

¡APRUEBE SU EXAMEN CON SCHAUM!

Señales y sistemas

Schaum

2° EDICIÓN

Hwei P. Hsu

571 PROBLEMAS COMPLETAMENTE RESUELTOS

**EXPLICACIONES CLARAS Y CONCISAS DE TODOS LOS CONCEPTOS
RELACIONADOS CON SEÑALES Y SISTEMAS**

APOYO PARA LOS PRINCIPALES LIBROS DE TEXTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA



Utilícelo en las siguientes asignaturas:

SISTEMAS LINEALES

PROCESAMIENTO DE SEÑALES

ANÁLISIS DE SISTEMAS
Y SEÑALES

SEÑALES Y SISTEMAS

SEÑALES Y SISTEMAS

Segunda edición

Hwei P. Hsu

Revisión técnica:

Gloria Mata Hernández

Universidad Nacional Autónoma de México



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SAO PAULO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director general México: Miguel Ángel Toledo Castellanos

Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez

Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha Martínez

Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez

Supervisor de producción: Zeferino García García

Traductor: Efrén Alatorre Miguel

SEÑALES Y SISTEMAS

Segunda edición

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.



Educación

DERECHOS RESERVADOS © 2013, respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies, Inc.

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A

Pisos 16 y 17, Colonia Desarrollo Santa Fe

Delegación Álvaro Obregón

C.P. 01376, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-0921-5

Translated from the 2nd edition of *Schaum's Outlines of: Signals and systems*, by Hwei P. Hsu. Copyright ©
2011, 1995 by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 978-0-07-163472-4.

1234567890

2456789013

Impreso en México

Printed in Mexico

PREFACIO A LA SEGUNDA EDICIÓN

El propósito de este libro, como el de su edición anterior, es proporcionar los conceptos y la teoría de las señales y sistemas necesarios en casi todos los campos de la ingeniería eléctrica, así como en muchas otras disciplinas científicas e ingenierías.

Desde la primera edición, esta obra se ha enfocado al estudio de las señales y sistemas determinísticos. Para la preparación de esta segunda edición en español, se le agregó material extra al sitio Internet: www.mhhe.com/uni/hsu_sys2e. Este material examina las señales aleatorias y la respuesta de los sistemas lineales a las entradas aleatorias. Para la correcta comprensión de este nuevo material, se anexa el apéndice B al sitio Internet, con material de apoyo acerca del estudio de la probabilidad y estadística.

Deseo expresar mi agradecimiento a la señora Kimberly Eaton y al señor Charles Wall, de la Serie Schaum de McGraw-Hill, por invitarme a revisar el libro.

HWEI P. HSU
Shannondell en Valley Forge, Audubon, Pennsylvania

PREFACIO A LA PRIMERA EDICIÓN

Los conceptos y la teoría de señales y sistemas son necesarios en casi todos los campos de la ingeniería eléctrica y también en muchas otras disciplinas científicas e ingenierías. Éstos constituyen los fundamentos de estudios adicionales en diversas áreas (por ejemplo, comunicaciones, procesamiento de señales o sistemas de control).

El propósito de esta obra es que se utilice como un suplemento para todos los libros de texto de señales y sistemas, o estudios autodidactas. También puede emplearse como un libro de texto en sí. Cada tema se presenta en un capítulo que incluye numerosos problemas resueltos, los cuales constituyen parte integral del texto.

El capítulo 1 presenta la descripción matemática y la representación tanto de las señales y sistemas de tiempo continuo como de tiempo discreto. El capítulo 2 desarrolla la relación fundamental de entrada-salida de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LIT) y explica la respuesta al impulso unitario del sistema y la operación de convolución. Los capítulos 3 y 4 exploran las técnicas de transformación del análisis de los sistemas LIT. La transformada de Laplace y su aplicación a los sistemas LIT continuos en el tiempo se aborda en el capítulo 3. El capítulo 4 trata de la transformada z y su aplicación a los sistemas LIT de tiempo discreto. El análisis de Fourier de señales y sistemas se estudia en los capítulos 5 y 6. El capítulo 5 considera el análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo continuo, mientras que el capítulo 6 se ocupa de las señales y los sistemas de tiempo discreto. El último capítulo, el 7, presenta el concepto del espacio de estado o variable de estado y el análisis tanto para los sistemas de tiempo discreto como de tiempo continuo. Además, el apéndice A incluye el material de soporte necesario para analizar el capítulo 7.

Agradezco al profesor Gordon Silverman, del Manhattan College, por su ayuda, comentarios y cuidadosa revisión del manuscrito. También deseo reconocer al personal de la Serie Schaum de McGraw-Hill, en especial a John Aliano, por sus útiles comentarios y sugerencias, y a Maureen Walker por su gran cuidado en la preparación de este libro. Por último, estoy en deuda con mi esposa, Daisy, cuya comprensión y constante apoyo fueron factores necesarios para realizar este trabajo.

HWEI P. HSU
Montville, Nueva Jersey

PARA EL ESTUDIANTE

Para entender el material presentado en este texto se supone que el lector tiene conocimientos básicos de cálculo, junto con cierta comprensión de ecuaciones diferenciales y del curso de primer nivel en ingeniería eléctrica.

Este texto cubre las señales y sistemas, tanto de tiempo continuo como de tiempo discreto. Si el curso que usted está tomando sólo cubre las señales y sistemas de tiempo continuo, puede estudiar las partes de los capítulos 1 y 2 que cubren ese caso, los capítulos 3 y 5, y la segunda parte del capítulo 7. Si el curso que está tomando sólo cubre las señales y sistemas de tiempo discreto, puede estudiar las partes de los capítulos 1 y 2 que abordan el tema, los capítulos 4 y 6, y la primera parte del capítulo 7.

Para dominar realmente un tema, usted debe efectuar una interacción continua entre habilidades y conocimientos. Mediante el estudio y la revisión de muchos de los problemas resueltos y la observación de cómo se aborda y resuelve cada problema, usted puede adquirir la destreza para resolver los problemas con facilidad y aumentar su acervo de conocimientos. Después, es imprescindible que resuelva los problemas complementarios (donde encontrará consejos y respuestas) para probar y reforzar las habilidades aprendidas. Me gustaría resaltar que no existe ningún atajo para el aprendizaje, exceptuando el “estudiar”.

Complementos

Esta obra cuenta con diversos recursos y material adicional que puede consultar y descargar del sitio de la obra: http://www.mhhe.com/uni/hsu_sys2e. Entre el contenido del sitio, están el capítulo 8, Señales aleatorias; el capítulo 9, Densidad de potencia espectral y señales aleatorias en sistemas lineales, y un apéndice, Repaso de probabilidad.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1	SEÑALES Y SISTEMAS	1
1.1	Introducción.....	1
1.2	Las señales y su clasificación	1
1.3	Señales básicas de tiempo continuo	4
1.4	Señales básicas de tiempo discreto.....	8
1.5	Sistemas y clasificación de sistemas	10
	Problemas resueltos.....	12
CAPÍTULO 2	SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO.....	38
2.1	Introducción.....	38
2.2	Respuesta de un sistema LIT de tiempo continuo y la integral de convolución	38
2.3	Propiedades de los sistemas LIT de tiempo continuo	40
2.4	Funciones propias de los sistemas LIT de tiempo continuo.....	41
2.5	Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales	41
2.6	Respuesta de un sistema LIT de tiempo discreto y la suma de convolución	42
2.7	Propiedades de los sistemas LIT de tiempo discreto.....	44
2.8	Funciones propias de los sistemas LIT de tiempo discreto.....	45
2.9	Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias	45
	Problemas resueltos.....	46
CAPÍTULO 3	LA TRANSFORMADA DE LAPLACE Y LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO CONTINUO.....	77
3.1	Introducción.....	77
3.2	La transformada de Laplace	77
3.3	Transformada de Laplace de algunas señales comunes	80
3.4	Propiedades de la transformada de Laplace	81
3.5	La transformada de Laplace inversa.....	84
3.6	La función del sistema.....	86
3.7	La transformada de Laplace unilateral	88
	Problemas resueltos.....	90
CAPÍTULO 4	LA TRANSFORMADA Z Y LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO DISCRETO	117
4.1	Introducción.....	117
4.2	La transformada z	117
4.3	Transformadas z de algunas señales comunes.....	120

4.4	Propiedades de la transformada z	120
4.5	Transformada z inversa.....	123
4.6	Función del sistema de los sistemas LIT de tiempo discreto	124
4.7	La transformada z unilateral.....	126
	Problemas resueltos.....	127
CAPÍTULO 5	ANÁLISIS DE FOURIER DE SEÑALES Y SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO	152
5.1	Introducción.....	152
5.2	Representación en serie de Fourier de señales periódicas.....	152
5.3	La transformada de Fourier	155
5.4	Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo	158
5.5	La respuesta en frecuencia de los sistemas LIT de tiempo continuo	162
5.6	Filtrado	165
5.7	Ancho de banda.....	167
	Problemas resueltos.....	168
CAPÍTULO 6	ANÁLISIS DE FOURIER DE SEÑALES Y SISTEMAS DE TIEMPO DISCRETO.....	209
6.1	Introducción.....	209
6.2	Serie de Fourier discreta.....	209
6.3	La transformada de Fourier	211
6.4	Propiedades de la transformada de Fourier	215
6.5	La respuesta en frecuencia de los sistemas LIT de tiempo discreto.....	219
6.6	Respuesta del sistema a senoidales de tiempo continuo muestreadas.....	220
6.7	Simulación.....	221
6.8	La transformada de Fourier discreta.....	222
	Problemas resueltos.....	224
CAPÍTULO 7	ANÁLISIS EN EL ESPACIO DE ESTADO	267
7.1	Introducción.....	267
7.2	El concepto de estado.....	267
7.3	Representación en el espacio de estado de los sistemas LIT de tiempo discreto.....	268
7.4	Representación en el espacio de estado de sistemas LIT de tiempo continuo	270
7.5	Soluciones de las ecuaciones de estado para sistemas LIT de tiempo discreto	272
7.6	Soluciones de las ecuaciones de estado para sistemas LIT de tiempo continuo	274
	Problemas resueltos.....	277
	Índice analítico	I-1

Señales y sistemas

1.1 INTRODUCCIÓN

El concepto y la teoría de señales y sistemas son necesarios en casi todos los campos de la ingeniería eléctrica y también en muchas otras ingenierías y disciplinas científicas. En este capítulo presentaremos la descripción matemática y la representación de las señales y los sistemas, así como sus clasificaciones. También definiremos varios fundamentos importantes básicos de las señales para nuestros estudios.

1.2 LAS SEÑALES Y SU CLASIFICACIÓN

Una *señal* es una función que representa una variable o cantidad física, y por lo regular contiene información acerca del comportamiento o naturaleza del fenómeno. Por ejemplo, en un circuito *RC* la señal puede representar el voltaje a través del capacitor o la corriente que fluye en el resistor. De manera matemática, una señal se representa como una función de una variable independiente t . En general, la letra t representa el tiempo. De este modo, una señal se denota mediante la expresión $x(t)$.

A. SEÑALES DE TIEMPO CONTINUO Y DE TIEMPO DISCRETO

Una señal $x(t)$ es de *tiempo continuo* si t es una variable continua. Si t es una variable discreta —es decir, $x(t)$ está definida para tiempos discretos—, entonces $x(t)$ es una señal de *tiempo discreto*. Puesto que una señal de tiempo *discreto* está definida en tiempos discretos, una señal discreta a menudo se identifica como una *serie* de números que se denota mediante $\{x_n\}$ o $x[n]$, donde $n =$ entero. En la figura 1-1 se ilustra una señal $x(t)$ de tiempo continuo y una señal $x[n]$ de tiempo discreto.

Una señal $x[n]$ de tiempo discreto puede representar un fenómeno para el cual la variable independiente es inherentemente discreta. Por ejemplo, el promedio del mercado de acciones al cierre diario es, por naturaleza, una señal que evoluciona en puntos discretos en el tiempo (esto es, al cierre de cada día). Por otra parte, una señal de tiempo discreto $x[n]$ puede obtenerse mediante el *muestreo* de una señal $x(t)$ de tiempo continuo tal como

$$x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n), \dots$$

o en una forma más corta como $x[0], x[1], \dots, x[n], \dots$

o $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$

donde se entiende que $x_n = x[n] = x(t_n)$

las x_n se conocen como *muestras* y al intervalo de tiempo entre ellas se le llama *intervalo de muestreo*. Cuando los intervalos de muestreo son iguales (muestreo uniforme), entonces

$$x_n = x[n] = x(nT_s) \text{ donde la constante } T_s \text{ es el intervalo de muestreo.}$$

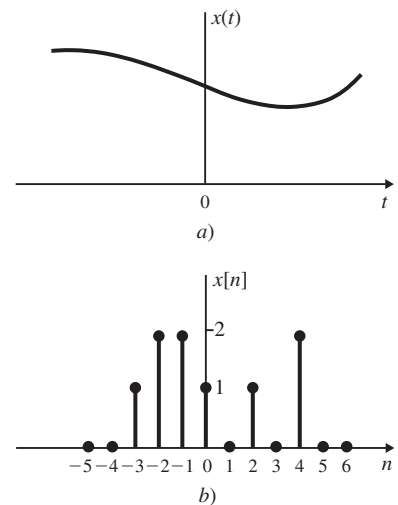


Figura 1-1 Representación gráfica de señales a) de tiempo continuo y b) de tiempo discreto.

Una señal de tiempo discreto $x[n]$ puede definirse de dos maneras:

1. Especificando una regla para calcular el n -ésimo valor de la secuencia. Por ejemplo,

$$x[n] = x_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \{x_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots\right\}$$

2. Es posible enumerar de manera explícita los valores de la secuencia. Por ejemplo, la secuencia que se muestra en la figura 1-1b) puede escribirse como

$$\{x_n\} = \{\dots, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 0, \dots\} \quad \text{o} \quad \{x_n\} = \{1, 2, 2, 1, 0, 1, 0, 2\}$$

\uparrow \uparrow

La flecha se usa para denotar el término $n = 0$. Esta obra considera la siguiente convención: si no se indica flecha alguna, entonces el primer término corresponde a $n = 0$ y todos los valores de la secuencia son 0 para $n < 0$.

La suma y el producto de dos secuencias se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \{c_n\} &= \{a_n\} + \{b_n\} \rightarrow c_n = a_n + b_n \\ \{c_n\} &= \{a_n\}\{b_n\} \rightarrow c_n = a_n b_n \\ \{c_n\} &= \alpha\{a_n\} \rightarrow c_n = \alpha a_n \quad \alpha = \text{constante} \end{aligned}$$

B. SEÑALES ANALÓGICAS Y DIGITALES

Si una señal $x(t)$ de tiempo continuo puede tomar cualquier valor en el intervalo continuo (a, b) , donde a puede ser $-\infty$ y b puede ser $+\infty$, entonces la señal $x(t)$ se denomina señal *analógica*. Si una señal $x[n]$ de tiempo discreto sólo puede tomar un número finito de valores distintos, entonces se denomina *digital*.

C. SEÑALES REALES Y COMPLEJAS

Una señal $x(t)$ es *real* si su valor es un número real, y una señal $x(t)$ es una señal *compleja* si su valor es un número complejo. Una señal $x(t)$ compleja general es una función de la forma

$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t) \tag{1.1}$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son señales reales y $j = \sqrt{-1}$.

Note que en la ecuación (1.1) t representa tanto una variable continua como una discreta.

D. SEÑALES DETERMINÍSTICAS Y ALEATORIAS

Las señales *determinísticas* son aquellas cuyos valores están completamente especificados para cualquier tiempo dado. De este modo, una señal determinística puede modelarse mediante una función conocida del tiempo t . Las señales *aleatorias* son aquellas que toman valores aleatorios en cualquier tiempo dado y deben caracterizarse de manera estadística.

E. SEÑALES PARES E IMPARES

Una señal $x(t)$ o $x[n]$ se define como *par* si

$$\begin{aligned} x(-t) &= x(t) \\ x[-n] &= x[n] \end{aligned} \tag{1.2}$$

Una señal $x(t)$ o $x[n]$ se define como *impar* si

$$\begin{aligned} x(-t) &= -x(t) \\ x[-n] &= -x[n] \end{aligned} \tag{1.3}$$

En la figura 1-2 se muestran ejemplos de señales pares e impares.

Cualquier señal $x(t)$ o $x[n]$ puede expresarse como la suma de dos señales, una de las cuales es par y la otra es impar. Es decir,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e(t) + x_o(t) \\ x[n] &= x_e[n] + x_o[n] \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde $x_e(t) = \frac{1}{2} \{x(t) + x(-t)\}$ parte par de $x(t)$

$$x_e[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x[-n]\} \quad \text{parte par de } x[n]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} \{x(t) - x(-t)\} \quad \text{parte impar de } x(t)$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x[-n]\} \quad \text{parte impar de } x[n]$$

Note que el producto de dos señales par o impar es una señal par, y que el producto de una señal par y otra impar es una señal impar (problema 1.7).

F. SEÑALES PERIÓDICAS Y NO PERIÓDICAS

Se dice que una señal $x(t)$ de tiempo continuo es *periódica con periodo T* si existe un valor positivo distinto de cero de T para el que

$$x(t + T) = x(t) \quad \text{para toda } t \tag{1.7}$$

La figura 1-3a) ilustra el ejemplo de una señal de este tipo. De la ecuación (1.7) o la figura 1-3a) se obtiene que

$$x(t + mT) = x(t) \tag{1.8}$$

para toda t y cualquier entero m . El *periodo fundamental* T_0 de $x(t)$ es el valor positivo más pequeño de T para el cual se cumple la ecuación (1.7). Observe que esta definición no funciona para una señal constante $x(t)$ (conocida como señal cd). Para una señal constante $x(t)$ el periodo fundamental es indefinido, porque $x(t)$ es periódica para *cualquier* selección de T (por tanto, no hay valor positivo más pequeño). Cualquier señal de tiempo continuo que no sea periódica se conoce como señal *no periódica* (o *aperiódica*).

Las señales periódicas de tiempo discreto se definen de manera análoga. Una secuencia (señal de tiempo discreto) $x[n]$ es *periódica con un periodo N* si existe un entero positivo N para el cual

$$x[n + N] = x[n] \quad \text{para toda } n \tag{1.9}$$

La figura 1-3b) da un ejemplo de una secuencia de esta clase. De la ecuación (1.9) y de la figura 1-3b) se deduce que

$$x[n + mN] = x[n] \tag{1.10}$$

para toda n y cualquier entero m . El *periodo fundamental* N_0 de $x[n]$ es el entero positivo más pequeño N para el cual se cumple la ecuación (1.9). Cualquier secuencia no periódica se denomina secuencia *no periódica* (o *aperiódica*).

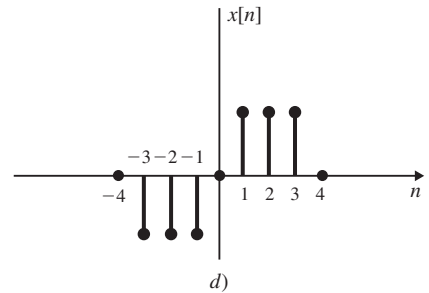
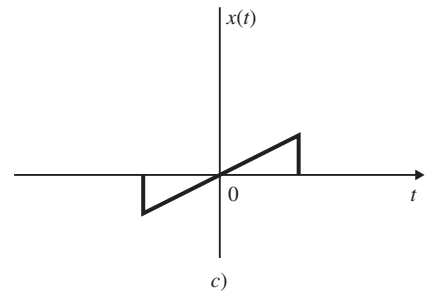
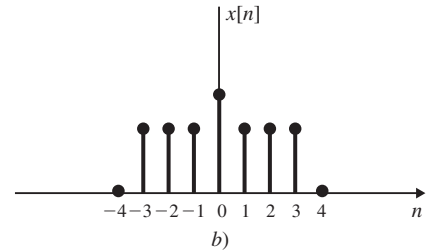
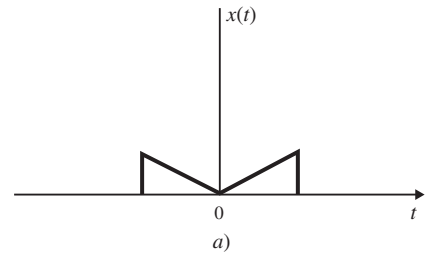


Figura 1-2 Ejemplos de señales pares (a y b) y señales impares (c y d).

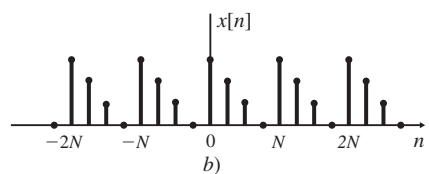
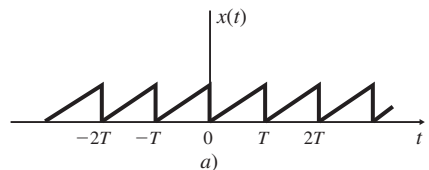


Figura 1-3 Ejemplos de señales periódicas.

Observe que una secuencia obtenida mediante el muestreo uniforme de una señal periódica de tiempo continuo puede no ser periódica (problemas 1.12 y 1.13). Advierta también que la suma de dos señales periódicas de tiempo continuo puede no ser periódica, pero la suma de dos secuencias periódicas siempre es periódica (problemas 1.14 y 1.15).

G. SEÑALES DE POTENCIA Y ENERGÍA

Considere $v(t)$ como el voltaje a través del resistor R que produce una corriente $i(t)$. La potencia instantánea $p(t)$ por ohm se define como

$$p(t) = \frac{v(t)i(t)}{R} = i^2(t) \quad (1.11)$$

La energía total E y la potencia promedio P por cada ohm son

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) dt \quad \text{joules} \quad (1.12)$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i^2(t) dt \quad \text{watts} \quad (1.13)$$

Para una señal arbitraria de tiempo continuo $x(t)$, el *contenido de energía normalizado* E de $x(t)$ se define como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.14)$$

La *potencia promedio normalizada* P de $x(t)$ se define como

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.15)$$

De manera similar, para una señal de tiempo discreto $x[n]$, el contenido de energía normalizado E de $x[n]$ se define como

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (1.16)$$

La potencia normalizada promedio P de $x[n]$ se define como

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (1.17)$$

Con base en las definiciones (1.14) a (1.17), se definen las siguientes clases de señales:

1. Se dice que $x(t)$ (o $x[n]$) es una señal (o secuencia) de *energía* si y sólo si $0 < E < \infty$, y de esta manera $P = 0$.
2. Se dice que $x(t)$ (o $x[n]$) es una señal (o secuencia) de *potencia* si y sólo si $0 < P < \infty$, lo que implica que $E = \infty$.
3. Las señales que no satisfacen ninguna de estas propiedades se conocen como señales que no son de energía ni de potencia.

Observe que una señal periódica es de potencia si su contenido de energía por periodo es finito, y entonces la potencia promedio de esta señal puede calcularse sólo sobre un periodo (problema 1.18).

1.3 SEÑALES BÁSICAS DE TIEMPO CONTINUO

A. FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

La función *escalón unitario* $u(t)$, también conocida como función *unitaria de Heaviside*, se define como

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

la cual se muestra en la figura 1-4a). Observe que es discontinua en $t = 0$ y que el valor en $t = 0$ es indefinido. De manera semejante, la función de escalón unitario desplazada $u(t - t_0)$ se define como

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

que se ilustra en la figura 1-4b).

B. FUNCIÓN IMPULSO UNITARIO

La función *impulso unitario* $\delta(t)$, también conocida como función *delta de Dirac*, juega un papel central en el análisis de sistemas. De manera tradicional, $\delta(t)$ a menudo se define como el límite de una función convencional adecuadamente seleccionada con un área igual a la unidad sobre un intervalo de tiempo infinitesimal, como se muestra en la figura 1-5, y que posee las siguientes propiedades:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1$$

Pero una función ordinaria igual a 0 en cualquier valor de t , excepto en un solo punto, debe tener integral 0 (en el sentido de la integral de Riemann). De esta forma, $\delta(t)$ no puede ser una función ordinaria, por lo que su definición matemática es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t) dt = \phi(0) \quad (1.20)$$

donde $\phi(t)$ es cualquier función regular continua en $t = 0$.

Una definición alterna de $\delta(t)$ es

$$\int_a^b \phi(t)\delta(t) dt = \begin{cases} \phi(0) & a < 0 < b \\ 0 & a < b < 0 \quad \text{o} \quad 0 < a < b \\ \text{indefinida} & a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Advierta que la ecuación (1.20) o (1.21) es una expresión simbólica y no debe considerarse una integral ordinaria de Riemann. En este sentido, $\delta(t)$ por lo general se nombra *función generalizada* y $\phi(t)$ se conoce como *función de prueba*. Una clase diferente de funciones de prueba definirá una función generalizada distinta (problema 1.24). De modo similar, la función delta con atrasada $\delta(t - t_0)$ se define mediante

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t - t_0) dt = \phi(t_0) \quad (1.22)$$

donde $\phi(t)$ es cualquier función regular continua en $t = t_0$. Por conveniencia, $\delta(t)$ y $\delta(t - t_0)$ se representan gráficamente en la figura 1-6.

Algunas propiedades adicionales de $\delta(t)$ son

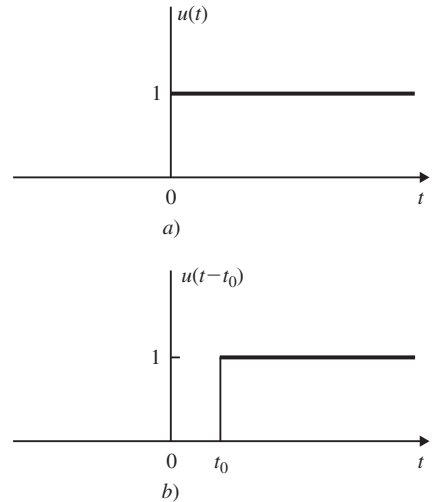


Figura 1-4 a) Función escalón unitario; b) función escalón unitario desplazada.

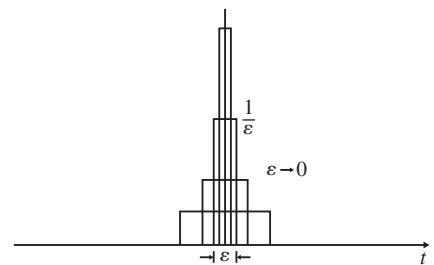


Figura 1-5

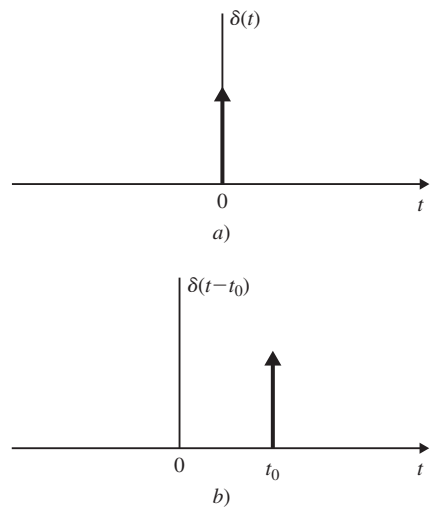


Figura 1-6 a) Función impulso unitario; b) función impulso unitario desplazado.

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (1.23)$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1.24)$$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (1.25)$$

si $x(t)$ es continua en $t = 0$. $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$ (1.26)

si $x(t)$ es continua en $t = t_0$.

Con el uso de las ecuaciones (1.22) y (1.24), cualquier señal de tiempo continuo $x(t)$ puede expresarse como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau \quad (1.27)$$

DERIVADAS GENERALIZADAS

Si $g(t)$ es una función generalizada, su n -ésima derivada generalizada $g^{(n)}(t) = d^n g(t)/dt^n$ se define mediante la siguiente relación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)g^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(t)g(t) dt \quad (1.28)$$

donde $\phi(t)$ es una función de prueba que puede diferenciarse un número arbitrario de veces y se desvanece fuera de algún intervalo fijo, y $\phi^{(n)}(t)$ es la n -ésima derivada de $\phi(t)$. De este modo, mediante las ecuaciones (1.28) y (1.20) la derivada de $\delta(t)$ puede definirse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta'(t) dt = -\phi'(0) \quad (1.29)$$

donde $\phi(t)$ es una función de prueba continua en $t = 0$ y se desvanece fuera de algún intervalo fijo y $\phi'(0) = d\phi(t)/dt|_{t=0}$. Mediante la ecuación (1.28) puede demostrarse que la derivada de $u(t)$ es $\delta(t)$ (problema 1.28); es decir,

$$\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (1.30)$$

Entonces, la función de escalón unitario $u(t)$ puede expresarse como

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (1.31)$$

Observe que la función escalón unitario $u(t)$ es discontinua en $t = 0$; por tanto, la derivada de $u(t)$ como se muestra en la ecuación (1.30) no es la derivada de una función en sentido ordinario y debería considerarse una derivada generalizada en el sentido de una función generalizada. De la ecuación (1.31) podemos ver que $u(t)$ no está definida en $t = 0$ y

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

por la ecuación (1.21) con $\phi(t) = 1$. Este resultado es consistente con la definición (1.18) de $u(t)$.

Advierta que las propiedades (o identidades) expresadas por las ecuaciones (1.23) a (1.26) y la ecuación (1.30) no pueden verificarse con el uso del enfoque convencional de $\delta(t)$ como se muestra en la figura 1-5.

C. SEÑALES EXPONENCIALES COMPLEJAS

La señal *exponencial compleja*

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (1.32)$$

es un ejemplo importante de este tipo de señal. Mediante la fórmula de Euler esta señal puede definirse como

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sen \omega_0 t \quad (1.33)$$

De este modo, $x(t)$ es una señal compleja cuya parte real es $\cos \omega_0 t$ y su parte imaginaria es $\sin \omega_0 t$. Una propiedad importante de la señal exponencial compleja $x(t)$ en la ecuación (1.32) es su periodicidad. El periodo fundamental T_0 de $x(t)$ está dado por (problema 1.9)

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.34)$$

Observe que $x(t)$ es periódica para cualquier valor de ω_0 .

SEÑALES EXPONENCIALES COMPLEJAS GENERALES

Sea $s = \sigma + j\omega$ un número complejo. Definimos $x(t)$ como

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t}(\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (1.35)$$

Entonces la señal $x(t)$ en la ecuación (1.35) se conoce como *exponencial compleja general*, cuya parte real $e^{\sigma t} \cos \omega t$ y la parte imaginaria $e^{\sigma t} \sin \omega t$ son señales senoidales que incrementa ($\sigma > 0$) o decrece ($\sigma < 0$) de manera exponencial (figura 1-7).

SEÑALES EXPONENCIALES REALES

Observe que si $s = \sigma$ (un número real), entonces la ecuación (1.35) se reduce a una señal *exponencial real*

$$x(t) = e^{\sigma t} \quad (1.36)$$

Como se ilustra en la figura 1-8, si $\sigma > 0$, entonces $x(t)$ es una exponencial creciente, y si $\sigma < 0$, entonces $x(t)$ es una exponencial decreciente.

D. SEÑALES SENOIDALES

Una señal *senoidal* de tiempo continuo puede expresarse como

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (1.37)$$

donde A es la *amplitud* (real), ω_0 es la *frecuencia en radianes* en radianes por segundo y θ es el *ángulo de fase* en radianes. La señal senoidal $x(t)$ se ilustra en la figura 1-9 y es periódica con un periodo fundamental de

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.38)$$

El recíproco del periodo fundamental T_0 se conoce como *frecuencia fundamental* f_0 :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \text{ hertz (Hz)} \quad (1.39)$$

De las ecuaciones (1.38) y (1.39) tenemos que

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad (1.40)$$

lo que se conoce como *frecuencia angular fundamental*. Con la fórmula de Euler, la señal senoidal en la ecuación (1.37) puede expresarse como

$$A \cos(\omega_0 t + \theta) = A \operatorname{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \theta)}\} \quad (1.41)$$

donde “Re” denota la “parte real de”. También utilizamos la anotación “Im” para denotar a la “parte imaginaria de”. Entonces

$$A \operatorname{Im}\{e^{j(\omega_0 t + \theta)}\} = A \sin(\omega_0 t + \theta) \quad (1.42)$$

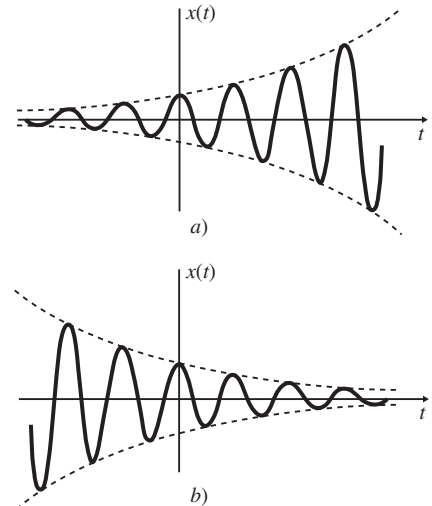


Figura 1-7 a) Señal senoidal exponencialmente creciente; b) señal senoidal exponencialmente decreciente.

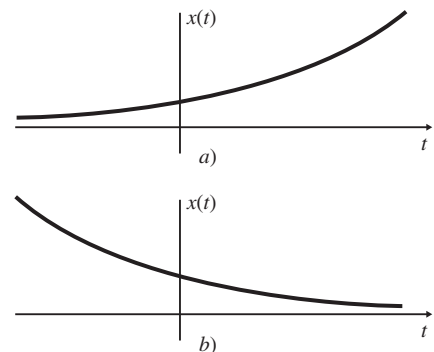


Figura 1-8 Señales exponenciales reales de tiempo continuo a) $\sigma > 0$; b) $\sigma < 0$.

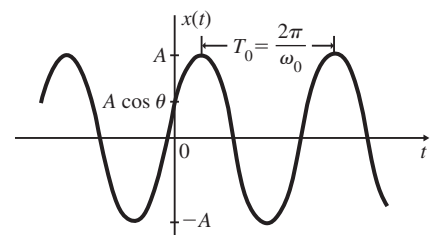


Figura 1-9 Señal senoidal de tiempo continuo.

1.4 SEÑALES BÁSICAS DE TIEMPO DISCRETO

A. SECUENCIA ESCALÓN UNITARIO

La secuencia *escalón unitario* $u[n]$ se define como

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

la cual se muestra en la figura 1-10a). Observe que el valor de $u[n]$ para $n = 0$ está definido [a diferencia de la función de escalón de tiempo continuo $u(t)$ en $t = 0$] y es igual a la unidad. De manera semejante, la secuencia escalón unitario desplazada $u[n - k]$ se define como

$$u[n - k] = \begin{cases} 1 & n \geq k \\ 0 & n < k \end{cases} \quad (1.44)$$

la cual se muestra en la figura 1-10b).

B. SECUENCIA IMPULSO UNITARIO

La secuencia *impulso unitario* (o *muestra unitaria*) $\delta[n]$ se define como

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

la cual se ilustra en la figura 1-11a). De modo semejante, la secuencia (o muestra) impulso unitario desplazado $\delta[n - k]$ se define como

$$\delta[n - k] = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \quad (1.46)$$

la cual se muestra en la figura 1-11b).

A diferencia de la función impulso unitario de tiempo continuo $\delta(t)$, $\delta[n]$ está definida sin complicación o dificultad matemática. De las definiciones (1.45) y (1.46) se puede ver con facilidad que

$$x[n] \delta[n] = x[0] \delta[n] \quad (1.47)$$

$$x[n] \delta[n - k] = x[k] \delta[n - k] \quad (1.48)$$

que son las contrapartes en tiempo discreto de las ecuaciones (1.25) y (1.26), respectivamente. De las definiciones (1.43) a la (1.46), $\delta[n]$ y $u[n]$ están relacionadas por medio de

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1] \quad (1.49)$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k] \quad (1.50)$$

las cuales son las contrapartes en tiempo discreto de las ecuaciones (1.30) y (1.31), respectivamente.

Mediante la definición (1.46) cualquier secuencia $x[n]$ puede expresarse como

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \quad (1.51)$$

lo que corresponde a la ecuación (1.27) en el caso de la señal de tiempo continuo.

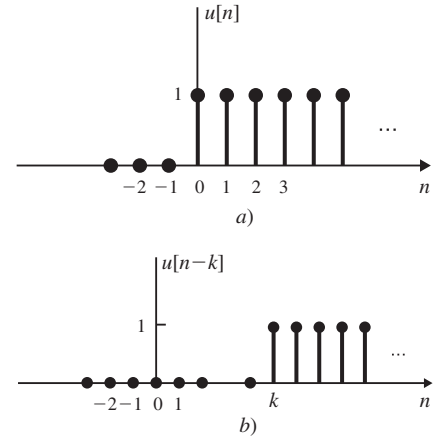


Figura 1-10 a) Secuencia escalón unitario; b) secuencia escalón unitario desplazado.

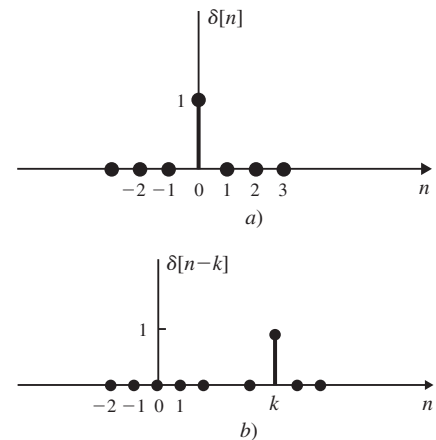


Figura 1-11 a) Secuencia impulso (muestra) unitario; b) secuencia impulso unitario desplazado.

C. SECUENCIAS EXPONENCIALES COMPLEJAS

La forma de la secuencia *exponencial compleja* es

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \quad (1.52)$$

De nuevo, por medio de la fórmula de Euler, $x[n]$ puede expresarse como

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} = \cos \Omega_0 n + j \sen \Omega_0 n \quad (1.53)$$

De este modo, $x[n]$ es una secuencia compleja con una parte real: $\cos \Omega_0 n$, y una imaginaria: $\sen j\Omega_0 n$.

PERIODICIDAD DE $e^{j\Omega_0 n}$

Para que $e^{j\Omega_0 n}$ sea periódica con un periodo $N (> 0)$, Ω_0 debe satisfacer la siguiente condición (problema 1.11):

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \quad m = \text{entero positivo} \quad (1.54)$$

De este modo, la secuencia $e^{j\Omega_0 n}$ no es periódica para ningún valor de Ω_0 . Es periódica sólo si $\Omega_0/2\pi$ es un número racional. Nótese que esta propiedad es totalmente diferente de la correspondiente a la señal de tiempo continuo $e^{j\omega_0 t}$ que es periódica para cualquier valor de ω_0 . De esta manera, si Ω_0 satisface la condición de periodicidad en la ecuación (1.54), $\Omega_0 \neq 0$, y N y m no tienen factores en común, entonces el periodo fundamental de la secuencia $x[n]$ en la ecuación (1.52) es N_0 , dado por

$$N_0 = m \left(\frac{2\pi}{\Omega_0} \right) \quad (1.55)$$

Otra diferencia muy importante entre las exponenciales complejas de tiempo continuo y de tiempo discreto es que todas las señales $e^{j\omega_0 t}$ son distintas para los diversos valores de ω_0 , pero no para el caso de las señales $e^{j\Omega_0 n}$.

Considere la secuencia exponencial compleja con frecuencia $(\Omega_0 + 2\pi k)$, donde k es un entero:

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega_0 n} \quad (1.56)$$

porque $e^{j2\pi kn} = 1$. De la ecuación (1.56) observamos que la secuencia exponencial compleja a la frecuencia Ω_0 es la misma que a las frecuencias $(\Omega_0 \pm 2\pi)$, $(\Omega_0 \pm 4\pi)$, y así sucesivamente. Por tanto, al tratar con las exponenciales de tiempo discreto es necesario considerar sólo un intervalo de longitud 2π , en el cual se elige Ω_0 . Por lo regular, usaremos el intervalo $0 \leq \Omega_0 < 2\pi$ o el intervalo $-\pi \leq \Omega_0 < \pi$.

SECUENCIAS EXPONENCIALES COMPLEJAS GENERALES

La secuencia exponencial compleja más general a menudo se define como

$$x[n] = C\alpha^n \quad (1.57)$$

donde C y α son, en general, números complejos. Advierta que la ecuación (1.52) es el caso especial de la ecuación (1.57) con $C = 1$ y $\alpha = e^{j\Omega_0}$.

SECUENCIAS EXPONENCIALES REALES

Si tanto C como α en la ecuación (1.57) son reales, entonces $x[n]$ es una secuencia exponencial real. Es posible identificar cuatro casos distintos: $\alpha > 1$, $0 < \alpha < 1$, $-1 < \alpha < 0$ y $\alpha < -1$. Estas cuatro secuencias exponenciales reales se ilustran en la figura 1-12. Note que si $\alpha = 1$, $x[n]$ es una secuencia constante, mientras que si $\alpha = -1$, $x[n]$ alterna su valor entre $+C$ y $-C$.

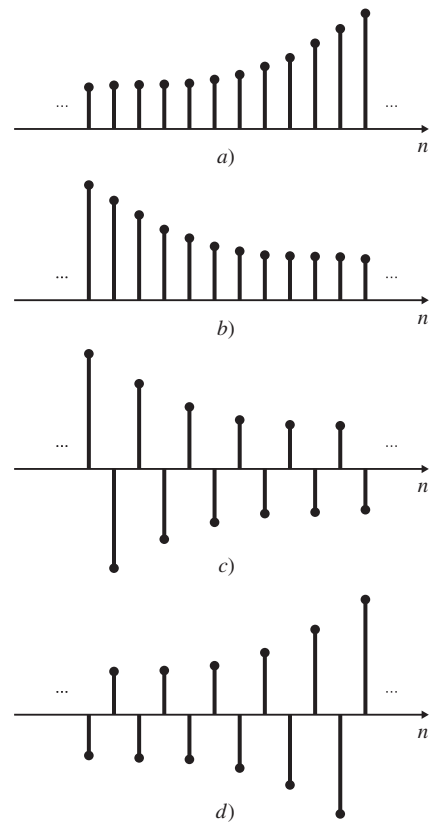


Figura 1-12 Secuencias exponenciales reales. a) $\alpha > 1$; b) $1 > \alpha > 0$; c) $0 > \alpha > -1$; d) $\alpha < -1$.

D. SECUENCIAS SENOIDALES

Una secuencia *senoidal* puede expresarse como

$$x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \theta) \quad (1.58)$$

Ya que n es adimensional, entonces tanto Ω_0 como θ se expresan en unidades de radianes. La figura 1-13 muestra un par de ejemplos de secuencias senoidales. Como antes, la secuencia senoidal en la ecuación (1.58) puede expresarse como

$$A \cos(\Omega_0 n + \theta) = A \operatorname{Re} \{ e^{j(\Omega_0 n + \theta)} \} \quad (1.59)$$

Como observamos en el caso de la secuencia exponencial compleja en la ecuación (1.52), se mantienen las mismas observaciones [ecuaciones (1.54) y (1.56)] para las secuencias senoidales. Por ejemplo, la secuencia en la figura 1-13a) es periódica con un periodo fundamental de 12, pero la secuencia en la figura 1-13b) no es periódica.

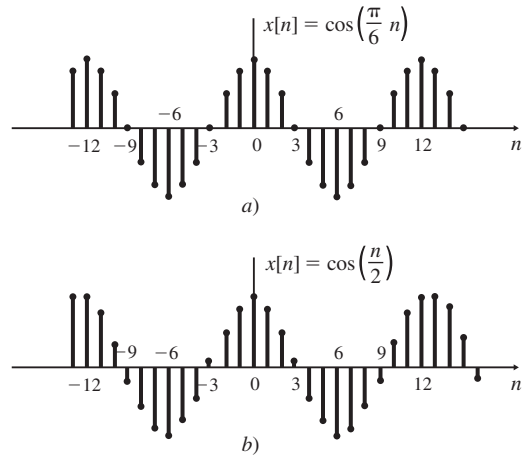


Figura 1-13 Secuencias senoidales. a) $x[n] = \cos(\pi n/6)$; b) $x[n] = \cos(n/2)$.

1.5 SISTEMAS Y CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS

A. REPRESENTACIÓN DE SISTEMA

Un *sistema* es el modelo matemático de un proceso físico que relaciona la señal de *entrada* (o de *excitación*) con la señal de *salida* (o de *respuesta*).

Sean x y y las señales de entrada y de salida respectivas de un sistema; entonces este sistema puede verse como una *transformación* (o *mapeo*) de x en y , la cual se representa mediante la notación matemática

$$y = \mathbf{T}x \quad (1.60)$$

donde \mathbf{T} es el *operador* que representa alguna regla bien definida mediante la cual x se transforma en y . La relación (1.60) se representa como se muestra en la figura 1-14a). Es posible tener múltiples señales de entrada y/o de salida, como se ilustra en la figura 1-14b). Centraremos nuestra atención, en la mayor parte de este texto, en el caso de una sola entrada, una sola salida.

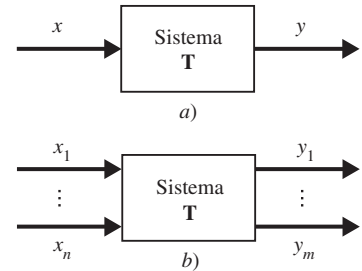


Figura 1-14 Sistema con a) una sola entrada y salida, o b) múltiples entradas y salidas.

B. SISTEMAS DETERMINÍSTICOS Y ESTOCÁSTICOS

Si las señales de entrada y de salida x y y son determinísticas, entonces al sistema se le llama *determinístico*. Si las señales de entrada y de salida x y y son aleatorias, entonces al sistema se le llama *estocástico*.

C. SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO Y DE TIEMPO DISCRETO

Si las señales de entrada y de salida x y y son continuas en el tiempo, entonces el sistema se denomina *sistema de tiempo continuo* [figura 1-15a)]. Si las señales de entrada y de salida son señales o secuencias discretas en el tiempo, entonces el sistema se conoce como *sistema de tiempo discreto* [figura 1-15b)].

Observe que en un *sistema de tiempo continuo* la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ generalmente se expresan mediante una ecuación diferencial (véase el problema 1.32), y en un *sistema de tiempo discreto* la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ con frecuencia se expresan mediante una ecuación en diferencias (véase el problema 1.37).

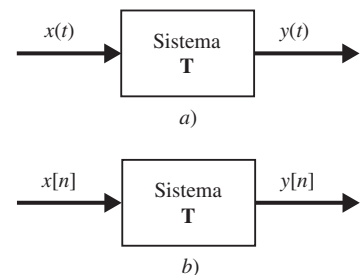


Figura 1-15 a) Sistema de tiempo continuo; b) sistema de tiempo discreto.

D. SISTEMAS CON MEMORIA Y SIN MEMORIA

Se dice que un sistema *no tiene memoria* si la salida en cualquier instante depende sólo de la entrada en el mismo tiempo. En caso contrario, se dice que el sistema tiene *memoria*. Un ejemplo de un sistema sin memoria es un resistor

R , en el cual la entrada $x(t)$ es la corriente y el voltaje corresponde a la salida $y(t)$. La relación entrada-salida (ley de Ohm) de un resistor es

$$y(t) = Rx(t) \quad (1.61)$$

Un ejemplo de un sistema con memoria es un capacitor C siendo la corriente la entrada $x(t)$ y el voltaje, la salida $y(t)$; entonces

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (1.62)$$

Otro ejemplo de un sistema con memoria es un sistema de tiempo discreto cuyas secuencias de entrada y de salida están relacionadas mediante

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (1.63)$$

E. SISTEMAS CAUSALES Y NO CAUSALES

Un sistema se denomina *causal* si su salida en el momento presente depende sólo de los valores presentes y/o pasados de la entrada. De este modo, en un sistema causal no es posible obtener una salida antes de aplicar una entrada al sistema. Un sistema se denomina *no causal* (o *anticipativo*) si su salida en el momento presente depende de los valores futuros de la entrada. El siguiente es un ejemplo de sistemas no causales.

$$y(t) = x(t + 1) \quad (1.64)$$

$$y[n] = x[-n] \quad (1.65)$$

Observe que todos los sistemas sin memoria son causales, pero no a la inversa.

F. SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES

Si el operador \mathbf{T} en la ecuación (1.60) satisface las siguientes dos condiciones, entonces \mathbf{T} se denomina un *operador lineal* y el sistema representado por un operador lineal \mathbf{T} se llama *sistema lineal*:

1. ADICIÓN

Dado que $\mathbf{T}x_1 = y_1$ y $\mathbf{T}x_2 = y_2$, entonces

$$\mathbf{T}\{x_1 + x_2\} = y_1 + y_2 \quad (1.66)$$

para cualquier señal x_1 y x_2 .

2. HOMOGENEIDAD (O ESCALAMIENTO)

$$\mathbf{T}\{\alpha x\} = \alpha y \quad (1.67)$$

para cualquier señal x y cualquier escalar α .

Cualquier sistema que no satisfaga a la ecuación (1.66) y/o (1.67) se clasifica como *no lineal*. Las ecuaciones (1.66) y (1.67) pueden combinarse en una sola condición como

$$\mathbf{T}\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \quad (1.68)$$

donde α_1 y α_2 son escalares arbitrarios. La ecuación (1.68) se conoce como *propiedad de superposición*. El resistor [ecuación (1.61)] y el capacitor [ecuación (1.62)] son ejemplos de sistemas lineales. Los siguientes son ejemplos de sistemas no lineales:

$$y = x^2 \quad (1.69)$$

$$y = \cos x \quad (1.70)$$

Observe que una consecuencia de la propiedad de homogeneidad (o escalamiento) [ecuación (1.67)] de los sistemas lineales es que una *entrada cero produce una salida cero*. Esto se obtiene directamente al establecer $\alpha = 0$ en la ecuación (1.67). Ésta es otra propiedad importante de los sistemas lineales.

G. SISTEMAS INVARIANTES EN EL TIEMPO Y VARIANTES EN EL TIEMPO

Un sistema se denomina *invariante en el tiempo* si un desplazamiento en el tiempo (atraso o adelanto) en la señal de entrada causa el mismo desplazamiento en el tiempo en la señal de salida. De este modo, para un sistema de tiempo continuo, el sistema es invariante en el tiempo si

$$\mathbf{T}\{x(t - \tau)\} = y(t - \tau) \quad (1.71)$$

para cualquier valor real de τ . En un sistema de tiempo discreto, el sistema es invariante en el tiempo (o *invariante al desplazamiento*) si

$$\mathbf{T}\{x[n - k]\} = y[n - k] \quad (1.72)$$

para cualquier entero k . Un sistema que no satisface la ecuación (1.71) (sistema de tiempo continuo) o la ecuación (1.72) (sistema de tiempo discreto) se conoce como sistema *variante en el tiempo*. Para verificar la invariabilidad en el tiempo de un sistema podemos comparar la salida desplazada con la salida que produce la entrada desplazada (problemas 1.33 a 1.39).

H. SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

Si el sistema es lineal y también es invariante en el tiempo, entonces se denomina sistema *lineal invariante en el tiempo* (LIT) (*linear time-invariant*, LTI).

I. SISTEMAS ESTABLES

Un sistema es *estable de entrada acotada/salida acotada* (*bounded-input/bounded output*, BIBO) si para cualquier entrada acotada x definida por

$$|x| \leq k_1 \quad (1.73)$$

la correspondiente salida y también está acotada y definida por

$$|y| \leq k_2 \quad (1.74)$$

donde k_1 y k_2 son constantes reales finitas. Un sistema *inestable* es aquel en el que no todas las entradas acotadas conducen una salida acotada. Por ejemplo, considere un sistema donde la salida $y[n]$ está dada por $y[n] = (n + 1)u[n]$, y la entrada $x[n] = u[n]$ es la secuencia escalón unitario. En este caso, la entrada $u[n] = 1$ pero la salida $y[n]$ se incrementa sin límite a medida que n aumenta.

J. SISTEMAS RETROALIMENTADOS

Una clase especial de sistemas de gran importancia se compone de aquellos que tienen *retroalimentación*. En un *sistema realimentado*, la señal de salida se realimenta y se adiciona a la entrada del sistema, como se muestra en la figura 1-16.



Figura 1-16 Sistema retroalimentado.

PROBLEMAS RESUELTOS

SEÑALES Y CLASIFICACIÓN DE SEÑALES

1.1. En la figura 1-17 se muestra una señal de tiempo continuo $x(t)$. Dibuje e indique cada una de las señales siguientes:

- $x(t - 2)$; $x(2t)$; $x(t/2)$; $x(-t)$
- $x(t - 2)$; está dibujada en la figura 1-18a).
- $x(2t)$; está dibujada en la figura 1-18b).
- $x(t/2)$; está dibujada en la figura 1-18c).
- $x(-t)$; está dibujada en la figura 1-18d).

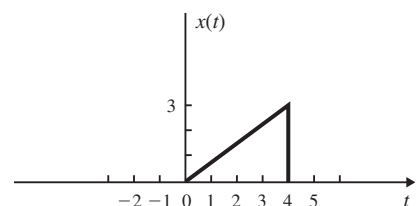


Figura 1-17

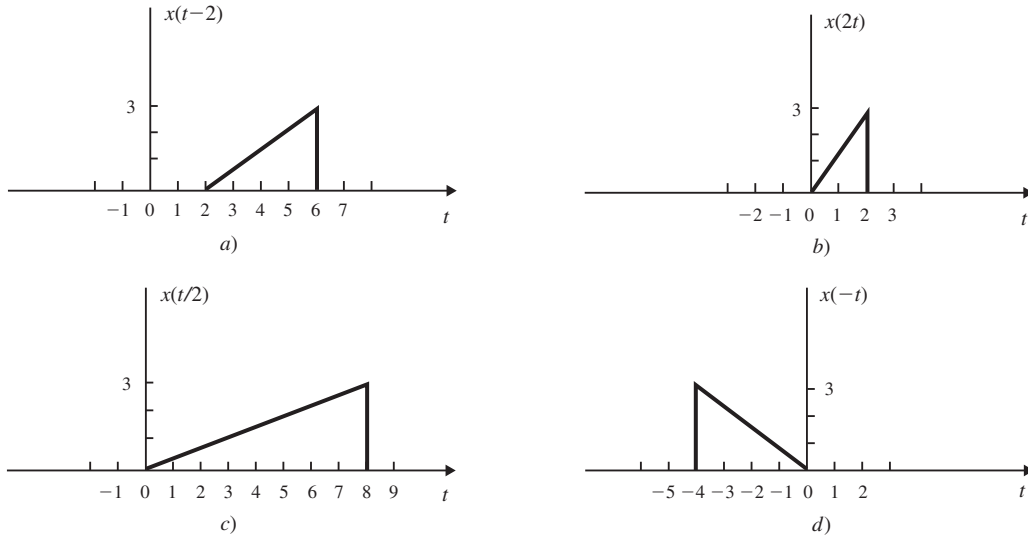


Figura 1-18

1.2. En la figura 1-19 se muestra una señal de tiempo discreto $x[n]$. Dibuje e indique cada una de las señales siguientes:

a) $x[n - 2]$; b) $x[2n]$; c) $x[-n]$; d) $x[-n + 2]$

- a) $x[n - 2]$; está dibujada en la figura 1-20a).
- b) $x[2n]$; está dibujada en la figura 1-20b).
- c) $x[-n]$; está dibujada en la figura 1-20c).
- d) $x[-n + 2]$; está dibujada en la figura 1-20d).

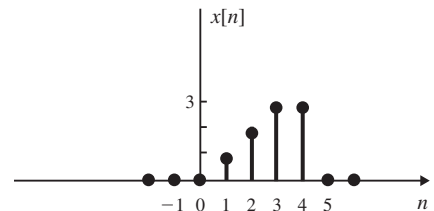


Figura 1-19

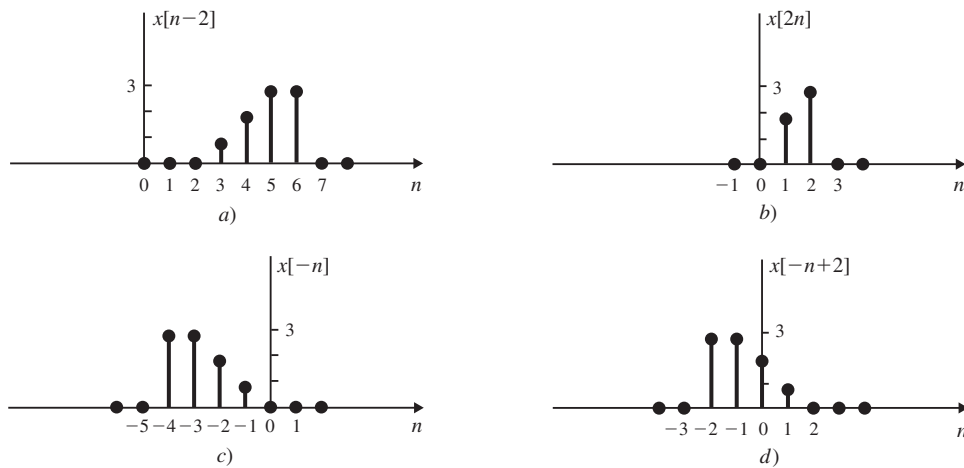


Figura 1-20

1.3. Dada la señal de tiempo continuo especificada por

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t| & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

determine la secuencia de tiempo discreto resultante obtenida mediante un muestreo uniforme de $x(t)$ con un intervalo de muestreo de a) 0.25 s, b) 0.5 s y c) 1.0 s.

Es más fácil tomar el enfoque gráfico en este problema. La señal $x(t)$ es graficada en la figura 1-21a). La figura 1-21b)-d) muestra las gráficas de las secuencias muestreadas resultantes obtenidas para los tres intervalos de muestreo especificados.

a) $T_s = 0.25$ s. De la figura 1-21b) obtenemos que

$$x[n] = \{\dots, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 0.75, 0.5, 0.25, 0, \dots\}$$

↑

b) $T_s = 0.5$ s. De la figura 1-21c) obtenemos que

$$x[n] = \{\dots, 0, 0.5, 1, 0.5, 0, \dots\}$$

↑

c) $T_s = 1$ s. De la figura 1-21d) obtenemos que

$$x[n] = \{\dots, 0, 1, 0, \dots\} = \delta[n]$$

↑

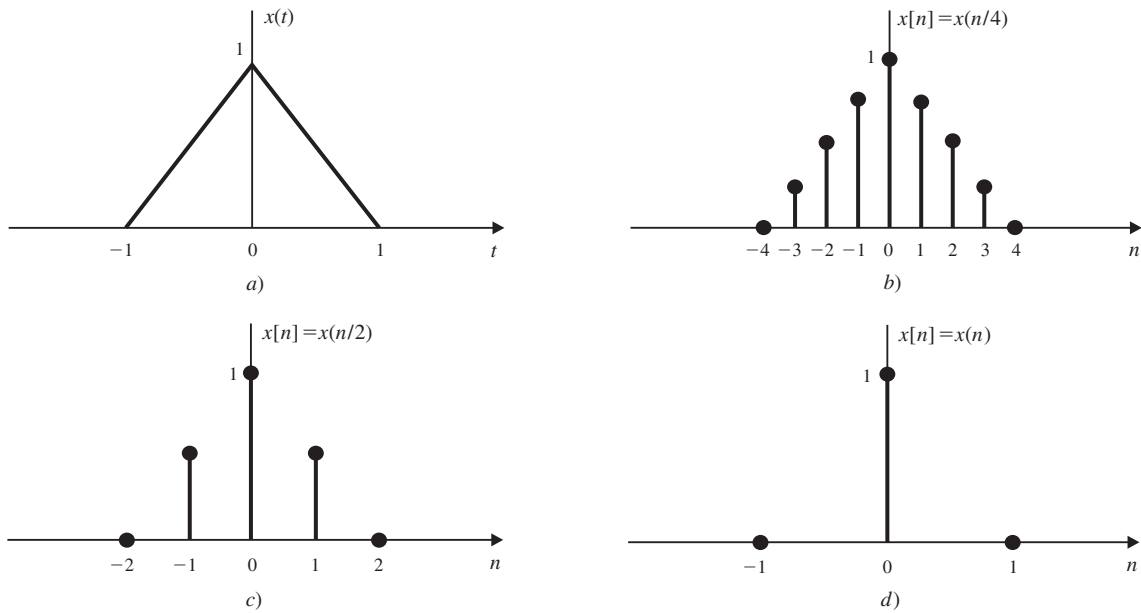


Figura 1-21

1.4. Mediante las señales de tiempo discreto $x_1[n]$ y $x_2[n]$ mostradas en la figura 1-22, represente cada una de las siguientes señales mediante una gráfica por medio de una secuencia de números:

a) $y_1[n] = x_1[n] + x_2[n]$; b) $y_2[n] = 2x_1[n]$; c) $y_3[n] = x_1[n]x_2[n]$

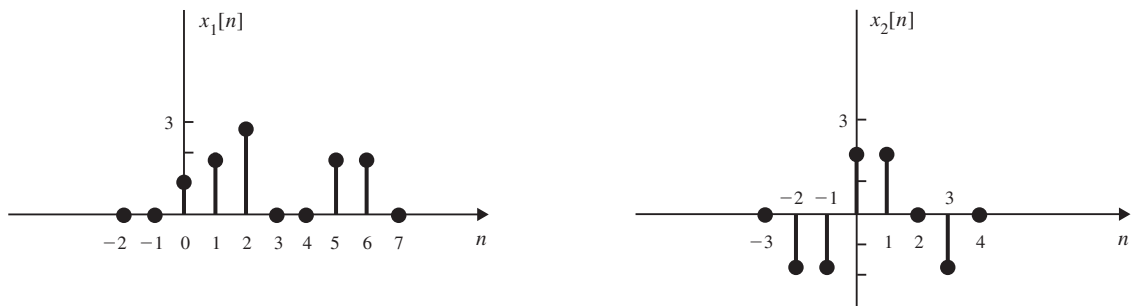


Figura 1-22

a) $y_1[n]$ se dibuja en la figura 1-23a). De esa figura obtenemos

$$y_1[n] = \{\dots, 0, -2, -2, 3, 4, 3, -2, 0, 2, 2, 0, \dots\}$$

↑

b) $y_2[n]$ se dibuja en la figura 1-23b). De tal figura obtenemos

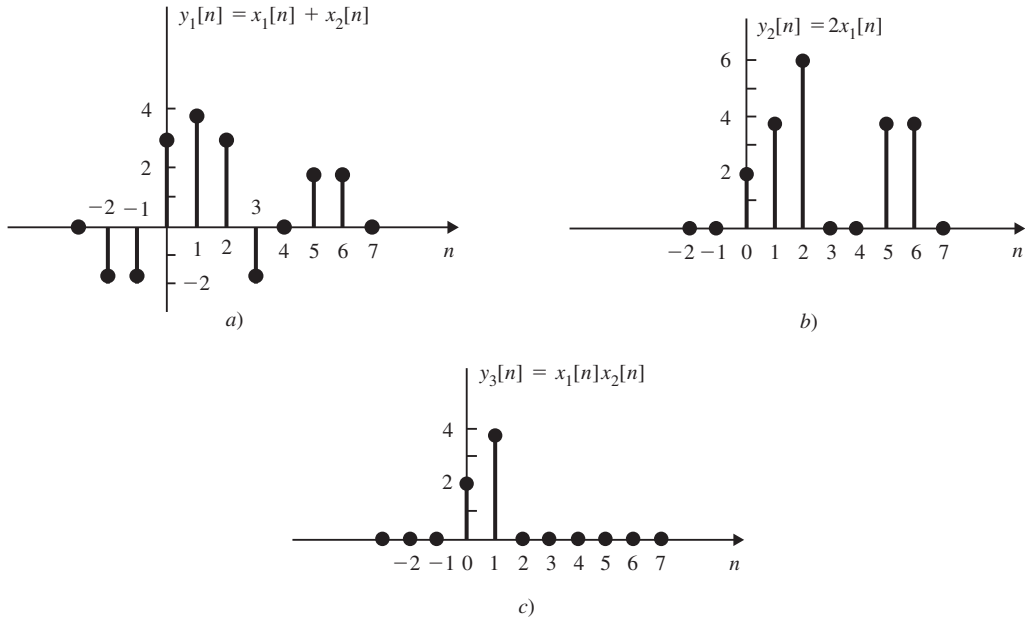
$$y_2[n] = \{\dots, 0, 2, 4, 6, 0, 0, 4, 4, 0, \dots\}$$

↑

c) $y_3[n]$ se dibuja en la figura 1-23c). De esa figura obtenemos

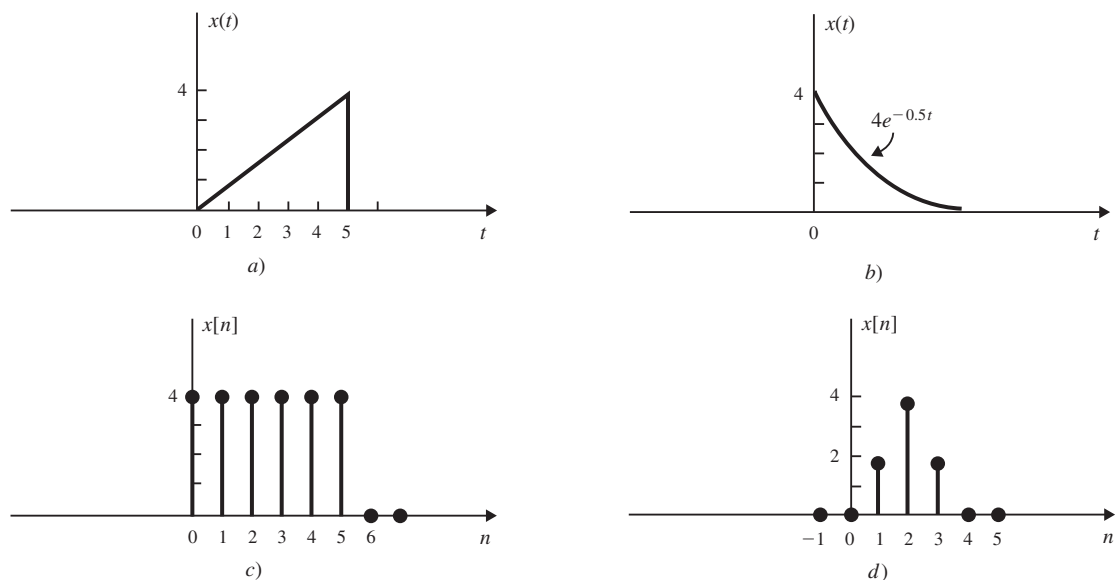
$$y_3[n] = \{\dots, 0, 2, 4, 0, \dots\}$$

↑



1.5. Dibuje e indique las componentes par e impar de las señales mostradas en la figura 1-24.

Con las ecuaciones (1.5) y (1.6), las componentes par e impar de las señales mostradas en la figura 1-24 se dibujan en la figura 1-25.



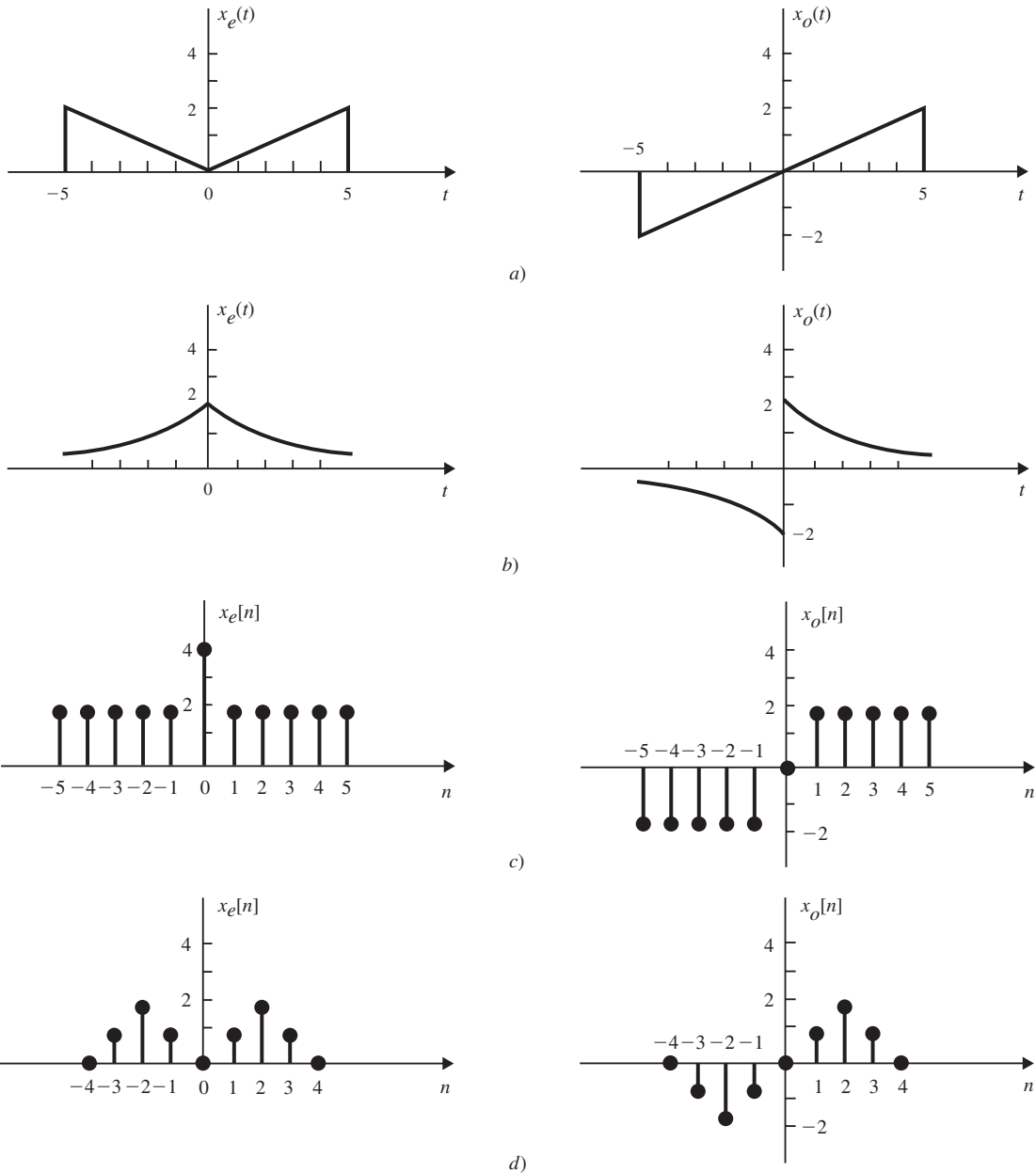


Figura 1-25

1.6. Encuentre las componentes par e impar de $x(t) = e^{jt}$.

Sean $x_e(t)$ y $x_o(t)$ las componentes par e impar de e^{jt} , respectivamente.

$$e^{jt} = x_e(t) + x_o(t)$$

De las ecuaciones (1.5) y (1.6), y con el uso de la fórmula de Euler, obtenemos

$$x_e(t) = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt}) = \cos t$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}(e^{jt} - e^{-jt}) = j \operatorname{sen} t$$

1.7. Demuestre que el producto de dos señales par o de dos impar es una señal par y que el producto de una señal par y una impar es una señal impar.

Sea $x(t) = x_1(t)x_2(t)$. Si tanto $x_1(t)$ como $x_2(t)$ son pares, entonces

$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

y $x(t)$ es par. Si tanto $x_1(t)$ como $x_2(t)$ son impar, entonces

$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = -x_1(t)[-x_2(t)] = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

y $x(t)$ es par. Si $x_1(t)$ es par y $x_2(t)$ es impar, entonces

$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = x_1(t)[-x_2(t)] = -x_1(t)x_2(t) = -x(t)$$

y $x(t)$ es impar. Observe que en la demostración anterior, la variable t representa una variable continua o una discreta.

1.8. Demuestre que

a) Si $x(t)$ y $x[n]$ son par, entonces
$$\int_{-a}^a x(t) dt = 2 \int_0^a x(t) dt \tag{1.75a}$$

$$\sum_{n=-k}^k x[n] = x[0] + 2 \sum_{n=1}^k x[n] \tag{1.75b}$$

b) Si $x(t)$ y $x[n]$ son impar, entonces $x(0) = 0$ y $x[0] = 0$ (1.76)

$$\int_{-a}^a x(t) dt = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{n=-k}^k x[n] = 0 \tag{1.77}$$

a) Podemos escribir
$$\int_{-a}^a x(t) dt = \int_{-a}^0 x(t) dt + \int_0^a x(t) dt$$

Si se asigna $t = -\lambda$ en la primera integral del lado derecho, obtenemos

$$\int_{-a}^0 x(t) dt = \int_a^0 x(-\lambda)(-d\lambda) = \int_0^a x(-\lambda) d\lambda$$

Puesto que $x(t)$ es par, es decir, $x(-\lambda) = x(\lambda)$, tenemos que

$$\int_0^a x(-\lambda) d\lambda = \int_0^a x(\lambda) d\lambda = \int_0^a x(t) dt$$

Por tanto,
$$\int_{-a}^a x(t) dt = \int_0^a x(t) dt + \int_0^a x(t) dt = 2 \int_0^a x(t) dt$$

De manera similar,
$$\sum_{n=-k}^k x[n] = \sum_{n=-k}^{-1} x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^k x[n]$$

Si se asigna $n = -m$ en el primer término del lado derecho, obtenemos

$$\sum_{n=-k}^{-1} x[n] = \sum_{m=1}^k x[-m]$$

Ya que $x[n]$ es par, es decir, $x[-m] = x[m]$, tenemos que

$$\sum_{m=1}^k x[-m] = \sum_{m=1}^k x[m] = \sum_{n=1}^k x[n]$$

Por consiguiente,

$$\sum_{n=-k}^k x[n] = \sum_{n=1}^k x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^k x[n] = x[0] + 2 \sum_{n=1}^k x[n]$$

b) Como $x(t)$ y $x[n]$ son impar, es decir, $x(-t) = -x(t)$ y $x[-n] = -x[n]$, tenemos que

$$x(-0) = -x(0) \quad \text{y} \quad x[-0] = -x[0]$$

Por tanto, $x(-0) = x(0) = -x(0) \Rightarrow x(0) = 0$

$$x[-0] = x[0] = -x[0] \Rightarrow x[0] = 0$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a x(t) dt &= \int_{-a}^0 x(t) dt + \int_0^a x(t) dt = \int_0^a x(-\lambda) d\lambda + \int_0^a x(t) dt \\ &= -\int_0^a x(\lambda) d\lambda + \int_0^a x(t) dt = -\int_0^a x(t) dt + \int_0^a x(t) dt = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y \quad \sum_{n=-k}^k x[n] &= \sum_{n=-k}^{-1} x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^k x[n] = \sum_{m=1}^k x[-m] + x[0] + \sum_{n=1}^k x[n] \\ &= -\sum_{m=1}^k x[m] + x[0] + \sum_{n=1}^k x[n] = -\sum_{n=1}^k x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^k x[n] \\ &= x[0] = 0\end{aligned}$$

en vista de la ecuación (1.76).

