}{5! \cancel{10}!} \cdot \frac{\cancel{10}!}{5! \cancel{5}!} \cdot 1}{12^{60}} \Leftrightarrow \\
 P_2 &= \frac{60!}{12^{60}} = \frac{60!}{12^{60} \cdot (5!)^{12}} \cong 1,656247 \cdot 10^{-8},
 \end{aligned}$$

lo que concluye el apartado.

Veamos ahora otro método para resolver el apartado a). Consideremos, para cada i comprendido entre 1 y 60, las variables:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la moneda } i \text{ se coloca en la segunda caja} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

y definamos, a partir de ellas, la variable:

$$X = \sum_{i=1}^{60} X_i.$$

Resulta claro entonces que la variable X toma el valor del número de monedas colocadas en la segunda caja, por lo que el problema planteado en el apartado a) consiste en calcular la probabilidad de que X tome el valor 7.

Ahora bien, puesto que las variables X_i son independientes (la caja elegida para colocar una moneda no influye en la caja asignada a otra), y siguen una distribución de Bernoulli de parámetro $1/12$ (hay un caso favorable entre 12 posibles para que una moneda se coloque en la segunda caja), podemos decir que la variable X sigue una distribución binomial de tipo $(60, 1/12)$ (está definida como la suma de 60 variables independientes con distribución de Bernoulli de parámetro $1/12$), y, en consecuencia, tenemos:

$$P_1 = P(X = 7) = \binom{60}{7} \left(\frac{1}{12}\right)^7 \left(\frac{11}{12}\right)^{53} = \frac{60!}{7! \cdot 53!} \cdot \frac{11^{53}}{12^{53}} = \frac{60! \cdot 11^{53}}{7! \cdot 53! \cdot 12^{60}} \cong 0,10709,$$

que, lógicamente, es el mismo valor antes obtenido.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

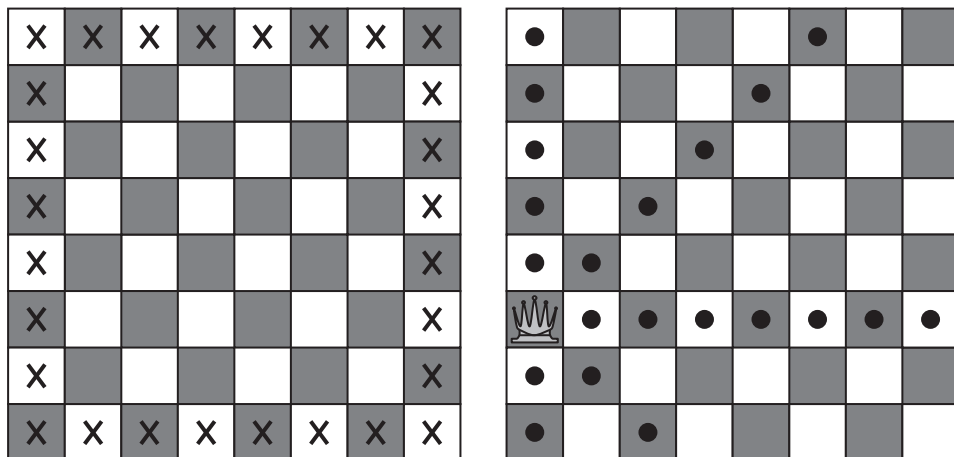
Problema 5.2

En un tablero de ajedrez se colocan dos damas al azar. Determina la probabilidad de que la situación relativa sea tal que no pueda ser comida la una por la otra.

En primer lugar, observemos que hay 64 posibles ubicaciones para colocar la primera dama sobre el tablero (un tablero de ajedrez es una cuadrícula de 8×8 , por lo que tiene 64 casillas), y que, una vez colocada la primera, quedan 63 casillas vacías para colocar la segunda, lo que se traduce en que el número de disposiciones posibles de dos damas sobre el tablero es $64 \cdot 63 = 4032$.

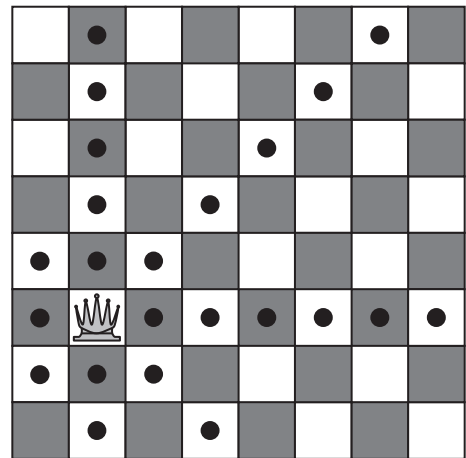
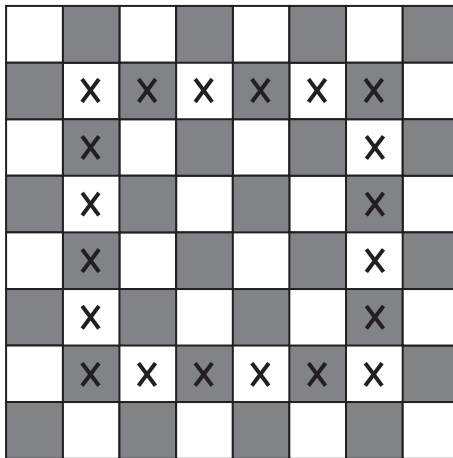
Ahora, según las reglas del juego, una dama puede desplazarse en línea recta (en fila, en columna o en oblicuo), tantas casillas como se desee, lo que significa que dos damas están en posición de jaque (una dama puede ser capturada por la otra) si, y solo si, están situadas en la misma fila, en la misma columna o en la misma línea oblicua. Así pues, para determinar el número de casos favorables al suceso consistente en que las dos damas estén en posición de jaque (que denotaremos por A), hemos de hacer el recuento del número de maneras de colocar dos damas en la misma fila, en la misma columna o en la misma línea oblicua, para lo cual supondremos una dama colocada, y contaremos el número de casillas que puede ocupar la otra, que, como vamos a ver a continuación, depende del lugar donde hayamos colocado la primera, por lo que consideraremos varios casos.

Si colocamos la primera dama en cualquiera de las 28 casillas del borde del tablero (marcadas con un aspa en el diagrama de la izquierda), es claro que disponemos de 21 posiciones para la otra dama (señaladas con un punto en el diagrama de la derecha, para un caso particular), por lo que el número de disposiciones favorables al suceso A es $28 \cdot 21 = 588$.

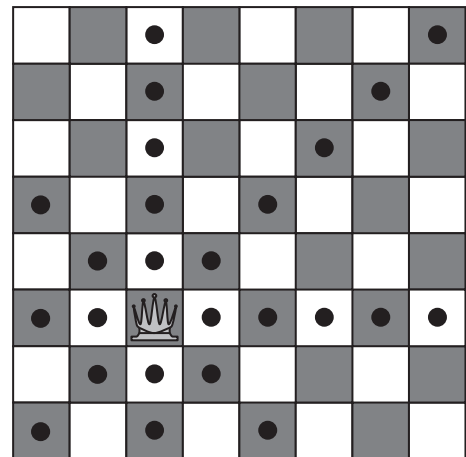
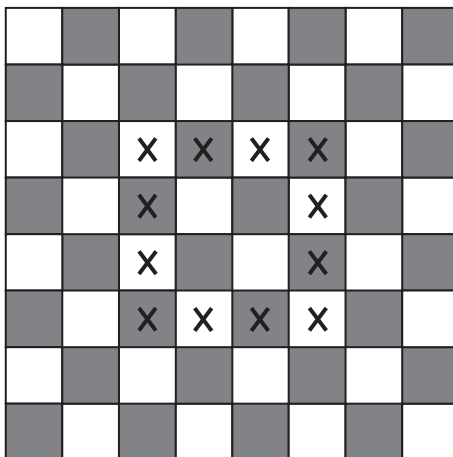


Si situamos la primera dama en cualquiera de las 20 casillas marcadas con un aspa en el siguiente diagrama, a la izquierda, podemos comprobar que hay 23 posibles casillas para la segunda (señaladas con un punto en el diagrama de la derecha, para un caso

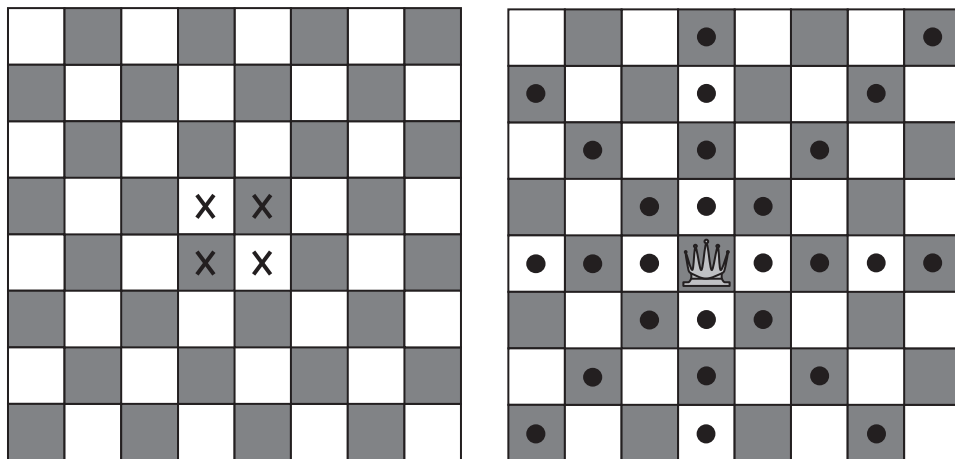
particular), y, entonces, el número de disposiciones favorables al suceso A viene dado por $20 \cdot 23 = 460$.



Si ubicamos la primera dama en alguno de los 12 escaques marcados con un aspa en el siguiente diagrama, a la izquierda, son 25 las posibles casillas para la segunda (señaladas con un punto en el diagrama de la derecha, para un caso particular), por lo que, en este caso, el número de disposiciones favorables al suceso A es $12 \cdot 25 = 300$.



Por último, si colocamos la primera dama en cualquiera de las 4 casillas centrales (también señaladas con un aspa en el siguiente diagrama, a la izquierda), podemos situar la segunda en 27 escaques (marcados con un punto en el diagrama de la derecha, para un caso particular), lo que significa que, en esta situación, el número de disposiciones favorables al suceso A es $4 \cdot 27 = 108$.



Así pues, sumando los resultados obtenidos, resulta $588 + 460 + 300 + 108 = 1456$, que es el número total de casos favorables al suceso A, por lo que, aplicando la regla de Laplace, y simplificando, llegamos a:

$$P(A) = \frac{1456}{4032} = \frac{13}{36}.$$

Ahora bien, lo que se pide calcular en este problema no es la probabilidad de que las dos damas estén en posición de jaque, sino la probabilidad de que no lo estén, es decir, la probabilidad del suceso contrario de A (denotado por A^c), la cual podemos calcular a partir de la fórmula de la probabilidad del suceso contrario, quedando:

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{13}{36} = \frac{23}{36}.$$

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1977, y examen de Universidad)

Problema 5.3

Con 27 dados blancos se forma un cubo sólido de 3 dados de arista, cuyas caras se pintan todas de negro. Se deshace el cubo y se vuelve a formar sin mirar los dados. Calcula la probabilidad de que resulte de nuevo un cubo pintado de negro.

Una vez pintadas las caras y deshecho el cubo, existen distintos tipos de dados, según el número de caras coloreadas que tengan. En concreto, hay un dado que no tiene ninguna cara pintada (el que ocupaba la posición central del cubo), que denotaremos por C_0 ; 6 dados con una cara pintada (los que estaban en el centro de cada cara del cubo), que llamaremos de tipo C_1 ; 12 dados con dos caras pintadas (los que se encontraban en las aristas del cubo y no formaban parte de las esquinas), que llamaremos de

tipo C_2 ; y 8 dados con tres caras pintadas (los que estaban situados en las esquinas), que diremos que son de tipo C_3 .

Por tanto, al volver a formar el cubo sin mirar los dados, para que resulte nuevamente un cubo pintado, es necesario que cada tipo de dado ocupe alguna posición concreta de las 27, y que, además, en algunos casos, tenga una orientación adecuada, puesto que, aun situando un dado en una cierta posición, puede tener hacia arriba cualquiera de sus 6 caras, y, una vez elegida la cara superior, puede rotarse, de modo que hay 4 posiciones con la cara considerada hacia arriba, lo cual significa que cada dado puede orientarse de $6 \cdot 4 = 24$ maneras.

Una vez hechas estas consideraciones, simularemos el proceso de reconstruir el cubo, dado a dado, indicando la probabilidad que tiene cada dado de ocupar una posición (y tener una orientación) que haga que el cubo final esté pintado, condicionado al hecho de que otros dados hayan sido ya colocados, para, posteriormente, multiplicar los valores obtenidos, cuyo resultado será la probabilidad pedida, según la fórmula de la Probabilidad compuesta.

Para que el dado C_0 esté favorablemente colocado, hay una posición (la central del cubo) entre 27 posibles, por lo que la probabilidad es $p_0 = 1/27$ (para este dado, la orientación que tenga una vez ocupada la posición central es irrelevante).

Para el primer dado de tipo C_1 , hay 6 posiciones (el centro de cada cara) entre 26 (el dado C_0 ya ha ocupado una posición), pero, en la posición ocupada, debe estar orientado de manera que la cara pintada quede hacia el exterior del cubo, para lo cual hay un caso favorable, entre 6 posibles. Así pues, la probabilidad de que este primer dado de tipo C_1 esté favorablemente colocado es $6/26 \cdot 1/6$. Para el segundo dado de tipo C_1 , hay 5 posiciones (el centro de cada cara, salvo el que ha sido ocupado por el anterior dado de tipo C_1) entre 25 (ya se han colocado dos dados), y, una vez en su posición, debe orientarse de modo que la cara pintada sea visible desde fuera del cubo, lo que puede hacerse de una manera entre 6 posibles. Por tanto, la probabilidad de que este dado de tipo C_1 esté favorablemente colocado es $5/25 \cdot 1/6$. Razonando de idéntica forma con los cuatro dados restantes de tipo C_1 , podemos ver que sus respectivas probabilidades de estar favorablemente colocados son $4/24 \cdot 1/6$, $3/23 \cdot 1/6$, $2/22 \cdot 1/6$ y $1/21 \cdot 1/6$.

Así pues, teniendo en cuenta la fórmula de la Probabilidad compuesta, podemos decir que la probabilidad de que los 6 dados de tipo C_1 estén favorablemente colocados, condicionada a que el dado C_0 lo esté, que denotaremos por p_1 , viene dada por:

$$p_1 = \frac{6}{26} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{24} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{23} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{22} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6!}{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 6^6}.$$

A continuación describiremos la colocación de los dados de tipo C_2 . Para colocar el primero, hay 12 posiciones (las situadas en la arista del cubo que no están en las esquinas), entre 20 posibles (ya se han colocado 7 dados en total), pero, una vez en su posición, debe orientarse de manera que las dos caras pintadas se vean desde fuera del cubo, para lo cual hay 2 orientaciones (si una orientación deja las dos caras pintadas, que comparten una arista, hacia el exterior, podemos invertir el dado, de modo que se intercambien las dos caras perpendiculares a la arista común a las dos caras pintadas, lo que daría lugar a otra orientación favorable, pues la arista común a las dos caras pintadas seguiría

en la misma posición, y, en consecuencia, también estas dos caras), entre las 24 posibles. Así pues, la probabilidad de que el primer dado de tipo C_2 esté favorablemente colocado es $12/20 \cdot 2/24$, si bien simplificaremos la última fracción, y escribiremos esta probabilidad como $12/20 \cdot 1/12$. Para el segundo dado de tipo C_2 , hay 11 posiciones (ya se ha ocupado una de las 12 favorables por el primer dado de tipo C_2), entre 19 posibles (hay ya 8 dados colocados), y, como sucedía con el primer dado de tipo C_2 , debe orientarse de 2 maneras entre 24 posibles (o de 1 entre 12), por lo que la probabilidad condicionada de que el segundo dado de tipo C_2 esté favorablemente colocado es $11/19 \cdot 1/12$. Siguiendo este mismo razonamiento con el resto de dados de tipo C_2 , podemos observar que sus respectivas probabilidades condicionadas de estar favorablemente colocados son $10/18 \cdot 1/12$, $9/17 \cdot 1/12$, $8/16 \cdot 1/12$, $7/15 \cdot 1/12$, $6/14 \cdot 1/12$, $5/13 \cdot 1/12$, $4/12 \cdot 1/12$, $3/11 \cdot 1/12$, $2/10 \cdot 1/12$ y $1/9 \cdot 1/12$.

De este modo, por la fórmula de la Probabilidad compuesta, resulta que la probabilidad de que los 12 dados de tipo C_2 estén favorablemente colocados, condicionada a que lo estén también todos los dados de tipo C_1 y el dado C_0 , que denotaremos por p_2 , viene dada por:

$$p_2 = \frac{12}{20} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{10}{18} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{9}{17} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{8}{16} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{12} \Leftrightarrow$$

$$p_2 = \frac{12!}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 12^{12}}.$$

Llegados a este punto, ya solo quedan por colocar los 8 dados de tipo C_3 , por lo que hay tantos casos favorables como posibles a la hora de elegir la posición de cada uno de estos dados, es decir, coloquemos donde coloquemos cada dado, estará en una posición favorable. Sin embargo, es importante la orientación del dado, puesto que deben quedar las tres caras pintadas hacia el exterior. En este sentido, podemos observar que, si un dado está colocado con una orientación favorable, es posible girarlo dos veces, dejando fijo el vértice común a las tres caras pintadas, de manera que resultan otras dos orientaciones favorables, lo cual se traduce en que, de las 24 orientaciones posibles del dado, 3 son favorables, por lo que la probabilidad condicionada que tiene cada dado de tipo C_3 de ser colocado favorablemente es $3/24 = 1/8$, y, por la fórmula de la Probabilidad compuesta, resulta que la probabilidad de que los 8 dados de tipo C_3 estén favorablemente colocados, condicionada a que lo estén todos los dados de tipo C_1 , todos los dados de tipo C_2 y el dado C_0 , que denotaremos por p_3 , viene dada por:

$$p_3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8^8}.$$

Finalmente, aplicando de nuevo la fórmula de la Probabilidad compuesta, tenemos que la probabilidad de que el cubo reconstruido tenga todas las caras completamente pintadas, que denotaremos por p , puede calcularse como el producto de p_0 , p_1 , p_2 y p_3 , resultando ser:

$$p = \frac{1}{27} \cdot \frac{6!}{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 6^6} \cdot \frac{12!}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 12^{12}} \cdot \frac{1}{8^8},$$

si bien podemos escribirla de una manera más «compacta», multiplicando numerador y denominador por $8!$, quedando:

$$p = \frac{6! \cdot 8! \cdot 12!}{27! \cdot 6^6 \cdot 8^8 \cdot 12^{12}},$$

lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 1996, Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1979, y examen de Universidad)

Problema 5.4

Halla la probabilidad de que un cartero que lleva tres cartas con destinatarios distintos entregue al menos una de ellas correctamente al efectuar dicha entrega al azar, sin mirar dirección alguna.

Suponiendo las tres cartas numeradas, consideremos los sucesos:

$$A_n = \{\text{La carta número } n \text{ se entrega correctamente}\},$$

para $n = 1, 2, 3$.

Con esta notación, es claro que el problema consiste en calcular la probabilidad del suceso $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, denotada por P , que, aplicando el principio de inclusión-exclusión, podemos expresar como:

$$P = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \quad (I)$$

Ahora bien, por una parte, es claro que, según la definición de la probabilidad condicionada, para $n, m = 1, 2, 3$, con $m \neq n$, se satisface la igualdad:

$$P(A_m \cap A_n) = P\left(\frac{A_m}{A_n}\right) \cdot P(A_n);$$

por otra, tenemos:

$$P\left(\frac{A_m}{A_n}\right) = \frac{1}{2},$$

ya que, para que suceda que una carta se entregue a su destinatario, suponiendo que otra se ha entregado correctamente, hay un único caso favorable, entre dos posibles; por otra, $P(A_n) = 1/3$, como es evidente; por otra, también por la definición de la probabilidad condicionada:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P\left(\frac{A_1}{A_2 \cap A_3}\right) \cdot P(A_2 \cap A_3);$$

y, por último:

$$P\left(\overline{A_1} / \overline{A_2} \cap A_3\right) = 1,$$

puesto que si suponemos que la carta número 2 y la número 3 han sido entregadas correctamente, ya solo queda una persona a la que entregar la número 1, precisamente el destinatario correcto, por lo que se trata del suceso seguro.

Así pues, sustituyendo estos valores en (I), y operando, resulta:

$$P = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3},$$

lo que da respuesta al enunciado del problema.

(Oposiciones de Agregados de Institutos de Bachillerato, 1976, y examen de Universidad)

Problema 5.5

Una persona sujeta en su puño n hilos idénticos, de manera que sobresalgan por ambos lados. Otra persona va anudando los extremos superiores con los inferiores hasta tenerlos todos anudados. Después se observa el resultado. Determina:

- La probabilidad de que todos los hilos formen un único anillo.*
- La probabilidad de que se forme algún anillo compuesto de solo un hilo.*

Observemos, en primer lugar, que el número de maneras posibles de atar los extremos superiores con los inferiores es igual al factorial de n (el número de permutaciones de n elementos), puesto que, tomando el primer extremo superior, hay n inferiores con los que poder anudarlo; para el segundo, quedarían $n - 1$, al haberse empleado ya uno de ellos; para el tercero, $n - 2$; y así, sucesivamente, hasta llegar al n -ésimo extremo superior, para el que solo se dispondría de un extremo inferior. Este dato será necesario para ambos apartados, que resolveremos separadamente a continuación.

Apartado a)

Realizaremos el recuento del número de casos favorables al suceso $A = \{\text{Todos los hilos quedan anudados de manera que se forma un único anillo}\}$ simulando el proceso por el que se formaría este único anillo, indicando el número de formas en que puede hacerse en cada paso, para posteriormente multiplicar los resultados, teniendo en cuenta el principio del producto.

Así, el primer extremo superior puede atarse con cualquiera de los n inferiores, salvo con el propio, pues ello daría lugar a un anillo cerrado de un hilo, y, por tanto, los hilos no formarían un único anillo, por lo que el número de extremos inferiores disponibles para el

primer extremo superior es igual a $n - 1$; para continuar con la formación de un único anillo, elegimos como segundo extremo superior el extremo opuesto del hilo elegido para atar con el primero, que, al no poder atarse con el extremo inferior del primer hilo empleado (pues eso cerraría el anillo), dispone de $n - 2$ extremos inferiores (de los n , hay uno ya anudado, y otro no favorable); a continuación, tomamos como tercer extremo superior el extremo opuesto del hilo anudado en el paso anterior, el cual puede atarse con cualquiera de los $n - 2$ extremos inferiores todavía sin anudar, salvo con el correspondiente al primer hilo empleado (para evitar cerrar el anillo), por lo que dispone de $n - 3$ extremos inferiores; procediendo reiteradamente de la manera descrita, podemos ver que el número de extremos inferiores disponibles en cada paso es, respectivamente, $n - 4, n - 5, \dots$, hasta llegar al último extremo superior sin atar, que tendrá que anudarse necesariamente con el extremo inferior del primer hilo utilizado (y así cerrar el anillo), para lo cual dispondrá de una única posibilidad, ya que será el único extremo inferior suelto en ese momento.

Por lo dicho, el número de casos favorables a la ocurrencia del suceso A es igual a $(n - 1)(n - 2)(n - 3) \cdots 2 \cdot 1 = (n - 1)!$, y, entonces, aplicando la regla de Laplace y simplificando, tenemos:

$$P(A) = \frac{(n - 1)!}{n!} = \frac{\cancel{(n - 1)!}}{n \cancel{(n - 1)!}} = \frac{1}{n},$$

que es la probabilidad pedida.