1.9. Demuestre que la señal exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

es periódica y que su periodo fundamental es $2\pi/\omega_0$.

Por la ecuación (1.7), $x(t)$ será periódica si $e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}$

Como $e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$

debemos tener

$$e^{j\omega_0 T} = 1 \quad (1.78)$$

Si $\omega_0 = 0$, entonces $x(t) = 1$, que es periódica para cualquier valor de T . Si $\omega_0 \neq 0$, la ecuación (1.78) se cumple si

$$\omega_0 T = m2\pi \quad \text{o} \quad T = m \frac{2\pi}{\omega_0} \quad m = \text{entero positivo}$$

De este modo el periodo fundamental T_0 , el valor de T positivo más pequeño, de $x(t)$ está dado por $2\pi/\omega_0$.

1.10. Demuestre que la señal senoidal $x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$

es periódica y que su periodo fundamental es $2\pi/\omega_0$.

La señal senoidal $x(t)$ será periódica si

$$\cos[\omega_0(t+T) + \theta] = \cos(\omega_0 t + \theta)$$

Observamos que $\cos[\omega_0(t+T) + \theta] = \cos[\omega_0 t + \theta + \omega_0 T] = \cos(\omega_0 t + \theta)$

si $\omega_0 T = m2\pi \quad \text{o} \quad T = m \frac{2\pi}{\omega_0} \quad m = \text{entero positivo}$

De esta manera, el periodo fundamental T_0 de $x(t)$ está dado por $2\pi/\omega_0$.

1.11. Demuestre que la secuencia exponencial compleja

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

es periódica sólo si $\Omega_0/2\pi$ es un número racional.

Por la ecuación (1.9), $x[n]$ será periódica si

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} e^{j\Omega_0 N} = e^{j\Omega_0 n}$$

o $e^{j\Omega_0 N} = 1$ (1.79)

La ecuación (1.79) se cumple sólo si

$$\Omega_0 N = m2\pi \quad m = \text{entero positivo}$$

o $\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} = \text{número racional}$ (1.80)

De este modo, $x[n]$ es periódica sólo si $\Omega_0/2\pi$ es un número racional.

1.12. Sea $x(t)$ la señal exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

con frecuencia en radianes ω_0 y periodo fundamental $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Considere la secuencia de tiempo discreto $x[n]$ obtenida mediante un muestreo uniforme de $x(t)$ con intervalo de muestreo T_s . Esto es,

$$x[n] = x(nT_s) = e^{j\omega_0 nT_s}$$

Encuentre la condición sobre el valor de T_s de modo que $x[n]$ sea periódica.

Si $x[n]$ es periódica con periodo fundamental N_0 , entonces

$$e^{j\omega_0(n+N_0)T_s} = e^{j\omega_0 nT_s} e^{j\omega_0 N_0 T_s} = e^{j\omega_0 nT_s}$$

Así, debemos tener $e^{j\omega_0 N_0 T_s} = 1 \Rightarrow \omega_0 N_0 T_s = \frac{2\pi}{T_0} N_0 T_s = m2\pi$ $m =$ entero positivo

o
$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{m}{N_0} = \text{número racional} \tag{1.81}$$

De este modo, $x[n]$ es periódica si la razón T_s/T_0 del intervalo de muestreo y el periodo fundamental de $x(t)$ es un número racional.

Observe que la condición anterior también es verdadera para señales senoidales $x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$.

1.13. Considere la señal senoidal

$$x(t) = \cos 15t$$

a) Encuentre el valor del intervalo de muestreo T_s tal que $x[n] = x(nT_s)$ sea una secuencia periódica.

b) Encuentre el periodo fundamental de $x[n] = x(nT_s)$ si $T_s = 0.1\pi$ segundos.

a) El periodo fundamental de $x(t)$ es $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/15$. Por la ecuación (1.81), $x[n] = x(nT_s)$ es periódica si

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{T_s}{2\pi/15} = \frac{m}{N_0} \tag{1.82}$$

donde m y N_0 son enteros positivos. De este modo, el valor requerido para T_s está dado por

$$T_s = \frac{m}{N_0} T_0 = \frac{m}{N_0} \frac{2\pi}{15} \tag{1.83}$$

b) Al sustituir $T_s = 0.1\pi = \pi/10$ en la ecuación (1.82), tenemos que

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{\pi/10}{2\pi/15} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

De esta manera, $x[n] = x(nT_s)$ es periódica. Por la ecuación (1.82)

$$N_0 = m \frac{T_0}{T_s} = m \frac{4}{3}$$

El entero positivo más pequeño N_0 se obtiene con $m = 3$. Así, el periodo fundamental de $x[n] = x(0.1\pi n)$ es $N_0 = 4$.

1.14. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ señales periódicas con periodos fundamentales T_1 y T_2 , respectivamente. ¿Bajo qué condiciones la suma $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ es periódica, y cuál es el periodo fundamental de $x(t)$ si ésta es periódica?

Puesto que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son periódicas con periodos fundamentales T_1 y T_2 , respectivamente, tenemos que

$$x_1(t) = x_1(t + T_1) = x_1(t + mT_1) \quad m = \text{entero positivo}$$

$$x_2(t) = x_2(t + T_2) = x_2(t + kT_2) \quad k = \text{entero positivo}$$

De este modo,

$$x(t) = x_1(t + mT_1) + x_2(t + kT_2)$$

Para que $x(t)$ sea periódica con un periodo T se necesita que

$$x(t + T) = x_1(t + T) + x_2(t + T) = x_1(t + mT_1) + x_2(t + kT_2)$$

De esta manera, debemos tener $mT_1 = kT_2 = T$ (1.84)

o $\frac{T_1}{T_2} = \frac{k}{m} = \text{número racional}$ (1.85)

En otras palabras, la suma de dos señales periódicas es periódica sólo si la razón de sus periodos respectivos se puede expresar como un número racional. Entonces el periodo fundamental es el mínimo común múltiplo de T_1 y T_2 , y está dado por la ecuación (1.84) si los enteros m y k son primos relativos. Si la razón T_1/T_2 es un número irracional, entonces las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ no tienen un periodo común y $x(t)$ no puede ser periódica.

- 1.15.** Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ secuencias periódicas con periodos fundamentales N_1 y N_2 , respectivamente. ¿Bajo qué condiciones la suma $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$ es periódica, y cuál es el periodo fundamental de $x[n]$ si ésta es periódica?

Puesto que $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son periódicas con periodos fundamentales N_1 y N_2 , respectivamente, tenemos que

$$x_1[n] = x_1[n + N_1] = x_1[n + mN_1] \quad m = \text{entero positivo}$$

$$x_2[n] = x_2[n + N_2] = x_2[n + kN_2] \quad k = \text{entero positivo}$$

Así, $x[n] = x_1[n + mN_1] + x_2[n + kN_2]$

Para que $x[n]$ sea periódica con periodo N se necesita que

$$x[n + N] = x_1[n + N] + x_2[n + N] = x_1[n + mN_1] + x_2[n + kN_2]$$

De este modo debemos tener

$$mN_1 = kN_2 = N \quad (1.86)$$

Siempre podemos encontrar enteros m y k para satisfacer la ecuación (1.86), y entonces se obtiene que la suma de dos secuencias periódicas también es periódica y su periodo fundamental es el mínimo común múltiplo de N_1 y N_2 .

- 1.16.** Determine si cada una de las siguientes señales es periódica o no. En caso de ser periódica, determine su periodo fundamental.

a) $x(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

f) $x(t) = e^{j[(\pi/2)t - 1]}$

b) $x(t) = \text{sen}\frac{2\pi}{3}t$

g) $x[n] = e^{j(\pi/4)n}$

c) $x(t) = \cos\frac{\pi}{3}t + \text{sen}\frac{\pi}{4}t$

h) $x[n] = \cos\frac{1}{4}n$

d) $x(t) = \cos t + \text{sen}\sqrt{2}t$

i) $x[n] = \cos\frac{\pi}{3}n + \text{sen}\frac{\pi}{4}n$

e) $x(t) = \text{sen}^2 t$

j) $x[n] = \cos^2\frac{\pi}{8}n$

a) $x(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \omega_0 = 1$

$x(t)$ es periódica con periodo fundamental $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$.

b) $x(t) = \text{sen}\frac{2\pi}{3}t \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$

$x(t)$ es periódica con periodo fundamental $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 3$.

c) $x(t) = \cos\frac{\pi}{3}t + \text{sen}\frac{\pi}{4}t = x_1(t) + x_2(t)$

donde $x_1(t) = \cos(\pi/3)t = \cos\omega_1 t$ es periódica con $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 6$ y $x_2(t) = \text{sen}(\pi/4)t = \text{sen}\omega_2 t$ es periódica con $T_2 = 2\pi/\omega_2 = 8$. Puesto que $T_1/T_2 = 6/8 = 3/4$ es un número racional, $x(t)$ es periódica con periodo fundamental $T_0 = 4T_1 = 3T_2 = 24$.

- d) $x(t) = \cos t + \sin \sqrt{2}t = x_1(t) + x_2(t)$
 donde $x_1(t) = \cos t = \cos \omega_1 t$ es periódica con $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 2\pi$ y $x_2(t) = \sin \sqrt{2}t = \sin \omega_2 t$ es periódica con $T_2 = 2\pi/\omega_2 = \sqrt{2}\pi$. Puesto que $T_1/T_2 = \sqrt{2}$ es un número irracional, $x(t)$ es no periódica.
- e) Por medio de la identidad trigonométrica $\sin^2 \theta = 1/2(1 - \cos 2\theta)$, podemos escribir

$$x(t) = \sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t = x_1(t) + x_2(t)$$

donde $x_1(t) = 1/2$ es una señal de cd con un periodo arbitrario y $x_2(t) = -1/2 \cos 2t = -1/2 \cos \omega_2 t$ es periódica con $T_2 = 2\pi/\omega_2 = \pi$. De esta forma, $x(t)$ es periódica con periodo fundamental $T_0 = \pi$.

- f) $x(t) = e^{j[(\pi/2)t-1]} = e^{-j} e^{j(\pi/2)t} = e^{-j} e^{j\omega_0 t} \rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{2}$
 $x(t)$ es periódica con periodo fundamental $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 4$.

- g) $x[n] = e^{j(\pi/4)n} = e^{j\Omega_0 n} \rightarrow \Omega_0 = \frac{\pi}{4}$

Como $\Omega_0/2\pi = 1/8$ es un número racional, $x[n]$ es periódica, y por la ecuación (1.55), el periodo fundamental es $N_0 = 8$.

- h) $x[n] = \cos \frac{1}{4}n = \cos \Omega_0 n \rightarrow \Omega_0 = \frac{1}{4}$

Puesto que $\theta_0/2\pi = 1/8\pi$ no es un número racional, $x[n]$ no es periódica.

- i) $x[n] = \cos \frac{\pi}{3}n + \sin \frac{\pi}{4}n = x_1[n] + x_2[n]$

donde

$$x_1[n] = \cos \frac{\pi}{3}n = \cos \Omega_1 n \rightarrow \Omega_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$x_2[n] = \sin \frac{\pi}{4}n = \cos \Omega_2 n \rightarrow \Omega_2 = \frac{\pi}{4}$$

Puesto que $\Omega_1/2\pi = 1/6$ (= número racional), $x_1[n]$ es periódica, con periodo fundamental $N_1 = 6$, y ya que $\Omega_2/2\pi = 1/8$ (= número racional), $x_2[n]$ es periódica con periodo fundamental $N_2 = 8$. De esta manera, por el resultado del problema 1.15, $x[n]$ es periódica con un periodo fundamental dado por el mínimo común múltiplo de 6 y 8, es decir, $N_0 = 24$.

- j) Mediante la identidad trigonométrica $\cos^2 \theta = 1/2(1 + \cos 2\theta)$, podemos escribir

$$x[n] = \cos^2 \frac{\pi}{8}n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4}n = x_1[n] + x_2[n]$$

donde $x_1[n] = 1/2 = 1/2(1)^n$ es periódica con periodo fundamental $N_1 = 1$, y $x_2[n] = 1/2 \cos(\pi/4)n = 1/2 \cos \Omega_2 n \rightarrow \Omega_2 = \pi/4$. Ya que $\Omega_2/2\pi = 1/8$ (= número racional), $x_2[n]$ es periódica con un periodo fundamental $N_2 = 8$. Así, $x[n]$ es periódica con un periodo fundamental $N_0 = 8$ (el mínimo común múltiplo de N_1 y N_2).

1.17. Demuestre que si $x(t + T) = x(t)$, entonces

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t) dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(t) dt \tag{1.87}$$

$$\int_0^T x(t) dt = \int_a^{a+T} x(t) dt \tag{1.88}$$

para cualquier real α, β y a .

Si $x(t + T) = x(t)$, entonces siendo $t = \tau - T$, tenemos que

$$x(\tau - T + T) = x(\tau) = x(\tau - T)$$

y
$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t) dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(\tau - T) d\tau = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(\tau) d\tau = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(t) dt$$

A continuación, el lado derecho de la ecuación (1.88) se puede escribir como

$$\int_a^{a+T} x(t) dt = \int_a^0 x(t) dt + \int_0^{a+T} x(t) dt$$

Por la ecuación (1.87) tenemos que
$$\int_a^0 x(t) dt = \int_{a+T}^T x(t) dt$$

De este modo,

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} x(t) dt &= \int_{a+T}^T x(t) dt + \int_0^{a+T} x(t) dt \\ &= \int_0^{a+T} x(t) dt + \int_{a+T}^T x(t) dt = \int_0^T x(t) dt\end{aligned}$$

1.18. Demuestre que si $x(t)$ es periódica con periodo fundamental T_0 , entonces la potencia promedio normalizada P de $x(t)$ definida por la ecuación (1.15) es igual a la potencia promedio de $x(t)$ sobre cualquier intervalo de longitud T_0 , es decir,

$$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt \quad (1.89)$$

Por la ecuación (1.15),

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Permitiendo que se tome el límite de manera tal que T sea un múltiplo entero del periodo fundamental, $T = kT_0$, el contenido de energía normalizado total de $x(t)$ sobre un intervalo de longitud T es k veces el contenido de energía normalizado sobre un periodo. Entonces

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{kT_0} k \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt \right] = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt$$

1.19. Las siguientes igualdades se utilizan en muchas ocasiones en este texto. Compruebe la validez de cada una de ellas.

$$a) \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} & \alpha \neq 1 \\ N & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.90)$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha} \quad |\alpha| < 1 \quad (1.91)$$

$$c) \sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \quad |\alpha| < 1 \quad (1.92)$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2} \quad |\alpha| < 1 \quad (1.93)$$

a) Sea

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{N-1} \quad (1.94)$$

Entonces

$$\alpha S = \alpha \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^N \quad (1.95)$$

Restando la ecuación (1.95) de la ecuación (1.94) obtenemos

$$(1 - \alpha) S = 1 - \alpha^N$$

Por tanto, si $\alpha \neq 1$, tenemos que

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} \quad (1.96)$$

Si $\alpha = 1$, entonces por la ecuación (1.94)

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = N$$

b) Para $|\alpha| < 1$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha^N = 0$. Entonces por la ecuación (1.96) obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

c) Con la ecuación (1.91) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n &= \alpha^k + \alpha^{k+1} + \alpha^{k+2} + \dots \\ &= \alpha^k (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots) = \alpha^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

d) Al tomar la derivada de ambos lados de la ecuación (1.91) con respecto a α , tenemos que

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \right) = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right) = \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \quad \text{y} \quad \frac{d}{d\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\alpha} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n$$

Por consiguiente,
$$\frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \quad \text{o} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2}$$

1.20. Determine si las siguientes señales son de energía, de potencia o de ninguna de ambas clases.

a) $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$

d) $x[n] = (-0.5)^n u[n]$

b) $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$

e) $x[n] = u[n]$

c) $x(t) = tu(t)$

f) $x[n] = 2e^{j3n}$

a) $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} < \infty$

De esta manera, $x(t)$ es una señal de energía.

b) La señal senoidal $x(t)$ es periódica con $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Entonces, por el resultado del problema 1.18, la potencia promedio de $x(t)$ es

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [x(t)]^2 dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt \\ &= \frac{A^2 \omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\theta)] dt = \frac{A^2}{2} < \infty \end{aligned}$$

De este modo, $x(t)$ es una señal de potencia. Observe que las señales periódicas son, en general, de potencia.

c) $E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T/2} t^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} t^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty$$

De esta manera, $x(t)$ no es señal de energía ni de potencia.

d) Por la definición (1.16) y mediante la ecuación (1.91) obtenemos

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n = \frac{1}{1 - 0.25} = \frac{4}{3} < \infty$$

Así, $x[n]$ es una señal de energía.

e) Por la definición (1.17)

$$\begin{aligned} P &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=0}^N 1^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} (N + 1) = \frac{1}{2} < \infty \end{aligned}$$

De esta forma, $x[n]$ es una señal de potencia.

f) Puesto que $|x[n]| = |2e^{j3n}| = 2|e^{j3n}| = 2$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N 2^2$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} 4(2N+1) = 4 < \infty$$

De esta manera, $x[n]$ es una señal de potencia.

SEÑALES BÁSICAS

1.21. Demuestre que

$$u(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases} \quad (1.97)$$

Sea $\tau = -t$. Entonces por la definición (1.18),

$$u(-t) = u(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

Puesto que $\tau > 0$ y $\tau < 0$ implican, respectivamente, que $t < 0$ y $t > 0$, obtenemos

$$u(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$$

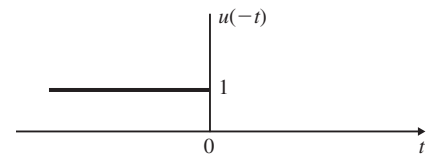


Figura 1-26

la cual se ilustra en la figura 1-26.

1.22. La figura 1-27 muestra una señal de tiempo continuo $x(t)$. Dibuje y rotule cada una de las señales siguientes

- $x(t)u(1-t)$
- $x(t)[u(t) - u(t-1)]$
- $x(t)\delta(t - \frac{3}{2})$

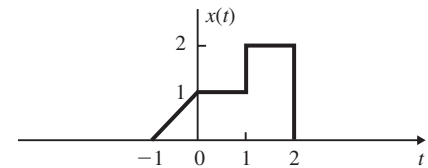


Figura 1-27

a) Por la definición (1.19)

$$u(1-t) = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

y $x(t)u(1-t)$ se dibuja en la figura 1-28a).

b) Por las definiciones (1.18) y (1.19)

$$u(t) - u(t-1) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

y $x(t)[u(t) - u(t-1)]$ se dibuja en la figura 1-28b).

c) Por la ecuación (1.26)

$$x(t)\delta\left(t - \frac{3}{2}\right) = x\left(\frac{3}{2}\right)\delta\left(t - \frac{3}{2}\right) = 2\delta\left(t - \frac{3}{2}\right)$$

la cual se dibuja en la figura 1-28c).

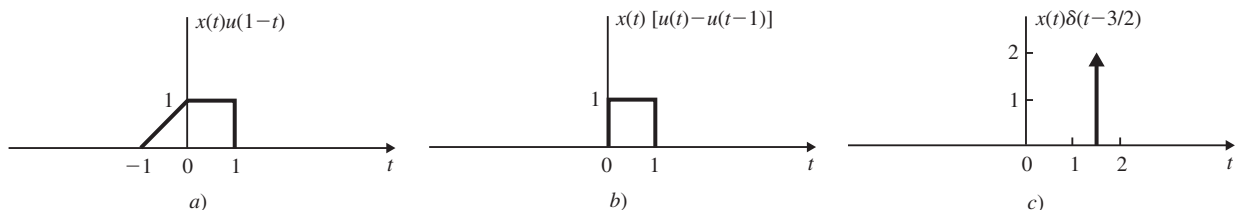


Figura 1-28

1.23. La figura 1-29 muestra una señal de tiempo discreto $x[n]$. Dibuje y rotule cada una de las señales siguientes:

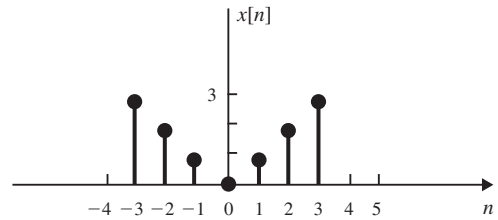


Figura 1-29

- a) $x[n]u[1 - n]$
- b) $x[n]\{u[n + 2] - u[n]\}$
- c) $x[n]\delta[n - 1]$

a) Por la definición (1.44)
$$u[1 - n] = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

y $x[n]u[1 - n]$ se dibuja en la figura 1-30a).

- b) Por las definiciones (1.43) y (1.44)

$$u[n + 2] - u[n] = \begin{cases} 1 & -2 \leq n < 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

y $x[n]\{u[n + 2] - u[n]\}$ se dibuja en la figura 1-30b).

- c) Por la definición (1.48)

$$x[n]\delta[n - 1] = x[1]\delta[n - 1] = \delta[n - 1] = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

misma que se dibuja en la figura 1-30c).

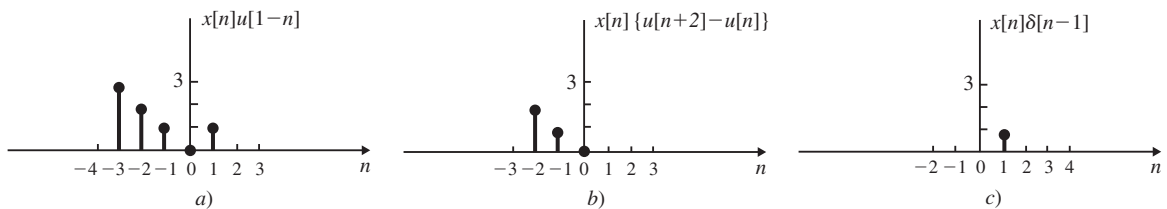


Figura 1-30

1.24. La función escalón unitario $u(t)$ puede definirse como una función generalizada mediante la siguiente relación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)u(t) dt = \int_0^{\infty} \phi(t) dt \tag{1.98}$$

donde $\phi(t)$ es una función de prueba que es integrable sobre $0 < t < \infty$. Por medio de esta definición, demuestre que

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Al reescribir la ecuación (1.98) como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)u(t) dt = \int_{-\infty}^0 \phi(t)u(t) dt + \int_0^{\infty} \phi(t)u(t) dt = \int_0^{\infty} \phi(t) dt$$

obtenemos

$$\int_{-\infty}^0 \phi(t)u(t) dt = \int_0^{\infty} \phi(t)[1 - u(t)] dt$$

Esto puede ser verdadero sólo si

$$\int_{-\infty}^0 \phi(t)u(t) dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} \phi(t)[1 - u(t)] dt = 0$$

Estas condiciones implican que

$$\phi(t)u(t) = 0, t < 0 \quad \text{y} \quad \phi(t)[1 - u(t)] = 0, t > 0$$

Puesto que $\phi(t)$ es arbitraria, tenemos que

$$u(t) = 0, t < 0 \quad \text{y} \quad 1 - u(t) = 0, t > 0$$

es decir,

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

1.25. Verifique las ecuaciones (1.23) y (1.24); es decir,

$$a) \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad b) \delta(-t) = \delta(t)$$

La demostración estará basada en la siguiente propiedad de *equivalencia*:

Sean $g_1(t)$ y $g_2(t)$ funciones generalizadas; entonces la propiedad de equivalencia establece que $g_1(t) = g_2(t)$ si y sólo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) g_1(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) g_2(t) dt \quad (1.99)$$

para todas las funciones de prueba adecuadamente definidas $\phi(t)$.

a) Con un cambio de variable, $at = \tau$, por tanto $t = \tau/a$, $dt = (1/a) d\tau$, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\text{Si } a > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(at) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{a} \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{|a|} \phi(0)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } a < 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(at) dt &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) \delta(\tau) d\tau = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) \delta(\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{a} \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{|a|} \phi(0) \end{aligned}$$

$$\text{Así, para cualquier } a \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(at) dt = \frac{1}{|a|} \phi(0)$$

Ahora, mediante la ecuación (1.20) para $\phi(0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(at) dt &= \frac{1}{|a|} \phi(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \frac{1}{|a|} \delta(t) dt \end{aligned}$$

para cualquier $\phi(t)$. Entonces, por la propiedad de equivalencia (1.99), obtenemos

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

b) Estableciendo $a = -1$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$\delta(-t) = \frac{1}{|-1|} \delta(t) = \delta(t)$$

lo que muestra que $\delta(t)$ es una función par.

1.26. a) Verifique la ecuación (1.26): $x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$
si $x(t)$ es continua en $t = t_0$.

b) Verifique la ecuación (1.25): $x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t)$
si $x(t)$ es continua en $t = 0$.

a) Si $x(t)$ es continua en $t = t_0$, entonces por la definición (1.22) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) [x(t) \delta(t - t_0)] dt &= \int_{-\infty}^{\infty} [\phi(t) x(t)] \delta(t - t_0) dt = \phi(t_0) x(t_0) \\ &= x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) [x(t_0) \delta(t - t_0)] dt \end{aligned}$$

para toda $\phi(t)$ que sea continua en $t = t_0$. Por tanto, por la propiedad de equivalencia (1.99) concluimos que

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$$

b) Al establecer que $t_0 = 0$ en las expresiones anteriores, obtenemos

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

1.27. Demuestre que

a) $t\delta(t) = 0$

b) $\text{sen } t\delta(t) = 0$

c) $\cos t\delta(t - \pi) = -\delta(t - \pi)$

Al usar las ecuaciones (1.25) y (1.26), obtenemos

a) $t\delta(t) = (0)\delta(t) = 0$

b) $\text{sen } t\delta(t) = (\text{sen } 0)\delta(t) = (0)\delta(t) = 0$

c) $\cos t\delta(t - \pi) = (\cos \pi)\delta(t - \pi) = (-1)\delta(t - \pi) = -\delta(t - \pi)$

1.28. Verifique la ecuación (1.30):

$$\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

De la ecuación (1.28) tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)u'(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t)u(t) dt \tag{1.100}$$

donde $\phi(t)$ es una función de prueba continua en $t = 0$ y se anula fuera de un intervalo fijo. De este modo, $\phi'(t)$ existe y es integrable sobre $0 < t < \infty$ y $\phi(\infty) = 0$. Entonces, usando la ecuación (1.98) o la definición (1.18), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)u'(t) dt &= - \int_0^{\infty} \phi'(t) dt = -\phi(t)\Big|_0^{\infty} = -[\phi(\infty) - \phi(0)] \\ &= \phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t) dt \end{aligned}$$

Ya que $\phi(t)$ es arbitraria y por la propiedad de equivalencia (1.99), concluimos que

$$\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

1.29. Demuestre que las siguientes propiedades se cumplen para la derivada de $\delta(t)$:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta'(t) dt = -\phi'(0)$ donde $\phi'(0) = \left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_{t=0}$ **(1.101)**

b) $t\delta'(t) = -\delta(t)$ **(1.102)**

a) Utilizando las ecuaciones (1.28) y (1.20), tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta'(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t)\delta(t) dt = -\phi'(0)$$

b) Utilizando las ecuaciones (1.101) y (1.20), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)[t\delta'(t)] dt &= \int_{-\infty}^{\infty} [t\phi(t)]\delta'(t) dt = -\frac{d}{dt}[t\phi(t)]\Big|_{t=0} \\ &= -[\phi(t) + t\phi'(t)]\Big|_{t=0} = -\phi(0) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)[- \delta(t)] dt \end{aligned}$$

De este modo, por la propiedad de equivalencia (1.99), concluimos que

$$t\delta'(t) = -\delta(t)$$

1.30. Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_{-1}^1 (3t^2 + 1)\delta(t) dt$

b) $\int_1^2 (3t^2 + 1)\delta(t) dt$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + \cos \pi t)\delta(t - 1) dt$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta(2t - 2) dt$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta'(t) dt$

a) Por la ecuación (1.21), con $a = -1$ y $b = 1$, tenemos que

$$\int_{-1}^1 (3t^2 + 1)\delta(t) dt = (3t^2 + 1)\Big|_{t=0} = 1$$

b) Por la ecuación (1.21), con $a = 1$ y $b = 2$, tenemos que

$$\int_1^2 (3t^2 + 1)\delta(t) dt = 0$$

c) Por la ecuación (1.22),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + \cos \pi t)\delta(t-1) dt &= (t^2 + \cos \pi t)\Big|_{t=1} \\ &= 1 + \cos \pi = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

d) Usando las ecuaciones (1.22) y (1.23), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta(2t-2) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta[2(t-1)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \frac{1}{|2|} \delta(t-1) dt = \frac{1}{2} e^{-t}\Big|_{t=1} = \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

e) Por la ecuación (1.29)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta'(t) dt = -\frac{d}{dt}(e^{-t})\Big|_{t=0} = e^{-t}\Big|_{t=0} = 1$$

1.31. Encuentre y dibuje las primeras derivadas de las siguientes señales:

a) $x(t) = u(t) - u(t-a), a > 0$

b) $x(t) = t[u(t) - u(t-a)], a > 0$

c) $x(t) = \operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$

a) Utilizando la ecuación (1.30), tenemos que

$$u'(t) = \delta(t) \quad \text{y} \quad u'(t-a) = \delta(t-a)$$

Entonces

$$x'(t) = u'(t) - u'(t-a) = \delta(t) - \delta(t-a)$$

Las señales $x(t)$ y $x'(t)$ se dibujan en la figura 1-31a).

b) Por medio de la regla para la diferenciación del producto de dos funciones y el resultado del inciso a), tenemos que

$$x'(t) = [u(t) - u(t-a)] + t[\delta(t) - \delta(t-a)]$$

Pero por las ecuaciones (1.25) y (1.26)

$$t\delta(t) = (0)\delta(t) = 0 \quad \text{y} \quad t\delta(t-a) = a\delta(t-a)$$

De este modo,

$$x'(t) = u(t) - u(t-a) - a\delta(t-a)$$

Las señales $x(t)$ y $x'(t)$ se dibujan en la figura 1-31b).

c) $x(t) = \operatorname{sgn} t$ puede reescribirse como

$$x(t) = \operatorname{sgn} t = u(t) - u(-t)$$

Entonces, usando la ecuación (1.30), obtenemos

$$x'(t) = u'(t) - u'(-t) = \delta(t) - [-\delta(t)] = 2\delta(t)$$

Las señales $x(t)$ y $x'(t)$ se dibujan en la figura 1-31c).

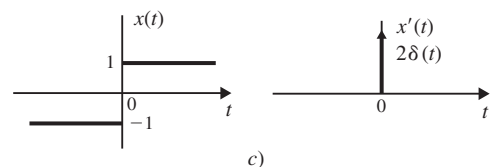
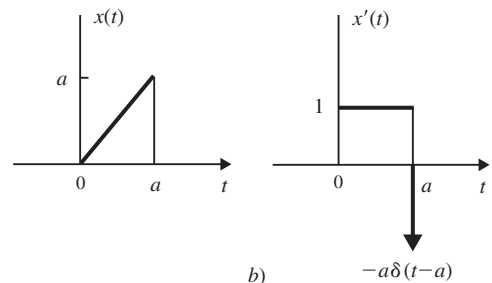
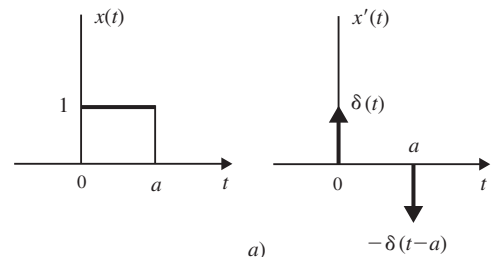


Figura 1-31

SISTEMAS Y CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS

1.32. Considere el circuito RC ilustrado en la figura 1-32. Encuentre la relación entre la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$

- a) Si $x(t) = v_s(t)$ y $y(t) = v_c(t)$.
- b) Si $x(t) = v_s(t)$ y $y(t) = i(t)$.
- a) Al aplicar la ley del voltaje de Kirchoff al circuito RC de la figura 1-32, obtenemos

$$v_s(t) = Ri(t) = v_c(t) \tag{1.103}$$

La corriente $i(t)$ y el voltaje $v_c(t)$ se encuentran relacionados por

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} \tag{1.104}$$

Si se establece que $v_s(t) = x(t)$ y $v_c(t) = y(t)$, y sustituimos la ecuación (1.104) en la ecuación (1.103), obtenemos

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

o
$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} x(t) \tag{1.105}$$

De esta forma, la relación entrada-salida del circuito RC se describe mediante una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes.

- b) Al integrar la ecuación (1.104), tenemos que

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \tag{1.106}$$

Sustituyendo la ecuación (1.106) en la ecuación (1.103) y haciendo que $v_s(t) = x(t)$ y que $i(t) = y(t)$, obtenemos

$$Ry(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = x(t)$$

o
$$y(t) + \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = \frac{1}{R} x(t)$$

Diferenciando con respecto a t ambos lados de la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{R} \frac{dx(t)}{dt} \tag{1.107}$$

Así, la relación entrada-salida se describe mediante otra ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes.

1.33. Considere el capacitor que se ilustra en la figura 1-33. Sea la entrada $x(t) = i(t)$ y la salida $y(t) = v_c(t)$.

- a) Encuentre la relación entrada-salida.
- b) Determine si el sistema es *i)* sin memoria, *ii)* causal, *iii)* lineal; *iv)* invariante en el tiempo, o *v)* estable.
- a) Suponga que la capacitancia C es constante. El voltaje de salida $y(t)$ a través del capacitor y la corriente de entrada $x(t)$ se encuentran relacionados [ecuación (1.106)]

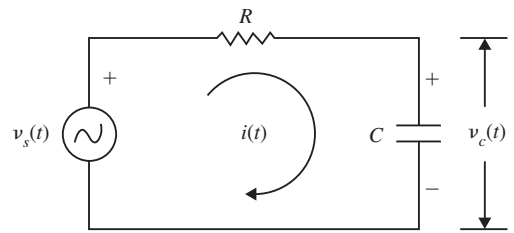


Figura 1-32 Circuito RC.

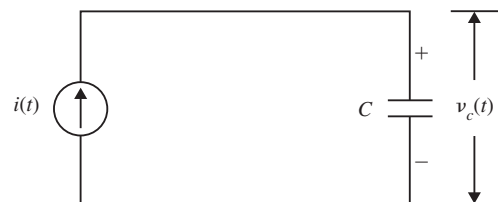


Figura 1-33

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \tag{1.108}$$

- b) i) De la ecuación (1.108) se ve que la salida $y(t)$ depende de los valores pasados y presentes de la entrada. Así, el sistema tiene memoria.
 ii) Puesto que la salida $y(t)$ no depende de los valores futuros de la entrada, el sistema es causal.
 iii) Sea $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{T}\{x(t)\} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t [\alpha_1 x_1(\tau) + \alpha_2 x_2(\tau)] d\tau \\ &= \alpha_1 \left[\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau \right] + \alpha_2 \left[\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \right] \\ &= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \end{aligned}$$

De esta forma se satisface la propiedad de superposición (1.68) y el sistema es lineal.

- iv) Sea $y_1(t)$ la salida producida por la corriente de entrada desplazada $x_1(t) = x(t - t_0)$. Entonces

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathbf{T}\{x(t - t_0)\} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau - t_0) d\tau \\ &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\lambda) d\lambda = y(t - t_0) \end{aligned}$$

Por consiguiente, el sistema es invariante en el tiempo.

- v) Sea $x(t) = k_1 u(t)$, con $k_1 \neq 0$. Entonces

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t k_1 u(\tau) d\tau = \frac{k_1}{C} \int_0^t d\tau = \frac{k_1}{C} tu(t) = \frac{k_1}{C} r(t) \quad (1.109)$$

donde $r(t) = tu(t)$ se conoce como la función de *rampa unitaria* (figura 1-34). Puesto que $y(t)$ crece linealmente con el tiempo sin límite, el sistema no es estable en el sentido BIBO (entrada acotada, salida acotada, por sus siglas en inglés).

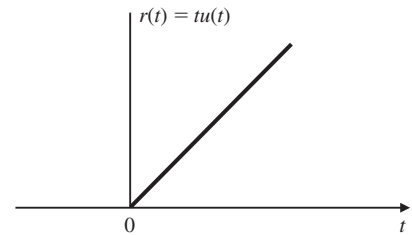


Figura 1-34 Función rampa unitaria.

- 1.34.** Considere el sistema mostrado en la figura 1-35. Determine si el sistema es a) sin memoria, b) causal, c) lineal, d) invariante en el tiempo, o e) estable.

- a) De la figura 1-35 tenemos que

$$x(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = x(t) \cos \omega_c t$$

Como el valor de salida $y(t)$ depende sólo de los valores presentes de entrada $x(t)$, el sistema es “sin memoria”, es decir, no tiene memoria.

- b) Puesto que la salida $y(t)$ no depende de los valores futuros de la entrada $x(t)$, el sistema es causal.
 c) Sea $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{T}\{x(t)\} = [\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] \cos \omega_c t \\ &= \alpha_1 x_1(t) \cos \omega_c t + \alpha_2 x_2(t) \cos \omega_c t \\ &= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \end{aligned}$$

De esta manera se satisface la propiedad de superposición (1.68) y el sistema es lineal.

- d) Sea $y_1(t)$ la salida producida por la entrada desplazada $x_1(t) = x(t - t_0)$. Entonces

$$y_1(t) = \mathbf{T}\{x(t - t_0)\} = x(t - t_0) \cos \omega_c t$$

$$\text{Pero} \quad y(t - t_0) = x(t - t_0) \cos \omega_c(t - t_0) \neq y_1(t)$$

Por tanto, el sistema no es invariante en el tiempo.

- e) Puesto que $|\cos \omega_c t| \leq 1$, tenemos que

$$|y(t)| = |x(t) \cos \omega_c t| \leq |x(t)|$$

De este modo, si la entrada $x(t)$ se encuentra acotada, entonces la salida $y(t)$ también está acotada y el sistema es estable en el sentido BIBO.

- 1.35.** Un sistema tiene una relación entrada-salida dada por

$$y = \mathbf{T}\{x\} = x^2 \quad (1.110)$$

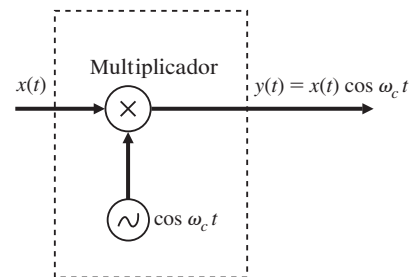


Figura 1-35 Multiplicador.

Demuestre que este sistema es no lineal.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\{x_1 + x_2\} &= (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \\ &\neq \mathbf{T}\{x_1\} + \mathbf{T}\{x_2\} = x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

De esta manera, el sistema es no lineal.

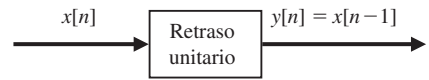


Figura 1-36 Elemento de retardo unitario.

1.36. El sistema de tiempo discreto mostrado en la figura 1-36 se conoce como elemento de *retraso unitario*. Determine si el sistema es *a)* sin memoria, *b)* causal, *c)* lineal, *d)* invariante en el tiempo, o *e)* estable.

a) La relación entrada-salida del sistema está dada por

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = x[n - 1] \tag{1.111}$$

Puesto que el valor de la salida en n depende de los valores de entrada en $n - 1$, el sistema tiene memoria.

b) Puesto que la salida no depende de los valores de entrada futuros, el sistema es causal.

c) Sea $x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$. Entonces

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathbf{T}\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \alpha_1 x_1[n - 1] + \alpha_2 x_2[n - 1] \\ &= \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n] \end{aligned}$$

De esta forma, se satisface la propiedad de superposición (1.68) y el sistema es lineal.

d) Sea $y_1[n]$ la respuesta a $x_1[n] = x[n - n_0]$. Entonces

$$y_1[n] = \mathbf{T}\{x_1[n]\} = x_1[n - 1] = x[n - 1 - n_0]$$

y

$$y[n - n_0] = x[n - n_0 - 1] = x[n - 1 - n_0] = y_1[n]$$

Por consiguiente, el sistema es invariante en el tiempo.

e) Puesto que $|y[n]| = |x[n - 1]| \leq k$ si $|x[n]| \leq k$ para toda n el sistema es estable en el sentido BIBO.

1.37. Encuentre la relación entrada-salida del sistema retroalimentado mostrado en la figura 1-37.

En la figura 1-37 la entrada para el elemento de retardo unitario es $x[n] - y[n]$. Así, la salida $y[n]$ del elemento de retardo unitario es [ecuación (1.111)]

$$y[n] = x[n - 1] - y[n - 1]$$

Al reacomodar los términos se obtiene

$$y[n] + y[n - 1] = x[n - 1] \tag{1.112}$$

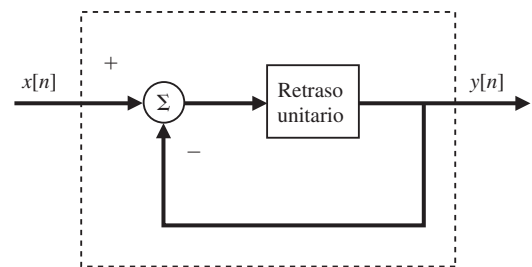


Figura 1-37

De este modo, la relación entrada-salida del sistema se describe con una ecuación en diferencias de primer orden con coeficientes constantes.

1.38. Un sistema tiene la relación entrada-salida dada por

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = nx[n] \tag{1.113}$$

Determine si el sistema es *a)* sin memoria, *b)* causal, *c)* lineal, *d)* invariante en el tiempo, o *e)* estable.

a) Puesto que el valor de la salida para n depende sólo del valor de entrada para n , el sistema no tiene memoria (es “sin memoria”).

b) Puesto que la salida no depende de los valores de entrada futuros, el sistema es causal.

c) Sea $x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$. Entonces

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathbf{T}\{x[n]\} = n\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} \\ &= \alpha_1 nx_1[n] + \alpha_2 nx_2[n] = \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n] \end{aligned}$$

De esta forma se satisface la propiedad de superposición (1.68) y el sistema es lineal.

d) Sea $y_1[n]$ la respuesta a $x_1[n] = x[n - n_0]$. Entonces

$$y_1[n] = \mathbf{T}\{x[n - n_0]\} = nx[n - n_0]$$

Pero $y[n - n_0] = (n - n_0)x[n - n_0] \neq y_1[n]$

Por consiguiente, el sistema no es invariante en el tiempo.

e) Sea $x[n] = u[n]$. Entonces $y[n] = nu[n]$. De esta manera, la secuencia escalón unitario acotada produce una secuencia de salida que crece sin límite (figura 1-38) y el sistema no es estable en el sentido BIBO.

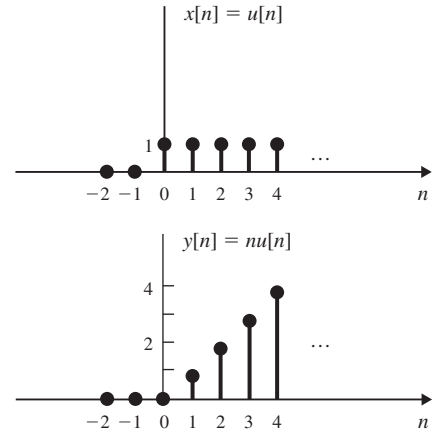


Figura 1-38

1.39. Un sistema tiene la relación entrada-salida dada por

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = x[k_0n] \tag{1.114}$$

donde k_0 es un entero positivo. ¿El sistema es invariante en el tiempo?

Sea $y_1[n]$ la respuesta a $x_1[n] = x[n - n_0]$. Entonces

$$y_1[n] = \mathbf{T}\{x_1[n]\} = x_1[k_0n] = x[k_0n - n_0]$$

Pero

$$y[n - n_0] = x[k_0(n - n_0)] \neq y_1[n]$$

Por consiguiente, el sistema no es invariante en el tiempo, a menos que $k_0 = 1$. Observe que el sistema descrito por la ecuación (1.114) se conoce como *compresor*. Crea la secuencia de salida mediante la selección de cada k_0 -ésima muestra de la secuencia de entrada. Así, es obvio que este sistema es variante en el tiempo.

1.40. Considere el sistema cuya relación entrada-salida está dada por la ecuación lineal

$$y = ax + b \tag{1.115}$$

donde x y y son la entrada y la salida del sistema, respectivamente, mientras que a y b son constantes. ¿Este sistema es lineal?

Si $b \neq 0$, entonces el sistema no es lineal debido a que $x = 0$ implica que $y = b \neq 0$. Si $b = 0$, entonces el sistema es lineal.

1.41. Se sabe que el sistema representado por \mathbf{T} en la figura 1-39 es invariante en el tiempo. Cuando las entradas al sistema son $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$, las salidas del sistema son $y_1[n]$, $y_2[n]$ y $y_3[n]$, como se muestra. Determine si el sistema es lineal.

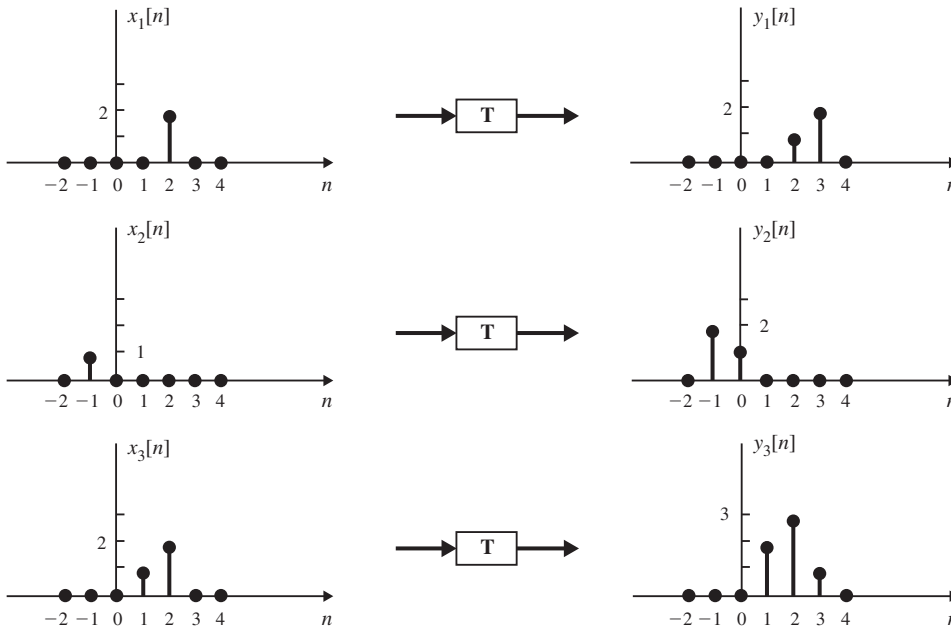


Figura 1-39

De la figura (1-39) se puede apreciar que

$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n - 2]$$

De esta forma, si \mathbf{T} es lineal, entonces

$$\mathbf{T}\{x_3[n]\} = \mathbf{T}\{x_1[n]\} + \mathbf{T}\{x_2[n - 2]\} = y_1[n] + y_2[n - 2]$$

lo cual se muestra en la figura 1-40. De las figuras 1-39 y 1-40 observamos que

$$y_3[n] \neq y_1[n] + y_2[n - 2]$$

Por tanto, el sistema es no lineal.

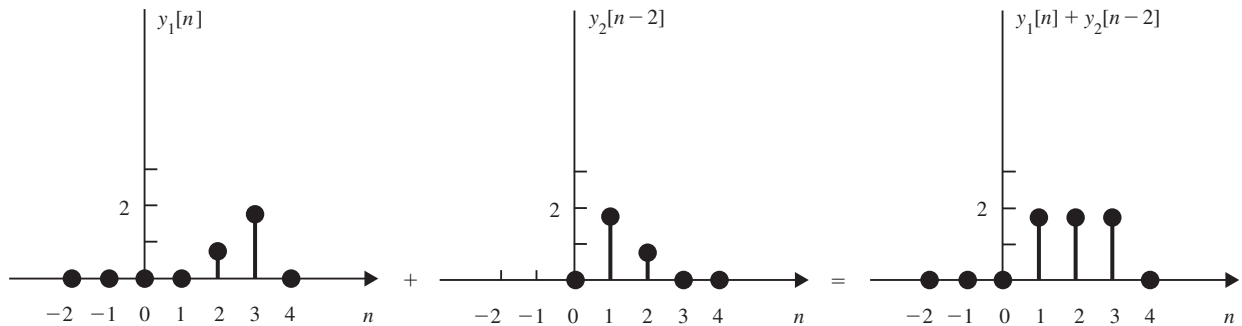


Figura 1-40

- 1.42.** Proporcione un ejemplo de un sistema que satisfaga la condición de aditividad (1.66) pero no la condición de homogeneidad (1.67).

Considere un sistema discreto en el tiempo representado por un operador \mathbf{T} tal que

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = x^*[n] \tag{1.116}$$

donde $x^*[n]$ es el complejo conjugado de $x[n]$. Entonces

$$\mathbf{T}\{x_1[n] + x_2[n]\} = \{x_1[n] + x_2[n]\}^* = x_1^*[n] + x_2^*[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

A continuación, si α es cualquier constante arbitraria de valor complejo, entonces

$$\mathbf{T}\{\alpha x[n]\} = \{\alpha x[n]\}^* = \alpha^* x^*[n] = \alpha^* y[n] \neq \alpha y[n]$$

De este modo el sistema es aditivo, pero no homogéneo.

- 1.43.** a) Demuestre que la causalidad para un sistema lineal de tiempo continuo es equivalente a la siguiente declaración: para cualquier tiempo t_0 y cualquier entrada $x(t)$ con $x(t) = 0$ para $t \leq t_0$, la salida $y(t)$ es cero para $t \leq t_0$.
 b) Encuentre un sistema no lineal que sea causal, pero que no satisfaga esta condición.
 c) Halle un sistema no lineal que satisfaga esta condición, pero que no sea causal.

- a) Puesto que el sistema es lineal, si $x(t) = 0$ para toda t , entonces $y(t) = 0$ para toda t . De este modo, si el sistema es causal, entonces $x(t) = 0$ para $t \leq t_0$ implica que $y(t) = 0$ para $t \leq t_0$. Ésta es la condición necesaria. Que esta condición también sea suficiente se demuestra así: sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos entradas del sistema, y sean $y_1(t)$ y $y_2(t)$ las salidas correspondientes. Si $x_1(t) = x_2(t)$ para $t \leq t_0$, o $x(t) = x_1(t) - x_2(t) = 0$ para $t \leq t_0$, entonces $y_1(t) = y_2(t)$ para $t \leq t_0$, o $y(t) = y_1(t) - y_2(t) = 0$ para $t \leq t_0$.
 b) Considere el sistema con la relación entrada-salida

$$y(t) = x(t) + 1$$

El sistema es no lineal (problema 1.40) y causal puesto que el valor de $y(t)$ depende sólo del valor presente de $x(t)$. Pero con $x(t) = 0$ para $t \leq t_0$, $y(t) = 1$ para $t \leq t_0$.

- c) Considere el sistema con la relación entrada-salida

$$y(t) = x(t)x(t + 1)$$

Es obvio que este sistema es no lineal (véase el problema 1.35) y no es causal porque el valor de $y(t)$ en el tiempo t depende del valor de $x(t + 1)$ de la entrada en el tiempo $t + 1$. Incluso $x(t) = 0$ para $t \leq t_0$ implica que $y(t) = 0$ para $t \leq t_0$.

1.44. Sea \mathbf{T} la representación de un sistema LIT de tiempo continuo. Entonces demuestre que

$$\mathbf{T}\{e^{st}\} = \lambda e^{st} \quad (1.117)$$

donde s es una variable compleja y λ es una constante compleja.

Sea $y(t)$ la salida del sistema con entrada $x(t) = e^{st}$. Entonces

$$\mathbf{T}\{e^{st}\} = y(t)$$

Puesto que el sistema es invariante en el tiempo, tenemos que

$$\mathbf{T}\{e^{s(t+t_0)}\} = y(t + t_0)$$

para t_0 real arbitrario. Ya que el sistema es lineal, tenemos que

$$\mathbf{T}\{e^{s(t+t_0)}\} = \mathbf{T}\{e^{st} e^{st_0}\} = e^{st_0} \mathbf{T}\{e^{st}\} = e^{st_0} y(t)$$

Por tanto,

$$y(t + t_0) = e^{st_0} y(t)$$

Al establecer $t = 0$, obtenemos

$$y(t_0) = y(0) e^{st_0} \quad (1.118)$$

Puesto que t_0 es arbitrario, al cambiar t_0 por t , podemos volver a escribir la ecuación (1.118) como

$$y(t) = y(0) e^{st} = \lambda e^{st}$$

o

$$\mathbf{T}\{e^{st}\} = \lambda e^{st}$$

donde $\lambda = y(0)$.

1.45. Sea \mathbf{T} la representación de un sistema LIT de tiempo continuo. Entonces demuestre que

$$\mathbf{T}\{z^n\} = \lambda z^n \quad (1.119)$$

donde z es una variable compleja y λ es una constante compleja.

Sea $y[n]$ la salida del sistema con entrada $x[n] = z^n$. Entonces

$$\mathbf{T}\{z^n\} = y[n]$$

Puesto que el sistema es invariante en el tiempo, tenemos que

$$\mathbf{T}\{z^{n+n_0}\} = y[n + n_0]$$

para n_0 un entero arbitrario. Puesto que el sistema es lineal, tenemos que

$$\mathbf{T}\{z^{n+n_0}\} = \mathbf{T}\{z^n z^{n_0}\} = z^{n_0} \mathbf{T}\{z^n\} = z^{n_0} y[n]$$

Por tanto,

$$y[n + n_0] = z^{n_0} y[n]$$

Al establecer $n = 0$, obtenemos

$$y[n_0] = y[0] z^{n_0} \quad (1.120)$$

Puesto que n_0 es arbitrario, al cambiar n_0 por n podemos volver a escribir la ecuación (1.120) como

$$y[n] = y[0] z^n = \lambda z^n$$

o

$$\mathbf{T}\{z^n\} = \lambda z^n$$

donde $\lambda = y[0]$.

En lenguaje matemático, una función $x(\cdot)$ que satisfaga la ecuación

$$\mathbf{T}\{x(\cdot)\} = \lambda x(\cdot) \quad (1.121)$$

se conoce como *función propia* (o *función característica*) del operador \mathbf{T} , mientras que la constante λ es llamada *valor propio* (o *valor característico*) correspondiente a la función propia $x(\cdot)$. De este modo, las ecuaciones (1.117) y (1.119) indican que las funciones exponenciales complejas son funciones propias de cualquier sistema LIT.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.46. Expresar las señales mostradas en la figura 1-41 en términos de funciones de escalón unitario.

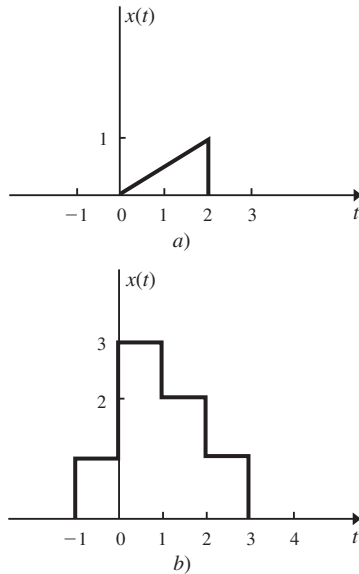


Figura 1-41

1.47. Expresar las secuencias mostradas en la figura 1-42 en términos de secuencias de escalón unitario.

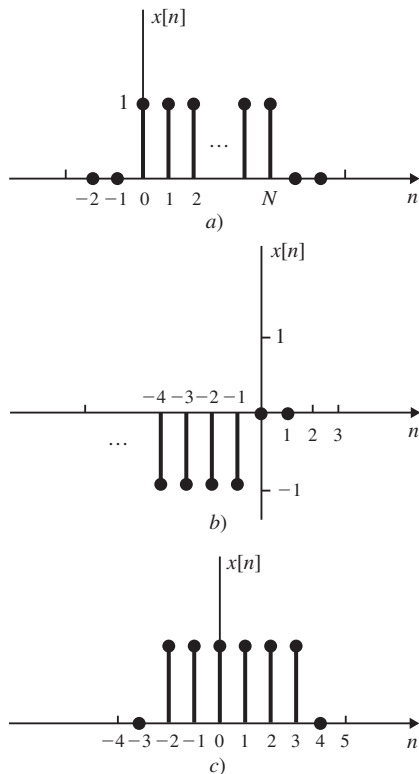


Figura 1-42

1.48. Determine las componentes par e impar de las siguientes señales:

- a) $x(t) = u(t)$
- b) $x(t) = \text{sen}\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$
- c) $x[n] = e^{j(\Omega_0 n + \pi/2)}$
- d) $x[n] = \delta[n]$

1.49. Sea $x(t)$ una señal arbitraria con partes par e impar denotadas por $x_e(t)$ y $x_o(t)$, respectivamente. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t) dt$$

1.50. Sea $x[n]$ una secuencia arbitraria con partes par e impar denotadas por $x_e[n]$ y $x_o[n]$, respectivamente. Demuestre que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]$$

1.51. Determine si cada una de las siguientes señales es o no periódica. Si la señal es periódica, determine su periodo fundamental.

- a) $x(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$
- b) $x(t) = \cos^2 t$
- c) $x(t) = (\cos 2\pi t)u(t)$
- d) $x(t) = e^{j\pi t}$
- e) $x[n] = e^{j(n/4) - \pi}$
- f) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$
- g) $x[n] = \cos\left(\frac{n}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$
- h) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi n}{8}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

1.52. Demuestre que si $x[n]$ es periódica con periodo N , entonces

- a) $\sum_{k=n_0}^n x[k] = \sum_{k=n_0+N}^{n+N} x[k]$
- b) $\sum_{k=0}^N x[k] = \sum_{k=n_0}^{n_0+N} x[k]$

- 1.53. a) ¿Qué es $\delta(2t)$?
b) ¿Qué es $\delta[2n]$?

1.54. Demuestre que

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

1.55. Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_{-\infty}^t (\cos \tau) u(\tau) d\tau$

b) $\int_{-\infty}^t (\cos \tau) \delta(\tau) d\tau$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} (\cos t) u(t-1) \delta(t) dt$

d) $\int_0^{2\pi} t \sin \frac{t}{2} \delta(\pi-t) dt$

1.56. Considere un sistema de tiempo continuo con la relación entrada-salida

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau) d\tau$$

Determine si este sistema es a) lineal, b) invariante en el tiempo, o c) causal.

1.57. Considere un sistema continuo de tiempo con la relación entrada-salida

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - kT_s)$$

Determine si este sistema es a) lineal, o b) invariante en el tiempo.

1.58. Considere un sistema de tiempo discreto con la relación entrada-salida

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = x^2[n]$$

Determine si este sistema es a) lineal, o b) invariante en el tiempo.

1.59. Proporcione un ejemplo de un sistema que satisfaga la condición de homogeneidad (1.67), pero no la condición de aditividad (1.66).

1.60. Proporcione un ejemplo de un sistema lineal variante en el tiempo con una entrada periódica, pero cuya salida correspondiente no sea periódica.

1.61. Un sistema se llama *invertible* si podemos determinar su señal de entrada x únicamente al observar su señal de salida y . Esto se ilustra en la figura 1-43. Determine si cada uno de los siguientes sistemas es invertible. En caso de serlo, proporcione el sistema inverso.

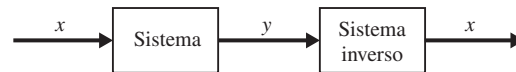


Figura 1-43

a) $y(t) = 2x(t)$

b) $y(t) = x^2(t)$

c) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

d) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$

e) $y[n] = nx[n]$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.46. a) $x(t) = \frac{t}{2}[u(t) - u(t-2)]$

b) $x(t) = u(t+1) + 2u(t) - u(t-1) - u(t-2) - u(t-3)$

1.47. a) $x[n] = u[n] - u[n - (N+1)]$

b) $x[n] = -u[-n-1]$

c) $x[n] = u[n+2] - u[n-4]$

1.48. a) $x_e(t) = \frac{1}{2}$, $x_o(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t$

b) $x_e(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega_0 t$, $x_o(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \omega_0 t$

c) $x_e[n] = j \cos \Omega_0 n$, $x_o[n] = -\operatorname{sen} \Omega_0 n$

d) $x_e[n] = \delta[n]$, $x_o[n] = 0$

1.49. *Sugerencia:* Utilice los resultados del problema 1.7 y la ecuación (1.77).

1.50. *Sugerencia:* Use los resultados del problema 1.7 y la ecuación (1.77).

1.51. a) Periódica, periodo = π

b) Periódica, periodo = π

c) No periódica

d) Periódica, periodo = 2

e) No periódica

f) Periódica, periodo = 8

g) No periódica

h) Periódica, periodo = 16

1.52. *Sugerencia:* Vea el problema 1.17.

1.53. a) $\delta(2t) = \frac{1}{2} \delta(t)$

b) $\delta[2n] = \delta[n]$

1.54. *Sugerencia:* Utilice las ecuaciones (1.101) y (1.99).

1.55. a) $\operatorname{sen} t$

b) 1 para $t > 0$ y 0 para $t < 0$; no definida para $t = 0$.

c) 0

d) π

- 1.56.** a) Lineal
b) Invariante en el tiempo
c) No causal

- 1.57.** a) Lineal
b) Variante en el tiempo

- 1.58.** a) No lineal
b) Invariante en el tiempo

- 1.59.** Considere el sistema descrito por

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = \left[\int_a^b [x(\tau)]^2 d\tau \right]^{1/2}$$

1.60. $y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = nx[n]$

- 1.61.** a) Invertible: $x(t) = \frac{1}{2}y(t)$

b) No invertible

c) Invertible: $x(t) = \frac{dy(t)}{dt}$

d) Invertible: $x[n] = y[n] - y[n - 1]$

e) No invertible

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

2.1 INTRODUCCIÓN

Los dos atributos más importantes de los sistemas son linealidad e invariabilidad en el tiempo. En este capítulo desarrollaremos la relación fundamental de entrada-salida para los sistemas que tienen estos atributos. Se mostrará que la relación de entrada-salida para los sistemas LIT, lineales invariantes en el tiempo (del inglés *linear time-invariant systems*, LTI), se describe en términos de una operación de convolución. La operación de convolución en los sistemas LIT es importante porque conocer la respuesta de un sistema LIT a la entrada de impulso unitaria nos permite encontrar su salida para cualquier señal de entrada. También se discutirá la especificación de las relaciones de entrada-salida para los sistemas LIT por medio de ecuaciones diferenciales y en diferencias.

2.2 RESPUESTA DE UN SISTEMA LIT DE TIEMPO CONTINUO Y LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

A. RESPUESTA AL IMPULSO

La *respuesta al impulso* $h(t)$ de un sistema LIT de tiempo continuo (representada por \mathbf{T}) se define como la respuesta del sistema cuando la entrada es $\delta(t)$, es decir,

$$h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\} \quad (2.1)$$

B. RESPUESTA A UNA ENTRADA ARBITRARIA

De la ecuación (1.27), la entrada $x(t)$ puede expresarse como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau \quad (2.2)$$

Puesto que el sistema es lineal, la respuesta $y(t)$ del sistema a una entrada arbitraria $x(t)$ puede expresarse como

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{T}\{x(t)\} = \mathbf{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathbf{T}\{\delta(t - \tau)\} d\tau \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dado que el sistema es invariante en el tiempo, tenemos que

$$h(t - \tau) = \mathbf{T}\{\delta(t - \tau)\} \quad (2.4)$$

Sustituyendo la ecuación (2.4) en la ecuación (2.3) obtenemos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) indica que el sistema LIT de tiempo continuo se caracteriza completamente por su respuesta al impulso $h(t)$.

C. INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

La ecuación (2.5) define la *convolución* de dos señales de tiempo continuo $x(t)$ y $h(t)$ denotadas por

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) se conoce comúnmente como *integral de convolución*. De este modo, tenemos como resultado fundamental que *la salida de cualquier sistema LIT de tiempo continuo es la convolución de la entrada $x(t)$ con la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema*. La figura 2-1 ilustra la definición de la respuesta al impulso $h(t)$ y la relación de la ecuación (2.6).

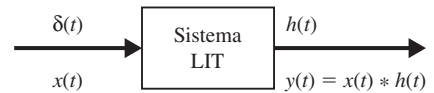


Figura 2-1 Sistema LIT de tiempo continuo.

D. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

La integral de convolución tiene las siguientes propiedades:

1. CONMUTATIVA $x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (2.7)$

2. ASOCIATIVA $\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} \quad (2.8)$

3. DISTRIBUTIVA $x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \quad (2.9)$

E. OPERACIÓN DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

Al aplicar la propiedad conmutativa (2.7) de la convolución a la ecuación (2.6) obtenemos

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau \quad (2.10)$$

lo que algunas veces puede evaluarse de forma más fácil que la ecuación (2.6). De esta ecuación observamos que la operación de la integral de convolución involucra los siguientes cuatro pasos:

1. La respuesta al impulso $h(\tau)$ se invierte en el tiempo (es decir, se refleja sobre el origen) para obtener $h(-\tau)$ y después se desplaza en t para formar $h(t - \tau) = h[-(\tau - t)]$, la cual es una función de τ con parámetro t .
2. Las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ se multiplican entre sí para todos los valores de τ con la t fija para algún valor.
3. El producto $x(\tau)h(t - \tau)$ se integra sobre todas las τ para producir un único valor de salida $y(t)$.
4. Se repiten los pasos 1 a 3 a medida que t varía en el intervalo de $-\infty$ a ∞ para producir la salida completa $y(t)$.

Los problemas 2.4 a 2.6 proporcionan ejemplos de la anterior operación de la integral de convolución.

F. RESPUESTA AL ESCALÓN

La *respuesta al escalón* $s(t)$ de un sistema LTI de tiempo continuo (representado por \mathbf{T}) se define como la respuesta del sistema cuando la entrada es $u(t)$, es decir,

$$s(t) = \mathbf{T}\{u(t)\} \quad (2.11)$$

En muchas aplicaciones la respuesta al escalón $s(t)$ también es una caracterización útil del sistema. La respuesta al escalón $s(t)$ puede determinarse con facilidad mediante la ecuación (2.10); esto es,

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

De este modo, la respuesta al escalón $s(t)$ puede obtenerse mediante la integración de la respuesta al impulso $h(t)$. Al diferenciar la ecuación (2.12) con respecto a t obtenemos

$$h(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad (2.13)$$

De esta manera, la respuesta al impulso $h(t)$ puede determinarse al diferenciar la respuesta al escalón $s(t)$.

2.3 PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO CONTINUO

A. SISTEMAS CON O SIN MEMORIA

Puesto que la salida $y(t)$ de un sistema sin memoria depende solamente de la entrada presente $x(t)$, entonces, si el sistema también es lineal e invariante en el tiempo, esta relación sólo puede ser de la forma

$$y(t) = Kx(t) \quad (2.14)$$

donde K es una constante (ganancia). De este modo, la respuesta al impulso correspondiente $h(t)$ es sencillamente

$$h(t) = K\delta(t) \quad (2.15)$$

Por tanto, si $h(t_0) \neq 0$ para $t_0 \neq 0$, entonces el sistema LIT de tiempo continuo tiene memoria.

B. CAUSALIDAD

Como se discutió en la sección 1.5D, un sistema causal no responde a un evento de entrada hasta que este evento en realidad ocurre. Por tanto, para un sistema causal LIT de tiempo continuo tenemos que

$$h(t) = 0 \quad t < 0 \quad (2.16)$$

Aplicando la condición de causalidad (2.16) a la ecuación (2.10), la salida de un sistema causal LIT de tiempo continuo se expresa como

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau \quad (2.17)$$

De manera alternativa, aplicando la condición de causalidad (2.16) a la ecuación (2.6) tenemos que

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau) d\tau \quad (2.18)$$

La ecuación (2.18) muestra que los únicos valores de la entrada $x(t)$ utilizados para evaluar la salida $y(t)$ son aquellos para los cuales $\tau \leq t$.

Con base en la condición de causalidad (2.16), cualquier señal $x(t)$ se denomina *causal* si

$$x(t) = 0 \quad t < 0 \quad (2.19a)$$

y se denomina *no causal* si

$$x(t) = 0 \quad t > 0 \quad (2.19b)$$

Entonces, de las ecuaciones (2.17), (2.18) y (2.19a), cuando la entrada $x(t)$ es causal, la salida $y(t)$ de un sistema causal LIT de tiempo continuo está dada por

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau) d\tau = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau) d\tau \quad (2.20)$$

C. ESTABILIDAD

La estabilidad BIBO (del inglés *bounded-input/bounded-output*, es decir, de entrada acotada/salida acotada) de un sistema LIT (sección 1.5H) se determina con facilidad mediante su respuesta al impulso. Se puede demostrar (problema 2.13) que un sistema LIT de tiempo continuo es estable en el sentido BIBO si su respuesta al impulso es absolutamente integrable; es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (2.21)$$

2.4 FUNCIONES PROPIAS DE LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO CONTINUO

En el capítulo 1 (problema 1.44) vimos que las funciones propias de los sistemas LIT de tiempo continuo representados mediante \mathbf{T} son las exponenciales complejas e^{st} , con s como variable compleja. Esto es,

$$\mathbf{T}\{e^{st}\} = \lambda e^{st} \quad (2.22)$$

donde λ es el valor propio de \mathbf{T} asociado con e^{st} . Estableciendo $x(t) = e^{st}$, en la ecuación (2.10), tenemos que

$$\begin{aligned} y(t) = \mathbf{T}\{e^{st}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} \\ &= H(s) e^{st} = \lambda e^{st} \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde

$$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (2.24)$$

De este modo, el valor propio de un sistema LIT de tiempo continuo asociado con la función propia e^{st} está dado por $H(s)$, la cual es una constante compleja cuyo valor se determina por el de s mediante la ecuación (2.24). Observe que en la ecuación (2.23) $y(0) = H(s)$ (vea el problema 1.44).

Los resultados anteriores se fundamentan en las definiciones de la transformada de Laplace y la transformada de Fourier, que se discutirán en los capítulos 3 y 5.

2.5 SISTEMAS DESCRITOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES

A. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una ecuación diferencial general lineal con coeficientes constantes de N -ésimo orden está dada por

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (2.25)$$

donde los coeficientes a_k y b_k son constantes reales. El orden N se refiere a la derivada más alta de $y(t)$ en la ecuación (2.25). Tales ecuaciones diferenciales juegan un papel central en la descripción de las relaciones de entrada y salida de una amplia variedad de sistemas eléctricos, mecánicos, químicos y biológicos. Por ejemplo, en el circuito RC considerado en el problema 1.32, la entrada $x(t) = v_s(t)$ y la salida $y(t) = v_c(t)$ están relacionadas mediante una ecuación diferencial de primer orden con coeficientes constantes [ecuación (1.105)]

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} x(t)$$

La solución general de la ecuación (2.25) para una entrada particular $x(t)$ está dada por

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \quad (2.26)$$

donde $y_p(t)$ es una *solución particular* que satisface a la ecuación (2.25) y $y_h(t)$ es una *solución homogénea* (o *solución complementaria*) que satisface a la ecuación diferencial homogénea

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0 \quad (2.27)$$

La forma exacta de $y_h(t)$ está determinada por N condiciones auxiliares. Observe que la ecuación (2.25) no especifica por completo la salida $y(t)$ en términos de la entrada $x(t)$ a menos que se detallen condiciones auxiliares. En general, un conjunto de condiciones auxiliares son los valores de

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

para algún punto en el tiempo.

B. LINEALIDAD

El sistema descrito por la ecuación (2.25) será lineal sólo si todas las condiciones auxiliares son cero (vea el problema 2.21). Si las condiciones auxiliares son distintas de cero, entonces la respuesta $y(t)$ de un sistema se puede expresar como

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad (2.28)$$

donde $y_{zi}(t)$, denominada la *respuesta de entrada cero* (el subíndice zi alude a *zero-input*), es la respuesta debido a las condiciones auxiliares, y $y_{zs}(t)$, conocida como la *respuesta de estado cero* (de “*zero-state*”), es la respuesta de un sistema lineal con cero condiciones auxiliares. Esto se ilustra en la figura 2-2.

Observe que $y_{zi}(t) \neq y_h(t)$ y $y_{zs}(t) \neq y_p(t)$ y, en general, $y_{zi}(t)$ contienen a $y_h(t)$, mientras que $y_{zs}(t)$ contiene tanto a $y_h(t)$ como a $y_p(t)$ (vea el problema 2.20).

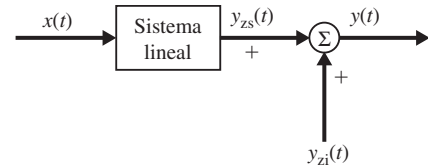


Figura 2-2 Respuestas de estado cero y de entrada cero.

C. CAUSALIDAD

A fin de que el sistema lineal descrito por la ecuación (2.25) sea causal debemos suponer la condición de *reposo inicial* (o una *condición inicialmente relajada*). Es decir, si $x(t) = 0$ para $t \leq t_0$, entonces suponemos $y(t) = 0$ para $t \leq t_0$ (vea el problema 1.43). De este modo, la respuesta para $t > t_0$ puede calcularse mediante la ecuación (2.25) con las condiciones iniciales

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

donde

$$\frac{d^k y(t_0)}{dt^k} = \left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=t_0}.$$

Evidentemente, en reposo inicial $y_{zi}(t) = 0$.

D. INVARIANZA O INVARIABILIDAD EN EL TIEMPO

Para un sistema lineal causal, el reposo inicial también implica invarianza en el tiempo (problema 2.22).

E. RESPUESTA AL IMPULSO

La respuesta al impulso $h(t)$ del sistema LIT de tiempo continuo descrito por la ecuación (2.25) satisface la ecuación diferencial

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k h(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \quad (2.29)$$

con la condición de reposo inicial. Los problemas 2.23 al 2.25 son algunos ejemplos para encontrar la respuesta al impulso. En capítulos posteriores determinaremos la respuesta al impulso usando técnicas de transformación.

2.6 RESPUESTA DE UN SISTEMA LIT DE TIEMPO DISCRETO Y LA SUMA DE CONVOLUCIÓN

A. RESPUESTA AL IMPULSO

La *respuesta al impulso* (o *respuesta de muestra unitaria*) $h[n]$ de un sistema LIT de tiempo discreto (representado por \mathbf{T}) se define como la respuesta del sistema cuando la entrada es $\delta[n]$; es decir,

$$h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\} \quad (2.30)$$

B. RESPUESTA A UNA ENTRADA ARBITRARIA

De la ecuación (1.51), la entrada $x[n]$ puede expresarse como

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \quad (2.31)$$

Puesto que el sistema es lineal, la respuesta $y[n]$ del sistema a una entrada arbitraria $x[n]$ puede expresarse como

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathbf{T}\{x[n]\} = \mathbf{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \mathbf{T}\{\delta[n-k]\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Como el sistema es invariante en el tiempo, tenemos que

$$h[n-k] = \mathbf{T}\{\delta[n-k]\} \quad (2.33)$$

Al sustituir la ecuación (2.33) en la ecuación (2.32), obtenemos

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \quad (2.34)$$

La ecuación (2.34) indica que un sistema LIT de tiempo discreto está completamente caracterizado por su respuesta al impulso $h[n]$.

C. SUMA DE CONVOLUCIÓN

La ecuación (2.34) define la *convolución* de dos secuencias $x[n]$ y $h[n]$ denotadas por

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \quad (2.35)$$

La ecuación (2.35) es comúnmente conocida como *suma de convolución*. De este modo, otra vez, tenemos el resultado fundamental de que *la salida de cualquier sistema LIT de tiempo discreto es la convolución de la entrada $x[n]$ con la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.*

La figura 2-3 ilustra la definición de la respuesta al impulso $h[n]$ y la relación de la ecuación (2.35).

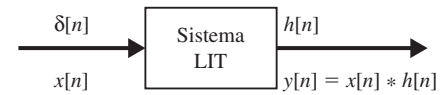


Figura 2-3 Sistema LIT de tiempo discreto.

D. PROPIEDADES DE LA SUMA DE CONVOLUCIÓN

Las siguientes propiedades de la suma de convolución son análogas a las propiedades de la integral de convolución mostradas en la sección 2.3.

1. CONMUTATIVA $x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad (2.36)$

2. ASOCIATIVA $\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\} \quad (2.37)$

3. DISTRIBUTIVA $x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \quad (2.38)$

E. OPERACIÓN DE LA SUMA DE CONVOLUCIÓN

De nueva cuenta, al aplicar la propiedad conmutativa (2.36) de la suma de convolución a la ecuación (2.35), obtenemos

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (2.39)$$

la cual puede, en ocasiones, evaluarse más fácilmente que la ecuación (2.35). Semejante al caso de tiempo continuo, la suma de convolución [ecuación (2.35)] involucra los siguientes cuatro pasos:

1. La respuesta al impulso $h[k]$ se invierte en el tiempo (es decir, se refleja sobre el origen) para obtener $h[-k]$ y posteriormente se desplaza mediante n para formar $h[n - k] = h[-(k - n)]$, que es una función de k con parámetro n .
2. Las dos secuencias $x[k]$ y $h[n - k]$ se multiplican entre sí para todos los valores de k con n fija en algún valor.
3. El producto $x[k] h[n - k]$ se suma sobre todas las k para producir una sola muestra de salida $y[n]$.
4. Los pasos 1 a 3 se repiten a medida que n varía en el intervalo de $-\infty$ a ∞ para producir la salida completa $y[n]$.

Los problemas 2.28 y 2.30 proporcionan ejemplos de la anterior operación de la suma de convolución.

F. RESPUESTA AL ESCALÓN

La respuesta al escalón $s[n]$ de un sistema LIT de tiempo discreto con la respuesta al impulso $h[n]$ se obtiene con facilidad de la ecuación (2.39) como

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] u[n - k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \quad (2.40)$$

De la ecuación (2.40) tenemos que
$$h[n] = s[n] - s[n - 1] \quad (2.41)$$

Las ecuaciones (2.40) y (2.41) son las contrapartes en tiempo discreto de las ecuaciones (2.12) y (2.13), respectivamente.

2.7 PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO DISCRETO

A. SISTEMAS CON O SIN MEMORIA

Puesto que la salida $y[n]$ de un sistema sin memoria depende sólo de la entrada presente $x[n]$, entonces, si el sistema también es lineal e invariante en el tiempo, esta relación sólo puede ser de la forma

$$y[n] = Kx[n] \quad (2.42)$$

donde K es una constante (ganancia). De este modo, la respuesta al impulso correspondiente es sencillamente

$$h[n] = K\delta[n] \quad (2.43)$$

Por consiguiente, si $h[n_0] \neq 0$ para $n_0 \neq 0$, el sistema LIT de tiempo discreto tiene memoria.

B. CAUSALIDAD

De manera semejante al caso de tiempo continuo, la condición de causalidad para un sistema LIT de tiempo discreto es

$$h[n] = 0 \quad n < 0 \quad (2.44)$$

Aplicando la condición de causalidad (2.44) a la ecuación (2.39), la salida de un sistema causal LIT de tiempo discreto se expresa como

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n - k] \quad (2.45)$$

De manera alternativa, aplicando la condición de causalidad (2.44) a la ecuación (2.35), tenemos que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n - k] \quad (2.46)$$

La ecuación (2.46) muestra que los únicos valores de la entrada $x[n]$ empleados para evaluar la salida $y[n]$ son aquellos para los cuales $k \leq n$.

Como en el caso de tiempo continuo, decimos que cualquier secuencia $x[n]$ se llama *causal* si

$$x[n] = 0 \quad n < 0 \quad (2.47a)$$

y se denomina *no causal* si $x[n] = 0 \quad n \geq 0$ **(2.47b)**

Entonces, cuando la entrada $x[n]$ es causal, la salida $y[n]$ de un sistema causal LIT de tiempo discreto está dada por

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k] \quad (2.48)$$

C. ESTABILIDAD

Es posible demostrar (problema 2.37) que un sistema LIT de tiempo discreto es estable en el sentido BIBO si su respuesta al impulso es absolutamente sumable; es decir,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (2.49)$$

2.8 FUNCIONES PROPIAS DE LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO DISCRETO

En el capítulo 1 (problema 1.45) vimos que las funciones propias de los sistemas LIT de tiempo discreto representados por \mathbf{T} son los exponenciales complejos z^n , siendo z una variable compleja. Esto es,

$$\mathbf{T}\{z^n\} = \lambda z^n \quad (2.50)$$

donde λ es el valor propio de \mathbf{T} asociado con z^n . Estableciendo $x[n] = z^n$ en la ecuación (2.39) tenemos que

$$\begin{aligned} y[n] = \mathbf{T}\{z^n\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \right] z^n \\ &= H(z)z^n = \lambda z^n \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde

$$\lambda = H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \quad (2.52)$$

De esta forma, el valor propio de un sistema LIT de tiempo discreto asociado con la función propia z^n está dado por $H(z)$, la cual es una constante compleja cuyo valor se determina mediante el valor de z a través de la ecuación (2.52). Observe en la ecuación (2.51) que $y[0] = H(z)$ (vea el problema 1.45).

Los resultados anteriores se fundamentan en las definiciones de la transformada z y la transformada de Fourier discreta en el tiempo, las cuales se discutirán en los capítulos 4 y 6.

2.9 SISTEMAS DESCRITOS POR ECUACIONES EN DIFERENCIAS

La función que desempeñan las ecuaciones diferenciales en la descripción de los sistemas de tiempo continuo la realizan las *ecuaciones en diferencias* para los sistemas de tiempo discreto.

A. ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

La contraparte en tiempo discreto de la ecuación diferencial general (2.25) es la ecuación en diferencia lineal con coeficientes constantes de N -ésimo orden dada por

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (2.53)$$

donde los coeficientes a_k y b_k son constantes reales. El orden N se refiere al retardo mayor de $y[n]$ en la ecuación (2.53). En el capítulo 1 se proporciona un ejemplo de la clase de las ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes (problema 1.37). De manera análoga al caso de tiempo continuo, la solución de la ecuación (2.53) y todas las propiedades de los sistemas, tales como linealidad, causalidad e invarianza en el tiempo, pueden desarrollarse siguiendo un enfoque directamente paralelo a la discusión para las ecuaciones diferenciales. Nuevamente se

hace énfasis en que el sistema descrito por la ecuación (2.53) será causal y LIT si el sistema se encuentra inicialmente en reposo.

B. FORMULACIÓN RECURSIVA

Hay un enfoque alternativo y más sencillo disponible para solucionar la ecuación (2.53). Reacomodando a la ecuación (2.53) en la forma

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\} \quad (2.54)$$

obtenemos una fórmula para calcular la salida en el tiempo n en términos de la entrada presente y los valores previos de entrada y salida. De la ecuación (2.54) observamos que la necesidad de condiciones auxiliares es evidente, y que para calcular $y[n]$ comenzando en $n = n_0$ debemos tener los valores de $y[n_0 - 1]$, $y[n_0 - 2]$, \dots , $y[n_0 - N]$, además de la entrada $x[n]$ para $n \geq n_0 - M$. La forma general de la ecuación (2.54) se conoce como *ecuación recursiva*, porque especifica un procedimiento recursivo para determinar la salida en términos de la entrada y las salidas anteriores. En el caso especial cuando $N = 0$, de la ecuación (2.53) tenemos que

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \right\} \quad (2.55)$$

la cual es una *ecuación no recursiva*, porque los valores anteriores de la salida no se necesitan para calcular la salida presente. Así, en este caso, no son necesarias las condiciones auxiliares para determinar a $y[n]$.

C. RESPUESTA AL IMPULSO

A diferencia del caso de tiempo continuo, la respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema LIT de tiempo discreto descrito por la ecuación (2.53) o, de manera equivalente, por medio de la ecuación (2.54) puede determinarse fácilmente mediante

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k h[n-k] \right\} \quad (2.56)$$

Para el sistema descrito por la ecuación (2.55) la respuesta al impulso $h[n]$ está dada por

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] = \begin{cases} b_n/a_0 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (2.57)$$

Observe que la respuesta al impulso para este sistema tiene términos finitos; es decir, es distinta de cero sólo para una duración de tiempo finita. Debido a esta propiedad, el sistema descrito por la ecuación (2.55) se conoce como sistema de *respuesta al impulso finita* (*finite impulse response*, FIR). Por otro lado, se dice que un sistema cuya respuesta al impulso sea distinta de cero por una duración de tiempo infinita es un sistema de *respuesta al impulso infinita* (*infinite impulse response*, IIR). Los problemas 2.44 y 2.45 proporcionan ejemplos para la búsqueda de respuestas de impulso. En el capítulo 4 encontraremos la respuesta al impulso mediante el uso de técnicas de transformación.

PROBLEMAS RESUELTOS

RESPUESTAS DE UN SISTEMA LIT DE TIEMPO CONTINUO Y CONVOLUCIÓN

2.1. Verifique las ecuaciones (2.7) y (2.8), es decir,

- a) $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
 b) $\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}$

- a) Por la definición (2.6) $x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$

Al cambiar la variable $t - \tau = \lambda$, tenemos que

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda)h(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t - \lambda) d\lambda = h(t) * x(t)$$

b) Sea $x(t) * h_1(t) = f_1(t)$ y $h_1(t) * h_2(t) = f_2(t)$. Entonces

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_1(t - \tau) d\tau$$

y

$$\begin{aligned} \{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) &= f_1(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\sigma)h_2(t - \sigma) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_1(\sigma - \tau) d\tau \right] h_2(t - \sigma) d\sigma \end{aligned}$$

Sustituyendo $\lambda = \sigma - \tau$ e intercambiando el orden de integración, tenemos que

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda)h_2(t - \tau - \lambda) d\lambda \right] d\tau$$

Ahora, ya que

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda)h_2(t - \lambda) d\lambda$$

tenemos que

$$f_2(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda)h_2(t - \tau - \lambda) d\lambda$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)f_2(t - \tau) d\tau \\ &= x(t) * f_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} \end{aligned}$$

2.2. Demuestre que

a) $x(t) * \delta(t) = x(t)$ **(2.58)**

b) $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$ **(2.59)**

c) $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ **(2.60)**

d) $x(t) * u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau$ **(2.61)**

a) Por la definición (2.6) y la ecuación (1.22) tenemos que

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(\tau) \Big|_{\tau=t} = x(t)$$

b) Por las ecuaciones (2.7) y (1.22) tenemos

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t - t_0) &= \delta(t - t_0) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0)x(t - \tau) d\tau \\ &= x(t - \tau) \Big|_{\tau=t_0} = x(t - t_0) \end{aligned}$$

c) Por las ecuaciones (2.6) y (1.19) tenemos que

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

puesto que

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \tau < t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$

d) De manera similar, tenemos que

$$x(t) * u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t - \tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau$$

ya que

$$u(t - \tau - t_0) = \begin{cases} 1 & \tau < t - t_0 \\ 0 & \tau > t - t_0 \end{cases}$$

2.3. Sean $y(t) = x(t) * h(t)$. Entonces demuestre que

$$x(t - t_1) * h(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2) \quad (2.62)$$

Por la ecuación (2.6) tenemos que

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (2.63a)$$

$$y \quad x(t - t_1) * h(t - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t_1)h(t - \tau - t_2) d\tau \quad (2.63b)$$

Sea $\tau - t_1 = \lambda$. Entonces $\tau = \lambda + t_1$ y la ecuación (2.63b) se convierte en

$$x(t - t_1) * h(t - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - t_1 - t_2 - \lambda) d\lambda \quad (2.63c)$$

Al comparar las ecuaciones (2.63a) y (2.63c), vemos que al reemplazar t en la ecuación (2.63a) por $t - t_1 - t_2$ obtenemos la ecuación (2.63c). De esta manera, concluimos que

$$x(t - t_1) * h(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2)$$

2.4. La entrada $x(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema LIT de tiempo continuo están dadas por

$$x(t) = u(t) \quad h(t) = e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$$

- a) Calcule la salida $y(t)$ mediante la ecuación (2.6).
 b) Calcule la salida $y(t)$ mediante la ecuación (2.10).
 a) Por la ecuación (2.6)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

Las funciones $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ pueden apreciarse en la figura 2-4a) para $t < 0$ y $t > 0$. De la figura 2-4a) podemos ver que no se traslapan para $t < 0$, $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$, mientras que ambas se traslapan para $\tau > 0$ desde $\tau = 0$ hasta $\tau = t$. Por tanto, para $t < 0$, $y(t) = 0$. Para $t > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau \\ &= e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \end{aligned}$$

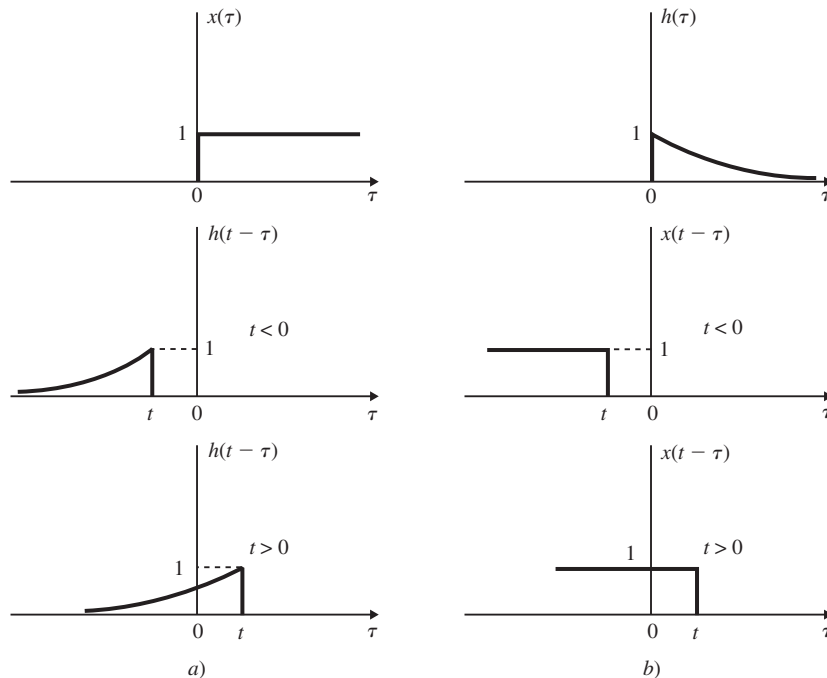


Figura 2-4

Así, podemos escribir la salida $y(t)$ como

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})u(t) \tag{2.64}$$

b) Por la ecuación (2.10)

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau$$

Las funciones $h(\tau)$ y $x(t - \tau)$ se muestran en la figura 2-4b) para $t < 0$ y $t > 0$. Nuevamente de la figura 2-4b) vemos que no se traslapan para $t < 0$, $h(\tau)$ y $x(t - \tau)$, mientras que ambas se traslapan para $t > 0$ desde $\tau = 0$ hasta $\tau = t$. Por tanto, para $t < 0$, $y(t) = 0$. Para $t > 0$ tenemos que

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$

De esta forma, podemos escribir la salida $y(t)$ como

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})u(t) \tag{2.65}$$

que es igual a la ecuación (2.64).

2.5. Calcule la salida $y(t)$ para un sistema LIT de tiempo continuo cuya respuesta al impulso $h(t)$ y la entrada $x(t)$ están dadas por

$$h(t) = e^{-\alpha t}u(t) \quad x(t) = e^{\alpha t}u(-t) \quad \alpha > 0$$

Por la ecuación (2.6)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

Las funciones $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ pueden apreciarse en la figura 2-5a) para $t < 0$ y $t > 0$. De la misma figura podemos observar que para $t < 0$, $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ se traslapan desde $\tau = -\infty$ hasta $\tau = t$, mientras que ambas se traslapan para $t > 0$ desde $\tau = -\infty$ hasta $\tau = 0$. Por tanto, para $t < 0$, tenemos que

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{\alpha\tau} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^t e^{2\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha t} \tag{2.66a}$$

Para $t > 0$, tenemos que

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha t} \tag{2.66b}$$

Combinando las ecuaciones (2.66a) y (2.66b), podemos escribir $y(t)$ como

$$y(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|} \quad \alpha > 0 \tag{2.67}$$

lo cual se muestra en la figura 2-5b).

2.6. Evalúe $y(t) = x(t) * h(t)$, donde $x(t)$ y $h(t)$ se muestran en la figura 2-6, a) mediante una técnica analítica, y b) mediante un método gráfico.

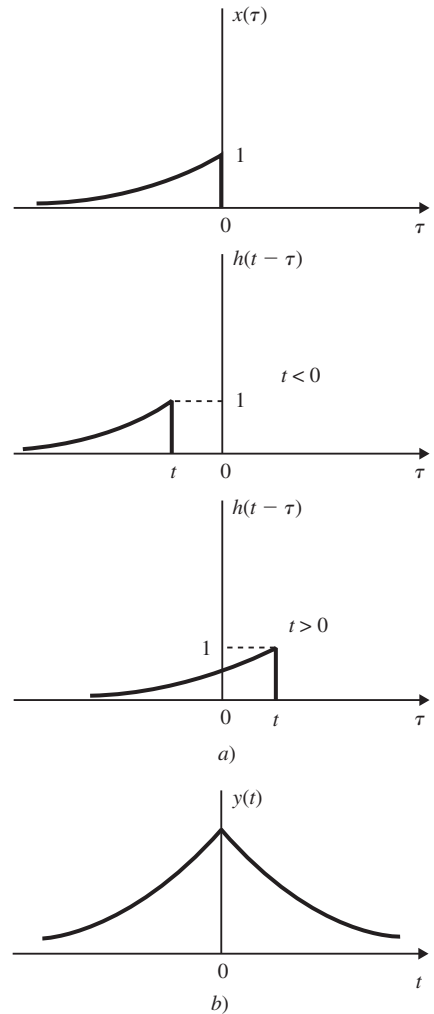


Figura 2-5

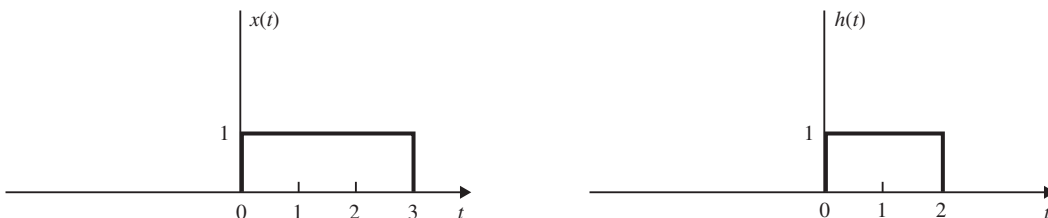


Figura 2-6

a) En primer lugar, expresamos $x(t)$ y $h(t)$ en forma de función:

$$x(t) = u(t) - u(t - 3) \quad h(t) = u(t) - u(t - 2)$$

Entonces, por la ecuación (2.6), tenemos que

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) - u(\tau - 3)][u(t - \tau) - u(t - \tau - 2)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t - \tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t - 2 - \tau) d\tau \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau - 3)u(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau - 3)u(t - 2 - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} u(\tau)u(t - \tau) &= \begin{cases} 1 & 0 < \tau < t, t > 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \\ u(\tau)u(t - 2 - \tau) &= \begin{cases} 1 & 0 < \tau < t - 2, t > 2 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \\ u(\tau - 3)u(t - \tau) &= \begin{cases} 1 & 3 < \tau < t, t > 3 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \\ u(\tau - 3)u(t - 2 - \tau) &= \begin{cases} 1 & 3 < \tau < t - 2, t > 5 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \end{aligned}$$

podemos expresar $y(t)$ como

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\int_0^t d\tau \right) u(t) - \left(\int_0^{t-2} d\tau \right) u(t-2) \\ &\quad - \left(\int_3^t d\tau \right) u(t-3) + \left(\int_3^{t-2} d\tau \right) u(t-5) \\ &= tu(t) - (t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3) + (t-5)u(t-5) \end{aligned}$$

lo cual se grafica en la figura 2-7.

b) Las funciones $h(\tau)$, $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$, $x(\tau)h(t - \tau)$ para diferentes valores de t se grafican en la figura 2-8; en ésta podemos ver que $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ no se traslapan para $t < 0$ y $t > 5$, y así $y(t) = 0$ para $t < 0$ y $t > 5$. Para los otros intervalos, $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ sí se traslapan. De este modo, al calcular el área bajo los pulsos rectangulares para estos intervalos, obtenemos

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t \leq 2 \\ 2 & 2 < t \leq 3 \\ 5 - t & 3 < t \leq 5 \\ 0 & 5 < t \end{cases}$$

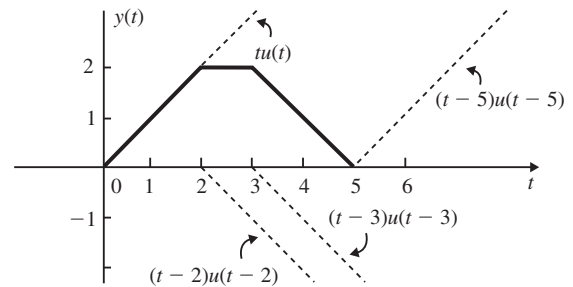


Figura 2-7

lo cual se grafica en la figura 2-9.

2.7. Sea $h(t)$ el pulso triangular mostrado en la figura 2-10a) y $x(t)$ el tren de impulsos unitarios [figura 2-10b)] expresado como

$$x(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.68)$$

Determine y grafique $y(t) = h(t) * x(t)$ para los siguientes valores de T : a) $T = 3$, b) $T = 2$, c) $T = 1.5$.

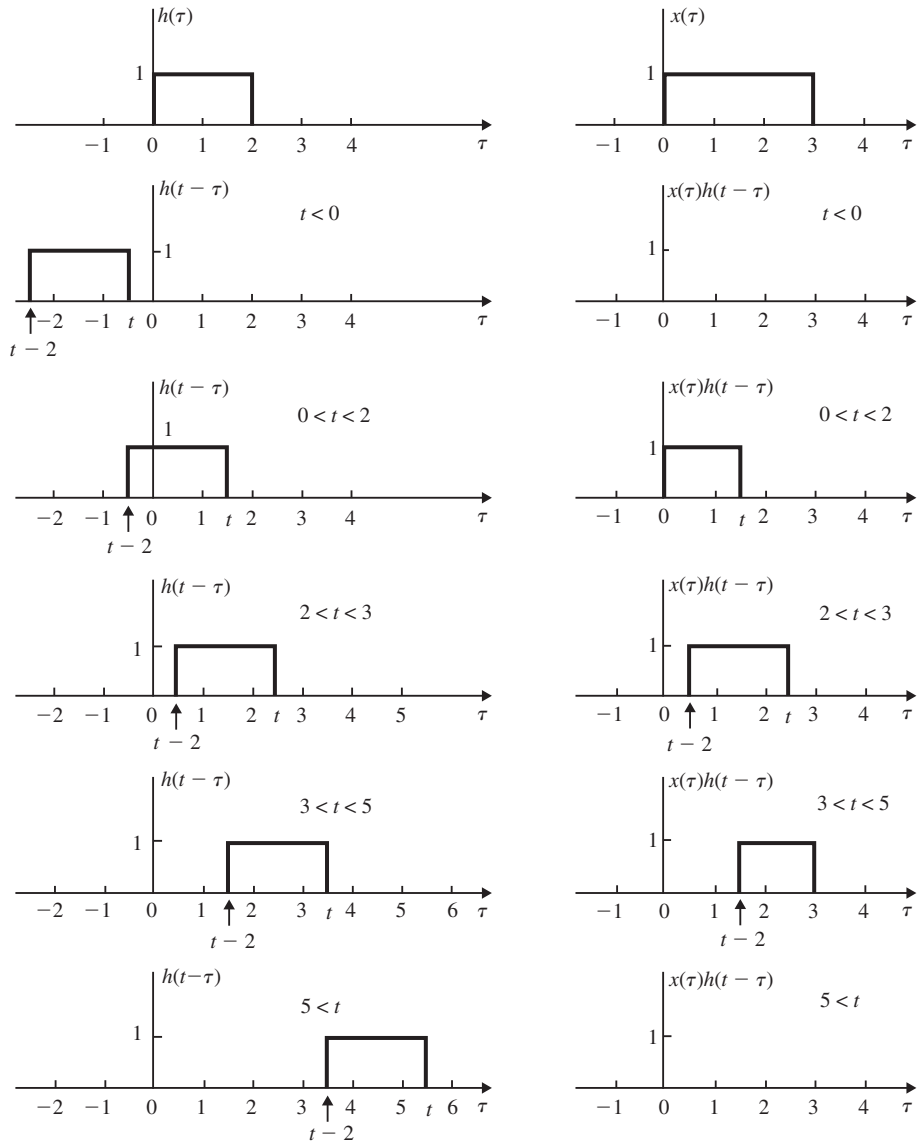


Figura 2-8

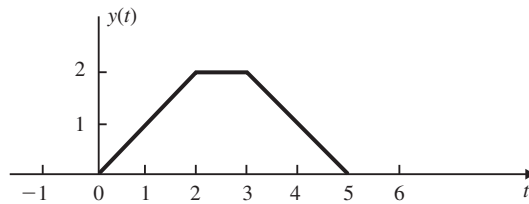


Figura 2-9

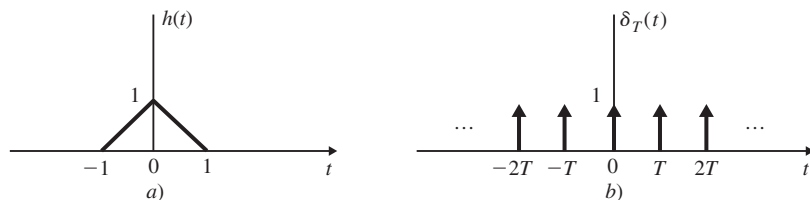


Figura 2-10

Mediante las ecuaciones (2.59) y (2.9) obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * \delta_T(t) = h(t) * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t) * \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - nT) \end{aligned} \quad (2.69)$$

a) Para $T = 3$, la ecuación (2.69) se convierte en

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 3n)$$

lo cual se ilustra en la figura 2-11a).

b) Para $T = 2$, la ecuación (2.69) resulta en

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 2n)$$

lo que se ilustra en la figura 2-11b).

c) Para $T = 1.5$, la ecuación (2.69) nos da

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 1.5n)$$

lo cual se ilustra en la figura 2-11c). Observe que cuando $T < 2$, los pulsos triangulares ya no están separados y se traslapan.

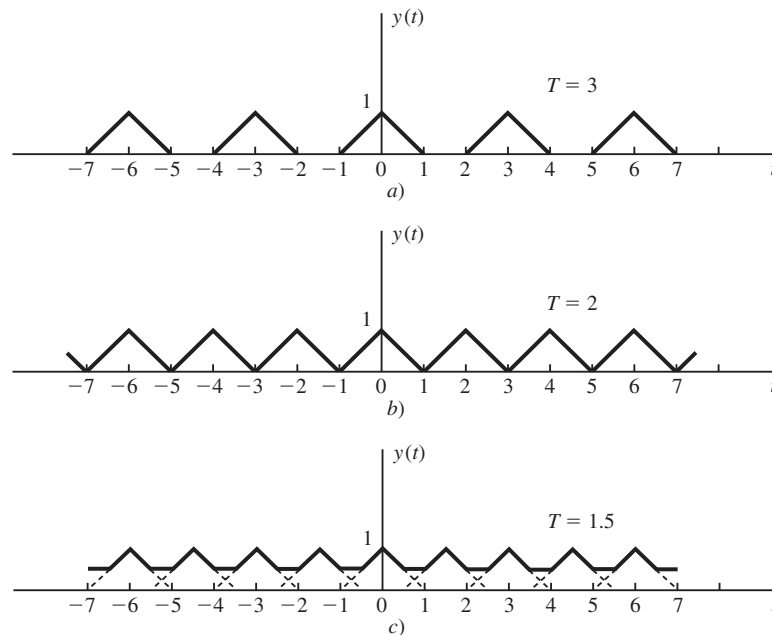


Figura 2-11

2.8. Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son señales periódicas con un periodo común T_0 , la convolución de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ no converge. En este caso, definimos la *convolución periódica* de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ como

$$f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_0^{T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \quad (2.70)$$

a) Demuestre que $f(t)$ es periódica con periodo de T_0 .

b) Demuestre que

$$f(t) = \int_a^{a+T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \quad (2.71)$$

para cualquier a .

- c) Calcule y grafique la convolución periódica de la señal de onda cuadrada $x(t)$ mostrada en la figura 2-12 consigo misma.
 a) Puesto que $x_2(t)$ es periódica con un periodo T_0 , tenemos que

$$x_2(t + T_0 - \tau) = x_2(t - \tau)$$

Entonces de la ecuación (2.70) tenemos que

$$\begin{aligned} f(t + T_0) &= \int_0^{T_0} x_1(\tau)x_2(t + T_0 - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{T_0} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau = f(t) \end{aligned}$$

De esta forma, $f(t)$ es periódica con un periodo de T_0 .

- b) Puesto que tanto $x_1(\tau)$ como $x_2(\tau)$ son periódicas con el mismo periodo T_0 , $x_1(\tau)x_2(t - \tau)$ también es periódica con un periodo T_0 . Entonces, mediante la propiedad (1.88) (problema 1.17), obtenemos

$$f(t) = \int_0^{T_0} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau = \int_a^{a+T_0} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau$$

para una a arbitraria.

- c) Evaluamos la convolución periódica de manera gráfica. Las señales $x(\tau)$, $x(t - \tau)$ y $x(\tau)x(t - \tau)$ se grafican en la figura 2-13a), de lo cual obtenemos

$$f(t) = \begin{cases} A^2 t & 0 < t \leq T_0/2 \\ -A^2(t - T_0) & T_0/2 < t \leq T_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad f(t + T_0) = f(t)$$

lo que se grafica en la figura 2-13b).

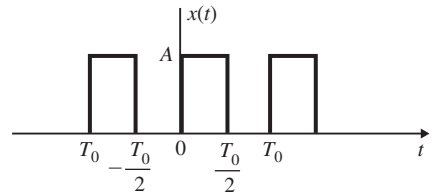
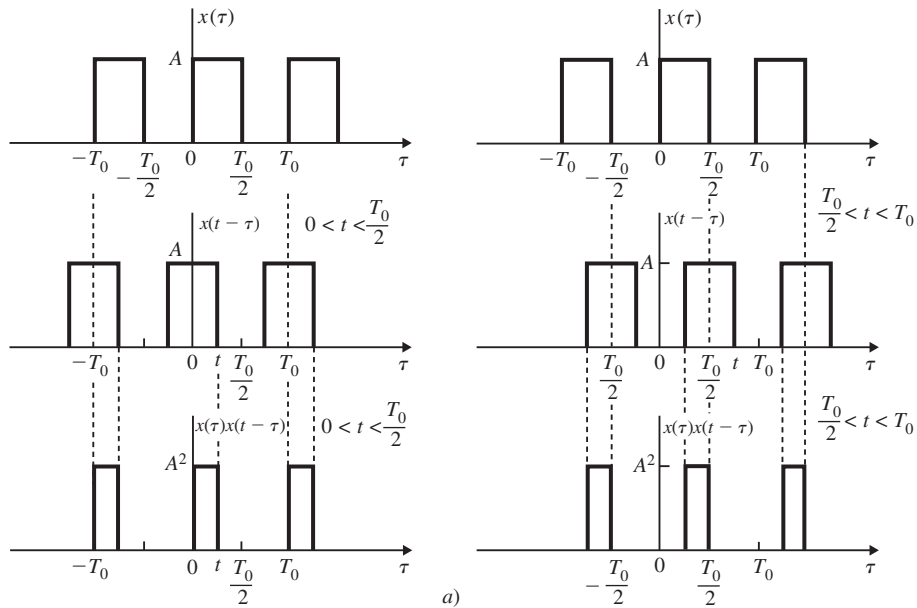
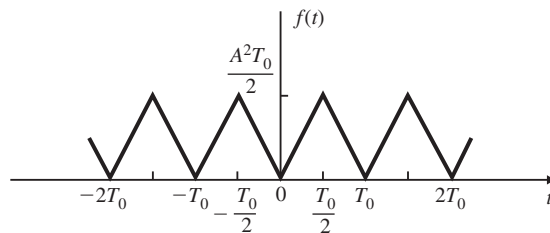


Figura 2-12



a)



b)

Figura 2-13

PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO CONTINUO

2.9. Las señales en las figuras 2-14a) y b) son la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$, respectivamente, de cierto sistema LIT de tiempo continuo. Grafique la salida correspondiente a las siguientes entradas: a) $x(t - 2)$; b) $1/2 x(t)$.

a) Puesto que el sistema es invariante en el tiempo, la salida será $y(t - 2)$, la cual se grafica en la figura 2-14c).

b) Puesto que el sistema es lineal, la salida será $1/2 y(t)$, la cual se grafica en la figura 2-14d).

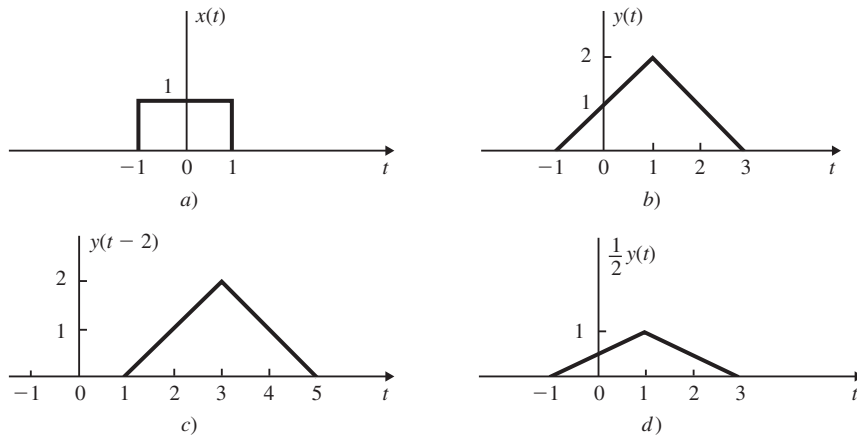


Figura 2-14

2.10. Considere un sistema LIT de tiempo continuo cuya respuesta al escalón está dada por

$$s(t) = e^{-t} u(t)$$

Determine y grafique la salida de este sistema para la entrada $x(t)$ que se muestra en la figura 2-15a).

De la figura 2-15a), la entrada $x(t)$ puede expresarse como

$$x(t) = u(t - 1) - u(t - 3)$$

Puesto que el sistema es lineal e invariante en el tiempo, la salida $y(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= s(t - 1) - s(t - 3) \\ &= e^{-(t-1)} u(t - 1) - e^{-(t-3)} u(t - 3) \end{aligned}$$

lo cual se grafica en la figura 2-15b).

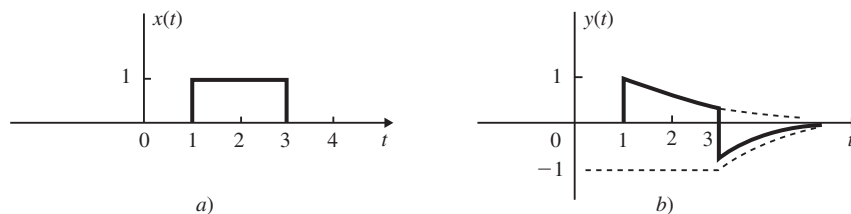


Figura 2-15

2.11. Considere un sistema LIT de tiempo continuo descrito por (vea el problema 1.56)

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau) d\tau \quad (2.72)$$

a) Encuentre y grafique la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

b) ¿Es causal este sistema?

a) La ecuación (2.72) puede volver a escribirse como

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{t+T/2} x(\tau) d\tau - \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{t-T/2} x(\tau) d\tau \quad (2.73)$$

Por medio de las ecuaciones (2.61) y (2.9), la ecuación (2.73) puede expresarse como

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{T}x(t) * u\left(t + \frac{T}{2}\right) - \frac{1}{T}x(t) * u\left(t - \frac{T}{2}\right) \\
 &= x(t) * \frac{1}{T}\left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] = x(t) * h(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.74}$$

De este modo, obtenemos

$$h(t) = \frac{1}{T}\left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] = \begin{cases} 1/T & -T/2 < t \leq T/2 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}
 \tag{2.75}$$

lo cual se ilustra en la figura 2-16.

b) De la figura 2-16 o de la ecuación (2.75) vemos que $h(t) \neq 0$ para $t < 0$. Por tanto, el sistema no es causal.

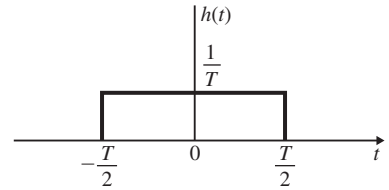


Figura 2-16

2.12. Sea $y(t)$ la salida de un sistema LIT de tiempo continuo con entrada $x(t)$. Encuentre la salida del sistema si la entrada es $x'(t)$, donde $x'(t)$ es la primera derivada de $x(t)$.

De la ecuación (2.10)

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau$$

Al diferenciar ambos lados de la integral de convolución anterior con respecto a t , obtenemos

$$\begin{aligned}
 y'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}[h(\tau)x(t - \tau)] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x'(t - \tau) d\tau = h(t) * x'(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.76}$$

lo que indica que $y'(t)$ es la salida del sistema cuando la entrada es $x'(t)$.

2.13. Verifique la condición de estabilidad en el sentido BIBO [ecuación (2.21)] para los sistemas LIT de tiempo continuo.

Supongamos que la entrada $x(t)$ de un sistema LIT de tiempo continuo está acotada, es decir,

$$|x(t)| \leq k_1 \quad \text{para toda } t \tag{2.77}$$

Entonces, mediante la ecuación (2.10), tenemos que

$$\begin{aligned}
 |y(t)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)x(t - \tau)| d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t - \tau)| d\tau \leq k_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau
 \end{aligned}$$

puesto que $|x(t - \tau)| \leq k_1$ de la ecuación (2.77). Por consiguiente, si la respuesta al impulso es absolutamente integrable, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = K < \infty$$

entonces $|y(t)| \leq k_1 K = k_2$ y el sistema es estable en el sentido BIBO.

2.14. El sistema mostrado en la figura 2-17a) se forma al conectar dos sistemas *en cascada*. Las respuestas al impulso de los sistemas están dadas por $h_1(t)$ y $h_2(t)$, respectivamente, y

$$h_1(t) = e^{-2t}u(t) \quad h_2(t) = 2e^{-t}u(t)$$

a) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ de todo el sistema mostrado en la figura 2-17b).

b) Determine si todo el sistema es estable en el sentido BIBO.

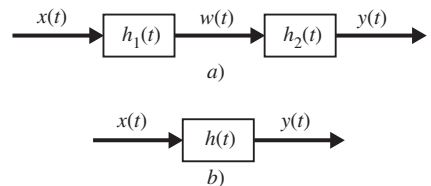


Figura 2-17

- a) Sea $w(t)$ la salida del primer sistema. Por la ecuación (2.6)

$$w(t) = x(t) * h_1(t) \quad (2.78)$$

Entonces, tenemos que

$$y(t) = w(t) * h_2(t) = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \quad (2.79)$$

Sin embargo, por la propiedad asociativa de la convolución (2.8), la ecuación (2.79) puede volver a escribirse como

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = x(t) * h(t) \quad (2.80)$$

Por consiguiente, la respuesta al impulso de todo el sistema está dada por

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad (2.81)$$

De esta forma, con las $h_1(t)$ y $h_2(t)$ dadas, tenemos que

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) h_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) 2e^{-(t-\tau)} u(t - \tau) d\tau \\ &= 2e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau = 2e^{-t} \left[\int_0^t e^{-\tau} d\tau \right] u(t) \\ &= 2(e^{-t} - e^{-2t}) u(t) \end{aligned}$$

- b) Por medio de la $h(t)$ anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau &= 2 \int_0^{\infty} (e^{-\tau} - e^{-2\tau}) d\tau = 2 \left[\int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau - \int_0^{\infty} e^{-2\tau} d\tau \right] \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1 < \infty \end{aligned}$$

De esta forma, el sistema es estable en el sentido BIBO.

FUNCIONES PROPIAS DE LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO CONTINUO

2.15. Considere un sistema LIT de tiempo continuo con la relación entrada-salida dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau \quad (2.82)$$

- a) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ de este sistema.
 b) Demuestre que la función exponencial compleja e^{st} es una función propia del sistema.
 c) Encuentre el valor propio del sistema correspondiente a e^{st} por medio de la respuesta al impulso $h(t)$ obtenida en el inciso a).

- a) De la ecuación (2.82), la definición (2.1) y la ecuación (1.21), obtenemos

$$h(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau = e^{-(t-\tau)} \Big|_{\tau=0} = e^{-t} \quad t > 0$$

De esta manera,

$$h(t) = e^{-t} u(t) \quad (2.83)$$

- b) Sea $x(t) = e^{st}$. Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} e^{s\tau} d\tau = e^{-t} \int_{-\infty}^t e^{(s+1)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{s+1} e^{st} = \lambda e^{st} \quad \text{si } \operatorname{Re} s > -1 \end{aligned} \quad (2.84)$$

De esta forma, por la definición (2.22), e^{st} es la función propia del sistema y el valor propio asociado es

$$\lambda = \frac{1}{s+1} \quad (2.85)$$

- c) Mediante las ecuaciones (2.24) y (2.83), el valor propio asociado con e^{st} está dado por

$$\begin{aligned} \lambda &= H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+1)\tau} d\tau = \frac{1}{s+1} \quad \text{si } \operatorname{Re} s > -1 \end{aligned}$$

que es lo mismo que en la ecuación (2.85).

2.16. Considere el sistema LIT de tiempo continuo descrito por

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau) d\tau \quad (2.86)$$

- a) Encuentre el valor propio del sistema correspondiente a la función propia e^{st} .
 - b) Repita el inciso a) por medio de la función de impulso $h(t)$ del sistema.
- a) Si sustituimos $x(\tau) = e^{s\tau}$ en la ecuación (2.86) obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{s\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{sT} (e^{sT/2} - e^{-sT/2}) e^{st} = \lambda e^{st} \end{aligned}$$

De este modo, el valor propio del sistema correspondiente a e^{st} es

$$\lambda = \frac{1}{sT} (e^{sT/2} - e^{-sT/2}) \quad (2.87)$$

- b) De la ecuación (2.75) en el problema 2.11 tenemos que

$$h(t) = \frac{1}{T} \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] = \begin{cases} 1/T & -T/2 < t \leq T/2 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Mediante la ecuación (2.24), el valor propio $H(s)$ correspondiente a e^{st} está dado por

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{sT} (e^{sT/2} - e^{-sT/2})$$

el cual es lo mismo que la ecuación (2.87).

2.17. Considere que un sistema LIT de tiempo continuo estable con respuesta al impulso $h(t)$ es real y par. Demuestre que $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$ son funciones propias de este sistema con el mismo valor propio real.

Al establecer $s = j\omega$ en las ecuaciones (2.23) y (2.24), observamos que $e^{j\omega t}$ es una función propia de un sistema LIT de tiempo continuo y que el valor propio correspondiente es

$$\lambda = H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.88)$$

Ya que el sistema es estable, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

entonces
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau) e^{-j\omega\tau}| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |e^{-j\omega\tau}| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

puesto que $|e^{-j\omega\tau}| = 1$. De este modo, $H(j\omega)$ converge para cualquier ω . Por medio de la fórmula de Euler, tenemos que

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) (\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cos \omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sin \omega\tau d\tau \end{aligned} \quad (2.89)$$

Ya que $\cos \omega\tau$ es una función par de τ y $\sin \omega\tau$ es una función impar de τ , y si $h(t)$ es real y par, entonces $h(\tau)\cos \omega\tau$ es par y $h(\tau)\sin \omega\tau$ es impar. Entonces, por las ecuaciones (1.75a) y (1.77), la ecuación (2.89) se convierte en

$$H(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} h(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (2.90)$$

Puesto que $\cos \omega\tau$ es una función par de ω , al cambiar ω por $-\omega$ en la ecuación (2.90) y al cambiar j por $-j$ en la ecuación (2.89) llegamos a

$$\begin{aligned} H(-j\omega) &= H(j\omega)^* = 2 \int_0^{\infty} h(\tau) \cos(-\omega\tau) d\tau \\ &= 2 \int_0^{\infty} h(\tau) \cos \omega\tau d\tau = H(j\omega) \end{aligned} \quad (2.91)$$

De este modo, observamos que el valor propio $H(j\omega)$ correspondiente a la función propia $e^{j\omega t}$ es real. Si \mathbf{T} representa al sistema, entonces, por las ecuaciones (2.23), (2.24) y (2.91), tenemos que

$$\mathbf{T}\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega) e^{j\omega t} \quad (2.92a)$$

$$\mathbf{T}\{e^{-j\omega t}\} = H(-j\omega) e^{-j\omega t} = H(j\omega) e^{-j\omega t} \quad (2.92b)$$

Ahora, ya que \mathbf{T} es lineal, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\{\cos \omega t\} &= \mathbf{T}\left\{\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right\} = \frac{1}{2}\mathbf{T}\{e^{j\omega t}\} + \frac{1}{2}\mathbf{T}\{e^{-j\omega t}\} \\ &= H(j\omega)\left\{\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right\} = H(j\omega) \cos \omega t \end{aligned} \quad (2.93a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\{\sin \omega t\} &= \mathbf{T}\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right\} = \frac{1}{2j}\mathbf{T}\{e^{j\omega t}\} - \frac{1}{2j}\mathbf{T}\{e^{-j\omega t}\} \\ &= H(j\omega)\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right\} = H(j\omega) \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.93b)$$

y

De esta manera, de las ecuaciones (2.93a) y (2.93b) observamos que $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$ son las funciones propias del sistema con el mismo valor propio real $H(j\omega)$ dado por la ecuación (2.88) o (2.90).

SISTEMAS DESCRITOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES

2.18. El sistema de tiempo continuo mostrado en la figura 2-18 se compone de un integrador y un multiplicador escalar. Escriba una ecuación diferencial que relacione la salida $y(t)$ y la entrada $x(t)$.

Denotemos la entrada del integrador mostrado en la figura 2-18 por $e(t)$. Entonces la relación entrada-salida del integrador está dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau \quad (2.94)$$

Al diferenciar ambos lados de la ecuación (2.94) con respecto a t , obtenemos

$$\frac{dy(t)}{dt} = e(t) \quad (2.95)$$

A continuación, de la figura 2-18, la entrada $e(t)$ para el integrador está dada por

$$e(t) = x(t) - ay(t) \quad (2.96)$$

Al sustituir la ecuación (2.96) en la ecuación (2.95), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= x(t) - ay(t) \\ \text{o} \quad \frac{dy(t)}{dt} + ay(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (2.97)$$

la cual es la ecuación diferencial lineal de primer orden requerida.

2.19. El sistema de tiempo continuo mostrado en la figura 2-19 se compone de dos integradores y dos multiplicadores escalares. Escriba una ecuación diferencial que relacione la salida $y(t)$ y la entrada $x(t)$.

Sean $e(t)$ y $w(t)$ la entrada y la salida del primer integrador en la figura 2-19, respectivamente. Mediante la ecuación (2.95), la entrada para el primer integrador está dada por

$$e(t) = \frac{dw(t)}{dt} = -a_1 w(t) - a_2 y(t) + x(t) \quad (2.98)$$

Ya que $w(t)$ es la entrada para el segundo integrador en la figura 2-19 tenemos que

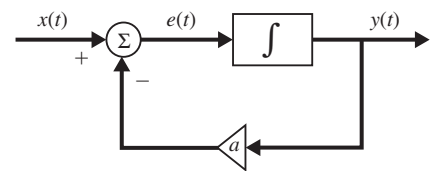


Figura 2-18

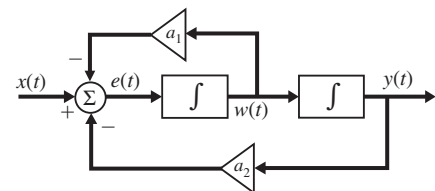


Figura 2-19

$$w(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad (2.99)$$

Al sustituir la ecuación (2.99) en la ecuación (2.98) obtenemos

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -a_1 \frac{dy(t)}{dt} - a_2y(t) + x(t)$$

o

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2y(t) = x(t) \quad (2.100)$$

siendo ésta la ecuación diferencial lineal de segundo orden requerida.

Observe que, en general, el orden de un sistema LIT de tiempo continuo que consiste en la interconexión de integradores y multiplicadores escalares es igual al número de integradores en el sistema.

2.20. Considere un sistema de tiempo continuo cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ están relacionadas por

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \quad (2.101)$$

donde a es una constante.

a) Encuentre $y(t)$ con la condición auxiliar $y(0) = y_0$ y

$$x(t) = Ke^{-bt}u(t) \quad (2.102)$$

b) Expresé $y(t)$ en términos de las respuestas de entrada cero y estado cero.

a) Sea $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$

donde $y_p(t)$ es la solución particular que satisface a la ecuación (2.101) y $y_h(t)$ es la solución homogénea que satisface

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + ay_h(t) = 0 \quad (2.103)$$

Supongamos que

$$y_p(t) = Ae^{-bt} \quad t > 0 \quad (2.104)$$

Al sustituir la ecuación (2.104) en la ecuación (2.101), obtenemos

$$-bAe^{-bt} + aAe^{-bt} = Ke^{-bt}$$

así conseguimos $A = K/(a - b)$, y

$$y_p(t) = \frac{K}{a-b}e^{-bt} \quad t > 0 \quad (2.105)$$

Para obtener $y_h(t)$, suponemos $y_h(t) = Be^{st}$

Sustituyendo esto en la ecuación (2.103) llegamos a

$$sBe^{st} + aBe^{st} = (s + a)Be^{st} = 0$$

de esto tenemos

$$s = -a \quad y \quad y_h(t) = Be^{-at}$$

Combinando $y_p(t)$ y $y_h(t)$, obtenemos

$$y(t) = Be^{-at} + \frac{K}{a-b}e^{-bt} \quad t > 0 \quad (2.106)$$

De la ecuación (2.106) y la condición auxiliar $y(0) = y_0$, obtenemos

$$B = y_0 - \frac{K}{a-b}$$

De este modo, la ecuación (2.106) se convierte en

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{K}{a-b} \right) e^{-at} + \frac{K}{a-b} e^{-bt} \quad t > 0 \quad (2.107)$$

Para $t < 0$, tenemos $x(t) = 0$ y la ecuación (2.101) se convierte en la ecuación (2.103). Por tanto,

$$y(t) = Be^{-at} \quad t < 0$$

De la condición auxiliar $y(0) = y_0$ obtenemos

$$y(t) = y_0 e^{-at} \quad t < 0 \quad (2.108)$$

- b) Al combinar las ecuaciones (2.107) y (2.108), $y(t)$ puede expresarse en términos de $y_{zi}(t)$ (respuesta de entrada cero) y $y_{zs}(t)$ (respuesta de estado cero) como

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-at} + \frac{K}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at}) u(t) \\ &= y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \end{aligned} \quad (2.109)$$

donde

$$y_{zi}(t) = y_0 e^{-at} \quad (2.110a)$$

$$y_{zs}(t) = \frac{K}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at}) u(t) \quad (2.110b)$$

2.21. Considere el sistema del problema 2.20.

- a) Demuestre que el sistema no es lineal si $y(0) = y_0 \neq 0$.
b) Demuestre que el sistema es lineal si $y(0) = 0$.

- a) Recuerde que un sistema lineal tiene la propiedad de que una entrada cero produce una salida cero (sección 1.5E). No obstante, si hacemos $K = 0$ en la ecuación (2.102), tenemos que $x(t) = 0$, pero de la ecuación (2.109) vemos que

$$y(t) = y_0 e^{-at} \neq 0 \quad y_0 \neq 0$$

De este modo, este sistema es no lineal si $y(0) = y_0 \neq 0$.

- b) Si $y(0) = 0$, el sistema es lineal. Esto se muestra así: sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales de entrada, y $y_1(t)$ y $y_2(t)$ las salidas correspondientes. Es decir,

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + ay_1(t) = x_1(t) \quad (2.111)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + ay_2(t) = x_2(t) \quad (2.112)$$

con las condiciones auxiliares

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \quad (2.113)$$

Considere

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

donde α_1 y α_2 son números complejos cualquiera. Multiplicando la ecuación (2.111) por α_1 y la ecuación (2.112) por α_2 y sumando, observamos que

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

y también, de la ecuación (2.113),

$$y(0) = \alpha_1 y_1(0) + \alpha_2 y_2(0) = 0$$

Por tanto, $y(t)$ es la salida correspondiente a $x(t)$, y así el sistema es lineal.

2.22. Considere el sistema del problema 2.20. Demuestre que la condición inicial de reposo $y(0) = 0$ también implica que el sistema es invariante en el tiempo.

Sea $y_1(t)$ la respuesta a una entrada $x_1(t)$ y

$$x_1(t) = 0 \quad t \leq 0 \quad (2.114)$$

Entonces

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + ay_1(t) = x_1(t) \quad (2.115)$$

y
$$y_1(0) = 0 \tag{2.116}$$

Ahora, sea $y_2(t)$ la respuesta a la entrada desplazada $x_2(t) = x_1(t - \tau)$. De la ecuación (2.114) tenemos que

$$x_2(t) = 0 \quad t \leq \tau \tag{2.117}$$

Entonces $y_2(t)$ debe satisfacer
$$\frac{dy_2(t)}{dt} + ay_2(t) = x_2(t) \tag{2.118}$$

y
$$y_2(\tau) = 0 \tag{2.119}$$

Ahora, de la ecuación (2.115), tenemos que

$$\frac{dy_1(t - \tau)}{dt} + ay_1(t - \tau) = x_1(t - \tau) = x_2(t)$$

Si hacemos que $y_2(t) = y_1(t - \tau)$, entonces, por la ecuación (2.116), obtenemos

$$y_2(\tau) = y_1(\tau - \tau) = y_1(0) = 0$$

De este modo, las ecuaciones (2.118) y (2.119) se satisfacen y concluimos que el sistema es invariante en el tiempo.

2.23. Considere el sistema en el problema 2.20. Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

La respuesta al impulso $h(t)$ debería satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dh(t)}{dt} + ah(t) = \delta(t) \tag{2.120}$$

La solución homogénea $h_h(t)$ para la ecuación (2.120) satisface a

$$\frac{dh_h(t)}{dt} + ah_h(t) = 0 \tag{2.121}$$

Para obtener $h_h(t)$ suponemos que
$$h_h(t) = ce^{st}$$

Si sustituimos esto en la ecuación (2.121) llegamos a

$$sce^{st} + ace^{st} = (s + a) ce^{st} = 0$$

para lo cual tenemos que
$$s = -a \quad y \quad h_h(t) = ce^{-at} u(t) \tag{2.122}$$

Predecimos que la solución particular $h_p(t)$ es cero puesto que $h_p(t)$ no puede contener a $\delta(t)$. De otra forma, $h(t)$ tendría una derivada de $\delta(t)$ que no es parte del lado derecho de la ecuación (2.120). De este modo,

$$h(t) = ce^{-at} u(t) \tag{2.123}$$

Para encontrar la constante c , se sustituye la ecuación (2.123) en la ecuación (2.120), y obtenemos

$$\frac{d}{dt}[ce^{-at} u(t)] + ace^{-at} u(t) = \delta(t)$$

o
$$-ace^{-at} u(t) + ce^{-at} \frac{du(t)}{dt} + ace^{-at} u(t) = \delta(t)$$

Al usar las ecuaciones (1.25) y (1.30), la ecuación anterior se convierte en

$$ce^{-at} \frac{du(t)}{dt} = ce^{-at} \delta(t) = c\delta(t) = \delta(t)$$

de modo que $c = 1$. De esta forma, la respuesta al impulso está dada por

$$h(t) = e^{-at} u(t) \tag{2.124}$$

2.24. Considere el sistema en el problema 2.20 con $y(0) = 0$.

- a) Encuentre la respuesta al escalón $s(t)$ del sistema sin utilizar la respuesta al impulso $h(t)$.
- b) Encuentre la respuesta al escalón $s(t)$ con la respuesta al impulso $h(t)$ obtenida en el problema 2.23.
- c) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ de $s(t)$.

a) En el problema 2.20

$$x(t) = Ke^{-bt}u(t)$$

Al establecer $K = 1$, $b = 0$, obtenemos $x(t) = u(t)$ y entonces $y(t) = s(t)$. De este modo, al establecer $K = 1$, $b = 0$ y $y(0) = y_0 = 0$ en la ecuación (2.109), obtenemos la respuesta al escalón

$$s(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t) \quad (2.125)$$

b) Si utilizamos las ecuaciones (2.12) y (2.124) en el problema 2.23, la respuesta al escalón $s(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t e^{-a\tau} u(\tau) d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^t e^{-a\tau} d\tau \right] u(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t) \end{aligned}$$

y ésta es igual a la ecuación (2.125).

c) Por medio de las ecuaciones (2.13) y (2.125), la respuesta al impulso $h(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} h(t) = s'(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t) \right] \\ &= e^{-at}u(t) + \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u'(t) \end{aligned}$$

Al usar las ecuaciones (1.25) y (1.30) tenemos que

$$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})u'(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\delta(t) = \frac{1}{a}(1 - 1)\delta(t) = 0$$

De este modo,

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

la cual es la misma que la ecuación (2.124).

2.25. Considere el sistema descrito por

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t) \quad (2.126)$$

Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

La respuesta al impulso $h(t)$ debería satisfacer la ecuación diferencial

$$h'(t) + 2h(t) = \delta(t) + \delta'(t) \quad (2.127)$$

La solución homogénea $h_h(t)$ para la ecuación (2.127) es [vea el problema 2.23 y la ecuación (2.122)]

$$h_h(t) = c_1 e^{-2t} u(t)$$

Al suponer la solución particular $h_p(t)$ de la forma

$$h_p(t) = c_2 \delta(t)$$

la solución general es

$$h(t) = c_1 e^{-2t} u(t) + c_2 \delta(t) \quad (2.128)$$

La función delta $\delta(t)$ debe estar presente de tal modo que $h'(t)$ contribuya a $\delta'(t)$ para el lado izquierdo de la ecuación (1.127). Si sustituimos la ecuación (2.128) en la ecuación (2.127) obtenemos

$$\begin{aligned} -2c_1 e^{-2t} u(t) + c_1 e^{-2t} u'(t) + c_2 \delta'(t) + 2c_1 e^{-2t} u(t) + 2c_2 \delta(t) \\ = \delta(t) + \delta'(t) \end{aligned}$$

De nuevo, mediante las ecuaciones (1.25) y (1.30) tenemos que

$$(c_1 + 2c_2) \delta(t) + c_2 \delta'(t) = \delta(t) + \delta'(t)$$

Igualando los coeficientes de $\delta(t)$ y $\delta'(t)$, obtenemos

$$c_1 + 2c_2 = 1 \quad c_2 = 1$$

de lo cual se determina $c_1 = -1$ y $c_2 = 1$. Al sustituir estos valores en la ecuación (2.128) obtenemos

$$h(t) = -e^{-2t} u(t) + \delta(t) \quad (2.129)$$

RESPUESTAS DE UN SISTEMA LIT DE TIEMPO DISCRETO Y CONVOLUCIÓN

2.26. Verifique las ecuaciones (2.36) y (2.37); es decir,

- a) $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
- b) $\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$
- a) Por la definición (2.35)

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Al cambiar la variable $n - k = m$, tenemos que

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = h[n] * x[n]$$

- b) Sea $x[n] * h_1[n] = f_1[n]$ y $h_1[n] * h_2[n] = f_2[n]$. Entonces

$$f_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_1[n-k]$$

$$\begin{aligned} y \quad \{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] &= f_1[n] * h_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1[m]h_2[n-m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_1[m-k] \right] h_2[n-m] \end{aligned}$$

Al sustituir $r = m - k$ e intercambiar el orden de la sumatoria, tenemos que

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} h_1[r]h_2[n-k-r] \right)$$

Ahora, como

$$f_2[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_1[r]h_2[n-r]$$

tenemos que

$$f_2[n-k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_1[r]h_2[n-k-r]$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] f_2[n-k] \\ &= x[n] * f_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\} \end{aligned}$$

2.27. Demuestre que

a) $x[n] * \delta[n] = x[n]$ **(2.130)**

b) $x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$ **(2.131)**

c) $x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$ **(2.132)**

d) $x[n] * u[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$ **(2.133)**

- a) Por la ecuación (2.35) y la propiedad (1.46) de $\delta[n - k]$ tenemos que

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n]$$

- b) De manera similar, tenemos que

$$x[n] * \delta[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k-n_0] = x[n - n_0]$$

c) Por la ecuación (2.35) y la definición (1.44) de $u[n - k]$ tenemos que

$$x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] u[n - k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

d) De manera semejante tenemos que

$$x[n] * u[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] u[n - k - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n - n_0} x[k]$$

2.28. La entrada $x[n]$ y la respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema LIT de tiempo discreto están dadas por

$$x[n] = u[n] \quad h[n] = \alpha^n u[n] \quad 0 < \alpha < 1$$

a) Calcule la salida $y[n]$ mediante la ecuación (2.35).

b) Calcule la salida $y[n]$ mediante la ecuación (2.39).

a) Por la ecuación (2.35) tenemos que

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k]$$

Las secuencias $x[k]$ y $h[n - k]$ se muestran en la figura 2-20a) para $n < 0$ y $n > 0$. De la figura 2-20a) observamos que para $n < 0$, $x[k]$ y $h[n - k]$ no se traslapan, mientras que para $n \geq 0$ se traslapan desde $k = 0$ hasta $k = n$. Por tanto, para $n < 0$, $y[n] = 0$. Para $n \geq 0$ tenemos que

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k}$$

Al cambiar la variable de la sumatoria k a $m = n - k$ y con el uso de la ecuación (1.90), tenemos que

$$y[n] = \sum_{m=n}^0 \alpha^m = \sum_{m=0}^n \alpha^m = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

De esta forma podemos escribir la salida $y[n]$ como

$$y[n] = \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) u[n] \quad (2.134)$$

lo cual se grafica en la figura 2-20b).

b) Por la ecuación (2.39)

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n - k]$$

Las secuencias $h[k]$ y $x[n - k]$ se muestran en la figura 2-21 para $n < 0$ y $n > 0$. Nuevamente, de la figura 2-21 observamos que para $n < 0$, $h[k]$ y $x[n - k]$ no se traslapan, mientras que para $n \geq 0$ se traslapan desde $k = 0$ hasta $k = n$. Por tanto, para $n < 0$, $y[n] = 0$. Para $n \geq 0$ tenemos que

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

De este modo, obtenemos el mismo resultado que el mostrado en la ecuación (2.134).

2.29. Calcule $y[n] = x[n] * h[n]$, donde

a) $x[n] = \alpha^n u[n]$, $h[n] = \beta^n u[n]$

b) $x[n] = \alpha^n u[n]$, $h[n] = \alpha^{-n} u[-n]$, $0 < \alpha < 1$

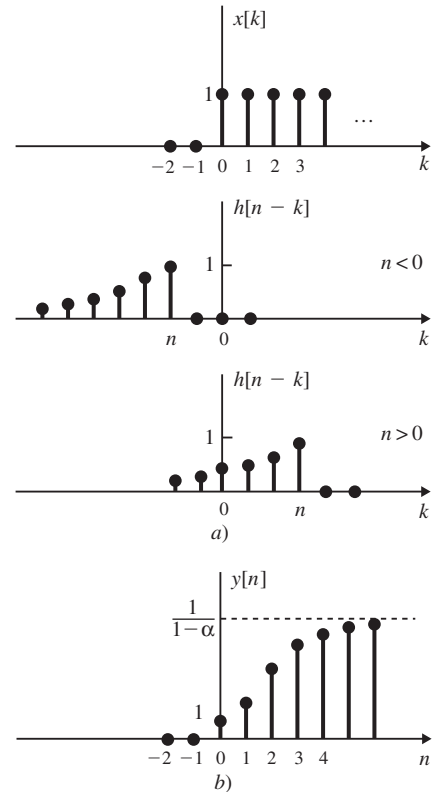


Figura 2-20

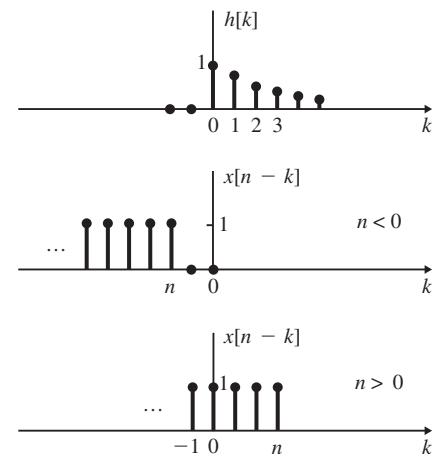


Figura 2-21

a) De la ecuación (2.35) tenemos que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k] \beta^{n-k} u[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \beta^{n-k} u[k] u[n-k]$$

puesto que
$$u[k]u[n-k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

tenemos que
$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{n-k} = \beta^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \quad n \geq 0$$

Por medio de la ecuación (1.90), obtenemos

$$y[n] = \begin{cases} \beta^n \frac{1 - (\alpha/\beta)^{n+1}}{1 - (\alpha/\beta)} u[n] & \alpha \neq \beta \\ \beta^n (n+1) u[n] & \alpha = \beta \end{cases} \quad (2.135a)$$

o
$$y[n] = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}) u[n] & \alpha \neq \beta \\ \beta^n (n+1) u[n] & \alpha = \beta \end{cases} \quad (2.135b)$$

b)
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k] \alpha^{-(n-k)} u[-(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{-n} \alpha^{2k} u[k] u[k-n]$$

Para $n \leq 0$, tenemos que

$$u[k]u[k-n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Así, mediante la ecuación (1.91), tenemos que

$$y[n] = \alpha^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} = \alpha^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^2)^k = \frac{\alpha^{-n}}{1 - \alpha^2} \quad n \leq 0 \quad (2.136a)$$

Para $n \geq 0$, tenemos que

$$u[k]u[k-n] = \begin{cases} 1 & n \leq k \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

De esta manera, empleando la ecuación (1.92), tenemos que

$$y[n] = \alpha^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} (\alpha^2)^k = \alpha^{-n} \frac{\alpha^{2n}}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^2} \quad n \geq 0 \quad (2.136b)$$

Combinando las ecuaciones (2.136a) y (2.136b), obtenemos

$$y[n] = \frac{\alpha^{|n|}}{1 - \alpha^2} \quad \text{para toda } n \quad (2.137)$$

lo cual se muestra en la figura 2-22.

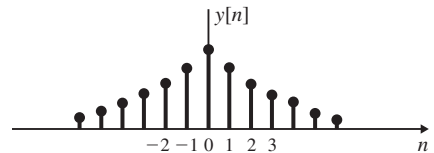


Figura 2-22

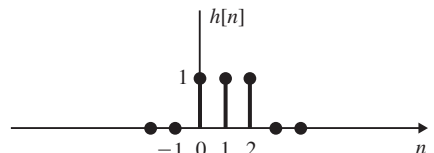
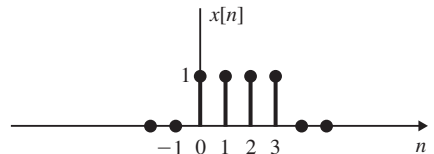


Figura 2-23

2.30. Evalúe $y[n] = x[n] * h[n]$, donde $x[n]$ y $h[n]$ se ilustran en la figura 2-23, a) mediante una técnica analítica, y b) por medio de un método gráfico.

a) Observe que $x[n]$ y $h[n]$ pueden expresarse como

$$\begin{aligned}x[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \\h[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\end{aligned}$$

Ahora, al utilizar las ecuaciones (2.38), (2.130) y (2.131) tenemos que

$$\begin{aligned}x[n] * h[n] &= x[n] * \{\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\} \\&= x[n] * \delta[n] + x[n] * \delta[n-1] + x[n] * \delta[n-2] \\&= x[n] + x[n-1] + x[n-2]\end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}y[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \\&\quad + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] \\&\quad + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5]\end{aligned}$$

o
$$y[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5]$$

o
$$y[n] = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$$

b) En la figura 2-24 se grafican las secuencias $h[k]$, $x[k]$ y $h[n-k]$, $x[k]h[n-k]$ para diferentes valores de n . En la figura 2-24 vemos que $x[k]$ y $h[n-k]$ no se traslapan para $n < 0$ y $n > 5$, y por consiguiente, $y[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > 5$. Para $0 \leq n \leq 5$, $x[k]$ y $h[n-k]$ se traslapan. De este modo, al sumar $x[k]h[n-k]$ para $0 \leq n \leq 5$ obtenemos

$$y[0] = 1 \quad y[1] = 2 \quad y[2] = 3 \quad y[3] = 3 \quad y[4] = 2 \quad y[5] = 1$$

o
$$y[n] = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$$

lo cual se grafica en la figura 2-25.

2.31. Si $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son secuencias periódicas con periodo común N , la convolución de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ no converge. En este caso, definimos la *convolución periódica* de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ como

$$f[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[n-k] \quad (2.138)$$

Demuestre que $f[n]$ es periódica con periodo N .

Puesto que $x_2[n]$ es periódica con periodo N , tenemos que

$$x_2[(n-k) + N] = x_2[n-k]$$

Entonces, de la ecuación (2.138) tenemos que

$$\begin{aligned}f[n+N] &= \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[n+N-k] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[(n-k) + N] \\&= \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[n-k] = f[n]\end{aligned}$$

De esta forma, $f[n]$ es periódica con periodo N .