Apartado b)

Consideremos, para cada i comprendido entre 1 y n , el suceso $A_i = \{\text{Los extremos del hilo } i \text{ se atan uno con otro, formándose un anillo de un único hilo}\}$. Con esta notación, es claro que el problema consiste en hallar el valor de:

$$P = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right),$$

que, por el principio de inclusión-exclusión, podemos expresar como:

$$P = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right), \quad (I)$$

de manera que el problema se reduce a calcular cada una de las probabilidades presentes en los sumandos del segundo miembro de esta igualdad, que es lo que haremos a continuación.

Dado el número i , comprendido entre 1 y n , es claro que, para que ocurra A_i , el extremo superior del hilo i debe anudarse con el inferior del mismo hilo, lo cual puede hacerse de una manera (el hilo i solo tiene un extremo inferior) entre n posibles (los n extremos inferiores), por lo que se verifica:

$$P(A_i) = \frac{1}{n}.$$

Considerando los hilos i, j , para que se formen sendos anillos de un solo hilo con ellos, tiene que formarse un anillo con el hilo i (lo que sucede con la probabilidad calculada antes), y, una vez formado el anillo con el hilo i , para atar el extremo superior del hilo j con uno de los extremos inferiores, hay un caso favorable (el único extremo inferior del hilo j), entre $n - 1$ posibles (el extremo inferior del hilo i ya se ha anudado, por lo que no está disponible), de donde se deduce, teniendo en cuenta la fórmula de la Probabilidad condicionada, la igualdad:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P\left(\frac{A_j}{A_i}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Si tomamos los hilos i, j, k , vemos que, una vez formados los anillos correspondientes con los hilos i, j (lo cual sucede con la probabilidad antes hallada), para que con el hilo k resulte la misma situación, para atar su extremo superior contamos con un caso favorable (el único extremo inferior del hilo k), entre $n - 2$ posibles (los extremos de los hilos i, j ya están anudados), y, entonces, de nuevo por la fórmula de la Probabilidad condicionada, tenemos:

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i \cap A_j) \cdot P\left(\frac{A_k}{A_i \cap A_j}\right) = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

Reiterando el procedimiento descrito, podemos ver que la probabilidad de la intersección de varios de estos sucesos solo depende del número de ellos, resultando, para la intersección de r sucesos (elegidos en cualquier orden), la fórmula:

$$P\left(\bigcap_{p=1}^r A_{i_p}\right) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)},$$

que podemos expresar de una manera «más compacta» multiplicando el numerador y el denominador de esta última fracción por el factorial de $n - r$, quedando:

$$P\left(\bigcap_{p=1}^r A_{i_p}\right) = \frac{(n-r)!}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)!} = \frac{(n-r)!}{n!}.$$

(obsérvese que esta fórmula es también válida para los casos particulares $r = 1$, $r = 2$ y $r = 3$, antes calculados).

Ahora, teniendo en cuenta las expresiones obtenidas (las cuales solo dependen del número de sucesos considerados en cada intersección), la igualdad (I) se transforma en:

$$P = n \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \cdots + (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \frac{(n-r)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!},$$

de donde, desarrollando los números combinatorios, agrupando factores, y simplificando, llegamos a:

$$P = 1 - \frac{n!}{2!(n-2)!n(n-1)} + \frac{n!}{3!(n-3)!n(n-1)(n-2)} + \dots + (-1)^{r-1} \frac{n!(n-r)!}{r!(n-r)!n!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \Leftrightarrow$$

$$P = 1 - \frac{\cancel{n!}}{2! \cdot \cancel{n!}} + \frac{\cancel{n!}}{3! \cdot \cancel{n!}} + \dots + (-1)^{r-1} \frac{\cancel{n!} \cdot \cancel{(n-r)!}}{r! \cdot \cancel{(n-r)!} \cdot \cancel{n!}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!},$$

lo que concluye el problema.

(Prueba de Universidad)

Problema 5.6

En una estantería hay 10 libros. Una persona cree haber guardado en uno de ellos una carta. La probabilidad de haberlo hecho es 1/3. Busca en los 8 primeros libros y no la encuentra. ¿Cuál es la probabilidad de que esté en uno cualquiera de los otros dos libros?

Consideremos los sucesos $A = \{\text{La carta ha sido guardada en alguno de los libros}\}$, $B = \{\text{La carta no está en ninguno de los ocho primeros libros}\}$ y $C = \{\text{La carta está en el noveno o en el décimo libro}\}$. Con esta notación, es claro que el problema consiste en calcular la probabilidad de C , condicionada a B , $P(C/B)$.

Ahora bien, es evidente que, si ha sido guardada y no está en ninguno de los ocho primeros libros, entonces, necesariamente, debe estar en el noveno o el décimo, y que, si tampoco está en ninguno de estos dos, es porque no ha sido guardada, lo que se traduce en que la probabilidad de que esté en alguno de los dos últimos libros, sabiendo que no está en ninguno de los ocho anteriores, es igual a la probabilidad de que haya sido guardada (en alguno de los libros), suponiendo que no ha aparecido al revisar los ocho primeros. Es decir, tenemos la igualdad $P(C/B) = P(A/B)$. Sin embargo, el cálculo de $P(A/B)$ no es directo, y resulta más difícil que el de $P(B/A)$, por lo que puede ser útil aplicar el teorema de Bayes (que, de alguna manera, permite «intercambiar» las posiciones de los sucesos en la expresión de la probabilidad condicionada), quedando:

$$P(C/B) = P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B/A) \cdot P(A) + P(B/A^c) \cdot P(A^c)},$$

donde A^c representa el suceso contrario de A .

A continuación, calculamos el valor de cada una de las probabilidades presentes en esta expresión: B/A se corresponde con el suceso consistente en que la carta no esté en ninguno de los ocho primeros libros, suponiendo que ha sido guardada en alguno de ellos, lo cual es equivalente a decir que la carta está en el noveno o el décimo libro, por

lo que, en términos de probabilidades, tenemos la igualdad $P(B/A) = P(C)$, y, al ser $P(C) = 2/10 = 1/5$ (2 libros favorables al suceso, frente a 10 posibles), llegamos a $P(B/A) = 1/5$; $P(A) = 1/3$, por el enunciado; $P(B/A^C) = 1$, puesto que si suponemos que la carta no se ha guardado en ningún libro (que es el significado de A^C), debe ocurrir, con absoluta certeza, que no esté en ninguno de los ocho primeros libros; y, finalmente, por la conocida fórmula de la probabilidad del suceso contrario, podemos escribir $P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 1/3 = 2/3$.

Sustituyendo los valores hallados en la expresión anterior, y operando, llegamos a:

$$P(C/B) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15} + \frac{2}{3}} = \frac{1}{11},$$

que es el valor de la probabilidad pedida.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 5.7

Dos testigos, A y B, prestan declaración. Se sabe razonadamente que las afirmaciones de B tienen doble probabilidad de ser verdad que las de A. ¿Cuál es la probabilidad de que digan la verdad si los dos dicen lo mismo?

Consideremos los sucesos $V_A = \{A \text{ dice la verdad}\}$, $M_A = \{A \text{ miente}\}$, $V_B = \{B \text{ dice la verdad}\}$, $M_B = \{B \text{ miente}\}$, y denotemos $p = P(V_A)$.

Con esta notación, es claro que se verifican las igualdades $P(V_B) = 2p$ (por el enunciado), $P(M_A) = 1 - p$, $P(M_B) = 1 - 2p$ (por la fórmula de la probabilidad del suceso contrario), y que el problema consiste en calcular la probabilidad del suceso $V_A \cap V_B$ (los dos dicen la verdad), suponiendo que sucede $(V_A \cap V_B) \cup (M_A \cap M_B)$ (tengamos en cuenta que los dos dicen lo mismo si ambos dicen la verdad o si ambos mienten), es decir, se trata de calcular el valor:

$$P = P\left(\frac{V_A \cap V_B}{(V_A \cap V_B) \cup (M_A \cap M_B)}\right).$$

Partiendo de la definición de la probabilidad condicionada, aplicando las propiedades del álgebra de conjuntos, y teniendo en cuenta que, como es obvio, los sucesos V_A y V_B son respectivamente incompatibles con M_A y M_B (lo que implica que $V_A \cap V_B$ y $M_A \cap M_B$ también lo son), tenemos:

$$P = \frac{P\{(V_A \cap V_B) \cap [(V_A \cap V_B) \cup (M_A \cap M_B)]\}}{P\{(V_A \cap V_B) \cup (M_A \cap M_B)\}} = \frac{P(V_A \cap V_B)}{P(V_A \cap V_B) + P(M_A \cap M_B)}.$$

Ahora bien, debemos entender que la declaración de un testigo no influye en la declaración del otro (declaran por separado), pues no disponemos de ningún dato que mida el grado de influencia (si lo hubiera), lo cual se traduce en que los sucesos V_A y V_B son independientes, así como también lo son M_A y M_B , y, en consecuencia, podemos escribir:

$$P = \frac{P(V_A) \cdot P(V_B)}{P(V_A) \cdot P(V_B) + P(M_A) \cdot P(M_B)},$$

ya que, en general, si S y T son dos sucesos independientes, entonces:

$$P(S \cap T) = P(S) \cdot P(T),$$

como es sabido.

Finalmente, sustituyendo las probabilidades involucradas por los valores antes mencionados, dependientes de p , y operando, resulta:

$$P = \frac{p \cdot 2p}{p \cdot 2p + (1-p) \cdot (1-2p)} = \frac{2p^2}{2p^2 + 1 - 2p - p + 2p^2} = \frac{2p^2}{4p^2 - 3p + 1},$$

que es la probabilidad pedida, lo que concluye el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 5.8

Cada motor de un avión tiene una probabilidad p de averiarse, con independencia de los demás. Un avión se mantiene en vuelo si funcionan, al menos, la mitad de sus motores. ¿Qué es más seguro, un bimotor o un cuatrimotor?

Para resolverlo, calcularemos la probabilidad que tiene cada avión de estrellarse, y veremos cuál es mayor, dependiendo del valor de p .

Según el enunciado, un avión se estrella si deja de funcionar más de la mitad de sus motores, por lo que el bimotor se estrellará solo si fallan los dos, mientras que el cuatrimotor dejará de volar si fallan exactamente tres o fallan los cuatro (entendiendo esta situación como dos sucesos incompatibles). Así pues, si denotamos por P_2 la probabilidad de que se estrelle el avión bimotor, y por P_4 la de que lo haga el cuatrimotor, se verifica $P_2 = p^2$ (al averiarse cada motor con independencia del otro, la probabilidad de que se averíen los dos es igual al producto de las probabilidades de que se averíe cada uno por separado, que son ambas igual p), y:

$$P_4 = \binom{4}{1} p^3 (1-p) + p^4$$

(en el primer sumando, el número $p^3(1-p)$ resulta de considerar el fallo de tres motores y el «no fallo» de uno, mientras que el número combinatorio aparece porque el

motor que sigue funcionando puede ser cualquiera de los cuatro; la potencia p^4 del segundo sumando se corresponde con la parada de los cuatro motores), de donde, operando, resulta:

$$P_4 = 4p^3 - 4p^4 + p^4 = -3p^4 + 4p^3.$$

De este modo, tenemos:

$$P_2 < P_4 \Leftrightarrow p^2 < -3p^4 + 4p^3 \Leftrightarrow 3p^4 - 4p^3 + p^2 < 0 \Leftrightarrow p^2(3p^2 - 4p + 1) < 0,$$

y, al ser $p^2 > 0$ (no cabe esperar $p = 0$, pues, de ser así, sería imposible que se estrellara cualquiera de los dos aviones), podemos cancelar este factor en el primer miembro de la inecuación, quedando:

$$P_2 < P_4 \Leftrightarrow 3p^2 - 4p + 1 < 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática asociada:

$$p = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \Rightarrow \begin{cases} p = 1/3 \\ p = 1 \end{cases},$$

siendo, entonces, el intervalo $(1/3, 1)$ la solución de la inecuación (el coeficiente principal del polinomio es positivo), lo que se traduce en que $P_2 < P_4$ si, y solo si, p está en el intervalo $(1/3, 1)$.

Así pues, con lo visto, podemos decir que el avión bimotor es más seguro (la probabilidad de que se estrelle es menor) si la probabilidad de que falle cada motor está comprendida entre $1/3$ y 1 (lo cual es un valor demasiado elevado; si el motor de un avión fallara al menos una de cada tres veces, el tráfico aéreo sería inviable), mientras que es más seguro el cuatrimotor si p está entre 0 y $1/3$ (que es lo que cabe esperar).

(Prueba de Universidad)

Problema 5.9

Se lanzan dos monedas tres veces cada una. Si han aparecido tantas caras en los lanzamientos de la primera como en los de la segunda, ¿cuál es la probabilidad de que hayan aparecido dos caras en los tres lanzamientos de la primera moneda?

Consideremos las variables aleatorias $C_1 = \{\text{Número de caras de la primera moneda en los tres lanzamientos}\}$ y $C_2 = \{\text{Número de caras de la segunda moneda en los tres lanzamientos}\}$. Si admitimos que, para cada moneda, la probabilidad de obtener cara es la misma que la de obtener cruz (es decir, que las monedas no están trucadas), entonces, las variables C_1 y C_2 , que pueden tomar los valores $0, 1, 2$ y 3 , siguen una distribución binomial de tipo $(3, 1/2)$, puesto que podemos interpretar cada una como la suma

de tres variables independientes que siguen una distribución de Bernoulli de parámetro $1/2$, lo que implica que, para cada $k = 0, 1, 2, 3$, se verifica:

$$P(C_1 = k) = P(C_2 = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \binom{3}{k}. \quad (I)$$

Con estas variables, es evidente que el problema consiste en hallar la probabilidad:

$$P = P\left(C_1 = 2 \middle/ C_1 = C_2\right).$$

Aplicando la definición de la probabilidad condicionada, sustituyendo el valor de C_1 para obtener el de C_2 (cuando son iguales), y teniendo en cuenta que el resultado de una moneda no afecta al resultado de la otra (son sucesos independientes), tenemos:

$$P = \frac{P(C_1 = 2, C_1 = C_2)}{P(C_1 = C_2)} = \frac{P(C_1 = 2, C_2 = 2)}{P(C_1 = C_2)} = \frac{P(C_1 = 2) \cdot P(C_2 = 2)}{P(C_1 = C_2)}. \quad (II)$$

Observemos ahora que, puesto que las variables C_1 y C_2 pueden tomar los valores 0, 1, 2 y 3, es posible expresar el suceso $\{C_1 = C_2\}$ como la unión disjunta de los sucesos dados por $\{C_1 = 0, C_2 = 0\}$, $\{C_1 = 1, C_2 = 1\}$, $\{C_1 = 2, C_2 = 2\}$ y $\{C_1 = 3, C_2 = 3\}$, por lo que:

$$P(C_1 = C_2) = \sum_{k=0}^3 P(C_1 = k, C_2 = k),$$

y, al ser independientes:

$$P(C_1 = C_2) = \sum_{k=0}^3 P(C_1 = k) \cdot P(C_2 = k).$$

Por último, sustituyendo esta expresión en (II), aplicando las igualdades (I), y operando, resulta:

$$\begin{aligned} P &= \frac{P(C_1 = 2) \cdot P(C_2 = 2)}{\sum_{k=0}^3 P(C_1 = k) \cdot P(C_2 = k)} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \binom{3}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \binom{3}{2}}{\sum_{k=0}^3 \frac{1}{8} \cdot \binom{3}{k} \cdot \frac{1}{8} \cdot \binom{3}{k}} = \frac{3 \cdot 3}{\sum_{k=0}^3 \binom{3}{k}^2} \Leftrightarrow \\ P &= \frac{9}{\binom{3}{0}^2 + \binom{3}{1}^2 + \binom{3}{2}^2 + \binom{3}{3}^2} = \frac{9}{1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2} = \frac{9}{20}, \end{aligned}$$

que es el valor pedido.

(Prueba de Universidad)

Problema 5.10

Colocamos cuatro bolas, al azar, en tres urnas. Se pide:

- a) Halla la probabilidad de que ninguna urna quede vacía.*
- b) Halla la probabilidad de que exactamente una urna esté vacía.*

Lo resolveremos realizando el recuento de los casos posibles y los casos favorables al suceso correspondiente a cada apartado, para posteriormente calcular la probabilidad pedida mediante el uso de la regla de Laplace. Para facilitar los cálculos, supondremos que tanto las urnas como las bolas son distinguibles, esto es, consideraremos que bolas y urnas están numeradas.

En primer lugar, como cada una de las 4 bolas puede ser colocada en cualquiera de las 3 urnas, el número de casos posibles es $3^4 = 81$, por tratarse de variaciones con repetición. Este dato será necesario para ambos apartados, que resolveremos separadamente a continuación.

Apartado a)

Para contar el número de distribuciones que hacen que ninguna urna quede vacía, iremos describiendo las distintas situaciones que pueden darse con las bolas, exigiendo que todas las urnas terminen estando ocupadas, y emplearemos el principio de la suma y del producto.

Para comenzar, la primera bola puede colocarse en cualquiera de las 3 urnas; una vez colocada la primera bola, la segunda puede ir a la misma urna que la primera (en cuyo caso, la tercera bola podría colocarse en cualquiera de las 2 urnas todavía vacías, y la cuarta tendría que depositarse necesariamente en la única urna libre en ese momento) o, por el contrario, podemos dejar la segunda bola en una urna distinta de la ocupada por la primera, lo cual podemos hacer de 2 maneras. Si estamos en esta última situación, hay dos urnas ocupadas, cada una con una bola, y quedan otras dos bolas por colocar. Tomamos entonces la tercera bola. Podemos dejarla en alguna de las urnas ocupadas (lo cual podemos hacer de 2 maneras, forzando que la cuarta bola vaya a parar a la urna vacía) o, por el contrario, introducirla en la urna vacía (si fuera este el caso, todas las urnas estarían ocupadas, y la cuarta bola podría meterse en cualquiera de las 3 urnas).

A partir de esta lista de casos posibles, siguiendo la argumentación y la casuística empleadas, y haciendo uso del principio de la suma y del producto, resulta que el número de casos favorables al suceso consistente en que todas las urnas queden ocupadas es $3 \cdot [1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot (2 \cdot 1 + 1 \cdot 3)] = 36$, por lo que, en virtud de la regla de Laplace, la probabilidad de que ninguna urna quede vacía es $36/81$, esto es, $4/9$.

Apartado b)

Si consideramos el suceso $A = \{\text{Exactamente una urna queda vacía}\}$ y los sucesos $A_i = \{\text{La urna } i \text{ está vacía y las otras dos no}\}$, para $i = 1, 2, 3$, es claro que A es igual a la unión de A_1 , A_2 y A_3 , que obviamente son sucesos incompatibles dos a dos, por lo que $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$.

Además, por simetría, es claro que $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$ (si las urnas estuvieran identificadas con pegatinas numeradas, el hecho de intercambiar las pegatinas no modificaría la probabilidad de que la urna que esté vacía sea la única en estarlo), de donde se desprende $P(A) = 3 \cdot P(A_1)$, y, en consecuencia, para resolver este apartado basta con calcular $P(A_1)$, para lo cual haremos el recuento de las distribuciones que hacen que la primera urna sea la única que quede vacía, empleando un procedimiento similar al llevado a cabo en el apartado anterior.

Para empezar, la primera bola puede colocarse en 2 urnas (la segunda o la tercera). Una vez colocada la primera bola, la segunda puede colocarse en la otra urna posible (la que no estuviera ocupada por la primera bola, de entre la segunda y la tercera urna), en cuyo caso ya estarían dos urnas ocupadas y, entonces, cada una de las otras 2 bolas podría situarse en cualquiera de las 2 urnas (esta situación se presenta, por tanto, de 4 maneras); o, por el contrario, la segunda bola puede colocarse en la misma urna que la primera. Si es este el caso, la tercera bola puede dejarse en la misma urna que las dos primeras (y entonces la cuarta tendría que introducirse en la única urna vacía distinta de la primera), o puede suceder que la tercera bola vaya a parar a la otra urna (la que esté vacía de entre la segunda y la tercera), en cuyo caso la cuarta bola podría depositarse en cualquiera de las 2 urnas, al estar ya las dos ocupadas.

Así pues, a partir de esta descripción de situaciones que hacen que la primera urna sea la única que quede vacía, empleando el principio de la suma y del producto (como en el apartado anterior), resulta que el número de casos favorables al suceso A_1 es $2 \cdot [1 \cdot 4 + 1 \cdot (1 \cdot 1 + 1 \cdot 2)] = 14$, por lo que, aplicando la regla de Laplace, se verifica $P(A_1) = 14/81$, y, en consecuencia, $P(A) = 3 \cdot 14/81 = 14/27$, lo que da respuesta al apartado, concluyendo así el problema.

(Prueba de Universidad)

Problema 5.11

Seis bolas de seis colores diferentes se colocan al azar en tres urnas U_1 , U_2 , U_3 .

- a) Calcula la probabilidad de que la urna U_3 esté vacía.
- b) Calcula la probabilidad de que vayan tantas bolas a cada urna como el número de orden de la urna.
- c) Calcula la probabilidad de que todas las urnas estén ocupadas.

En relación con el número de casos posibles, cuyo conocimiento necesitaremos en todos los apartados del problema, tengamos en cuenta que, como cada una de las 6 bolas puede depositarse en cualquiera de las 3 urnas, y son distinguibles tanto las bolas como las urnas, el número de maneras de colocar las 6 bolas en las tres urnas viene dado por $3^6 = 729$ (se trata de variaciones con repetición). Una vez calculado este número, resolveremos separadamente cada apartado.

Apartado a)

Como es evidente, para que la urna U_3 quede vacía, a la hora de introducir cada una de las bolas, hay exactamente 2 posibles destinos (la urna U_1 y la urna U_2), lo cual se

traduce en que el número de disposiciones que dejan vacía la urna U_3 es $2^6 = 64$ (se trata de nuevo de variaciones con repetición), y, en consecuencia, la probabilidad de que la urna U_3 quede vacía es $64/729$.

Apartado b)

Se trata de hacer el recuento de las maneras posibles de colocar una bola en la urna U_1 , dos en la urna U_2 , y tres en la urna U_3 , para lo cual simularemos el proceso de ir colocando las bolas de esta manera, comenzando por la urna U_1 . Para ocupar la urna U_1 disponemos de 6 bolas; una vez colocada una bola en la urna U_1 , para ocupar la urna U_2 hemos de elegir 2 bolas de entre las 5 restantes, sin que importe el orden en el que se elijan (lo único que cuenta son las dos bolas elegidas), lo cual podemos hacer de:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}!}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}!} = 10$$

maneras; por último, una vez ocupadas las urnas U_1 y U_2 , las tres bolas restantes deben introducirse en la urna U_3 , por lo que, en esta situación, solo hay una forma de hacerlo.

Ahora, aplicando el principio del producto, resulta que existen $6 \cdot 10 \cdot 1 = 60$ formas de disponer las bolas de la manera considerada, por lo que la probabilidad de que en cada urna haya tantas bolas como indica su número de orden es $60/729 = 20/243$.