2.32. La respuesta al escalón $s[n]$ de un sistema LIT de tiempo discreto está dada por

$$s[n] = \alpha^n u[n] \quad 0 < \alpha < 1$$

Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

De la ecuación (2.41), la respuesta al impulso $h[n]$ está dada por

$$\begin{aligned}h[n] &= s[n] - s[n-1] = \alpha^n u[n] - \alpha^{n-1} u[n-1] \\&= \{\delta[n] + \alpha^n u[n-1]\} - \alpha^{n-1} u[n-1] \\&= \delta[n] - (1 - \alpha)\alpha^{n-1} u[n-1]\end{aligned}$$

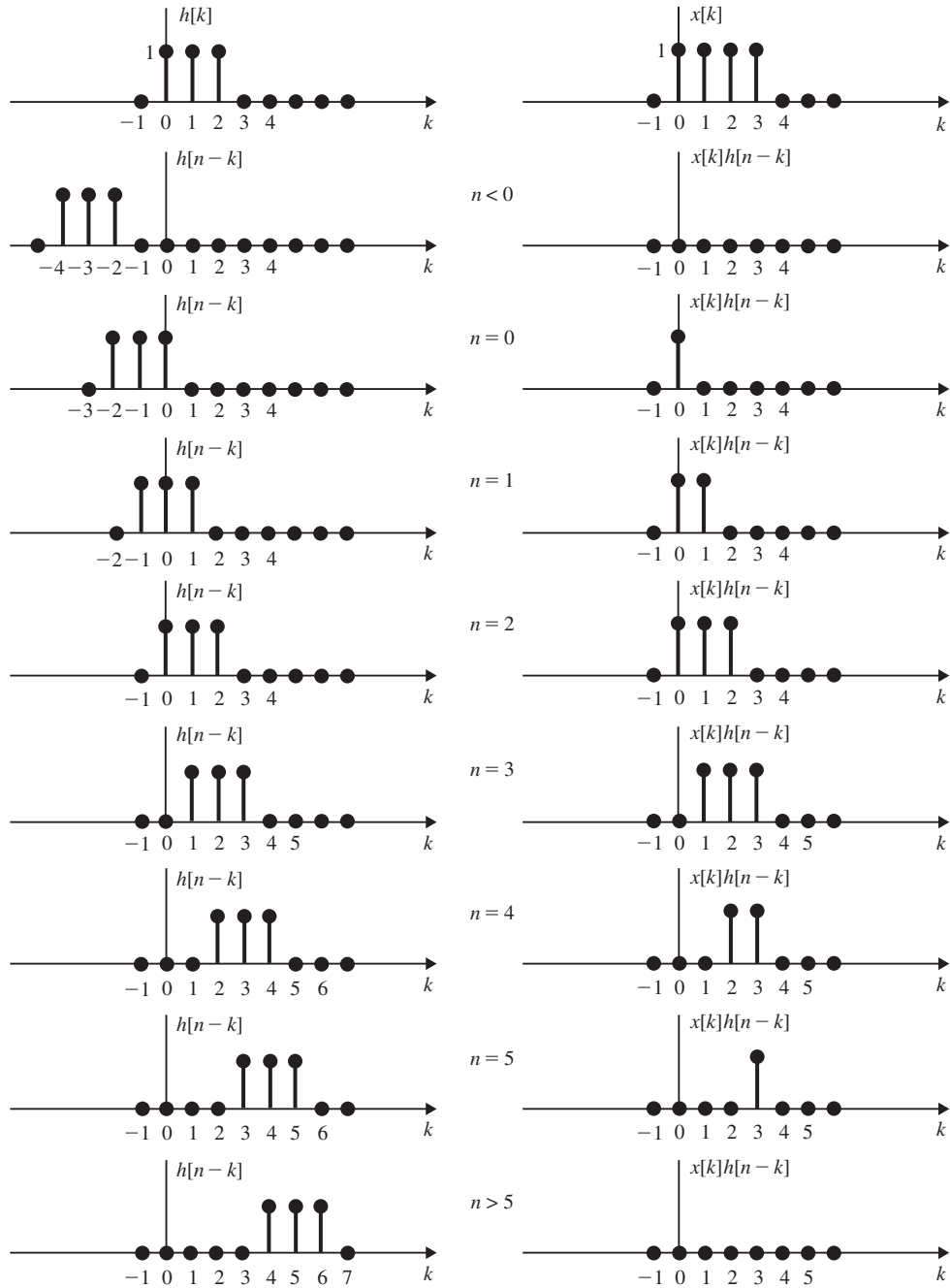


Figura 2-24

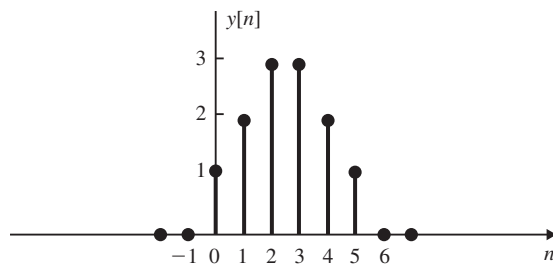


Figura 2-25

PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO DISCRETO

2.33. Demuestre que si la entrada $x[n]$ a un sistema LIT de tiempo discreto es periódica con periodo N , entonces la salida $y[n]$ también es periódica con periodo N .

Sea $h[n]$ la respuesta al impulso del sistema. Entonces, por la ecuación (2.39) tenemos que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Sea $n = m + N$. Entonces

$$y[m+N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[m+N-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[(m-k)+N]$$

Puesto que $x[n]$ es periódica con periodo N , tenemos que

$$x[(m-k)+N] = x[m-k]$$

De este modo,

$$y[m+N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[m-k] = y[m]$$

lo cual indica que la salida $y[n]$ es periódica con periodo N .

2.34. En la figura 2-26a) se muestra la respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema LIT de tiempo discreto. Determine y grafique la salida $y[n]$ de este sistema para la entrada $x[n]$ mostrada en la figura 2-26b) sin usar la técnica de convolución.

De la figura 2-26b) podemos expresar a $x[n]$ como

$$x[n] = \delta[n-2] - \delta[n-4]$$

Puesto que el sistema es lineal y también invariante en el tiempo, y por la definición de la respuesta al impulso, observamos que la salida $y[n]$ está dada por

$$y[n] = h[n-2] - h[n-4]$$

lo cual se grafica en la figura 2-27.

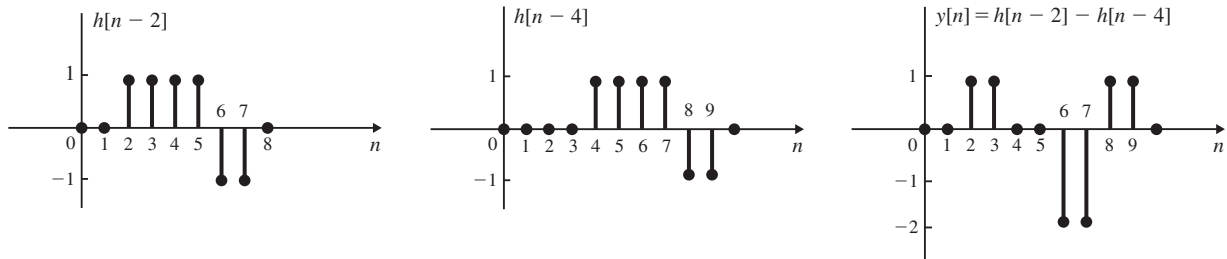


Figura 2-27

Figura 2-26

2.35. Un sistema de tiempo discreto es causal si para cada selección de n_0 el valor de la serie o secuencia de salida $y[n]$ para $n = n_0$ depende sólo de los valores de la secuencia de entrada $x[n]$ para $n \leq n_0$ (vea la sección 1.5D). De esta definición se deriva la condición de causalidad (2.44) para un sistema LIT de tiempo discreto; es decir,

$$h[n] = 0 \quad n < 0$$

De la ecuación (2.39) tenemos que

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \end{aligned} \quad (2.139)$$

Observe que la primera sumatoria representa una suma ponderada de valores futuros de $x[n]$. De esta forma, si el sistema es causal, entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] = 0$$

Esto sólo puede ser verdadero si $h[n] = 0 \quad n < 0$

Ahora, si $h[n] = 0$ para $n < 0$, entonces la ecuación (2.139) se convierte en

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

lo cual indica que el valor de la salida $y[n]$ depende únicamente de los valores de entrada pasados y presentes.

2.36. Considere un sistema LIT de tiempo discreto cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas por

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n} x[k+1]$$

¿El sistema es causal?

Por la definición (2.30) y la ecuación (1.48) la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema está dada por

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n} \delta[k+1] = \sum_{k=-\infty}^n 2^{-(n+1)} \delta[k+1] = 2^{-(n+1)} \sum_{k=-\infty}^n \delta[k+1]$$

Al cambiar la variable $k+1 = m$, y por la ecuación (1.50), obtenemos

$$h[n] = 2^{-(n+1)} \sum_{m=-\infty}^{n+1} \delta[m] = 2^{-(n+1)} u[n+1] \tag{2.140}$$

De la ecuación (2.140) tenemos que $h[-1] = u[0] = 1 \neq 0$. De esta manera, el sistema es no causal.

2.37. Verifique la condición de estabilidad en el sentido BIBO [ecuación (2.49)] para los sistemas LIT de tiempo discreto.

Supongamos que la entrada $x[n]$ de un sistema LIT de tiempo discreto está acotada, es decir,

$$|x[n]| \leq k_1 \quad \text{para toda } n \tag{2.141}$$

Entonces, por medio de la ecuación (2.35), tenemos que

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \leq k_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

Puesto que $|x[n-k]| \leq k_1$ de la ecuación (2.141). Por consiguiente, si la respuesta al impulso es absolutamente sumable, esto es, si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = K < \infty$$

tenemos que $|y[n]| \leq k_1 K = k_2 < \infty$

y el sistema es estable en el sentido BIBO.

2.38. Considere un sistema LIT de tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$ dada por

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

a) ¿Este sistema es causal?

b) ¿Este sistema es estable en el sentido BIBO?

a) Puesto que $h[n] = 0$ para $n < 0$, el sistema es causal.

b) Mediante la ecuación (1.91) (problema 1.19), tenemos que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha^k u[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^k = \frac{1}{1-|\alpha|} \quad |\alpha| < 1$$

Por consiguiente, el sistema es estable en el sentido BIBO si $|\alpha| < 1$ e inestable si $|\alpha| \geq 1$.

SISTEMAS DESCRITOS POR ECUACIONES EN DIFERENCIAS

- 2.39. El sistema de tiempo discreto mostrado en la figura 2-28 se compone de un elemento de retardo unitario y un multiplicador escalar. Escriba una ecuación en diferencias que relacione la salida $y[n]$ y la entrada $x[n]$.

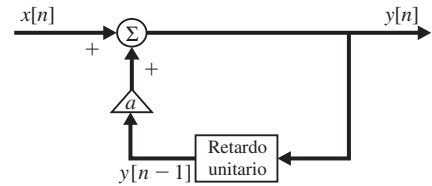


Figura 2-28

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n] \quad (2.142)$$

o

$$y[n] - ay[n - 1] = x[n] \quad (2.143)$$

la cual es la ecuación en diferencias lineal de primer orden requerida.

- 2.40. El sistema de tiempo discreto mostrado en la figura 2-29 se compone de dos elementos de retardo unitario y dos multiplicadores escalares. Escriba una ecuación en diferencias que relacione la salida $y[n]$ y la entrada $x[n]$.

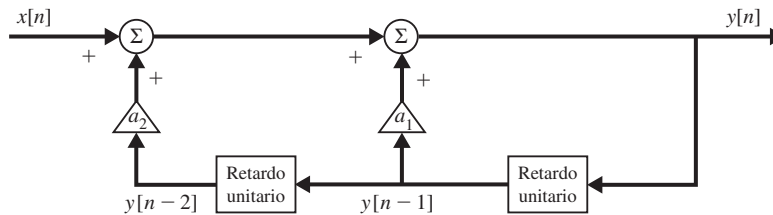


Figura 2-29

En la figura 2-29 la salida del primer elemento de retardo unitario (desde la derecha) es $y[n - 1]$ y la salida del segundo elemento de retardo unitario (desde la derecha) es $y[n - 2]$. De este modo, de la figura 2-29 vemos que

$$y[n] = a_1 y[n - 1] + a_2 y[n - 2] + x[n] \quad (2.144)$$

o

$$y[n] - a_1 y[n - 1] - a_2 y[n - 2] = x[n] \quad (2.145)$$

la cual es la ecuación en diferencias lineal de segundo orden requerida.

Observe que, en general, el orden de un sistema LIT de tiempo discreto compuesto de la interconexión de elementos de retardo unitarios y multiplicadores escalares es igual al número de elementos de retardo unitarios en el sistema.

- 2.41. Considere el sistema de tiempo discreto en la figura 2-30. Escriba una ecuación en diferencias que relacione la salida $y[n]$ y la entrada $x[n]$.

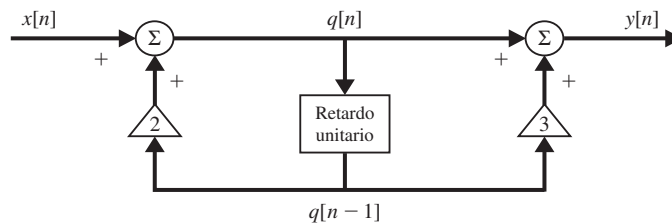


Figura 2-30

Sea la entrada al elemento de retardo unitario $q[n]$. Entonces de la figura 2-30 observamos que

$$q[n] = 2q[n - 1] + x[n] \quad (2.146a)$$

$$y[n] = q[n] + 3q[n - 1] \quad (2.146b)$$

Al resolver las ecuaciones (2.146a) y (2.146b) para $q[n]$ y $q[n - 1]$ en términos de $x[n]$ y $y[n]$ obtenemos

$$q[n] = \frac{2}{5} y[n] + \frac{3}{5} x[n] \quad (2.147a)$$

$$q[n-1] = \frac{1}{5}y[n] - \frac{1}{5}x[n] \quad (2.147b)$$

Cambiando n a $(n-1)$ en la ecuación (2.147a), tenemos que

$$q[n-1] = \frac{2}{5}y[n-1] + \frac{3}{5}x[n-1] \quad (2.147c)$$

De este modo, igualando la ecuación (2.147b) y la ecuación (2.147c), tenemos que

$$\frac{1}{5}y[n] - \frac{1}{5}x[n] = \frac{2}{5}y[n-1] + \frac{3}{5}x[n-1]$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación anterior por 5 y reacomodar los términos, obtenemos

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n] + 3x[n-1] \quad (2.148)$$

la cual es la ecuación diferencial requerida.

2.42. Considere un sistema de tiempo discreto cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas por

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad (2.149)$$

donde a es una constante. Encuentre $y[n]$ con la condición auxiliar $y[-1] = y_{-1}$ y

$$x[n] = Kb^n u[n] \quad (2.150)$$

Sea

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n]$$

donde $y_p[n]$ es la solución particular que satisface la ecuación (2.149) y $y_h[n]$ es la solución homogénea que satisface

$$y[n] - ay[n-1] = 0 \quad (2.151)$$

Suponga que

$$y_p[n] = Ab^n \quad n \geq 0 \quad (2.152)$$

Sustituyendo la ecuación (2.152) en la ecuación (2.149), obtenemos

$$Ab^n - aAb^{n-1} = Kb^n$$

de lo cual obtenemos $A = Kb/(b-a)$, y

$$y_p[n] = \frac{K}{b-a} b^{n+1} \quad n \geq 0 \quad (2.153)$$

Para obtener $y_h[n]$, suponemos que

$$y_h[n] = Bz^n$$

Al sustituir esto en la ecuación (2.151) nos da

$$Bz^n - aBz^{n-1} = (z-a)Bz^{n-1} = 0$$

de lo cual tenemos que

$$z = a \quad y \quad y_h[n] = Ba^n \quad (2.154)$$

Combinando $y_p[n]$ y $y_h[n]$, obtenemos

$$y[n] = Ba^n + \frac{K}{b-a} b^{n+1} \quad n \geq 0 \quad (2.155)$$

A fin de determinar B en la ecuación (2.155) necesitamos el valor de $y[0]$. Si establecemos $n=0$ en las ecuaciones (2.149) y (2.150) tenemos que

$$y[0] - ay[-1] = y[0] - ay_{-1} = x[0] = K$$

o

$$y[0] = K + ay_{-1} \quad (2.156)$$

Al establecer $n=0$ en la ecuación (2.155) obtenemos

$$y[0] = B + K \frac{b}{b-a} \quad (2.157)$$

Por tanto, si igualamos las ecuaciones (2.156) y (2.157) tenemos que

$$K + ay_{-1} = B + K \frac{b}{b-a}$$

de lo que obtenemos

$$B = ay_{-1} - K \frac{a}{b-a}$$

Por consiguiente, la ecuación (2.155) se convierte en

$$y[n] = y_{-1}a^{n+1} + K \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} \quad n \geq 0 \quad (2.158)$$

Para $n < 0$, tenemos que $x[n] = 0$, y la ecuación (2.149) se convierte en la ecuación (2.151). Por tanto,

$$y[n] = Ba^n \quad (2.159)$$

De la condición auxiliar $y[-1] = y_{-1}$ tenemos que

$$y[-1] = y_{-1} = Ba^{-1}$$

de lo que obtenemos $B = y_{-1}a$. De esta manera,

$$y[n] = y_{-1}a^{n+1} \quad n < 0 \quad (2.160)$$

Combinando las ecuaciones (2.158) y (2.160), $y[n]$ puede expresarse como

$$y[n] = y_{-1}a^{n+1} + K \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} u[n] \quad (2.161)$$

Observe que como en el caso de tiempo continuo (problemas 2.21 y 2.22), el sistema descrito por la ecuación (2.149) no es lineal si $y[-1] \neq 0$. El sistema es causal e invariante en el tiempo si inicialmente se encuentra en reposo; es decir, $y[-1] = 0$. Note también que la ecuación (2.149) puede resolverse de manera recursiva (vea el problema 2.43).

2.43. Considere el sistema de tiempo discreto en el problema 2.42. Encuentre la salida $y[n]$ cuando $x[n] = K\delta[n]$ y $y[-1] = y_{-1} = \alpha$.

Podemos resolver la ecuación (2.149) para valores sucesivos de $y[n]$ para $n \geq 0$ de la siguiente manera: reacomode la ecuación (2.149) como

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \quad (2.162)$$

Entonces

$$\begin{aligned} y[0] &= ay[-1] + x[0] = a\alpha + K \\ y[1] &= ay[0] + x[1] = a(a\alpha + K) \\ y[2] &= ay[1] + x[2] = a^2(a\alpha + K) \\ &\vdots \\ y[n] &= ay[n-1] + x[n] = a^n(a\alpha + K) = a^{n+1}\alpha + a^nK \end{aligned} \quad (2.163)$$

De manera semejante, también podemos determinar $y[n]$ para $n < 0$ al reacomodar la ecuación (2.149) como

$$y[n-1] = \frac{1}{a} \{y[n] - x[n]\} \quad (2.164)$$

Entonces

$$\begin{aligned} y[-1] &= \alpha \\ y[-2] &= \frac{1}{a} \{y[-1] - x[-1]\} = \frac{1}{a}\alpha = a^{-1}\alpha \\ y[-3] &= \frac{1}{a} \{y[-2] - x[-2]\} = a^{-2}\alpha \\ &\vdots \\ y[-n] &= \frac{1}{a} \{y[-n+1] - x[-n+1]\} = a^{-n+1}\alpha \end{aligned} \quad (2.165)$$

Al combinar las ecuaciones (2.163) y (2.165) obtenemos

$$y[n] = a^{n+1}\alpha + Ka^n u[n] \quad (2.166)$$

2.44. Considere el sistema discreto en el tiempo del problema 2.43 para una condición en reposo inicial.

- Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.
- Encuentre la respuesta al escalón $s[n]$ del sistema.
- Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ a partir del resultado del inciso b).

a) Al establecer $K = 1$ y $y[-1] = \alpha = 0$ en la ecuación (2.166), obtenemos

$$h[n] = a^n u[n] \quad (2.167)$$

b) Al establecer $K = 1$, $b = 1$ y $y[-1] = y_{-1} = 0$ en la ecuación (2.161), tenemos que

$$s[n] = \left(\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \right) u[n] \quad (2.168)$$

c) De las ecuaciones (2.41) y (2.168), la respuesta al impulso $h[n]$ está dada por

$$h[n] = s[n] - s[n-1] = \left(\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \right) u[n] - \left(\frac{1 - a^n}{1 - a} \right) u[n-1]$$

Cuando $n = 0$,

$$h[0] = \left(\frac{1 - a}{1 - a} \right) u[0] = 1$$

Cuando $n \geq 1$,

$$h[n] = \frac{1}{1 - a} [1 - a^{n+1} - (1 - a^n)] = \frac{a^n(1 - a)}{1 - a} = a^n$$

De este modo,

$$h[n] = a^n u[n]$$

la cual es igual a la ecuación (2.167).

2.45. Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ para cada uno de los sistemas LIT de tiempo discreto causales que satisfacen las siguientes ecuaciones en diferencias e indique si cada sistema es FIR o IIR.

a) $y[n] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-3]$

b) $y[n] + 2y[n-1] = x[n] + x[n-1]$

c) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-2] = 2x[n] - x[n-2]$

a) Por la definición (2.56) $h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-2] + \delta[n-3]$

o $h[n] = \{1, 0, -2, 1\}$

Como $h[n]$ tiene solamente cuatro términos, el sistema es FIR.

b) $h[n] = -2h[n-1] + \delta[n] + \delta[n-1]$

Puesto que el sistema es causal, $h[-1] = 0$. Entonces

$$h[0] = -2h[-1] + \delta[0] + \delta[-1] = \delta[0] = 1$$

$$h[1] = -2h[0] + \delta[1] + \delta[0] = -2 + 1 = -1$$

$$h[2] = -2h[1] + \delta[2] + \delta[1] = -2(-1) = 2$$

$$h[3] = -2h[2] + \delta[3] + \delta[2] = -2(2) = -2^2$$

⋮

$$h[n] = -2h[n-1] + \delta[n] + \delta[n-1] = (-1)^n 2^{n-1}$$

Por tanto,

$$h[n] = \delta[n] + (-1)^n 2^{n-1} u[n-1]$$

Puesto que $h[n]$ tiene términos infinitos, el sistema es IIR.

c) $h[n] = \frac{1}{2}h[n-2] + 2\delta[n] - \delta[n-2]$

Puesto que el sistema es causal, $h[-2] = h[-1] = 0$. Entonces

$$h[0] = \frac{1}{2}h[-2] + 2\delta[0] - \delta[-2] = 2\delta[0] = 2$$

$$h[1] = \frac{1}{2}h[-1] + 2\delta[1] - \delta[-1] = 0$$

$$h[2] = \frac{1}{2}h[0] + 2\delta[2] - \delta[0] = \frac{1}{2}(2) - 1 = 0$$

$$h[3] = \frac{1}{2}h[1] + 2\delta[3] - \delta[1] = 0$$

$$\vdots$$

Por consiguiente, $h[n] = 2\delta[n]$

Puesto que $h[n]$ tiene sólo un término, el sistema es FIR.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

2.46. Calcule la convolución $y(t) = x(t) * h(t)$ del siguiente par de señales:

$$a) \quad x(t) = \begin{cases} 1 & -a < t \leq a \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & -a < t \leq a \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$b) \quad x(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq T \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 2T \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$c) \quad x(t) = u(t-1), \quad h(t) = e^{-3t}u(t)$$

2.47. Calcule la suma de convolución $y[n] = x[n] * h[n]$ de los siguientes pares de series o secuencias:

$$a) \quad x[n] = u[n], \quad h[n] = 2^n u[-n]$$

$$b) \quad x[n] = u[n] - u[n-N], \quad h[n] = \alpha^n u[n], \quad 0 < \alpha < 1$$

$$c) \quad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

2.48. Demuestre que si $y(t) = x(t) * h(t)$, entonces

$$y'(t) = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)$$

2.49. Demuestre que

$$x(t) * \delta'(t) = x'(t)$$

2.50. Sea $y[n] = x[n] * h[n]$. Entonces demuestre que

$$x[n-n_1] * h[n-n_2] = y[n-n_1-n_2]$$

2.51. Demuestre que

$$x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} x_1[k]x_2[n-k]$$

para un punto de inicio arbitrario n_0 .

2.52. La respuesta al escalón $s(t)$ de un sistema LIT de tiempo continuo está dada por

$$s(t) = [\cos \omega_0 t]u(t)$$

Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

2.53. El sistema mostrado en la figura 2-31 está formado por la conexión de dos sistemas *en paralelo*. Las respuestas al impulso de los sistemas están dadas por

$$h_1(t) = e^{-2t}u(t) \quad \text{y} \quad h_2(t) = 2e^{-t}u(t)$$

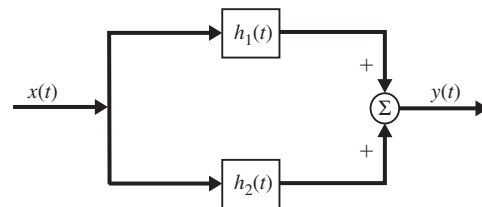


Figura 2-31

a) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema total.

b) ¿El sistema completo es estable?

2.54. Considere un integrador cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ están relacionadas mediante

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

a) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ del integrador.

b) ¿El integrador es estable?

2.55. Considere un sistema LIT de tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$ dada por

$$h[n] = \delta[n-1]$$

¿El sistema es sin memoria?

2.56. La respuesta al impulso de un sistema LIT de tiempo discreto está dada por

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Sea $y[n]$ la salida del sistema con la entrada

$$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-3]$$

Encuentre $y[1]$ y $y[4]$.

2.57. Considere un sistema LIT de tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$ dada por

$$h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$$

- a) ¿El sistema es causal?
- b) ¿El sistema es estable?

2.58. Considere el circuito *RLC* mostrado en la figura 2-32. Encuentre la ecuación diferencial que relaciona la corriente de salida $y(t)$ y el voltaje de entrada $x(t)$.

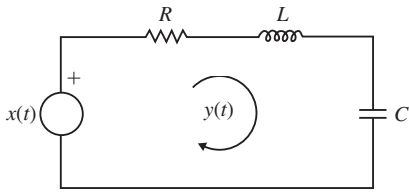


Figura 2-32

- 2.59.** Considere el circuito *RL* ilustrado en la figura 2-33.
- a) Encuentre la ecuación diferencial que relaciona el voltaje de salida $y(t)$ a través de R y el voltaje de entrada $x(t)$.
 - b) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ del circuito.
 - c) Encuentre la respuesta al escalón $s(t)$ del circuito.

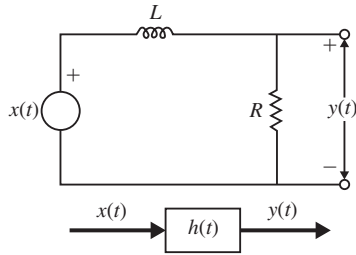


Figura 2-33

- 2.60.** Considere el sistema en el problema 2.20. Encuentre la salida $y(t)$ si $x(t) = e^{-at}u(t)$ y $y(0) = 0$.
- 2.61.** ¿El sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial es lineal?

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) + 2 = x(t)$$

2.62. Escriba la ecuación de entrada-salida para el sistema que se muestra en la figura 2-34.

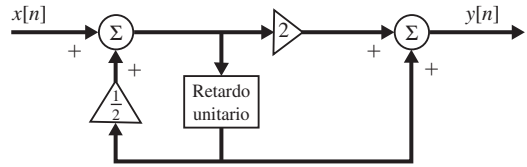


Figura 2-34

2.63. Considere un sistema LIT de tiempo discreto con respuesta al impulso

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Encuentre la relación entrada-salida del sistema.

2.64. Considere un sistema de tiempo discreto cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ se encuentran relacionadas por

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

con $y[-1] = 0$. Encuentre la salida $y[n]$ para las siguientes entradas:

- a) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$;
- b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

2.65. Considere el sistema en el problema 2.42. Encuentre la función propia y el valor propio correspondiente del sistema.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

2.46. a) $y(t) = \begin{cases} 2a - |t| & |t| < 2a \\ 0 & |t| \geq 2a \end{cases}$

b) $y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 0 < t \leq T \\ \frac{1}{2}T^2 & T < t \leq 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2T - \frac{5}{2}T^2 & 2T < t \leq 3T \\ 0 & 3T < t \end{cases}$

c) $\frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-1)})u(t-1)$

2.47. a) $y[n] = \begin{cases} 2^{1-n} & n \leq 0 \\ 2 & n > 0 \end{cases}$

b) $y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} & n \leq 0 \leq N - 1 \\ \alpha^{n-N+1} \left(\frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} \right) & N - 1 < n \end{cases}$

c) $y[n] = \delta[n]$

2.48. Sugerencia: Diferencie las ecuaciones (2.6) y (2.10) con respecto a t .

2.49. *Sugerencia:* Utilice el resultado del problema 2.48 y la ecuación (2.58).

2.50. *Sugerencia:* Vea el problema 2.3.

2.51. *Sugerencia:* Vea los problemas 2.31 y 2.8.

2.52. $h(t) = \delta(t) - \omega_0[\text{sen } \omega_0 t]u(t)$

2.53. a) $h(t) = (e^{-2t} + 2e^{-t})u(t)$
b) Sí

2.54. a) $h(t) = u(t)$
b) No

2.55. No, el sistema tiene memoria.

2.56. $y[1] = 1$ y $y[4] = \frac{5}{8}$

2.57. a) Sí b) Sí

2.58. $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC} y(t) = \frac{1}{L} \frac{dx(t)}{dt}$

2.59. a) $\frac{dy(t)}{dt} + \frac{R}{L} y(t) = \frac{R}{L} x(t)$

b) $h(t) = \frac{R}{L} e^{-(R/L)t} u(t)$

c) $s(t) = [1 - e^{-(R/L)t}] u(t)$

2.60. $te^{-at}u(t)$

2.61. No, es no lineal.

2.62. $2y[n] - y[n-1] = 4x[n] + 2x[n-1]$

2.63. $y[n] = x[n] + x[n-1]$

2.64. a) $y[n] = 6 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right] u[n]$

b) $y[n] = (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n]$

2.65. $z^n, \lambda = \frac{z}{z-a}$

La transformada de Laplace y los sistemas LIT de tiempo continuo

3.1 INTRODUCCIÓN

Un resultado básico del capítulo 2 es que la respuesta de un sistema LIT se da por la convolución de la entrada y la respuesta al impulso del sistema. En este capítulo y en el siguiente presentaremos una representación alternativa de las señales y los sistemas LIT. En este capítulo se introduce la transformada de Laplace para representar señales de tiempo continuo en el dominio s (s es una variable compleja) y se describe el concepto de función del sistema para un sistema LIT de tiempo continuo. Al aplicar la técnica de la transformada de Laplace se pueden derivar distintos puntos de vista útiles acerca de las propiedades de los sistemas LIT de tiempo continuo, además de estudiar muchos problemas que involucran los sistemas LIT.

3.2 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En la sección 2.4 vimos que para un sistema LIT de tiempo continuo con respuesta al impulso $h(t)$, la salida $y(t)$ para la entrada exponencial compleja de la forma e^{st} es

$$y(t) = \mathcal{T}\{e^{st}\} = H(s)e^{st} \quad (3.1)$$

donde

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (3.2)$$

A. DEFINICIÓN

La función $H(s)$ en la ecuación (3.2) se conoce como transformada de Laplace de $h(t)$. Para una señal general de tiempo continuo $x(t)$, la transformada de Laplace $X(s)$ se define como

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (3.3)$$

La variable s generalmente tiene valores complejos y se expresa como

$$s = \sigma + j\omega \quad (3.4)$$

La transformada de Laplace definida en la ecuación (3.3) a menudo se conoce como transformada de Laplace *bilateral* (o de *dos lados*) en contraste con la transformada de Laplace *unilateral* (o de *un extremo*), la cual se define como

$$X_I(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (3.5)$$

donde $0^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (0 - \varepsilon)$. Evidentemente, las transformadas bilateral y unilateral son equivalentes sólo si $x(t) = 0$ para $t < 0$. La transformada de Laplace unilateral se discute en la sección 3.8. Omitiremos aquí la palabra “bilateral”, excepto donde sea necesario para evitar ambigüedad.

La ecuación (3.3) a veces se considera un operador que transforma una señal $x(t)$ en una función $X(s)$ representada de manera simbólica por

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \quad (3.6)$$

y se dice que la señal $x(t)$ y su transformada de Laplace $X(s)$ forman un par de transformadas de Laplace denotado como

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad (3.7)$$

B. LA REGIÓN DE CONVERGENCIA

El intervalo de valores de las variables complejas s para las cuales la transformada de Laplace converge se denomina *región de convergencia* (*region of convergence, ROC*). Para ilustrar la transformada de Laplace y la ROC asociada, consideremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 3.1 Considere la señal

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a \text{ real} \quad (3.8)$$

Entonces, por la ecuación (3.3) la transformada de Laplace de $x(t)$ es

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st} dt = \int_{0+}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \\ &= -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{0+}^{\infty} = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) > -a \end{aligned} \quad (3.9)$$

debido a que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+a)t} = 0$ sólo si $\text{Re}(s+a) > 0$ o $\text{Re}(s) > -a$.

De este modo, la ROC para este ejemplo se especifica en la ecuación (3.9) como $\text{Re}(s) > -a$ y se muestran en el plano complejo de la manera en que se ilustra en la figura 3-1, por medio del área sombreada a la derecha de la línea $\text{Re}(s) = -a$. En las aplicaciones de la transformada de Laplace se hace referencia al plano complejo como el plano s . A los ejes horizontal y vertical a veces se les llama eje σ y eje $j\omega$, respectivamente.

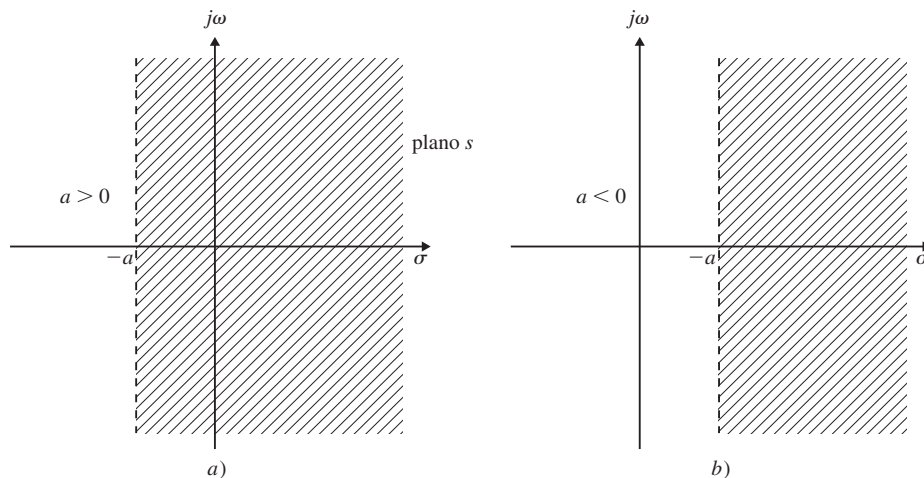


Figura 3-1 ROC para el ejemplo 3.1.

EJEMPLO 3.2 Considere la señal

$$x(t) = -e^{-at}u(t) \quad a \text{ real} \quad (3.10)$$

Su transformada de Laplace $X(s)$ está dada por (problema 3.1)

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) < -a \quad (3.11)$$

De esta forma, la ROC para este ejemplo se especifica en la ecuación (3.11) como $\text{Re}(s) < -a$ y se muestra en el plano complejo, como se ilustra en la figura 3-2, por medio del área sombreada a la izquierda de la línea $\text{Re}(s) = -a$. Al comparar las ecuaciones (3.9) y (3.11) observamos que las expresiones algebraicas para $X(s)$ para estas dos señales diferentes son idénticas, excepto por las ROC. Por tanto, con el fin de que la transformada de Laplace sea única para cada señal $x(t)$, la ROC debe especificarse como parte de la transformada.

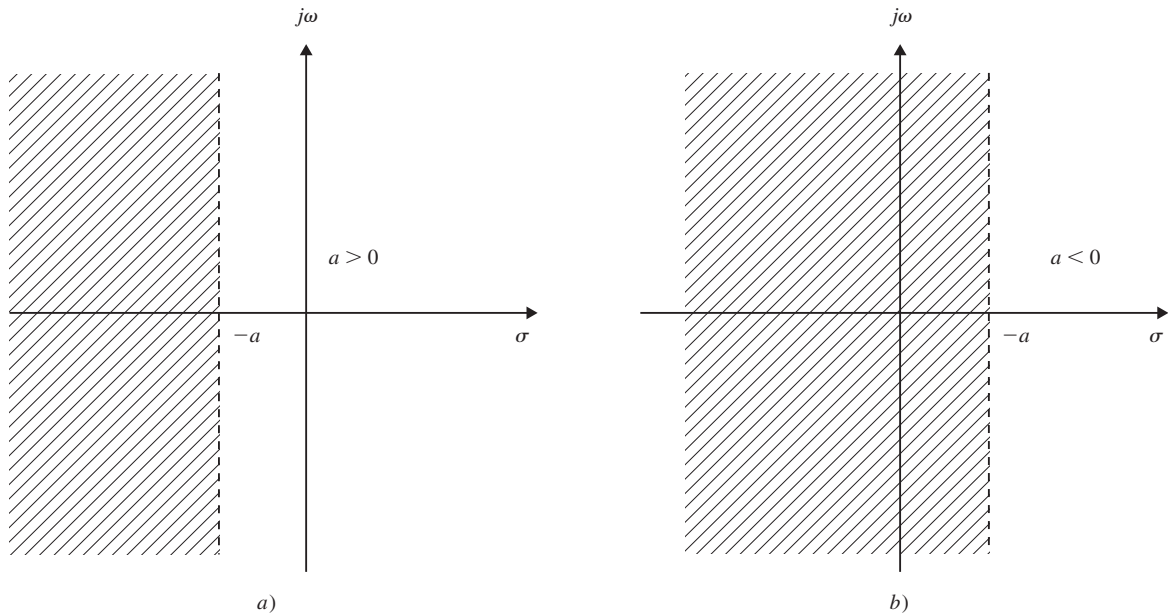


Figura 3-2 ROC para el ejemplo 3.2.

C. POLOS Y CEROS DE $X(s)$

Por lo regular, $X(s)$ será una función racional en s ; es decir,

$$X(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{a_0}{b_0} \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} \quad (3.12)$$

Los coeficientes a_k y b_k son constantes reales, mientras que m y n son enteros positivos. $X(s)$ se conoce como función racional *propia* si $n > m$, y como función racional *impropia* si $n \leq m$. Las raíces del numerador polinomial, z_k , se conocen como *ceros* de $X(s)$ debido a que $X(s) = 0$ para esos valores de s .

De manera similar, las raíces del denominador polinomial, p_k , se denominan *polos* de $X(s)$, debido a que $X(s)$ es infinito para esos valores de s . Por consiguiente, los polos de $X(s)$ residen fuera de la ROC puesto que, por definición, $X(s)$ no converge en los polos. Por otra parte, los ceros pueden estar en el interior o en el exterior de la ROC. Excepto por un factor de escala a_0/b_0 , $X(s)$ puede estar completamente especificada por sus ceros y polos. De este modo, una representación muy compacta de $X(s)$ en el plano s es mostrar las ubicaciones de los polos y los ceros además de la ROC.

Es común usar una "X" para indicar cada ubicación de un polo, y se utiliza una "O" para indicar cada cero. Esto se ilustra en la figura 3-3 para $X(s)$ dada por

$$X(s) = \frac{2s + 4}{s^2 + 4s + 3} = 2 \frac{s + 2}{(s + 1)(s + 3)} \quad \text{Re}(s) > -1$$

Observe que $X(s)$ tiene un cero en $s = -2$ y dos polos en $s = -1$ y $s = -3$ con un factor de escala de 2.

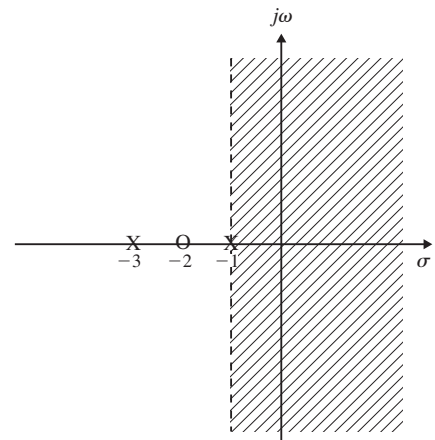


Figura 3-3 Representación del plano s de $X(s) = (2s + 4)/(s^2 + 4s + 3)$.

D. PROPIEDADES DE LA ROC

Como vimos en los ejemplos 3.1 y 3.2, la ROC de $X(s)$ depende de la naturaleza de $x(t)$. A continuación se resumen las propiedades de la ROC. Supongamos que $X(s)$ es una función racional de s .

Propiedad 1: La ROC no contiene ningún polo.

Propiedad 2: Si $x(t)$ es una señal de *duración finita*, es decir, $x(t) = 0$ excepto en un intervalo finito $t_1 \leq t \leq t_2$ ($-\infty < t_1$ y $t_2 < \infty$), entonces la ROC es todo el plano s excepto posiblemente $s = 0$ o $s = \infty$.

Propiedad 3: Si $x(t)$ es una señal *por la derecha*, es decir, $x(t) = 0$ para $t < t_1 < \infty$, entonces la ROC es de la forma

$$\operatorname{Re}(s) > \sigma_{\text{máx}}$$

donde $\sigma_{\text{máx}}$ es igual a la parte real máxima de cualquiera de los polos de $X(s)$. De este modo, la ROC es un medio plano a la derecha de la línea vertical $\operatorname{Re}(s) = \sigma_{\text{máx}}$ en el plano s y, por tanto, a la derecha de todos los polos de $X(s)$.

Propiedad 4: Si $x(t)$ es una señal *por la izquierda*, es decir, $x(t) = 0$ para $t > t_2 > -\infty$, entonces la ROC es de la forma

$$\operatorname{Re}(s) < \sigma_{\text{mín}}$$

donde $\sigma_{\text{mín}}$ es igual a la parte real mínima de cualquiera de los polos de $X(s)$. De este modo, la ROC es un medio plano a la izquierda de la línea vertical $\operatorname{Re}(s) = \sigma_{\text{mín}}$ en el plano s y, por tanto, a la izquierda de todos los polos de $X(s)$.

Propiedad 5: Si $x(t)$ es una señal *de dos lados*, es decir, $x(t)$ es una señal de duración infinita que no es de extrema derecha (por la derecha) ni de extrema izquierda (por la izquierda), entonces la ROC es de la forma

$$\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) < \sigma_2$$

donde σ_1 y σ_2 son las partes reales de los dos polos de $X(s)$. De esta manera, la ROC es una franja vertical en el plano s entre las líneas verticales $\operatorname{Re}(s) = \sigma_1$ y $\operatorname{Re}(s) = \sigma_2$.

Observe que la primera propiedad sigue de inmediato tras la definición de los polos; es decir, $X(s)$ es infinita en un polo. Para la verificación de las otras propiedades vea los problemas 3.2 a 3.7.

3.3 TRANSFORMADA DE LAPLACE DE ALGUNAS SEÑALES COMUNES

A. FUNCIÓN DE IMPULSO UNITARIO $\delta(t)$

Mediante las ecuaciones (3.3) y (1.20) obtenemos

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1 \quad \text{para toda } s \quad (3.13)$$

B. FUNCIÓN DE ESCALÓN UNITARIO $u(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $0^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (0 + \epsilon)$.

C. PARES DE TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA SEÑALES COMUNES

En la tabla 3-1 se presentan las transformadas de Laplace de las señales más comunes. En lugar de tener que volver a evaluar la transformada de una señal dada, simplemente podemos referirnos a una tabla y obtener la transformada deseada.

Tabla 3-1 Algunos pares de transformadas de Laplace

$x(t)$	$X(s)$	ROC
$\delta(t)$	1	Para toda s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) < 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$t^k u(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\text{Re}(s) > 0$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$
$-e^{-at} u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}(s) < -\text{Re}(a)$
$te^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$
$-te^{-at} u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\text{Re}(s) < -\text{Re}(a)$
$\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\text{sen } \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$e^{-at} \cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$
$e^{-at} \text{sen } \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$

3.4 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A continuación se presentan las propiedades básicas de la transformada de Laplace. La verificación de estas propiedades se proporciona en los problemas 3.8 a 3.16.

A. LINEALIDAD

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad & x_1(t) \leftrightarrow X_1(s) & \text{ROC} = R_1 \\ & x_2(t) \leftrightarrow X_2(s) & \text{ROC} = R_2 \end{aligned}$$

$$\text{entonces} \quad a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s) \quad R' \supset R_1 \cap R_2 \quad (3.15)$$

La notación de conjuntos $A \supset B$ quiere decir que el conjunto A contiene al conjunto B , mientras que $A \cap B$ denota la intersección de los conjuntos A y B , es decir, el conjunto que resulta contiene todos los elementos que se encuentran tanto en A como en B . De este modo, la ecuación (3.15) indica que la ROC de la transformada de Laplace resultante es, por lo menos, tan grande como la región común entre R_1 y R_2 . Por lo general tenemos simplemente $R' = R_1 \cap R_2$. Esto se ilustra en la figura 3-4.

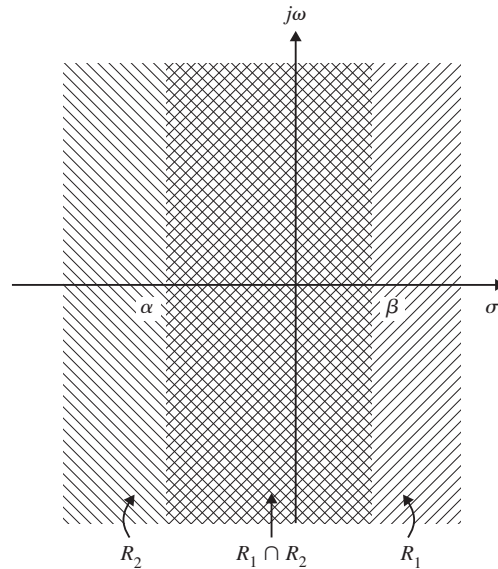


Figura 3-4 ROC de $a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$.

B. DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

$$\begin{aligned} \text{Si} & \quad x(t) \leftrightarrow X(s) & \text{ROC} = R \\ \text{entonces} & \quad x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s) & R' = R \end{aligned} \quad (3.16)$$

La ecuación (3.16) indica que las ROC antes y después de la operación de desplazamiento en el tiempo son las mismas.

C. DESPLAZAMIENTO EN EL DOMINIO S

$$\begin{aligned} \text{Si} & \quad x(t) \leftrightarrow X(s) & \text{ROC} = R \\ \text{entonces} & \quad e^{s_0 t} x(t) \leftrightarrow X(s - s_0) & R' = R + \text{Re}(s_0) \end{aligned} \quad (3.17)$$

La ecuación (3.17) indica que la ROC asociada con $X(s - s_0)$ es la de $X(s)$ desplazada por $\text{Re}(s_0)$. Esto se ilustra en la figura 3-5.

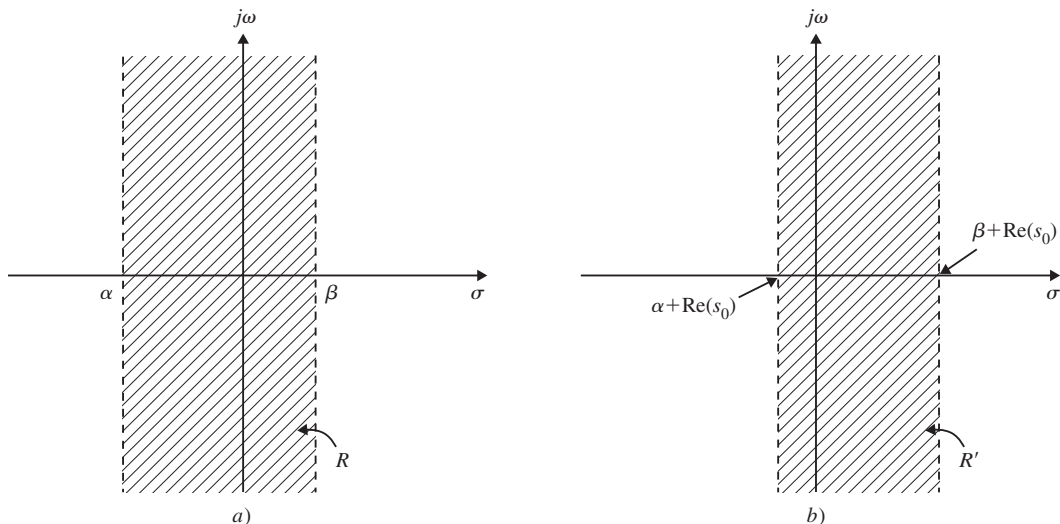


Figura 3-5 Efecto sobre la ROC del desplazamiento en el dominio s . a) ROC de $X(s)$; b) ROC de $X(s - s_0)$.

D. ESCALAMIENTO EN EL TIEMPO

Si $x(t) \leftrightarrow X(s)$ ROC = R

entonces $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ $R' = aR$ **(3.18)**

La ecuación (3.18) indica que el escalamiento de la variable de tiempo t por el factor a provoca un escalamiento inverso de la variable s por $1/a$, además de un escalamiento de amplitud de $X(s/a)$ por $1/|a|$. El efecto correspondiente sobre la ROC se ilustra en la figura 3-6.

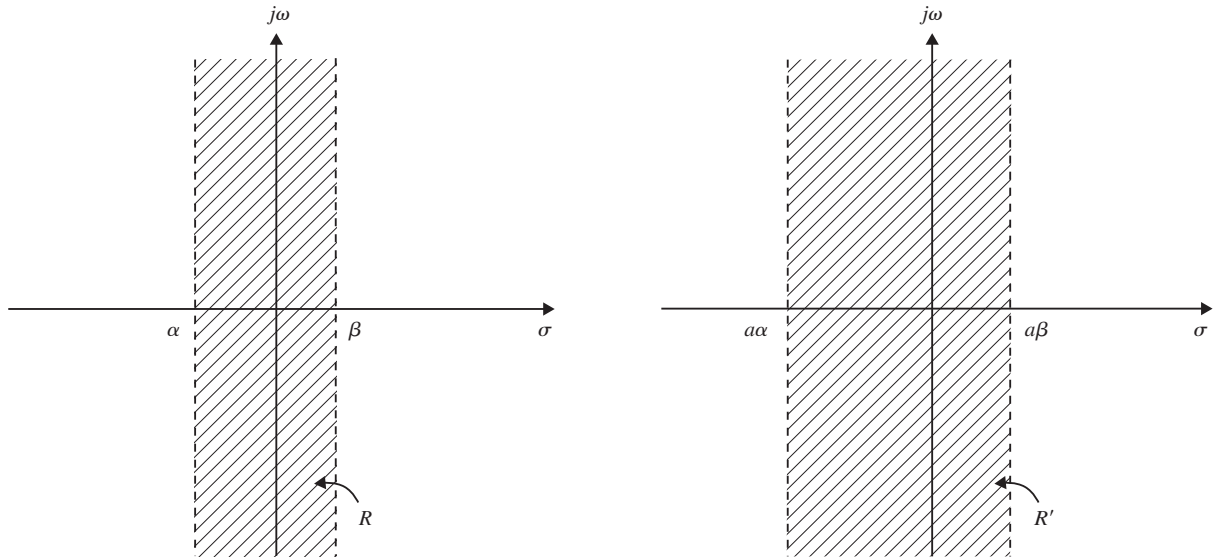


Figura 3-6 Efecto sobre la ROC del escalamiento en el tiempo. a) ROC de $X(s)$; b) ROC de $X(s/a)$.

E. INVERSIÓN DEL TIEMPO

Si $x(t) \leftrightarrow X(s)$ ROC = R

entonces $x(-t) \leftrightarrow X(-s)$ $R' = -R$ **(3.19)**

De este modo, la inversión del tiempo de $x(t)$ produce una inversión tanto del eje σ como del eje $j\omega$ en el plano s . La ecuación (3.19) se obtiene con facilidad al establecer $a = -1$ en la ecuación (3.18).

F. DIFERENCIACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Si $x(t) \leftrightarrow X(s)$ ROC = R

entonces $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s)$ $R' \supset R$ **(3.20)**

La ecuación (3.20) muestra que el efecto de la diferenciación en el dominio del tiempo es la multiplicación de la transformada de Laplace correspondiente por s . La ROC asociada queda sin modificación a menos que haya una cancelación de polo cero en $s = 0$.

G. DIFERENCIACIÓN EN EL DOMINIO s

Si $x(t) \leftrightarrow X(s)$ ROC = R

entonces $-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}$ $R' = R$ **(3.21)**

H. INTEGRACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

$$\text{Si } x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{ROC} = R$$

$$\text{entonces } \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) \quad R' = R \cap \{\text{Re}(s) > 0\} \quad (3.22)$$

La ecuación (3.22) muestra que la operación de la transformada de Laplace correspondiente a la integración en el dominio del tiempo es la multiplicación por $1/s$, y esto se espera debido a que la integración es la operación inversa de la diferenciación. La forma de R' se deriva de la posible introducción de un polo adicional en $s = 0$ mediante la multiplicación por $1/s$.

I. CONVOLUCIÓN

$$\text{Si } x_1(t) \leftrightarrow X_1(s) \quad \text{ROC} = R_1$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s) \quad \text{ROC} = R_2$$

$$\text{entonces } x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s) X_2(s) \quad R' \supset R_1 \cap R_2 \quad (3.23)$$

Esta propiedad de convolución juega un papel central en el análisis y diseño de los sistemas LIT de tiempo continuo. La tabla 3-2 resume las propiedades de la transformada de Laplace presentadas en esta sección.

Tabla 3-2 Propiedades de la transformada de Laplace

Propiedad	Señal	Transformada	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linealidad	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	$R' = R$
Desplazamiento en s	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s-s_0)$	$R' = R + \text{Re}(s_0)$
Escalamiento del tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X(a)$	$R' = aR$
Inversión del tiempo	$x(-t)$	$X(-s)$	$R' = -R$
Diferenciación en t	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R' \supset R$
Diferenciación en s	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	$R' = R$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$R' \supset R \cap \{\text{Re}(s) > 0\}$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

3.5 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA

La inversión de la transformada de Laplace para encontrar la señal $x(t)$ de su transformada de Laplace $X(s)$ se conoce como transformada de Laplace *inversa*, denotadas de manera simbólica como

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} \quad (3.24)$$

A. FÓRMULA DE LA INVERSA

Existe un procedimiento aplicable a todas las clases de funciones de transformación que involucran la evaluación de una integral de línea en un plano s complejo; es decir,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (3.25)$$

En esta integral, se selecciona la c real de modo que si la ROC de $X(s)$ es $\sigma_1 < \text{Re}(s) < \sigma_2$, entonces $\sigma_1 < c < \sigma_2$. La evaluación de esta integral de transformada de Laplace inversa requiere la comprensión de la teoría de la variable compleja.

B. USO DE LAS TABLAS DE PARES DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

En el segundo método para la inversión de $X(s)$, intentamos expresar $X(s)$ como una suma

$$X(s) = X_1(s) + \dots + X_n(s) \quad (3.26)$$

donde $X_1(s), \dots, X_n(s)$ son funciones con transformadas inversas conocidas $x_1(t), \dots, x_n(t)$. De la propiedad de linealidad (3.15) se obtiene

$$x(t) = x_1(t) + \dots + x_n(t) \quad (3.27)$$

C. EXPANSIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Si $X(s)$ es una función racional, es decir, de la forma

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} \quad (3.28)$$

puede utilizarse una técnica basada en la expansión en fracciones parciales para la inversión de $X(s)$.

a) Cuando $X(s)$ es una función racional propia, es decir, cuando $m < n$:

1. CASO DE UN POLO SIMPLE

Si todos los polos de $X(s)$, esto es, todos los ceros de $D(s)$ son simples (o distintos), entonces $X(s)$ puede escribirse como

$$X(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \dots + \frac{c_n}{s - p_n} \quad (3.29)$$

donde los coeficientes c_k están dados por $c_k = (s - p_k)X(s) \Big|_{s=p_k}$ (3.30)

2. CASO DE POLOS MÚLTIPLES

Si $D(s)$ tiene raíces múltiples, es decir, contiene factores de la forma $(s - p_i)^r$, decimos que p_i es el *polo múltiple de $X(s)$ con multiplicidad r* . Entonces la expansión de $X(s)$ estará compuesta de los términos de la forma

$$\frac{\lambda_1}{s - p_i} + \frac{\lambda_2}{(s - p_i)^2} + \dots + \frac{\lambda_r}{(s - p_i)^r} \quad (3.31)$$

donde $\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [(s - p_i)^r X(s)] \Big|_{s=p_i}$ (3.32)

b) Cuando $X(s)$ es una función racional impropia, es decir, cuando $m \geq n$:
Si $m \geq n$, mediante la división larga podemos escribir $X(s)$ en la forma

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)} \quad (3.33)$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son los polinomios respectivos del numerador y del denominador en s de $X(s)$, el cociente $Q(s)$ es un polinomio en s con grado $m - n$, y el residuo $R(s)$ es un polinomio en s con grado estrictamente menor que n . Entonces, la transformada de Laplace inversa de $X(s)$ puede calcularse al determinar la trans-

formada de Laplace inversa de $Q(s)$ y la transformada de Laplace inversa de $R(s)/D(s)$. Puesto que $R(s)/D(s)$ es propia, la transformada de Laplace inversa de $R(s)/D(s)$ puede calcularse expandiendo primero en fracciones parciales como se vio antes. La transformada inversa de Laplace de $Q(s)$ puede calcularse mediante el par de transformadas

$$\frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \leftrightarrow s^k \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.34)$$

3.6 LA FUNCIÓN DEL SISTEMA

A. LA FUNCIÓN DEL SISTEMA

En la sección 2.2 mostramos que la salida $y(t)$ de un sistema LIT de tiempo continuo es igual a la convolución de la entrada $x(t)$ con la respuesta al impulso $h(t)$; esto es,

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (3.35)$$

Al aplicar la propiedad de convolución (3.23) obtenemos

$$Y(s) = X(s)H(s) \quad (3.36)$$

donde $Y(s)$, $X(s)$ y $H(s)$ son las respectivas transformadas de Laplace de $y(t)$, $x(t)$ y $h(t)$. La ecuación (3.36) puede expresarse como

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (3.37)$$

La transformada de Laplace $H(s)$ de $h(t)$ se conoce como *función del sistema* (o *función de transferencia*). Por medio de la ecuación (3.37), la función del sistema $H(s)$ también puede definirse como la razón de las transformadas de Laplace de la salida $y(t)$ y de la entrada $x(t)$. La función del sistema $H(s)$ caracteriza por completo al sistema debido a que la respuesta al impulso $h(t)$ caracteriza a su vez completamente al sistema. La figura 3-7 ilustra la relación de las ecuaciones (3.35) y (3.36).

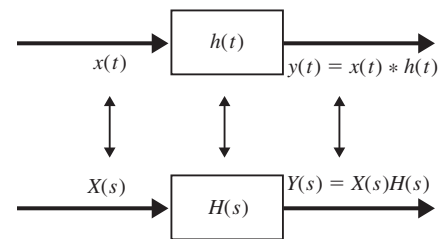


Figura 3-7 Respuesta al impulso y función del sistema.

B. CARACTERIZACIÓN DE LOS SISTEMAS LIT

Muchas propiedades de los sistemas LIT de tiempo continuo pueden asociarse estrechamente con las características de $H(s)$ en el plano s , en particular con las ubicaciones de los polos y la ROC.

1. CAUSALIDAD

Para un sistema LIT causal de tiempo continuo tenemos que

$$h(t) = 0 \quad t < 0$$

Puesto que $h(t)$ es una señal por la derecha, el requerimiento correspondiente sobre $H(s)$ es que la ROC de $H(s)$ debe ser de la forma

$$\text{Re}(s) > \sigma_{\text{máx}}$$

Es decir, la ROC es la región en el plano s a la derecha de todos los polos del sistema. De manera similar, si el sistema es no causal, entonces

$$h(t) = 0 \quad t > 0$$

y $h(t)$ es una señal por la izquierda. De este modo, la ROC de $H(s)$ debe ser de la forma

$$\text{Re}(s) < \sigma_{\text{mín}}$$

Es decir, la ROC es la región en el plano s que se encuentra a la izquierda de todos los polos del sistema.

2. ESTABILIDAD

En la sección 2.3 establecimos que un sistema LIT de tiempo continuo es estable en el sentido BIBO si y sólo si [ecuación (2.21)]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

El requerimiento correspondiente sobre $H(s)$ es que la ROC de $H(s)$ contenga el eje $j\omega$ (es decir, $s = j\omega$) (problema 3.26).

3. SISTEMAS CAUSALES Y ESTABLES

Si el sistema es tanto causal como estable, entonces todos los polos de $H(s)$ deben residir en la mitad izquierda del plano s ; es decir, todos tienen partes reales negativas debido a que la ROC es de la forma $\text{Re}(s) > \sigma_{\text{máx}}$, y puesto que el eje $j\omega$ se encuentra incluido en la ROC, debemos tener que $\sigma_{\text{máx}} < 0$.

C. FUNCIÓN DE SISTEMA PARA SISTEMAS LIT DESCRITOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

En la sección 2.5 consideramos un sistema LIT de tiempo continuo para el cual la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ pudieran satisfacer la ecuación diferencial lineal general con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (3.38)$$

Al aplicar la transformada de Laplace y por medio de la propiedad de diferenciación (3.20) de la transformada de Laplace, obtenemos

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s)$$

$$Y(s) \sum_{k=0}^N a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^M b_k s^k \quad (3.39)$$

De esta manera,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (3.40)$$

Por consiguiente, $H(s)$ siempre es racional. Observe que la ROC de $H(s)$ no está especificada por la ecuación (3.40), pero debe inferirse con requerimientos adicionales sobre el sistema como la causalidad o la estabilidad.

D. INTERCONEXIÓN DE SISTEMAS

Para dos sistemas LIT [con $h_1(t)$ y $h_2(t)$, respectivamente] en cascada [figura (3-8a)], la respuesta al impulso total $h(t)$ está dada por [ecuación (2.81), problema 2.14]

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

De este modo, las funciones del sistema correspondientes están relacionadas mediante el producto

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad (3.41)$$

Esta relación se ilustra en la figura 3-8b).

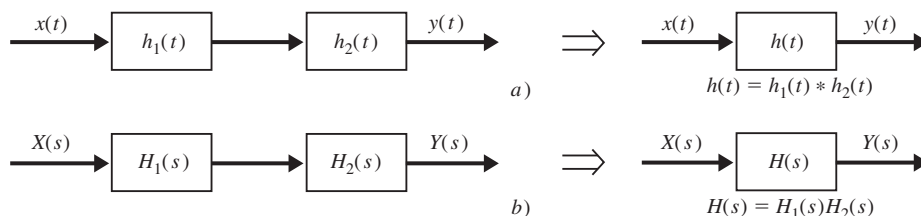


Figura 3-8 Dos sistemas en cascada. a) Representación en el dominio del tiempo; b) representación en el dominio s .

De manera similar, la respuesta al impulso de una combinación en paralelo de dos sistemas LIT [figura 3-9a)] está dada por (problema 2.53)

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

De este modo,

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad (3.42)$$

Esta relación se ilustra en la figura 3-9b).

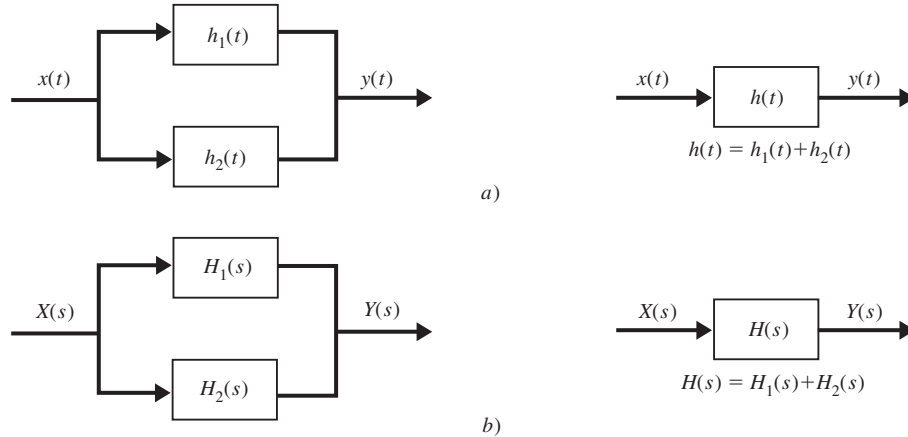


Figura 3-9 Dos sistemas en paralelo. a) Representación en el dominio del tiempo; b) representación en el dominio s .

3.7 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL

A. DEFINICIONES

La transformada de Laplace *unilateral* (o *de un lado extremo*) $X_I(s)$ de una señal $x(t)$ está definida como [ecuación (3.5)]

$$X_I(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) s^{-st} dt \quad (3.43)$$

Se elige que el límite inferior de integración sea 0^- (en lugar de 0 o 0^+) para permitir que $x(t)$ incluya $\delta(t)$ o sus derivadas. De esta forma advertimos de inmediato que la integración desde 0^- hasta 0^+ es cero, excepto cuando existe una función de impulso o su derivada en el origen. La transformada de Laplace unilateral ignora $x(t)$ para $t < 0$. Puesto que $x(t)$ en la ecuación (3.43) es una señal por la derecha, la ROC de $X_I(s)$ siempre es de forma $\text{Re}(s) > \sigma_{\text{máx}}$, esto es, un medio plano por la derecha en el plano s .

B. PROPIEDADES BÁSICAS

La mayoría de las propiedades de la transformada de Laplace unilateral son las mismas que para la transformada bilateral. La transformada de Laplace unilateral es útil para calcular la respuesta de un sistema causal a una entrada causal cuando el sistema se describe mediante una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y condiciones iniciales distintas de cero. Las propiedades básicas de la transformada de Laplace unilateral útiles en esta aplicación son las propiedades de diferenciación en el tiempo y de integración en el tiempo, las cuales son diferentes de las correspondientes a la transformada bilateral. A continuación se presentan esas propiedades.

1. DIFERENCIACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_I(s) - x(0^-) \quad (3.44)$$

siempre que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)e^{-st} = 0$. La aplicación repetida de esta propiedad nos da

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-) \quad (3.45)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n X_I(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-) \quad (3.46)$$

donde

$$x^{(r)}(0^-) = \left. \frac{d^r x(t)}{dt^r} \right|_{t=0^-}$$

2. INTEGRACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s) \quad (3.47)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau \quad (3.48)$$

C. FUNCIÓN DEL SISTEMA

Observe que con la transformada de Laplace unilateral, la función del sistema $H(s) = Y(s)/X(s)$ se define bajo la condición de que el sistema LIT esté relajado, es decir, que todas las condiciones iniciales sean cero.

D. CIRCUITOS TRANSFORMADOS

La solución para las señales en un circuito eléctrico puede encontrarse sin escribir ecuaciones integro-diferenciales, si las operaciones y señales del circuito se representan con sus equivalentes de transformada de Laplace. [En esta subsección la transformada de Laplace alude a la transformada de Laplace unilateral y agregamos el subíndice I en $X_I(s)$.] Nos referimos a un circuito producido a partir de estos equivalentes como un *circuito transformado*. Con el fin de utilizar esta técnica necesitamos los modelos de la transformada de Laplace para los elementos individuales del circuito. Estos modelos se desarrollan en la siguiente discusión y se muestran en la figura 3-10. En los problemas 3.40 a 3.42 se ilustran las aplicaciones de esta técnica de modelado de la transformada a los problemas de circuitos eléctricos.

1. FUENTES DE LA SEÑAL

$$v(t) \leftrightarrow V(s) \quad i(t) \leftrightarrow I(s)$$

donde $v(t)$ e $i(t)$ son las señales respectivas de fuente de voltaje y corriente.

2. RESISTENCIA R

$$v(t) = Ri(t) \leftrightarrow V(s) = RI(s) \quad (3.49)$$

3. INDUCTANCIA L

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \leftrightarrow V(s) = sLI(s) - Li(0^-) \quad (3.50)$$

El segundo modelo de la inductancia L en la figura 3-10 se obtiene al reescribir la ecuación (3.50) como

$$i(t) \leftrightarrow I(s) = \frac{1}{sL} V(s) + \frac{1}{s} i(0^-) \quad (3.51)$$

4. CAPACITANCIA C

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \leftrightarrow I(s) = sCV(s) - Cv(0^-) \quad (3.52)$$

El segundo modelo de la capacitancia C en la figura 3-10 se obtiene al volver a escribir la ecuación (3.52) como

$$v(t) \leftrightarrow V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{1}{s} v(0^-) \quad (3.53)$$

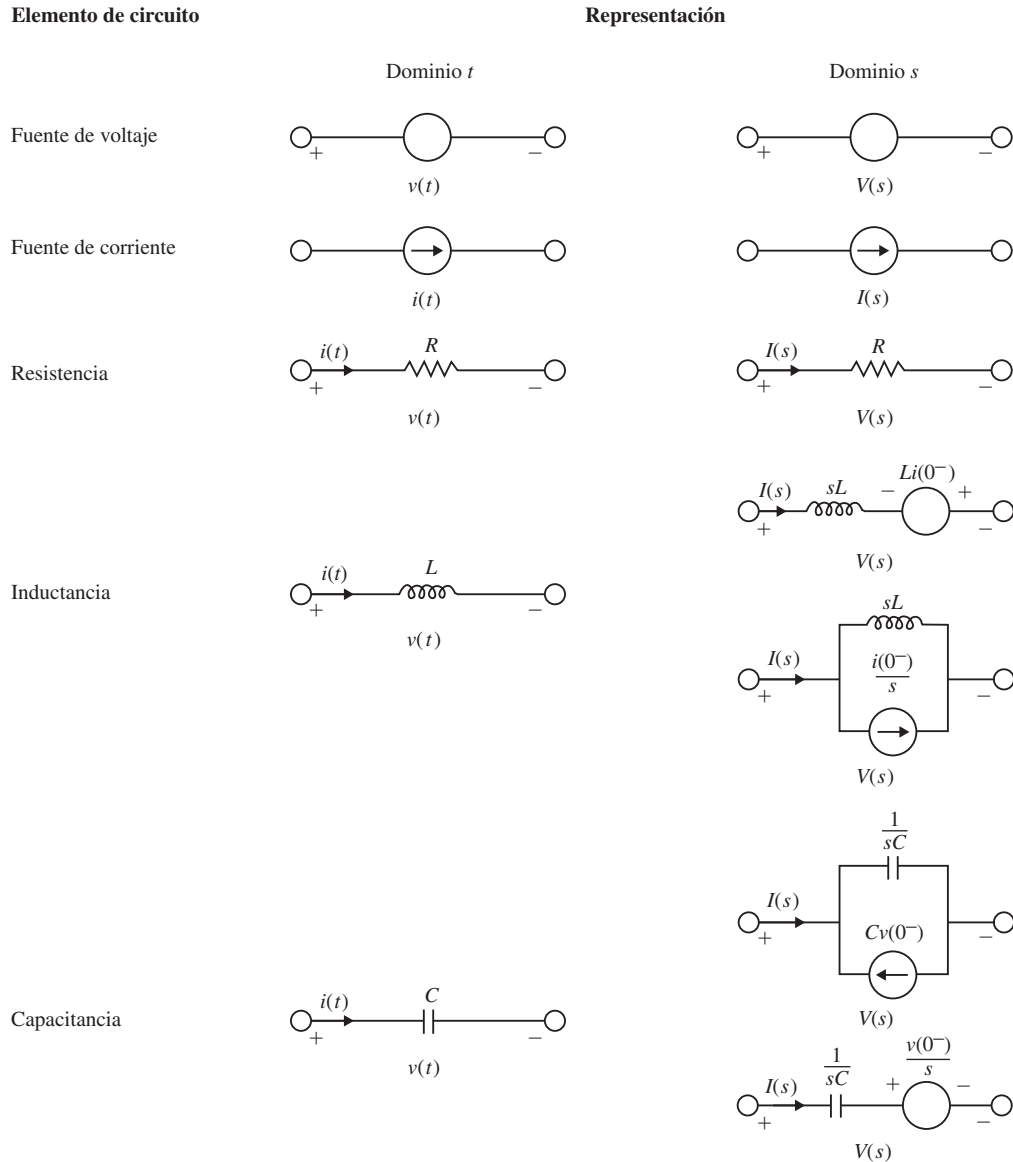


Figura 3-10 Representación de los modelos de elementos de circuitos con la transformada de Laplace.

PROBLEMAS RESUELTOS

TRANSFORMADA DE LAPLACE

3.1. Encuentre la transformada de Laplace de

a) $x(t) = -e^{-at}u(-t)$

b) $x(t) = e^{-at}u(-t)$

a) Por la ecuación (3.3)

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st} dt = -\int_{-\infty}^{0^-} e^{-(s+a)t} dt$$

$$= \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{-\infty}^{0^-} = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) < -a$$

De este modo, obtenemos

$$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) < -a$$

(3.54)

b) De manera semejante,
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} u(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0^-} e^{-(s-a)t} dt$$

$$= -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_{-\infty}^{0^-} = -\frac{1}{s-a} \quad \text{Re}(s) < a$$

De esta manera, obtenemos
$$e^{at} u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-a} \quad \text{Re}(s) < a \quad (3.55)$$

3.2. Una señal de duración finita $x(t)$ está definida como

$$x(t) \begin{cases} \neq 0 & t_1 \leq t \leq t_2 \\ = 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

donde t_1 y t_2 son valores finitos. Demuestre que si $X(s)$ converge para al menos un valor de s , entonces la ROC de $X(s)$ es el plano s completo.

Suponga que $X(s)$ converge para $s = \sigma_0$; entonces por la ecuación (3.3)

$$|X(s)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-st}| dt = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

Sea $\text{Re}(s) = \sigma_1 > \sigma_0$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-(\sigma_1 + j\omega)t}| dt &= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt \end{aligned}$$

Puesto que $(\sigma_1 > \sigma_0) > 0$, $e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}$ es un exponencial decreciente. Entonces sobre el intervalo donde $x(t) \neq 0$, el máximo valor de esta exponencial es $e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t_1}$, y podemos escribir

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (3.56)$$

De este modo, $X(s)$ converge para $\text{Re}(s) = \sigma_1 > \sigma_0$. Por medio de un argumento semejante, si $\sigma_1 < \sigma_0$, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t_2} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (3.57)$$

y $X(s)$ converge otra vez para $\text{Re}(s) = \sigma_1 < \sigma_0$. De este modo, la ROC de $X(s)$ incluye a todo el plano s .

3.3. Sea
$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Encuentre la transformada de Laplace de $x(t)$.

Por la ecuación (3.3)
$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^T e^{-(s+a)t} dt$$

$$= -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^T = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}] \quad (3.58)$$

Puesto que $x(t)$ es una señal de duración finita, la ROC de $X(s)$ es todo el plano s . Advierta que de la ecuación (3.58) parece que $X(s)$ no converge para $s = -a$. Pero este no es el caso. Al establecer $s = -a$ en la integral en la ecuación (3.58), tenemos que

$$X(-a) = \int_0^T e^{-(a+a)t} dt = \int_0^T dt = T$$

El mismo resultado puede obtenerse al aplicar la regla de L'Hôpital a la ecuación (3.58).