Apartado c)

Considerando, para cada i comprendido entre 1 y 3, el suceso:

$$A_i = \{\text{La urna } U_i \text{ queda ocupada}\},$$

es claro que se trata de calcular la probabilidad del suceso $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

Ahora bien, como resulta más sencillo calcular la probabilidad de su suceso contrario, hallaremos esta, y emplearemos la fórmula de la probabilidad del suceso contrario, esto es, usaremos la igualdad:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - P((A_1 \cap A_2 \cap A_3)^c),$$

que, por las leyes de De Morgan (que establecen que el complementario de la intersección es igual a la unión de los complementarios, y lo mismo si intercambiamos «unión» con «intersección»), podemos escribir como:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c).$$

Denotando:

$$P = P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c),$$

por el principio de inclusión-exclusión, tenemos:

$$P = P(A_1^c) + P(A_2^c) + P(A_3^c) - P(A_1^c \cap A_2^c) - P(A_1^c \cap A_3^c) - P(A_2^c \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c),$$

y, al ser:

$$P(A_1^c) = P(A_2^c) = P(A_3^c) = \frac{64}{729}$$

(tenemos en cuenta que en el primer apartado habíamos hallado la probabilidad de que la urna U_3 quedara vacía, que es igual a $64/729$, y que esta probabilidad es la misma para las otras dos urnas, por simetría, o, si se prefiere, interpretando que las urnas están numeradas con pegatinas, y que al intercambiar las pegatinas entre unas urnas y otras, esta probabilidad no varía);

$$P(A_1^c \cap A_2^c) = P(A_1^c \cap A_3^c) = P(A_2^c \cap A_3^c) = \frac{1}{729}$$

(si dos urnas quedan vacías, todas las bolas deben ir a la otra, lo cual solo puede hacerse de un modo, ya que no influye el orden en que se introducen las bolas, sino el contenido final de cada urna); y:

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 0$$

(no es posible que todas las urnas queden vacías); sustituyendo, y operando, llegamos a:

$$P = 3 \cdot \frac{64}{729} - 3 \cdot \frac{1}{729} + 0 = \frac{64}{243} - \frac{1}{243} = \frac{63}{243} = \frac{7}{27},$$

de donde, finalmente, resulta:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27},$$

que es la probabilidad pedida.

(Oposiciones de Secundaria, 2005)

Problema 5.12

Una urna contiene bolas numeradas del 1 al 9. Sacamos bolas al azar, devolviéndolas a la urna una vez anotado su número. ¿Cuántas bolas debemos extraer para que la probabilidad de tener algún 7 sea al menos $9/10$?

Consideremos el suceso $A = \{\text{Obtener un 7 al extraer una bola de la urna}\}$. Entonces, como la composición de la urna permanece invariable, pues se devuelve la bola tras anotar su número, en todo momento se verifica $P(A) = 1/9$ (hay un caso favorable entre nueve posibles), y $P(A^C) = 8/9$.

Consideremos asimismo, para cada número natural $n \geq 1$, el suceso $A_n = \{\text{Obtener al menos un 7 en } n \text{ extracciones}\}$, cuya probabilidad denotaremos por p_n . Denotaremos también por q_n , para cada número natural $n \geq 1$, la probabilidad del suceso contrario de A_n , esto es, la probabilidad de no obtener ningún 7 en n extracciones.

Resulta, entonces, que el problema consiste en encontrar el (mínimo) número natural n que cumple la condición $p_n \geq 9/10$, la cual es equivalente a $q_n \leq 1/10$, como es claro.

Ahora bien, al haber reemplazamiento en las extracciones, el resultado de cada una es independiente de las demás, por lo que la probabilidad de no obtener ningún 7 en n extracciones es igual al resultado de multiplicar la probabilidad de no obtener un 7 en una extracción por sí mismo un total de n veces, es decir, se verifica:

$$q_n = P(A_n^C) = \underbrace{P(A^C) \cdot P(A^C) \cdots P(A^C)}_{n \text{ veces}} = [P(A^C)]^n = \left(\frac{8}{9}\right)^n,$$

y, en consecuencia, hemos de encontrar el menor número natural n tal que:

$$\left(\frac{8}{9}\right)^n \leq \frac{1}{10}.$$

Tomando logaritmo decimal en ambos miembros de la inecuación, al ser la función logarítmica de base 10 creciente, tenemos:

$$\log\left(\frac{8}{9}\right)^n \leq \log\left(\frac{1}{10}\right),$$

de donde, aplicando las propiedades de los logaritmos, calculando los logaritmos involucrados, trasponiendo, y teniendo en cuenta que n es un número natural, se sigue:

$$\log\left(\frac{8}{9}\right)^n \leq \log\left(\frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow n \log\left(\frac{8}{9}\right) \leq -1 \Leftrightarrow n \cdot (-0,05115...) \leq -1 \Leftrightarrow$$

$$n \geq \frac{1}{0,05115...} \Leftrightarrow n \geq 20.$$

De este modo, en respuesta a la pregunta planteada en el enunciado, podemos decir que, para que la probabilidad de que salga algún 7 no sea menor de 9/10, debemos extraer, como mínimo, 20 bolas.

(Prueba de Universidad)

Problema 5.13

Tres urnas contienen 2 bolas blancas y 4 negras, 8 bolas blancas y 4 negras, y 1 bola blanca y 3 negras, respectivamente. Tomamos una bola de cada urna. Si en total hay dos bolas blancas, halla la probabilidad de que la bola elegida de la segunda urna sea blanca.

Consideremos, para cada i comprendido entre 1 y 3, los sucesos $B_i = \{\text{La bola extraída de la urna } i \text{ es blanca}\}$ y $N_i = \{\text{La bola extraída de la urna } i \text{ es negra}\}$.

Asimismo, denotaremos por B (respectivamente, por N) el suceso consistente en la extracción de una bola blanca (respectivamente, negra), sin precisar la urna de la que proviene.

Con esta notación, es claro que el problema consiste en calcular la probabilidad condicionada:

$$P = P\left(\frac{B_2}{B \cap B \cap N}\right),$$

que, por definición, podemos expresar como:

$$P = \frac{P(B_2 \cap (B \cap B \cap N))}{P(B \cap B \cap N)}.$$

Veamos cómo llevar a cabo la intersección de los sucesos involucrados en esta igualdad. Para realizar la intersección indicada en el numerador, hemos de tener en cuenta que el suceso consistente en extraer una bola blanca de la urna 2, a la vez de sacar dos bolas blancas en total, es equivalente al suceso consistente en extraer una bola blanca de la urna 2, otra blanca (bien de la urna 1, bien de la urna 3) y una bola negra. En cuanto al denominador, es claro que, para obtener dos bolas blancas y una negra, podemos tomar esta última de una urna (ya sea la 1, la 2 o la 3), y las dos blancas de las dos urnas restantes. Así pues, a partir de estas consideraciones, podemos efectuar las intersecciones indicadas, lo que nos lleva a:

$$P = \frac{P(B_2 \cap (B \cap B \cap N))}{P(B \cap B \cap N)} = \frac{P(B_2 \cap B \cap N)}{P(B \cap B \cap N)} \Leftrightarrow$$

$$P = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) + P(N_1 \cap B_2 \cap B_3)}{P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) + P(B_1 \cap N_2 \cap B_3) + P(N_1 \cap B_2 \cap B_3)},$$

de donde, teniendo en cuenta que el resultado de la extracción de una urna no influye en el resultado de otra (hay independencia), se sigue:

$$P = \frac{P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(N_3) + P(N_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3)}{P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(N_3) + P(B_1) \cdot P(N_2) \cdot P(B_3) + P(N_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3)},$$

y, finalmente, sustituyendo el valor de estas probabilidades (lo cual es consecuencia inmediata de la regla de Laplace, teniendo en cuenta la composición de cada urna), y operando, llegamos a:

$$P = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{6+4}{36}}{\frac{6+1+4}{36}} = \frac{10}{11},$$

que es el valor pedido, lo que concluye el problema.

(Prueba de Universidad)

Problema 5.14

En una urna hay dos bolas, una blanca y una negra. Se saca una bola y se devuelve a la urna acompañada de otra del mismo color. Continuando del mismo modo, se llegará a tener en la urna 22 bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que en ese momento 11 sean blancas y 11 sean negras?

Como al final del proceso hay 22 bolas y al principio había 2, se han introducido 20 bolas, lo que significa que se han realizado 20 extracciones, ya que tras cada una de ellas se introduce una nueva bola en la urna. Como, además, se pretende que haya igual número de bolas blancas que de negras, es claro que deben haberse introducido 10 bolas de cada color, lo que equivale a decir que en 10 de las extracciones debe haber salido una bola blanca, y en las otras 10 una negra, ya que, en cada etapa del experimento, se introduce una bola del mismo color que la que haya sido extraída (junto con esta).

Supongamos, por un momento, que las extracciones se han sucedido de manera que las 10 primeras bolas eran blancas y las 10 últimas eran negras. A partir de la fórmula de la Probabilidad compuesta, teniendo en cuenta la composición de la urna en cada extracción, podemos decir que la probabilidad de que haya ocurrido de esta manera es:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{6}{17} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{8}{19} \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{10}{21} = \frac{10! \cdot 10!}{21!}.$$

Sin embargo, la extracción de las 10 bolas de cada color no tiene por qué haberse producido en este mismo orden, lo que se traduce en que, para hallar la probabilidad pedida, habremos de multiplicar este número por el número posible de ordenaciones de

las 10 bolas blancas y las 10 negras, puesto que, aun cambiando el orden de extracción de las bolas, al efectuar el cálculo de la probabilidad correspondiente, aparecerán los mismos números, tanto en el numerador como en el denominador de la expresión anterior, aunque cambiados de orden.

Ahora bien, para ordenar las 10 bolas blancas y las 10 negras de todas las maneras posibles, teniendo en cuenta que son indistinguibles, salvo por el color (lo único relevante es el color de cada bola, por lo que no hacemos distinción entre dos bolas del mismo color), basta con elegir la posición que ocuparán las 10 bolas de un color (las blancas, por ejemplo), quedando determinados al tiempo los lugares en que deben estar las 10 del otro color.

De este modo, el número de ordenaciones de las 20 bolas coincide con la cantidad de maneras de elegir 10 de ellas de entre las 20, que, como es sabido, está dada por el número combinatorio:

$$\binom{20}{10},$$

y, en consecuencia, la probabilidad pedida es:

$$p = \binom{20}{10} \frac{10! \cdot 10!}{21!} = \frac{20!}{\cancel{10!} \cdot 10!} \cdot \frac{\cancel{10!} \cdot 10!}{21!} = \frac{20!}{21 \cdot \cancel{20!}} = \frac{1}{21}.$$

(Oposiciones de Catedráticos de Institutos de Bachillerato, 1976, y examen de Universidad)

Problema 5.15

En una urna A hay 3 bolas blancas y 4 bolas negras. Se extraen, al azar, dos bolas de la urna A y, sin mirar su color, se introducen en otra urna B, inicialmente vacía. A continuación, se extrae, también al azar, una bola de cada urna.

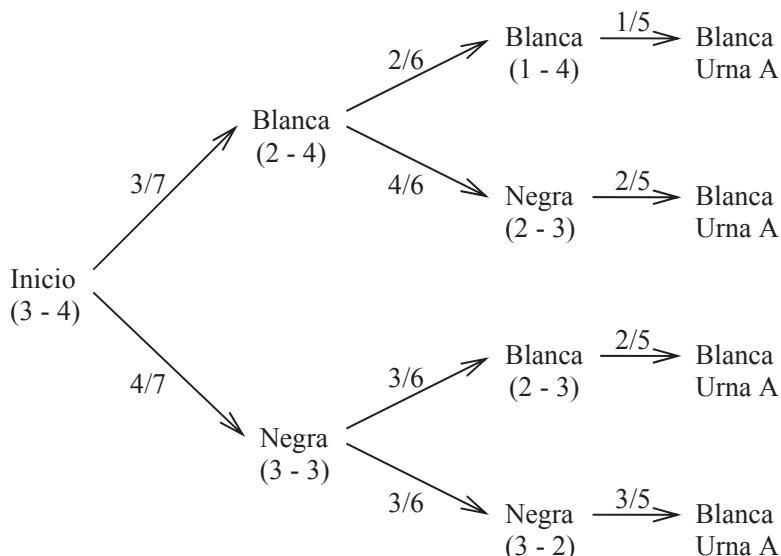
- Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna A sea blanca.*
- Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean blancas.*

Apartado a)

Como es sabido, en términos de probabilidades, es lo mismo extraer simultáneamente dos bolas de una urna que extraer primero una, y luego la otra, sin reposición. Sin embargo, el planteamiento del problema suele ser más sencillo considerando este último modo de proceder, pues de esta manera puede abordarse empleando un diagrama de árbol, sin necesidad de recurrir a la combinatoria. Así pues, supondremos que la extracción de las bolas de la urna A se realiza de manera sucesiva.

Observemos, asimismo, que, al no intervenir la urna B en la probabilidad pedida en este apartado, únicamente nos interesa la composición de la urna A en cada momento, y que el suceso consistente en extraer una bola blanca de la urna A (una vez extraídas

dos bolas e introducidas en la urna B) tiene la misma probabilidad que el suceso consistente en extraer 3 bolas de la urna A y que la tercera sea blanca (independientemente del color de las dos primeras), que es la probabilidad que vamos a calcular, haciendo uso del siguiente diagrama de árbol, en el que hemos incluido la probabilidad de que se dé cada situación (en las flechas) y la composición de la urna A después de cada una de las dos primeras extracciones, según el caso (entre paréntesis: el primer número indica la cantidad de bolas blancas; el segundo, la de negras).



Denotando por P_1 la probabilidad pedida en este apartado, teniendo en cuenta el diagrama de árbol, y aplicando el teorema de la Probabilidad total, podemos establecer la igualdad:

$$P_1 = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5},$$

de la que, operando, llegamos a:

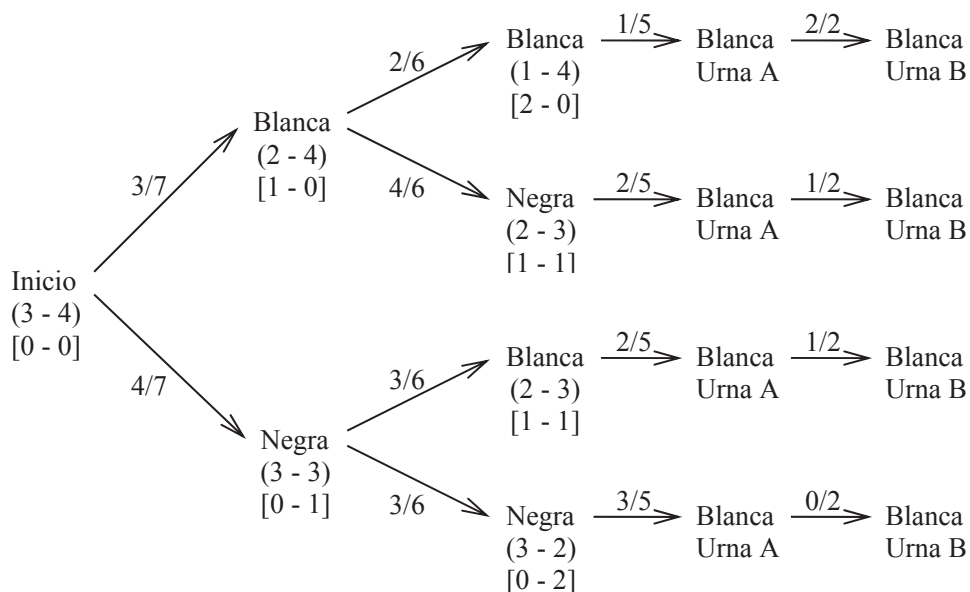
$$P_1 = \frac{1}{35} + \frac{4}{35} + \frac{4}{35} + \frac{6}{35} = \frac{15}{35} \Leftrightarrow P_1 = \frac{3}{7},$$

lo que concluye este apartado.

Apartado b)

Para resolver este apartado, también consideramos extraídas las bolas de la urna A de manera sucesiva, aunque, a diferencia del apartado anterior, hemos de tener en cuenta la composición de la urna B, la cual hemos detallado entre corchetes en el siguiente

diagrama de árbol (como antes, el primer número es la cantidad de bolas blancas; el segundo, la de negras). Asimismo, hemos «completado» el diagrama anterior, añadiendo la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea blanca, condicionada a las diferentes situaciones que pueden darse, dependiendo del color de las bolas extraídas previamente de la urna A, que son las introducidas en la urna B.



Denotando por P_2 la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean blancas, empleando el diagrama de árbol, y aplicando el teorema de la Probabilidad total, tenemos:

$$P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{0}{2},$$

y, operando, resulta:

$$P_2 = \frac{1}{35} + \frac{2}{35} + \frac{2}{35} + 0 = \frac{5}{35} \Leftrightarrow P_2 = \frac{1}{7},$$

lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2014)

Problema 5.16

Dos personas A y B participan en un juego que consiste en lanzar alternativamente una moneda. El jugador que consigue primero una cara gana el juego. Si el primer lanzamiento lo realiza A, halla las respectivas probabilidades de ganar.

Denotemos por p_A la probabilidad de que gane el jugador A, y por p_B la de que lo haga el jugador B.

Calcularemos las probabilidades pedidas haciendo una descripción de las posibles situaciones que pueden darse conforme se realizan los lanzamientos de la moneda, valorando la probabilidad de cada una, teniendo en cuenta para ello que el resultado de un lanzamiento no influye en el resultado de los demás (son independientes), y empleando el teorema de la Probabilidad total.

Supondremos que la moneda está equilibrada (en un lanzamiento, tanto la probabilidad de sacar cara como la de sacar cruz es igual a $1/2$).

Veamos, en primer lugar, cuál es la probabilidad de que gane el jugador A. Puesto que este jugador realiza el primer lanzamiento, es posible que obtenga cara en la primera tirada (y que gane el juego), lo cual puede suceder con una probabilidad igual a $1/2$, o, por el contrario, que obtenga cruz, suceso que también tiene una probabilidad de $1/2$ de ocurrir. Si se da esta última situación, el jugador B tiene el turno, y lanza la moneda. Para que gane el jugador A, lógicamente, el jugador B no debe obtener cara (probabilidad $1/2$), y el turno volvería de nuevo al jugador A. Llegados a este punto, estamos en idéntica situación que al principio, teniendo por tanto el jugador A la misma probabilidad de ganar que antes de iniciarse el juego. Así pues, a partir del teorema de la Probabilidad total, podemos establecer la relación recurrente:

$$p_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot p_A,$$

de la que, operando y despejando, resulta:

$$p_A - \frac{1}{4} \cdot p_A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot p_A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p_A = \frac{2}{3},$$

que es una de las probabilidades pedidas.

Para calcular la probabilidad de que gane el jugador B, hemos de tener en cuenta que, para ello, el jugador A debe obtener cruz en su primer lanzamiento (probabilidad $1/2$), de manera que llegue el turno al jugador B. En ese momento, se da la misma situación que al inicio del juego, lo que se traduce en que, en tal situación, el jugador B tiene la misma probabilidad de ganar que tenía el jugador A al principio. Aplicando el teorema de la Probabilidad total (o la probabilidad compuesta, si se prefiere), sustituyendo el valor obtenido para p_A , y cancelando, resulta:

$$p_B = \frac{1}{2} \cdot p_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

que es la otra probabilidad pedida.

Obsérvese que se satisface la igualdad $p_A + p_B = 1$, lo cual significa que la probabilidad de que no gane ninguno, esto es, de que haya un empate, es nula. Ello se interpreta como que el juego termina en algún momento, y no cabe esperar que se sucedan los lanzamientos «para siempre», sin que gane alguno de los jugadores. Obsérvese también que, para calcular p_B , una vez hallado el valor de p_A , no podíamos partir de la igualdad $p_B = 1 - p_A$, pues a priori no sabíamos si podíamos considerar el empate como algo probable o no. Dicho de otra manera, hasta que no hemos comprobado que $p_A + p_B = 1$, no podíamos admitir que el suceso contrario de que gane A sea precisamente que gane B.

(Prueba de Universidad)

Problema 5.17

Dos amigos A y B compiten en el mismo juego. A tira dos dados y gana si la suma de puntos es 4. Si la suma es otra, B tira los dados y gana si obtiene 6 como suma de puntos. Si B no gana, vuelve a tirar A en las mismas condiciones y así sucesivamente hasta que uno de los dos gane. Calcula:

- La probabilidad que tiene A de ganar.*
- La probabilidad que tiene B de ganar.*

Lo resolveremos de una manera similar al problema anterior. Denotaremos, igualmente, por p_A la probabilidad de que gane A, y por p_B la de que gane B. No obstante, antes de abordar el cálculo de p_A y p_B mediante la descripción de las distintas situaciones y el uso del teorema de la Probabilidad total, vamos a calcular la probabilidad que tiene cada jugador de conseguir su objetivo en una tirada concreta. Tengamos en cuenta que esta situación es diferente a la del problema anterior, ya que, en este caso, las probabilidades no son las mismas, puesto que la probabilidad de obtener un 4 con dos dados no es la misma que la de obtener un 6, como vamos a ver a continuación.

En efecto, el espacio muestral del experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados, considerándolos distinguibles (para que los sucesos elementales sean equiprobables y sean más sencillos los cálculos), es:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\},$$

cuyo cardinal es 36. Por su parte, el suceso $S_4 = \{\text{La suma de los resultados de los dos dados es 4}\}$ es:

$$S_4 = \{(1,3), (2,2), (3,1)\},$$

que tiene 3 elementos, por lo que $P(S_4) = 3/36 = 1/12$, mientras que el suceso $S_6 = \{\text{La suma de los resultados de los dos dados es } 6\}$ es:

$$S_6 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\},$$

que tiene 5 elementos, siendo, por tanto, $P(S_6) = 5/36$.

Ahora estamos en condiciones de describir las posibles situaciones, para calcular el valor de p_A . Comienza el juego lanzando el jugador A. Es posible que obtenga un 4 y gane el juego (lo cual puede suceder con probabilidad $1/12$, como hemos visto), o que no saque un 4 (con probabilidad $11/12$, por ser el contrario del suceso anterior) y llegue el turno a B. Si es este el caso, es posible que B obtenga 6 puntos y gane el juego (probabilidad $5/36$), o que no lo consiga (probabilidad $31/36$) y vuelva el turno al jugador A, en cuyo caso estarían en la misma situación que antes de iniciar el juego. Así pues, teniendo en cuenta que el resultado obtenido en cada tirada no depende de las anteriores (hay independencia), por el teorema de la Probabilidad total, tenemos la relación recurrente:

$$p_A = \frac{1}{12} + \frac{11}{12} \cdot \frac{31}{36} \cdot p_A,$$

de donde, operando y trasponiendo, resulta:

$$p_A - \frac{341}{432} \cdot p_A = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{91}{432} \cdot p_A = \frac{1}{12} \Leftrightarrow p_A = \frac{36}{91},$$

lo que da respuesta al apartado a).

Calculemos ahora p_B . Para que gane el juego B debe ocurrir que A no gane en la primera tirada, esto es, que no obtenga 4 puntos (probabilidad $11/12$) y le llegue el turno a B. Entonces, es posible que B obtenga 6 puntos y gane (probabilidad $5/36$) o que obtenga otro resultado (probabilidad $31/36$), en cuyo caso el turno volvería al jugador A, y B tendría la misma probabilidad de ganar que antes de iniciarse el juego, por estar en idénticas condiciones. Entonces, por el teorema de la Probabilidad total, se verifica la relación recurrente:

$$p_B = \frac{11}{12} \cdot \left(\frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot p_B \right),$$

y, en consecuencia, extrayendo el 36 del denominador como factor común, operando y trasponiendo, llegamos a:

$$p_B = \frac{11}{432} (5 + 31 \cdot p_B) \Leftrightarrow 432p_B = 55 + 341 \cdot p_B \Leftrightarrow 91 \cdot p_B = 55 \Leftrightarrow p_B = \frac{55}{91},$$

que es la probabilidad pedida en el apartado b).