3.4. Demuestre que si $x(t)$ es una señal por la derecha y $X(s)$ converge para algún valor de s , entonces la ROC de $X(s)$ es de la forma

$$\text{Re}(s) = \sigma_{\text{máx}}$$

donde $\sigma_{\text{máx}}$ es igual a la parte real máxima de cualquiera de los polos de $X(s)$.

Considere una señal por la derecha $x(t)$ tal que

$$x(t) = 0 \quad t < t_1$$

y $X(s)$ converge para $\text{Re}(s) = \sigma_0$. Entonces

$$\begin{aligned} |X(s)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-st}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \\ &= \int_{t_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \end{aligned}$$

Sea $\text{Re}(s) = \sigma_1 > \sigma_0$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt &= \int_{t_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt \\ &< e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t_1} \int_{t_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \end{aligned}$$

De esta manera, $X(s)$ converge para $\text{Re}(s) = \sigma_1$ y la ROC de $X(s)$ es de la forma $\text{Re}(s) > \sigma_0$. Puesto que la ROC de $X(s)$ no puede incluir ningún polo de $X(s)$, concluimos que es de la forma

$$\text{Re}(s) = \sigma_{\text{máx}}$$

donde $\sigma_{\text{máx}}$ es igual a la máxima parte real de cualquiera de los polos de $X(s)$.

3.5. Encuentre la transformada de Laplace $X(s)$ y dibuje la gráfica de polos y ceros con la ROC para las siguientes señales $x(t)$:

a) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

b) $x(t) = e^{-3t}u(t) + e^{2t}u(-t)$

c) $x(t) = e^{2t}u(t) + e^{-3t}u(-t)$

a) De la tabla 3-1
$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2} \quad \text{Re}(s) > -2 \quad (3.59)$$

$$e^{-3t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+3} \quad \text{Re}(s) > -3 \quad (3.60)$$

Vemos que las ROC en las ecuaciones (3.59) y (3.60) se traslapan, y de este modo

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} = \frac{2\left(s + \frac{5}{2}\right)}{(s+2)(s+3)} \quad \text{Re}(s) > -2 \quad (3.61)$$

De la ecuación (3.61) observamos que $X(s)$ tiene un cero en $s = -5/2$ y dos polos en $s = -2$ y $s = -3$, y que la ROC es $\text{Re}(s) > -2$, como se dibuja en la figura 3-11a).

b) De la tabla 3-1

$$e^{-3t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+3} \quad \text{Re}(s) > -3 \quad (3.62)$$

$$e^{2t}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-2} \quad \text{Re}(s) < 2 \quad (3.63)$$

Advertimos que las ROC en las ecuaciones (3.62) y (3.63) se traslapan, y de esta forma

$$X(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s-2} = \frac{-5}{(s-2)(s+3)} \quad -3 < \text{Re}(s) < 2 \quad (3.64)$$

De la ecuación (3.64) observamos que $X(s)$ no tiene ceros y tiene dos polos en $s = 2$ y $s = -3$, y que la ROC es $-3 < \text{Re}(s) < 2$, como se esquematiza en la figura 3-11b).

c) De la tabla 3-1

$$e^{2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-2} \quad \text{Re}(s) > 2 \quad (3.65)$$

$$e^{-3t}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s+3} \quad \text{Re}(s) < -3 \quad (3.66)$$

Observamos que las ROC en las ecuaciones (3.65) y (3.66) no se traslapan, y de ahí que no haya una ROC en común; así, $x(t)$ no tiene transformada $X(s)$.

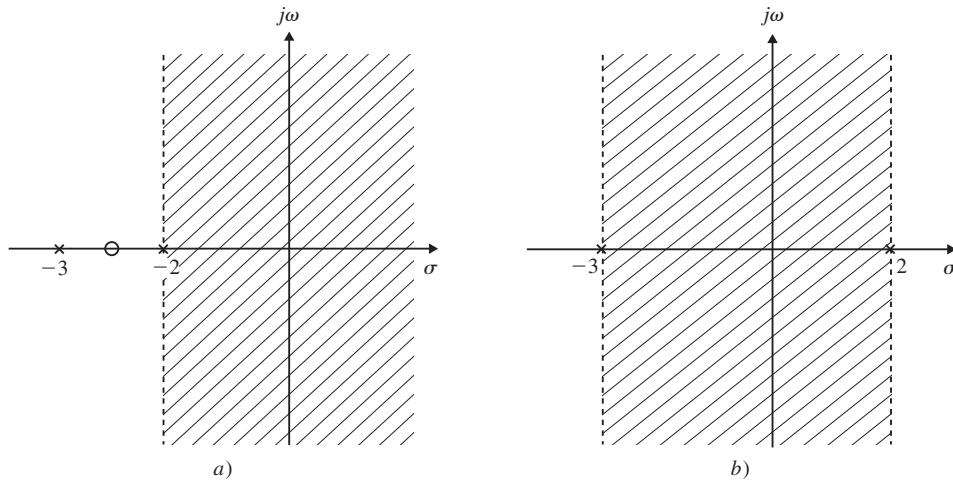


Figura 3-11

3.6. Sea

$$x(t) = e^{-a|t|}$$

Encuentre $X(s)$ y dibuje la gráfica de polo cero y la ROC para $a > 0$ y $a < 0$.

La señal $x(t)$ se dibuja en la figura 3-12a) y b) tanto para $a > 0$ como para $a < 0$. Puesto que $x(t)$ tiene una señal de dos lados, podemos expresarla como

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \tag{3.67}$$

Observe que $x(t)$ es continua para $t = 0$ y $x(0^-) = x(0) = x(0^+) = 1$. De la tabla 3-1

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) > -a \tag{3.68}$$

$$e^{at}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-a} \quad \text{Re}(s) < a \tag{3.69}$$

Si $a > 0$, vemos que las ROC en las ecuaciones (3.68) y (3.69) se traslapan, y de esta manera,

$$X(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2} \quad -a < \text{Re}(s) < a \tag{3.70}$$

De la ecuación (3.70) advertimos que $X(s)$ no tiene ceros y tiene dos polos en $s = a$ y $s = -a$, y que la ROC es $-a < \text{Re}(s) < a$, como se dibuja en la figura 3-12c). Si $a < 0$, podemos ver que las ROC en las ecuaciones (3.68) y (3.69) no se traslapan y que no hay una ROC en común; de este modo, $x(t)$ no tiene transformada $X(s)$.

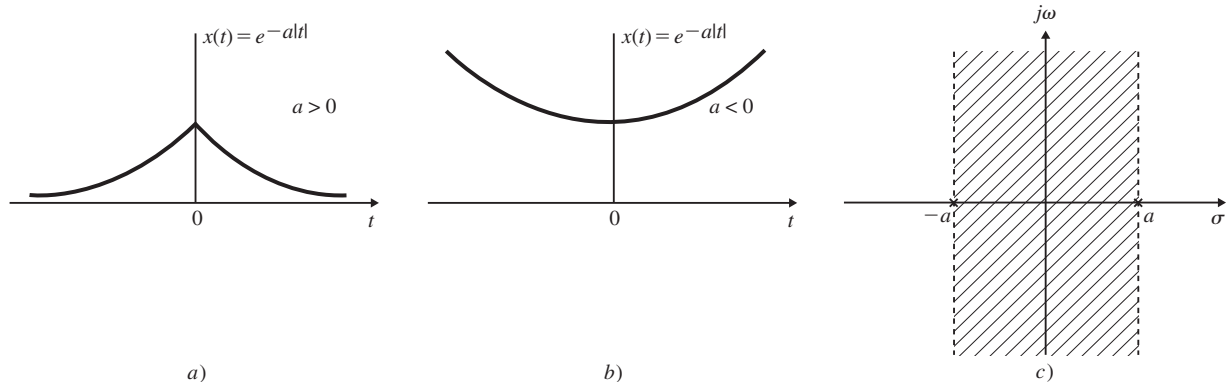


Figura 3-12

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

3.7. Verifique la propiedad de desplazamiento en el tiempo (3.16); es decir,

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s) \quad R' = R$$

Por la definición (3.3)

$$\mathcal{L}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-st} dt$$

Por el cambio de variables $\tau = t - t_0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-st_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} X(s) \end{aligned}$$

con la misma ROC que para $X(s)$ en sí. Por tanto,

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s) \quad R' = R$$

donde R y R' son las ROC antes y después de la operación de desplazamiento en el tiempo.

3.8. Verifique la propiedad de escalamiento en el tiempo (3.18); es decir,

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad R' = aR$$

Por la definición (3.3)

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-st} dt$$

Por el cambio de variables $\tau = at$ con $a > 0$, tenemos que

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-(s/a)\tau} d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad R' = aR$$

Advierta que debido al escalamiento s/a en la transformada, la ROC de $X(s/a)$ es aR . Con $a < 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(at)\} &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-(s/a)\tau} d\tau \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-(s/a)\tau} d\tau = -\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad R' = aR \end{aligned}$$

De este modo, al combinar los dos resultados para $a > 0$ y $a < 0$ podemos escribir estas relaciones como

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad R' = aR$$

3.9. Encuentre la transformada de Laplace y la ROC asociada para cada una de las siguientes señales:

a) $x(t) = \delta(t - t_0)$

b) $x(t) = u(t - t_0)$

c) $x(t) = e^{-2t} [u(t) - u(t - 5)]$

d) $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$

e) $x(t) = e^{-2t} [u(t)]$, a, b constantes reales

a) Mediante las ecuaciones (3.13) y (3.16) obtenemos

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} \quad \text{para toda } s \quad (3.71)$$

b) Si utilizamos las ecuaciones (3.14) y (3.16) obtenemos

$$u(t - t_0) \leftrightarrow \frac{e^{-st_0}}{s} \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (3.72)$$

c) Al reescribir $x(t)$ como $x(t) = e^{-2t} [u(t) - u(t - 5)] = e^{-2t}u(t) - e^{-2t}u(t - 5)$
 $= e^{-2t}u(t) - e^{-10}e^{-2(t-5)}u(t - 5)$

Entonces, de la tabla 3-1 y por medio de la ecuación (3.16), tenemos que

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - e^{-10}e^{-5s} \frac{1}{s+2} = \frac{1}{s+2} (1 - e^{-5(s+2)}) \quad \text{Re}(s) > -2$$

d) Al utilizar las ecuaciones (3.71) y (1.99) obtenemos

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-sT})^k = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (3.73)$$

e) Sea $f(t) = \delta(at)$

Entonces de las ecuaciones (3.13) y (3.18) tenemos que

$$f(t) = \delta(at) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{|a|} \quad \text{para toda } s \quad (3.74)$$

Ahora $x(t) = \delta(at + b) = \delta\left[a\left(t + \frac{b}{a}\right)\right] = f\left(t + \frac{b}{a}\right)$

Usando las ecuaciones (3.16) y (3.74) obtenemos que

$$X(s) = e^{sb/a} F(s) = \frac{1}{|a|} e^{sb/a} \quad \text{para toda } s \quad (3.75)$$

3.10. Verifique la propiedad de diferenciación del tiempo (3.20); es decir,

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) \quad R' \supset R$$

De la ecuación (3.24), la transformada de Laplace inversa está dada por

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (3.76)$$

Al diferenciar ambos lados de la expresión anterior con respecto a t obtenemos

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} sX(s)e^{st} ds \quad (3.77)$$

Al comparar la ecuación (3.77) con la (3.76), concluimos que $dx(t)/dt$ es la transformada inversa de Laplace de $sX(s)$. De este modo,

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) \quad R' \supset R$$

Advierta que la ROC asociada queda sin cambio alguno, a menos que exista una cancelación de polo cero en $s = 0$.

3.11. Verifique la propiedad de diferenciación en s (3.21); es decir,

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \quad R' = R$$

De la definición (3.3) $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$

Diferenciando ambos lados de la expresión anterior con respecto a s , tenemos que

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} (-t)x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [-tx(t)]e^{-st} dt$$

De esta manera, concluimos que $-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \quad R' = R$

g) Aplicando la propiedad de desplazamiento en el dominio s (3.17) al resultado del inciso f) obtenemos

$$e^{-at} \cos \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}(s) > -a \quad (3.82)$$

3.14. Verifique la propiedad de convolución (3.23); es decir,

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s) X_2(s) \quad R' \supset R_1 \cap R_2$$

Sea

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

Entonces, por la definición (3.3),

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-st} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

Advierta que el término entre corchetes en la última expresión es la transformada de Laplace de la señal desplazada $x_2(t - \tau)$, y por la ecuación (3.16) tenemos que

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-s\tau} X_2(s) d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] X_2(s) = X_1(s) X_2(s) \end{aligned}$$

con una ROC que contiene la intersección de la ROC de $X_1(s)$ y $X_2(s)$. Si un cero de una transformada cancela un polo de la otra, la ROC de $Y(s)$ puede ser más grande. De esta manera, concluimos que

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s) X_2(s) \quad R' \supset R_1 \cap R_2$$

3.15. Mediante la propiedad de convolución (3.23), verifique la ecuación (3.22); es decir,

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) \quad R' = R \cap \{\text{Re}(s) > 0\}$$

Podemos escribir [ecuación (2.60), problema 2.2]

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t) \quad (3.83)$$

De la ecuación (3.14)

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \text{Re}(s) > 0$$

y así, de la propiedad de convolución (3.23) obtenemos

$$x(t) * u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$$

con la ROC que incluye la intersección de la ROC de $X(s)$ y la ROC de la transformada de Laplace de $u(t)$. De esta manera,

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) \quad R' = R \cap \{\text{Re}(s) > 0\}$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA

3.16. Encuentre la transformada de Laplace inversa de las siguientes $X(s)$ en:

a) $X(s) = \frac{1}{s+1}, \text{Re}(s) > -1$

b) $X(s) = \frac{1}{s+1}, \text{Re}(s) < -1$

c) $X(s) = \frac{s}{s^2+4}, \text{Re}(s) > 0$

d) $X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}, \text{Re}(s) > -1$

a) De la tabla (3-1) obtenemos

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

b) De la tabla (3-1) obtenemos

$$x(t) = -e^{-t}u(-t)$$

c) De la tabla (3-1) obtenemos

$$x(t) = \cos 2tu(t)$$

d) De la tabla (3-1) obtenemos

$$x(t) = e^{-t} \cos 2tu(t)$$

3.17. Encuentre la transformada de Laplace inversa de las siguientes $X(s)$:

$$a) X(s) = \frac{2s + 4}{s^2 + 4s + 3}, \operatorname{Re}(s) > -1$$

$$b) X(s) = \frac{2s + 4}{s^2 + 4s + 3}, \operatorname{Re}(s) < -3$$

$$c) X(s) = \frac{2s + 4}{s^2 + 4s + 3}, -3 < \operatorname{Re}(s) < -1$$

Al expandir en fracciones parciales, tenemos que

$$X(s) = \frac{2s + 4}{s^2 + 4s + 3} = 2 \frac{s + 2}{(s + 1)(s + 3)} = \frac{c_1}{s + 1} + \frac{c_2}{s + 3}$$

Por medio de la ecuación (3.30) obtenemos

$$c_1 = (s + 1)X(s) \Big|_{s=-1} = 2 \frac{s + 2}{s + 3} \Big|_{s=-1} = 1$$

$$c_2 = (s + 3)X(s) \Big|_{s=-3} = 2 \frac{s + 2}{s + 1} \Big|_{s=-3} = 1$$

Por consiguiente,
$$X(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 3}$$

a) La ROC de $X(s)$ es $\operatorname{Re}(s) > -1$. De este modo, $x(t)$ es una señal por la derecha y de la tabla 3-1 obtenemos

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$$

b) La ROC de $X(s)$ es $\operatorname{Re}(s) < -3$. De este modo, $x(t)$ es una señal por la izquierda y de la tabla 3-1 obtenemos

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-3t}u(-t) = -(e^{-t} + e^{-3t})u(-t)$$

c) La ROC de $X(s)$ es $-3 < \operatorname{Re}(s) < -1$. De este modo, $x(t)$ es una señal de dos lados y de la tabla 3-1 obtenemos

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-3t}u(t)$$

3.18. Encuentre la transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{5s + 13}{s(s^2 + 4s + 13)} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

Podemos escribir

$$s^2 + 4s + 13 = (s + 2)^2 + 9 = (s + 2 - j3)(s + 2 + j3)$$

Entonces

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{5s + 13}{s(s^2 + 4s + 13)} = \frac{5s + 13}{s(s + 2 - j3)(s + 2 + j3)} \\ &= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s - (-2 + j3)} + \frac{c_3}{s - (-2 - j3)} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= sX(s) \Big|_{s=0} = \frac{5s + 13}{s^2 + 4s + 13} \Big|_{s=0} = 1 \\ c_2 &= (s + 2 - j3)X(s) \Big|_{s=-2+j3} = \frac{5s + 13}{s(s + 2 + j3)} \Big|_{s=-2+j3} = -\frac{1}{2}(1 + j) \\ c_3 &= (s + 2 + j3)X(s) \Big|_{s=-2-j3} = \frac{5s + 13}{s(s + 2 - j3)} \Big|_{s=-2-j3} = -\frac{1}{2}(1 - j) \end{aligned}$$

De este modo,

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}(1 + j) \frac{1}{s - (-2 + j3)} - \frac{1}{2}(1 - j) \frac{1}{s - (-2 - j3)}$$

La ROC de $X(s)$ es $\text{Re}(s) > 0$. De este modo, $x(t)$ es una señal por la derecha y de la tabla 3-1 obtenemos

$$x(t) = u(t) - \frac{1}{2}(1+j)e^{(-2+j3)t}u(t) - \frac{1}{2}(1-j)e^{(-2-j3)t}u(t)$$

Al insertar la identidad

$$e^{(-2 \pm j3)t} = e^{-2t}e^{\pm j3t} = e^{-2t}(\cos 3t \pm j \text{sen } 3t)$$

en la expresión anterior, después de unos cálculos simples obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) - e^{-2t}(\cos 3t - \text{sen } 3t)u(t) \\ &= [1 - e^{-2t}(\cos 3t - \text{sen } 3t)]u(t) \end{aligned}$$

Solución alterna:

Podemos escribir $X(s)$ como
$$X(s) = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2s+c_3}{s^2+4s+13}$$

Como antes, por la ecuación (3.30) obtenemos

$$c_1 = sX(s) \Big|_{s=0} = \frac{5s+13}{s^2+4s+13} \Big|_{s=0} = 1$$

Entonces tenemos que
$$\frac{c_2s+c_3}{s^2+4s+13} = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)} - \frac{1}{s} = \frac{-s+1}{s^2+4s+13}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s-1}{s^2+4s+13} = \frac{1}{s} - \frac{s+2-3}{(s+2)^2+9} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{3}{(s+2)^2+3^2} \end{aligned}$$

Entonces de la tabla 3-1 obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) - e^{-2t} \cos 3tu(t) + e^{-2t} \text{sen } 3tu(t) \\ &= [1 - e^{-2t}(\cos 3t - \text{sen } 3t)]u(t) \end{aligned}$$

3.19. Encuentre la transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2} \quad \text{Re}(s) > -3$$

Observamos que $X(s)$ tiene un polo simple en $s = -3$ y un polo múltiple en $s = -5$ con multiplicidad 2. Entonces por las ecuaciones (3.29) y (3.31) tenemos que

$$X(s) = \frac{c_1}{s+3} + \frac{\lambda_1}{s+5} + \frac{\lambda_2}{(s+5)^2} \tag{3.84}$$

Por las ecuaciones (3.30) y (3.32) tenemos que

$$\begin{aligned} c_1 &= (s+3)X(s) \Big|_{s=-3} = \frac{s^2+2s+5}{(s+5)^2} \Big|_{s=-3} = 2 \\ \lambda_2 &= (s+5)^2 X(s) \Big|_{s=-5} = \frac{s^2+2s+5}{s+3} \Big|_{s=-5} = -10 \\ \lambda_1 &= \frac{d}{ds} [(s+5)^2 X(s)] \Big|_{s=-5} = \frac{d}{ds} \left[\frac{s^2+2s+5}{s+3} \right] \Big|_{s=-5} \\ &= \frac{s^2+6s+1}{(s+3)^2} \Big|_{s=-5} = -1 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$X(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+5} - \frac{10}{(s+5)^2}$$

La ROC de $X(s)$ es $\text{Re}(s) > -3$. Así, $x(t)$ es una señal por la derecha y de la tabla 3-1 obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-3t}u(t) - e^{-5t}u(t) - 10te^{-5t}u(t) \\ &= [2e^{-3t} - e^{-5t} - 10te^{-5t}] u(t) \end{aligned}$$

Observe que existe una manera más simple de encontrar λ_1 sin necesidad de recurrir a la diferenciación. Esto se demuestra así: primero encuentre c_1 y λ_2 de acuerdo con el procedimiento regular. Entonces, al sustituir los valores de c_1 y λ_2 en la ecuación (3.84), obtenemos

$$\frac{s^2 + 2s + 5}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{2}{s+3} + \frac{\lambda_1}{s+5} - \frac{10}{(s+5)^2}$$

Al establecer $s = 0$ en ambos lados de la expresión anterior tenemos que

$$\frac{5}{75} = \frac{2}{3} + \frac{\lambda_1}{5} - \frac{10}{25}$$

por lo que obtenemos $\lambda_1 = -1$.

3.20. Encuentre la transformada de Laplace inversa de las siguientes $X(s)$:

a) $X(s) = \frac{2s+1}{s+2}, \text{Re}(s) > -2$

b) $X(s) = \frac{s^2 + 6s + 7}{s^2 + 3s + 2}, \text{Re}(s) > -1$

c) $X(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6}{s^2 + 3s}, \text{Re}(s) > 0$

a) $X(s) = \frac{2s+1}{s+2} = \frac{2(s+2)-3}{s+2} = 2 - \frac{3}{s+2}$

Puesto que la ROC de $X(s)$ es $\text{Re}(s) > -2$, $x(t)$ es una señal por la derecha y de la tabla 3-1 obtenemos

$$x(t) = 2\delta(t) - 3e^{-2t}u(t)$$

b) Si hacemos una división larga, tenemos que

$$X(s) = \frac{s^2 + 6s + 7}{s^2 + 3s + 2} = 1 + \frac{3s + 5}{s^2 + 3s + 2} = 1 + \frac{3s + 5}{(s+1)(s+2)}$$

Sea $X_1(s) = \frac{3s + 5}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$

donde $c_1 = (s+1)X_1(s)|_{s=-1} = \frac{3s+5}{s+2} \Big|_{s=-1} = 2$

$$c_2 = (s+2)X_1(s)|_{s=-2} = \frac{3s+5}{s+1} \Big|_{s=-2} = 1$$

Por consiguiente, $X(s) = 1 + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$

La ROC de $X(s)$ es $\text{Re}(s) > -1$. De este modo, $x(t)$ es una señal por la derecha y de la tabla 3-1 obtenemos

$$x(t) = \delta(t) + (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$

c) Si procedemos de manera semejante, obtenemos

$$X(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6}{s^2 + 3s} = s - 1 + \frac{3s + 6}{s(s+3)}$$

Sea $X_1(s) = \frac{3s + 6}{s(s+3)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+3}$

donde
$$c_1 = sX_1(s) \Big|_{s=0} = \frac{3s+6}{s+3} \Big|_{s=0} = 2$$

$$c_2 = (s+3)X_1(s) \Big|_{s=-3} = \frac{3s+6}{s} \Big|_{s=-3} = 1$$

Por tanto,
$$X(s) = s - 1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s+3}$$

La ROC de $X(s)$ es $\text{Re}(s) > 0$. De esta forma, $x(t)$ es una señal por la derecha, y de la tabla 3-1 y la ecuación (3.78) obtenemos

$$x(t) = \delta'(t) - \delta(t) + (2 + e^{-3t})u(t)$$

Advierta que todas las $X(s)$ en este problema son fracciones impropias y que $x(t)$ contiene $\delta(t)$ o sus derivadas.

3.21. Encuentre la transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{2 + 2se^{-2s} + 4e^{-4s}}{s^2 + 4s + 3} \quad \text{Re}(s) > -1$$

Observamos que $X(s)$ es una suma

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s)e^{-2s} + X_3(s)e^{-4s}$$

donde
$$X_1(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} \quad X_2(s) = \frac{2s}{s^2 + 4s + 3} \quad X_3(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 3}$$

Si
$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s) \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(s) \quad x_3(t) \leftrightarrow X_3(s)$$

entonces por la propiedad de linealidad (3.15) y la propiedad de desplazamiento del tiempo (3.16) obtenemos

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t - 2) + x_3(t - 4) \tag{3.85}$$

A continuación, mediante la expansión en fracciones parciales y de la tabla 3-1 obtenemos

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \leftrightarrow x_1(t) = (e^{-t} - e^{-3t})u(t)$$

$$X_2(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+3} \leftrightarrow x_2(t) = (-e^{-t} + 3e^{-3t})u(t)$$

$$X_3(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+3} \leftrightarrow x_3(t) = 2(e^{-t} - e^{-3t})u(t)$$

De este modo, mediante la ecuación (3.85) tenemos que

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-3t})u(t) + [-e^{-(t-2)} + 3e^{-3(t-2)}]u(t-2) + 2[e^{-(t-4)} - e^{-3(t-4)}]u(t-4)$$

3.22. Por medio de la propiedad de diferenciación en s (3.21), encuentre la transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \text{Re}(s) > -a$$

Tenemos que
$$-\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{(s+a)^2}$$

y de la ecuación (3.9) tenemos que

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) > -a$$

De esta forma, mediante la propiedad de diferenciación en s (3.21) obtenemos

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

FUNCIÓN DEL SISTEMA

3.23. Encuentre la función del sistema $H(s)$ y la respuesta al impulso $h(t)$ del circuito RC en la figura 1-32 (problema 1.32).

a) Sea $x(t) = v_s(t)$ $y(t) = v_c(t)$

En este caso, el circuito RC se describe por medio de [ecuación (1.105)]

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación anterior obtenemos

$$sY(s) + \frac{1}{RC}Y(s) = \frac{1}{RC}X(s)$$

o
$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)Y(s) = \frac{1}{RC}X(s)$$

Por tanto, por la ecuación (3.37) la función del sistema $H(s)$ es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/RC}{s + 1/RC} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + 1/RC}$$

Puesto que el sistema es causal, tomando la transformada de Laplace inversa de $H(s)$, la respuesta al impulso $h(t)$ es

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$$

b) Sea $x(t) = v_s(t)$ $y(t) = i(t)$

En este caso, el circuito RC se describe mediante [ecuación (1.107)]

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{R} \frac{dx(t)}{dt}$$

Si tomamos la transformada de Laplace de la ecuación anterior tenemos que

$$sY(s) + \frac{1}{RC}Y(s) = \frac{1}{R}sX(s)$$

o
$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)Y(s) = \frac{1}{R}sX(s)$$

Por tanto, la función del sistema $H(s)$ es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s/R}{s + 1/RC} = \frac{1}{R} \frac{s}{s + 1/RC}$$

En este caso, la función del sistema $H(s)$ es una fracción impropia y puede volver a escribirse como

$$H(s) = \frac{1}{R} \frac{s + 1/RC - 1/RC}{s + 1/RC} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2C} \frac{1}{s + 1/RC}$$

Puesto que el sistema es causal, tomando la transformada de Laplace inversa de $H(s)$, la respuesta al impulso $h(t)$ es

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}e^{-t/RC}u(t)$$

Advierta que obtenemos diferentes funciones del sistema dependiendo de los diferentes conjuntos de entrada y salida.

3.24. Por medio de la transformada de Laplace, vuelva a realizar el problema 2.5.

Del problema 2.5 tenemos que $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ $x(t) = e^{\alpha t}u(-t)$ $\alpha > 0$

Mediante la tabla 3-1 tenemos que

$$H(s) = \frac{1}{s + \alpha} \quad \text{Re}(s) > -\alpha$$

$$X(s) = -\frac{1}{s - \alpha} \quad \text{Re}(s) < \alpha$$

De esta manera, $Y(s) = X(s)H(s) = -\frac{1}{(s + \alpha)(s - \alpha)} = -\frac{1}{s^2 - \alpha^2} \quad -\alpha < \text{Re}(s) < \alpha$

y de la tabla 3-1 (o el problema 3.6) la salida es

$$y(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$$

y ésta es igual a la ecuación (2.67).

3.25. La salida $y(t)$ correspondiente a un sistema LIT de tiempo continuo es $2e^{-3t} u(t)$ cuando la entrada $x(t)$ es $u(t)$.

- a) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.
- b) Encuentre la salida $y(t)$ cuando la entrada $x(t)$ es $e^{-t}u(t)$.

a) $x(t) = u(t), y(t) = 2e^{-3t}u(t)$

Tomando las transformadas de Laplace $x(t)$ y $y(t)$ obtenemos

$$X(s) = \frac{1}{s} \quad \text{Re}(s) > 0$$

$$Y(s) = \frac{2}{s + 3} \quad \text{Re}(s) > -3$$

Por consiguiente, la función del sistema $H(s)$ es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s}{s + 3} \quad \text{Re}(s) > -3$$

Al reescribir $H(s)$ como

$$H(s) = \frac{2s}{s + 3} = \frac{2(s + 3) - 6}{s + 3} = 2 - \frac{6}{s + 3} \quad \text{Re}(s) > -3$$

y tomar la transformada de Laplace inversa de $H(s)$ tenemos que

$$h(t) = 2\delta(t) - 6e^{-3t}u(t)$$

Observe que $h(t)$ es igual a la derivada de $2e^{-3t}u(t)$, que es la respuesta al escalón $s(t)$ del sistema [vea la ecuación (2.13)].

b) $x(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + 1} \quad \text{Re}(s) > -1$

De este modo, $Y(s) = X(s)H(s) = \frac{2s}{(s + 1)(s + 3)} \quad \text{Re}(s) > -1$

Por medio de expansiones en fracciones parciales obtenemos

$$Y(s) = -\frac{1}{s + 1} + \frac{3}{s + 3}$$

Al tomar la transformada de Laplace inversa de $Y(s)$ obtenemos

$$y(t) = (-e^{-t} + 3e^{-3t}) u(t)$$

3.26. Si un sistema LIT de tiempo continuo es estable en el sentido BIBO, entonces muestre que la ROC de su función del sistema $H(s)$ debe contener al eje imaginario; es decir, $s = j\omega$.

Un sistema LIT de tiempo continuo es estable en el sentido BIBO si y sólo si su respuesta al impulso $h(t)$ es absolutamente integrable, lo que según la ecuación (2.21),

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Por la ecuación (3.3)

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

Sea $s = j\omega$. Entonces

$$|H(j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t) e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Por tanto, observamos que si el sistema es estable, entonces $H(s)$ converge para $s = j\omega$. Esto es, para un sistema LIT estable de tiempo continuo, la ROC de $H(s)$ debe contener al eje imaginario $s = j\omega$.

3.27. Mediante la función de transferencia en Laplace, resuelva de nuevo el problema 2.14.

a) Mediante las ecuaciones (3.36) y (3.41) obtenemos

$$Y(s) = X(s)H_1(s)H_2(s) = X(s)H(s)$$

donde $H(s) = H_1(s)H_2(s)$ es la función del sistema de todo el sistema. Ahora, de la tabla 3-1 tenemos que

$$h_1(t) = e^{-2t}u(t) \leftrightarrow H_1(s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{Re}(s) > -2$$

$$h_2(t) = 2e^{-t}u(t) \leftrightarrow H_2(s) = \frac{2}{s+1} \quad \text{Re}(s) > -1$$

Por consiguiente,

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \quad \text{Re}(s) > -1$$

Tomando la transformada de Laplace inversa de $H(s)$ obtenemos

$$h(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

b) Puesto que la ROC de $H(s)$, $\text{Re}(s) > -1$, contiene al eje $j\omega$, todo el sistema es estable.

3.28. Use la transformada de Laplace y vuelva a resolver el problema 2.23.

El sistema se describe mediante

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación anterior obtenemos

$$sY(s) + aY(s) = X(s) \quad \text{o} \quad (s+a)Y(s) = X(s)$$

Por consiguiente, la función del sistema $H(s)$ es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+a}$$

Suponiendo que el sistema es causal y tomando la transformada de Laplace inversa de $H(s)$, la respuesta al impulso $h(t)$ es

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

y es la misma que la ecuación (2.124).

3.29. Con la transformada de Laplace resuelva nuevamente el problema 2.25.

El sistema se describe mediante

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t)$$

Al tomar la transformada de Laplace de la ecuación anterior obtenemos

$$sY(s) + 2Y(s) = X(s) + sX(s)$$

o

$$(s+2)Y(s) = (s+1)X(s)$$

Por tanto, la función del sistema $H(s)$ es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{s+2} = \frac{s+2-1}{s+2} = 1 - \frac{1}{s+2}$$

Suponiendo que el sistema es causal y con la transformada de Laplace inversa de $H(s)$, la respuesta al impulso $h(t)$ es

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

3.30. Considere un sistema LIT de tiempo continuo para el cual la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ están relacionadas por

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t) \tag{3.86}$$

- a) Encuentre la función del sistema $H(s)$.
- b) Determine la respuesta al impulso $h(t)$ para cada uno de los siguientes casos: *i*) el sistema es causal, *ii*) el sistema es estable, *iii*) el sistema no es ni causal ni estable.

a) Tomando la transformada de Laplace de la ecuación (3.86) tenemos que

$$s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

o

$$(s^2 + s - 2)Y(s) = X(s)$$

Por tanto, la función del sistema $H(s)$ es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{1}{(s + 2)(s - 1)}$$

b) Por medio de la expansión en fracciones parciales obtenemos

$$H(s) = \frac{1}{(s + 2)(s - 2)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{s + 2} + \frac{1}{3} \frac{1}{s - 1}$$

i) Si el sistema es causal, entonces $h(t)$ es causal (es decir, una señal por la derecha) y la ROC de $H(s)$ es $\text{Re}(s) > 1$. Entonces, de la tabla 3-1 obtenemos

$$h(t) = -\frac{1}{3} (e^{-2t} - e^t) u(t)$$

ii) Si el sistema es estable, entonces la ROC de $H(s)$ debe contener al eje $j\omega$. En consecuencia, la ROC de $H(s)$ es $-2 < \text{Re}(s) < 1$. De este modo, $h(t)$ es de dos lados y de la tabla 3-1 obtenemos

$$h(t) = -\frac{1}{3} e^{-2t} u(t) - \frac{1}{3} e^t u(-t)$$

iii) Si el sistema no es ni casual ni estable, entonces la ROC de $H(s)$ es $\text{Re}(s) < -2$. Por tanto, $h(t)$ es no causal (es decir, una señal por la izquierda) y de la tabla 3-1 obtenemos

$$h(t) = \frac{1}{3} e^{-2t} u(-t) - \frac{1}{3} e^t u(-t)$$

3.31. En la figura 3-13 se representa la interconexión retroalimentada de dos sistemas causales con funciones de sistema $F(s)$ y $G(s)$. Encuentre la función total del sistema $H(s)$ para este sistema retroalimentado.

Sea $x(t) \leftrightarrow X(s) \quad y(t) \leftrightarrow Y(s) \quad r(t) \leftrightarrow R(s) \quad e(t) \leftrightarrow E(s)$

Entonces, $Y(s) = E(s)F(s) \tag{3.87}$

$$R(s) = Y(s)G(s) \tag{3.88}$$

Puesto que $e(t) = x(t) + r(t)$

tenemos que $E(s) = X(s) + R(s) \tag{3.89}$

Al sustituir la ecuación (3.88) en la ecuación (3.89), y sustituyendo después el resultado en la ecuación (3.87), obtenemos

$$Y(s) = [X(s) + Y(s)G(s)]F(s)$$

o $[1 - F(s)G(s)] Y(s) = F(s)X(s)$

De esta forma, la función total del sistema es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F(s)}{1 - F(s)G(s)}$$

(3.90)

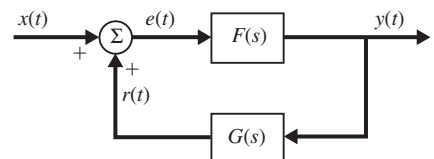


Figura 3-13 Sistema retroalimentado.

TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL

3.32. Verifique las ecuaciones (3.44) y (3.45); es decir,

$$a) \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_I(s) - x(0^-)$$

$$b) \frac{d^2x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

a) Mediante la ecuación (3.43), e integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \\ &= -x(0^-) + sX_I(s) \quad \text{Re}(s) > 0 \end{aligned}$$

De este modo, tenemos que $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_I(s) - x(0^-)$

b) Aplicando la propiedad anterior a la señal $x'(t) = dx(t)/dt$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow s[sX_I(s) - x(0^-)] - x'(0^-) \\ &= s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-) \end{aligned}$$

Observe que la ecuación (3.46) puede obtenerse mediante la aplicación continua del procedimiento anterior.

3.33. Verifique las ecuaciones (3.47) y (3.48); es decir,

$$a) \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s)$$

$$b) \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$$

a) Sea $g(t) = \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$

Entonces $\frac{dg(t)}{dt} = x(t) \quad \text{y} \quad g(0^-) = 0$

Ahora, si $g(t) \leftrightarrow G_I(s)$

entonces, por la ecuación (3.44), $X_I(s) = sG_I(s) - g(0^-) = sG_I(s)$

De este modo, $G_I(s) = \frac{1}{s} X_I(s)$

o $\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s)$

b) Podemos escribir $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$

Observe que el primer término del lado derecho es una constante. De este modo, tomando la transformada de Laplace unilateral de la ecuación anterior y mediante la ecuación (3.47) obtenemos

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$$

3.34. a) Demuestre que la transformada de Laplace bilateral de $x(t)$ puede calcularse a partir de dos transformadas de Laplace unilaterales.

b) Mediante el resultado obtenido en el inciso a), encuentre la transformada de Laplace bilateral de $e^{-2|t|}$.

a) La transformada de Laplace bilateral de $x(t)$ definida en la ecuación (3.3) puede expresarse como

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0^-} x(t)e^{-st} dt + \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} x(-t)e^{st} dt + \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \end{aligned} \quad (3.91)$$

Ahora
$$\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = X_I(s) \quad \text{Re}(s) > \sigma^+ \quad (3.92)$$

A continuación, sea
$$\mathcal{L}_I\{x(-t)\} = X_I^-(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(-t)e^{-st} dt \quad \text{Re}(s) > \sigma^- \quad (3.93)$$

Entonces
$$\int_{0^-}^{\infty} x(-t)e^{st} dt = \int_{0^-}^{\infty} x(-t)e^{-(-s)t} dt = X_I^-(-s) \quad \text{Re}(s) < \sigma^- \quad (3.94)$$

De este modo, sustituyendo las ecuaciones (3.92) y (3.94) en la ecuación (3.91), obtenemos

$$X(s) = X_I(s) + X_I^-(-s) \quad \sigma^+ < \text{Re}(s) < \sigma^- \quad (3.95)$$

b) $x(t) = e^{-2|t|}$

1) $x(t) = e^{-2t}$ para $t > 0$, lo que nos da

$$\mathcal{L}_I\{x(t)\} = X_I(s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{Re}(s) > -2$$

2) $x(t) = e^{2t}$ para $t < 0$. Entonces $x(-t) = e^{-2t}$ para $t > 0$, lo que nos da

$$\mathcal{L}_I\{x(-t)\} = X_I^-(s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{Re}(s) > -2$$

De esta manera,
$$X_I^-(-s) = \frac{1}{-s+2} = -\frac{1}{s-2} \quad \text{Re}(s) < 2$$

3) De acuerdo con la ecuación (3.95) tenemos que

$$\begin{aligned} X(s) &= X_I(s) + X_I^-(-s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2} \\ &= -\frac{4}{s^2-4} \quad -2 < \text{Re}(s) < 2 \end{aligned} \quad (3.96)$$

y esto es igual a la ecuación (3.70), con $a = 2$, en el problema 3.6.

3.35. Demuestre que

a) $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX_I(s) \quad (3.97)$

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_I(s) \quad (3.98)$

La ecuación (3.97) es conocida como *teorema del valor inicial*, mientras que la ecuación (3.98) se conoce como *teorema del valor final* para la transformada de Laplace unilateral.

a) Con la ecuación (3.44) tenemos que

$$\begin{aligned} sX_I(s) - x(0^-) &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{0^+} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(t) \Big|_{0^-}^{0^+} + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(0^+) - x(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \end{aligned}$$

De este modo,
$$sX_I(s) = x(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow \infty} sX_I(s) &= x(0^+) + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\
 &= x(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \left(\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} \right) dt = x(0^+)
 \end{aligned}$$

puesto que $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$.

b) Nuevamente, por medio de la ecuación (3.44), tenemos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow 0} [sX_I(s) - x(0^-)] &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\
 &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \left(\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} \right) dt \\
 &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} dt = x(t) \Big|_{0^-}^{\infty} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0^-)
 \end{aligned}$$

$$\text{Puesto que} \quad \lim_{s \rightarrow 0} [sX_I(s) - x(0^-)] = \lim_{s \rightarrow 0} [sX_I(s)] - x(0^-)$$

$$\text{concluimos que} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_I(s)$$

3.36. La transformada de Laplace unilateral en ocasiones se define como

$$\mathcal{L}_+ \{x(t)\} = X_I^+(s) = \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (3.99)$$

con 0^+ como el límite inferior. (A veces a ésta se le llama definición 0^+ .)

$$a) \text{ Demuestre que} \quad \mathcal{L}_+ \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = sX_I^+(s) - x(0^+) \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (3.100)$$

$$b) \text{ Demuestre que} \quad \mathcal{L}_+ \{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad (3.101)$$

$$\mathcal{L}_+ \{\delta(t)\} = 0 \quad (3.102)$$

a) Digamos que $x(t)$ tenga una transformada de Laplace unilateral $X_I^+(s)$. Mediante la ecuación (3.99), y utilizando la integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_+ \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} &= \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\
 &= x(t) e^{-st} \Big|_{0^+}^{\infty} + s \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\
 &= -x(0^+) + sX_I^+(s) \quad \text{Re}(s) > 0
 \end{aligned}$$

$$\text{De esta manera, tenemos que} \quad \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_I^+(s) - x(0^+)$$

$$\begin{aligned}
 b) \text{ Por la definición (3.99)} \quad \mathcal{L}_+ \{u(t)\} &= \int_{0^+}^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} dt \\
 &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{Re}(s) > 0
 \end{aligned}$$

$$\text{De la ecuación (1.30) tenemos que} \quad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (3.103)$$

Tomando la transformada de Laplace unilateral 0^+ de la ecuación (3.103), y por medio de la ecuación (3.100), obtenemos

$$\mathcal{L}_+ \{\delta(t)\} = s \frac{1}{s} - u(0^+) = 1 - 1 = 0$$

Esto es consistente con la ecuación (1.21); es decir,

$$\mathcal{L}_+ \{ \delta(t) \} = \int_{0^+}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 0$$

Observe que al tomar la transformada de Laplace unilateral 0^- de la ecuación (3.103) y emplear la ecuación (3.44) obtenemos

$$\mathcal{L}_- \{ \delta(t) \} = s \frac{1}{s} - u(0^-) = 1 - 0 = 1$$

APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL

3.37. Mediante la transformada de Laplace unilateral, vuelva a resolver el problema 2.20.

El sistema se describe por medio de $y'(t) + ay(t) = x(t)$ **(3.104)**

con $y(0) = y_0$ y $x(t) = Ke^{-bt} u(t)$.

Supongamos que $y(0) = y(0^-)$. Sea $y(t) \leftrightarrow Y_I(s)$

Entonces, de la ecuación (3.44), $y'(t) \leftrightarrow sY_I(s) - y(0^-) = sY_I(s) - y_0$

De la tabla 3-1 tenemos que $x(t) \leftrightarrow X_I(s) = \frac{K}{s+b}$ $\text{Re}(s) > -b$

Tomando la transformada de Laplace unilateral de la ecuación (3.104) obtenemos

$$[sY_I(s) - y_0] + aY_I(s) = \frac{K}{s+b}$$

o

$$(s+a)Y_I(s) = y_0 + \frac{K}{s+b}$$

De este modo,

$$Y_I(s) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{K}{(s+a)(s+b)}$$

Por medio de expansiones en fracciones parciales obtenemos

$$Y_I(s) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{K}{a-b} \left(\frac{1}{s+b} - \frac{1}{s+a} \right)$$

Tomando la transformada de Laplace inversa de $Y_I(s)$ obtenemos

$$y(t) = \left[y_0 e^{-at} + \frac{K}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at}) \right] u(t)$$

lo que es lo mismo que la ecuación (2.107). Observe que $y(0^+) = y(0) = y(0^-) = y_0$, escribimos a $y(t)$ como

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \frac{K}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at}) \quad t \geq 0$$

3.38. Resuelva la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t)$$
 (3.105)

con las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, y $x(t) = e^{-t} u(t)$.

Suponga que $y(0) = y(0^-)$ y $y'(0) = y'(0^-)$. Sea

$$y(t) \leftrightarrow Y_I(s)$$

Entonces, de las ecuaciones (3.44) y (3.45),

$$\begin{aligned} y'(t) &\leftrightarrow sY_I(s) - y(0^-) = sY_I(s) - 2 \\ y''(t) &\leftrightarrow s^2Y_I(s) - sy(0^-) - y'(0^-) = s^2Y_I(s) - 2s - 1 \end{aligned}$$

De la tabla 3-1 tenemos que

$$x(t) \leftrightarrow X_I(s) = \frac{1}{s+1}$$

Tomando la transformada de Laplace unilateral de la ecuación (3.105) obtenemos

$$[s^2 Y_I(s) - 2s - 1] + 5[sY_I(s) - 2] + 6Y_I(s) = \frac{1}{s+1}$$

o

$$(s^2 + 5s + 6)Y_I(s) = \frac{1}{s+1} + 2s + 11 = \frac{2s^2 + 13s + 12}{s+1}$$

De este modo,

$$Y_I(s) = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s^2 + 5s + 6)} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Mediante fracciones parciales obtenemos

$$Y_I(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + 6 \frac{1}{s+2} - \frac{9}{2} \frac{1}{s+3}$$

Al tomar la transformada de Laplace inversa de $Y_I(s)$ tenemos que

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} e^{-t} + 6e^{-2t} - \frac{9}{2} e^{-3t} \right) u(t)$$

Advierta que $y(0^+) = 2 = y(0)$ y $y'(0^+) = 1 = y'(0)$, y podemos escribir $y(t)$ como

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{-t} + 6e^{-2t} - \frac{9}{2} e^{-3t} \quad t \geq 0$$

3.39. Considere el circuito RC mostrado en la figura 3-14a). El interruptor se encuentra cerrado en $t = 0$. Suponga que existe un voltaje inicial en el capacitor y que $v_c(0^-) = v_0$.

- Encuentre la corriente $i(t)$.
- Encuentre el voltaje a través del capacitor $v_c(t)$.

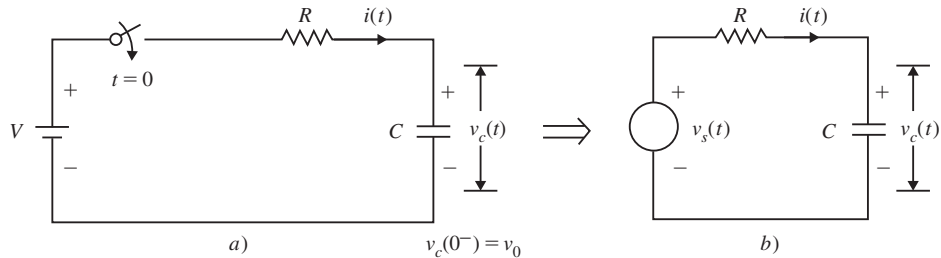


Figura 3-14 Circuito RC.

- Con la acción del interruptor, el circuito mostrado en la figura 3-14a) puede representarse mediante el circuito mostrado en la figura 3-14b) con $v_s(t) = Vu(t)$. Cuando la corriente $i(t)$ es la salida y la entrada es $v_s(t)$, la ecuación diferencial que gobierna el circuito es

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = v_s(t) \quad (3.106)$$

Tomando la transformada de Laplace unilateral de la ecuación (3.106) y mediante la ecuación (3.48) obtenemos

$$RI(s) + \frac{1}{C} \left[\frac{1}{s} I(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} i(\tau) d\tau \right] = \frac{V}{s} \quad (3.107)$$

donde

$$I(s) = \mathcal{L}_I \{ i(t) \}$$

Ahora

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

y

$$v_c(0^-) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0^-} i(\tau) d\tau = v_0$$

Por tanto, la ecuación (3.107) se reduce a

$$\left(R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) + \frac{v_0}{s} = \frac{V}{s}$$

Resolviendo para $I(s)$ obtenemos

$$I(s) = \frac{V - v_0}{s} \frac{1}{R + 1/Cs} = \frac{V - v_0}{R} \frac{1}{s + 1/RC}$$

Tomando la transformada de Laplace inversa de $I(s)$, obtenemos

$$i(t) = \frac{V - v_0}{R} e^{-t/RC} u(t)$$

b) Cuando $v_c(t)$ es la salida y la entrada es $v_s(t)$, la ecuación diferencial que gobierna el circuito es

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t) \tag{3.108}$$

Tomando la transformada de Laplace unilateral de la ecuación (3.108), y por medio de la ecuación (3.44), obtenemos

$$sV_c(s) - v_c(0^-) + \frac{1}{RC}V_c(s) = \frac{1}{RC} \frac{V}{s}$$

o

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)V_c(s) = \frac{1}{RC} \frac{V}{s} + v_0$$

Al resolver para $V_c(s)$ tenemos que

$$\begin{aligned} V_c(s) &= \frac{V}{RC} \frac{1}{s(s + 1/RC)} + \frac{v_0}{s + 1/RC} \\ &= V \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC} \right) + \frac{v_0}{s + 1/RC} \end{aligned}$$

Al tomar la transformada de Laplace inversa de $V_c(s)$ obtenemos

$$v_c(t) = V[1 - e^{-t/RC}]u(t) + v_0 e^{-t/RC}u(t)$$

Observe que $v_c(0^+) = v_0 = v_c(0^-)$. De este modo, escribimos $v_c(t)$ como

$$v_c(t) = V(1 - e^{-t/RC}) + v_0 e^{-t/RC} \quad t \geq 0$$

3.40. Mediante la técnica de red transformada vuelva a realizar el problema 3.39.

a) Al utilizar la figura 3-10, la red transformada correspondiente a la figura 3-14 se construye como se ilustra en la figura 3-15.

Al escribir la ley del voltaje para el circuito obtenemos

$$\left(R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) + \frac{v_0}{s} = \frac{V}{s}$$

Resolviendo para $I(s)$ tenemos que

$$I(s) = \frac{V - v_0}{s} \frac{1}{R + 1/Cs} = \frac{V - v_0}{R} \frac{1}{s + 1/RC}$$

Tomando la transformada de Laplace inversa de $I(s)$ obtenemos

$$i(t) = \frac{V - v_0}{R} e^{-t/RC} u(t)$$

b) De la figura 3-15 tenemos que

$$V_c(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{v_0}{s}$$

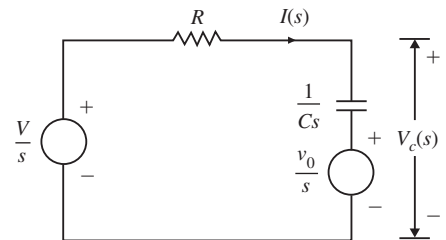


Figura 3-15 Circuito transformado.

Al sustituir la $I(s)$ obtenida en el inciso *a*) en la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} V_c(s) &= \frac{V - v_0}{RC} \frac{1}{s(s + 1/RC)} + \frac{v_0}{s} \\ &= (V - v_0) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC} \right) + \frac{v_0}{s} \\ &= V \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC} \right) + \frac{v_0}{s + 1/RC} \end{aligned}$$

Si tomamos la transformada de Laplace inversa de $V_c(s)$ tenemos que

$$v_c(t) = V(1 - e^{-t/RC})u(t) + v_0 e^{-t/RC}u(t)$$

3.41. En el circuito de la figura 3-16*a*) el interruptor se encuentra en posición cerrada durante un largo tiempo antes de abrirse en $t = 0$. Encuentre la corriente del inductor $i(t)$ para $t \geq 0$.

Cuando el interruptor se encuentra en posición cerrada durante un largo tiempo, el voltaje del capacitor está cargado a 10 V y no hay flujo de corriente en el capacitor. El inductor se comporta como un cortocircuito, y la corriente del inductor es $10/s = 2$ A.

De este modo, cuando el interruptor está abierto, tenemos $i(0^-) = 2$ y $v_c(0^-) = 10$; el voltaje de entrada es 10 V, y entonces puede representarse como $10u(t)$. A continuación, por medio de la figura 3-10, construimos el circuito transformado como se muestra en la figura 3-16*b*).

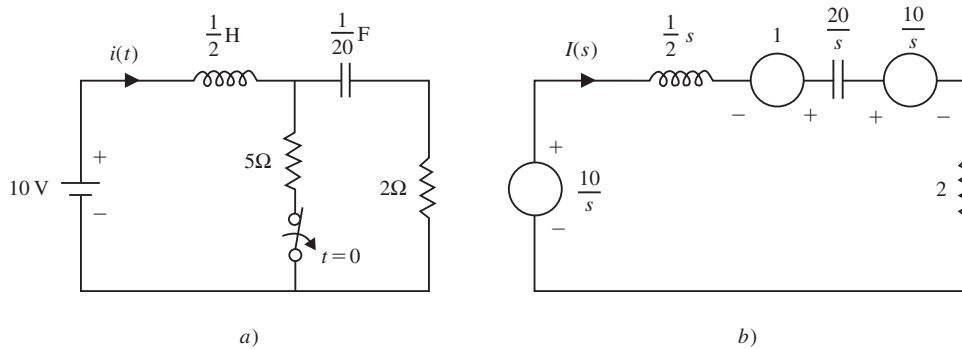


Figura 3-16

De la figura 3-16*b*), la ecuación del circuito puede escribirse como

$$\frac{1}{2} s I(s) - 1 + 2I(s) + \frac{20}{s} I(s) + \frac{10}{s} = \frac{10}{s}$$

o

$$\left(\frac{1}{2} s + 2 + \frac{20}{s} \right) I(s) = 1$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{\frac{1}{2} s + 2 + 20/s} = \frac{2s}{s^2 + 4s + 40} \\ &= \frac{2(s+2) - 4}{(s+2)^2 + 6^2} = 2 \frac{(s+2)}{(s+2)^2 + 6^2} - \frac{2}{3} \frac{6}{(s+2)^2 + 6^2} \end{aligned}$$

Al tomar la transformada de Laplace inversa de $I(s)$ obtenemos

$$i(t) = e^{-2t} \left(2 \cos 6t - \frac{2}{3} \operatorname{sen} 6t \right) u(t)$$

Observe que $i(0^+) = 2 = i(0^-)$; es decir, no hay discontinuidad en la corriente del inductor antes y después de que el interruptor se abre. De este modo, tenemos que

$$i(t) = e^{-2t} \left(2 \cos 6t - \frac{2}{3} \operatorname{sen} 6t \right) \quad t \geq 0$$

3.42. Considere el circuito mostrado en la figura 3-17a). Ambos interruptores se cierran de manera simultánea en $t = 0$. Los voltajes respectivos en los capacitores C_1 y C_2 antes de que los interruptores se cierren son 1 y 2 V.

- a) Encuentre las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$.
 - b) Encuentre los voltajes que pasan a través de los capacitores para $t = 0^+$.
- a) De las condiciones iniciales dadas, tenemos que

$$v_{C_1}(0^-) = 1 \text{ V} \quad \text{y} \quad v_{C_2}(0^-) = 2 \text{ V}$$

De esta manera, mediante la figura 3-10, construimos un circuito transformado como se muestra en la figura 3-17b). Las ecuaciones del circuito pueden escribirse directamente como

$$\begin{aligned} \left(2 + \frac{1}{s}\right)I_1(s) - 2I_2(s) &= \frac{4}{s} \\ -2I_1(s) + \left(2 + \frac{1}{s}\right)I_2(s) &= -\frac{2}{s} \end{aligned}$$

Al resolver para $I_1(s)$ e $I_2(s)$ llegamos a

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{s+1}{s+\frac{1}{4}} = \frac{s+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{s+\frac{1}{4}} = 1 + \frac{3}{4} \frac{1}{s+\frac{1}{4}} \\ I_2(s) &= \frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{4}} = \frac{s+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{s+\frac{1}{4}} = 1 - \frac{3}{4} \frac{1}{s+\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Si tomamos las transformadas de Laplace inversas de $I_1(s)$ e $I_2(s)$ obtenemos

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \delta(t) + \frac{3}{4}e^{-t/4}u(t) \\ i_2(t) &= \delta(t) - \frac{3}{4}e^{-t/4}u(t) \end{aligned}$$

- b) De la figura 3-17b) tenemos que
- $$\begin{aligned} V_{C_1}(s) &= \frac{1}{s}I_1(s) + \frac{1}{s} \\ V_{C_2}(s) &= \frac{1}{s}I_2(s) + \frac{2}{s} \end{aligned}$$

Sustituyendo $I_1(s)$ e $I_2(s)$ obtenidas en el inciso a), en las expresiones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} V_{C_1}(s) &= \frac{1}{s} \frac{s+1}{s+\frac{1}{4}} + \frac{1}{s} \\ V_{C_2}(s) &= \frac{1}{s} \frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{4}} + \frac{2}{s} \end{aligned}$$

Entonces, por medio del teorema del valor inicial (3.97) tenemos que

$$\begin{aligned} v_{C_1}(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sV_{C_1}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s+1}{s+\frac{1}{4}} + 1 = 1 + 1 = 2 \text{ V} \\ v_{C_2}(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sV_{C_2}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{4}} + 2 = 1 + 2 = 3 \text{ V} \end{aligned}$$

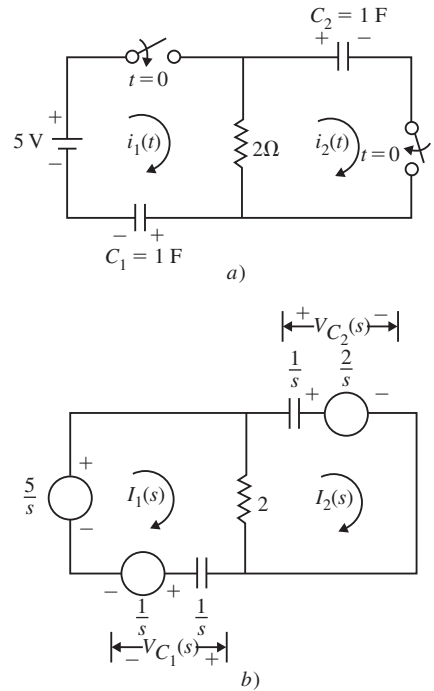


Figura 3-17

Advierta que $v_{C_1}(0^+) \neq v_{C_1}(0^-)$ y $v_{C_2}(0^+) \neq v_{C_2}(0^-)$. Esto se debe a la existencia de un lazo capacitivo en el circuito, dando como resultado un cambio repentino en el voltaje a través de los capacitores. Este escalón de cambio en los voltajes producirá impulsos en $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Los circuitos con un lazo de capacitancia o una conexión en estrella de inductores se conocen como *circuitos degenerativos*.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

3.43. Encuentre la transformada de Laplace de las siguientes $x(t)$:

- $x(t) = \text{sen } \omega_0 t u(t)$
- $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) u(t)$
- $x(t) = e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)$
- $x(t) = 1$
- $x(t) = \text{sgn } t$

3.44. Encuentre la transformada de Laplace de $x(t)$ dada por

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

3.45. Demuestre que si $x(t)$ es una señal por la izquierda y $X(s)$ converge para algún valor de s , entonces la ROC de $X(s)$ es de la forma

$$\text{Re}(s) < \sigma_{\min}$$

donde σ_{\min} es igual a la parte real mínima de cualquiera de los polos de $X(s)$.

3.46. Verifique la ecuación (3.21); es decir,

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \quad R' = R$$

3.47. Demuestre las siguientes propiedades para la transformada de Laplace:

- Si $x(t)$ es par, entonces $X(-s) = X(s)$; es decir, $X(s)$ también es par.
- Si $x(t)$ es impar, entonces $X(-s) = -X(s)$; es decir, $X(s)$ también es impar.
- Si $x(t)$ es impar, entonces existe un cero en $X(s)$ para $s = 0$.

3.48. Encuentre la transformada de Laplace de

$$x(t) = (e^{-t} \cos 2t - 5e^{-2t}) u(t) + \frac{1}{2} e^{2t} u(-t)$$

3.49. Encuentre la transformada de Laplace inversa de las siguientes $X(s)$:

$$a) X(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}, \text{Re}(s) > -1$$

$$b) X(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}, -1 < \text{Re}(s) < 0$$

$$c) X(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}, \text{Re}(s) < -1$$

$$d) X(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+13}, \text{Re}(s) > -2$$

$$e) X(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2}, \text{Re}(s) > 0$$

$$f) X(s) = \frac{s}{s^3+2s^2+9s+18}, \text{Re}(s) > -2$$

3.50. Mediante la transformada de Laplace, vuelva a resolver el problema 2.46.

3.51. Mediante la transformada de Laplace demuestre que

- $x(t) * \delta(t) = x(t)$
- $x(t) * \delta'(t) = x'(t)$

3.52. Por medio de la transformada de Laplace vuelva a resolver el problema 2.54.

3.53. Encuentre la salida $y(t)$ del sistema LIT de tiempo continuo con

$$h(t) = e^{-2t} u(t)$$

para cada una de las siguientes entradas:

- $x(t) = e^{-t} u(t)$
- $x(t) = e^{-t} u(-t)$

3.54 La respuesta al escalón de un sistema LIT de tiempo continuo está dada por $(1 - e^{-t})u(t)$. Para cierta entrada $x(t)$ desconocida, se observa que la salida $y(t)$ es $(2 - 3e^{-t} + e^{-3t})u(t)$. Encuentre la entrada $x(t)$.

3.55. Determine la función total del sistema $H(s)$ para el sistema mostrado en la figura 3-18.

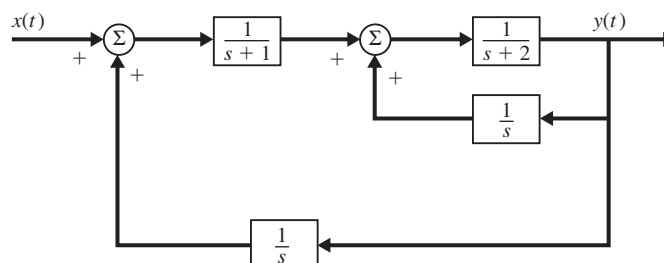


Figura 3-18

- 3.56. Si $x(t)$ es una función periódica con periodo fundamental T , encuentre la transformada de Laplace unilateral de $x(t)$.
- 3.57. Encuentre las transformadas de Laplace unilaterales de las señales periódicas que se muestran en la figura 3-19.

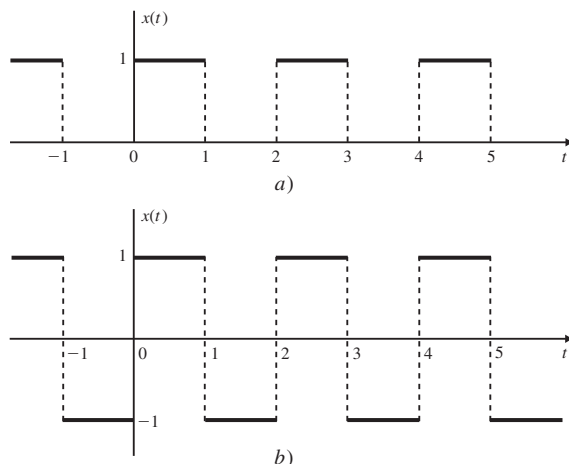


Figura 3-19

- 3.58. Mediante la transformada de Laplace unilateral encuentre la solución de

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = e^t$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$ para $t \geq 0$.

- 3.59. Por medio de la transformada de Laplace unilateral resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales simultáneas:

$$y'(t) + y(t) + x'(t) + x(t) = 1$$

$$y'(t) - y(t) - 2x(t) = 0$$

con $x(0) = 0$ y $y(0) = 1$ para $t \geq 0$.

- 3.60. Mediante la transformada de Laplace unilateral resuelva las siguientes ecuaciones integrales:

$$a) \quad y(t) = 1 + a \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

$$b) \quad y(t) = e^t \left[1 + \int_0^t e^{-\tau} y(\tau) d\tau \right], \quad t \geq 0$$

- 3.61. Considere el circuito RC en la figura 3-20. El interruptor se encuentra cerrado en $t = 0$. El voltaje del capacitor antes del cierre del interruptor es v_0 . Encuentre el voltaje del capacitor para $t \geq 0$.

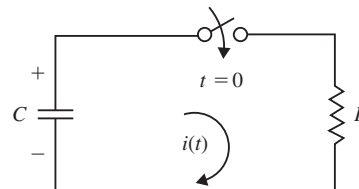


Figura 3-20 Circuito RC.

- 3.62. Considere el circuito RC en la figura 3-21. El interruptor se encuentra cerrado en $t = 0$. Antes de cerrar el interruptor, el capacitor C_1 se encuentra cargado a v_0 V mientras que el capacitor C_2 no lo está.

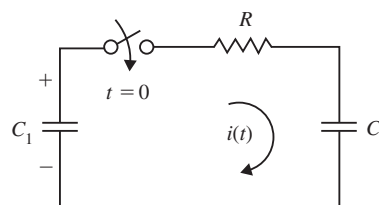


Figura 3-21 Circuito RC.

- a) Suponiendo que $C_1 = C_2 = C$, encuentre la corriente $i(t)$ para $t \geq 0$.
- b) Encuentre la energía E total disipada por el resistor R , y demuestre que E es independiente de R y es igual a la mitad de la energía inicial almacenada en C_1 .
- c) Suponga que $R = 0$ y $C_1 = C_2 = C$. Encuentre la corriente $i(t)$ para $t \geq 0$ y los voltajes $v_{C_1}(0^+)$ y $v_{C_2}(0^+)$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

3.43. a) $X(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \text{Re}(s) > 0$

b) $X(s) = \frac{s \cos \phi - \omega_0 \sin \phi}{s^2 + \omega_0^2}, \text{Re}(s) > 0$

c) Si $a > 0$, $X(s) = \frac{2s}{s^2 - a^2}, -a < \text{Re}(s) < a$. Si

$a < 0$, $X(s)$ no existe puesto que no tiene una ROC.

d) Sugerencia: $x(t) = u(t) + u(-t)$

$X(s)$ no existe puesto que no tiene una ROC.

e) Sugerencia: $x(t) = u(t) - u(-t)$,

$X(s)$ no existe puesto que no tiene una ROC.

3.44. $X(s) = \frac{1}{s} [e^{-st_1} - e^{-st_2}]$, para toda s

3.45. Sugerencia: Proceda de manera parecida al problema 3.4.

3.46. Sugerencia: Haga la diferenciación en ambos lados de la ecuación (3.3) con respecto a s .

3.47. Sugerencia:

a) Use las ecuaciones (1.2) y (3.17).

b) Utilice las ecuaciones (1.3) y (3.17).

c) Haga uso del inciso b) y de la ecuación (1.83a).

$$3.48. X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{5}{s+2} - \frac{1}{2} \frac{1}{s-2}, -1 < \text{Re}(s) < 2$$

$$3.49. a) x(t) = (1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$$

$$b) x(t) = -u(-t) - (1+t)e^{-t}u(t)$$

$$c) x(t) = (-1 + e^{-t} + te^{-t})u(-t)$$

$$d) x(t) = e^{-2t} \left(\cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t \right) u(t)$$

$$e) x(t) = \frac{1}{4} t \sin 2tu(t)$$

$$f) x(t) = \left(-\frac{2}{13} e^{-2t} + \frac{2}{13} \cos 3t + \frac{3}{13} \sin 3t \right) u(t)$$

3.50. *Sugerencia:* Use la ecuación (3.21) y la tabla 3-1.

3.51. *Sugerencia:*

a) Haga uso de la ecuación (3.21) y la tabla 3-1.

b) Utilice las ecuaciones (3.18) y (3.21) y la tabla 3-1.

3.52. *Sugerencia:*

a) Encuentre la función del sistema $H(s)$ mediante la ecuación (3.32) y tome la transformada de Laplace inversa de $H(s)$.

b) Encuentre la ROC de $H(s)$ y demuestre que no contiene el eje $j\omega$.

$$3.53. a) y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$b) y(t) = e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(t)$$

$$3.54. x(t) = 2(1 - e^{-3t})u(t)$$

3.55. *Sugerencia:* Use el resultado del problema 3.31 para simplificar el diagrama de bloques.

$$H(s) = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + s - 2}$$

$$3.56. X(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T x(t)e^{-st} dt, \text{Re}(s) > 0$$

$$3.57. a) \frac{1}{s(1 + e^{-s})}, \text{Re}(s) > 0;$$

$$b) \frac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})}, \text{Re}(s) > 0$$

$$3.58. y(t) = -\frac{1}{6}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t}, t \geq 0$$

$$3.59. x(t) = e^{-t} - 1, y(t) = 2 - e^{-t}, t \geq 0$$

$$3.60. a) y(t) = e^{at}, t \geq 0;$$

$$b) y(t) = e^{2t}, t \geq 0$$

$$3.61. v_c(t) = v_0 e^{-t/RC}, t \geq 0$$

$$3.62. a) i(t) = (v_0/R)e^{-2t/RC}, t \geq 0$$

$$b) E = \frac{1}{4}v_0^2 C$$

$$c) i(t) = \frac{1}{2}v_0 C \delta(t), v_{C_1}(0^+) = v_0/2 \neq v_{C_1}(0^-) \\ = v_0, v_{C_2}(0^+) = v_0/2 \neq v_{C_2}(0^-) = 0$$

La transformada z y los sistemas LIT de tiempo discreto

4.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 3 presentamos la transformada de Laplace. En este capítulo presentamos la transformada z , la cual es la contraparte de tiempo discreto de la transformada de Laplace. La transformada z se presenta para representar las señales de tiempo discreto (o series o secuencias) en el dominio z (z es una variable compleja); también se describirá el concepto de la función del sistema para un sistema LIT de tiempo discreto. La transformada de Laplace convierte las ecuaciones integro-diferenciales en ecuaciones algebraicas. De manera similar, la transformada z convierte las ecuaciones en diferencias en ecuaciones algebraicas, simplificando de este modo el análisis de los sistemas de tiempo discreto.

Las propiedades de la transformada z son muy similares a las de la transformada de Laplace. Sin embargo, veremos algunas diferencias importantes entre la transformada z y la de Laplace.

4.2 LA TRANSFORMADA Z

En la sección 2.8 vimos que para un sistema LIT de tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$, la salida $y[n]$ del sistema a la entrada exponencial compleja de la forma z^n es

$$y[n] = \mathbf{T}\{z^n\} = H(z)z^n \quad (4.1)$$

donde

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \quad (4.2)$$

A. DEFINICIÓN

La función $H(z)$ en la ecuación (4.2) se conoce como la transformada z de $h[n]$. Para una señal general de tiempo discreto $x[n]$, la transformada z $X(z)$ se define como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (4.3)$$

En general, la variable z es de valor complejo y se expresa en forma polar como

$$z = re^{j\Omega} \quad (4.4)$$

donde r es la magnitud de z y Ω es su ángulo. La transformada z definida en la ecuación (4.3) con frecuencia se conoce como transformada z *bilateral* (o *de dos lados*), en contraste con la transformada z *unilateral* (o *de un lado*), la cual se define como

$$X_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (4.5)$$

Es evidente que las transformadas z bilateral y unilateral son equivalentes sólo si $x[n] = 0$ para $n < 0$. La transformada z unilateral se discute en la sección 4.8. Omitiremos la palabra “bilateral”, excepto donde sea necesario para evitar ambigüedad.

Como en el caso de la transformada de Laplace, la ecuación (4.3) en ocasiones se considera un operador que transforma una secuencia $x[n]$ en una función $X(z)$, representada de manera simbólica por

$$X(z) = \mathfrak{Z}\{x[n]\} \quad (4.6)$$

Se dice que $x[n]$ y $X(z)$ forman un par de transformadas z denotadas como

$$x[n] \leftrightarrow X(z) \quad (4.7)$$

B. LA REGIÓN DE CONVERGENCIA

Como en el caso de la transformada de Laplace, el intervalo de valores de la variable compleja z para el cual converge la transformada z se denomina región de convergencia. Para ilustrar la transformada z y la ROC asociada consideremos algunos ejemplos:

EJEMPLO 4.1 Consideremos la secuencia

$$x[n] = a^n u[n] \quad a \text{ real} \quad (4.8)$$

Entonces, por la ecuación (4.3) la transformada z de $x[n]$ es

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Para la convergencia de $X(z)$ necesitamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$$

De esta forma, la ROC es el intervalo de valores de z para los cuales $|az^{-1}| < 1$, o, de manera equivalente, $|z| > |a|$. Entonces

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (4.9)$$

Como alternativa, al multiplicar el numerador y el denominador de la ecuación (4.9) por z , podemos escribir $X(z)$ como

$$X(z) = \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a| \quad (4.10)$$

Dependiendo de la aplicación, ambas formas de $X(z)$ en las ecuaciones (4.9) y (4.10) son útiles. De la ecuación (4.10) observamos que $X(z)$ es una función racional de z . En consecuencia, del mismo modo que con las transformadas de Laplace racionales, puede caracterizarse por sus ceros (las raíces del polinomio del numerador) y sus polos (las raíces del polinomio del denominador). De la ecuación (4.10) advertimos que existe un cero en $z = 0$ y un polo en $z = a$. La ROC y la gráfica de polos ceros para este ejemplo se muestran en la figura 4-1. En las aplicaciones de la transformada z , por lo general el plano complejo se conoce como plano z .

EJEMPLO 4.2 Considere la secuencia

$$x[n] = -a^n u[-n - 1] \quad (4.11)$$

Su transformada z $X(z)$ está dada por (problema 4.1)

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| < |a| \quad (4.12)$$

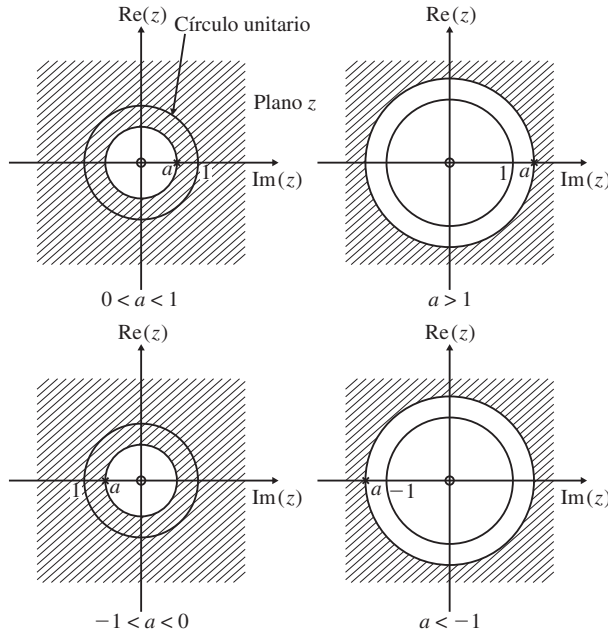


Figura 4-1 ROC de la forma $|z| > |a|$.

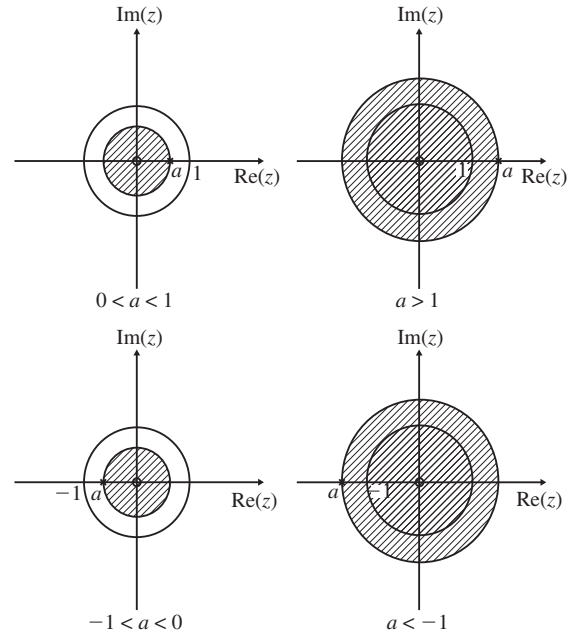


Figura 4-2 ROC de la forma $|z| < |a|$.

Nuevamente, como antes, $X(z)$ puede escribirse como

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad |z| < |a| \quad (4.13)$$

De esta forma, la ROC y la gráfica de polos cero para este ejemplo se muestran en la figura 4-2. Al comparar las ecuaciones (4.9) y (4.12) [o las ecuaciones (4.10) y (4.13)] observamos que las expresiones algebraicas de $X(z)$ para dos diferentes secuencias son idénticas, excepto por las ROC. De este modo, como ocurre en la transformada de Laplace, para la especificación de la transformada z son necesarias tanto la expresión algebraica como la ROC.

C. PROPIEDADES DE LA ROC

Como vimos en los ejemplos 4.1 y 4.2, la ROC de $X(z)$ depende de la naturaleza de $x[n]$. A continuación se resumen las propiedades de la ROC. Suponemos que $X(z)$ es una función racional de z .

Propiedad 1: La ROC no contiene ningún polo.

Propiedad 2: Si $x[n]$ es una secuencia finita (esto es, $x[n] = 0$ excepto en un intervalo finito $N_1 \leq n \leq N_2$, donde N_1 y N_2 son finitos) y $X(z)$ converge para algún valor de z , entonces la ROC es todo el plano z excepto, quizás, en $z = 0$ o $z = \infty$.

Propiedad 3: Si $x[n]$ es una secuencia por la derecha (es decir, $x[n] = 0$ para $n < N_1 < \infty$) y $X(z)$ converge para algún valor de z , entonces la ROC es de la forma

$$|z| > r_{\text{máx}} \quad \text{o} \quad \infty > |z| > r_{\text{máx}}$$

donde $r_{\text{máx}}$ es igual a la magnitud mayor de cualquiera de los polos de $X(z)$. De esta forma, la ROC es el exterior del círculo $|z| = r_{\text{máx}}$ del plano z con la posible excepción de $z = \infty$.

Propiedad 4: Si $x[n]$ es una secuencia por la izquierda (es decir, $x[n] = 0$ para $n > N_2 > -\infty$) y $X(z)$ converge para algún valor de z , entonces la ROC es de la forma

$$|z| < r_{\text{mín}} \quad \text{o} \quad 0 < |z| < r_{\text{mín}}$$

donde $r_{\text{mín}}$ es la menor magnitud de cualquier polo de $X(z)$. De este modo, la ROC es el interior del círculo $|z| = r_{\text{mín}}$ en el plano z con la posible excepción de $z = 0$.

Propiedad 5: Si $x[n]$ es una secuencia de dos lados (o sea, $x[n]$ es una secuencia de duración infinita que no es del lado derecho ni del lado izquierdo) y $X(z)$ converge para algún valor de z , entonces la ROC es de la forma

$$r_1 < |z| < r_2$$

donde r_1 y r_2 son las magnitudes de ambos polos de $X(z)$. De este modo, la ROC es un anillo anular en el plano z que se encuentra entre los círculos $|z| = r_1$ y $|z| = r_2$ sin contener ningún polo.

Observe que la propiedad 1 se obtiene de inmediato a partir de la definición de polos; es decir, $X(z)$ es infinita en un polo. Para la verificación de las otras propiedades vea los problemas 4.2 y 4.5.

4.3 TRANSFORMADAS Z DE ALGUNAS SEÑALES COMUNES

A. SECUENCIA DEL IMPULSO UNITARIO $\delta[n]$

De las definiciones (1.45) y (4.3)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = z^{-0} = 1 \quad \text{para toda } z \quad (4.14)$$

De este modo,
$$\delta[n] \leftrightarrow 1 \quad \text{para toda } z \quad (4.15)$$

B. SECUENCIA DEL ESCALÓN UNITARIO $u[n]$

Si establecemos $a = 1$ en las ecuaciones (4.8) y (4.10), obtenemos

$$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad |z| > 1 \quad (4.16)$$

C. PARES DE TRANSFORMADAS Z

Las transformadas z de algunas secuencias comunes se expresan en la tabla 4-1.

4.4 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

A continuación se presentan las propiedades básicas de la transformada z . La verificación de estas propiedades se proporciona en los problemas 4.8 al 4.14.

A. LINEALIDAD

Si
$$\begin{aligned} x_1[n] &\leftrightarrow X_1(z) & \text{ROC} &= R_1 \\ x_2[n] &\leftrightarrow X_2(z) & \text{ROC} &= R_2 \end{aligned}$$

entonces
$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \leftrightarrow a_1X_1(z) + a_2X_2(z) \quad R' \supset R_1 \cap R_2 \quad (4.17)$$

donde a_1 y a_2 son constantes arbitrarias.

B. DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

Si
$$x[n] \leftrightarrow X(z) \quad \text{ROC} = R$$

entonces
$$x[n - n_0] \leftrightarrow z^{-n_0}X(z) \quad R' = R \cap \{0 < |z| < \infty\} \quad (4.18)$$

CASOS ESPECIALES

$$x[n - 1] \leftrightarrow z^{-1}X(z) \quad R' = R \cap \{0 < |z| < \infty\} \quad (4.19)$$

$$x[n + 1] \leftrightarrow zX(z) \quad R' = R \cap \{|z| < \infty\} \quad (4.20)$$

Tabla 4-1 Algunos pares comunes de transformadas z

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	Para toda z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	Para toda z excepto 0 si $(m > 0)$ o ∞ si $(m < 0)$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \frac{z}{z-a}$	$ z < a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \frac{az}{(z-a)^2}$	$ z < a $
$(n+1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \left[\frac{z}{z-a} \right]^2$	$ z > a $
$(\cos \Omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^2 - (\cos \Omega_0)z}{z^2 - (2 \cos \Omega_0)z + 1}$	$ z > 1$
$(\sen \Omega_0 n)u[n]$	$\frac{(\sen \Omega_0)z}{z^2 - (2 \cos \Omega_0)z + 1}$	$ z > 1$
$(r^n \cos \Omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^2 - (r \cos \Omega_0)z}{z^2 - (2r \cos \Omega_0)z + r^2}$	$ z > r$
$(r^n \sen \Omega_0 n)u[n]$	$\frac{(r \sen \Omega_0)z}{z^2 - (2r \cos \Omega_0)z + r^2}$	$ z > r$
$\begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z > 0$

Debido a estas relaciones [ecuaciones (4.19) y (4.20)], z^{-1} con frecuencia se conoce como *operador de atraso unitario* mientras que z se denomina *operador de adelanto unitario*. Advierta que en la transformada de Laplace el operador $s^{-1} = 1/s$ y s corresponden de manera respectiva a la integración y a la diferenciación en el dominio del tiempo [ecuaciones (3.22) y (3.20)].

C. MULTIPLICACIÓN POR z_0^n

Si $x[n] \leftrightarrow X(z)$ ROC = R

entonces $z_0^n x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right)$ $R' = |z_0| R$ **(4.21)**

En particular, un polo (o cero) $z = z_k$ en $X(z)$ se desplaza a $z = z_0 z_k$ después de la multiplicación por z_0^n y la ROC se expande o se contrae por el factor $|z_0|$.

CASO ESPECIAL

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{-j\Omega_0 z}) \quad R' = R \quad \text{(4.22)}$$

En este caso especial, todos los polos y los ceros simplemente están girados por el ángulo Ω_0 y la ROC permanece sin cambios.

D. INVERSIÓN DEL TIEMPO

Si $x[n] \leftrightarrow X(z)$ ROC = R

entonces $x[-n] \leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$ $R' = \frac{1}{R}$ **(4.23)**

Por consiguiente, un polo (o cero) en $X(z)$ en $z = z_k$ se desplaza a $1/z_k$ después de la inversión del tiempo. La relación $R' = 1/R$ indica la inversión de R , reflejando el hecho de que una secuencia por la derecha se convierte en una secuencia por la izquierda si se invierte el tiempo, y viceversa.

E. MULTIPLICACIÓN POR n (O DIFERENCIACIÓN EN z)

Si $x[n] \leftrightarrow X(z)$ ROC = R

entonces $nx[n] \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$ $R' = R$ **(4.24)**

F. ACUMULACIÓN

Si $x[n] \leftrightarrow X(z)$ ROC = R

entonces $\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) = \frac{z}{z-1} X(z)$ $R' \supset R \cap \{|z| > 1\}$ **(4.25)**

Observe que $\sum_{k=-\infty}^n x[k]$ es la contraparte de tiempo discreto de la integración en el dominio del tiempo y se conoce como *acumulación*. El operador de la transformada de Laplace comparable para la integración es $1/s$.

G. CONVOLUCIÓN

Si $x_1[n] \leftrightarrow X_1(z)$ ROC = R_1

$x_2[n] \leftrightarrow X_2(z)$ ROC = R_2

entonces $x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$ $R' \supset R_1 \cap R_2$ **(4.26)**

Esta relación desempeña una función central en el análisis y diseño de los sistemas LIT de tiempo discreto, en analogía con el caso continuo en el tiempo.

H. RESUMEN DE ALGUNAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Como una referencia conveniente, las propiedades de la transformada z que presentamos con anterioridad se resumen en la tabla 4-2.

Tabla 4-2 Algunas propiedades de la transformada z

Propiedad	Secuencia	Transformada	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linealidad	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en el tiempo	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	$R' \supset R \cap \{0 < z < \infty\}$
Multiplicación por z_0^n	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$R' = z_0 R$
Multiplicación por $e^{j\Omega_0 n}$	$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0 z})$	$R' = R$
Inversión del tiempo	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$R' = \frac{1}{R}$
Multiplicación por n	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R' = R$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$	$R' \supset R \cap \{ z > 1\}$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

4.5 TRANSFORMADA Z INVERSA

La inversa de la transformada z para encontrar la secuencia $x[n]$ a partir de su transformada z $X(z)$ se conoce como transformada z inversa, denotadas de manera simbólica como

$$x[n] = \mathfrak{Z}^{-1}\{X(z)\} \quad (4.27)$$

A. FÓRMULA DE INVERSIÓN

Como en el caso de la transformada de Laplace, existe una expresión formal para la transformada z inversa en términos de una integración en el plano z ; esto es,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (4.28)$$

donde C es un contorno de integración en el sentido contrario a las manecillas del reloj que encierra el origen. Para la evaluación formal de la ecuación (4.28) es necesario tener conocimientos teóricos de la variable compleja.

B. USO DE LAS TABLAS DE PARES DE TRANSFORMADAS Z

En el segundo método para la inversión de $X(z)$, intentamos expresar $X(z)$ como una suma

$$X(z) = X_1(z) + \cdots + X_n(z) \quad (4.29)$$

donde $X_1(z), \dots, X_n(z)$ son funciones con transformadas inversas conocidas $x_1[n], \dots, x_n[n]$. De la propiedad de linealidad (4.17) se obtiene

$$x[n] = x_1[n] + \cdots + x_n[n] \quad (4.30)$$

C. EXPANSIÓN EN SERIE DE POTENCIAS

La expresión de definición para la transformada z [ecuación (4.3)] es una serie de potencias donde los valores $x[n]$ de la secuencia son los coeficientes de z^{-n} . De este modo, si $X(z)$ está dada como una serie de potencias de la forma

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ = \dots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots \quad (4.31)$$

podemos determinar cualquier valor particular de la secuencia al encontrar el coeficiente de la potencia apropiada de z^{-1} . Es posible que este enfoque no proporcione una solución en forma cerrada, pero es muy útil para una secuencia de longitud finita donde $X(z)$ puede no tener una forma más simple que un polinomio en z^{-1} (vea el problema 4.15). En los problemas 4.16 y 4.17 se ilustra cómo puede obtenerse una expansión en serie de potencias mediante la división larga para las transformadas z racionales.

D. EXPANSIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Como en el caso de la transformada de Laplace inversa, el método de expansión en fracciones parciales proporciona la transformada z inversa que en general es más útil, en particular cuando $X(z)$ es una función racional de z . Sea

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = k \frac{(z - z_1) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1) \cdots (z - p_n)} \quad (4.32)$$

Si suponemos que $n \geq m$ y que todos los polos p_k son simples, entonces

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \dots + \frac{c_n}{z - p_n} = \frac{c_0}{z} + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z - p_k} \quad (4.33)$$

donde

$$c_0 = X(z) \Big|_{z=0} \quad c_k = (z - p_k) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=p_k} \quad (4.34)$$

Por tanto, obtenemos

$$X(z) = c_0 + c_1 \frac{z}{z - p_1} + \dots + c_n \frac{z}{z - p_n} = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k \frac{z}{z - p_k} \quad (4.35)$$

Al inferir la ROC para cada término en la ecuación (4.35) de la ROC total de $X(z)$ y mediante la tabla 4-1, podemos invertir cada término, y producir así la transformada z inversa total (vea los problemas 4.19 al 4.23).

Si $m > n$ en la ecuación (4.32), entonces debe agregarse un polinomio de z a la derecha de la ecuación (4.35), cuyo orden es $(m - n)$. De esta forma, para $m > n$, la expansión completa en fracciones parciales tendría la forma

$$X(z) = \sum_{q=0}^{m-n} b_q z^q + \sum_{k=1}^n c_k \frac{z}{z - p_k} \quad (4.36)$$

Si $X(z)$ tiene polos de orden múltiple (digamos que p_i es el polo múltiple con multiplicidad r , entonces la expansión de $X(z)/z$ se compondrá de términos de la forma

$$\frac{\lambda_1}{z - p_i} + \frac{\lambda_2}{(z - p_i)^2} + \dots + \frac{\lambda_r}{(z - p_i)^r} \quad (4.37)$$

donde

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left[(z - p_i)^r \frac{X(z)}{z} \right] \Big|_{z=p_i} \quad (4.38)$$

4.6 FUNCIÓN DEL SISTEMA DE LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO DISCRETO

A. FUNCIÓN DEL SISTEMA

En la sección 2.6 mostramos que la salida $y[n]$ de un sistema LIT de tiempo discreto es igual a la convolución de la entrada $x[n]$ con la respuesta al impulso $h[n]$; es decir [ecuación (2.35)],

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (4.39)$$

Al aplicar la propiedad de convolución (4.26) de la transformada z obtenemos

$$Y(z) = X(z)H(z) \quad (4.40)$$

donde $Y(z)$, $X(z)$ y $H(z)$ son las respectivas transformadas z de $y[n]$, $x[n]$ y $h[n]$. La ecuación (4.40) puede expresarse como

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (4.41)$$

La transformada z $H(z)$ de $h[n]$ se conoce como *función del sistema* (o *función de transferencia*) del sistema. Mediante la ecuación (4.41) la función del sistema $H(z)$ también puede definirse como razón de las transformadas z de la salida $y[n]$ y de la entrada $x[n]$. La función del sistema $H(z)$ caracteriza completamente al sistema. La figura 4-3 ilustra la relación de las ecuaciones (4.39) y (4.40).

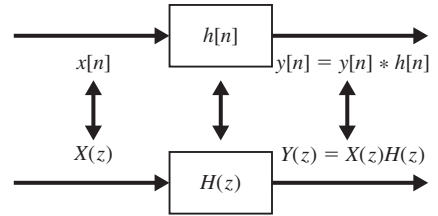


Figura 4-3 Respuesta al impulso y función del sistema.

B. CARACTERIZACIÓN DE LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO DISCRETO

Muchas propiedades de los sistemas LIT de tiempo discreto pueden estar estrechamente asociadas con las características de $H(z)$ en el plano z y, en particular, con las ubicaciones de los polos y la ROC.

1. CAUSALIDAD

Para un sistema LIT causal de tiempo discreto tenemos que [ecuación (2.44)]

$$h[n] = 0 \quad n < 0$$

porque $h[n]$ es una señal por la derecha, el requerimiento correspondiente sobre $H(z)$ es que la ROC de $H(z)$ debe ser de la forma

$$|z| > r_{\text{máx}}$$

Es decir, la ROC es el exterior de un círculo que contiene todos los polos de $H(z)$ en el plano z . De manera semejante, si el sistema es no causal, esto es,

$$h[n] = 0 \quad n \geq 0$$

entonces $h[n]$ es una señal por la izquierda y la ROC de $H(z)$ debe ser de la forma

$$|z| < r_{\text{mín}}$$

Es decir, la ROC es el interior de un círculo que no contiene polos de $H(z)$ en el plano z .

2. ESTABILIDAD

En la sección 2.7 establecimos que un sistema LIT de tiempo discreto es estable en el sentido BIBO si y sólo si [ecuación (2.49)]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

El requerimiento correspondiente sobre $H(z)$ es que la ROC de $H(z)$ contenga el círculo unitario (esto es, $|z| = 1$). (Vea el problema 4.30.)

3. SISTEMAS CAUSALES Y ESTABLES

Si el sistema es tanto causal como estable, entonces todos los polos de $H(z)$ deben estar dentro del círculo unitario del plano z porque la ROC es de la forma $|z| > r_{\text{máx}}$ y, ya que el círculo unitario se encuentra incluido en la ROC, debemos tener que $r_{\text{máx}} < 1$.

C. FUNCIÓN DEL SISTEMA PARA SISTEMAS LIT DESCRITOS POR ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

En la sección 2.9 consideramos un sistema LIT de tiempo discreto para el cual la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ satisfacen la ecuación en diferencia general lineal con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (4.42)$$

Al aplicar la transformada z y por medio de la propiedad de desplazamiento en el tiempo (4.18) y la propiedad de linealidad (4.17) de la transformada z obtenemos

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

o

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (4.43)$$

De esta manera,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (4.44)$$

Por tanto, $H(z)$ siempre es racional. Advierta que la ROC de $H(z)$ no está especificada por la ecuación (4.44) pero debe inferirse con requerimientos adicionales sobre el sistema, tales como la causalidad o la estabilidad.

D. INTERCONEXIÓN DE SISTEMAS

Para dos sistemas LIT (con $h_1[n]$ y $h_2[n]$, respectivamente) en cascada, la respuesta al impulso total $h[n]$ estará dada por

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] \quad (4.45)$$

De este modo, las funciones correspondientes del sistema están relacionadas por el producto

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \quad R \supset R_1 \cap R_2 \quad (4.46)$$

De manera similar, la respuesta al impulso de una combinación en paralelo de dos sistemas LIT está dada por

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] \quad (4.47)$$

y

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) \quad R \supset R_1 \cap R_2 \quad (4.48)$$

4.7 LA TRANSFORMADA Z UNILATERAL

A. DEFINICIÓN

La transformada z *unilateral* (o *de un lado*) $X_I(z)$ de una secuencia $x[n]$ está definida como [ecuación (4.5)]

$$X_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (4.49)$$

y difiere de la transformada bilateral en que la sumatoria se lleva a cabo sólo sobre el intervalo $n \geq 0$. De este modo, la transformada z unilateral de $x[n]$ puede considerarse como la transformada bilateral de $x[n]u[n]$. Puesto que $x[n]u[n]$ es una secuencia por la derecha, la ROC de $X_I(z)$ siempre está fuera de un círculo en el plano z .

B. PROPIEDADES BÁSICAS

Gran parte de las propiedades de la transformada z unilateral son las mismas que para la transformada z bilateral. La transformada z unilateral es útil para calcular la respuesta de un sistema causal a una entrada causal cuando el sistema está descrito por una ecuación en diferencia lineal con coeficientes constantes con condiciones iniciales distintas de cero. Ahora la propiedad básica de la transformada z unilateral útil para esta aplicación es la propiedad de desplazamiento en el tiempo, la cual difiere de la correspondiente a la transformada bilateral.

PROPIEDAD DE DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

Si $x[n] \leftrightarrow X_f(z)$, entonces para $m \geq 0$,

$$x[n - m] \leftrightarrow z^{-m} X_f(z) + z^{-m+1} x[-1] + z^{-m+2} x[-2] + \dots + x[-m] \quad (4.50)$$

$$x[n + m] \leftrightarrow z^m X_f(z) - z^m x[0] - z^{m-1} x[1] - \dots - z x[m - 1] \quad (4.51)$$

En el problema 4.36 se proporcionan las demostraciones de las ecuaciones (4.50) y (4.51).

C. FUNCIÓN DEL SISTEMA

De manera similar al caso del sistema LIT de tiempo continuo, con la transformada z unilateral, la función del sistema $H(z) = Y(z)/X(z)$ se define bajo la condición de que el sistema está en reposo; es decir, que todas las condiciones iniciales son iguales a cero.

PROBLEMAS RESUELTOS

TRANSFORMADA Z

4.1. Encuentre la transformada z de

- a) $x[n] = -a^n u[-n - 1]$
- b) $x[n] = a^{-n} u[-n - 1]$

a) De la ecuación (4.3)

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n - 1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$$

Por la ecuación (1.91)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = \frac{1}{1 - a^{-1}z} \quad \text{si } |a^{-1}z| < 1 \text{ o } |z| < |a|$$

De esta manera,

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{-a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{z}{z - a} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| < |a| \quad (4.52)$$

b) De manera semejante,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{-n} u[-n - 1] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (az)^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (az)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (az)^n - 1$$

De nueva cuenta, por la ecuación (1.91)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (az)^n = \frac{1}{1 - az} \quad \text{si } |az| < 1 \text{ o } |z| < \frac{1}{|a|}$$

De este modo,

$$X(z) = \frac{1}{1 - az} - 1 = \frac{az}{1 - az} = - \frac{z}{z - 1/a} \quad |z| < \frac{1}{|a|} \quad (4.53)$$

4.2. Una secuencia finita $x[n]$ está definida como

$$x[n] \begin{cases} \neq 0 & N_1 \leq n \leq N_2 \\ = 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

donde N_1 y N_2 son finitos. Demuestre que la ROC de $X(z)$ es todo el plano z excepto, posiblemente, en $z = 0$ o $z = \infty$.

De la ecuación (4.3)

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \quad (4.54)$$

Para z distinta de cero o de infinito cada término en la ecuación (4.54) será finito y de este modo $X(z)$ convergerá. Si $N_1 < 0$ y $N_2 > 0$, entonces la ecuación (4.54) incluye términos con potencias tanto positivas como negativas de z . A medida que $|z| \rightarrow 0$, los términos con potencias negativas de z se vuelven no acotados, y a medida que $|z| \rightarrow \infty$, los términos con potencias positivas de z se hacen no acotados. Por consiguiente, la ROC es todo el plano z excepto por $z = 0$ y por $z = \infty$. Si $N_1 \geq 0$, la ecuación (4.54) contiene sólo potencias negativas de z , por tanto, la ROC incluye $z = \infty$. Si $N_2 \leq 0$, la ecuación (4.54) contiene sólo potencias positivas de z , por tanto, la ROC incluye $z = 0$.

4.3. Una secuencia finita $x[n]$ está definida como

$$x[n] = \{5, 3, -2, 0, 4, -3\}$$

↑

Encuentre $X(z)$ y su ROC.

De la ecuación (4.3) y dada $x[n]$ tenemos que

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-2}^3 x[n]z^{-n} \\ &= x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} \\ &= 5z^2 + 3z - 2 + 4z^{-2} - 3z^{-3} \end{aligned}$$

Para z distinta de cero o de infinito cada término en $X(z)$ será finito y, en consecuencia, $X(z)$ convergerá. Observe que $X(z)$ incluye potencias tanto positivas como negativas de z . De esta forma, del resultado del problema 4.2 concluimos que la ROC de $X(z)$ es $0 < |z| < \infty$.

4.4. Considere la secuencia

$$x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1, a > 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Encuentre $X(z)$ y grafique los polos y los ceros de $X(z)$.

Por la ecuación (4.3), y mediante la ecuación (1.90), obtenemos

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a} \quad (4.55)$$

De la ecuación (4.55) vemos que existe un polo de $(N-1)$ -ésimo orden para $z = 0$ y un polo en $z = a$. Puesto que $x[n]$ es una secuencia infinita y es cero para $n < 0$, la ROC es $|z| > 0$. Las N raíces del polinomio del numerador están en

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.56)$$

La raíz en $k = 0$ cancela el polo en $z = a$. Los ceros restantes de $X(z)$ están en

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)} \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (4.57)$$

La gráfica de polos ceros se muestra en la figura 4-4 con $N = 8$.

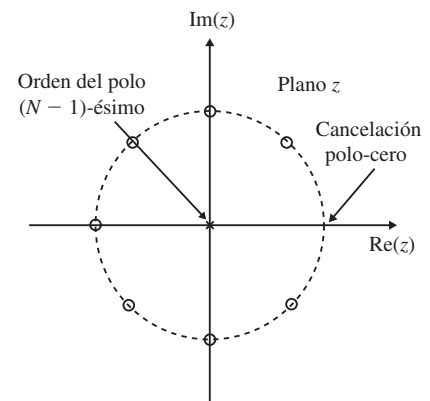


Figura 4-4 Gráfica de polos y ceros con $N = 8$.

4.5. Demuestre que si $x[n]$ es una secuencia por la derecha y $X(z)$ converge para algún valor de z , entonces la ROC de $X(z)$ es de la forma

$$|z| > r_{\text{máx}} \quad \text{o} \quad \infty > |z| > r_{\text{máx}}$$

donde $r_{\text{máx}}$ es la magnitud máxima de alguno de los polo de $X(z)$.

Considere una secuencia por la derecha $x[n]$ de forma que

$$x[n] = 0 \quad n < N_1$$

y $X(z)$ converge para $|z| = r_0$. Entonces de la ecuación (4.3)

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty$$

Ahora, si $r_1 > r_0$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_1^{-n} &= \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| \left(r_0 \frac{r_1}{r_0} \right)^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{-n} \\ &\leq \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{-N_1} \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty \end{aligned}$$

puesto que $(r_1/r_0)^{-n}$ es una secuencia decreciente. De esta forma, $X(z)$ converge para $r = r_1$ y la ROC de $X(z)$ es de la forma

$$|z| > r_0$$

Puesto que la ROC de $X(z)$ no puede contener los polos de $X(z)$, concluimos que la ROC de $X(z)$ es de la forma

$$|z| > r_{\text{máx}}$$

donde $r_{\text{máx}}$ es la mayor magnitud de alguno de los polo de $X(z)$.

Si $N_1 < 0$, entonces

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[N_1] z^{-N_1} + \dots + x[-1] z + \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Es decir, $X(z)$ contiene las potencias positivas de z y se vuelve no acotada en $z = \infty$. En este caso la ROC es de la forma de

$$\infty > |z| > r_{\text{máx}}$$

Del resultado anterior podemos decir que una secuencia $x[n]$ es causal (no sólo por la derecha) a partir de la ROC de $X(z)$ si se incluye $z = \infty$. Observe que éste no es el caso para la transformada de Laplace.

4.6. Encuentre la transformada z $X(z)$ y dibuje la gráfica de polos ceros con la ROC para cada una de las siguientes secuencias:

a) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

c) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$

a) De la tabla 4-1

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad |z| > \frac{1}{2} \tag{4.58}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \quad |z| > \frac{1}{3} \tag{4.59}$$

Observamos que las ROC en las ecuaciones (4.58) y (4.59) se traslapan, y así

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z}{z - \frac{1}{3}} = \frac{2z \left(z - \frac{5}{12} \right)}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{3} \right)} \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (4.60)$$

De la ecuación (4.60) observamos que $X(z)$ tiene dos ceros en $z = 0$ y $z = 5/12$, dos polos en $z = 1/2$ y $z = 1/3$ y que la ROC es $|z| > 1/2$ como se esquematiza en la figura 4-5a).

b) De la tabla 4-1

$$\left(\frac{1}{3} \right)^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (4.61)$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^n u[-n-1] \leftrightarrow -\frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad |z| < \frac{1}{2} \quad (4.62)$$

Observamos que las ROC en las ecuaciones (4.61) y (4.62) se traslapan, por tanto,

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{6} \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{3} \right)} \quad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2} \quad (4.63)$$

De la ecuación (4.63) vemos que $X(z)$ tiene un cero en $z = 0$ y dos polos en $z = 1/2$ y $z = 1/3$ y que la ROC es $1/3 < |z| < 1/2$ como se esquematiza en la figura 4-5b).

c) De la tabla 4-1

$$\left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (4.64)$$

$$\left(\frac{1}{3} \right)^n u[-n-1] \leftrightarrow -\frac{z}{z - \frac{1}{3}} \quad |z| < \frac{1}{3} \quad (4.65)$$

Observamos que las ROC en las ecuaciones (4.64) y (4.65) no se traslapan y no hay una ROC en común, de esta forma $x[n]$ no tendrá $X(z)$.

4.7. Sea $x[n] = a^{|n|}$ $a > 0$ (4.66)

a) Dibuje $x[n]$ para $a < 1$ y $a > 1$.

b) Encuentre $X(z)$ y dibuje la gráfica de polos ceros y la ROC para $a < 1$ y $a > 1$.

a) La secuencia $x[n]$ se dibuja en la figura 4-6a) y b) tanto para $a < 1$ como para $a > 1$.

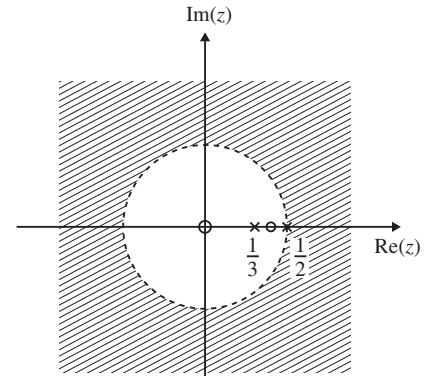
b) Puesto que $x[n]$ es una secuencia de dos lados, podemos expresarla como

$$x[n] = a^n u[n] + a^{-n} u[-n-1] \quad (4.67)$$

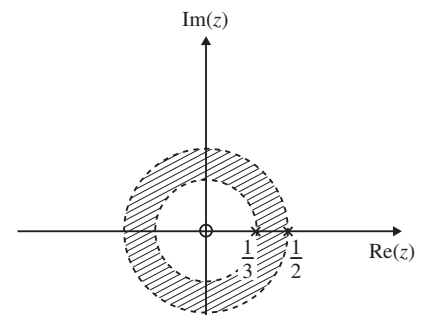
De la tabla 4-1

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z - a} \quad |z| > a \quad (4.68)$$

$$a^{-n} u[-n-1] \leftrightarrow -\frac{z}{z - 1/a} \quad |z| < \frac{1}{a} \quad (4.69)$$

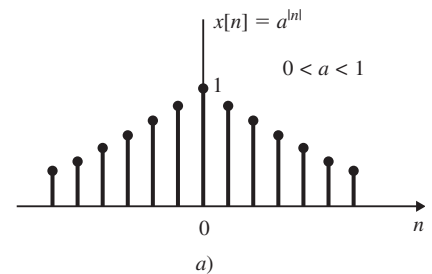


a)

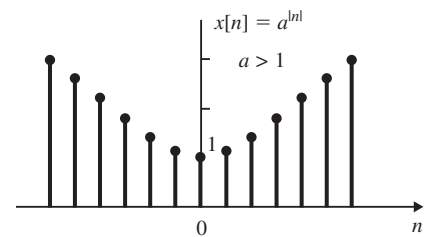


b)

Figura 4-5



a)



b)

Figura 4-6

Si $a < 1$ vemos que las ROC en las ecuaciones (4.68) y (4.69) se traslapan, de esta manera,

$$X(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-1/a} = \frac{a^2 - 1}{a} \frac{z}{(z-a)(z-1/a)} \quad a < |z| < \frac{1}{a} \tag{4.70}$$

De la ecuación (4.70) observamos que $X(z)$ tiene un cero en el origen y dos polos en $z = a$ y $z = 1/a$ y que la ROC es $a < |z| < 1/a$, como se esquematiza en la figura 4-7. Si $a > 1$, vemos que las ROC en las ecuaciones (4.68) y (4.69) no se traslapan y que no existe una ROC en común, de modo que $x[n]$ no tendrá $X(z)$.

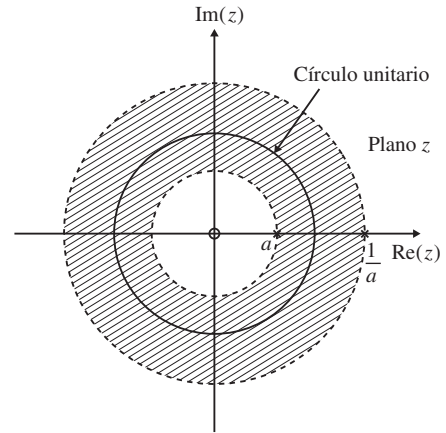


Figura 4-7

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

4.8. Verifique la propiedad de desplazamiento en el tiempo (4.18); es decir,

$$x[n - n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} X(z) \quad R' \supset R \cap \{0 < |z| < \infty\}$$

Por la definición (4.3)
$$\mathfrak{Z}\{x[n - n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] z^{-n}$$

Por el cambio de variables $m = n - n_0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}\{x[n - n_0]\} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-(m+n_0)} \\ &= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} = z^{-n_0} X(z) \end{aligned}$$

Debido a la multiplicación por z^{-n_0} , para $n_0 > 0$, se introducen polos adicionales en $z = 0$ que se eliminarán en $z = \infty$. De manera semejante, si $n_0 < 0$, se introducen ceros adicionales en $z = 0$ y se eliminarán en $z = \infty$. Por tanto, los puntos $z = 0$ y $z = \infty$ pueden agregarse o eliminarse de la ROC por el desplazamiento en el tiempo. De este modo, tenemos que

$$x[n - n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} X(z) \quad R' \supset R \cap \{0 < |z| < \infty\}$$

donde R y R' son las ROC antes y después de la operación de desplazamiento en el tiempo.

4.9. Verifique la ecuación (4.21); esto es,

$$z_0^n x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad R' = |z_0| R$$

Por la definición (4.3)

$$\mathfrak{Z}\{z_0^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z_0^n x[n]) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

Un polo (o cero) en $z = z_k$ en $X(z)$ se desplaza a $z = z_0 z_k$ y la ROC se expande o contrae por el factor $|z_0|$. De esta manera, tenemos que

$$z_0^n x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad R' = |z_0| R$$

4.10. Encuentre la transformada z y la ROC asociada para cada una de las siguientes secuencias:

- a) $x[n] = \delta[n - n_0]$
- b) $x[n] = u[n - n_0]$
- c) $x[n] = a^{n+1} u[n + 1]$
- d) $x[n] = u[-n]$
- e) $x[n] = a^{-n} u[-n]$

a) De la ecuación (4.15)
$$\delta[n] \leftrightarrow 1 \quad \text{para toda } z$$

Al aplicar la propiedad de desplazamiento en el tiempo (4.18) obtenemos

$$0 < |z|, n_0 > 0$$

$$\delta[n - n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} \quad (4.71)$$

$$|z| < \infty, n_0 < 0$$

b) De la ecuación (4.16) $u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$

Nuevamente, por la propiedad de desplazamiento en el tiempo (4.18), obtenemos

$$u[n - n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} \frac{z}{z-1} = \frac{z^{-(n_0-1)}}{z-1} \quad 1 < |z| < \infty \quad (4.72)$$

c) De las ecuaciones (4.8) y (4.10) $a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a|$

Por la ecuación (4.20) obtenemos

$$a^{n+1} u[n+1] \leftrightarrow z \frac{z}{z-a} = \frac{z^2}{z-a} \quad |a| < |z| < \infty \quad (4.73)$$

d) De la ecuación (4.16) $u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$

Por la propiedad de inversión del tiempo (4.23), obtenemos

$$u[-n] \leftrightarrow \frac{1/z}{1/z-1} = \frac{1}{1-z} \quad |z| < 1 \quad (4.74)$$

e) De las ecuaciones (4.8) y (4.10) $a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a|$

De nueva cuenta, por la propiedad de inversión del tiempo (4.23), obtenemos que

$$a^{-n} u[-n] \leftrightarrow \frac{1/z}{1/z-a} = \frac{1}{1-az} \quad |z| < \frac{1}{|a|} \quad (4.75)$$

4.11. Verifique la propiedad de multiplicación por n (o diferenciación en z) (4.24); es decir,

$$nx[n] \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} \quad R' = R$$

De la definición (4.3) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$

Si diferenciamos ambos lados con respecto a z tenemos que

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -nx[n]z^{-n-1}$$

y $-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{nx[n]\} z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx[n]\}$

De esta manera, concluimos que $nx[n] \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} \quad R' = R$

4.12. Encuentre la transformada z de cada una de las siguientes secuencias:

a) $x[n] = na^n u[n]$

b) $x[n] = na^{n-1} u[n]$

a) De las ecuaciones (4.8) y (4.10) $a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a| \quad (4.76)$

Por medio de la propiedad de multiplicación por n (4.24), obtenemos

$$na^n u[n] \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-a} \right) = \frac{az}{(z-a)^2} \quad |z| > |a| \quad (4.77)$$

b) Al diferenciar la ecuación (4.76) con respecto a a tenemos que

$$na^{n-1} u[n] \leftrightarrow \frac{d}{da} \left(\frac{z}{z-a} \right) = \frac{z}{(z-a)^2} \quad |z| > |a| \quad (4.78)$$

Advierta que al dividir ambos lados de la ecuación (4.77) entre a obtenemos la ecuación (4.78).

4.13. Verifique la propiedad de convolución (4.26); esto es,

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) X_2(z) \quad R' \supset R_1 \cap R_2$$

Por la definición (2.35)
$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k]$$

De este modo, por la definición (4.3)

$$Y[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k] \right) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k] z^{-n} \right)$$

Si observamos que el término entre paréntesis en la última expresión es la transformada z de la señal desplazada $x_2[n-k]$, entonces por la propiedad de desplazamiento en el tiempo (4.18) tenemos que

$$Y[z] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left[z^{-k} X_2(z) \right] = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[k] z^{-k} \right) X_2(z) = X_1(z) X_2(z)$$

con una ROC que contiene la intersección de la ROC de $X_1(z)$ y $X_2(z)$. Si un cero de una transformada cancela a un polo de la otra, la ROC de $Y(z)$ puede ser mayor. De este modo, concluimos que

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) X_2(z) \quad R' \supset R_1 \cap R_2$$

4.14. Verifique la propiedad de acumulación (4.25); esto es,

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) = \frac{z}{z-1} X(z) \quad R' \supset R \cap \{|z| > 1\}$$

De la ecuación (2.40) tenemos que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] * u[n]$$

De este modo, mediante la ecuación (4.16) y la propiedad de convolución (4.26), obtenemos

$$Y(z) = X(z) \left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right) = X(z) \left(\frac{z}{z-1} \right)$$

con la ROC que incluye la intersección de la ROC de $X(z)$ y la ROC de la transformada z de $u[n]$. De esta manera,

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) = \frac{z}{z-1} X(z) \quad R' \supset R \cap \{|z| > 1\}$$

TRANSFORMADA Z INVERSA

4.15. Encuentre la transformada z inversa de

$$X(z) = z^2 \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1} \right) (1 - z^{-1}) (1 + 2z^{-1}) \quad 0 < |z| < \infty \quad (4.79)$$

Si multiplicamos los factores de la ecuación (4.79) podemos expresar $X(z)$ como

$$X(z) = z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{5}{2} + z^{-1}$$

Entonces, por la definición (4.3),

$$X(z) = x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1}$$

y obtenemos

$$X[n] = \left\{ \dots, 0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 1, 0, \dots \right\}$$

↑

4.16. A través de la técnica de la expansión en serie de potencias encuentre la transformada z inversa de las siguientes $X(z)$:

a) $X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$

b) $X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|$

a) Puesto que la ROC es $|z| > |a|$, es decir, el exterior de un círculo, $x[n]$ es una secuencia por la derecha. De este modo debemos dividir para poder obtener una serie en la potencia de z^{-1} . Al llevar a cabo la división larga obtenemos

$$\begin{array}{r} 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \\ 1 - az^{-1} \overline{) 1} \\ \underline{1 - az^{-1}} \\ az^{-1} - a^2z^{-2} \\ \underline{az^{-1} - a^2z^{-2}} \\ \phantom{az^{-1}} a^2z^{-2} \\ \phantom{az^{-1}} \phantom{a^2z^{-2}} \vdots \end{array}$$

Entonces
$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots + a^kz^{-k} + \dots$$

entonces, por la definición (4.3) tenemos que

$$\begin{array}{llllll} x[n] = 0 & n < 0 & & & & \\ x[0] = 1 & x[1] = a & x[2] = a^2 & \dots & x[k] = a^k & \dots \end{array}$$

De este modo obtenemos

$$x[n] = a^n u[n]$$

b) Puesto que la ROC es $|z| < |a|$, es decir, el interior de un círculo, $x[n]$ es una secuencia por la izquierda. Así, debemos dividir de manera que se pueda obtener una serie en la potencia de z , como se explica a continuación. Al multiplicar tanto el numerador como el denominador de $X(z)$ por z tenemos que

$$X(z) = \frac{z}{z - a}$$

y al hacer la división larga obtenemos

$$\begin{array}{r} -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - \dots \\ -a + z \overline{) z} \\ \underline{z - a^{-1}z^2} \\ a^{-1}z^2 \\ \phantom{a^{-1}z^2} \vdots \end{array}$$

De esta forma,
$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - \dots - a^{-k}z^k - \dots$$

entonces, por la definición (4.3) tenemos que

$$x[n] = 0 \quad n \geq 0$$

$$x[-1] = -a^{-1} \quad x[-2] = -a^{-2} \quad x[-3] = -a^{-3} \quad \dots \quad x[-k] = -a^{-k} \quad \dots$$

De esta manera obtenemos $x[n] = -a^n u[-n - 1]$

4.17. Encuentre la transformada z inversa de las siguientes $X(z)$:

a) $X(z) = \log\left(\frac{1}{1 - az^{-1}}\right), |z| > |a|$

b) $X(z) = \log\left(\frac{1}{1 - a^{-1}z}\right), |z| < |a|$

a) La expansión en serie de potencias para $\log(1 - r)$ está dada por

$$\log(1 - r) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r^n \quad |r| < 1 \tag{4.80}$$

Ahora $X(z) = \log\left(\frac{1}{1 - az^{-1}}\right) = -\log(1 - az^{-1}) \quad |z| > |a|$

Puesto que la ROC es $|z| > |a|$, es decir, $|az^{-1}| < 1$, por la ecuación (4.80), $X(z)$ tiene la expansión en serie de potencias

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (az^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a^n z^{-n}$$

de la cual podemos identificar $x[n]$ como

$$x[n] = \begin{cases} (1/n)a^n & n \geq 1 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases}$$

o $x[n] = \frac{1}{n} a^n u[n - 1] \tag{4.81}$

b) $X(z) = \log\left(\frac{1}{1 - a^{-1}z}\right) = -\log(1 - a^{-1}z) \quad |z| < |a|$

Puesto que la ROC es $|z| < |a|$, es decir, $|a^{-1}z| < 1$, por la ecuación (4.80), $X(z)$ tiene la expansión en serie de potencias

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a^{-1}z)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} -\frac{1}{n} (a^{-1}z)^{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} -\frac{1}{n} a^n z^{-n}$$

de lo que podemos identificar $x[n]$ como

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -(1/n)a^n & n \leq -1 \end{cases}$$

o $x[n] = -\frac{1}{n} a^n u[-n - 1] \tag{4.82}$

4.18. Mediante la técnica de la expansión en serie de potencias encuentre la transformada z inversa de las siguientes $X(z)$:

a) $X(z) = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1} \quad |z| < \frac{1}{2}$

b) $X(z) = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1} \quad |z| > 1$

- a) Puesto que la ROC es $|z| < 1/2$, $x[n]$ es una secuencia por la izquierda. De esta manera, debemos dividir para poder obtener una serie en la potencia de z . Llevando a cabo la división larga, obtenemos

$$\begin{array}{r} z + 3z^2 + 7z^3 + 15z^4 + \dots \\ 1 - 3z + 2z^2 \overline{)z} \\ \underline{z - 3z^2 + 2z^3} \\ 3z^2 - 9z^3 + 6z^4 \\ \underline{3z^2 - 9z^3 + 6z^4} \\ 7z^3 - 21z^4 + 14z^5 \\ \underline{7z^3 - 21z^4 + 14z^5} \\ 15z^4 \dots \end{array}$$

De este modo,

$$X(z) = \dots + 15z^4 + 7z^3 + 3z^2 + z$$

entonces, por la definición (4.3) obtenemos

$$x[n] = \{\dots, 15, 7, 3, 1, 0\}$$

↑

- b) Puesto que la ROC es $|z| > 1$, $x[n]$ es una secuencia por la derecha. De este modo, debemos dividir para poder obtener una serie en la potencia de z^{-1} de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} + \frac{7}{8}z^{-3} + \dots \\ 2z^2 - 3z + 1 \overline{)z} \\ \underline{z - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z^{-1}} \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} \\ \underline{\frac{3}{2} - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2}} \\ \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2} \\ \vdots \end{array}$$

De esta forma,

$$X(z) = \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} + \frac{7}{8}z^{-3} + \dots$$

y así, por la definición (4.3) obtenemos

$$x[n] = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots\right\}$$

4.19. Mediante la expansión en fracciones parciales, vuelva a realizar el problema 4.18.

a)
$$X(z) = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{z}{2(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)} \quad |z| < \frac{1}{2}$$

Empleando la expansión en fracciones parciales, tenemos que

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{1}{2(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z - \frac{1}{2}}$$

donde

$$c_1 = \frac{1}{2\left(z - \frac{1}{2}\right)} \Bigg|_{z=1} = 1 \quad c_2 = \frac{1}{2(z-1)} \Bigg|_{z=1/2} = -1$$

y obtenemos
$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \quad |z| < \frac{1}{2}$$

Puesto que la ROC de $X(z)$ es $|z| < 1/2$, $x[n]$ es una secuencia por la izquierda, y de la tabla 4-1 obtenemos

$$x[n] = -u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right] u[-n-1]$$

lo que da
$$x[n] = \{\dots, 15, 7, 3, 1, 0\}$$

$$\uparrow$$

b)
$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \quad |z| > 1$$

Puesto que la ROC es $|z| > 1$, $x[n]$ es una secuencia por la derecha, y de la tabla 4-1 obtenemos

$$x[n] = u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n]$$

lo que nos da
$$x[n] = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots\right\}$$

4.20. Encuentre la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z}{z(z-1)(z-2)^2} \quad |z| > 2$$

A través de la expansión en fracciones parciales, tenemos que

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{\lambda_1}{z-2} + \frac{\lambda_2}{(z-2)^2} \tag{4.83}$$

donde
$$c_1 = \frac{1}{(z-2)^2} \Big|_{z=1} = 1 \quad \lambda_2 = \frac{1}{z-1} \Big|_{z=2} = 1$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (4.83) tenemos que

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{\lambda_1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}$$

Estableciendo $z = 0$ en la expresión anterior, tenemos que

$$-\frac{1}{4} = -1 - \frac{\lambda_1}{2} + \frac{1}{4} \rightarrow \lambda_1 = -1$$

Así,
$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-2} + \frac{z}{(z-2)^2} \quad |z| > 2$$

Puesto que la ROC es $|z| > 2$, $x[n]$ es una secuencia por la derecha, y de la tabla 4-1 obtenemos

$$x[n] = (1 - 2^n + n2^{n-1})u[n]$$

4.21. Encuentre la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{2z^3 - 5z^2 + z + 3}{(z-1)(z-2)} \quad |z| < 1$$

$$X(z) = \frac{2z^3 - 5z^2 + z + 3}{(z-1)(z-2)} = \frac{2z^3 - 5z^2 + z + 3}{z^2 - 3z + 2}$$

Observe que $X(z)$ es una función racional impropia; de este modo, por medio de la división larga, tenemos que

$$X(z) = 2z + 1 + \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = 2z + 1 + \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

Sea

$$X_1(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

Entonces

$$\frac{X_1(z)}{z} = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{z-2}$$

donde

$$c_1 = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \quad c_2 = \frac{1}{z(z-2)} \Big|_{z=1} = -1$$

$$c_3 = \frac{1}{z(z-1)} \Big|_{z=2} = \frac{1}{2}$$

De esta forma,

$$X_1(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-2}$$

y

$$X(z) = 2z + \frac{3}{2} - \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-2} \quad |z| < 1$$

Puesto que la ROC de $X(z)$ es $|z| < 1$, $x[n]$ es una secuencia por la izquierda, y de la tabla 4-1 obtenemos

$$\begin{aligned} x[n] &= 2\delta[n+1] + \frac{3}{2}\delta[n] + u[-n-1] - \frac{1}{2}2^n u[-n-1] \\ &= 2\delta[n+1] + \frac{3}{2}\delta[n] + (1-2^{n-1})u[-n-1] \end{aligned}$$

4.22. Encuentre la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{3}{z-2} \quad |z| > 2$$

$X(z)$ puede volver a escribirse como

$$X(z) = \frac{3}{z-2} = 3z^{-1} \left(\frac{z}{z-2} \right) \quad |z| > 2$$

Puesto que la ROC es $|z| > 2$, $x[n]$ es una secuencia por la derecha, y de la tabla 4-1 obtenemos

$$2^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-2}$$

Mediante la propiedad de desplazamiento en el tiempo (4.18), tenemos que

$$2^{n-1} u[n-1] \leftrightarrow z^{-1} \left(\frac{z}{z-2} \right) = \frac{1}{z-2}$$

De este modo, concluimos que

$$x[n] = 3(2)^{n-1} u[n-1]$$

4.23. Encuentre la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{2 + z^{-2} + 3z^{-4}}{z^2 + 4z + 3} \quad |z| > 0$$

Observamos que $X(z)$ puede escribirse como

$$X(z) = (2z^{-1} + z^{-3} + 3z^{-5}) X_1(z)$$

donde

$$X_1(z) = \frac{z}{z^2 + 4z + 3}$$

De esta forma, si

$$x_1[n] \leftrightarrow X_1(z)$$

entonces, por la propiedad de linealidad (4.17) y la propiedad de desplazamiento en el tiempo (4.18), obtenemos

$$x[n] = 2x_1[n-1] + x_1[n-3] + 3x_1[n-5] \quad (4.84)$$

Ahora
$$X_1(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 3} = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{c_1}{z+1} + \frac{c_2}{z+3}$$

Donde
$$c_1 = \frac{1}{z+3} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{2} \quad c_2 = \frac{1}{z+1} \Big|_{z=-3} = -\frac{1}{2}$$

Entonces
$$X_1(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z+1} - \frac{1}{2} \frac{z}{z+3} \quad |z| > 0$$

Puesto que la ROC de $X_1(z)$ es $|z| > 0$, $x_1[n]$ es una secuencia por la derecha, y de la tabla 4-1, obtenemos

$$x_1[n] = \frac{1}{2} [(-1)^n - (-3)^n] u[n]$$

Así, de la ecuación (4.84) obtenemos

$$\begin{aligned} x[n] &= [(-1)^{n-1} - (-3)^{n-1}] u[n-1] + \frac{1}{2} [(-1)^{n-3} - (-3)^{n-3}] u[n-3] \\ &\quad + \frac{3}{2} [(-1)^{n-5} - (-3)^{n-5}] u[n-5] \end{aligned}$$

4.24. Encuentre la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})^2} \quad |z| > |a|$$

$$X(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})^2} = \frac{z^2}{(z - a)^2} \quad |z| > |a| \quad (4.85)$$

De la ecuación (4.78) (problema 4.12)

$$na^{n-1}u[n] \leftrightarrow \frac{z}{(z - a)^2} \quad |z| > |a| \quad (4.86)$$

Ahora, de la ecuación (4.85)
$$X(z) = z \left[\frac{z}{(z - a)^2} \right] \quad |z| > |a|$$

y aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo (4.20) a la ecuación (4.86), obtenemos que

$$x[n] = (n + 1) a^n u[n + 1] = (n + 1) a^n u[n] \quad (4.87)$$

puesto que $x[-1] = 0$ para $n = -1$.

FUNCIÓN DEL SISTEMA

4.25. Por medio de la transformada z , vuelva a realizar el problema 2.28.

Del problema 2.28, $x[n]$ y $h[n]$ están dadas por

$$x[n] = u[n] \quad h[n] = \alpha^n u[n] \quad 0 < \alpha < 1$$

De la tabla 4-1
$$x[n] = u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z - 1} \quad |z| > 1|$$

$$h[n] = \alpha^n u[n] \leftrightarrow H(z) = \frac{z}{z - \alpha} \quad |z| > |\alpha|$$

Entonces, por la ecuación (4.40)

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^2}{(z - 1)(z - \alpha)} \quad |z| > 1$$

A través de la expansión en fracciones parciales, tenemos que

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-\alpha)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-\alpha}$$

donde

$$c_1 = \frac{z}{z-\alpha} \Big|_{z=1} = \frac{1}{1-\alpha} \quad c_2 = \frac{z}{z-1} \Big|_{z=\alpha} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

De este modo,

$$Y(z) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{z}{z-1} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{z}{z-\alpha} \quad |z| > 1$$

Al tomar la transformada z inversa de $Y(z)$, obtenemos que

$$y[n] = \frac{1}{1-\alpha} u[n] - \frac{\alpha}{1-\alpha} \alpha^n u[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \right) u[n]$$

lo cual es igual a la ecuación (2.134).

4.26. Mediante la transformada z inversa, vuelva a hacer el problema 2.29.

a) Del problema 2.29a), $x[n]$ y $h[n]$ están dadas por

$$x[n] = \alpha^n u[n] \quad h[n] = \beta^n u[n]$$

De la tabla 4-1 $x[n] = \alpha^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-\alpha} \quad |z| > |\alpha|$

$$h[n] = \beta^n u[n] \leftrightarrow H(z) = \frac{z}{z-\beta} \quad |z| > |\beta|$$

Entonces $Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)} \quad |z| > \max(\alpha, \beta)$

Por medio de la expansión en fracciones parciales, tenemos que

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{c_1}{z-\alpha} + \frac{c_2}{z-\beta}$$

donde $c_1 = \frac{z}{z-\beta} \Big|_{z=\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \quad c_2 = \frac{z}{z-\alpha} \Big|_{z=\beta} = -\frac{\beta}{\alpha-\beta}$

De este modo, $Y(z) = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \frac{z}{z-\alpha} - \frac{\beta}{\alpha-\beta} \frac{z}{z-\beta} \quad |z| > \max(\alpha, \beta)$

y $y[n] = \left[\frac{\alpha}{\alpha-\beta} \alpha^n - \frac{\beta}{\alpha-\beta} \beta^n \right] u[n] = \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \right) u[n]$

lo cual es lo mismo que la ecuación (2.135). Cuando $\alpha = \beta$,

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-\alpha)^2} \quad |z| > \alpha$$

Al usar la expansión en fracciones parciales tenemos que

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-\alpha)^2} = \frac{\lambda_1}{z-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(z-\alpha)^2}$$

donde

$$\lambda_2 = z \Big|_{z=\alpha} = \alpha$$

y

$$\frac{z}{(z-\alpha)^2} = \frac{\lambda_1}{z-\alpha} + \frac{\alpha}{(z-\alpha)^2}$$

Si establecemos $z = 0$ en la expresión anterior, tenemos que

$$0 = -\frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \rightarrow \lambda_1 = 1$$

Así,

$$Y(z) = \frac{z}{z-\alpha} + \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2} \quad |z| > \alpha$$

y de la tabla 4-1 obtenemos

$$y[n] = (\alpha^n + n\alpha^n) u[n] = \alpha^n (1 + n)u[n]$$

De esta forma obtenemos el mismo resultado que la ecuación (2.135).

b) Del problema 2.29b), $x[n]$ y $h[n]$ están dadas por

$$x[n] = \alpha^n u[n] \quad h[n] = \alpha^{-n} u[-n] \quad 0 < \alpha < 1$$

De la tabla 4-1 y la ecuación (4.75)

$$x[n] = \alpha^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z - \alpha} \quad |z| > |\alpha|$$

$$h[n] = \alpha^{-n} u[-n] \leftrightarrow H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z} = -\frac{1}{\alpha(z - 1/\alpha)} \quad |z| < \frac{1}{|\alpha|}$$

Entonces
$$Y(z) = X(z)H(z) = -\frac{1}{\alpha} \frac{z}{(z - \alpha)(z - 1/\alpha)} \quad \alpha < |z| < \frac{1}{\alpha}$$

Al utilizar la expansión en fracciones parciales tenemos que

$$\frac{Y(z)}{z} = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{(z - \alpha)(z - 1/\alpha)} = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{c_1}{z - \alpha} + \frac{c_2}{z - 1/\alpha} \right)$$

donde
$$c_1 = \frac{1}{z - 1/\alpha} \Big|_{z=\alpha} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha^2} \quad c_2 = \frac{1}{z - \alpha} \Big|_{z=1/\alpha} = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}$$

De este modo,
$$Y(z) = \frac{1}{1 - \alpha^2} \frac{z}{z - \alpha} - \frac{1}{1 - \alpha^2} \frac{z}{z - 1/\alpha} \quad \alpha < |z| < \frac{1}{\alpha}$$

y de la tabla 4-1 obtenemos

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{1 - \alpha^2} \alpha^n u[n] - \frac{1}{1 - \alpha^2} \left\{ -\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n u[-n - 1] \right\} \\ &= \frac{1}{1 - \alpha^2} \alpha^n u[n] + \frac{1}{1 - \alpha^2} \alpha^{-n} u[-n - 1] = \frac{1}{1 - \alpha^2} \alpha^{|n|} \end{aligned}$$

y esto es igual a la ecuación (2.137).

4.27. A través de la transformada z , vuelva a hacer el problema 2.30.

De la figura 2-23 y la definición (4.3)

$$\begin{aligned} x[n] &= \{1, 1, 1, 1\} \leftrightarrow X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \\ h[n] &= \{1, 1, 1\} \leftrightarrow H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} \end{aligned}$$

De esta forma, por la propiedad de convolución (4.26)

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)H(z) = (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})(1 + z^{-1} + z^{-2}) \\ &= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5} \end{aligned}$$

Por tanto,
$$h[n] = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$$

que es el mismo resultado obtenido en el problema 2.30.

4.28. Con la transformada z vuelva a hacer el problema 2.32.

Sean $x[n]$ y $h[n]$ la entrada y la salida del sistema. Entonces

$$\begin{aligned} x[n] &= u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z - 1} \quad |z| > 1 \\ y[n] &= \alpha^n u[n] \leftrightarrow Y(z) = \frac{z}{z - \alpha} \quad |z| > |\alpha| \end{aligned}$$

Entonces, por la ecuación (4.41)
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-1}{z-\alpha} \quad |z| > \alpha$$

Mediante la expansión en fracciones parciales tenemos que

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z-1}{z(z-\alpha)} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-\alpha}$$

donde
$$c_1 = \left. \frac{z-1}{z-\alpha} \right|_{z=0} = \frac{1}{\alpha} \quad c_2 = \left. \frac{z-1}{z} \right|_{z=\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

De este modo,
$$H(z) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{z}{z-\alpha} \quad |z| > \alpha$$

Al tomar la transformada z inversa de $H(z)$ obtenemos

$$h[n] = \frac{1}{\alpha} \delta[n] - \frac{1-\alpha}{\alpha} \alpha^n u[n]$$

Cuando $n = 0$,
$$h[0] = \frac{1}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha} = 1$$

Entonces
$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -(1-\alpha)\alpha^{n-1} & n \geq 1 \end{cases}$$

Así, $h[n]$ puede volver a escribirse como

$$h[n] = \delta[n] - (1-\alpha)\alpha^{n-1}u[n-1]$$

y éste es el mismo resultado que el obtenido en el problema 2.32.

4.29. Se determina que la salida $y[n]$ de un sistema LIT de tiempo discreto es la expresión $2(1/3)^n u[n]$ cuando la entrada $x[n]$ es $u[n]$.

- a) Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.
 b) Encuentre la salida $y[n]$ cuando la entrada $x[n]$ es igual a $(1/2)^n u[n]$.

a)
$$x[n] = u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$$

$$y[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \leftrightarrow Y(z) = \frac{2z}{z-\frac{1}{3}} \quad |z| > \frac{1}{3}$$

Por tanto, la función del sistema $H(z)$ es

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(z-1)}{z-\frac{1}{3}} \quad |z| > \frac{1}{3}$$

Con el uso de la expansión en fracciones parciales tenemos que

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{2(z-1)}{z\left(z-\frac{1}{3}\right)} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-\frac{1}{3}}$$

donde
$$c_1 = \left. \frac{2(z-1)}{z-\frac{1}{3}} \right|_{z=0} = 6 \quad c_2 = \left. \frac{2(z-1)}{z} \right|_{z=1/3} = -4$$

Así,
$$H[z] = 6 - 4 \frac{z}{z-\frac{1}{3}} \quad |z| > \frac{1}{3}$$

Tomando la transformada z inversa de $H(z)$, obtenemos

$$h[n] = 6\delta[n] - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$

Entonces $Y(z) = X(z)H(z) = \frac{2z(z-1)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \quad |z| > \frac{1}{2}$

Nuevamente, por la expansión en fracciones parciales, tenemos que

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2(z-1)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} = \frac{c_1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{c_2}{z - \frac{1}{3}}$$

donde $c_1 = \left. \frac{2(z-1)}{z - \frac{1}{3}} \right|_{z=1/2} = -6$ $c_2 = \left. \frac{2(z-1)}{z - \frac{1}{2}} \right|_{z=1/3} = 8$

De esta forma, $Y(z) = -6 \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + 8 \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \quad |z| > \frac{1}{2}$

Tomando la transformada z inversa de $Y(z)$, obtenemos

$$y[n] = \left[-6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 8\left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n]$$

4.30. Si un sistema LIT de tiempo discreto es estable en el sentido BIBO, demuestre que la ROC de su función del sistema $H(z)$ debe contener el círculo unitario; es decir, $|z| = 1$.

Un sistema LIT de tiempo discreto es estable BIBO en el sentido si y sólo si su respuesta al impulso $h[n]$ es absolutamente sumable, esto es [ecuación (2.49)]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Ahora $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$

Sea $z = e^{j\Omega}$ de manera que $|z| = |e^{j\Omega}| = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} |H(e^{j\Omega})| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \end{aligned}$$

Por consiguiente, vemos que si el sistema es estable, entonces $H(z)$ converge para $z = e^{j\Omega}$. Es decir, para un sistema LIT de tiempo discreto estable, la ROC de $H(z)$ debe contener al círculo unitario $|z| = 1$.

4.31. A través de la transformada z , vuelva a realizar el problema 2.38.

a) Del problema 2.38, la respuesta al impulso del sistema es

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

Entonces $H(z) = \frac{z}{z - \alpha} \quad |z| > |\alpha|$

Puesto que la ROC de $H(z)$ es $|z| > |\alpha|$, $z = \infty$ está incluido. De este modo, por el resultado del problema 4.5 concluimos que $h[n]$ es una secuencia causal. De esta forma el sistema es causal.

- b) Si $|\alpha| > 1$, la ROC de $H(z)$ no contiene el círculo unitario $|z| = 1$, por tanto el sistema no será estable.
Si $|\alpha| < 1$, la ROC de $H(z)$ contiene el círculo unitario $|z| = 1$, por tanto, el sistema será estable.

4.32. Un sistema LIT causal de tiempo discreto se describe mediante

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] \quad (4.88)$$

donde $x[n]$ y $y[n]$ son la entrada y la salida, respectivamente.

- a) Determine la función del sistema $H(z)$.
b) Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.
c) Encuentre la respuesta al escalón $s[n]$ del sistema.
a) Al tomar la transformada z de la ecuación (4.88) obtenemos

$$Y(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$o \quad \left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}\right)Y(z) = X(z)$$

$$\begin{aligned} \text{De este modo,} \quad H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} \\ &= \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \quad |z| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Con el uso de la expansión en fracciones parciales, tenemos que

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} = \frac{c_1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{c_2}{z - \frac{1}{4}}$$

$$\text{donde} \quad c_1 = \left. \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \right|_{z=1/2} = 2 \quad c_2 = \left. \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \right|_{z=1/4} = -1$$

$$\text{Así,} \quad H(z) = 2 \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Al tomar la transformada z inversa de $H(z)$ obtenemos que

$$h[n] = \left[2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u[n]$$

$$c) \quad x[n] = u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$$

$$\text{Entonces} \quad Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^3}{(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \quad |z| > 1$$

De nueva cuenta, al usar la expansión en fracciones parciales tenemos que

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-\frac{1}{2}} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{4}}$$

donde

$$c_1 = \left. \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \right|_{z=1} = \frac{8}{3} \quad c_2 = \left. \frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \right|_{z=1/2} = -2$$

$$c_3 = \left. \frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \right|_{z=1/4} = \frac{1}{3}$$

De esta manera,

$$Y(z) = \frac{8}{3} \frac{z}{z-1} - 2 \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \frac{z}{z-\frac{1}{4}} \quad |z| > 1$$

Al tomar la transformada z inversa de $Y(z)$ obtenemos

$$y[n] = s[n] = \left[\frac{8}{3} - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] u[n]$$

4.33. Mediante la transformada z inversa, vuelva a hacer el problema 2.41.

Como en el problema 2.41, de la figura 2-30 observamos que

$$q[n] = 2q[n-1] + x[n]$$

$$y[n] = q[n] + 3q[n-1]$$

Al tomar la transformada z de las ecuaciones anteriores obtenemos

$$Q(z) = 2z^{-1}Q(z) + X(z)$$

$$Y(z) = Q(z) + 3z^{-1}Q(z)$$

Al reacomodar obtenemos

$$(1 - 2z^{-1})Q(z) = X(z)$$

$$(1 + 3z^{-1})Q(z) = Y(z)$$

de lo que se obtiene

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} \tag{4.89}$$

Al reescribir la ecuación (4.89) tenemos que

$$(1 - 2z^{-1})Y(z) = (1 + 3z^{-1})X(z)$$

o

$$Y(z) - 2z^{-1}Y(z) = X(z) + 3z^{-1}X(z) \tag{4.90}$$

Si tomamos la transformada z inversa de la ecuación (4.90) y por medio de la propiedad de desplazamiento en el tiempo (4.18), obtenemos

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n] + 3x[n-1]$$

y esto es igual a la ecuación (2.148).

4.34. Considere el sistema de tiempo discreto mostrado en la figura 4-8. ¿Para cuáles valores de k el sistema es estable en el sentido BIBO?

De la figura 4-8 observamos que

$$q[n] = x[n] + \frac{k}{2}q[n-1]$$

$$y[n] = q[n] + \frac{k}{3}q[n-1]$$

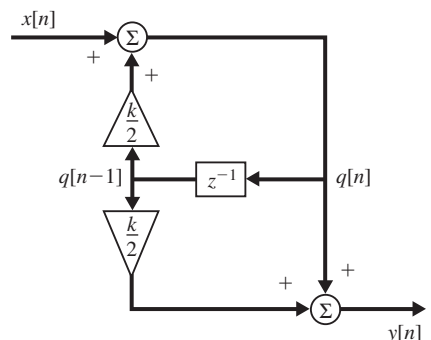


Figura 4-8

Al tomar la transformada z de las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$Q(z) = X(z) + \frac{k}{2} z^{-1} Q(z)$$

$$Y(z) = Q(z) + \frac{k}{3} z^{-1} Q(z)$$

Al reacomodar términos tenemos que

$$\left(1 - \frac{k}{2} z^{-1}\right) Q(z) = X(z)$$

$$\left(1 + \frac{k}{3} z^{-1}\right) Q(z) = Y(z)$$

de lo que obtenemos

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + (k/3)z^{-1}}{1 - (k/2)z^{-1}} = \frac{z + k/3}{z - k/2} \quad |z| > \left|\frac{k}{2}\right|$$

lo que demuestra que el sistema tiene un cero en $z = -k/3$ y un polo en $z = k/2$ y que la ROC es $|z| > |k/2|$. De esta forma, como se muestra en el problema 4.30, el sistema será estable en el sentido BIBO si la ROC contiene al círculo unitario, $|z| = 1$. Por consiguiente, el sistema es estable sólo si $|k| < 2$.

TRANSFORMADA Z UNILATERAL

4.35. Encuentre la transformada z unilateral de las siguientes $x[n]$:

a) $x[n] = a^n u[n]$

b) $x[n] = a^{n+1} u[n+1]$

a) Puesto que $x[n] = 0$ para $n < 0$, $X_I(z) = X(z)$, y del ejemplo 4.1 tenemos que

$$X_I(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a| \quad (4.91)$$

b) Por la definición (4.49) tenemos que

$$\begin{aligned} X_I(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} u[n+1] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} = a \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \\ &= a \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{az}{z - a} \quad |z| > |a| \end{aligned} \quad (4.92)$$

Advierta que en este caso $x[n]$ no es una secuencia causal; por tanto, $X_I(z) \neq X(z)$ [vea la ecuación (4.73) en el problema 4.10]

4.36. Verifique las ecuaciones (4.50) y (4.51); esto es, para $m \geq 0$,

a) $x[n - m] \leftrightarrow z^{-m} X_I(z) + z^{-m+1} x[-1] + z^{-m+2} x[-2] + \dots + x[-m]$

b) $x[n + m] \leftrightarrow z^m X_I(z) - z^m x[0] - z^{m-1} x[1] - \dots - z x[m - 1]$

a) Por la definición (4.49) con $m \geq 0$ y a través del cambio de variable $k = n - m$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_I\{x[n - m]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n - m] z^{-n} = \sum_{k=-m}^{\infty} x[k] z^{-(m+k)} \\ &= z^{-m} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} + \sum_{k=-1}^{-m} x[k] z^{-k} \right\} \\ &= z^{-m} \{X_I(z) + x[-1]z + x[-2]z^2 + \dots + x[-m]z^m\} \\ &= z^{-m} X_I(z) + z^{-m+1} x[-1] + z^{-m+2} x[-2] + \dots + x[-m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \text{Con } m \geq 0 \quad \mathfrak{Z}_I \{x[n+m]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n+m]z^{-n} = \sum_{k=m}^{\infty} x[k]z^{-(k-m)} \\
 &= z^m \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k} \right\} \\
 &= z^m \{X_I(z) - (x[0] + x[1]z^{-1} + \dots + x[m-1]z^{-(m-1)})\} \\
 &= z^m X_I(z) - z^m x[0] - z^{m-1} x[1] - \dots - z x[m-1]
 \end{aligned}$$

4.37. Mediante la transformada z unilateral, vuelva a efectuar el problema 2.42.

El sistema está descrito como $x[n] = ay[n-1] = x[n]$ **(4.93)**

con $y[-1] = y_{-1}$ y $x[n] = Kb^n u[n]$. Sea $x[n] \leftrightarrow Y_I(z)$

Entonces, de la ecuación (4.50)

$$y[n-1] \leftrightarrow z^{-1}Y_I(z) + y[-1] = z^{-1}Y_I(z) + y_{-1}$$

De la tabla 4-1 tenemos que $x[n] \leftrightarrow X_I(z) = K \frac{z}{z-b} \quad |z| > |b|$

Si tomamos la transformada z unilateral de la ecuación (4.93), obtenemos

$$Y_I(z) - a\{z^{-1}Y_I(z) + y_{-1}\} = K \frac{z}{z-b}$$

o $(1 - az^{-1})Y_I(z) = ay_{-1} + K \frac{z}{z-b}$

o $\left(\frac{z-a}{z}\right)Y_I(z) = ay_{-1} + K \frac{z}{z-b}$

De este modo, $Y_I(z) = ay_{-1} \frac{z}{z-a} + K \frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$

Por medio de la expansión en fracciones parciales, obtenemos

$$Y_I(z) = ay_{-1} \frac{z}{z-a} + \frac{K}{b-a} \left(b \frac{z}{z-b} - a \frac{z}{z-a} \right)$$

Con la transformada z inversa de $Y_I(z)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 y[n] &= ay_{-1} a^n u[n] + K \frac{b}{b-a} b^n u[n] - K \frac{a}{b-a} a^n u[n] \\
 &= \left(y_{-1} a^{n+1} + K \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} \right) u[n]
 \end{aligned}$$

y esto es igual a la ecuación (2.158).