Obsérvese que, como en el problema anterior, se cumple $p_A + p_B = 1$, por lo que la probabilidad de empate es nula, y, por tanto, se espera que el juego acabe en algún momento. Asimismo, como en el problema anterior, no podíamos partir de $p_B = 1 - p_A$, pues teníamos que descartar la posibilidad de que el juego «se colgara» y no acabara nunca con la victoria de algún jugador (no podíamos suponer que el suceso contrario de que gane un jugador es que gane el otro, antes de ver que la probabilidad de empate es nula).

(Oposiciones de Secundaria, 2000)

Problema 5.18

Dos personas juegan a lo siguiente:

Alternativamente extraen una bola de una bolsa donde previamente se introdujeron a bolas blancas y b bolas negras. Gana el juego el jugador que saca bola blanca. Calcula la probabilidad de que gane el jugador que comienza el juego, si las sucesivas extracciones se hacen con reposición.

En primer lugar, puesto que las extracciones se realizan con reposición, es claro que, cada vez que un jugador se dispone a sacar una bola, hay un total de $a + b$ bolas en la bolsa (que es un número positivo), de las que a son blancas y b son negras, por lo que la probabilidad de obtener una bola blanca en una determinada extracción es:

$$P(\text{Bola blanca}) = \frac{a}{a + b},$$

mientras que la de obtener una bola negra es:

$$P(\text{Bola negra}) = \frac{b}{a + b},$$

siendo estos valores constantes en cada extracción.

Ahora, si consideramos el suceso $A = \{\text{Gana el jugador que inicia el juego}\}$, resulta que, para que ocurra A , es necesario que, o el primer jugador obtenga una bola blanca en su primera extracción, o que, si extrae una negra, el segundo jugador también saque una negra, para que le vuelva el turno al primero, en cuyo caso estarían de nuevo en idéntica situación que antes de comenzar el juego. Así pues, aplicando el teorema de la Probabilidad total, y teniendo en cuenta que el resultado de una extracción no influye en el resultado de otras (hay independencia), tenemos la relación recurrente:

$$P(A) = \frac{a}{a + b} + \frac{b}{a + b} \cdot \frac{b}{a + b} \cdot P(A),$$

de la que, operando, trasponiendo, cancelando, y teniendo en cuenta que $a + 2b \neq 0$ (por coherencia con el enunciado), llegamos a:

$$P(A) = \frac{a}{a+b} + \frac{b^2}{(a+b)^2} \cdot P(A) \Leftrightarrow \left(1 - \frac{b^2}{(a+b)^2}\right) P(A) = \frac{a}{a+b} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2 + \cancel{b^2} + 2ab - \cancel{b^2}}{(a+b)^2} \cdot P(A) = \frac{a}{\cancel{a+b}} \Leftrightarrow \frac{a(a+2b)}{a+b} \cdot P(A) = a \Leftrightarrow P(A) = \frac{a+b}{a+2b},$$

que es la probabilidad pedida.

(Oposiciones de Secundaria, 2000)

Problema 5.19

Dos jugadores A y B tiran simultáneamente un dado cada uno. Gana el primero que obtenga un 6. Calcula:

- La probabilidad de que A y B empaten.
- La probabilidad de que gane A.
- La probabilidad de que gane B.

Resolveremos el problema de dos maneras distintas (tres, en realidad): usando una relación de recurrencia, como en los problemas anteriores; y empleando variables aleatorias y series geométricas.

Primera forma

Denotemos por p_A la probabilidad de que gane A, y por p_B la de que gane B. Observe-mos, en primer lugar, que, como ambos jugadores realizan la misma acción en cada turno, y persiguen el mismo objetivo, la probabilidad que tiene de ganar un jugador ha de ser idéntica a la probabilidad que tiene el otro, es decir, debe ser $p_A = p_B$, por lo que nos limitaremos a calcular p_A . Observemos, asimismo, que no tenemos la garantía de que la probabilidad de empate sea nula (de hecho, no lo es), por lo que, de la anterior igualdad, no podemos llegar a la conclusión de que $p_A = p_B = 1/2$.

Para que gane el jugador A, debe ocurrir que, o bien este obtenga un 6 en su primer lanzamiento (probabilidad $1/6$) y el jugador B obtenga cualquier otro resultado (probabilidad $5/6$), o bien ninguno de los dos jugadores obtenga un 6 en su primer lanzamiento (probabilidad $5/6$ para ambos), en cuyo caso tendrían que lanzar por segunda vez, estando de nuevo en las mismas condiciones que al principio. Así pues, teniendo en cuenta que los lanzamientos son independientes (ni afecta el resultado obtenido por un jugador al obtenido por el otro, ni influye el resultado de una tirada en las demás), por el teorema de la Probabilidad total, tenemos la relación recurrente:

$$p_A = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot p_A,$$

de la que, operando y trasponiendo, llegamos a:

$$p_A = \frac{5}{36} + \frac{25}{36} \cdot p_A \Leftrightarrow 36p_A = 5 + 25 \cdot p_A \Leftrightarrow 11 \cdot p_A = 5 \Leftrightarrow p_A = \frac{5}{11},$$

lo que da respuesta al apartado b) (y también al apartado c), al ser $p_A = p_B$, como ya comentamos).

Finalmente, para hallar la probabilidad de que se produzca un empate, como se pide en el apartado a), solo hay que tener en cuenta que, evidentemente, debe cumplirse la igualdad:

$$p_A + p_B + P(\text{Empatar}) = 1,$$

de la que, sustituyendo los valores calculados, operando, y trasponiendo, resulta:

$$\frac{5}{11} + \frac{5}{11} + P(\text{Empatar}) = 1 \Leftrightarrow P(\text{Empatar}) = 1 - \frac{10}{11} \Leftrightarrow P(\text{Empatar}) = \frac{1}{11},$$

lo que concluye la resolución del problema por este método.

Veamos ahora la otra manera de resolver el problema (que son dos, en realidad)

Consideremos las variables aleatorias $X \equiv \{\text{Número de tiradas del jugador A hasta que logra su primer 6}\}$ e $Y \equiv \{\text{Número de tiradas del jugador B hasta que logra su primer 6}\}$, que emplearemos en los dos primeros apartados.

Como vemos, las variables X e Y siguen una distribución geométrica de parámetro $1/6$, es decir, toman valores en el conjunto de los números naturales, sin incluir el cero, con la probabilidad dada por la fórmula:

$$P(X = k) = P(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6},$$

válida para cada natural $k \geq 1$, puesto que, para que el primer 6 aparezca en la k -ésima tirada del dado, es necesario que en cada uno de los anteriores $k - 1$ lanzamientos se haya obtenido un número distinto de 6 (lo cual sucede, en cada lanzamiento, con probabilidad igual a $5/6$, con independencia de los demás, pues el resultado de un lanzamiento no influye en el de los otros, es decir, los lanzamientos son independientes unos de otros), y que salga un 6 en la k -ésima tirada, lo cual sucede con probabilidad $1/6$.

Apartado a)

Como es claro, los jugadores A y B empatarán si obtienen su primer 6 en la misma tirada, lo cual es equivalente a decir que se verifica la igualdad $X = Y$.

Así pues, el problema planteado en este apartado consiste en calcular $P(X = Y)$, que es lo que haremos a continuación, teniendo en cuenta que el valor común que

tomen ambas variables puede ser cualquier número natural no nulo, por lo que podemos escribir:

$$P(\text{Empatar}) = P(X = Y) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X = k; Y = k)\right),$$

de donde, al ser sucesos incompatibles dos a dos, se sigue:

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k; Y = k),$$

y de aquí, por la independencia de las variables X e Y (el hecho de que un jugador obtenga o no un 6 no influye en que lo haga o no el otro), empleando la fórmula que obtuvimos antes, y operando, llegamos a:

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) \cdot P(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \Leftrightarrow \\ P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^{k-1}, \end{aligned}$$

que es una serie geométrica convergente (su razón es el cuadrado de $5/6$, esto es, $25/36$, que es un número positivo menor que uno), por lo que podemos efectuar la suma utilizando la conocida fórmula, quedando:

$$P(X = Y) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{1}{\cancel{36}} \cdot \frac{1}{\frac{11}{\cancel{36}}} = \frac{1}{11},$$

que es igual a la probabilidad de que se produzca un empate que obtuvimos anteriormente, por el otro método.

Apartados b) y c)

Observemos que, al ser $1/11$ la probabilidad de que haya un empate, es claro que la probabilidad de que gane alguno de los jugadores es $10/11$, que es el complemento a uno de la probabilidad de que empaten (tengamos en cuenta que el suceso contrario de que empaten es precisamente el suceso que consiste en que gane alguno de ellos).

Además, como ya comentamos al principio, ambos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar, por lo que se trata de «repartir» por igual la probabilidad $10/11$ entre los dos, resultando, en consecuencia, que la probabilidad de que gane el jugador A es $5/11$, lo que responde al apartado b), siendo esta también la probabilidad de que gane el jugador B, lo que concluye el apartado c), y, con él, el problema.

Aunque la resolución del problema puede darse por finalizada (lo está, de hecho; y por dos métodos distintos), presentamos a continuación otra forma de calcular las probabilidades pedidas en los apartados b) y c), bastante más larga, aunque interesante y muy general. Es, en realidad, un método similar al segundo empleado, que permite determinar directamente la probabilidad de que gane uno de los jugadores, sin usar el «reparto» de la probabilidad 10/11 entre ambos.

Apartado b)

Si denotamos $G_A = \{\text{Gana el jugador A}\}$, es claro que la ocurrencia del suceso G_A es equivalente a que se satisfaga la desigualdad $X < Y$, por lo que se trata de calcular $P(X < Y)$, lo cual podemos hacer teniendo en cuenta que X puede tomar cualquier valor natural no nulo, y hemos de exigir que Y sea mayor que el valor tomado por X . Así, tenemos:

$$P(G_A) = P(X < Y) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X = k; Y > k)\right),$$

lo que, por la incompatibilidad de cualquier par de estos sucesos y por la independencia de las variables, implica:

$$P(G_A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k; Y > k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) \cdot P(Y > k). \quad (I)$$

Ahora bien, decir que la variable Y toma un valor mayor que uno dado, k , es equivalente a decir que puede tomar cada uno de los valores mayores que k , lo que se traduce en la igualdad de sucesos:

$$\{Y > k\} = \left\{ \bigcup_{i=k+1}^{\infty} (Y = i) \right\},$$

de la que, teniendo en cuenta la incompatibilidad antes aludida, se deduce:

$$P(Y > k) = P\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} (Y = i)\right) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(Y = i),$$

y, sustituyendo esta expresión de $P(Y > k)$ en (I), aplicando la fórmula obtenida anteriormente para el cálculo de las probabilidades de X e Y , y operando, llegamos a:

$$P(G_A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) \cdot \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} P(Y = i) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{6} \right) \Leftrightarrow$$

$$P(G_A) = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \right),$$

expresión que incluye una serie geométrica convergente (es de razón $5/6$, que es un número positivo menor que uno), cuya suma podemos determinar usando la conocida fórmula, resultando:

$$P(G_A) = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{k+1-1}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^k}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1},$$

de donde, usando de nuevo la fórmula para sumar la serie geométrica (cuya razón es el cuadrado de $5/6$), se sigue el resultado, que coincide con la probabilidad hallada antes:

$$P(G_A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{2 \cdot 1 - 1}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{5}{6}}{\frac{11}{36}} = \frac{5}{11}.$$

Apartado c)

Si, de manera análoga al apartado anterior, denotamos $G_B = \{\text{Gana el jugador B}\}$, por la simetría existente entre X e Y , se satisface:

$$P(G_B) = P(G_A) = \frac{5}{11},$$

puesto que basta con intercambiar los papeles de X e Y en el desarrollo llevado a cabo en el apartado anterior para llegar a este resultado, concluyendo así el problema.

Obsérvese, sin embargo, que podríamos haber alcanzado esta misma conclusión a partir de la evidente igualdad:

$$P(X < Y) + P(X = Y) + P(X > Y) = 1,$$

que es equivalente a:

$$P(G_A) + P(\text{Empatar}) + P(G_B) = 1$$

(igualdad que ya utilizamos en la resolución del problema por el primer método, aunque con una notación algo distinta), ya que, sustituyendo los valores hallados en los dos primeros apartados, trasponiendo, y operando, resulta:

$$\frac{5}{11} + \frac{1}{11} + P(G_B) = 1 \Leftrightarrow P(G_B) = 1 - \frac{6}{11} \Leftrightarrow P(G_B) = \frac{5}{11}.$$

(Oposiciones de Secundaria, 2005)

Problema 5.20

Un dado tiene N caras. Si lo lanzamos n veces, halla la probabilidad de que haya al menos dos resultados iguales.

Consideremos el suceso $A = \{\text{Al lanzar el dado } n \text{ veces, hay al menos dos resultados iguales}\}$, de manera que el problema consiste en hallar $P(A)$, para lo cual calcularemos $P(A^C)$, por resultar más fácil, y usaremos la fórmula de la probabilidad del suceso contrario, $P(A) = 1 - P(A^C)$.

Supondremos que se verifica $n \leq N$, ya que, si fuera $n > N$, entonces, habría más lanzamientos que posibles resultados, lo que significaría que, necesariamente, algún resultado tendría que repetirse (es un caso concreto del llamado principio del palomar o de Dirichlet), en cuyo caso A sería un suceso seguro, y, en consecuencia, $P(A) = 1$.

Como es claro, el número de resultados posibles del experimento viene dado por la potencia N^n , ya que cada uno de los n lanzamientos, con independencia de los demás, puede tomar N resultados distintos (se trata de variaciones con repetición).

Ahora, para determinar el número de casos favorables al suceso A^C , consistente en que no haya dos (o más) resultados iguales, simularemos la ejecución del experimento, desde el primer lanzamiento del dado hasta el n -ésimo, realizando el recuento del número de resultados de cada lanzamiento que contribuyen a la ocurrencia de A^C , para, posteriormente, multiplicar los resultados obtenidos, en virtud del principio del producto.

Así, vemos que, en el primer lanzamiento, el dado puede tomar cualquiera de los N valores; en el segundo, cualquiera de los $N - 1$ restantes (para que no se repita el resultado anterior); en el tercero, cualquiera de los otros $N - 2$ resultados (no debe coincidir con ninguno de los dos primeros); y así, sucesivamente, el número de resultados favorables al suceso A^C en los sucesivos lanzamientos viene dado por $N - 3$, $N - 4$, ..., y $N - (n - 1) = N - n + 1$, de donde se desprende que el número de resultados favorables a la ocurrencia de A^C es $N(N - 1)(N - 2)(N - 3) \cdots (N - n + 1)$, y, en consecuencia:

$$P(A^C) = \frac{N(N - 1)(N - 2)(N - 3) \cdots (N - n + 1)}{N^n},$$

expresión que podemos escribir de manera más «compacta» multiplicando numerador y denominador por $n!$ y $(N - n)!$, resultando:

$$P(A^C) = \frac{N(N - 1)(N - 2)(N - 3) \cdots (N - n + 1)(N - n)! n!}{N^n (N - n)! n!} = \frac{n! N!}{N^n n! (N - n)!} = \binom{N}{n} \frac{n!}{N^n}.$$

Por último, realizando el complemento a uno, como ya habíamos comentado, obtenemos la probabilidad pedida:

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \binom{N}{n} \frac{n!}{N^n}.$$

(Prueba de Universidad)

Problema 5.21

Lanzamos una moneda equilibrada n veces. Calcula la probabilidad de que no aparezcan dos caras consecutivas.

Dado el número natural n , que indica la cantidad de lanzamientos realizados, consideremos, para cada número natural k ($0 \leq k \leq n$), los sucesos $A_k = \{\text{No obtener dos caras consecutivas en } k \text{ lanzamientos}\}$ y $C_k = \{\text{Obtener cara en el lanzamiento } k\text{-ésimo}\}$, y denotemos $p_k = P(A_k)$. Con esta notación, es claro que el problema consiste en calcular el valor de p_n , y que $p_0 = p_1 = 1$ (es absolutamente seguro que no van a salir dos caras consecutivas si no se tira la moneda, o si solo se tira una vez).

Ahora, observemos que, para que no aparezcan dos caras consecutivas en k lanzamientos de la moneda ($k \geq 2$), es necesario y suficiente que ocurra uno de estos dos sucesos (excluyentes): que salga cruz en la k -ésima tirada (es decir, que acontezca el suceso contrario de C_k) y que no hayan salido dos caras consecutivas anteriormente (que suceda A_{k-1}); o que el último resultado sea cara (que ocurra C_k), el anterior sea cruz (el suceso contrario de C_{k-1}) y que no hayan aparecido dos caras consecutivas antes (que suceda A_{k-2}). Ello se traduce en la igualdad:

$$p_k = P(A_k) = P(C_k^c, A_{k-1}) + P(C_k, C_{k-1}^c, A_{k-2}),$$

de la que, teniendo en cuenta que el resultado obtenido en cada lanzamiento no depende de los otros (son independientes) y que la moneda está equilibrada (en un lanzamiento, tanto la probabilidad de obtener cara como la probabilidad de obtener cruz es igual a $1/2$), y empleando la notación introducida, se sigue:

$$p_k = P(C_k^c) \cdot P(A_{k-1}) + P(C_k) \cdot P(C_{k-1}^c) \cdot P(A_{k-2}) = \frac{1}{2} p_{k-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} p_{k-2} \Leftrightarrow p_k = \frac{1}{2} p_{k-1} + \frac{1}{4} p_{k-2},$$

que es una relación de recurrencia lineal que relaciona tres términos consecutivos de la sucesión $\{p_k\}$, a partir de la cual, mediante la resolución de la ecuación característica, que, como es sabido, en este caso resulta ser:

$$x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4},$$

podemos obtener la expresión del término general de la sucesión. En efecto, resolviendo la ecuación cuadrática, tenemos:

$$x = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \end{cases},$$

y, por tanto, para cada número natural k ($0 \leq k \leq n$), se satisface la igualdad:

$$p_k = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^k + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^k,$$

para ciertos números reales A y B , que podemos calcular particularizando la igualdad para los valores iniciales $k = 0$ y $k = 1$, teniendo en cuenta $p_0 = p_1 = 1$, como ya comentamos al principio. De este modo, resulta:

$$\begin{cases} k=0 \rightarrow 1 = p_0 = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^0 + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^0 \\ k=1 \rightarrow 1 = p_1 = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^1 + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A \frac{1+\sqrt{5}}{4} + B \frac{1-\sqrt{5}}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A = 1 - B \\ (1-B) \frac{1+\sqrt{5}}{4} + B \frac{1-\sqrt{5}}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - B \\ \frac{1+\sqrt{5}}{4} - B \frac{1+\sqrt{5}}{4} + B \frac{1-\sqrt{5}}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A = 1 - B \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right) B = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - B \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} B = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - B \\ B = -\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A = 1 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \\ B = -\frac{3\sqrt{5}-5}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3\sqrt{5}+5}{10} \\ B = -\frac{3\sqrt{5}-5}{10} \end{cases},$$

por lo que $p_k = \frac{3\sqrt{5}+5}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^k - \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^k, \forall k, 0 \leq k \leq n$.

Finalmente, tomando $k = n$, tenemos la probabilidad pedida:

$$p_n = \frac{3\sqrt{5}+5}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n - \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n.$$

(Prueba de Universidad)

Problema 5.22

Sea A un suceso asociado a cierto experimento aleatorio, que tiene una probabilidad p de ocurrir. Si se realizan pruebas repetidas e independientes del experimento, ¿cuál es la probabilidad de que la r -ésima aparición de A ocurra en la n -ésima repetición del experimento?

Consideremos, para cada i comprendido entre 1 y n , las variables aleatorias:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si ocurre } A \text{ al realizar el experimento la vez } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y la variable:

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i,$$

que, como es evidente, mide el número de veces que ocurre A en las $n - 1$ primeras realizaciones del experimento. Consideremos, asimismo, el suceso $E = \{\text{La } r\text{-ésima aparición de } A \text{ ocurre en la } n\text{-ésima realización de experimento}\}.$

Con esta notación, el problema consiste en hallar $P(E)$, que, como podemos ver, es posible calcular a partir de la igualdad:

$$P(E) = P(X = r - 1; X_n = 1),$$

puesto que, para que la r -ésima ocurrencia de A sea en la n -ésima realización del experimento, es necesario y suficiente que ocurra A en la n -ésima realización, y que haya ocurrido $r - 1$ veces en las anteriores $n - 1$ realizaciones.

Ahora bien, según el enunciado, las repeticiones del experimento se realizan de forma independiente, de lo que se deduce que la variable X sigue una distribución binomial de tipo $(n - 1, p)$ (por ser la suma de $n - 1$ variables independientes con distribución de Bernoulli de parámetro p), y, que, además, la probabilidad de la intersección coincide con el producto de las probabilidades, por lo que tenemos:

$$P(E) = P(X = r - 1; X_n = 1) = P(X = r - 1) \cdot P(X_n = 1) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-1-(r-1)} \cdot p \Leftrightarrow$$

$$P(E) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

(Prueba de Universidad)

Problema 5.23

Del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ se elige al azar el número a_n . Calcula el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, donde p_n es la probabilidad de que $a_n^2 - 1$ sea divisible por 10.

Veamos, en primer lugar, qué condición debe satisfacer el número a_n para que la diferencia entre su cuadrado y 1 sea múltiplo de 10.

Empleando congruencias, tenemos:

$$a_n^2 - 1 \text{ es divisible por } 10 \Leftrightarrow a_n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow a_n^2 \equiv 1 \pmod{10} \Leftrightarrow a_n \equiv \pm 1 \pmod{10},$$

lo cual sucede si, y solo si, la última cifra de a_n es 1 o 9 (tengamos en cuenta que el resto de dividir un número entre 10 coincide con su última cifra, y que la congruencia $a_n \equiv -1 \pmod{10}$ puede escribirse también como $a_n \equiv 9 \pmod{10}$).

Así pues, considerando, para cada número natural $n \geq 1$, el suceso $A_n = \{\text{La última cifra del número elegido, comprendido entre 1 y } n, \text{ es } 1 \text{ o } 9\}$, es claro que $p_n = P(A_n)$, por lo que el problema consiste en calcular el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Ahora bien, la sucesión $\{A_n\}$ es creciente para la relación de orden definida por la inclusión, es decir, para cualquier número natural $n \geq 1$, se satisface la relación:

$$A_n \subseteq A_{n+1}$$

(obviamente, si el número elegido termina en 1 o en 9, y está comprendido entre 1 y n , entonces, también está comprendido entre 1 y $n+1$, y acaba en 1 o en 9), lo que implica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$

y, como:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

se corresponde con el suceso $\{\text{La última cifra del número elegido es } 1 \text{ o } 9\}$ (al llegar n a infinito, decir que el número elegido termina en 1 o en 9, y está comprendido entre 1 y n , es lo mismo que decir simplemente que termina en 1 o en 9), resulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$

puesto que hay 2 casos favorables para que la última cifra del número elegido sea 1 o 9, entre 10 posibles, lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2001)

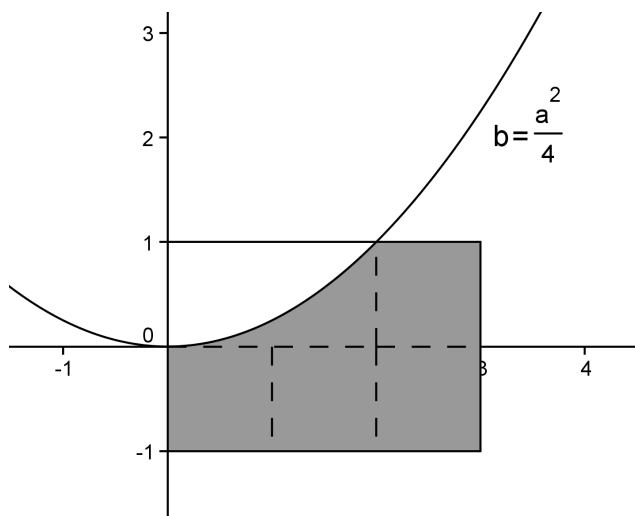
Problema 5.24

Se toman dos números reales a y b al azar, tales que a pertenece al intervalo $[0,3]$ y b al $[-1,1]$. Halla la probabilidad de que la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ tenga dos raíces reales.

En primer lugar, puesto que elegir al azar el número a en el intervalo $[0,3]$ y el número b en $[-1,1]$ es equivalente a elegir al azar el punto de coordenadas (a,b) en el conjunto $[0,3] \times [-1,1]$, consideraremos este rectángulo como el espacio muestral del experimento.

Por otro lado, como es sabido, una ecuación cuadrática tiene dos raíces reales si, y solo si, su discriminante es positivo, por lo que, imponiendo esta condición, obtenemos la inequación $a^2 - 4b > 0$, de la que, trasponiendo, llegamos a $b < a^2/4$.

Ahora bien, por la forma de elegir los números a y b al azar, debemos entender que cada punto del rectángulo $[0,3] \times [-1,1]$ puede ser elegido con la misma probabilidad, lo que se traduce en que la probabilidad de que a y b satisfagan la desigualdad $b < a^2/4$, que denotaremos por P , es igual al cociente entre el área de la zona correspondiente a los puntos que verifican esta condición (que aparece sombreada en el diagrama) y el área del rectángulo que constituye el espacio muestral (que mide 6 unidades cuadradas).



De este modo, teniendo en cuenta que la zona sombreada está formada por 4 cuadrados de una unidad cuadrada de área cada uno, junto con el recinto delimitado por el eje de abscisas, la gráfica de la parábola de ecuación $b = a^2/4$, y las rectas verticales

$a = 0$, $a = 2$ (el punto de corte de la parábola con la frontera del espacio muestral tiene coordenadas $(2,1)$, como es evidente), resulta:

$$P = \frac{4 + \int_0^2 \frac{a^2}{4} da}{6},$$

de donde, aplicando la regla de Barrow, y operando, llegamos a:

$$P = \frac{4 + \left. \frac{a^3}{12} \right|_0^2}{6} = \frac{4 + \frac{2^3}{12} - \frac{0^3}{12}}{6} = \frac{7}{9},$$

lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 5.25

Los coeficientes a y b de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ se eligen al azar en el intervalo $(-1,1)$. Calcula la probabilidad de que las raíces de esta ecuación sean reales y positivas.

Como vemos, se trata de un problema muy similar al anterior, por lo que lo resolveremos de forma parecida. En este caso, consideraremos como espacio muestral el cuadrado abierto $(-1,1) \times (-1,1)$, ya que tanto a como b pertenecen al intervalo $(-1,1)$.

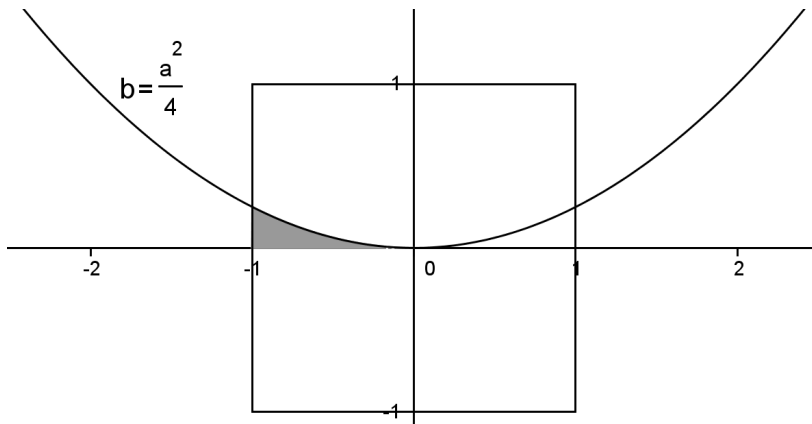
Como en el problema anterior, la ecuación tendrá dos raíces reales si, y solo si, su discriminante es positivo, lo que nos lleva de nuevo a la desigualdad $b < a^2/4$ (se trata de la misma parábola del problema anterior), si bien en este caso hay que exigir, además, que las dos raíces, que denotaremos por x_1 y x_2 , sean positivas, lo cual es equivalente a que se satisfagan las desigualdades:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$$

(la primera significa que las dos raíces tienen el mismo signo, mientras que la segunda excluye la posibilidad de que ambas sean negativas), de las que, a partir de las ecuaciones de Cardano-Viète, se sigue:

$$\begin{cases} b > 0 \\ -a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a < 0 \end{cases},$$

y, en consecuencia, la probabilidad pedida, que denotamos por P , es igual al cociente entre el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la parábola cuya ecuación es $b = a^2/4$, y las rectas verticales $a = -1$, $a = 0$ (que aparece sombreado en el diagrama) y el área del espacio muestral (que es de 4 unidades cuadradas).



De este modo, escribiendo el área del recinto como una integral definida, aplicando la regla de Barrow, y operando, tenemos la probabilidad pedida, quedando:

$$P = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 \frac{a^2}{4} da = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a^3}{12} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{0^3}{12} - \frac{(-1)^3}{12} \right) = \frac{1}{48}.$$

(Oposiciones de Secundaria, 2000, y examen de Universidad)

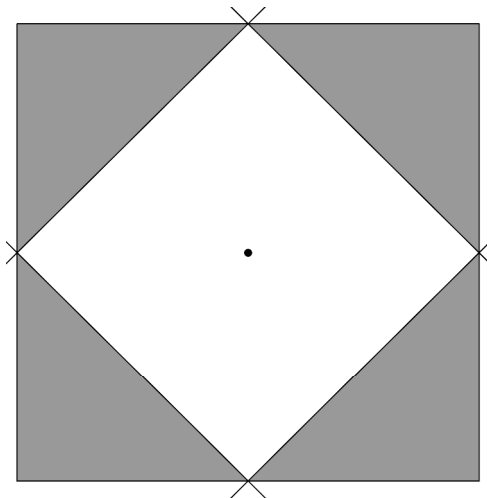
Problema 5.26

Al tomar aleatoriamente un punto del interior de un cuadrado, calcula la probabilidad de que esté más próximo a algún vértice que al centro de gravedad del mismo.

Puesto que cada punto del cuadrado tiene la misma probabilidad de ser elegido, la probabilidad de que el punto elegido esté más próximo a algún vértice que al centro de gravedad del cuadrado es igual al cociente entre el área de la zona correspondiente a los puntos que verifican esta condición y el área del cuadrado.

Ahora, trazando las mediatrices de los segmentos que unen el centro del cuadrado con cada uno de los vértices, podemos delimitar la zona aludida, resultando ser la que aparece sombreada en el gráfico, donde también se muestra el centro del cuadrado y las mediatrices.

Como es evidente, la superficie sombreada ocupa la mitad de la extensión del cuadrado, por lo que la probabilidad de que el punto elegido esté en esta zona es igual a $1/2$, que es la respuesta al problema.



(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 5.27

Se elige un punto x al azar en el intervalo $[0,1]$. Halla la longitud media del mayor de los dos segmentos que determina.

Si denotamos por M la longitud del mayor de los dos segmentos determinados por el punto x (que es una variable aleatoria continua que depende de x), es claro que se satisface la relación $1/2 \leq M \leq 1$, por lo que, teniendo en cuenta que M puede tomar cualquier valor dentro del intervalo $[1/2,1]$ con la misma probabilidad, podríamos decir que el valor medio tendría que ser precisamente el punto medio del intervalo, es decir, $M = 3/4$, y ya habríamos terminado el problema.

Sin embargo, esta manera de proceder puede parecer poco rigurosa, por lo que resolveremos el problema también por un procedimiento más general, como veremos a continuación.

Sea I el subintervalo de mayor longitud, de los dos en que x divide el intervalo $[0,1]$. Entonces, tenemos:

$$I = \begin{cases} [x,1] & \text{si } x < 1/2 \\ [0,x] & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases},$$

y, en consecuencia:

$$M = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1/2 \\ x & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}.$$

Sea ahora m un punto cualquiera del intervalo $[1/2, 1]$, y denotemos por F la función de distribución de la variable aleatoria M . Entonces, por la definición de la función de distribución, se satisface la igualdad:

$$F(m) = P(M \leq m),$$

por lo que, distinguiendo dos casos, según sea $x < 1/2$ o $x \geq 1/2$, aplicando la propiedad aditiva de la probabilidad, y teniendo en cuenta el valor de M en cada caso, podemos escribir:

$$F(m) = P(M \leq m) = P(M \leq m, x < 1/2) + P(M \leq m, x \geq 1/2) \Leftrightarrow$$

$$F(m) = P(1 - x \leq m, x < 1/2) + P(x \leq m, x \geq 1/2),$$

de donde, trasponiendo términos y reorganizando desigualdades, llegamos a:

$$F(m) = P(1 - m \leq x < 1/2) + P(1/2 \leq x \leq m).$$

Ahora bien, por la forma de elegir x aleatoriamente, se entiende que puede tomar cualquier valor del intervalo $[0, 1]$ con igual probabilidad, lo que implica que la probabilidad de que x se encuentre en un determinado subintervalo de $[0, 1]$ coincide con la longitud del mismo (habría que dividirlo por la amplitud del intervalo $[0, 1]$, que es el espacio muestral, pero al ser esta igual a la unidad, no es necesario), y, entonces:

$$F(m) = \text{long}[1 - m, 1/2) + \text{long}[1/2, m] = \cancel{1/2} - (1 - m) + m - \cancel{1/2} = 2m - 1,$$

expresión que muestra, entre otras cosas, que F es una función derivable, lo que, como es sabido, se traduce en que podemos obtener la función de densidad de M , que denotaremos por f , sin más que derivar, puesto que $f = F'$, resultando $f(m) = 2$ (obsérvese que este valor constante de la función de densidad indica que M se distribuye uniformemente en el intervalo $[1/2, 1]$, o lo que es lo mismo, que también puede tomar cualquiera de sus posibles valores con igual probabilidad).

Finalmente, aplicando la definición de la media (o esperanza matemática) para una variable continua, tenemos:

$$E(M) = \int_{1/2}^1 m \cdot f(m) dm = \int_{1/2}^1 2m dm = m^2 \Big|_{1/2}^1 = 1 - 1/4 = 3/4,$$

que es el valor que habíamos obtenido al principio, como queríamos comprobar.

(Prueba de Universidad)

Problema 5.28

Se toman dos puntos, x e y , al azar en el intervalo $[0,1]$. ¿Cuál es la longitud media del mayor de los tres segmentos que determinan?

Como vemos, se trata de un problema similar al anterior, en el que se toman dos puntos en el intervalo $[0,1]$, en lugar de solo uno.

A fin de simplificar los cálculos, supondremos que se cumple $x < y$ (el caso $y < x$ arrojaría resultados idénticos, por simetría, como comentaremos más adelante).

Si, análogamente al problema anterior, denotamos por M la longitud del mayor de los tres segmentos determinados por x e y en el intervalo $[0,1]$ (que es una variable aleatoria continua que depende de dos variables), es claro que M debe pertenecer al intervalo $[1/3,1]$. Observemos también que el experimento consistente en elegir dos puntos cualesquiera, x e y , en el intervalo $[0,1]$ es equivalente al de elegir un par ordenado (x,y) en el conjunto $[0,1] \times [0,1]$, esto es, al de elegir un punto en el cuadrado unidad, si bien estudiaremos únicamente la situación que se da en la mitad del cuadrado correspondiente al triángulo que resulta de tomar la parte del cuadrado situada por encima de la recta $y = x$, ya que estamos suponiendo que $x < y$.

Como es evidente, los puntos x e y , siendo $x < y$, determinan en $[0,1]$ los subintervalos $[0,x]$, $[x,y]$, $[y,1]$, cuyas longitudes respectivas son x , $y - x$, $1 - y$, por lo que, denotando por I el intervalo de mayor longitud de los tres, tenemos:

$$M = \begin{cases} x & \text{si } I = [0, x] \\ y - x & \text{si } I = [x, y], \\ 1 - y & \text{si } I = [y, 1] \end{cases}$$

lo que equivale a:

$$M = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y - x, x \geq 1 - y \\ y - x & \text{si } y - x \geq x, y - x \geq 1 - y, \\ 1 - y & \text{si } 1 - y \geq x, 1 - y \geq y - x \end{cases}$$

expresión que, trasponiendo términos y operando, se convierte en:

$$M = \begin{cases} x & \text{si } y \leq 2x, y \geq 1 - x \\ y - x & \text{si } y \geq 2x, y \geq \frac{1+x}{2} \\ 1 - y & \text{si } y \leq 1 - x, y \leq \frac{1+x}{2} \end{cases}.$$

Sea ahora m un punto cualquiera del intervalo $[1/3, 1]$, y denotemos por F la función de distribución de M , que pretendemos determinar. Para ello, distinguiremos dos casos, que estudiaremos por separado: que se verifique $1/3 \leq m \leq 1/2$, o que se cumpla $1/2 < m \leq 1$ (las razones por las que hacemos esta distinción quedarán claras después).

Si se cumple $1/3 \leq m \leq 1/2$, entonces, aplicando la definición de la función de distribución de una variable aleatoria continua, empleando la propiedad aditiva de la probabilidad, teniendo en cuenta el valor de M y las desigualdades que determinan I en cada caso, y trasponiendo términos, tenemos:

$$F(m) = P(M \leq m) = P(M \leq m, I = [0, x]) + P(M \leq m, I = [x, y]) + P(M \leq m, I = [y, 1]) \Leftrightarrow$$

$$F(m) = P(x \leq m, I = [0, x]) + P(y - x \leq m, I = [x, y]) + P(1 - y \leq m, I = [y, 1]) \Leftrightarrow$$

$$F(m) = P(x \leq m, I = [0, x]) + P(y \leq x + m, I = [x, y]) + P(y \geq 1 - m, I = [y, 1]) \Leftrightarrow$$

$$F(m) = P(x \leq m, y \leq 2x, y \geq 1 - x) + P\left(y \leq x + m, y \geq 2x, y \geq \frac{1+x}{2}\right) + P\left(y \geq 1 - m, y \leq 1 - x, y \leq \frac{1+x}{2}\right).$$

Ahora bien, por la manera en que se eligen al azar los dos puntos dentro del intervalo $[0, 1]$, todos los pares (x, y) del cuadrado unidad pueden ser elegidos con igual probabilidad, por lo que la probabilidad de que el par (x, y) esté dentro de un recinto determinado coincide con la superficie de este (habría que dividirla por el área del espacio muestral, pero no es necesario, puesto que el espacio muestral tiene una superficie igual a la unidad), y, entonces, podemos escribir:

$$F(m) = A_1(m) + A_2(m) + A_3(m),$$

donde $A_1(m)$, $A_2(m)$ y $A_3(m)$ representan, respectivamente, el área, en función de m , de los conjuntos $K_1(m)$, $K_2(m)$ y $K_3(m)$, siendo:

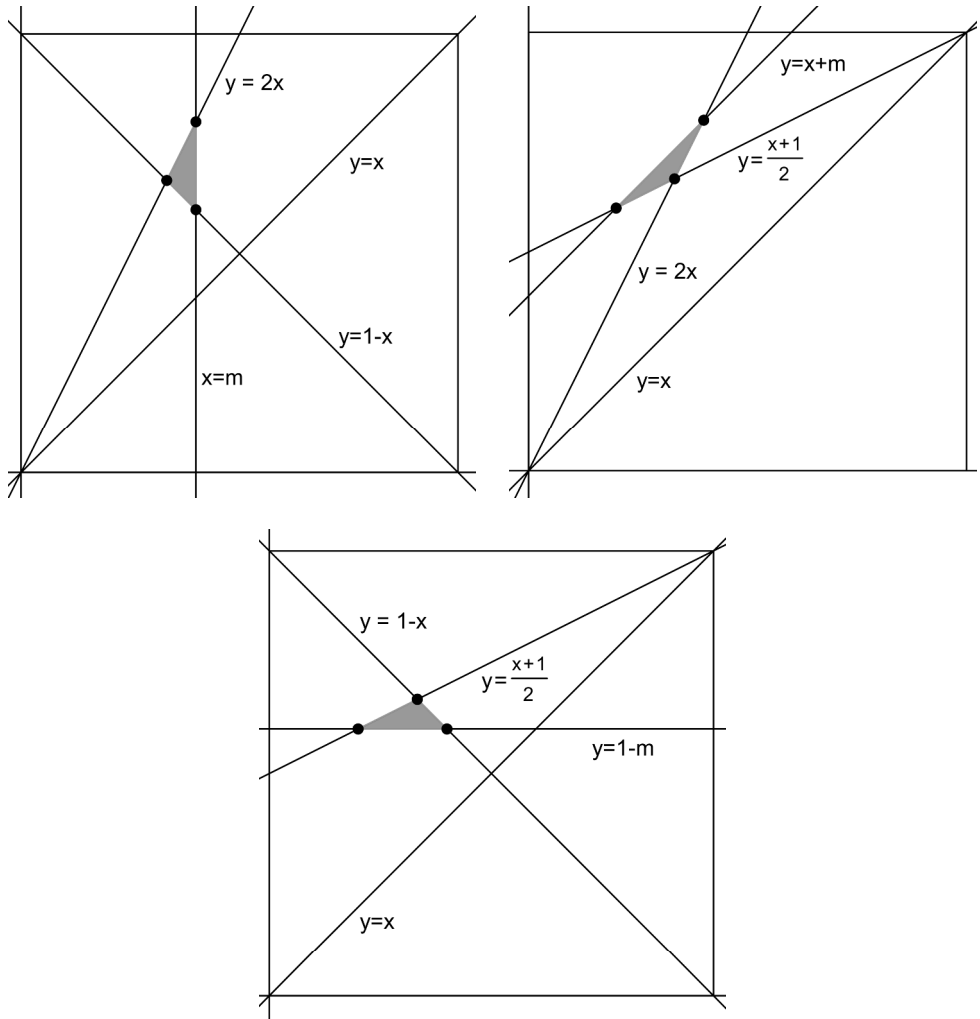
$$K_1(m) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq m, y \leq 2x, y \geq 1 - x \right\},$$

$$K_2(m) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x + m, y \geq 2x, y \geq \frac{1+x}{2} \right\},$$

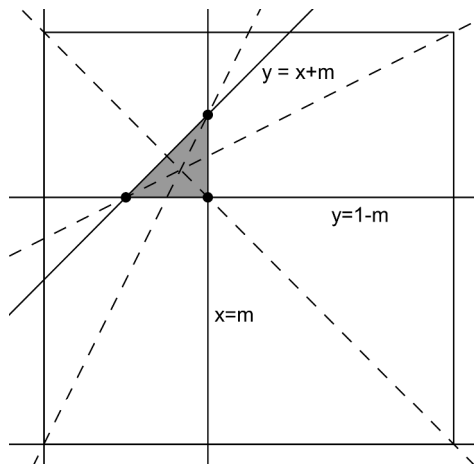
$$K_3(m) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 1 - m, y \leq 1 - x, y \leq \frac{1+x}{2} \right\},$$

con la condición común a todos de ser $x < y$, como estamos suponiendo.

Para calcular las áreas de estos conjuntos, los representamos gráficamente, a partir de las inecuaciones que los definen (incluyendo la inecuación $x < y$), quedando la situación mostrada en los siguientes diagramas, donde aparecen sombreados los conjuntos $K_1(m)$, $K_2(m)$ y $K_3(m)$, y se señalan los vértices, que resultan de la intersección de las correspondientes rectas que delimitan cada conjunto.



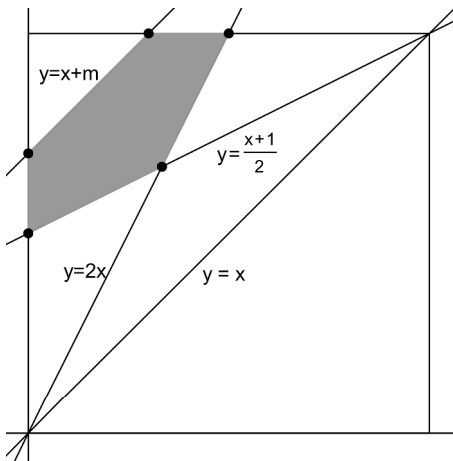
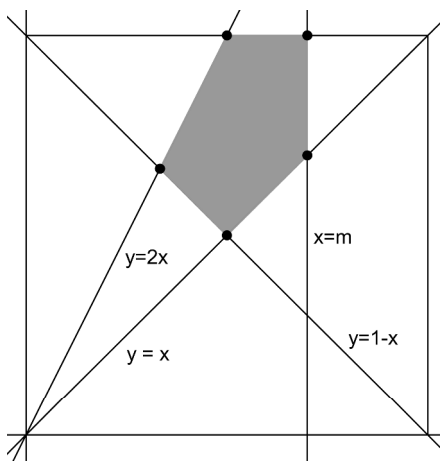
Como podemos ver, se trata de tres conjuntos disjuntos, lo que se traduce en que la suma de las áreas —que coincide con el valor de $F(m)$ — es igual al área de la figura resultante de la yuxtaposición de los tres, que es el triángulo rectángulo mostrado en el siguiente diagrama.

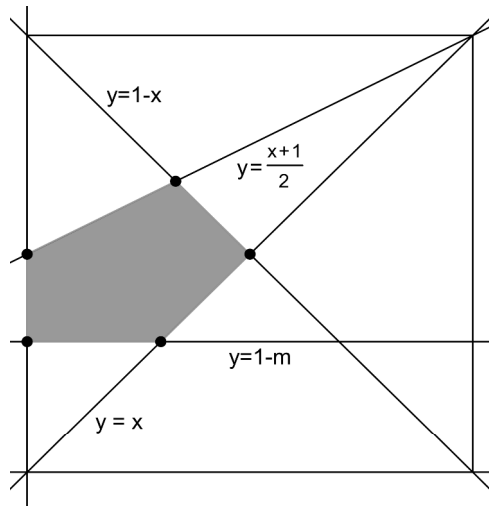


Realizando la intersección de las rectas que delimitan el triángulo rectángulo (dos a dos), mediante la resolución del sencillo sistema de ecuaciones correspondiente, obtenemos las coordenadas de los tres vértices, que resultan ser $(1 - 2m, 1 - m)$, $(m, 2m)$ y $(m, 1 - m)$, por lo que, como es claro, el cateto vertical mide $2m - (1 - m) = 3m - 1$, y el horizontal, $m - (1 - 2m) = 3m - 1$ (son los dos iguales), y, en consecuencia, el área del triángulo en función de m , que es la expresión de $F(m)$, es:

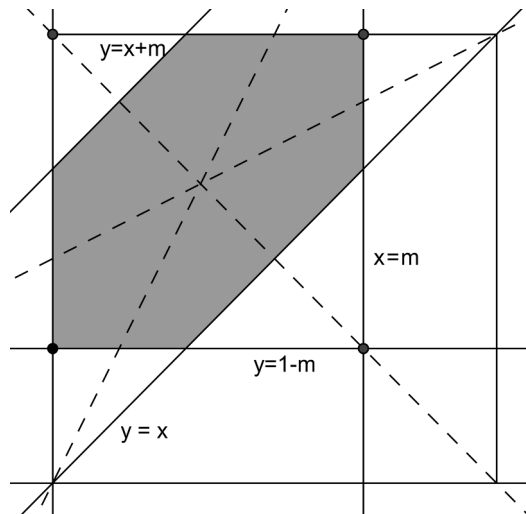
$$F(m) = \frac{1}{2}(3m - 1)^2 = \frac{9m^2 - 6m + 1}{2}.$$

Veamos ahora el caso en que m pertenezca al intervalo $(1/2, 1]$. En esta situación, empleando la misma notación que antes, y procediendo de la misma manera, resultan los conjuntos disjuntos $K_1(m)$, $K_2(m)$ y $K_3(m)$, que se muestran sombreados en los diagramas.