4.38. Determine la salida $y[n]$ para cada una de las siguientes ecuaciones en diferencias con su entrada y condiciones iniciales asociadas:

a) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$, con $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $y[-1] = 1$

b) $3y[n] - 4y[n-1] + y[n-2] = x[n]$, con $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $y[-1] = 1$, $y[-2] = 2$

a) $x[n] \leftrightarrow X_I(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \quad |z| > \left|\frac{1}{3}\right|$

Al tomar la transformada z unilateral de la ecuación en diferencias dada, obtenemos

$$Y_I(z) - \frac{1}{2}\{z^{-1}Y_I(z) + y[-1]\} = X_I(z)$$

Al sustituir $y[-1] = 1$ y $X_I(z)$ en la expresión anterior, obtenemos que

$$\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)Y_I(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

o

$$\left(\frac{z - \frac{1}{2}}{z}\right)Y_I(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

Así,

$$Y_I(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} = \frac{7}{2} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - 2 \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

Por tanto,

$$y[n] = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad n \geq -1$$

b)

$$x[n] \leftrightarrow X_I(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad |z| > \left|\frac{1}{2}\right|$$

Al tomar la transformada z unilateral de la ecuación en diferencias dada, obtenemos

$$3Y_I(z) - 4\{z^{-1}Y_I(z) + y[-1]\} + \{z^{-2}Y_I(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]\} = X_I(z)$$

Si sustituimos $y[-1] = 1$, $y[-2] = 2$, y $X_I(z)$ en la expresión anterior, obtenemos que

$$(3 - 4z^{-1} + z^{-2})Y_I(z) = 2 - z^{-1} + \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

o

$$\frac{3(z-1)\left(z - \frac{1}{3}\right)}{z^2} Y_I(z) = \frac{3z^2 - 2z + \frac{1}{2}}{z\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} Y_I(z) &= \frac{z\left(3z^2 - 2z + \frac{1}{2}\right)}{3(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{3}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$y[n] = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad n \geq -2$$

4.39. Sea $x[n]$ una secuencia causal y

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

Demuestre que

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

(4.94)

La ecuación (4.94) se denomina *teorema del valor inicial* para la transformada z .

Puesto que $x[n] = 0$ para $n < 0$, tenemos

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots$$

A medida que $z \rightarrow \infty$, $z^{-n} \rightarrow 0$ para $n > 0$. De este modo, obtenemos que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$$

4.40. Sea $x[n]$ una secuencia causal y $x[n] \leftrightarrow X(z)$

Demuestre que si $X(z)$ es una función racional con todos sus polos estrictamente dentro del círculo unitario excepto, posiblemente en un polo de primer orden en $z = 1$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x[N] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) \tag{4.95}$$

La ecuación (4.95) se conoce como *teorema del valor final* para la transformada z .

De la propiedad de desplazamiento en el tiempo (4.19) tenemos que

$$\mathcal{Z}\{x[n] - x[n - 1]\} = (1 - z^{-1})X(z) \tag{4.96}$$

El lado izquierdo de la ecuación (4.96) puede escribirse como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{x[n] - x[n - 1]\}z^{-n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \{x[n] - x[n - 1]\}z^{-n}$$

Si ahora hacemos que $z \rightarrow 1$, entonces de la ecuación (4.96) tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \{x[n] - x[n - 1]\} = \lim_{N \rightarrow \infty} x[N]$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

4.41. Encuentre la transformada z de las siguientes $x[n]$:

a) $x[n] = \left\{ \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{3} \right\}$

b) $x[n] = 2\delta[n + 2] - 3\delta[n - 2]$

c) $x[n] = 3 \left(-\frac{1}{2} \right)^n u[n] - 2(3)^n u[-n - 1]$

d) $x[n] = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] - 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n u[-n - 1]$

4.42. Demuestre que si $x[n]$ es una secuencia por la izquierda y $X(z)$ converge para algún valor de z , entonces la ROC de $X(z)$ es de la forma

$$|z| < r_{\min} \quad \text{o} \quad 0 < |z| < r_{\min}$$

donde r_{\min} es la menor magnitud de cualquier polo de $X(z)$.

4.43. Dado $X(z) = \frac{z(z - 4)}{(z - 1)(z - 2)(z - 3)}$

- a) Establezca todas las posibles regiones de convergencia.
- b) ¿Para cuál ROC $X(z)$ es la transformada z de una secuencia causal?

4.44. Verifique la propiedad de inversión del tiempo (4.23); es decir,

$$x[-n] \leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right) \quad R' = \frac{1}{R}$$

4.45. Demuestre las siguientes propiedades para la transformada z :

- a) Si $x[n]$ es par, entonces $X(z^{-1}) = X(z)$.
- b) Si $x[n]$ es impar, entonces $X(z^{-1}) = -X(z)$.
- c) Si $x[n]$ es impar, entonces existe un cero en $X(z)$ en $z = 1$.

4.46. Considere la señal de tiempo continuo

$$x(t) = e^{-\alpha t} \quad t \geq 0$$

Sea la secuencia $x[n]$ una secuencia obtenida muestreando de manera uniforme $x(t)$ de modo que $x[n] = x(nT_s)$, donde T_s es el intervalo de muestreo. Encuentre la transformada z de $x[n]$.

4.47. Derive los siguientes pares de transformadas:

$$(\cos \Omega_0 n)u[n] \leftrightarrow \frac{z^2 - (\cos \Omega_0)z}{z^2 - (2 \cos \Omega_0)z + 1} \quad |z| > 1$$

$$(\sin \Omega_0 n)u[n] \leftrightarrow \frac{(\sin \Omega_0)z}{z^2 - (2 \cos \Omega_0)z + 1} \quad |z| > 1$$

4.48. Encuentre las transformadas z para las siguientes $x[n]$:

- a) $x[n] = (n - 3)u[n - 3]$
- b) $x[n] = (n - 3)u[n]$
- c) $x[n] = u[n] - u[n - 3]$
- d) $x[n] = n\{u[n] - u[n - 3]\}$

4.49. A través de la relación

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a|$$

encuentre la transformada z de las siguientes $x[n]$:

- a) $x[n] = na^{n-1}u[n]$
- b) $x[n] = n(n - 1)a^{n-2}u[n]$
- c) $x[n] = n(n - 1) \cdots (n - k + 1)a^{n-k}u[n]$

4.50. Mediante la transformada z , verifique las ecuaciones (2.130) y (2.131) en el problema 2.27; esto es,

- a) $x[n] * \delta[n] = x[n]$
- b) $x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$

4.51. Por medio de la transformada z vuelva a realizar el problema 2.47.

4.52. Encuentre la transformada z inversa de

$$X(z) = e^{az} \quad |z| > 0$$

4.53. A través del método de la división larga, encuentre la transformada z inversa de las siguientes $X(z)$:

- a) $X(z) = \frac{z}{(z - 1)(z - 2)}, \quad |z| < 1$
- b) $X(z) = \frac{z}{(z - 1)(z - 2)}, \quad 1 < |z| < 2$
- c) $X(z) = \frac{z}{(z - 1)(z - 2)}, \quad |z| > 2$

4.54. Con el método de la expansión en fracciones parciales vuelva a resolver el problema 4.53.

4.55. Considere el sistema mostrado en la figura 4-9. Encuentre la función del sistema $H(z)$ y su respuesta al impulso $h[n]$.

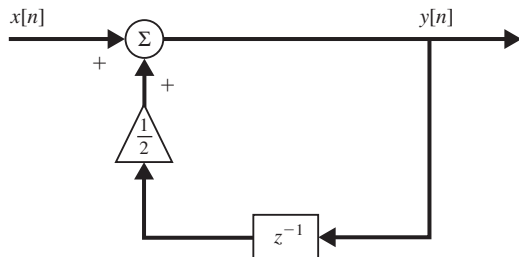


Figura 4-9

4.56. Considere el sistema mostrado en la figura 4-10.

- a) Encuentre la función del sistema $H(z)$.

b) Encuentre la ecuación en diferencias que relaciona la salida $y[n]$ con la entrada $x[n]$.

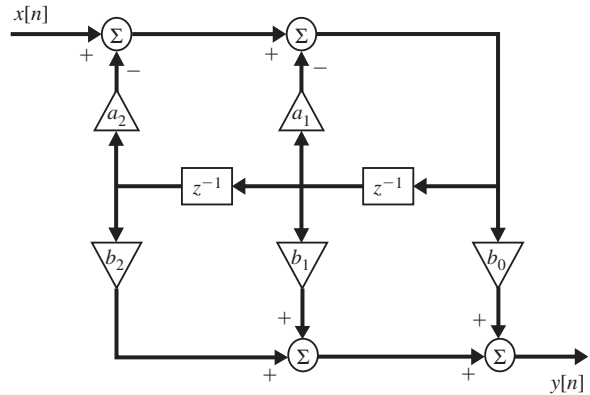


Figura 4-10

4.57. Considere un sistema LIT de tiempo discreto cuya función del sistema $H(z)$ está dada por

$$H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

- a) Encuentre la respuesta al escalón $s[n]$.
- b) Encuentre la salida $y[n]$ a la entrada $x[n] = nu[n]$.

4.58. Considere un sistema causal de tiempo discreto cuya salida $y[n]$ y entrada $x[n]$ se encuentran relacionadas mediante

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n - 1] + \frac{1}{6}y[n - 2] = x[n]$$

- a) Encuentre su función del sistema $H(z)$.
- b) Encuentre su respuesta al impulso $h[n]$.

4.59. Por medio de la transformada z unilateral, resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias con las condiciones iniciales dadas:

- a) $y[n] - 3y[n - 1] = x[n]$,
con $x[n] = 4u[n]$, $y[-1] = 1$
- b) $y[n] - 5y[n - 1] + 6y[n - 2] = x[n]$,
con $x[n] = u[n]$, $y[-1] = 3$, $y[-2] = 2$

4.60. Determine los valores inicial y final de $x[n]$ para cada una de las siguientes $X(z)$:

$$a) X(z) = \frac{2z \left(z - \frac{5}{12} \right)}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{3} \right)}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$b) X(z) = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1}, \quad |z| > 1$$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

4.41. a) $X(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}, 0 < |z|$

b) $X(z) = 2z^3 - 3z^{-3}, 0 < |z| < \infty$

c) $X(z) = \frac{z(5z-8)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)(z-3)}, \frac{1}{2} < |z| < 3$

d) $X(z)$ si no existe.

4.42. *Sugerencia:* Proceda de una manera similar a la del problema 4.5.

4.43. a) $0 < |z| < 1, 1 < |z| < 2, 2 < |z| < 3, |z| > 3$

b) $|z| > 3$

4.44. *Sugerencia:* Cambie la variable n a $-n$ en la definición (4.3).

4.45. *Sugerencia:* a) Utilice las ecuaciones (1.2) y (4.23).

b) Use las ecuaciones (1.3) y (4.23).

c) Utilice el resultado del inciso b).

4.46. $X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT_s}z^{-1}}$

4.47. *Sugerencia:* Haga uso de las fórmulas de Euler.

$$\cos \Omega_0 n = \frac{1}{2}(e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega_0 n})$$

$$\text{sen } \Omega_0 n = \frac{1}{2j}(e^{j\Omega_0 n} - e^{-j\Omega_0 n})$$

y utilice las ecuaciones (4.8) y (4.10) con $a = e^{\pm j\Omega_0}$.

4.48. a) $\frac{z^{-2}}{(z-1)^2}, |z| > 1$

b) $\frac{-3z^2 + 4z}{(z-1)^2}, |z| > 1$

c) $\frac{z - z^{-2}}{z-1}, |z| > 1$

d) $\frac{z - 4z^{-2} + 3z^{-3}}{(z-1)^2}, |z| > 1$

4.49. *Sugerencia:* Haga la diferenciación en ambos lados de la relación dada de manera consecutiva con respecto a a .

a) $\frac{z}{(z-a)^2}, |z| > |a|$

b) $\frac{2z}{(z-a)^3}, |z| > |a|$

c) $\frac{k!z}{(z-a)^{k+1}}, |z| > |a|$

4.50. *Sugerencia:* Utilice la ecuación (4.26) de la transformada z y de los pares de transformadas 1 y 4 de la tabla 4-1.

4.51. *Sugerencia:* Utilice la ecuación (4.26) y la tabla 4-1.

4.52. *Sugerencia:* Haga uso de la expansión en serie de potencias de la función exponencial e^x .

$$x[n] = \frac{a^n}{n!} u[n]$$

4.53. a) $x[n] = \{\dots, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0\}$

↑

b) $x[n] = \{\dots, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1, -1, -1, \dots\}$

↑

c) $x[n] = \{0, 1, 3, 7, 15, \dots\}$

4.54. a) $x[n] = (1 - 2^n)u[-n - 1]$

b) $x[n] = -u[n] - 2^n u[-n - 1]$

c) $x[n] = (-1 + 2^n)u[n]$

4.55. $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

4.56. a) $H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$

b) $y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2]$

4.57. a) $s[n] = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$

b) $y[n] = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + n - 1\right]u[n]$

4.58. a) $H(z) = \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)}, |z| > \frac{1}{2}$

b) $h[n] = \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$

4.59. a) $y[n] = -2 + 9(3)^n, n \geq -1$

b) $y[n] = \frac{1}{2} + 8(2)^n - \frac{9}{2}(3)^n, n \geq -2$

4.60. a) $x[0] = 2, x[\infty] = 0$

b) $x[0] = 0, x[\infty] = 1$

Análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo continuo

5.1 INTRODUCCIÓN

En capítulos anteriores presentamos la transformada de Laplace y la transformada z para convertir las señales en el dominio del tiempo en representaciones en el dominio s y el dominio z complejos que son, para muchos propósitos, más convenientes para analizar y procesar. Además, mediante estas transformaciones se proporciona mayor conocimiento acerca de la naturaleza y las propiedades de muchas señales y sistemas. En este capítulo y en el siguiente presentaremos otras transformaciones conocidas como la serie de Fourier y la transformada de Fourier, las cuales convierten señales en el dominio del tiempo en representaciones en el dominio de la frecuencia (o *espectrales*). Además de proporcionar las representaciones espectrales de las señales, el análisis de Fourier también es esencial para describir ciertos tipos de sistemas y sus propiedades en el dominio de la frecuencia. En este capítulo nos introduciremos en el análisis de Fourier en el contexto de las señales y sistemas de tiempo continuo.

5.2 REPRESENTACIÓN EN SERIE DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS

A. SEÑALES PERIÓDICAS

En el capítulo 1 definimos una señal de tiempo continuo $x(t)$ como periódica si existe un valor positivo distinto de cero T para el cual

$$x(t + T) = x(t) \quad \text{para toda } t \quad (5.1)$$

El periodo fundamental T_0 de $x(t)$ es el valor positivo más pequeño de T para el cual la ecuación (5.1) se satisface, y $1/T_0 = f_0$ se conoce como *frecuencia fundamental*.

Dos ejemplos básicos de señales periódicas son la señal senoidal real

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (5.2)$$

y la señal exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (5.3)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi f_0$ se conoce como *frecuencia angular fundamental*.

B. REPRESENTACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER EXPONENCIAL COMPLEJA

La representación de la serie de Fourier exponencial compleja de una señal periódica $x(t)$ con periodo fundamental T_0 está dada por

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.4)$$

donde c_k se conocen como *coeficientes complejos de Fourier* y están dados por

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5.5)$$

donde \int_{T_0} denota la integral sobre cualquier periodo y por lo regular se utilizan los intervalos 0 hasta T_0 o $-T_0/2$ hasta $T_0/2$ para la integración. Al establecer $k = 0$ en la ecuación (5.5) tenemos que

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (5.6)$$

lo cual indica que c_0 es igual al valor promedio de $x(t)$ sobre un periodo.

Cuando $x(t)$ es real, entonces de la ecuación (5.5) se deriva que

$$c_{-k} = c_k^* \quad (5.7)$$

donde el asterisco indica el complejo conjugado.

C. SERIE DE FOURIER TRIGONOMÉTRICA

La representación de la serie de Fourier trigonométrica de una señal periódica $x(t)$ con periodo fundamental T_0 está dada por

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sen k\omega_0 t) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.8)$$

donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier dados por

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos k\omega_0 t dt \quad (5.9a)$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sen k\omega_0 t dt \quad (5.9b)$$

Los coeficientes a_k y b_k y los coeficientes de Fourier complejos c_k se encuentran relacionados por (problema 5.3)

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \quad a_k = c_k + c_{-k} \quad b_k = j(c_k - c_{-k}) \quad (5.10)$$

De la ecuación (5.10) obtenemos

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k) \quad (5.11)$$

Cuando $x(t)$ es real, entonces a_k y b_k son reales, y por la ecuación (5.10) tenemos que

$$a_k = 2 \operatorname{Re}[c_k] \quad b_k = -2 \operatorname{Im}[c_k] \quad (5.12)$$

SEÑALES PARES E IMPARES

Si una señal periódica $x(t)$ es par, entonces $b_k = 0$ y su serie de Fourier (5.8) contiene únicamente los términos coseno:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.13)$$

Si $x(t)$ es impar, entonces $a_k = 0$ y su serie de Fourier contiene sólo términos seno:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sen k\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.14)$$

D. SERIE DE FOURIER EN FORMA ARMÓNICA

Otra forma de la representación en serie de Fourier de una señal periódica real $x(t)$ con periodo fundamental T_0 es

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.15)$$

La ecuación (5.15) puede derivarse de la ecuación (5.8) y se conoce como serie de Fourier *en forma armónica* de $x(t)$. El término C_0 se conoce como *componente de cd*, mientras que el término $C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k)$ se denomina *k-ésima componente armónica* de $x(t)$. La primera componente armónica $C_1 \cos(\omega_0 t - \theta_1)$ se conoce comúnmente como *componente fundamental* debido a que tiene el mismo periodo fundamental que $x(t)$. Los coeficientes C_k y los ángulos θ_k son las *amplitudes* y los *ángulos de fase de las armónicas*, respectivamente, y están relacionados con los coeficientes de Fourier a_k y b_k por medio de

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \theta_k = \tan^{-1} \frac{b_k}{a_k} \quad (5.16)$$

Para una señal periódica real $x(t)$, la serie de Fourier en términos de exponenciales complejas como los de la ecuación (5.4) es matemáticamente equivalente a cualesquiera de las dos formas en las ecuaciones (5.8) y (5.15). Aunque las últimas dos son formas comunes para la serie de Fourier, la forma compleja en la ecuación (5.4) es más general y, por lo general, más conveniente; utilizaremos esa forma casi de manera exclusiva.

E. CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER

Se sabe que una señal periódica $x(t)$ tiene una representación en serie de Fourier si satisface las siguientes condiciones de Dirichlet:

1. $x(t)$ es absolutamente integrable sobre cualquier periodo; esto es,

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty \quad (5.17)$$

2. $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito de t .
3. $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito de t , y cada una de estas discontinuidades es finita.

Observe que las condiciones de Dirichlet son suficientes, pero no necesarias para la representación en serie de Fourier (problema 5.8).

F. ESPECTROS DE AMPLITUD Y DE FASE DE UNA SEÑAL PERIÓDICA

Expresemos a los coeficientes complejos de Fourier c_k en la ecuación (5.4) de la siguiente manera:

$$c_k = |c_k| e^{j\phi_k} \quad (5.18)$$

A una gráfica de $|c_k|$ contra la frecuencia angular ω se le llama *espectro de amplitud* de la señal periódica $x(t)$, y a una gráfica de ϕ_k contra ω se le conoce como *espectro de fase* de $x(t)$. Puesto que el índice k supone solamente enteros, los espectros de amplitud y de fase no son curvas continuas sino que aparecen sólo como frecuencias discretas $k\omega_0$. Por tanto, se les conoce como *espectro de frecuencias discretas* o *espectro de líneas*.

Para una señal periódica real $x(t)$ tenemos que $c_{-k} = c_k^*$. De este modo,

$$|c_{-k}| = |c_k| \quad \phi_{-k} = -\phi_k \quad (5.19)$$

Por tanto, el espectro de amplitud es una función par de ω , y el espectro de fase es una función impar de ω para una señal periódica real.

G. CONTENIDO DE POTENCIA DE UNA SEÑAL PERIÓDICA

En el capítulo 1 (problema 1.18) introdujimos la potencia promedio de una señal periódica $x(t)$ sobre un periodo como

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt \quad (5.20)$$

Si $x(t)$ está representada mediante la serie de Fourier exponencial compleja en la ecuación (5.4), entonces puede demostrarse que (problema 5.14)

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad (5.21)$$

La ecuación (5.21) se conoce como *identidad de Parseval* (o *teorema de Parseval*) para la serie de Fourier.

5.3 LA TRANSFORMADA DE FOURIER

A. DE LA SERIE DE FOURIER A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Sea $x(t)$ una señal no periódica de duración finita; es decir,

$$x(t) = 0 \quad |t| > T_1$$

En la figura 5-1a) se ilustra una señal de este tipo. Sea $x_{T_0}(t)$ una señal periódica formada al repetir $x(t)$ con periodo fundamental T_0 como se muestra en la figura 5-1b). Si hacemos que $T_0 \rightarrow \infty$, tenemos que

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = x(t) \quad (5.22)$$

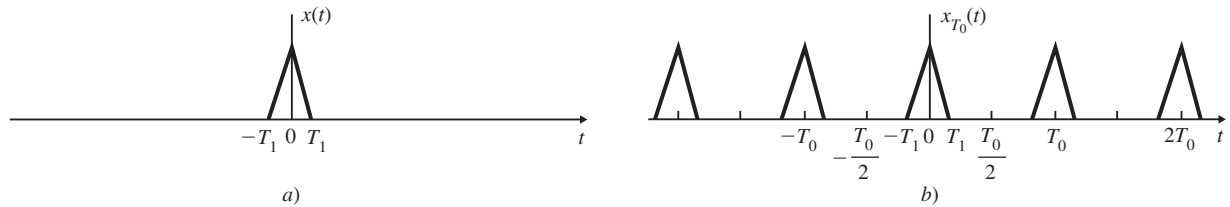


Figura 5-1 a) Señal no periódica $x(t)$; b) señal periódica formada por extensión periódica de $x(t)$.

La serie de Fourier exponencial compleja de $x_{T_0}(t)$ está dada por

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.23)$$

donde

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5.24a)$$

Puesto que $x_{T_0}(t) = x(t)$ para $|t| < T_0/2$ y también $x(t) = 0$ fuera de este intervalo, la ecuación (5.24a) puede volver a escribirse como

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5.24b)$$

Definamos $X(\omega)$ como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.25)$$

Entonces, de la ecuación (5.24b), los coeficientes complejos de Fourier c_k pueden expresarse como

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \quad (5.26)$$

Sustituyendo la ecuación (5.26) en la ecuación (5.23), tenemos que

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

o

$$x_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (5.27)$$

A medida que $T_0 \rightarrow \infty$, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ se convierte en infinitesimal ($\omega_0 \rightarrow 0$). De este modo, sea $\omega_0 = \Delta\omega$. Entonces la ecuación (5.27) se convierte en

$$x_{T_0}(t)|_{T_0 \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega \quad (5.28)$$

Por consiguiente,
$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega \quad (5.29)$$

La suma del lado derecho de la ecuación (5.29) puede visualizarse como el área bajo la función $X(\omega)e^{j\omega t}$, como se muestra en la figura 5-2. Por tanto, obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.30)$$

lo cual es la representación de Fourier de una señal $x(t)$ no periódica.

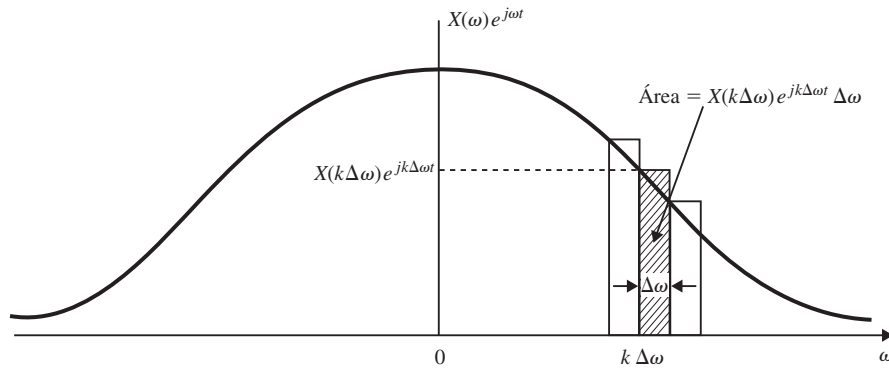


Figura 5-2 Interpretación gráfica de la ecuación (5.29).

B. PAR DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La función $X(\omega)$ definida por la ecuación (5.25) se conoce como *transformada de Fourier* de $x(t)$, mientras que la ecuación (5.30) define la *transformada de Fourier inversa* de $X(\omega)$. De manera simbólica se denotan mediante

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \quad (5.31)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.32)$$

y decimos que $x(t)$ y $X(\omega)$ forman un par de transformadas de Fourier denotado por

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \quad (5.33)$$

C. ESPECTRO DE FOURIER

La transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ es, en general, compleja, y puede expresarse como

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (5.34)$$

Por analogía con la terminología utilizada para los coeficientes complejos de Fourier de una señal periódica $x(t)$, la transformada de Fourier $X(\omega)$ de una señal no periódica $x(t)$ es la especificación en el dominio de la frecuencia de $x(t)$ y se hace referencia a ella como *espectro* (o *espectro de Fourier*) de $x(t)$. La cantidad $|X(\omega)|$ se conoce como *espectro de magnitud* de $x(t)$, mientras que $\phi(\omega)$ se denomina *espectro de fase* de $x(t)$.

Si $x(t)$ es una señal real, entonces de la ecuación (5.31) obtenemos

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \quad (5.35)$$

Entonces se deriva que $X(-\omega) = X^*(\omega)$ **(5.36a)**

y $|X(-\omega)| = |X(\omega)| \quad \phi(-\omega) = -\phi(\omega)$ **(5.36b)**

Por tanto, como en el caso de las señales periódicas, el espectro de amplitud $|X(\omega)|$ es una función par y el espectro de fase $\phi(\omega)$ es una función par de ω .

D. CONVERGENCIA DE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER

Del mismo modo que en el caso de las señales periódicas, las condiciones suficientes para la convergencia de $X(\omega)$ son las siguientes (de nueva cuenta, se hace referencia a ellas como las condiciones de Dirichlet):

1. $x(t)$ es absolutamente integrable; es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad \text{(5.37)}$$

2. $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito.
3. $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito, y cada una de estas discontinuidades es finita.

Aunque las condiciones de Dirichlet anteriores garantizan la existencia de la transformada de Fourier para una señal, si se permiten las funciones impulso en la transformada, las señales que no satisfacen estas condiciones pueden tener transformadas de Fourier (problema 5.23).

E. CONEXIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La ecuación (5.31) define la transformada de Fourier de $x(t)$ como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{(5.38)}$$

La transformada de Laplace bilateral de $x(t)$, como se define en la ecuación (4.3), está dada por

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad \text{(5.39)}$$

Comparando las ecuaciones (5.38) y (5.39), observamos que la transformada de Fourier es un caso especial de la transformada de Laplace en la cual $s = j\omega$; esto es,

$$X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad \text{(5.40)}$$

Si establecemos $s = \sigma + j\omega$ en la ecuación (5.39) tenemos que

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

o $X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{x(t) e^{-\sigma t}\}$ **(5.41)**

lo que indica que la transformada bilateral de Laplace de $x(t)$ puede interpretarse como la transformada de Fourier de $x(t) e^{-\sigma t}$.

Puesto que la transformada de Laplace puede considerarse una generalización de la transformada de Fourier en la cual la frecuencia está generalizada de $j\omega$ a $s = \sigma + j\omega$, la variable compleja s a menudo se conoce como *frecuencia compleja*.

Observe que puesto que la integral en la ecuación (5.39) está denotada por $X(s)$, la integral en la ecuación (5.38) puede denotarse como $X(j\omega)$. De este modo, en el resto de este libro tanto $X(\omega)$ como $X(j\omega)$ significarán lo mismo si asociamos la transformada de Fourier con la transformada de Laplace. Debido a que la transformada de Fourier es la transformada de Laplace con $s = j\omega$, no debe suponerse automáticamente que la transformada de Fourier de una señal $x(t)$ es la transformada de Laplace con s reemplazada con $j\omega$. Si $x(t)$ es absolutamente integrable, es decir, si $x(t)$ satisface la condición (5.37), la transformada de Fourier de $x(t)$ puede obtenerse de la transformada de Laplace de $x(t)$ con $s = j\omega$. Esto no es cierto en general en señales que no son absolutamente integrables. Los siguientes ejemplos ilustran los enunciados anteriores.

EJEMPLO 5.1 Considere la función impulso unitario $\delta(t)$.

De la ecuación (3.13), la transformada de Laplace de $\delta(t)$ es

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad \text{para toda } s \quad (5.42)$$

Por las definiciones (5.31) y (1.20), la transformada de Fourier de $\delta(t)$ es

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (5.43)$$

De este modo, la transformada de Laplace y la transformada de Fourier de $\delta(t)$ son la misma.

EJEMPLO 5.2 Considere la señal exponencial

$$x(t) = e^{-at} u(t) \quad a > 0$$

De la ecuación (3.8), la transformada de Laplace de $x(t)$ está dada por

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) > -a \quad (5.44)$$

Por la definición (5.31), la transformada de Fourier de $x(t)$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t)\} &= X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{0^+}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned} \quad (5.45)$$

De esta forma, al comparar las ecuaciones (5.44) y (5.45) tenemos

$$X(\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (5.46)$$

Observe que $x(t)$ es absolutamente integrable.

EJEMPLO 5.3 Considere la función escalón unitario $u(t)$.

De la ecuación (3.14), la transformada de Laplace de $u(t)$ es

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (5.47)$$

La transformada de Fourier de $u(t)$ está dada por (problema 5.30)

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (5.48)$$

De esta manera, la transformada de Fourier de $u(t)$ no puede obtenerse a partir de su transformada de Laplace. Observe que la función escalón unitario $u(t)$ no es absolutamente integrable.

5.4 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO

Las propiedades básicas de la transformada de Fourier se presentan en la siguiente discusión. Muchas de estas propiedades son semejantes a las correspondientes a la transformada de Laplace (véase la sección 3.4).

A. LINEALIDAD

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) \quad (5.49)$$

B. DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega) \quad (5.50)$$

La ecuación (5.50) muestra que el efecto de un desplazamiento en el dominio del tiempo sólo implica agregar un término lineal $-j\omega t_0$ al espectro de fase original $\theta(\omega)$. Esto se conoce como *desplazamiento de fase lineal* de la transformada de Fourier $X(\omega)$.

C. DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \quad (5.51)$$

En ocasiones, la multiplicación de $x(t)$ por una señal exponencial compleja $e^{j\omega_0 t}$ se llama *modulación compleja*. De este modo, la ecuación (5.51) muestra que la modulación compleja en el dominio del tiempo corresponde a un desplazamiento de $X(\omega)$ en el dominio de la frecuencia. Observe que la propiedad de desplazamiento en la frecuencia [ecuación (5.51)] es la propiedad dual de desplazamiento en el tiempo [ecuación (5.50)].

D. ESCALAMIENTO EN EL TIEMPO

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (5.52)$$

donde a es una constante real. Esta propiedad se obtiene directamente de la definición de la transformada de Fourier. La ecuación (5.52) indica que al escalar la variable de tiempo t por el factor a provoca un escalamiento inverso de la variable de frecuencia ω por $1/a$, y un escalamiento en amplitud de $X(\omega/a)$ por $1/|a|$. De este modo, la propiedad de escalamiento (5.52) implica que la compresión en el tiempo de una señal ($a > 1$) produce su expansión espectral, y la expansión en el tiempo de la señal ($a < 1$) produce su compresión espectral.

E. INVERSIÓN DEL TIEMPO

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) \quad (5.53)$$

De este modo, la inversión del tiempo de $x(t)$ produce una inversión semejante del eje de la frecuencia para $X(\omega)$. La ecuación (5.53) se obtiene fácilmente al establecer $a = -1$ en la ecuación (5.52).

F. DUALIDAD (O SIMETRÍA)

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \quad (5.54)$$

La propiedad de dualidad de la transformada de Fourier tiene implicaciones significativas. Esta propiedad nos permite obtener ambos pares de transformadas de Fourier a partir de una evaluación de la ecuación (5.31) (problemas 5.20 y 5.22).

G. DIFERENCIACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega) \quad (5.55)$$

La ecuación (5.55) muestra que el efecto de la diferenciación en el dominio del tiempo es la multiplicación de $X(\omega)$ por $j\omega$ en el dominio de la frecuencia (problema 5.28).

H. DIFERENCIACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

$$(-jt)x(t) \leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad (5.56)$$

La ecuación (5.56) es la propiedad dual de la ecuación (5.55).

I. INTEGRACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega) \quad (5.57)$$

Puesto que la integración es la inversa de la diferenciación, la ecuación (5.57) muestra que la operación en el dominio de la frecuencia correspondiente a la integración en el dominio del tiempo es la multiplicación por $1/j\omega$, pero se necesita un término adicional para explicar un posible componente de cd en la salida del integrador. Por consiguiente, a menos que $X(0) = 0$, se produce un componente de cd por el integrador (problema 5.33).

J. CONVOLUCIÓN

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega) X_2(\omega) \quad (5.58)$$

La ecuación (5.58) se conoce como *teorema de convolución del tiempo*, y establece que la convolución en el dominio del tiempo se convierte en multiplicación en el dominio de la frecuencia (problema 5.31). Como en el caso de la transformada de Laplace, esta propiedad de convolución juega un papel importante en el estudio de los sistemas LIT de tiempo continuo (sección 5.5) y también forma el fundamento para nuestra discusión de filtros (sección 5.6).

K. MULTIPLICACIÓN

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega) \quad (5.59)$$

La propiedad de multiplicación (5.59) es la propiedad dual de la ecuación (5.58) y se conoce a menudo como *teorema de convolución de la frecuencia*. De esta forma, la multiplicación en el dominio del tiempo se convierte en la convolución en el dominio de la frecuencia (problema 5.35).

L. PROPIEDADES ADICIONALES

Si $x(t)$ es real, sea

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (5.60)$$

donde $x_e(t)$ y $x_o(t)$ son las componentes par e impar de $x(t)$, respectivamente. Sea

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

Entonces

$$X(-\omega) = X^*(\omega) \quad (5.61a)$$

$$x_e(t) \leftrightarrow \text{Re}\{X(\omega)\} = A(\omega) \quad (5.61b)$$

$$x_o(t) \leftrightarrow j \text{Im}\{X(\omega)\} = jB(\omega) \quad (5.61c)$$

La ecuación (5.61a) es la condición necesaria y suficiente para que $x(t)$ sea real (problema 5.39). Las ecuaciones (5.61b) y (5.61c) muestran que la transformada de Fourier de una señal par es una función real de ω y que la transformada de Fourier de una señal impar es una función imaginaria pura de ω .

M. RELACIONES DE PARSEVAL

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)X_2(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)x_2(\lambda) d\lambda \quad (5.62)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega \quad (5.63)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (5.64)$$

La ecuación (5.64) se conoce como *identidad de Parseval* (o *teorema de Parseval*) para la transformada de Fourier. Observe que la cantidad en el lado izquierdo de la ecuación (5.64) es el contenido de energía normalizada E de $x(t)$ [ecuación (1.14)]. La identidad de Parseval nos dice que este contenido de energía E puede calcularse al integrar $|X(\omega)|^2$ sobre todas las frecuencias ω . Por esta razón, a menudo se conoce a $|X(\omega)|^2$ como *espectro de densidad de energía* de $x(t)$, y la ecuación (5.64) también se conoce como *teorema de la energía*.

La tabla 5-1 contiene un resumen de las propiedades de la transformada de Fourier que se presentan en esta sección. En la tabla 5-2 se proporcionan algunas señales comunes y sus transformadas de Fourier.

Tabla 5-1 Propiedades de la transformada de Fourier

Propiedad	Señal	Transformada de Fourier
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Linealidad	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Desplazamiento en la frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Inversión del tiempo	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Dualidad	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Diferenciación en el tiempo	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Diferenciación en la frecuencia	$(-jt)x(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Multiplicación	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Señal real	$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$	$X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$ $X(-\omega) = X^*(\omega)$
Componente par	$x_e(t)$	$\text{Re}\{X(\omega)\} = A(\omega)$
Componente impar	$x_o(t)$	$j \text{Im}\{X(\omega)\} = jB(\omega)$
Relaciones de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)X_2(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)x_2(\lambda) d\lambda$ $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega$ $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$	

Tabla 5-2 Pares comunes de transformadas de Fourier

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\text{sen } \omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$u(-t)$	$\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$
$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$t e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$e^{-a \omega }$
$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}$
$p_a(t) = \begin{cases} 1 & t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$	$2a \frac{\text{sen } \omega a}{\omega a}$
$\frac{\text{sen } at}{\pi t}$	$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega < a \\ 0 & \omega > a \end{cases}$
$\text{sgn } t$	$\frac{2}{j\omega}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0), \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

5.5 LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO CONTINUO

A. RESPUESTA EN FRECUENCIA

En la sección 2.2 demostramos que la salida $y(t)$ de un sistema LIT de tiempo continuo es igual a la convolución de la entrada $x(t)$ con la respuesta al impulso $h(t)$; es decir,

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (5.65)$$

Al aplicar la propiedad de convolución (5.58) obtenemos

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad (5.66)$$

donde $Y(\omega)$, $X(\omega)$ y $H(\omega)$ son las transformadas de Fourier de $y(t)$, $x(t)$ y $h(t)$, respectivamente. De la ecuación (5.66) tenemos que

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (5.67)$$

La función $H(\omega)$ se conoce como *respuesta en frecuencia* del sistema. Las relaciones representadas mediante las ecuaciones (5.65) y (5.66) se ilustran en la figura 5-3. Sea

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta_H(\omega)} \quad (5.68)$$

Entonces $|H(\omega)|$ se denomina *respuesta de magnitud* del sistema, y $\theta_H(\omega)$ *respuesta de fase* del sistema.

Considere la señal exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (5.69)$$

con transformada de Fourier (problema 5.23)

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (5.70)$$

Entonces, de las ecuaciones (5.66) y (1.26) tenemos que

$$Y(\omega) = 2\pi H(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) \quad (5.71)$$

Al tomar la transformada de Fourier inversa de $Y(\omega)$ obtenemos

$$y(t) = H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} \quad (5.72)$$

lo cual indica que la señal exponencial compleja $e^{j\omega_0 t}$ es una función propia del sistema LIT con un valor propio correspondiente $H(\omega_0)$, como se observó previamente en el capítulo 2 (sección 2.4 y problema 2.17). Además, por la propiedad de linealidad (5.49), si la entrada $x(t)$ es periódica con la serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (5.73)$$

entonces la salida $y(t)$ correspondiente también es periódica con la serie de Fourier

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (5.74)$$

Si $x(t)$ no es periódica, entonces de la ecuación (5.30)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.75)$$

y mediante la ecuación (5.66), la salida correspondiente $y(t)$ puede expresarse como

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.76)$$

De este modo, el comportamiento de un sistema LIT de tiempo continuo en el dominio de la frecuencia está completamente caracterizado por su respuesta en frecuencia $H(\omega)$. Sea

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta_X(\omega)} \quad Y(\omega) = |Y(\omega)| e^{j\theta_Y(\omega)} \quad (5.77)$$

Entonces, de la ecuación (5.66) tenemos que

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)| |H(\omega)| \quad (5.78a)$$

$$\theta_Y(\omega) = \theta_X(\omega) + \theta_H(\omega) \quad (5.78b)$$

Por consiguiente, el espectro de magnitud $|X(\omega)|$ de la entrada se multiplica por la respuesta de magnitud $|H(\omega)|$ del sistema para determinar el espectro de magnitud $|Y(\omega)|$ de la salida, y la respuesta de fase $\theta_H(\omega)$ se suma al espectro de fase $\theta_X(\omega)$ de la entrada para producir el espectro de fase $\theta_Y(\omega)$ de la salida. La respuesta de magnitud $|H(\omega)|$ se conoce a menudo como *ganancia* del sistema.

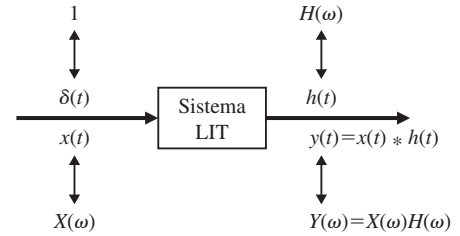


Figura 5-3 Relaciones entre entradas y salidas en un sistema LIT.

B. TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN

Para transmitir sin distorsión a través de un sistema LIT necesitamos que la forma exacta de la señal de entrada se reproduzca en la salida, aunque su amplitud puede ser diferente y estar atrasada en el tiempo. Por tanto, si $x(t)$ es la señal de entrada, la salida necesaria es

$$y(t) = Kx(t - t_d) \quad (5.79)$$

donde t_d es el *atraso en el tiempo* (*time delay*) y $K (> 0)$ es una *constante de ganancia*. Esto se ilustra en la figura 5-4a) y b). Tomando la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (5.79) obtenemos

$$Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_d} X(\omega) \quad (5.80)$$

De esta forma, de la ecuación (5.66) observamos que para una transmisión sin distorsión el sistema debe tener

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta_H(\omega)} = Ke^{-j\omega t_d} \quad (5.81)$$

$$\text{De este modo,} \quad |H(\omega)| = K \quad (5.82a)$$

$$\theta_H(\omega) = -j\omega t_d \quad (5.82b)$$

Es decir, la amplitud de $H(\omega)$ debe ser constante sobre todo el intervalo de frecuencias, mientras que la fase de $H(\omega)$ debe ser lineal con la frecuencia. Esto se ilustra en la figura 5-4c) y d).

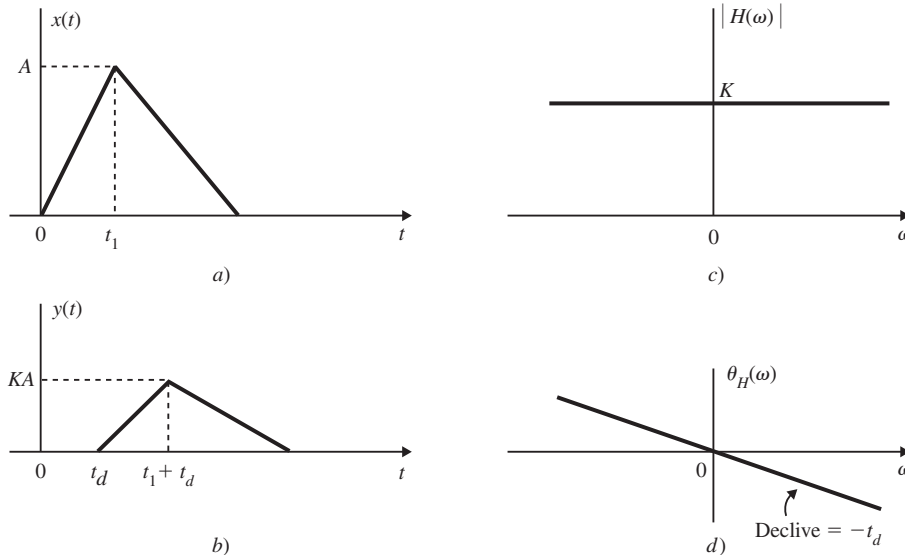


Figura 5-4 Transmisión sin distorsión.

DISTORSIÓN DE AMPLITUD Y DISTORSIÓN DE FASE

Cuando el espectro de amplitud $|H(\omega)|$ del sistema no es constante dentro de la banda de frecuencia de interés, los componentes de frecuencia de la señal de entrada se transmiten con una cantidad diferente de ganancia o atenuación. Este efecto se denomina *distorsión de amplitud*. Cuando el espectro de fase $\theta_H(\omega)$ del sistema no es lineal con la frecuencia, la señal de salida tiene una forma de onda diferente de la señal de entrada debido a los diferentes retardos al pasar a través del sistema por los diferentes componentes de frecuencia de la señal de entrada. Esta forma de distorsión se denomina *distorsión de fase*.

C. SISTEMAS LIT CARACTERIZADOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES

Como se discutió en la sección 2.5, muchos sistemas LIT de tiempo continuo de interés práctico se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (5.83)$$

con $M \leq N$. Cuando tomamos la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (5.83) y por medio de la propiedad de linealidad (5.49) y la propiedad de diferenciación en el tiempo (5.55), tenemos que

$$\sum_{k=0}^N a_k(j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k(j\omega)^k X(\omega)$$

$$Y(\omega) \sum_{k=0}^N a_k(j\omega)^k = X(\omega) \sum_{k=0}^M b_k(j\omega)^k \quad (5.84)$$

De este modo, de la ecuación (5.67)

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k(j\omega)^k} \quad (5.85)$$

que es una función racional de ω . El resultado (5.85) es el mismo que el de la contraparte de la transformada de Laplace $H(s) = Y(s)/X(s)$ con $s = j\omega$ [ecuación (3.40)]; es decir,

$$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega)$$

5.6 FILTRADO

Una de las operaciones fundamentales en cualquier sistema de procesamiento de señales es el *filtrado*; éste es el proceso mediante el cual las amplitudes relativas de los componentes de frecuencia en una señal se modifican o quizá algunos componentes de frecuencia se suprimen. Como vimos en la sección precedente, para los sistemas LIT de tiempo continuo el espectro de la salida es igual al de la entrada multiplicado por la respuesta en frecuencia del sistema. Por tanto, un sistema LIT actúa como filtro sobre la señal de entrada. Aquí la palabra “filtro” se utiliza para denotar un sistema que exhibe alguna clase de comportamiento selectivo de frecuencias.

A. FILTROS IDEALES DE FRECUENCIA SELECTIVA

Un filtro *ideal* de frecuencia selectiva es aquel que permite el paso exacto de señales en un determinado intervalo de frecuencias y rechaza completamente el resto. La banda de frecuencias que pasa por el filtro se conoce como *banda de paso* o *pasa-banda*, mientras que la banda de frecuencias rechazadas por el filtro se denomina *banda de rechazo* o *supresora de banda*.

Los tipos más comunes de filtros de frecuencia selectiva son los siguientes:

1. FILTRO IDEAL PASA-BAJAS

Un filtro ideal pasa-bajas (LPF, *low-pass filter*) está especificado por

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (5.86)$$

el cual se muestra en la figura 5-5a). La frecuencia ω_c se conoce como frecuencia de *corte*.

2. FILTRO IDEAL PASA-ALTAS

Un filtro ideal pasa-altas (HPF, *high-pass filter*) está especificado por

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_c \\ 1 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (5.87)$$

el cual se muestra en la figura 5-5b).

3. FILTRO IDEAL PASA-BANDA

Un filtro ideal pasa-banda (BPF, *bandpass filter*) está especificado por

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (5.88)$$

el cual se muestra en la figura 5-5c).

4. FILTRO IDEAL SUPRESOR DE BANDA

Un filtro ideal supresor de banda (BSF, *bandstop filter*) está especificado por

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 1 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (5.89)$$

el cual se muestra en la figura 5-5d).

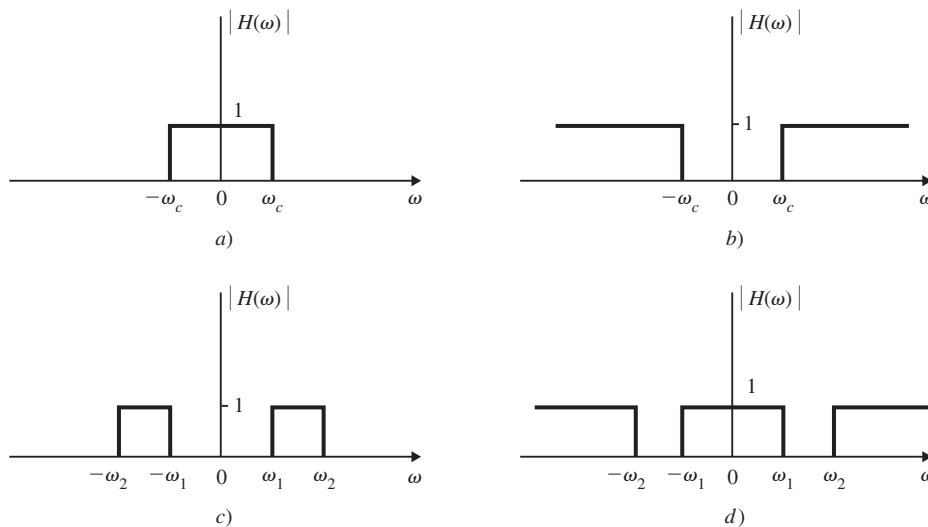


Figura 5-5 Respuestas de magnitud de filtros ideales de frecuencia selectiva.

En la discusión anterior no mencionamos nada sobre la respuesta de fase de los filtros. Para evitar la distorsión de fase en el proceso de filtrado, un filtro debe tener una característica de fase lineal sobre la banda de paso del filtro; esto es [ecuación (5.82b)],

$$\theta_H(\omega) = -\omega t_d \quad (5.90)$$

donde t_d es una constante.

Observe que todos los filtros ideales de frecuencia selectiva son sistemas no causales.

B. FILTROS NO IDEALES DE FRECUENCIA SELECTIVA

Consideraremos el filtro RC mostrado en la figura 5-6a) como un ejemplo de un filtro simple de frecuencia selectiva causal de tiempo continuo. La salida $y(t)$ y la entrada $x(t)$ están relacionadas mediante (problema 1.32)

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Tomando las transformadas de Fourier de ambos lados de la ecuación anterior, la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro RC está dada por

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0} \quad (5.91)$$

donde $\omega_0 = 1/RC$. De esta manera, la respuesta de amplitud $|H(\omega)|$ y la respuesta de fase $\theta_H(\omega)$ están dadas por

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega/\omega_0|} = \frac{1}{[1 + (\omega/\omega_0)^2]^{1/2}} \quad (5.92)$$

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_0} \quad (5.93)$$

lo que se grafica en la figura 5-6b). De la figura 5-6b) observamos que la red RC en la figura 5-6a) actúa como un filtro pasa-bajas.

5.7 ANCHO DE BANDA

A. ANCHO DE BANDA DEL FILTRO (O SISTEMA)

Un concepto importante en el análisis de sistemas es el *ancho de banda* de un sistema LIT. Existen muchas definiciones diferentes del ancho de banda del sistema.

1. ANCHO DE BANDA ABSOLUTO

El ancho de banda W_B de un filtro ideal pasa-bajas es igual a su frecuencia de corte; es decir, $W_B = \omega_c$ [figura 5-5a)]. En este caso W_B se denomina *ancho de banda absoluto*. El ancho de banda absoluto de un filtro pasa-bandas ideal está dado por $W_B = \omega_2 - \omega_1$ [figura 5-5c)]. Un filtro pasa-bandas se denomina de *banda estrecha* si $W_B \ll \omega_0$, donde $\omega_0 = 1/2(\omega_1 + \omega_2)$ es la frecuencia central del filtro. No se define ningún ancho de banda para un filtro pasa-altas o un filtro supresor de banda.

2. ANCHO DE BANDA DE 3 dB (O POTENCIA MEDIA)

Para filtros causales o prácticos, una definición común del ancho de banda del filtro (o del sistema) es el ancho de banda de 3 dB, W_{3dB} . En el caso de un filtro pasa-bajas, tal como el filtro RC descrito por la ecuación (5.92) o el de la figura 5-6b), W_{3dB} se define como la frecuencia positiva a la cual el espectro de amplitud $|H(\omega)|$ cae a un valor igual a $|H(0)|/\sqrt{2}$, como se ilustra en la figura 5-7a). Note que $|H(0)|$ es el valor pico de $H(\omega)$ para el filtro pasa-bajas RC. El ancho de banda de 3 dB también se conoce como *ancho de banda de media potencia* porque una atenuación de voltaje o de corriente de 3 dB es equivalente a una atenuación de potencia por un factor de 2. En el caso de un filtro pasa-bandas, W_{3dB} se define como la diferencia entre las frecuencias a las cuales $|H(\omega)|$ cae a un valor igual a $1/\sqrt{2}$ veces el valor pico $|H(\omega_m)|$, como se ilustra en la figura 5-7b). Esta definición de W_{3dB} es útil para sistemas con respuesta de amplitud unimodal (en el rango de frecuencias positivo) y es un criterio ampliamente aceptado para medir el ancho de banda de un sistema, pero puede llegar a ser ambiguo y no único con sistemas que tengan múltiples respuestas de amplitud pico.

Observe que cada una de las definiciones precedentes de ancho de banda se definen sólo a lo largo del eje de frecuencias positivo y siempre definen sólo el ancho de banda de frecuencia positiva, o de un lado.

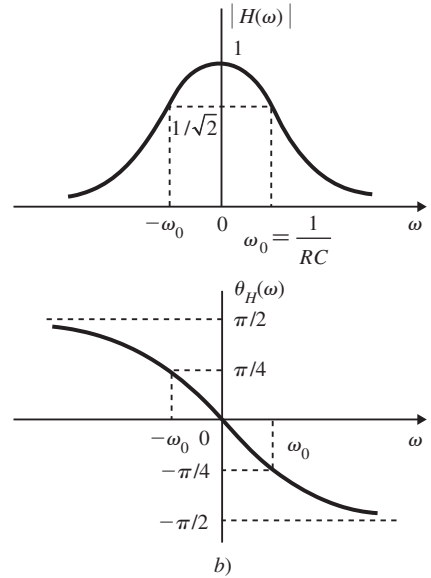
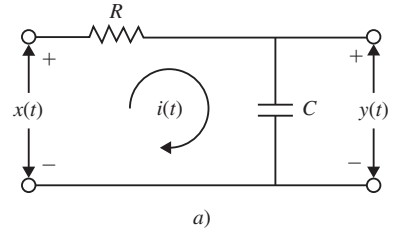


Figura 5-6 Filtro RC y su respuesta en frecuencia.

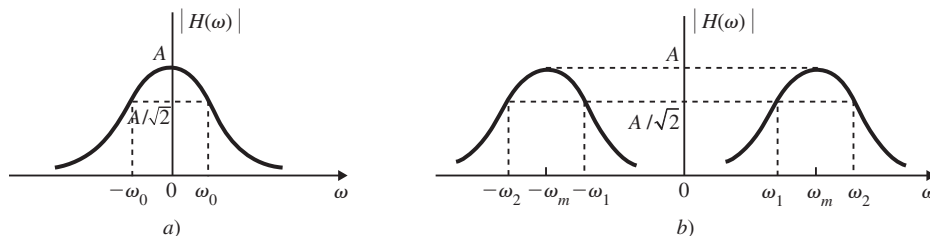


Figura 5-7 Ancho de banda del filtro.

B. ANCHO DE BANDA DE LA SEÑAL

El *ancho de banda* de una señal puede definirse como el intervalo de frecuencias positivas en el cual se encuentra “la mayoría” de la energía o la potencia. Esta definición es muy ambigua y está sujeta a varias convenciones (problemas 5.57 y 5.76).

ANCHO DE BANDA DE 3 dB

El ancho de banda de una señal $x(t)$ también puede definirse en un fundamento semejante al del ancho de banda de un filtro tal como el ancho de banda de 3 dB, a través del espectro de magnitud $|X(\omega)|$ de la señal. En realidad, si reemplazamos $|H(\omega)|$ por $|X(\omega)|$ en la figura 5-5a) a c), obtendremos gráficas en el dominio de la frecuencia de señales *pasa-bajas*, *pasa-altas* y *supresora de banda*.

SEÑAL LIMITADA EN BANDA

Una señal $x(t)$ se denomina señal de *banda limitada* si

$$|X(\omega)| = 0 \quad |\omega| > \omega_M \quad (5.94)$$

De este modo, para una señal de banda limitada es natural definir ω_M como el ancho de banda.

PROBLEMAS RESUELTOS

SERIE DE FOURIER

5.1. A un conjunto de señales $\{\Psi_n(t)\}$ se le denomina *ortogonal* sobre cualquier intervalo (a, b) si cualesquiera dos señales en el conjunto $\Psi_m(t)$ y $\Psi_k(t)$ satisfacen la condición

$$\int_a^b \Psi_m(t) \Psi_k^*(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \alpha & m = k \end{cases} \quad (5.95)$$

donde $*$ denota el complejo conjugado y $\alpha \neq 0$. Demuestre que el conjunto de exponenciales complejas $\{e^{jk\omega_0 t}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es ortogonal en cualquier intervalo sobre un periodo T_0 , donde $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Para cualquier t_0 tenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t} dt &= \frac{1}{jm\omega_0} e^{jm\omega_0 t} \Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = \frac{1}{jm\omega_0} (e^{jm\omega_0(t_0+T_0)} - e^{jm\omega_0 t_0}) \\ &= \frac{1}{jm\omega_0} e^{jm\omega_0 t_0} (e^{jm2\pi} - 1) = 0 \quad m \neq 0 \end{aligned} \quad (5.96)$$

puesto que $e^{jm2\pi} = 1$. Cuando $m = 0$, tenemos que $e^{jm\omega_0 t} \Big|_{m=0} = 1$ y

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt = T_0 \quad (5.97)$$

De este modo, de las ecuaciones (5.96) y (5.97) concluimos que

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t} (e^{jk\omega_0 t})^* dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(m-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ T_0 & m = k \end{cases} \quad (5.98)$$

lo que demuestra que el conjunto $\{e^{jk\omega_0 t}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es ortogonal sobre cualquier intervalo sobre un periodo T_0 .

5.2. Mediante la condición de ortogonalidad (5.98), derive la ecuación (5.5) para los coeficientes complejos de Fourier.

De la ecuación (5.4)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Al multiplicar ambos lados de esta ecuación por $e^{-jm\omega_0 t}$ e integrar el resultado desde t_0 hasta $(t_0 + T_0)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)e^{-jm\omega_0 t} dt &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right) e^{-jm\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (5.99)$$

Entonces, por la ecuación (5.98), la ecuación (5.99) se reduce a

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)e^{-jm\omega_0 t} dt = c_m T_0 \quad (5.100)$$

Al cambiar el índice m a k obtenemos la ecuación (5.5); es decir,

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5.101)$$

Utilizaremos en su mayoría los siguientes dos casos especiales para la ecuación (5.101): $t_0 = 0$ y $t_0 = -T_0/2$, respectivamente. Esto es,

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5.102a)$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5.102b)$$

5.3. Derive la serie de Fourier trigonométrica de la ecuación (5.8) a partir de la serie de Fourier exponencial compleja de la ecuación (5.4).

Reacomodamos la sumatoria en la ecuación (5.4) como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{jk\omega_0 t} + c_{-k} e^{-jk\omega_0 t})$$

y por medio de las fórmulas de Euler

$$e^{\pm jk\omega_0 t} = \cos k\omega_0 t \pm j \operatorname{sen} k\omega_0 t$$

tenemos que
$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(c_k + c_{-k}) \cos k\omega_0 t + j(c_k - c_{-k}) \operatorname{sen} k\omega_0 t] \quad (5.103)$$

Establecemos
$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad c_k + c_{-k} = a_k \quad j(c_k - c_{-k}) = b_k \quad (5.104)$$

La ecuación (5.103) se convierte en

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \operatorname{sen} k\omega_0 t)$$

5.4. Determine la representación de la serie de Fourier exponencial compleja para cada una de las siguientes señales:

a) $x(t) = \cos \omega_0 t$

b) $x(t) = \operatorname{sen} \omega_0 t$

c) $x(t) = \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right)$

d) $x(t) = \cos 4t + \operatorname{sen} 6t$

e) $x(t) = \operatorname{sen}^2 t$

a) En vez de utilizar la ecuación (5.5) para evaluar los coeficientes complejos de Fourier c_k a través de la fórmula de Euler, obtenemos

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) = \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

De este modo, los coeficientes complejos de Fourier para $\cos \omega_0 t$ son

$$c_1 = \frac{1}{2} \quad c_{-1} = \frac{1}{2} \quad c_k = 0, |k| \neq 1$$

b) De manera similar tenemos que

$$\operatorname{sen} \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = -\frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

De esta forma, los coeficientes complejos de Fourier para $\operatorname{sen} \omega_0 t$ son

$$c_1 = \frac{1}{2j} \quad c_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad c_k = 0, |k| \neq 1$$

c) La frecuencia fundamental angular ω_0 de $x(t)$ es 2. De esta forma,

$$x(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$$

Ahora

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} (e^{j(2t+\pi/4)} + e^{-j(2t+\pi/4)}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-j\pi/4} e^{-j2t} + \frac{1}{2} e^{j\pi/4} e^{j2t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt} \end{aligned}$$

De este modo, los coeficientes complejos de Fourier para $\cos(2t + \pi/4)$ son

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} e^{j\pi/4} = \frac{1}{2} \frac{1+j}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1+j) \\ c_{-1} &= \frac{1}{2} e^{-j\pi/4} = \frac{1}{2} \frac{1-j}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1-j) \\ c_k &= 0 \quad |k| \neq 1 \end{aligned}$$

d) Por el resultado del problema 1.14, el periodo fundamental T_0 de $x(t)$ es π y $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2$. De esta manera,

$$x(t) = \cos 4t + \operatorname{sen} 4t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$$

De nuevo, mediante la fórmula de Euler, tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos 4t + \operatorname{sen} 6t = \frac{1}{2} (e^{j4t} + e^{-j4t}) + \frac{1}{2j} (e^{j6t} - e^{-j6t}) \\ &= -\frac{1}{2j} e^{-j6t} + \frac{1}{2} e^{-j4t} + \frac{1}{2} e^{j4t} + \frac{1}{2j} e^{j6t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt} \end{aligned}$$

Así, los coeficientes complejos de Fourier para $\cos 4t + \operatorname{sen} 6t$ son

$$c_{-3} = -\frac{1}{2j} \quad c_{-2} = \frac{1}{2} \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad c_3 = \frac{1}{2j}$$

y todos los otros $c_k = 0$.

e) Del problema 1.16e) el periodo fundamental T_0 de $x(t)$ es π y $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2$. De este modo,

$$x(t) = \operatorname{sen}^2 t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$$

Nuevamente, utilizando la fórmula de Euler, obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{sen}^2 t = \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right)^2 = -\frac{1}{4} (e^{j2t} - 2 + e^{-j2t}) \\ &= -\frac{1}{4} e^{-j2t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{j2t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt} \end{aligned}$$

De esta forma, los coeficientes complejos de Fourier para $\text{sen}^2 t$ son

$$c_{-1} = -\frac{1}{4} \quad c_0 = \frac{1}{2} \quad c_1 = -\frac{1}{4}$$

mientras que todos los otros $c_k = 0$.

5.5. Considere la onda cuadrada periódica $x(t)$ mostrada en la figura 5-8.

- a) Determine la serie de Fourier exponencial compleja de $x(t)$.
- b) Determine la serie de Fourier trigonométrica de $x(t)$.

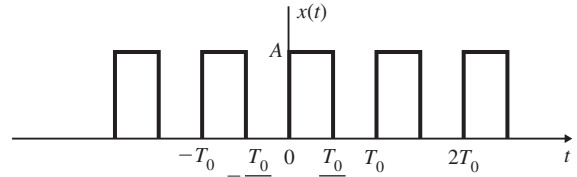


Figura 5-8

a) Sea
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Mediante la ecuación (5.102a) tenemos que

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_0^{T_0/2} = \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} (e^{-jk\omega_0 T_0/2} - 1) \\ &= \frac{A}{jk2\pi} (1 - e^{-jk\pi}) = \frac{A}{jk2\pi} [1 - (-1)^k] \end{aligned}$$

puesto que $\omega_0 T_0 = 2\pi$ y $e^{-jk\pi} = (-1)^k$. De este modo,

$$c_k = 0 \quad k = 2m \neq 0$$

$$c_k = \frac{A}{jk\pi} \quad k = 2m + 1$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A dt = \frac{A}{2}$$

Por consiguiente,

$$c_0 = \frac{A}{2} \quad c_{2m} = 0 \quad c_{2m+1} = \frac{A}{j(2m+1)\pi} \tag{5.105}$$

y obtenemos

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \tag{5.106}$$

b) De las ecuaciones (5.105), (5.10) y (5.12) tenemos

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{A}{2} \quad a_{2m} = b_{2m} = 0, m \neq 0$$

$$a_{2m+1} = 2 \text{Re}[c_{2m+1}] = 0 \quad b_{2m+1} = -2 \text{Im}[c_{2m+1}] = \frac{2A}{(2m+1)\pi}$$

Si sustituimos estos valores en la ecuación (5.8) obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \text{sen}(2m+1)\omega_0 t \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\text{sen } \omega_0 t + \frac{1}{3} \text{sen } 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \text{sen } 5\omega_0 t + \dots \right) \end{aligned} \tag{5.107}$$

5.6. Considere la onda cuadrada periódica $x(t)$ ilustrada en la figura 5-9.

- a) Determine la serie de Fourier exponencial compleja de $x(t)$.
- b) Determine la serie de Fourier trigonométrica de $x(t)$.

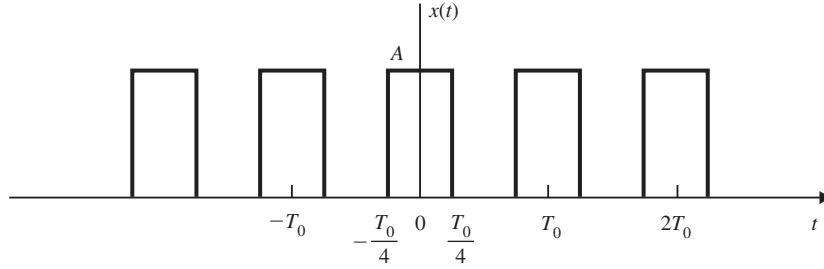


Figura 5-9

a) Sea
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Mediante la ecuación (5.102b) tenemos

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} A e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} (e^{-jk\omega_0 T_0/4} - e^{jk\omega_0 T_0/4}) \\ &= \frac{A}{-jk2\pi} (e^{-jk\pi/2} - e^{jk\pi/2}) = \frac{A}{k\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} c_k &= 0 & k &= 2m \neq 0 \\ c_k &= (-1)^m \frac{A}{k\pi} & k &= 2m + 1 \\ c_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A dt = \frac{A}{2} \end{aligned}$$

Por consiguiente,
$$c_0 = \frac{A}{2} \quad c_{2m} = 0, m \neq 0 \quad c_{2m+1} = (-1)^m \frac{A}{(2m+1)\pi} \quad (5.108)$$

y obtenemos que

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \quad (5.109)$$

b) De las ecuaciones (5.108), (5.10) y (5.12) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} = c_0 &= \frac{A}{2} & a_{2m} &= 2 \operatorname{Re}[c_{2m}] = 0, m \neq 0 \\ a_{2m+1} &= 2 \operatorname{Re}[c_{2m+1}] = (-1)^m \frac{2A}{(2m+1)\pi} & b_k &= -2 \operatorname{Im}[c_k] = 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (5.8) obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos(2m+1)\omega_0 t \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots \right) \end{aligned} \quad (5.110)$$

Observe que $x(t)$ es par; de este modo, $x(t)$ contiene sólo un término de cd y términos coseno. También note que en la figura 5-9 $x(t)$ puede obtenerse al desplazar $x(t)$ en la figura 5-8 hacia la izquierda por el término $T_0/4$.

5.7. Considere la onda cuadrada periódica $x(t)$ ilustrada en la figura 5-10.

- Determine la serie de Fourier exponencial compleja de $x(t)$.
- Determine la serie de Fourier trigonométrica de $x(t)$.

Observe que $x(t)$ puede expresarse como

$$x(t) = x_1(t) - A$$

donde $x(t)$ se muestra en la figura 5-11. Ahora, al comparar las figuras 5-11 y 5-8 en el problema 5.5 observamos que $x_1(t)$ es la misma onda cuadrada de $x(t)$ en la figura 5-8, con excepción que A se convierte en $2A$.

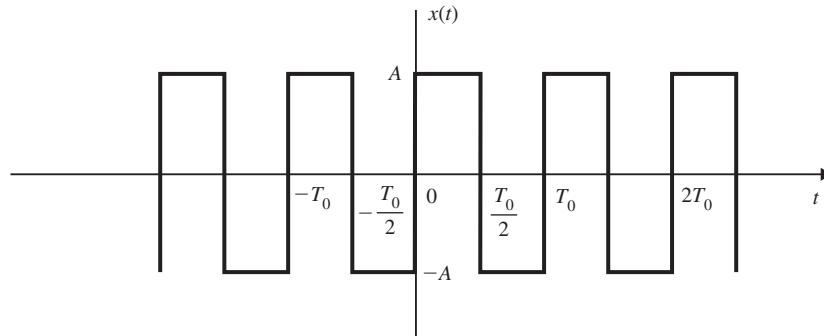


Figura 5-10

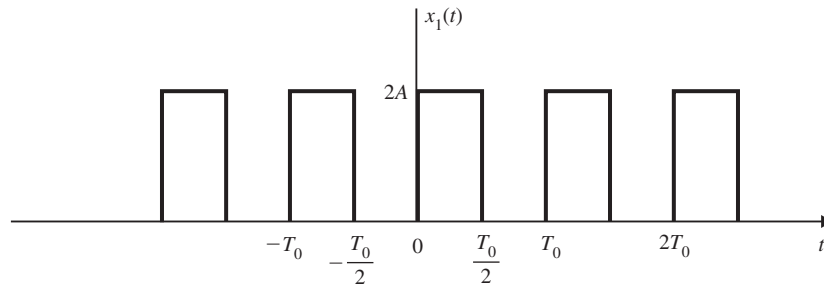


Figura 5-11

a) Si reemplazamos A por $2A$ en la ecuación (5.106) tenemos que

$$x_1(t) = A + \frac{2A}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t}$$

De esta manera,

$$x(t) = x_1(t) - A = \frac{2A}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \tag{5.111}$$

b) De forma semejante, reemplazando A por $2A$ en la ecuación (5.107) tenemos que

$$x_1(t) = A + \frac{4A}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \text{sen}(2m+1)\omega_0 t$$

Así,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4A}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \text{sen}(2m+1)\omega_0 t \\ &= \frac{4A}{\pi} \left(\text{sen } \omega_0 t + \frac{1}{3} \text{sen } 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \text{sen } 5\omega_0 t + \dots \right) \end{aligned} \tag{5.112}$$

Observe que $x(t)$ es impar; de esta manera, $x(t)$ sólo contiene términos seno.

5.8. Considere el tren de impulsos periódicos $\delta_{T_0}(t)$ mostrado en la figura 5-12 y definido por

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \tag{5.113}$$

- a) Determine la serie de Fourier exponencial compleja de $\delta_{T_0}(t)$.
- b) Determine la serie de Fourier trigonométrica de $\delta_{T_0}(t)$.

a) Sea
$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

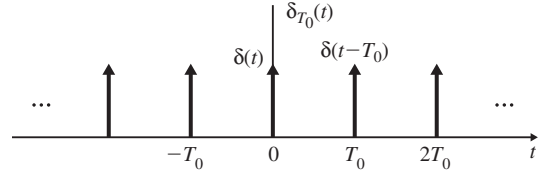


Figura 5-12

Puesto que $\delta(t)$ se encuentra involucrada, utilizaremos la ecuación (5.102b) para determinar los coeficientes de Fourier y obtener

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \tag{5.114}$$

Por tanto, obtenemos

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.115}$$

b) Sea
$$\delta_{T_0}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sen k\omega_0 t) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Puesto que $\delta_{T_0}(t)$ es par, $b_k = 0$, y por la ecuación (5.9a), a_k está dado por

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) \cos k\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \tag{5.116}$$

De este modo, obtenemos

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.117}$$

5.9. Considere la onda triangular $x(t)$ ilustrada en la figura 5-13a). Mediante la técnica de diferenciación, encuentre a) la serie de Fourier exponencial compleja de $x(t)$, y b) la serie de Fourier trigonométrica de $x(t)$.