De nuevo, la suma de las tres áreas se corresponde con el área de la figura que resulta de la yuxtaposición de las tres, mostrada en el siguiente diagrama.



Como vemos, podemos determinar el área de esta figura como la diferencia entre el área del cuadrado cuyos vértices están señalados en el gráfico y los dos triángulos rectángulos isósceles de las esquinas. Ahora bien, como es evidente, el lado del cuadrado mide m ; el cateto del triángulo situado en la parte superior-izquierda, $1 - m$; y el cateto del triángulo situado en la parte inferior-derecha, $2m - 1$, que es el resultado de $m - (1 - m)$, por lo que tenemos:

$$F(m) = A_1(m) + A_2(m) + A_3(m) = m^2 - \frac{1}{2}(1 - m)^2 - \frac{1}{2}(2m - 1)^2,$$

de donde, operando, resulta:

$$F(m) = m^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}2m - \frac{1}{2}4m^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}4m = \frac{-3m^2 + 6m - 2}{2}.$$

Ahora queda clara la razón por la que hemos distinguido dos casos, según que m esté en el intervalo $[1/3, 1/2]$ o en el $(1/2, 1]$: resultan distintas figuras geométricas, por la posición relativa de las rectas.

Hemos obtenido todo lo anterior considerando el caso $x < y$. Si fuera $y < x$, intercambiando los papeles de x e y en las expresiones anteriores, por simetría, obtendríamos idénticos resultados, por lo que, aplicando la propiedad aditiva de la probabilidad, y teniendo en cuenta que la probabilidad de que se dé la igualdad $x = y$ es nula (estamos considerando una probabilidad continua), resulta:

$$F(m) = P(M \leq m) = P(M \leq m, x < y) + \cancel{P(M \leq m, x = y)} + P(M \leq m, x > y) = 2 \cdot P(M \leq m, x < y),$$

de manera que, si m pertenece al intervalo $[1/3, 1/2]$, entonces:

$$F(m) = \cancel{2} \frac{9m^2 - 6m + 1}{\cancel{2}} = 9m^2 - 6m + 1,$$

mientras que si m está en $(1/2, 1]$, tenemos:

$$F(m) = \cancel{2} \frac{-3m^2 + 6m - 2}{\cancel{2}} = -3m^2 + 6m - 2,$$

lo cual podemos expresar como la función a trozos:

$$F(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 1/3 \\ 9m^2 - 6m + 1 & \text{si } 1/3 \leq m \leq 1/2 \\ -3m^2 + 6m - 2 & \text{si } 1/2 < m \leq 1 \\ 1 & \text{si } m > 1 \end{cases},$$

cuyas funciones parciales son derivables, por lo que, derivando a trozos, llegamos a:

$$f(m) = \begin{cases} 18m - 6 & \text{si } 1/3 \leq m \leq 1/2 \\ -6m + 6 & \text{si } 1/2 < m \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

que es la función de densidad de la variable aleatoria M , a partir de la cual podemos calcular la media (o esperanza matemática) pedida, empleando, además de la definición, las propiedades lineales de la integral y la regla de Barrow, quedando:

$$E(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} mf(m)dm = \int_{1/3}^{1/2} mf(m)dm + \int_{1/2}^1 mf(m)dm \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 E(M) &= \int_{1/3}^{1/2} m(18m - 6)dm + \int_{1/2}^1 m(-6m + 6)dm \Leftrightarrow \\
 E(M) &= \int_{1/3}^{1/2} (18m^2 - 6m)dm + \int_{1/2}^1 (-6m^2 + 6m)dm = (6m^3 - 3m^2) \Big|_{1/3}^{1/2} + (-2m^3 + 3m^2) \Big|_{1/2}^1 \Leftrightarrow \\
 E(M) &= 6\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{18},
 \end{aligned}$$

lo que concluye el problema.

(Prueba de Universidad)

Problema 5.29

Los números 1, 2, 3, ..., n se permutan al azar. Halla el número esperado de veces que un número se encuentra en su posición original.

Consideremos, para cada i comprendido entre 1 y n, las variables aleatorias:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ se encuentra en su lugar original} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y la variable:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i,$$

cuyo valor, como es claro, coincide con la cantidad de números que ocupan su lugar original en la permutación. De este modo, el problema consiste en calcular la media (o esperanza matemática) de X, que es lo que haremos a continuación.

Aplicando las propiedades lineales de la media, tenemos:

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i),$$

y, por tanto, basta con hallar el valor de $E(X_i)$, para $i = 1, 2, \dots, n$, que, aplicando la definición de media, y operando, resulta ser:

$$E(X_i) = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \frac{1}{n}, \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

pues para que el número i ocupe la posición i -ésima (su posición inicial) hay un caso favorable entre n posibles. Así, sustituyendo y operando, obtenemos:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} = 1,$$

lo que significa que se espera que haya un número ocupando su posición original.

(Prueba de Universidad)

Problema 5.30

k bolas se colocan al azar en n urnas. Calcula el número esperado de urnas que quedan vacías.

Lo resolveremos de una manera similar al problema anterior. En efecto, consideremos, para cada i comprendido entre 1 y n , las variables aleatorias:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la urna } i \text{ no queda ocupada} \\ 0 & \text{si la urna } i \text{ es ocupada por alguna bola} \end{cases}$$

y la variable:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i,$$

que contabiliza la cantidad de urnas que quedan vacías, de modo que el problema consiste en hallar el valor de $E(X)$. Aplicando, como en el problema anterior, las propiedades lineales de la media, tenemos:

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i),$$

y, al ser $E(X_i) = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0) = P(X_i = 1)$, para cada i comprendido entre 1 y n , podemos ver que basta con calcular la probabilidad de que la variable X_i tome el valor 1, esto es, la probabilidad de que la urna i quede vacía. Ahora bien, puesto que la colocación de las k bolas en las n urnas puede hacerse de n^k maneras (es consecuencia del principio del producto, ya que cada bola, con independencia de las demás, puede colocarse en n lugares; o, si se prefiere, por tratarse de variaciones con repetición), mientras que el número de casos favorables al suceso consistente en que la urna i quede vacía es igual a $(n-1)^k$ (razonando como antes, teniendo en cuenta que cada bola puede colocarse en cualquier urna, salvo en la i , que debe quedar vacía), resulta:

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{(n-1)^k}{n^k},$$

de donde, sustituyendo, extrayendo el factor común presente en el interior del sumatorio (al no depender de i , es constante), sumando la unidad n veces, y simplificando, se sigue:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)^k}{n^k} = \frac{(n-1)^k}{n^k} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{(n-1)^k}{n^k} \cdot n = \frac{(n-1)^k}{n^{k-1}},$$

que es el número esperado de urnas que quedan vacías.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 5.31

El problema de los repartos: Blaise Pascal – Pierre de Fermat. Dos jugadores A y B apuestan en un cierto juego equitativo 32 euros cada uno. El juego se desarrolla por partidas y gana la apuesta el primero que consiga cinco partidas. Cuando el primero ha ganado tres partidas y el segundo dos, el juego se interrumpe. ¿Cómo hay que repartir las cantidades apostadas para ser justos?

Para devolver de manera justa a cada jugador una parte de los 64 euros apostados en total, hay que hacer el reparto atendiendo a la cantidad que esperaba (esperanza matemática) ganar cada jugador en el momento de la interrupción de la partida.

Así, si consideramos la variable aleatoria:

$$X = \begin{cases} 64 & \text{si A gana el juego} \\ 0 & \text{si B gana el juego} \end{cases},$$

que indica la cantidad de dinero que debería recibir el jugador A al final del juego (teniendo en cuenta que iba ganando por 3 a 2), según el resultado del mismo, el problema consiste en calcular el valor de $E(X)$, que, según la definición de la esperanza matemática (o media), está dado por:

$$E(X) = 64 \cdot P(X = 64) + 0 \cdot P(X = 0) = 64 \cdot P(X = 64),$$

de manera que todo se reduce a calcular $P(X = 64)$, que no es sino la probabilidad que el jugador A tenía de ganar el juego en el momento en que se detuvo. Para calcular esta probabilidad, describiremos todas las secuencias de partidas que concluyen con la victoria de A en el juego, y haremos uso del teorema de la Probabilidad total, teniendo en cuenta, además, que, al ser un juego equitativo (según el enunciado), la probabilidad que tiene cada jugador de ganar una determinada partida es igual a $1/2$, y que el resultado de una partida no influye en el de otras (son independientes). De este modo, indicando con la letra A que la persona A gana la partida correspondiente, y con la letra B que es la otra persona quien gana la partida, tenemos las secuencias AA (A gana las dos partidas que le quedaban, y el resultado es 5 a 2), cuya probabilidad es $1/4$ ($1/2 \cdot 1/2$); ABA (el resultado sería de 5 a 3), con probabilidad $1/8$ ($1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2$); ABBA (resultado: 5 a 4), con probabilidad $1/16$ ($1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2$); BAA (resultado: 5 a 3), con

probabilidad $1/8$ ($1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2$); BABA (resultado: 5 a 4), con probabilidad $1/16$ ($1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2$); y BBAA (resultado: 5 a 4), con probabilidad $1/16$ ($1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2$).

De lo anterior, en virtud del teorema de la Probabilidad total, tenemos:

$$P(X = 64) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16},$$

y, entonces:

$$E(X) = 64 \cdot \frac{11}{16} = 44,$$

lo cual quiere decir que sería justo entregar 44 euros al jugador A, y, por tanto, 20 euros al jugador B.

(Oposiciones de Secundaria, 2002)

Problema 5.32

Discute el siguiente sistema de juego: Una persona afirma que casi siempre gana en el juego de cara y cruz. Para ello, apuesta siempre por cruz y, la primera vez que sale cara, deja el juego. Así, como mucho paga una unidad (cuando sale cara) y, sin embargo, puede ganar grandes cantidades.

El problema consiste en calcular la ganancia esperada (esperanza matemática) en el juego, siguiendo la estrategia indicada en el enunciado. Para ello, consideremos la variable aleatoria $G \equiv \{\text{Ganancia en el juego siguiendo la estrategia descrita}\}$ y los sucesos $C = \{\text{Sale cara en una determinada tirada}\}$ y $X = \{\text{Sale cruz en una determinada tirada}\}$.

De este modo, la secuencia «XXX... (n veces) ...XXC» representa el suceso consistente en obtener n cruces consecutivos y posteriormente una cara (que sería el momento en que abandonaría el juego), y el problema consiste en hallar $E(G)$.

Estudiemos ahora la distribución de la variable G . Es claro que los valores que puede tomar G son los números del conjunto $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$, según salga cara en la primera tirada, en la segunda, en la tercera, en la cuarta..., mientras que la probabilidad correspondiente a cada valor, teniendo en cuenta que entendemos que la moneda está equilibrada (tanto la probabilidad de que salga cara como la de que salga cruz es $1/2$) y que el resultado de un lanzamiento no influye en el de otros (hay independencia), es la que se detalla a continuación:

$$P(G = -1) = P(C) = \frac{1}{2},$$

$$P(G = 0) = P(XC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$P(G = 1) = P(XXC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

$$P(G = 2) = P(XXXC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4,$$

y, en general:

$$P(G = n) = P(\underbrace{XXX \cdots XX}_{n+1 \text{ veces}}C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}.$$

Entonces, sustituyendo estos valores en la expresión que proporciona la esperanza matemática, llegamos a:

$$E(G) = -1 \cdot P(G = -1) + \cancel{0 \cdot P(G = 0)} + 1 \cdot P(G = 1) + 2 \cdot P(G = 2) + 3 \cdot P(G = 3) + \cdots \Leftrightarrow$$

$$E(G) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2},$$

y, teniendo en cuenta la igualdad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} = \frac{1}{2} \quad (I)$$

(que demostraremos posteriormente), resulta $E(G) = -1/2 + 1/2 = 0$, lo que significa que, si se sigue la estrategia descrita, se espera que la ganancia sea nula, es decir, este método no sirve para conseguir ganar dinero (al contrario de lo que afirma la persona mencionada en el enunciado), si bien tampoco cabe esperar que se pierda, lo que da respuesta a la cuestión planteada.

Veamos, pues, para terminar, que, efectivamente, se satisface la igualdad (I). Como vemos, se trata de una serie aritmético-geométrica, que podemos sumar por el procedimiento general para este tipo de series, al ser la razón igual a $1/2$, que es positiva y menor que uno. Para ello, consideramos la sucesión de sumas parciales, $\{S_n\}$, definida, para cada natural $n \geq 1$, por:

$$S_n = \sum_{k=1}^n k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \Leftrightarrow$$

$$S_n = \frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \frac{3}{2^5} + \cdots + \frac{n}{2^{n+2}},$$

multiplicamos ambos miembros de esta última igualdad por la razón (que es $1/2$), quedando:

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^4} + \frac{2}{2^5} + \frac{3}{2^6} + \cdots + \frac{n}{2^{n+3}},$$

y restamos las dos igualdades miembro a miembro, operamos, y trasponemos, resultando:

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \frac{3}{2^5} + \cdots + \frac{n}{2^{n+2}} - \left(\frac{1}{2^4} + \frac{2}{2^5} + \frac{3}{2^6} + \cdots + \frac{n}{2^{n+3}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^3} + \left(\frac{2}{2^4} - \frac{1}{2^4} \right) + \left(\frac{3}{2^5} - \frac{2}{2^5} \right) + \left(\frac{4}{2^6} - \frac{3}{2^6} \right) + \cdots + \left(\frac{n}{2^{n+2}} - \frac{n-1}{2^{n+2}} \right) - \frac{n}{2^{n+3}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{n}{2^{n+3}} \Leftrightarrow S_n = \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{PG} - \frac{n}{2^{n+2}}.$$

Ahora bien, los sumandos señalados con PG en el segundo miembro de esta igualdad forman una progresión geométrica de razón $1/2$, cuyo primer elemento es $1/2^2$, por lo que, aplicando la conocida fórmula que permite sumar los primeros términos de una progresión geométrica, y operando, se sigue:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2} - 1} - \frac{n}{2^{n+2}} = \frac{\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^2}}{-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+2}} = \frac{\frac{2^n - 1}{2^{n+2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+2}} \Leftrightarrow$$

$$S_n = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+2}} - \frac{n}{2^{n+2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+2}},$$

y, tomando límite cuando n tiende a infinito, llegamos a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{k+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{k+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{2},$$

como queríamos demostrar, quedando así concluido el problema.

(Prueba de Universidad)

Problema 5.33

Se dispara sobre un blanco, sin limitar el número de disparos, hasta dar con él. Halla la esperanza matemática y la varianza del número de disparos efectuados, si la probabilidad de acertar en cada disparo es la misma e igual a p .

Consideremos la variable aleatoria $X \equiv \{\text{Número de disparos efectuados hasta hacer diana}\}$ y los sucesos $A = \{\text{Acertar en el blanco en un determinado lanzamiento}\}$ y $F = \{\text{Fallar un determinado disparo}\}$. Con esta notación, el problema consiste en calcular $E(X)$ y $\text{Var}(X)$, para lo cual necesitamos conocer la distribución de X , que es lo que vamos a determinar a continuación.

Es claro que X toma valores en el conjunto de los números naturales, sin incluir el cero, y que la probabilidad correspondiente a cada valor, teniendo en cuenta que la probabilidad de hacer blanco en un determinado disparo es siempre la misma (igual a p , por lo que la probabilidad de no hacer blanco en un disparo concreto es $1 - p$), y que no influye el resultado de un disparo en el de otro (hay independencia), viene dada por la siguiente lista:

$$P(X = 1) = P(A) = p,$$

$$P(X = 2) = P(FA) = (1 - p)p,$$

$$P(X = 3) = P(FFA) = (1 - p)^2 p,$$

$$P(X = 4) = P(FFFA) = (1 - p)^3 p,$$

y, en general, para cualquier número natural $k \geq 1$:

$$P(X = k) = P(\underbrace{FF \cdots F}_{k-1 \text{ veces}} A) = (1 - p)^{k-1} p,$$

lo que significa que X sigue una distribución geométrica de parámetro p . Así pues, al tratarse de una distribución conocida, podríamos utilizar las expresiones de sus parámetros, las cuales permitirían escribir:

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1 - p}{p^2},$$

y el problema estaría concluido.

Sin embargo, este modo de simplificar el problema puede resultar poco admisible (y menos ilustrativo), por lo que llevaremos a cabo el cálculo pedido de la manera «más natural», a partir de las definiciones. Observemos, asimismo, que la distribución de la variable del problema anterior también es de tipo geométrico, aunque precisaría de algunos «ajustes», tras los cuales podríamos también haber calculado la media pedida mediante el uso de las fórmulas correspondientes a este tipo de distribuciones.

Sustituyendo los valores encontrados en la fórmula por la que se define la esperanza matemática (o media), y extrayendo p como factor común, resulta:

$$E(X) = 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + 4 \cdot P(X=4) + \dots \Leftrightarrow$$

$$E(X) = p + 2(1-p)p + 3(1-p)^2p + 4(1-p)^3p + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1},$$

y estamos, como en el problema anterior, ante una serie aritmético-geométrica (de razón positiva y menor que uno), que podemos sumar haciendo uso del procedimiento general para este tipo de series. Sin embargo, a fin de ofrecer un método distinto al expuesto en el problema anterior, procederemos del modo que seguidamente se muestra.

Puesto que, para todo número natural $k \geq 1$, se verifica:

$$k(1-p)^{k-1} = -\frac{d}{dp}((1-p)^k),$$

podemos escribir la igualdad:

$$E(X) = p \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{d}{dp}((1-p)^k),$$

que, efectuando la suma de la serie y derivando posteriormente (en lugar de derivar primero y luego sumar), se transforma en:

$$E(X) = -p \cdot \frac{d}{dp} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \right),$$

dando lugar a una serie geométrica cuya razón es $1-p$, que es un número positivo y menor que uno, por lo que podemos sumarla usando la conocida fórmula, quedando:

$$E(X) = -p \cdot \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{1-(1-p)} \right).$$

Finalmente, operando y derivando, resulta:

$$E(X) = -p \cdot \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{p} \right) = -p \cdot \frac{-1 \cdot p - (1-p) \cdot 1}{p^2} = \frac{1}{p},$$

que, lógicamente, coincide con el valor antes comentado.

En cuanto a la varianza, a partir de la conocida fórmula $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$, aplicando la definición de $E(X^2)$, tenemos:

$$\text{Var}(X) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p \right) - \left(\frac{1}{p} \right)^2 = -\frac{1}{p^2} + p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1},$$

que, haciendo $k^2 = k^2 + k - k = k(k+1) - k$, y multiplicando, se convierte en:

$$\text{Var}(X) = -\frac{1}{p^2} + p \sum_{k=1}^{\infty} [k(k+1) - k] (1-p)^{k-1} \Leftrightarrow$$

$$\text{Var}(X) = -\frac{1}{p^2} + p \sum_{k=1}^{\infty} [k(k+1)(1-p)^{k-1} - k(1-p)^{k-1}],$$

de donde, «rompiendo» la serie en dos, se sigue:

$$\text{Var}(X) = -\frac{1}{p^2} + p \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}.$$

Ahora bien, el último sumando del segundo miembro es el opuesto de $E(X)$, por lo que podemos escribir:

$$\text{Var}(X) = -\frac{1}{p^2} + p \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - E(X) = -\frac{1}{p^2} + p \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p} \Leftrightarrow$$

$$\text{Var}(X) = -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + p \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1},$$

y el problema se reduce a sumar la serie presente en el segundo miembro, cuyo resultado denotaremos por S . Como vemos, se trata de una serie aritmético-geométrica de segundo grado, cuya razón es positiva y menor que uno, por lo que podríamos sumarla siguiendo el método general para este tipo de series, si bien, eludiendo de nuevo este modo de proceder, lo haremos de una manera parecida al cálculo anterior, pero empleando la segunda derivada en lugar de la primera, teniendo en cuenta que, como es claro, para cada número natural $k \geq 1$, se verifica la igualdad:

$$k(k+1)(1-p)^{k-1} = \frac{d^2}{dp^2} \left((1-p)^{k+1} \right).$$

Así, tenemos:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2}{dp^2} \left((1-p)^{k+1} \right) = \frac{d^2}{dp^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k+1} \right) = \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)} \right) = \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{1+p^2-2p}{p} \right) \Leftrightarrow$$

$$S = \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{1}{p} + p - 2 \right) = \frac{d}{dp} \left(-\frac{1}{p^2} + 1 \right) = \frac{2}{p^3},$$

y, por tanto:

$$\text{Var}(X) = -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \cancel{p} \cdot \frac{2}{p^3} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

(el mismo valor antes indicado), lo que concluye el problema.

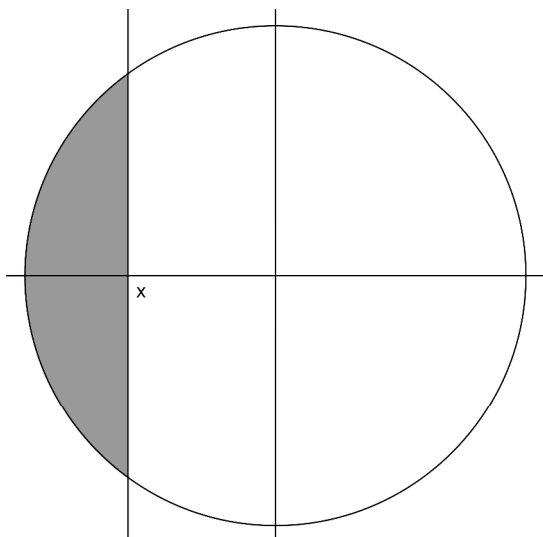
(Oposiciones de Secundaria, 1998)

Problema 5.34

Se elige un punto al azar en el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Halla la función de densidad de la abscisa del punto.

Hallaremos la función de densidad pedida, que denotaremos por f , mediante la determinación de la función de distribución asociada, F , ya que, como es sabido, para distribuciones continuas (que es el caso), se verifica $F' = f$.

Denotando por (X, Y) las coordenadas del punto elegido al azar, es claro que X pertenece al intervalo $[-1, 1]$, y que la función de distribución de la abscisa del punto es, por definición, $F(x) = P(X \leq x)$. Ahora bien, como cada punto del círculo puede ser elegido con la misma probabilidad, es claro que $P(X \leq x)$ es igual al cociente del área del segmento circular formado por los puntos cuya primera coordenada es menor o igual que x y el área del círculo dado (que es igual a π , puesto que su radio es uno). En el diagrama podemos ver la situación ante la que estamos.



Teniendo en cuenta la simetría de la figura, y que, como es claro, la semicircunferencia situada en la parte superior del eje OX se corresponde con la gráfica de la función:

$$g(t) = \sqrt{1-t^2},$$

podemos expresar el área del segmento circular sombreado como la integral definida:

$$2 \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} dt,$$

por lo que la probabilidad de que el punto elegido esté en el mismo, que es precisamente el valor de la función de distribución F en x, es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} dt.$$

Obsérvese, sin embargo, que no es necesario calcular la integral, puesto que no nos interesa determinar F, sino f. En efecto, dado que $F(-1) = 0$ (como es evidente), y que la función g es continua en $[-1, 1]$, estamos en condiciones de aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo integral a la función F, cuya tesis afirma que F es derivable en $[-1, 1]$, y su derivada, que es la densidad buscada, es la función:

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{\pi} \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} dt \right) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, \forall x \in [-1, 1].$$

Por último, para que f esté definida en toda la recta real, escribimos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

quedando así el problema concluido.

(Prueba de Universidad)

Problema 5.35

Dada la función:

$$f(x) = \frac{k}{1+x^2},$$

definida en toda la recta real, se pide:

- a) Determina k para que f sea una función de densidad.
- b) Halla la función de distribución.
- c) Calcula la probabilidad $P(-2 \leq X \leq 2)$.

Apartado a)

Como es sabido, para que una función continua f sea una función de densidad, es necesario que sea no negativa y que se verifique la igualdad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

En el caso que nos ocupa, es claro que f es no negativa si, y solo si, $k \geq 0$, e imponiendo que se satisfaga la condición:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{1+x^2} dx = 1,$$

calculando la integral inmediata del primer miembro, aplicando la regla de Barrow, operando y trasponiendo términos, llegamos a:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{1+x^2} dx = k \cdot (\arctg x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = k \cdot [\arctg(+\infty) - \arctg(-\infty)] = k \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = k\pi \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{1}{\pi},$$

que es el valor pedido de k , pues también satisface la condición de ser no negativo. De este modo, la función de densidad f queda dada, para todo real x , por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Apartado b)

Como es sabido, si F es la función de distribución asociada a la densidad f , siendo f una función continua (y, por tanto, integrable), entonces, se satisface la igualdad:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt ,$$

de manera que, integrando la función f dada, aplicando la regla de Barrow, y operando, resulta:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} (\arctg t) \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \cdot [\arctg x - \arctg(-\infty)] \Leftrightarrow$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \left(\arctg x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\arctg x}{\pi} + \frac{1}{2} ,$$

que es la función de distribución pedida y, al igual que f , está definida en todo $\mathbb{R}$.

Apartado c)

Como es sabido, dada una variable aleatoria X , definida en un espacio probabilístico (Ω, β, P) , la función de distribución asociada a X se construye mediante la fórmula $F(x) = P(X \leq x)$, satisfaciéndose, por tanto, como consecuencia de la aditividad de P , la igualdad $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$, puesto que, como es claro, se cumple $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) + P(X = a)$.

Ahora bien, si la variable X es continua, sucede que $P(X = a) = 0$, por lo que, en tal caso, tenemos la relación $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$, que, aplicándola en este caso concreto (es claro que X es continua, pues F lo es), se traduce en:

$$P(-2 \leq X \leq 2) = F(2) - F(-2) = \frac{\arctg 2}{\pi} + \frac{1}{2} - \left(\frac{\arctg(-2)}{\pi} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\arctg 2}{\pi} - \frac{\arctg(-2)}{\pi} ,$$

y, por ser la arcotangente una función impar, se sigue:

$$P(-2 \leq X \leq 2) = \frac{\arctg 2}{\pi} - \frac{-\arctg 2}{\pi} = \frac{\arctg 2}{\pi} + \frac{\arctg 2}{\pi} = \frac{2\arctg 2}{\pi} ,$$

que es la probabilidad pedida, lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Catedráticos de Institutos de Bachillerato, 1975, y examen de Universidad)

Problema 5.36

Determina k para que la siguiente función sea una función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

Tal y como hemos visto en el problema anterior, se trata de imponer la condición de que f sea no negativa (para lo cual es necesario y suficiente que sea $k \geq 0$, como es evidente), y que, además, se cumpla la igualdad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1,$$

que, en este caso, se convierte en:

$$\int_0^{+\infty} ke^{-kx} dx = 1,$$

puesto que solo hay densidad en la semirrecta $(0, +\infty)$, al ser f nula en el resto de la recta real.

Ahora bien, es claro que, para que la integral valga uno, debe ser $k \neq 0$ (si fuera $k = 0$, entonces, f sería la función idénticamente nula, y, en consecuencia, la integral también lo sería), por lo que ha de ser $k > 0$, de manera que, calculando la integral del primer miembro, aplicando la regla de Barrow, y operando, resulta:

$$\int_0^{+\infty} ke^{-kx} dx = k \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = k \left(-\frac{e^{-kx}}{k} \right) \Big|_0^{+\infty} = \cancel{k} \frac{-e^{-k(+\infty)} + e^{-k \cdot 0}}{\cancel{k}} = -e^{-\infty} + e^0 = -0 + 1 = 1,$$

lo que se traduce en que la integral vale uno, independientemente del valor de k , por lo que esta condición no supone ninguna restricción sobre k , que solo queda limitado, por tanto, por la relación $k > 0$. Dicho de otro modo, la función f es una función de densidad si, y solo si, $k > 0$, lo que concluye el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2000)

Problema 5.37

Sea X una variable aleatoria definida en el intervalo $[0,3]$ por la función $f(x) = kx$, y que toma el valor $x = 4$ con probabilidad $1/6$.

- a) Calcula el valor de k .
 b) Halla la función de distribución de la variable aleatoria X y represéntala.
 c) Sea Y una variable aleatoria independiente de X que se distribuye según una Bernoulli de parámetro $1/4$. Calcula la varianza de $X - Y$.

Apartado a)

Como vemos, se trata de una distribución mixta, ya que tiene una densidad continua en el intervalo $[0,3]$ y toma el valor discreto $x = 4$ con probabilidad positiva, no teniendo «peso» en el resto de la recta real. En consecuencia, debe verificarse la igualdad:

$$\int_0^3 f(x)dx + P(X = 4) = 1,$$

de donde, sustituyendo, aplicando la regla de Barrow, y trasponiendo, resulta:

$$\int_0^3 kx dx + \frac{1}{6} = 1 \Leftrightarrow k \int_0^3 x dx = 1 - \frac{1}{6} \Leftrightarrow k \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \frac{5}{6} \Leftrightarrow k \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow k = \frac{10}{54} = \frac{5}{27},$$

que es el valor pedido. De este modo, la densidad f , definida en el intervalo $[0,3]$, queda:

$$f(x) = \frac{5}{27}x,$$

que, como vemos, es no negativa en dicho intervalo, lo cual es exigible para que efectivamente sea una función de densidad.

Apartado b)

Denotemos por F la función de distribución. Entonces, por definición, se verifica:

$$F(x) = P(X \leq x),$$

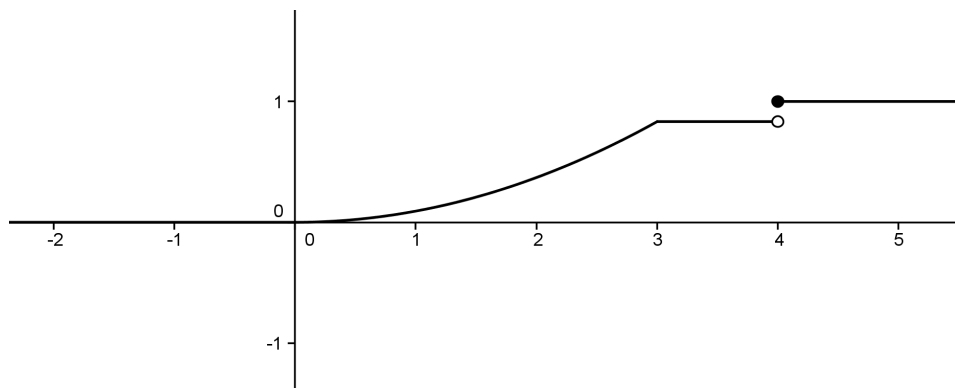
cuya expresión, como es claro, depende de si x está en la semirrecta abierta $(-\infty, 0)$, en el intervalo $[0,3]$, en el $(3,4)$, o en la semirrecta cerrada $[4, +\infty)$, por lo que podemos escribir F como una función a trozos:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{5}{27} \int_0^x t dt & \text{si } x \in [0, 3] \\ \frac{5}{27} \int_0^3 t dt & \text{si } x \in (3, 4) \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases},$$

de donde, aplicando la regla de Barrow, resulta:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{5}{54} x^2 & \text{si } x \in [0, 3] \\ \frac{5}{6} & \text{si } x \in (3, 4) \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases},$$

que es la función que pretendíamos determinar. En el diagrama podemos ver su gráfica, que también se pide en el enunciado.



Apartado c)

Al ser independientes las variables X e Y , por las propiedades de la varianza, se satisface la igualdad

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y),$$

por lo que, aplicando la conocida fórmula $\text{Var}(T) = E(T^2) - E(T)^2$, válida para cualquier variable aleatoria T , el problema se reduce a determinar el valor de $E(X^2)$, $E(X)$, $E(Y^2)$ y $E(Y)$, que es lo que haremos a continuación.

Para $E(X^2)$ y $E(X)$, por definición, tenemos:

$$E(X^2) = \int_0^3 x^2 f(x) dx + 4^2 \cdot P(X = 4); \quad E(X) = \int_0^3 x f(x) dx + 4 \cdot P(X = 4),$$

por lo que, sustituyendo, calculando las integrales definidas mediante la aplicación de la regla de Barrow, y operando, resulta:

$$E(X^2) = \int_0^3 x^2 \frac{5}{27} x dx + 4^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{27} \int_0^3 x^3 dx + \frac{8}{3} = \frac{5}{27} \left(\frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^3 + \frac{8}{3} = \frac{5}{27} \left(\frac{3^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) + \frac{8}{3} = \frac{77}{12},$$

$$E(X) = \int_0^3 x \frac{5}{27} x dx + 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{27} \int_0^3 x^2 dx + \frac{2}{3} = \frac{5}{27} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 + \frac{2}{3} = \frac{5}{27} \left(\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$$

Por otro lado, al ser Y una variable con distribución de Bernoulli de parámetro $1/4$, es claro que toma los valores 1 y 0 , con probabilidad $1/4$ y $3/4$, respectivamente, y, entonces, atendiendo también a la definición de la esperanza matemática, tenemos:

$$E(Y^2) = 1^2 \cdot P(Y = 1) + 0^2 \cdot P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{4},$$

$$E(Y) = 1 \cdot P(Y = 1) + 0 \cdot P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{4}.$$

A partir de los valores obtenidos, podemos escribir:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{77}{12} - \left(\frac{7}{3} \right)^2 = \frac{77}{12} - \frac{49}{9} = \frac{35}{36},$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16},$$

y, por último, sustituyendo, y operando, llegamos a:

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = \frac{35}{36} + \frac{3}{16} = \frac{167}{144},$$

lo que concluye el problema.

(Oposiciones de Secundaria, 2000)

Problema 5.38

Un autobús pasa por una parada en cualquier instante entre la una y las dos, siguiendo la ley de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \\ 0 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

- Comprueba que se trata de una función de densidad.
- Halla la probabilidad de que el autobús pase entre la una y media y las dos.
- Calcula la probabilidad de que pase exactamente a la una y cuarto.
- Determina la probabilidad de que pase entre la una y cinco y la una y diez.
- Obtén la función de distribución.

Apartado a)

Puesto que f solo tiene «peso» en el intervalo $[1,2]$, donde está definida por una función constante (positiva), y se verifica:

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 1 \cdot dx = x \Big|_1^2 = 2 - 1 = 1,$$

ya tenemos probado que se trata, efectivamente, de una función de densidad.

Apartado b)

Denotando por X la variable aleatoria continua cuya densidad es f , que indica la hora de paso del autobús, es claro que se trata de calcular la probabilidad de que X tome un valor comprendido entre 1,5 y 2, que, como es sabido, podemos determinar a partir de la igualdad:

$$P(1,5 \leq X \leq 2) = \int_{1,5}^2 f(x)dx,$$

de la que se sigue:

$$P(1,5 \leq X \leq 2) = \int_{1,5}^2 1 \cdot dx = x \Big|_{1,5}^2 = 2 - 1,5 = 0,5.$$

Apartado c)

Puesto que se trata de una variable continua, la probabilidad de que tome un valor concreto (puntual) es nula, por lo que la probabilidad de que pase exactamente a la una y cuarto es igual a cero.

Apartado d)

Dividiendo la hora en 12 períodos de 5 minutos cada uno, podemos ver que la una y cinco se corresponde con el valor $X = 1 + 1/12$, mientras que la una y diez se relaciona con $X = 1 + 2/12$. Así pues, la probabilidad de que el autobús pase entre la una y cinco y la una y diez es:

$$P\left(1 + \frac{1}{12} \leq X \leq 1 + \frac{2}{12}\right) = \int_{1+1/12}^{1+2/12} 1 \cdot dx = x \Big|_{1+1/12}^{1+2/12} = x - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

Apartado e)

Si denotamos por F la función de distribución, definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

resulta claro que se trata de la función a trozos dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \in [1, 2], \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

ya que, como hemos comentado, solo hay «peso» en el intervalo $[1, 2]$, y, además, para cualquier valor de x perteneciente a este intervalo, se verifica:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x 1 \cdot dt = t \Big|_1^x = x - 1,$$

quedando así el problema cerrado.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 5.39

La longitud de un tornillo se distribuye del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} k(x-1)(3-x) & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

siendo f la función de densidad. Solo son válidos los tornillos comprendidos entre 1,7 y 2,4. Calcula la probabilidad de que una pieza determinada sea útil. Si las piezas se empaquetan en lotes de 5 unidades y se acepta el lote si contiene menos de 2 piezas defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado?

En primer lugar, calcularemos el valor de k , imponiendo la condición:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

que es exigible, al ser f una función de densidad.

Así, teniendo en cuenta que f solo tiene «peso» en el intervalo $[1,3]$, operando, aplicando la regla de Barrow, y trasponiendo, resulta:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 &\Leftrightarrow \int_1^3 k(x-1)(3-x)dx = 1 \Leftrightarrow k \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = 1 \Leftrightarrow \\ k \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right) \Big|_1^3 &= 1 \Leftrightarrow k \left(-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right) = 1 \Leftrightarrow \\ \frac{4}{3}k &= 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Obsérvese que la función f es no negativa, pues si x está en el intervalo $[1,3]$, los factores variables presentes en la definición de f son no negativos, mientras que la constante k es positiva.

Ahora, puesto que solo son válidos los tornillos comprendidos entre 1,7 y 2,4; la probabilidad de que un tornillo determinado sea útil es igual a la probabilidad de que la variable aleatoria determinada por la densidad f , que denotaremos por X , esté comprendida entre estos dos valores, por lo que dicha probabilidad, digamos p , está dada por:

$$p = P(1,7 \leq X \leq 2,4) = \int_{1,7}^{2,4} f(x)dx.$$

Teniendo en cuenta el valor de k obtenido, y el cálculo de una primitiva de f antes efectuado, aplicando la regla de Barrow, y operando, resulta:

$$p = \frac{3}{4} \int_{1,7}^{2,4} (x-1)(3-x) dx = \frac{3}{4} \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right) \Big|_{1,7}^{2,4} \Leftrightarrow$$

$$p = \frac{3}{4} \left(-\frac{(2,4)^3}{3} + 2(2,4)^2 - 3(2,4) + \frac{(1,7)^3}{3} - 2(1,7)^2 + 3(1,7) \right) = 0,50225 ,$$

que es la probabilidad pedida.

Para la segunda parte del problema, consideremos un lote formado por cinco tornillos, que supondremos numerados del 1 al 5. Se trata de calcular la probabilidad de que el lote sea rechazado (suceso que denotaremos por R), que es igual a la probabilidad de que el número de tornillos defectuosos incluidos en él sea mayor que uno (el lote se acepta solo si el número de tornillos defectuosos es menor —estrictamente— que 2, es decir, si hay 1 tornillo inservible o ninguno).

Si, para cada i comprendido entre 1 y 5, definimos las variables aleatorias:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el tornillo } i \text{ es defectuoso} \\ 0 & \text{si el tornillo } i \text{ es correcto} \end{cases}$$

y la variable:

$$X = \sum_{i=1}^5 X_i ,$$

es claro que X mide la cantidad de tornillos defectuosos presentes en el lote, por lo que se verifica la igualdad $P(R) = P(X > 1)$, y, entonces, el problema se reduce al cálculo de $P(X > 1)$, si bien determinaremos la probabilidad de su contrario (por resultar más sencillo) y emplearemos la conocida fórmula:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) .$$

Puesto que, para cada i comprendido entre 1 y 5, las variables X_i siguen una distribución de Bernoulli de parámetro $q = 1 - p = 1 - 0,50225 = 0,49775$ (el complemento a uno de la probabilidad de que un tornillo determinado sea útil, antes calculada) y son independientes (la calidad de un tornillo del lote no influye en la calidad de los demás), podemos decir que la variable X sigue una distribución binomial de tipo $(5, q)$.

Por tanto, se verifica:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{5}{0} q^0 p^{5-0} + \binom{5}{1} q^1 p^{5-1} \Leftrightarrow$$

$$P(X \leq 1) = (0,50225)^5 + 5 \cdot 0,49775 \cdot (0,50225)^4 \cong 0,190325,$$

y, sustituyendo, resulta:

$$P(R) = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) \cong 1 - 0,190325 = 0,809675,$$

lo que cierra el problema.

(Oposiciones de Catedráticos de Institutos de Bachillerato, 1977)

Problema 5.40

La duración en minutos de una llamada telefónica se asimila a una variable aleatoria X cuya función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{3}e^{-2x/3} - \frac{1}{3}e^{-x/3} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Se pide:

- Demuestra que, efectivamente, F es una función de distribución, y que, además, es continua.
- La función de densidad de X .
- La duración media de una llamada telefónica.
- La probabilidad de que una llamada dure entre 3 y 6 minutos.
- La probabilidad de que una llamada iniciada hace 3 minutos no dure más de 6.

Apartado a)

Para que F sea una función de distribución continua, debe ser continua, no decreciente, tomar valores no negativos, y satisfacer las igualdades:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Así pues, el problema consiste en demostrar que se cumplen todas estas condiciones, que es lo que haremos a continuación.

En efecto, al ser cada función parcial de F continua en su correspondiente dominio (como es obvio), y ser iguales los límites laterales en el punto de nexo, $x = 0$, coincidiendo estos además con el valor $F(0) = 0$, pues:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2}{3} e^{-2x/3} - \frac{1}{3} e^{-x/3} \right) = 1 - \frac{2}{3} e^{-2 \cdot 0/3} - \frac{1}{3} e^{-0/3} = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0,$$

tenemos que F es continua en toda la recta real, y, derivando a trozos, obtenemos la función:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{4}{9} e^{-2x/3} + \frac{1}{9} e^{-x/3} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Observemos que esta función g coincide con la derivada de F , salvo en $x = 0$, donde F no es derivable, puesto que g no es continua en dicho punto, ya que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4}{9} e^{-2x/3} + \frac{1}{9} e^{-x/3} \right) = \frac{4}{9} e^{-2 \cdot 0/3} + \frac{1}{9} e^{-0/3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9},$$

mientras que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0.$$

Ahora, puesto que g es nula en $(-\infty, 0)$, toma valores positivos en $(0, +\infty)$, y coincide con F' en ambas semirrectas abiertas, podemos afirmar que F es no decreciente, y como, además, se satisface la igualdad $F(0) = 0$, tenemos también que F es no negativa.

En cuanto a la igualdad de los límites, es trivial que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0,$$

y, por otro lado:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3} e^{-2x/3} - \frac{1}{3} e^{-x/3} \right) = 1 - \frac{2}{3} e^{-2 \cdot \infty/3} - \frac{1}{3} e^{-\infty/3} = 1 - 0 - 0 = 1,$$

y ya tenemos demostrado que F es una función de distribución continua.

Apartado b)

Como es sabido, la función de densidad de una variable aleatoria se obtiene derivando la función de distribución, si es que esta es derivable. Así pues, en el caso que nos ocupa, la función de densidad, que denotaremos por f , coincide con la derivada de F , salvo en $x = 0$, donde F' no está definida.

Ahora bien, una función de densidad debe tener como dominio toda la recta real, por lo que, teniendo en cuenta que si ampliamos la función F' por continuidad a la izquierda en $x = 0$, se sigue cumpliendo, para cualquier número real x , la igualdad:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt ,$$

podemos concluir este apartado escribiendo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{4}{9}e^{-2x/3} + \frac{1}{9}e^{-x/3} & \text{si } x > 0 \end{cases} ,$$

que es la densidad pedida, la cual coincide, como vemos, con la función que hemos denotado por g en el apartado anterior. En realidad, podríamos haber introducido directamente la función f en ese apartado, si bien no lo hemos hecho para destacar que f no coincide exactamente con la derivada de F , al no ser esta función derivable en $x = 0$.

Apartado c)

La duración media de una llamada telefónica viene dada por la esperanza matemática de la variable X , $E(X)$, que podemos calcular a partir de la definición:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx ,$$

de la que, teniendo en cuenta que f solo tiene «peso» en el semieje positivo, y aplicando las propiedades lineales de la integral, llegamos a:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \left(\frac{4}{9}e^{-2x/3} + \frac{1}{9}e^{-x/3} \right) dx = \frac{4}{9} \int_0^{+\infty} xe^{-2x/3} dx + \frac{1}{9} \int_0^{+\infty} xe^{-x/3} dx .$$

Para calcular por partes estas dos integrales, hacemos las identificaciones:

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-ax/3} \rightarrow v = -\frac{3}{a}e^{-ax/3} \end{cases} ,$$

para $a = 2$ y $a = 1$, respectivamente, resultando:

$$E(X) = \frac{4}{9} \left(-\frac{3x}{2} e^{-2x/3} \Big|_0^{+\infty} + \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2x/3} dx \right) + \frac{1}{9} \left(-3xe^{-x/3} \Big|_0^{+\infty} + 3 \int_0^{+\infty} e^{-x/3} dx \right),$$

y, entonces, aplicando la regla de Barrow, y operando, se sigue:

$$E(X) = \frac{4}{9} \left(-\frac{3x}{2} e^{-2x/3} \Big|_0^{+\infty} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} e^{-2x/3} \Big|_0^{+\infty} \right) + \frac{1}{9} \left(-3xe^{-x/3} \Big|_0^{+\infty} - 3 \cdot 3e^{-x/3} \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{\cancel{4}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{4}} + \frac{1}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{9}} = 2,$$

donde hemos tenido en cuenta también que, por la regla de L'Hôpital, se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2} e^{-2x/3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2e^{2x/3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2 \cdot \frac{2}{3} e^{2x/3}} = \frac{3}{+\infty} = 0.$$

Así pues, a la vista del resultado obtenido, podemos decir que la duración media de una llamada es de 2 minutos.

Apartado d)

Se trata de calcular la probabilidad $P(3 \leq X \leq 6)$, para lo cual emplearemos la función de distribución, puesto que, como es sabido, se verifica la igualdad:

$$P(3 \leq X \leq 6) = F(6) - F(3),$$

de la que, sustituyendo, y operando, llegamos a:

$$P(3 \leq X \leq 6) = \left(\cancel{1} - \frac{2}{3} e^{-2 \cdot 6/3} - \frac{1}{3} e^{-6/3} \right) - \left(\cancel{1} - \frac{2}{3} e^{-2 \cdot 3/3} - \frac{1}{3} e^{-3/3} \right) \Leftrightarrow$$

$$P(3 \leq X \leq 6) = -\frac{2}{3} e^{-4} - \frac{1}{3} e^{-2} + \frac{2}{3} e^{-2} + \frac{1}{3} e^{-1} = -\frac{2}{3} e^{-4} + \frac{1}{3} e^{-2} + \frac{1}{3} e^{-1} \cong 0,15553.$$

Apartado e)

Si consideramos una llamada que ha comenzado hace 3 minutos, es obvio que su duración será, como mínimo, de 3 minutos, por lo que se debe verificar la desigualdad $X \geq 3$, y, entonces, el problema consiste en hallar la probabilidad de que sea $X \leq 6$, condicionada al hecho de que es $X \geq 3$.

Así, haciendo uso de la definición de la probabilidad condicionada, empleando el resultado obtenido en el apartado anterior, escribiendo la probabilidad $P(X \geq 3)$ como

el complemento a uno de la probabilidad del suceso contrario (para lo cual utilizaremos también la función de distribución), y operando, tenemos:

$$P(X \leq 6 / X \geq 3) = \frac{P(3 \leq X \leq 6)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(3 \leq X \leq 6)}{1 - P(X < 3)} = \frac{P(3 \leq X \leq 6)}{1 - F(3)} \Leftrightarrow$$

$$P(X \leq 6 / X \geq 3) = \frac{-\frac{2}{3}e^{-4} + \frac{1}{3}e^{-2} + \frac{1}{3}e^{-1}}{1 - \left(1 - \frac{2}{3}e^{-2/3} - \frac{1}{3}e^{-3/3}\right)} = \frac{-\frac{2}{3}e^{-4} + \frac{1}{3}e^{-2} + \frac{1}{3}e^{-1}}{\frac{2}{3}e^{-2} + \frac{1}{3}e^{-1}} \cong 0,73069.$$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 5.41

Se considera un espacio de probabilidad (Ω, β, P) , donde Ω es no vacío y finito. Una variable aleatoria real X toma los valores 1, 2, 3 y 6 con la ley de probabilidad $P(X = n) = \lambda/n$. Se pide:

a) Calcula λ , la esperanza de X y su varianza.

b) Se considera la variable aleatoria $Y = (X - 3)^2$. Calcula el coeficiente de correlación de X e Y .

Apartado a)

A partir de la igualdad $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 6) = 1$, expresando el valor de cada probabilidad conforme se indica en el enunciado, operando, y trasponiendo, tenemos:

$$\frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{6} = 1 \Leftrightarrow \frac{6+3+2+1}{6}\lambda = 1 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2},$$

que es el valor pedido.

Para calcular la esperanza de X , empleamos la definición, las expresiones de la probabilidad dadas en el enunciado, y el valor obtenido para λ , resultando:

$$E(X) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 6 \cdot P(X = 6) \Leftrightarrow$$

$$E(X) = 1 \frac{\lambda}{1} + \cancel{2} \frac{\lambda}{\cancel{2}} + \cancel{3} \frac{\lambda}{\cancel{3}} + \cancel{6} \frac{\lambda}{\cancel{6}} = 4\lambda = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Para determinar la varianza de X , nos servimos de la conocida fórmula:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2,$$

para lo cual precisamos calcular $E(X^2)$. Aplicando la definición y los datos del enunciado, y operando, llegamos a:

$$E(X^2) = 1^2 \cdot P(X=1) + 2^2 \cdot P(X=2) + 3^2 \cdot P(X=3) + 6^2 \cdot P(X=6) \Leftrightarrow$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{\lambda}{1} + 2^2 \cdot \frac{\lambda}{2} + 3^2 \cdot \frac{\lambda}{3} + 6^2 \cdot \frac{\lambda}{6} = \lambda + 2\lambda + 3\lambda + 6\lambda = 12\lambda = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6,$$

y, en consecuencia:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6 - 2^2 = 2.$$

Apartado b)

Si denotamos por r el coeficiente de correlación de X e Y , aplicando la definición, tenemos

$$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}},$$

siendo, también por definición:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

la covarianza de X e Y .

Como podemos observar, para calcular $\text{Cov}(X, Y)$, necesitamos conocer la distribución de la variable Y , esto es, hace falta saber qué valores toma y qué probabilidad tiene de tomar cada uno de ellos, para lo cual tendremos en cuenta la distribución de X y la fórmula por la que se define Y .

Así pues, si $X = 1$, tenemos $Y = (X - 3)^2 = (1 - 3)^2 = 4$, siendo, en consecuencia, $P(Y = 4) = P(X = 1) = 1/2$.

Si $X = 2$, entonces, $Y = (X - 3)^2 = (2 - 3)^2 = 1$, verificándose, por tanto, la igualdad $P(Y = 1) = P(X = 2) = \lambda/2 = 1/4$.

Para $X = 3$, resulta $Y = (X - 3)^2 = (3 - 3)^2 = 0$, lo cual sucede con probabilidad $P(Y = 0) = P(X = 3) = \lambda/3 = 1/6$.

Por último, tomando $X = 6$, resulta $Y = (X - 3)^2 = (6 - 3)^2 = 9$, siendo, en este caso, $P(Y = 9) = P(X = 6) = \lambda/6 = 1/12$.

Por tanto, la variable Y toma los valores 4, 1, 0 y 9, con probabilidad $1/2$, $1/4$, $1/6$ y $1/12$, respectivamente, por lo que podemos escribir:

$$E(XY) = 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot 9 \cdot \frac{1}{12} = 7.$$

Por otro lado, para hallar $\text{Var}(Y)$, hemos de calcular primero $E(Y^2)$ y $E(Y)$ (este último valor también lo necesitamos para calcular la covarianza de X e Y), que, por definición, resultan ser:

$$E(Y^2) = 4^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 9^2 \cdot \frac{1}{12} = 8 + \frac{1}{4} + \frac{27}{4} = 15,$$

$$E(Y) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{12} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 3,$$

de donde se sigue:

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 15 - 3^2 = 6.$$

Finalmente, sustituyendo los valores obtenidos, y operando, queda:

$$r = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} = \frac{7 - 2 \cdot 3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 5.42

En el recinto R determinado por $0 \leq x \leq 1$, $2 \leq y \leq 4$, está definida una distribución de una variable aleatoria bidimensional cuya función de densidad conjunta es:

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha xy & \text{si } (x, y) \in R \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin R \end{cases}.$$

Se pide:

- El valor del parámetro α .
- La función de distribución conjunta.
- Estudia la dependencia o independencia de las variables X e Y .
- Las medias marginales de X e Y .
- El coeficiente de correlación.

Apartado a)

Según la definición dada, f solo tiene «peso» en el conjunto $R = [0, 1] \times [2, 4]$, por lo que, al ser una función de densidad, debe satisfacerse la igualdad:

$$\int_R f(x, y) d(x, y) = 1,$$

que, en virtud del teorema de Fubini, es equivalente a:

$$\int_0^1 \left(\int_2^4 f(x, y) dy \right) dx = 1,$$

y, entonces, sustituyendo, aplicando la propiedad lineal de la integral y la regla de Barrow, operando, y trasponiendo, se sigue:

$$\int_0^1 \left(\int_2^4 \alpha xy dy \right) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \alpha x \left(\int_2^4 y dy \right) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \alpha x \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_2^4 dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 \alpha x \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 6\alpha x dx = 1 \Leftrightarrow 6\alpha \int_0^1 x dx = 1 \Leftrightarrow 6\alpha \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$6\alpha \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 1 \Leftrightarrow 3\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3},$$

que es el valor pedido.

Apartado b)

La función de distribución conjunta, que denotaremos por F , es, por definición:

$$F(x, y) = \int_{(-\infty, x] \times (-\infty, y]} f(s, t) d(s, t),$$

que, de nuevo por el teorema de Fubini, podemos escribir como:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f(s, t) dt \right) ds,$$

o bien como:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^x f(s, t) ds \right) dt.$$

Ahora bien, como la densidad f solo tiene «peso» en R , para determinar el valor de la función de distribución conjunta en un punto de coordenadas (x, y) , hemos de distinguir distintos casos, según el punto se encuentre en una u otra de las regiones del plano dadas por:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y < 2\},$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 1; 2 \leq y \leq 4\},$$

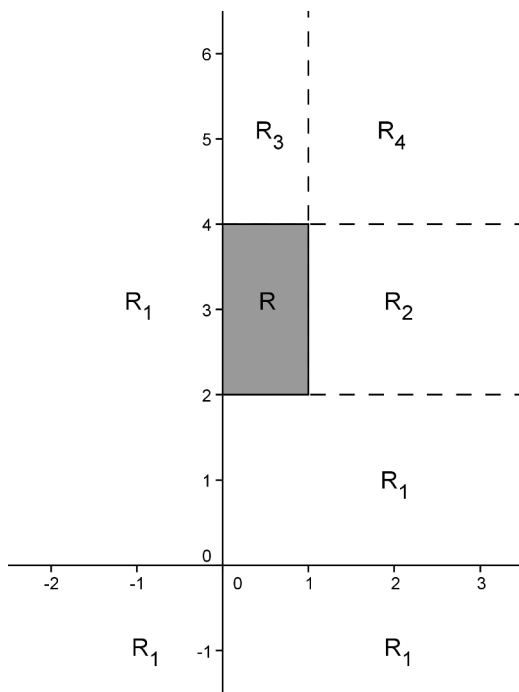
$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, y > 4\},$$

$$R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 1, y > 4\},$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1; 2 \leq y \leq 4\},$$

mostradas en el gráfico.

La necesidad de diferenciar entre unas regiones y otras se debe a las distintas situaciones del conjunto que resulta al hacer la intersección de R con $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$, el cual tenemos que considerar, ya que, para calcular $F(x, y)$, estamos integrando en la región $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$, pero solo hay «peso» en R .



Así, si (x, y) pertenece a R_1 , entonces, es claro que $F(x, y) = 0$, puesto que, en este caso, el conjunto $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$ no tiene puntos en común con R , por lo que f es nula en toda la región considerada, y, en consecuencia, también su integral.

Si (x, y) está en R_2 , entonces, teniendo en cuenta el valor de α , la posición relativa de R y el conjunto $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$, aplicando la regla de Barrow, y operando, resulta:

$$F(x, y) = \int_0^1 \left(\int_2^y \frac{1}{3} \, t \, dt \right) ds = \int_0^1 \frac{1}{3} s \left(\int_2^y t \, dt \right) ds = \int_0^1 \frac{1}{3} s \left(\frac{y^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) ds = \int_0^1 \frac{y^2 - 4}{6} s \, ds,$$

y, al ser considerada y como una constante al integrar respecto de s, se sigue:

$$F(x, y) = \frac{y^2 - 4}{6} \int_0^1 s ds = \frac{y^2 - 4}{6} \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{y^2 - 4}{12}.$$

Si (x, y) se encuentra en R_3 , entonces, según la posición relativa de R y el conjunto $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$, procediendo como antes, tenemos:

$$F(x, y) = \int_0^x \left(\int_2^4 \frac{1}{3} s dt \right) ds = \int_0^x \frac{1}{3} s \left(\int_2^4 t dt \right) ds = \int_0^x \frac{1}{3} s \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) ds = \int_0^x 2s ds = x^2 - 0^2 = x^2.$$

Si (x, y) pertenece a R_4 , entonces, R está incluido en el conjunto $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$, por lo que estamos considerando la integral de f en todo R , y, en consecuencia, se verifica $F(x, y) = 1$, por las propiedades de la función de densidad.

Por último, si (x, y) se elige dentro de R , actuando como en el segundo caso considerado, y teniendo en cuenta los resultados en él obtenidos, llegamos a:

$$F(x, y) = \int_0^x \left(\int_2^y \frac{1}{3} s dt \right) ds = \int_0^x \frac{y^2 - 4}{6} s ds = \frac{y^2 - 4}{6} \int_0^x s ds = \frac{y^2 - 4}{6} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{x^2 y^2 - 4x^2}{12}.$$

Así pues, recapitulando, F es la función a trozos dada por:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in R_1 \\ \frac{y^2 - 4}{12} & \text{si } (x, y) \in R_2 \\ x^2 & \text{si } (x, y) \in R_3, \\ \frac{x^2 y^2 - 4x^2}{12} & \text{si } (x, y) \in R \\ 1 & \text{si } (x, y) \in R_4 \end{cases}$$

lo que da respuesta a este apartado.

Apartado c)

Como es sabido, las variables X e Y son independientes si, y solo si, se verifica la igualdad:

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

donde f_X y f_Y son las densidades marginales de X e Y , respectivamente, que están definidas por:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Por tanto, el problema consiste en determinar las expresiones de las densidades marginales, f_X y f_Y , y comprobar si su producto coincide o no con la función de densidad conjunta, f . En el caso que nos ocupa, puesto que f solo tiene «peso» en R , tenemos:

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_2^4 f(x,y)dy & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^1 f(x,y)dx & \text{si } 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

Ahora, como:

$$f_X(x) = \int_2^4 f(x,y)dy = \int_2^4 \frac{1}{3}xydy = 2x$$

(a partir de los cálculos realizados en el apartado anterior) y:

$$f_Y(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 \frac{1}{3}xydx = \frac{1}{3}y \int_0^1 xdx = \frac{1}{3}y \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{y}{6},$$

sustituyendo, resulta:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{6} & \text{si } 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

de donde, multiplicando, llegamos a:

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} 2x \cdot \frac{y}{6} & \text{si } 0 \leq x \leq 1; 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

es decir:

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}xy & \text{si } (x,y) \in R \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

por lo que, en efecto, el producto de las densidades marginales coincide con la densidad conjunta, siendo, por tanto, independientes las variables X e Y .

Obsérvese que podríamos haber resuelto este apartado empleando la función de distribución en lugar de la de densidad, esto es, en lugar de comprobar la igualdad $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, como hemos hecho, verificar que se cumple $F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$,

siendo F_X y F_Y las funciones de distribución marginales de X e Y , respectivamente, las cuales están definidas por:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s)ds = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)dt \right) ds, \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)ds \right) dt.$$

En general, no hay una ventaja substancial entre un procedimiento u otro. Sin embargo, en el caso que nos ocupa, era realmente más sencillo hacer la comprobación con las funciones de distribución marginales, pues, en realidad, ya las habíamos hallado en el apartado anterior, puesto que F_X coincide con F para los puntos tomados en R_3 , mientras que F_Y tiene la expresión de F para los puntos de R_2 , ya que, por definición:

$$F_X(x) = \int_0^x \left(\int_2^4 \frac{1}{3} s dt \right) ds, \quad F_Y(y) = \int_2^y \left(\int_0^1 \frac{1}{3} t ds \right) dt = \int_0^1 \left(\int_2^y \frac{1}{3} s dt \right) ds,$$

que son, precisamente, las integrales que habíamos calculado en el apartado anterior, cuyos valores permiten escribir:

$$F_X(x) = x^2, \quad F_Y(y) = \frac{y^2 - 4}{12},$$

dentro de los intervalos $[0,1]$ y $[2,4]$, respectivamente, y, entonces:

$$F_X(x) \cdot F_Y(y) = x^2 \cdot \frac{y^2 - 4}{12} = \frac{x^2 y^2 - 4x^2}{12},$$

expresión que coincide con la función de distribución conjunta en R , como también habíamos visto en el apartado anterior, lo que se traduce en que, como ya habíamos demostrado, las variables X e Y son independientes.

La razón por la que se ha presentado la resolución anterior, basada en las funciones de densidad, pese a ser más extensa que esta, estriba en el interés de mostrar el procedimiento para calcular las funciones de densidad marginales a partir de la conjunta, además de tratarse de un procedimiento general para comprobar la dependencia o independencia de variables aleatorias.

Por otra parte, es necesario remarcar el hecho de que el cálculo de f_X y f_Y a partir de F_X y F_Y (que realmente conocíamos) es muy sencillo, puesto que, para conseguir una función de densidad continua a partir de su función de distribución, no hay más que derivar, como es sabido. En este caso concreto, derivando las funciones de distribución marginales, tenemos:

$$f_X(x) = F'_X(x) = 2x, \quad f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{2y}{12} = \frac{y}{6},$$

que, obviamente, son los resultados obtenidos por el primer método.

Independientemente de la forma de demostrar la independencia de X e Y , el conocimiento de las funciones de densidad marginales es necesario para resolver el siguiente apartado, razón por la que hemos indicado cómo calcularlas a partir de las funciones de distribución marginales, por si no hubiéramos procedido como al principio del apartado.

Apartado d)

Por definición, las medias marginales de X e Y , denotadas respectivamente por $E(X)$ y $E(Y)$, vienen dadas por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx, \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy,$$

así que, a partir de las funciones de densidad marginales obtenidas en el apartado anterior, resulta:

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^2 dx = 2 \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{2}{3},$$

$$E(Y) = \int_2^4 y \cdot \frac{y}{6} dy = \frac{1}{6} \int_2^4 y^2 dy = \frac{1}{6} \left(\frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} \right) = \frac{56}{18} = \frac{28}{9}.$$

Apartado e)

Como es sabido, en general, si dos variables aleatorias son independientes, entonces, están incorreladas, por lo que el coeficiente de correlación de ambas es nulo. Así pues, como X e Y son independientes, según hemos visto en un apartado anterior, resulta que su coeficiente de correlación es igual a cero, lo que concluye el apartado.

Sin embargo, a fin de ilustrar el procedimiento general que habría de seguirse para determinar el coeficiente de correlación de las variables X e Y , vamos a dar su definición, y a calcular los valores que serían necesarios.

El coeficiente de correlación de X e Y , que denotaremos por r , está definido por:

$$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}},$$

si bien, teniendo en cuenta la definición de la covarianza y la conocida igualdad:

$$\text{Var}(T) = E(T^2) - E(T)^2,$$

válida para cualquier variable T , podemos hallarlo mediante la fórmula:

$$r = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2}}, \quad (I)$$

por lo que, en un caso general, habría que efectuar el cálculo de estas esperanzas matemáticas y, posteriormente, realizar las operaciones indicadas. Como en el apartado anterior ya hemos calculado $E(X)$ y $E(Y)$, mostramos a continuación cómo calcular las restantes.

Aplicando la definición, haciendo uso de las propiedades de la integral y de la regla de Barrow, y operando, tenemos:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_2^4 xy \frac{1}{3} xy dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 \left(\int_2^4 y^2 dy \right) dx \Leftrightarrow$$

$$E(XY) = \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 \left(\frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} \right) dx = \frac{56}{9} \int_0^1 x^2 dx = \frac{56}{9} \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{56}{27},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx = 2 \int_0^1 x^3 dx = 2 \left(\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) = \frac{1}{2},$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_2^4 y^2 \cdot \frac{y}{6} dy = \frac{1}{6} \int_2^4 y^3 dy = \frac{1}{6} \left(\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} \right) = 10.$$

Así pues, el cálculo de r se culminaría sustituyendo estos valores en (I), y operando, lo que daría lugar a:

$$r = \frac{\frac{56}{27} - \frac{2}{3} \cdot \frac{28}{9}}{\sqrt{\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \sqrt{10 - \left(\frac{28}{9}\right)^2}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{1}{18}} \sqrt{\frac{26}{81}}} = 0,$$

resultado que ya conocíamos.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Problema 5.43

Sea X una variable aleatoria binomial, $X \approx Bi(2, 1/2)$, y sea (X_1, X_2) una muestra aleatoria simple bidimensional de la variable X . Se pide:

- El espacio muestral y las probabilidades de cada uno de los sucesos.
- La distribución de la media muestral.
- La esperanza matemática de la media muestral.

Apartado a)

Al ser X una variable aleatoria con distribución binomial de tipo $(2, 1/2)$, es claro que toma los valores del conjunto $\Omega = \{0, 1, 2\}$, siguiendo la ley de probabilidad:

$$P(X = k) = \binom{2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k} = \binom{2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \binom{2}{k}, \text{ para } k = 0, 1, 2.$$

Por otro lado, (X_1, X_2) es una muestra aleatoria simple bidimensional de X , por lo que tanto X_1 como X_2 deben tomar valores en Ω , y, en consecuencia, el espacio muestral pedido es:

$$E = \Omega^2 = \Omega \times \Omega = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}.$$

En cuanto a la probabilidad de cada suceso de este espacio muestral E , dados i y j comprendidos entre 0 y 2, teniendo en cuenta que hay independencia en la elección de X_1 y X_2 (por ser la muestra aleatoria simple, la elección se lleva a cabo siempre en las mismas condiciones, por lo que un resultado no influye en el otro), y empleando la expresión obtenida para las probabilidades, resulta:

$$P(i, j) = P(X_1 = i, X_2 = j) = P(X_1 = i) \cdot P(X_2 = j) = \frac{1}{4} \binom{2}{i} \cdot \frac{1}{4} \binom{2}{j} = \frac{1}{16} \binom{2}{i} \binom{2}{j}.$$

Apartado b)

Si consideramos la media muestral, denotada por M y definida por:

$$M = \frac{X_1 + X_2}{2},$$

haciendo que el par (X_1, X_2) recorra todo el espacio muestral E , podemos observar que M toma los valores del conjunto $\{0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$, con las probabilidades que se listan a continuación, teniendo en cuenta los distintos elementos de E que pueden generar cada valor de M y la expresión de sus probabilidades:

$$P(M=0) = P(0,0) = \frac{1}{16} \binom{2}{0} \binom{2}{0} = \frac{1}{16},$$

$$P\left(M = \frac{1}{2}\right) = P(0,1) + P(1,0) = \frac{1}{16} \binom{2}{0} \binom{2}{1} + \frac{1}{16} \binom{2}{1} \binom{2}{0} = 2 \frac{1}{16} + 2 \frac{1}{16} = \frac{1}{4},$$

$$P(M=1) = P(0,2) + P(1,1) + P(2,0) = \frac{1}{16} \binom{2}{0} \binom{2}{2} + \frac{1}{16} \binom{2}{1} \binom{2}{1} + \frac{1}{16} \binom{2}{2} \binom{2}{0} \Leftrightarrow$$

$$P(M=1) = \frac{1}{16} + 4 \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8},$$

$$P\left(M = \frac{3}{2}\right) = P(1,2) + P(2,1) = \frac{1}{16} \binom{2}{1} \binom{2}{2} + \frac{1}{16} \binom{2}{2} \binom{2}{1} = 2 \frac{1}{16} + 2 \frac{1}{16} = \frac{1}{4},$$

$$P(M=2) = P(2,2) = \frac{1}{16} \binom{2}{2} \binom{2}{2} = \frac{1}{16}.$$

Apartado c)

Calcularemos la esperanza matemática de la variable M , que es la media muestral, de dos maneras distintas: a partir de la definición, y haciendo uso de diversos resultados teóricos.

Según la definición de la esperanza matemática, teniendo en cuenta la distribución de M obtenida en el apartado anterior, resulta:

$$E(M) = 0 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

En cuanto al otro método, a partir de la definición de M , aplicando las propiedades lineales de la esperanza matemática, podemos escribir:

$$E(M) = E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2),$$

de donde, teniendo presente que X_1 , X_2 y X están idénticamente distribuidas (toman los mismos valores, con la misma probabilidad, lo que implica que tienen la misma esperanza matemática), se sigue:

$$E(M) = \frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{2}E(X) = E(X),$$

lo que significa que la esperanza matemática de la media muestral coincide con la esperanza matemática de la variable X .

Ahora bien, puesto que X sigue una distribución binomial de tipo $(2, 1/2)$, resulta $E(X) = 2 \cdot 1/2 = 1$ (recordemos que la esperanza matemática de una distribución binomial puede calcularse como el producto de sus dos parámetros), por lo que $E(M) = 1$, valor que, lógicamente, coincide con el obtenido por el otro camino.

(Oposiciones de Secundaria y examen de Universidad)

Nota final

Si quieres contactar con el autor, para hacer comentarios o sugerencias, puedes enviar un correo electrónico a la siguiente dirección:

odisbaum@hotmail.com

Los gráficos y la imagen de la portada han sido realizados con GeoGebra, excepto los correspondientes al ajedrez, que están configurados con autoformas de Word. Dicha imagen de la portada recrea dos famosos problemas matemáticos: el problema de los cuatro colores y el problema número 59 de *El Cuaderno Escocés*. Se propone al lector que interprete el significado de los arcos de circunferencia que se asemejan a espirales.