Como se muestra en la figura 5-13b), la derivada $x'(t)$ de la onda triangular $x(t)$ es una onda cuadrada.

a) Sea
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.118}$$

Al diferenciar de la ecuación (5.118) obtenemos

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 c_k e^{jk\omega_0 t} \tag{5.119}$$

La ecuación (5.119) muestra que los coeficientes complejos de Fourier de $x'(t)$ son iguales a $jk\omega_0 c_k$. De este modo, podemos encontrar c_k ($k \neq 0$) si se conocen los coeficientes de Fourier de $x'(t)$. El término c_0 no puede determinarse mediante la ecuación (5.119) y debe evaluarse directamente en términos de $x(t)$ con la ecuación (5.6). Al comparar la figura 5-13b) y la figura 5-10 observamos que $x'(t)$ en la figura 5-13b) es la misma que $x(t)$ en la figura 5-10 con A reemplazada por $2A/T_0$. Por consiguiente, de la ecuación (5.111), al reemplazar A por $2A/T_0$ tenemos que

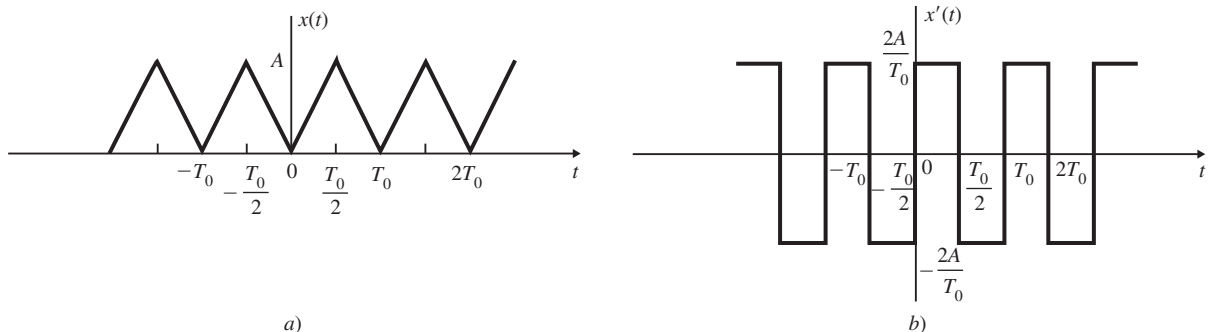


Figura 5-13

$$x'(t) = \frac{4A}{j\pi T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \quad (5.120)$$

Al igualar las ecuaciones (5.119) y (5.120) tenemos que

$$c_k = 0 \quad k = 2m \neq 0$$

$$jk\omega_0 c_k = \frac{4A}{j\pi k T_0} \quad \text{o} \quad c_k = -\frac{2A}{\pi^2 k^2} \quad k = 2m + 1$$

De la figura 5-13a) y la ecuación (5.6) tenemos

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{A}{2}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (5.118) obtenemos

$$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{2A}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \quad (5.121)$$

b) De manera similar, al diferenciar la ecuación (5.8) obtenemos

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\omega_0 (b_k \cos k\omega_0 t - a_k \sin k\omega_0 t) \quad (5.122)$$

La ecuación (5.122) muestra que los coeficientes coseno de Fourier de $x'(t)$ son iguales a $k\omega_0 b_k$ y que los coeficientes seno son iguales a $-k\omega_0 a_k$. Por tanto, de la ecuación (5.112), al reemplazar A por $2A/T_0$, tenemos que

$$x'(t) = \frac{8A}{\pi T_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin(2m+1)\omega_0 t \quad (5.123)$$

Al igualar las ecuaciones (5.122) y (5.123) tenemos que

$$b_k = 0 \quad a_k = 0 \quad k = 2m \neq 0$$

$$-k\omega_0 a_k = \frac{8A}{\pi k T_0} \quad \text{o} \quad a_k = -\frac{4A}{\pi^2 k^2} \quad k = 2m + 1$$

De las ecuaciones (5.6) y (5.10) y de la figura 5-13a) llegamos a

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{A}{2}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (5.8) obtenemos

$$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)\omega_0 t \quad (5.124)$$

5.10. Considere la onda triangular $x(t)$ ilustrada en la figura 5-14a). Encuentre la serie de Fourier trigonométrica de $x(t)$ por medio de la técnica de diferenciación.

De la figura 5-14a), la derivada $x'(t)$ de la onda triangular $x(t)$ es, como se ilustra en la figura 5-14b),

$$x'(t) = -\frac{A}{T_0} + A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \quad (5.125)$$

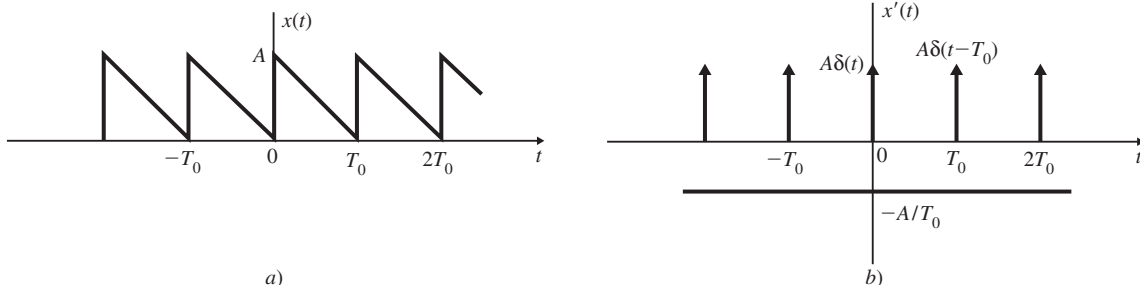


Figura 5-14

Mediante las ecuaciones (5.117) y (5.125) llegamos a

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{T_0} \cos k\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.126)$$

Si igualamos las ecuaciones (5.126) y (5.122) tenemos

$$a_k = 0, \quad k \neq 0 \quad k\omega_0 b_k = \frac{2A}{T_0} \quad \text{o} \quad b_k = \frac{A}{k\pi}$$

De la figura 5-14a) y la ecuación (5.9a) tenemos

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{A}{2}$$

De este modo, si sustituimos estos valores en la ecuación (5.8) obtenemos

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{sen } k\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5.127)$$

5.11. Encuentre y grafique el espectro de magnitud para la señal del tren de pulsos cuadrados periódico $x(t)$ mostrado en la figura 5-15a) para a) $d = T_0/4$, y b) $d = T_0/8$.

Mediante la ecuación (5.102a) tenemos

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \int_0^d e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T_0} \frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_0^d = \frac{A}{T_0} \frac{1}{jk\omega_0} (1 - e^{-jk\omega_0 d}) \\ &= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 d/2} (e^{jk\omega_0 d/2} - e^{-jk\omega_0 d/2}) \\ &= A \frac{d}{T_0} \frac{\text{sen}(k\omega_0 d/2)}{k\omega_0 d/2} e^{-jk\omega_0 d/2} \end{aligned} \quad (5.128)$$

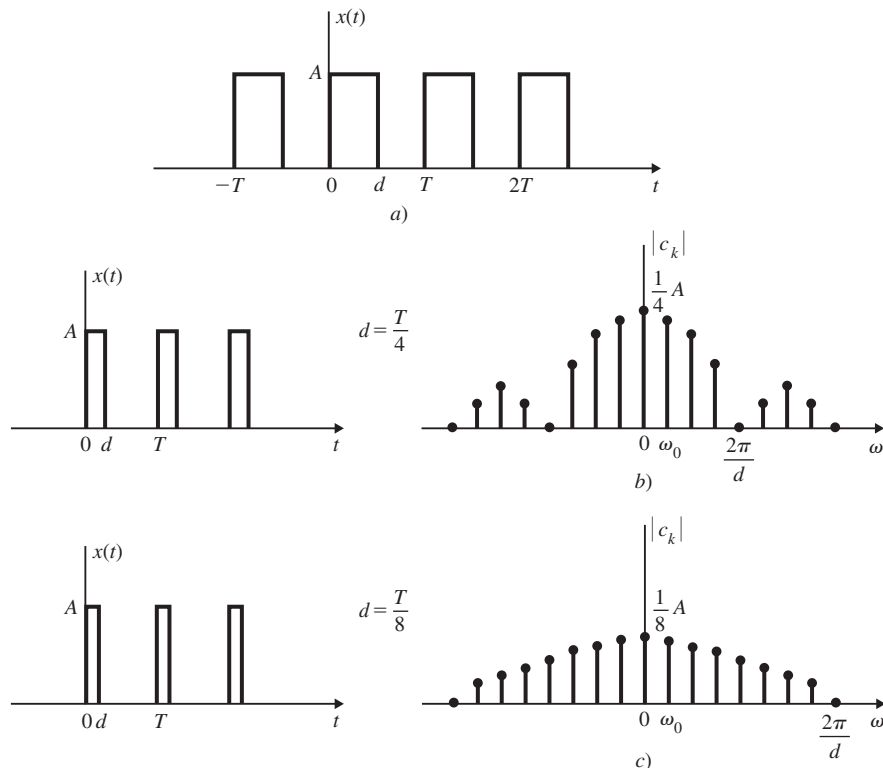


Figura 5-15

Observe que $c_k = 0$ siempre que $k\omega_0 d/2 = m\pi$, es decir,

$$n\omega_0 = \frac{m2\pi}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

a) $d = T_0/4, k\omega_0 d/2 = k\pi d/T_0 = k\pi/4,$

$$|c_k| = \frac{A}{4} \left| \frac{\text{sen}(k\pi/4)}{k\pi/4} \right|$$

El espectro de magnitud para este caso se ilustra en la figura 5-15b).

b) $d = T_0/8, k\omega_0 d/2 = k\pi d/T_0 = k\pi/8,$

$$|c_k| = \frac{A}{8} \left| \frac{\text{sen}(k\pi/8)}{k\pi/8} \right|$$

El espectro de magnitud para este caso se ilustra en la figura 5-15c).

5.12. Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son señales periódicas con un periodo fundamental T_0 y sus expresiones en series complejas de Fourier son

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \quad x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

demuestre que la señal $x(t) = x_1(t)x_2(t)$ es periódica con el mismo periodo fundamental T_0 y puede expresarse como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

donde c_k está dada por

$$c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{k-m} \tag{5.129}$$

Ahora

$$x(t + T_0) = x_1(t + T_0)x_2(t + T_0) = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

De este modo, $x(t)$ es periódica con un periodo fundamental T_0 . Sea

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Entonces

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{jm\omega_0 t} \right) x_2(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_2(t) e^{-j(k-m)\omega_0 t} dt \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{k-m} \end{aligned}$$

puesto que

$$e_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_2(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

y el término entre corchetes es igual a e_{k-m} .

5.13. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales periódicas en el problema 5.12. Demuestre que

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{-k} \tag{5.130}$$

La ecuación (5.130) se conoce como *relación de Parseval* para señales periódicas.

Del problema 5.12 y la ecuación (5.129) tenemos que

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{k-m}$$

Si establecemos $k = 0$ en la expresión anterior obtenemos

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{-m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{-k}$$

5.14. Verifique la identidad de Parseval (5.21) para la serie de Fourier; es decir,

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Si
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

entonces
$$x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} \quad (5.131)$$

donde * denota el complejo conjugado. La ecuación (5.131) indica que si los coeficientes de Fourier de $x(t)$ son c_k , entonces los coeficientes de Fourier de $x^*(t)$ son c_{-k}^* . Al establecer $x_1(t) = x(t)$ y $x_2(t) = x^*(t)$ en la ecuación (5.130) tenemos que $d_k = c_k$ y $e_k = c_{-k}^*$ (o $e_{-k} = c_k^*$), y obtenemos

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x^*(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_k^* \quad (5.132)$$

o
$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

5.15. a) La convolución periódica $f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t)$ se definió en el problema 2.8. Si d_n y e_n son coeficientes complejos de Fourier de $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente, entonces demuestre que los coeficientes complejos de Fourier c_k de $f(t)$ están dados por

$$c_k = T_0 d_k e_k \quad (5.133)$$

donde T_0 es el periodo fundamental común a $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $f(t)$.

b) Encuentre la serie de Fourier exponencial compleja de $f(t)$ definida en el problema 2.8c).

a) De la ecuación (2.70) (problema 2.8)

$$f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_0^{T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

Sea
$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \quad x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0 t}$$

Entonces
$$f(t) = \int_0^{T_0} x(\tau) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0(t-\tau)} \right) d\tau$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0 t} \int_0^{T_0} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$$

Puesto que
$$d_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$$

obtenemos
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_0 d_k e_k e^{jk\omega_0 t} \quad (5.134)$$

lo que demuestra que los coeficientes complejos de Fourier c_k de $f(t)$ son iguales a $T_0 d_k e_k$.

b) En el problema 2.8c), $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$, como se muestra en la figura 2-12, que es lo mismo que la figura 5-8 (problema 5.5). De la ecuación (5.105) tenemos que

$$d_0 = e_0 = \frac{A}{2} \quad d_k = e_k = \begin{cases} 0 & k = 2m, m \neq 0 \\ A/jk\pi & k = 2m + 1 \end{cases}$$

De este modo, por la ecuación (5.133) los coeficientes complejos de Fourier c_k de $f(t)$ son

$$c_0 = T_0 d_0 e_0 = T_0 \frac{A^2}{4}$$

$$c_k = T_0 d_k e_k = \begin{cases} 0 & k = 2m, m \neq 0 \\ -T_0 A^2 / k^2 \pi^2 & k = 2m + 1 \end{cases}$$

Observe que en el problema 2.8c), $f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t)$, mostrado en la figura 2-13b), es proporcional a $x(t)$, mostrada en la figura 5-13a). De esta manera, si reemplazamos A por $A^2 T_0 / 2$ en el resultado del problema 5.9 obtenemos que

$$c_0 = T_0 \frac{A^2}{4} \quad c_k = \begin{cases} 0 & k = 2m, m \neq 0 \\ -T_0 A^2 / k^2 \pi^2 & k = 2m + 1 \end{cases}$$

los cuales son los mismos resultados obtenidos al utilizar la ecuación (5.133).

TRANSFORMADA DE FOURIER

5.16. a) Verifique la propiedad de desplazamiento en el tiempo (5.50); esto es,

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{j\omega t_0} X(\omega)$$

Por la definición (5.31)
$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

Mediante el cambio de variable $\tau = t - t_0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau + t_0)} d\tau \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(\omega) \end{aligned}$$

Por consiguiente,
$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

5.17. Verifique la propiedad de desplazamiento en la frecuencia (5.51); es decir,

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

Por la definición (5.31),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) e^{j\omega_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = X(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

Por tanto,
$$x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

5.18. Verifique la propiedad de dualidad (5.54); esto es,

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

De la definición de la transformada de Fourier inversa (5.32) tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 2\pi x(t)$$

Al cambiar t a $-t$ obtenemos
$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = 2\pi x(-t)$$

Ahora, al intercambiar t y ω obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt = 2\pi x(-\omega)$$

Puesto que
$$\mathcal{F}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt$$

concluimos que
$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

5.19. Encuentre la transformada de Fourier de la señal de pulso rectangular $x(t)$ [figura 5-16a)] definida por

$$x(t) = p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases} \quad (5.135)$$

Por la definición (5.31)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}) = 2 \frac{\text{sen } \omega a}{\omega} = 2a \frac{\text{sen } \omega a}{a}$$

Por tanto, obtenemos

$$p_a(t) \leftrightarrow 2 \frac{\text{sen } \omega a}{\omega} = 2a \frac{\text{sen } \omega a}{\omega a} \quad (5.136)$$

La transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ se grafica en la figura 5-16b).

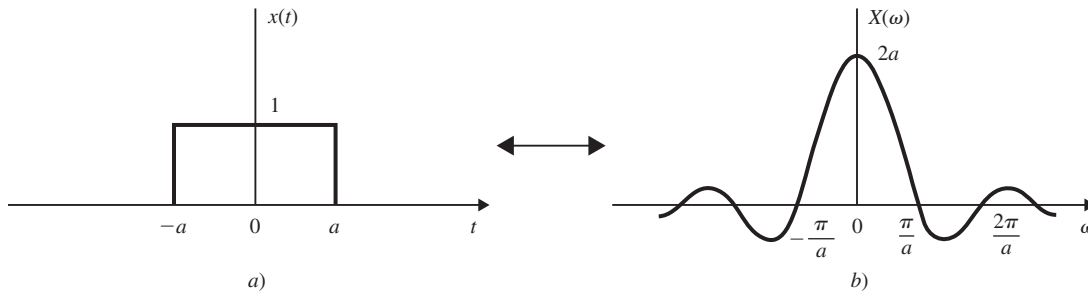


Figura 5-16 Pulso rectangular y su transformada de Fourier.

5.20. Encuentre la transformada de Fourier de la señal [figura 5-17a)]

$$x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t}$$

De la ecuación (5.136) tenemos que

$$p_a(t) \leftrightarrow 2 \frac{\text{sen } \omega a}{\omega}$$

Ahora, por la propiedad de dualidad (5.54), tenemos

$$2 \frac{\text{sen } at}{t} \leftrightarrow 2\pi p_a(-\omega)$$

Si dividimos ambos lados entre 2π (y por la propiedad de linealidad) obtenemos

$$\frac{\text{sen } at}{\pi t} \leftrightarrow p_a(-\omega) = p_a(\omega) \quad (5.137)$$

donde $p_a(\omega)$ está definida por [véanse la ecuación (5.135) y la figura 5-17b)]

$$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

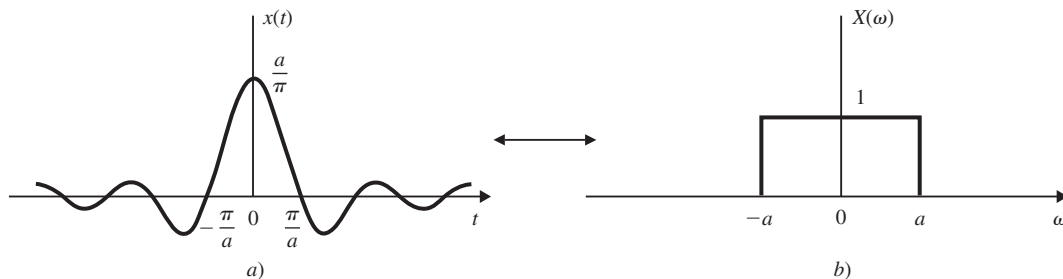


Figura 5-17 $\text{Sen } at/\pi t$ y su transformada de Fourier.

5.21. Encuentre la transformada de Fourier de la señal [figura 5-18a)]

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$$

La señal $x(t)$ puede volver a escribirse como

$$x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Así obtenemos

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \tag{5.138}$$

La transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ se muestra en la figura 5-18b).

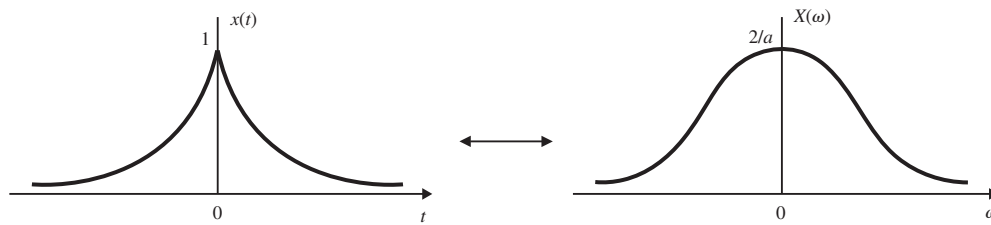


Figura 5-18 $e^{-a|t|}$ y su transformada de Fourier.

5.22. Encuentre la transformada de Fourier de la señal [figura 5-19a)]

$$x(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$$

De la ecuación (5.138) tenemos que

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Ahora, por la propiedad de dualidad (5.54) tenemos que

$$\frac{2a}{a^2 + t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-a|\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

Si dividimos ambos lados entre $2a$, obtenemos

$$\frac{1}{a^2 + t^2} \leftrightarrow \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|} \tag{5.139}$$

La transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ se muestra en la figura 5-19b).

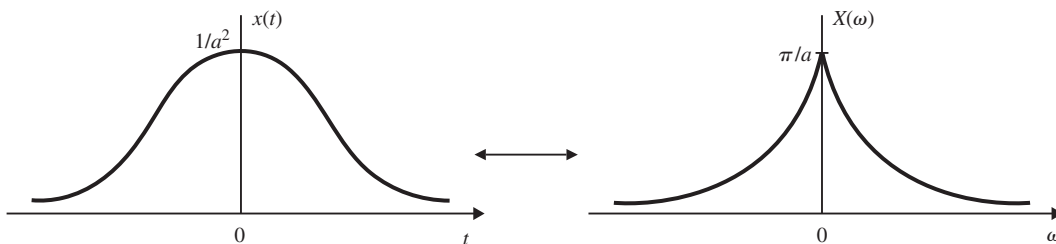


Figura 5-19 $1/(a^2 + t^2)$ y su transformada de Fourier.

5.23. Encuentre la transformada de Fourier de las siguientes señales:

a) $x(t) = 1$

b) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

c) $x(t) = e^{-j\omega_0 t}$

d) $x(t) = \cos \omega_0 t$

e) $x(t) = \text{sen } \omega_0 t$

a) Por la ecuación (5.43) tenemos que $\delta(t) \leftrightarrow 1$ (5.140)

Así, por la propiedad de dualidad (5.54) obtenemos

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$
 (5.141)

La figura 5-20a) y b) ilustra las relaciones en las ecuaciones (5.140) y (5.141), respectivamente.

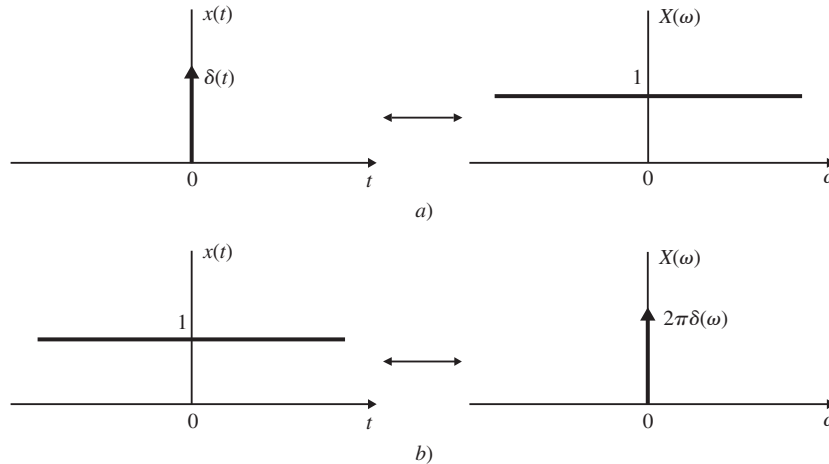


Figura 5-20 a) Impulso unitario y su transformada de Fourier; b) señal constante (de cd) y su transformada de Fourier.

b) Si aplicamos la propiedad de desplazamiento de frecuencia (5.51) a la ecuación (5.141) obtenemos

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$
 (5.142)

c) De la ecuación (5.142) se deriva que

$$e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$
 (5.143)

d) De la fórmula de Euler tenemos que

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

De este modo, por medio de las ecuaciones (5.142) y (5.143) y de la propiedad de linealidad (5.49), obtenemos

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$
 (5.144)

La figura 5-21 ilustra la relación en la ecuación (5.144).

e) De manera similar, tenemos que

$$\text{sen } \omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

y nuevamente, mediante las ecuaciones (5.142) y (5.143), obtenemos

$$\text{sen } \omega_0 t \leftrightarrow -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$
 (5.145)

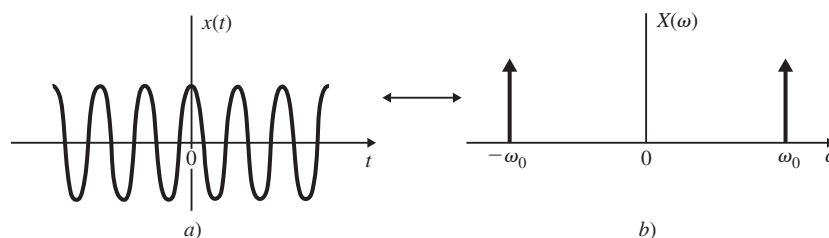


Figura 5-21 Señal coseno y su transformada de Fourier.

5.24. Encuentre la transformada de Fourier de una señal periódica $x(t)$ con periodo T_0 .

Expresamos $x(t)$ como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Tomando la transformada de Fourier de ambos lados, y mediante la ecuación (5.142) y la propiedad de linealidad (5.49), obtenemos

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0) \tag{5.146}$$

lo que indica que la transformada de Fourier de una señal periódica se compone de una secuencia de impulsos equidistantes localizados en las frecuencias armónicas de la señal.

5.25. Encuentre la transformada de Fourier del tren de impulsos periódicos [figura 5-22a)].

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

De la ecuación (5.115) en el problema 5.8, la serie de Fourier exponencial compleja de $\delta_{T_0}(t)$ está dada por

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Por medio de la ecuación (5.146) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_{T_0}(t)] &= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \end{aligned}$$

o

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \leftrightarrow \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \tag{5.147}$$

De este modo, la transformada de Fourier de un tren de impulsos unitario también es un tren de impulsos similar [figura 5-22b)].

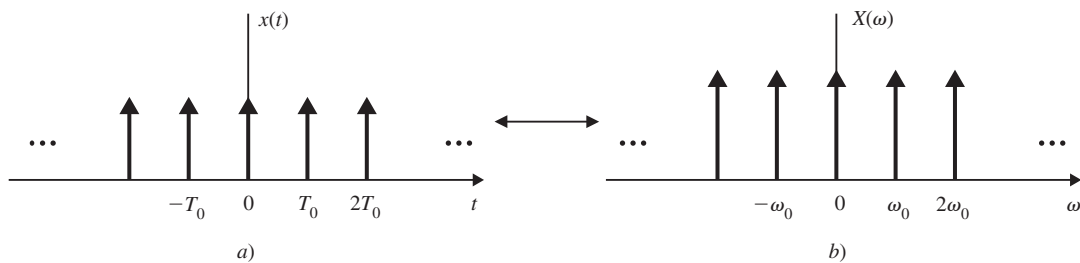


Figura 5-22 Tren de impulsos unitario y su transformada de Fourier.

5.26. Demuestre que

$$x(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) \tag{5.148}$$

y

$$x(t) \sin \omega_0 t \leftrightarrow -j \left[\frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) \right] \tag{5.149}$$

La ecuación (5.148) se conoce como *teorema de modulación*.

De la fórmula de Euler tenemos que

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

Entonces, por la propiedad de desplazamiento de frecuencia (5.51) y la propiedad de linealidad (5.49) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t) \cos \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}x(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t) e^{-j\omega_0 t}\right] \\ &= \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0)\end{aligned}$$

Por consiguiente,
$$x(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0)$$

De manera semejante, tenemos que

$$\text{sen } \omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

y
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t) \text{sen } \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j}x(t) e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}x(t) e^{-j\omega_0 t}\right] \\ &= \frac{1}{2j}X(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j}X(\omega + \omega_0)\end{aligned}$$

Por consiguiente,
$$x(t) \text{sen } \omega_0 t \leftrightarrow -j\left[\frac{1}{2}X(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0)\right]$$

5.27. La transformada de Fourier de una señal $x(t)$ está dada por [figura 5-23a)]

$$X(\omega) = \frac{1}{2}p_a(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}p_a(\omega + \omega_0)$$

Encuentre y dibuje $x(t)$.

De la ecuación (5.137) y el teorema de modulación (5.148) se deduce que

$$x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t} \cos \omega_0 t$$

y esto se esquematiza en la figura 5-23b).

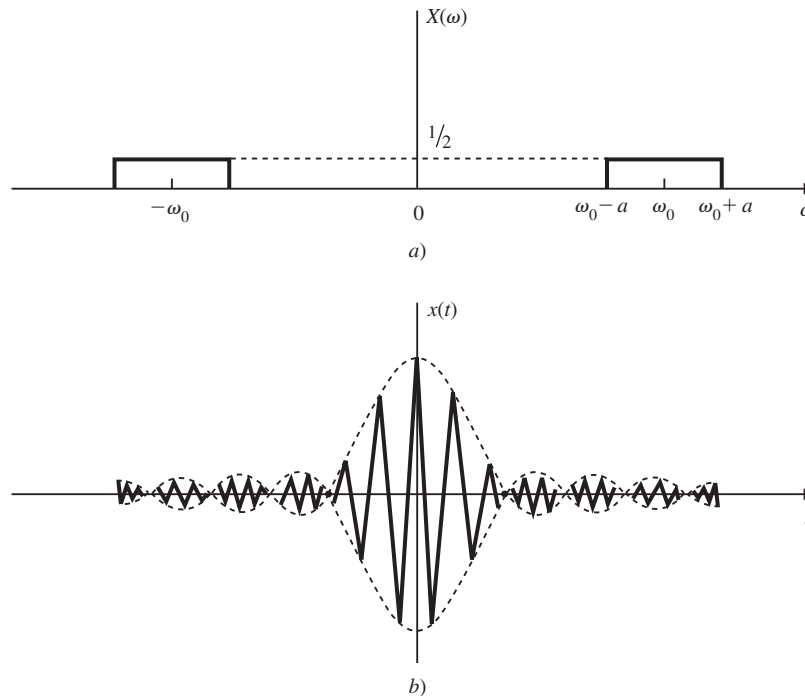


Figura 5-23

5.28. Verifique la propiedad de diferenciación (5.55); es decir,

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega)$$

De la ecuación (5.32), la transformada de Fourier inversa de $X(\omega)$ es

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{5.150}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \frac{\partial}{\partial t} (e^{j\omega t}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \tag{5.151}$$

Al comparar la ecuación (5.151) con la ecuación (5.150), concluimos que $dx(t)/dt$ es la transformada de Fourier inversa de $j\omega X(\omega)$. De esta forma,

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega)$$

5.29. Encuentre la transformada de Fourier de la función *signo*, $\text{sgn}(t)$ (figura 5-24), la cual se define como

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \tag{5.152}$$

La función signo, $\text{sgn}(t)$, puede expresarse como

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

Mediante la ecuación (1.30) tenemos que

$$\frac{d}{dt} \text{sgn}(t) = 2\delta(t)$$

Sea

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

Entonces, si aplicamos la propiedad de diferenciación (5.55) tenemos que

$$j\omega X(\omega) = \mathcal{F}[2\delta(t)] = 2 \rightarrow X(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

Por consiguiente,

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \tag{5.153}$$

Observe que $\text{sgn}(t)$ es una función impar, y por tanto su transformada de Fourier es una función imaginaria pura de ω (problema 5.41).

5.30. Verifique la ecuación (5.48); es decir,

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \tag{5.154}$$

Como se muestra en la figura 5-25, $u(t)$ puede expresarse como

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

Observe que $1/2$ es la componente par de $u(t)$, mientras que $1/2 \text{sgn}(t)$ es la componente impar de $u(t)$. De esta forma, por las ecuaciones (5.141) y (5.153) y la propiedad de (5.49) obtenemos

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

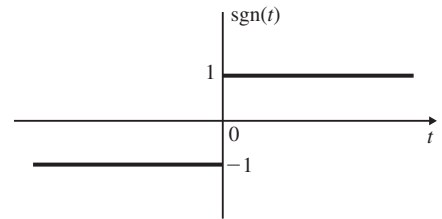


Figura 5-24 Función signo.

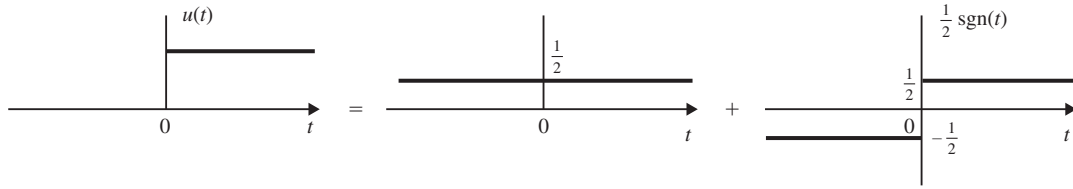


Figura 5-25 Función escalón unitario y sus componentes par e impar.

5.31. Demuestre el teorema de convolución en el tiempo (5.58); es decir,

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega) X_2(\omega)$$

Por las definiciones (2.6) y (5.31) tenemos

$$\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

Al modificar el orden de integración resulta

$$\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

Mediante la propiedad de desplazamiento en el tiempo (5.50)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = X_2(\omega) e^{-j\omega\tau}$$

De este modo, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) X_2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] X_2(\omega) = X_1(\omega) X_2(\omega) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega) X_2(\omega)$$

5.32. Mediante el teorema de convolución en el tiempo (5.58), encuentre la transformada de Fourier inversa de $X(\omega) = 1/(a + j\omega)^2$.

De la ecuación (5.45) tenemos que
$$e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} \quad (5.155)$$

Ahora
$$X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2} = \left(\frac{1}{a + j\omega} \right) \left(\frac{1}{a + j\omega} \right)$$

De este modo, mediante el teorema de convolución en el tiempo (5.58) tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-at} u(t) * e^{-at} u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) e^{-a(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau \\ &= e^{-at} \int_0^t d\tau = te^{-at} u(t) \end{aligned}$$

Por consiguiente,
$$te^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(a + j\omega)^2} \quad (5.156)$$

5.33. Verifique la propiedad de integración (5.57); es decir,

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)$$

De la ecuación (2.60) tenemos que
$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

Así, mediante el teorema de convolución en el tiempo (5.58) y la ecuación (5.154) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t) * u(t)] &= X(\omega) \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \pi X(\omega) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega) \\ &= \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)\end{aligned}$$

puesto que $X(\omega)\delta(\omega) = X(0)\delta(\omega)$ por la ecuación (1.25). De este modo,

$$\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] \leftrightarrow \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)$$

5.34. Por medio de la propiedad de integración (5.57) y la ecuación (1.31), encuentre la transformada de Fourier de $u(t)$.

De la ecuación (1.31) tenemos que $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$

Ahora, de la ecuación (5.140) tenemos que $\delta(t) \leftrightarrow 1$

Cuando establecemos $x(\tau) = \delta(\tau)$ en la ecuación (5.57) llegamos a

$$x(t) = \delta(t) \leftrightarrow X(\omega) = 1 \quad \text{y} \quad X(0) = 1$$

y $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

5.35. Demuestre el teorema de convolución en la frecuencia (5.59); es decir,

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

Por las definiciones (5.31) y (5.32) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x_1(t)x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda \right] x_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j(\omega-\lambda)t} dt \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) X_2(\omega - \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)\end{aligned}$$

Por consiguiente, $x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

5.36. Por medio del teorema de convolución en la frecuencia (5.59) derive el teorema de modulación (5.148).

De la ecuación (5.144) tenemos que

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

Por el teorema de convolución de la frecuencia (5.59) llegamos a

$$\begin{aligned}x(t) \cos \omega_0 t &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * [\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0)\end{aligned}$$

La última igualdad se deduce de la ecuación (2.59).

5.37. Verifique la relación de Parseval (5.63); esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega$$

Del teorema de convolución en la frecuencia (5.59) tenemos que

$$\mathcal{F}[x_1(t)x_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(\omega - \lambda) d\lambda$$

es decir,
$$\int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t)x_2(t)] e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(\omega - \lambda) d\lambda$$

Al establecer $\omega = 0$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(-\lambda) d\lambda$$

Al cambiar la variable muda de integración obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega$$

5.38. Demuestre la identidad de Parseval [ecuación (5.64)] o el teorema de Parseval para la transformada de Fourier; esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Por la definición (5.31) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x^*(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt \right]^* = X^*(-\omega) \end{aligned}$$

donde * denota el complejo conjugado. De este modo,

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-\omega) \quad (5.157)$$

Al establecer $x_1(t) = x(t)$ y $x_2(t) = x^*(t)$ en la relación de Parseval (5.63) obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)X^*(\omega) d\omega$$

o
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

5.39. Demuestre que la ecuación (5.61a); es decir,

$$X^*(\omega) = X(-\omega)$$

es una condición necesaria y suficiente para que $x(t)$ sea real.

Por la definición (5.31),
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Si $x(t)$ es real, entonces $x^*(t) = x(t)$ y

$$\begin{aligned} X^*(\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt = X(-\omega) \end{aligned}$$

Así, $X^*(\omega) = X(-\omega)$ es la condición necesaria para que $x(t)$ sea real. A continuación supongamos que $X^*(\omega) = X(-\omega)$. De la definición de la transformada de Fourier inversa (5.32)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Entonces
$$\begin{aligned} x^*(t) &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right]^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)e^{-j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(-\omega)e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)e^{j\lambda t} d\lambda = x(t) \end{aligned}$$

lo que indica que $x(t)$ es real. De esta manera concluimos que

$$X^*(\omega) = X(-\omega)$$

es la condición necesaria y suficiente para que $x(t)$ sea real.

5.40. Encuentre las transformadas de Fourier de las siguientes señales:

a) $x(t) = u(-t)$

b) $x(t) = e^{at}u(-t), a > 0$

De la ecuación (5.53) tenemos que $x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$

De este modo, si $x(t)$ es real, entonces por la ecuación (5.61a) tenemos que

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) = X^*(\omega) \tag{5.158}$$

a) De la ecuación (5.154) $u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

Así, por la ecuación (5.158) obtenemos

$$u(-t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} \tag{5.159}$$

b) De la ecuación (5.155) $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$

De esta forma, por la ecuación (5.158) obtenemos que

$$e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{a - j\omega} \tag{5.160}$$

5.41. Considere una señal real $x(t)$ y sea

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = A(\omega) + jB(\omega)$$

y $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

donde $x_e(t)$ y $x_o(t)$ son las respectivas componentes par e impar de $x(t)$. Demuestre que

$$x_e(t) \leftrightarrow A(\omega) \tag{5.161a}$$

$$x_o(t) \leftrightarrow jB(\omega) \tag{5.161b}$$

De las ecuaciones (1.5) y (1.6) tenemos que

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

Ahora, si $x(t)$ es real, entonces por la ecuación (5.158) tenemos que

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) = X^*(\omega) = A(\omega) - jB(\omega)$$

De este modo concluimos que $x_e(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{2}X^*(\omega) = A(\omega)$

$$x_o(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(\omega) - \frac{1}{2}X^*(\omega) = jB(\omega)$$

Las ecuaciones (5.161a) y (5.161b) demuestran respectivamente que la transformada de Fourier de una señal real par es una función real de ω , mientras que una señal real impar es una función imaginaria de ω .

5.42. Mediante las ecuaciones (5.161a) y (5.155) encuentre la transformada de Fourier de $e^{-a|t|}$ ($a > 0$).

De la ecuación (5.155) tenemos que

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Por la ecuación (1.5) la componente par de $e^{-at}u(t)$ está dada por

$$\frac{1}{2}e^{-at}u(t) + \frac{1}{2}e^{at}u(-t) = \frac{1}{2}e^{-a|t|}$$

Así, por la ecuación (5.161a) tenemos que

$$\frac{1}{2}e^{-a|t|} \leftrightarrow \operatorname{Re} \left(\frac{1}{a + j\omega} \right) = \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

o

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

y éste es el mismo resultado obtenido en el problema 5.21 [ecuación (5.138)].

5.43. Encuentre la transformada de Fourier de una señal de pulso gaussiano

$$x(t) = e^{-at^2} \quad a > 0$$

Por la definición (5.31)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt \quad (5.162)$$

Si tomamos la derivada de ambos lados de la ecuación (5.162) con respecto a ω tenemos

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = -j \int_{-\infty}^{\infty} te^{-at^2} e^{-j\omega t} dt$$

Ahora, por medio de la fórmula de integración por partes se obtiene

$$\int_{\alpha}^{\beta} u dv = uv \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} v du$$

y al dejar que

$$u = e^{-j\omega t} \quad y \quad dv = te^{-at^2} dt$$

tenemos que

$$du = -j\omega e^{-j\omega t} dt \quad y \quad v = -\frac{1}{2a} e^{-at^2}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-at^2} e^{-j\omega t} dt &= -\frac{1}{2a} e^{-at^2} e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - j \frac{\omega}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt \\ &= -j \frac{\omega}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

puesto que $a > 0$. De este modo obtenemos

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = -\frac{\omega}{2a} X(\omega)$$

Al resolver la anterior ecuación diferencial separable para $X(\omega)$ obtenemos

$$X(\omega) = A e^{-\omega^2/4a} \quad (5.163)$$

donde A es una constante arbitraria. Para evaluar A procederemos como sigue: estableciendo $\omega = 0$ en la ecuación (5.162) y mediante un cambio de variable tenemos que

$$X(0) = A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at^2} dt = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Si sustituimos este valor de A en la ecuación (5.163) obtenemos

$$X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \quad (5.164)$$

Por consiguiente, llegamos a

$$e^{-at^2}, a > 0 \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \tag{5.165}$$

Observe que la transformada de Fourier de una señal de pulso gaussiano también es un pulso gaussiano en el dominio de la frecuencia. La figura 5-26 ilustra la relación en la ecuación (5.165).

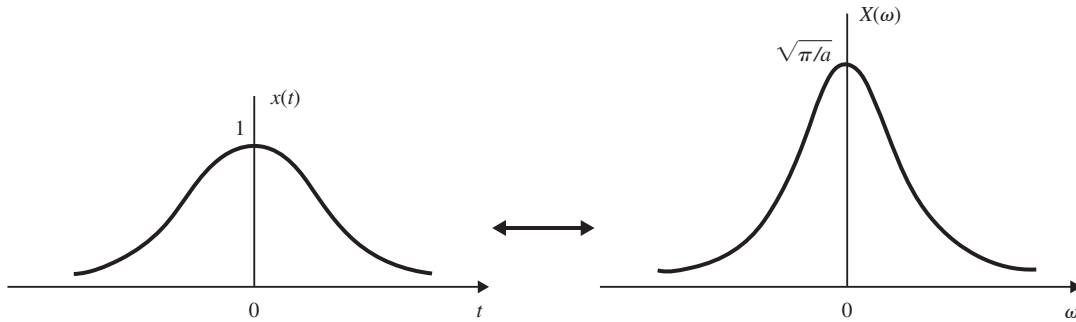


Figura 5-26 Pulso gaussiano y su transformada de Fourier.

RESPUESTA EN FRECUENCIA

5.44. Mediante la transformada de Fourier vuelva a resolver el problema 2.25.

El sistema está descrito por $y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t)$

Al tomar las transformadas de Fourier de la ecuación anterior obtenemos que

$$j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega) + j\omega X(\omega)$$

o $(j\omega + 2) Y(\omega) = (1 + j\omega) X(\omega)$

Por consiguiente, por la ecuación (5.67) la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ es

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1 + j\omega}{2 + j\omega} = \frac{2 + j\omega - 1}{2 + j\omega} = 1 - \frac{1}{2 + j\omega}$$

Tomando la transformada de Fourier inversa de $H(\omega)$, la respuesta al impulso $h(t)$ es

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

Observe que el procedimiento es idéntico al del método de la transformada de Laplace con s reemplazada por $j\omega$ (problema 3.29).

5.45. Considere un sistema LIT de tiempo continuo descrito por

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \tag{5.166}$$

Mediante la transformada de Fourier, encuentre la salida $y(t)$ para cada una de las siguientes señales de entrada:

a) $x(t) = e^{-t}u(t)$

b) $x(t) = u(t)$

a) Tomando las transformadas de Fourier de la ecuación (5.166) tenemos que

$$j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega)$$

Por consiguiente,

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{2 + j\omega}$$

De la ecuación (5.155)

$$X(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

y

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{2 + j\omega}$$

Por tanto,

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$$

b) De la ecuación (5.154)

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

De este modo, por la ecuación (5.66) y mediante la técnica de expansión en fracciones parciales, tenemos que

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \frac{1}{2 + j\omega} \\ &= \pi\delta(\omega) \frac{1}{2 + j\omega} + \frac{1}{j\omega(2 + j\omega)} \\ &= \frac{\pi}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{2} \frac{1}{2 + j\omega} \\ &= \frac{1}{2} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] - \frac{1}{2} \frac{1}{2 + j\omega} \end{aligned}$$

donde utilizamos el hecho de que $f(\omega)\delta(\omega) = f(0)\delta(\omega)$ [ecuación (1.25)]. De este modo,

$$y(t) = \frac{1}{2}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t)$$

Observamos que el método de la transformada de Laplace es más fácil en este caso debido a la transformada de Fourier de $u(t)$.

5.46. Considere el sistema LIT en el problema 5.45. Si la entrada $x(t)$ es la forma de onda cuadrada periódica mostrada en la figura 5-27, encuentre la amplitud del primer y del tercer armónicos en la salida $y(t)$.

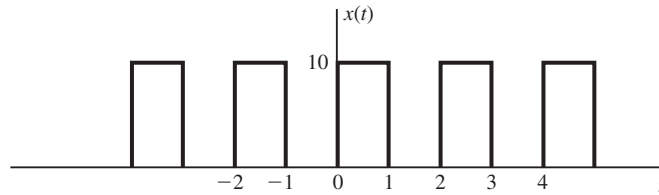


Figura 5-27

Observe que $x(t)$ es la misma $x(t)$ mostrada en la figura 5-8 [problema 5.5]. De este modo, estableciendo que $A = 10$, $T_0 = 2$ y $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi$ en la ecuación (5.106) tenemos que

$$x(t) = 5 + \frac{10}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\pi t}$$

A continuación, del problema 5.45

$$H(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega} \rightarrow H(k\omega_0) = H(k\pi) = \frac{1}{2 + jk\pi}$$

Así, por la ecuación (5.74) obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= 5H(0) + \frac{10}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} H[(2m+1)\pi] e^{j(2m+1)\pi t} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{10}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)[2 + j(2m+1)\pi]} e^{j(2m+1)\pi t} \end{aligned} \quad (5.167)$$

Sea

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t}$$

La forma armónica de $y(t)$ está dada por [ecuación (5.15)]

$$y(t) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(k\omega_0 t - \phi_k)$$

donde D_k es la amplitud de la k -ésima componente armónica de $y(t)$. Por las ecuaciones (5.11) y (5.16), D_k y d_k están relacionadas mediante

$$D_k = 2 |d_k| \quad (5.168)$$

De esta manera, de la ecuación (5.167), con $m = 0$, obtenemos

$$D_1 = 2 |d_1| = 2 \left| \frac{10}{j\pi(2 + j\pi)} \right| = 1.71$$

Con $m = 1$ obtenemos

$$D_3 = 2 |d_3| = 2 \left| \frac{10}{j\pi(3)(2 + j3\pi)} \right| = 0.22$$

5.47. La representación gráfica más usada de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ es la *gráfica de Bode* en la cual las cantidades $20 \log_{10} |H(\omega)|$ y $\theta_H(\omega)$ se grafican contra ω , con ω graficada en una escala logarítmica. A la cantidad $20 \log_{10} |H(\omega)|$ se le llama magnitud expresada en *decibelios* (dB), denotada como $|H(\omega)|_{\text{dB}}$. Dibuje las gráficas de Bode para las siguientes respuestas de frecuencia:

a) $H(\omega) = 1 + \frac{j\omega}{10}$

b) $H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/100}$

c) $H(\omega) = \frac{10^4(1 + j\omega)}{(10 + j\omega)(100 + j\omega)}$

a) $|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right|$

Para $\omega \ll 10$,

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right| \rightarrow 20 \log_{10} 1 = 0 \quad \text{a medida que } \omega \rightarrow 0$$

Para $\omega \gg 10$,

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right| \rightarrow 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{10} \right) \quad \text{a medida que } \omega \rightarrow \infty$$

En una escala de frecuencias logarítmicas, $20 \log_{10}(\omega/10)$ es una línea recta con una pendiente de 20 dB/década (una década es un cambio de 10 a 1 en la frecuencia). Esta línea recta intercepta el eje de 0 dB en $\omega = 10$ [figura 5-28a]. (Este valor de ω se conoce como *frecuencia de esquina*.) En la frecuencia de esquina de $\omega = 10$

$$H(10)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |1 + j1| = 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 3 \text{ dB}$$

La gráfica de $|H(\omega)|_{\text{dB}}$ se esquematiza en la figura 5-28a). A continuación,

$$\theta_H(\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{10}$$

Entonces $\theta_H(\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{10} \rightarrow 0 \quad \text{a medida que } \omega \rightarrow 0$

$$\theta_H(\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{10} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{a medida que } \omega \rightarrow \infty$$

Para $\omega = 10$, $\theta_H(10) = \tan^{-1} 1 = \pi/4$ radianes (rad). La gráfica de $\theta_H(\omega)$ se dibuja en la figura 5-28b). Observe que las líneas punteadas representan la aproximación en línea recta de las gráficas de Bode.

b) $|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + j\omega/100} \right| = -20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{100} \right|$

Para $\omega \ll 100$,

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{100} \right| \rightarrow -20 \log_{10} 1 = 0 \quad \text{a medida que } \omega \rightarrow 0$$

Para $\omega \gg 100$,

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \left| 1 - j \frac{\omega}{100} \right| \rightarrow -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{100} \right) \quad \text{a medida que } \omega \rightarrow \infty$$

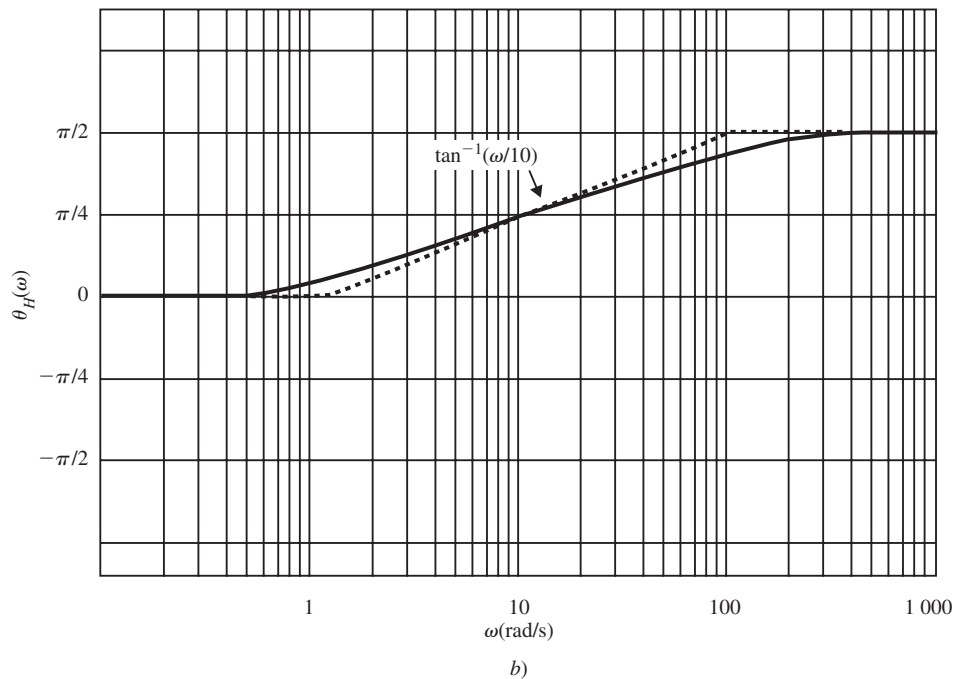
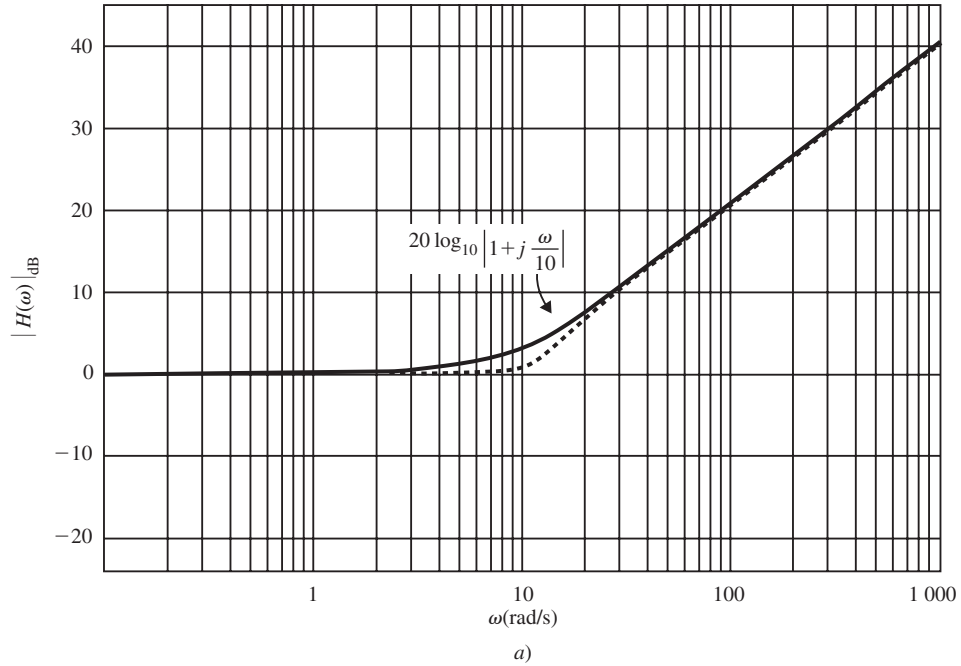


Figura 5-28 Gráficas de Bode.

En una escala de frecuencia logarítmica $-20 \log_{10}(\omega/100)$ es una línea recta con una pendiente de -20 dB/década. Esta línea recta intercepta al eje 0-dB en la frecuencia de esquina $\omega = 100$ [figura 5-29a)]. Para la frecuencia de esquina $\omega = 100$

$$H(100)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \sqrt{2} \approx -3 \text{ dB}$$

La gráfica de $|H(\omega)|_{\text{dB}}$ se esquematiza en la figura 5-29a). A continuación,

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{100}$$

Entonces $\theta_H(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{100} \rightarrow 0$ a medida que $\omega \rightarrow 0$

$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{100} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ a medida que $\omega \rightarrow \infty$

Para $\omega = 100$, $\theta_H(100) = -\tan^{-1} 1 = -\pi/4$ rad. La gráfica de $\theta_H(\omega)$ se esquematiza en la figura 5-29b).

c) Primero, volvemos a escribir $H(\omega)$ en la forma estándar como

$$H(\omega) = \frac{10(1 + j\omega)}{(1 + j\omega/10)(1 + j\omega/100)}$$

Entonces $|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10} |1 + j\omega| - 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right| - 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{100} \right|$

Observe que existen tres frecuencias de esquina: $\omega = 1$, $\omega = 10$ y $\omega = 100$. En la frecuencia de esquina $\omega = 1$

$$H(1)|_{\text{dB}} = 20 + 20 \log_{10} \sqrt{2} - 20 \log_{10} \sqrt{1.01} - 20 \log_{10} \sqrt{1.0001} \approx 23 \text{ dB}$$

Para la frecuencia de esquina $\omega = 10$

$$H(10)|_{\text{dB}} = 20 + 20 \log_{10} \sqrt{101} - 20 \log_{10} \sqrt{2} - 20 \log_{10} \sqrt{1.01} \approx 37 \text{ dB}$$

Para la frecuencia de esquina $\omega = 100$

$$H(100)|_{\text{dB}} = 20 + 20 \log_{10} \sqrt{10,001} - 20 \log_{10} \sqrt{101} - 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 37 \text{ dB}$$

La gráfica de amplitud de Bode se dibuja en la figura 5-30a). También se indica cada término que contribuye a la amplitud total. A continuación,

$$\theta_H(\omega) = \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{10} - \tan^{-1} \frac{\omega}{100}$$

Entonces $\theta_H(\omega) \rightarrow 0 - 0 - 0 = 0$ a medida que $\omega \rightarrow 0$

$\theta_H(\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ a medida que $\omega \rightarrow \infty$

y $\theta_H(1) = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0.1) - \tan^{-1}(0.01) = 0.676$ rad

$\theta_H(10) = \tan^{-1}(10) - \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0.1) = 0.586$ rad

$\theta_H(100) = \tan^{-1}(100) - \tan^{-1}(10) - \tan^{-1}(1) = -0.696$ rad

La gráfica de $\theta_H(\omega)$ se ilustra en la figura 5-30b).

5.48. Un desplazador de fase ideal de $(-\pi/2)$ radianes (o -90°) (figura 5-31) se define mediante la respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j(\pi/2)} & \omega > 0 \\ e^{j(\pi/2)} & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.169)$$

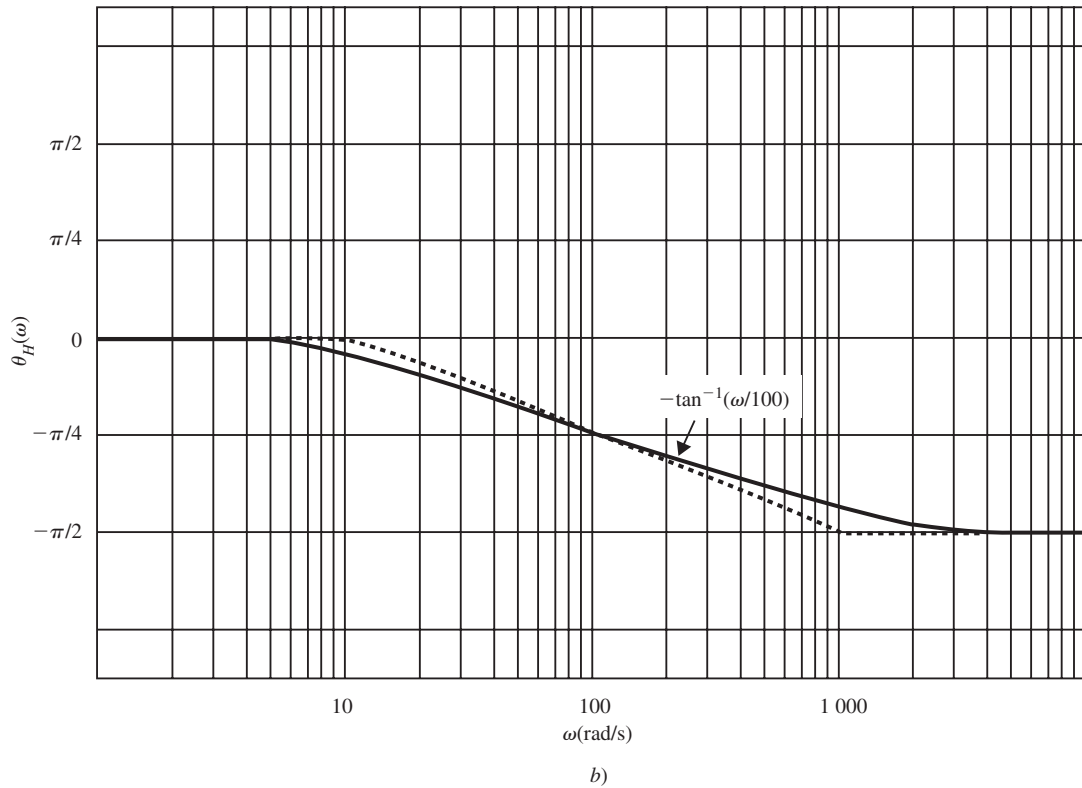
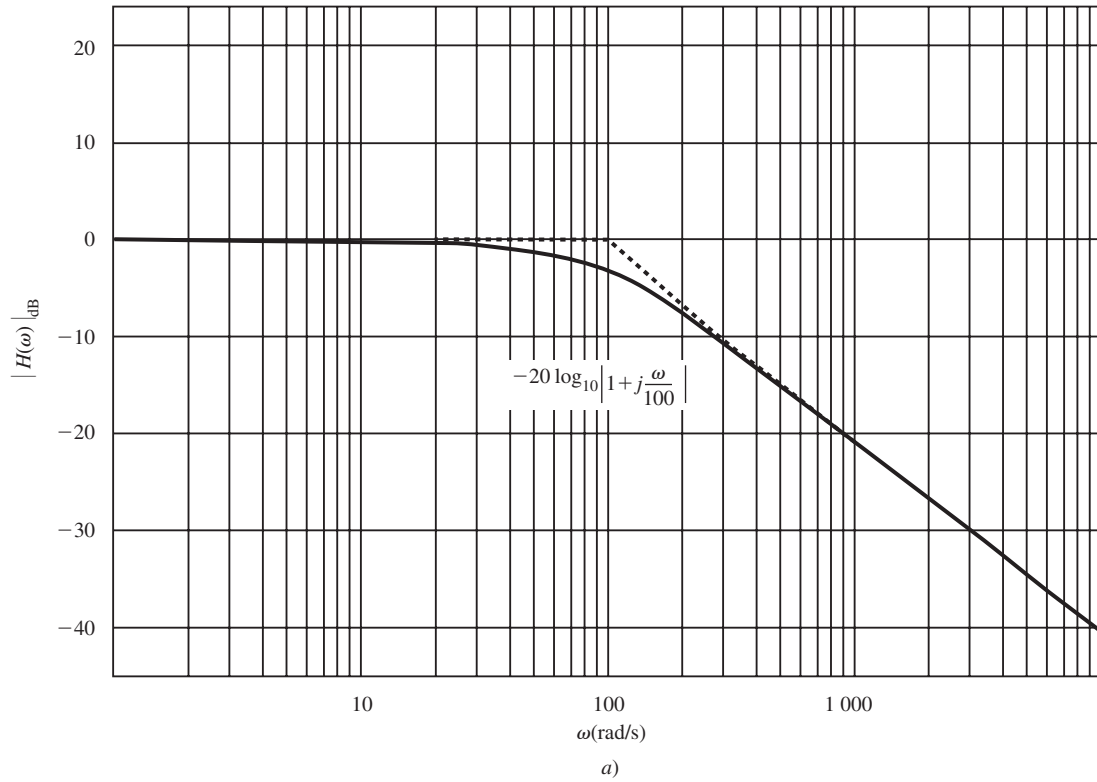


Figura 5-29 Gráficas de Bode.

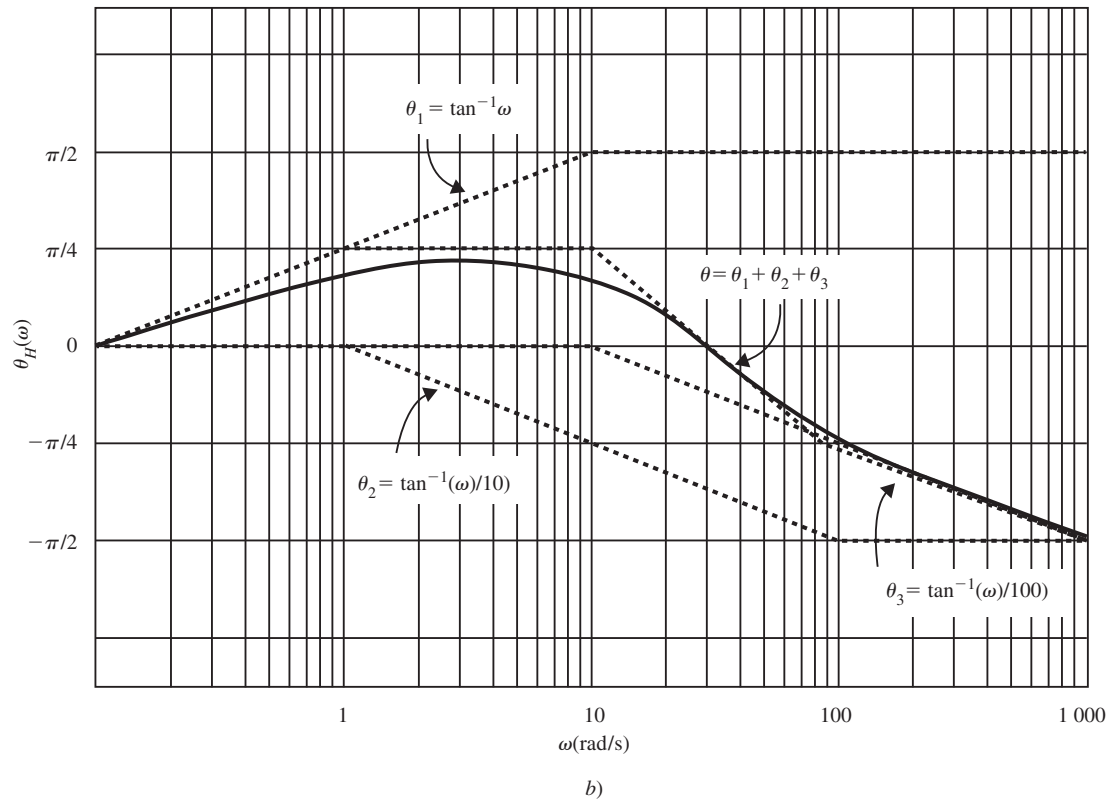
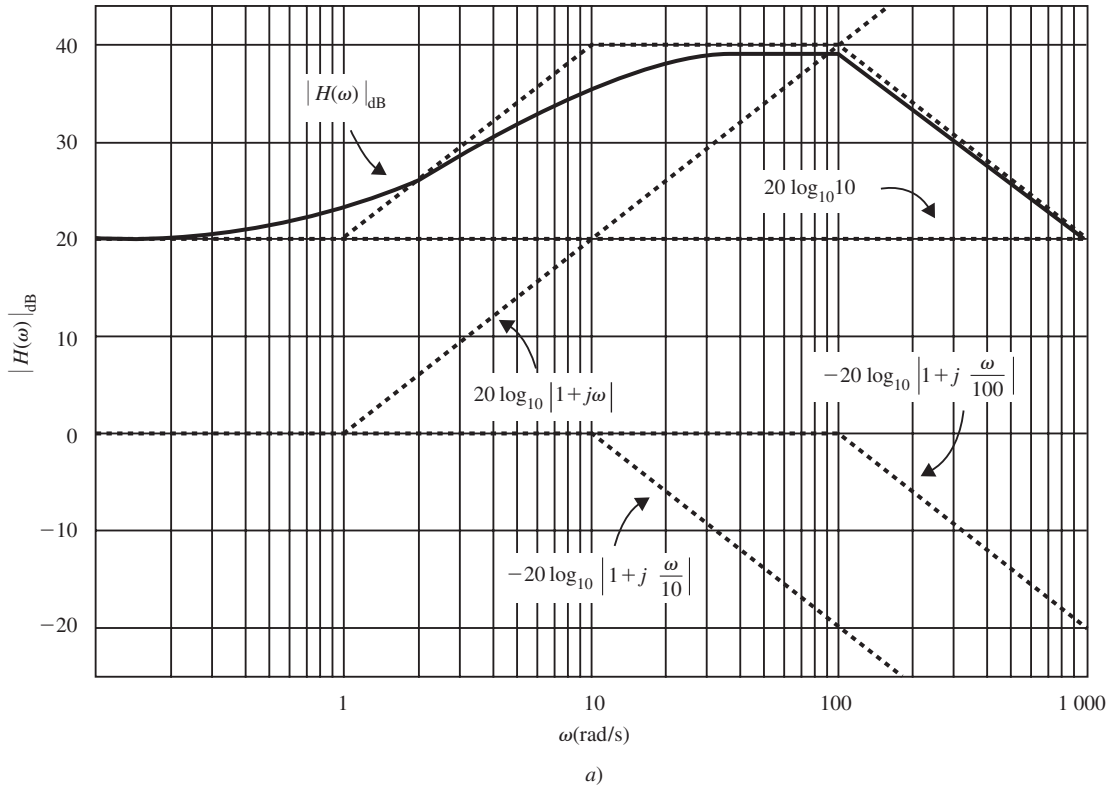


Figura 5-30 Gráficas de Bode.

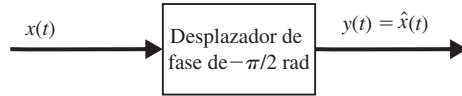


Figura 5-31 Desplazador de fase de $-\pi/2$ rad.

- a) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ de este desplazador de fase.
 b) Encuentre la salida $y(t)$ de este desplazador de fase debida a una entrada arbitraria $x(t)$.
 c) Encuentre la salida $y(t)$ cuando $x(t) = \cos \omega_0 t$.

a) Puesto que $e^{-j\pi/2} = -j$ y $e^{j\pi/2} = j$, $H(\omega)$ puede volver a escribirse como

$$H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) \quad (5.170)$$

donde

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ -1 & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.171)$$

Ahora, de la ecuación (5.153)

$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

y por la propiedad de dualidad (5.54) tenemos

$$\frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi \operatorname{sgn}(-\omega) = -2\pi \operatorname{sgn}(\omega)$$

o

$$\frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(\omega) \quad (5.172)$$

puesto que $\operatorname{sgn}(\omega)$ es una función impar de ω . De esta forma, la respuesta al impulso $h(t)$ está dada por

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[-j \operatorname{sgn}(\omega)] = \frac{1}{\pi t} \quad (5.173)$$

b) Por la ecuación (2.6)

$$y(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (5.174)$$

La señal $y(t)$ definida por la ecuación (5.174) se conoce como *transformada de Hilbert* de $x(t)$ y por lo general se denota mediante $\hat{x}(t)$.

c) De la ecuación (5.144)

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Entonces

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)][-j \operatorname{sgn}(\omega)] \\ &= -j\pi \operatorname{sgn}(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0) - j\pi \operatorname{sgn}(-\omega_0)\delta(\omega + \omega_0) \\ &= -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

puesto que $\operatorname{sgn}(\omega_0) = 1$ y $\operatorname{sgn}(-\omega_0) = -1$. De este modo, de la ecuación (5.145) obtenemos

$$y(t) = \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Observe que $\cos(\omega_0 t - \pi/2) = \operatorname{sen} \omega_0 t$.

5.49. Considere un sistema LIT causal de tiempo continuo con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

Demuestre que la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema puede obtenerse en términos de $A(\omega)$ o $B(\omega)$ solos.

Puesto que el sistema es causal, por definición

$$h(t) = 0 \quad t < 0$$

En consecuencia,

$$h(-t) = 0 \quad t > 0$$

Sea

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t)$$

donde $h_e(t)$ y $h_o(t)$ son las respectivas componentes par e impar de $h(t)$. Entonces de las ecuaciones (1.5) y (1.6) podemos escribir

$$h(t) = 2h_e(t) = 2h_o(t) \quad (5.175)$$

De las ecuaciones (5.61b) y (5.61c) tenemos que

$$h_e(t) \leftrightarrow A(\omega) \quad \text{y} \quad h_o(t) \leftrightarrow jB(\omega)$$

De este modo, por la ecuación (5.175)

$$h(t) = 2h_e(t) = 2\mathcal{F}^{-1}[A(\omega)] \quad t > 0 \quad (5.176a)$$

$$h(t) = 2h_o(t) = 2\mathcal{F}^{-1}[jB(\omega)] \quad t > 0 \quad (5.176b)$$

Las ecuaciones (5.176a) y (5.176b) indican que $h(t)$ puede obtenerse en términos de $A(\omega)$ o $B(\omega)$ solos.

5.50. Considere un sistema LIT causal de tiempo continuo con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

Si la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema no contiene impulsos en el origen, entonces demuestre que $A(\omega)$ y $B(\omega)$ satisfacen la siguiente ecuación:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \quad (5.177a)$$

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \quad (5.177b)$$

Como en el problema 5.49, sea

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t)$$

Puesto que $h(t)$ es causal, es decir, $h(t) = 0$ para $t < 0$, tenemos que

$$h_e(t) = -h_o(t) \quad t < 0$$

También de la ecuación (5.175) tenemos que

$$h_e(t) = h_o(t) \quad t > 0$$

De este modo, mediante la ecuación (5.152) podemos escribir

$$h_e(t) = h_o(t) \operatorname{sgn}(t) \quad (5.178a)$$

$$h_o(t) = h_e(t) \operatorname{sgn}(t) \quad (5.178b)$$

Ahora, de las ecuaciones (5.61b), (5.61c) y (5.153) tenemos que

$$h_e(t) \leftrightarrow A(\omega) \quad h_o(t) \leftrightarrow jB(\omega) \quad \operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

De esta forma, por el teorema de convolución en la frecuencia (5.59) obtenemos

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} jB(\omega) * \frac{2}{j\omega} = \frac{1}{\pi} B(\omega) * \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda$$

y

$$jB(\omega) = \frac{1}{2\pi} A(\omega) * \frac{2}{j\omega} = -j \frac{1}{\pi} A(\omega) * \frac{1}{\omega}$$

o

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi} A(\omega) * \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda$$

Observe que $A(\omega)$ es la transformada de Hilbert de $B(\omega)$ [ecuación (5.174)] y que $B(\omega)$ es el negativo de la transformada de Hilbert de $A(\omega)$.

5.51. Se sabe que la parte real de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ de un sistema LIT causal es $\pi\delta(\omega)$. Encuentre la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ y la función del impulso $h(t)$ del sistema.

Sea

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

Mediante la ecuación (5.177b), con $A(\omega) = \pi\delta(\omega)$ obtenemos

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi\delta(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda) \frac{1}{\omega - \lambda} d\lambda = -\frac{1}{\omega}$$

Por consiguiente,
$$H(\omega) = \pi\delta(\omega) - j\frac{1}{\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

y con la ecuación (5.154)
$$h(t) = u(t)$$

FILTRADO

5.52. Considere un filtro ideal pasa-bajas con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

La entrada para este filtro es
$$x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t}$$

- Encuentre la salida $y(t)$ para $a < \omega_c$.
 - Encuentre la salida $y(t)$ para $a > \omega_c$.
 - ¿En cuál de los casos la salida sufre distorsión?
- a) De la ecuación (5.137) (problema 5.20) tenemos que

$$x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t} \leftrightarrow X(\omega) = p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

Entonces, cuando $a < \omega_c$ tenemos que

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = X(\omega)$$

De este modo,

$$y(t) = x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t}$$

- b) Cuando $a > \omega_c$ tenemos que
$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = X(\omega)$$

Así,

$$y(t) = h(t) = \frac{\text{sen } \omega_c t}{\pi t}$$

- c) En el inciso a), es decir, cuando $\omega_c > a$, $y(t) = x(t)$ y el filtro no produce ninguna distorsión. En el inciso b), esto es, cuando $\omega_c < a$, $y(t) = h(t)$ y el filtro produce distorsión.

5.53. Considere un filtro ideal pasa-bajas con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 4\pi \\ 0 & |\omega| > 4\pi \end{cases}$$

La entrada para este filtro es la onda cuadrada periódica mostrada en la figura 5-27. Encuentre la salida $y(t)$.

Estableciendo $A = 10$, $T_0 = 2$ y $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi$ en la ecuación (5.107) (problema 5.5), obtenemos

$$x(t) = 5 + \frac{20}{\pi} \left(\text{sen } \pi t + \frac{1}{3} \text{sen } 3\pi t + \frac{1}{5} \text{sen } 5\pi t + \dots \right)$$

Puesto que la frecuencia de corte ω_c del filtro es de 4π rad, el filtro pasa todas las componentes armónicas de $x(t)$ cuyas frecuencias angulares sean menores de 4π rad y rechaza todos los componentes armónicos de $x(t)$ cuyas frecuencias angulares sean mayores de 4π rad. Por consiguiente,

$$y(t) = 5 + \frac{20}{\pi} \text{sen } \pi t + \frac{20}{3\pi} \text{sen } 3\pi t$$

5.54. Considere un filtro ideal pasa-bajas con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

La entrada para este filtro es

$$x(t) = e^{-2t}u(t)$$

Encuentre el valor de ω_c de tal modo que este filtro pase exactamente una mitad de la energía normalizada de la señal de entrada $x(t)$.

De la ecuación (5.155)

$$X(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

Entonces

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2 + j\omega} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

La energía normalizada de $x(t)$ es

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{1}{4}$$

Mediante la identidad de Parseval (5.64), la energía normalizada de $y(t)$ es

$$\begin{aligned} E_y &= \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{d\omega}{4 + \omega^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{d\omega}{4 + \omega^2} = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\omega_c}{2} = \frac{1}{2} E_x = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos

$$\frac{\omega_c}{2} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{y} \quad \omega_c = 2 \text{ rad/s}$$

5.55. El ancho de banda equivalente de un filtro con respuesta en frecuencia $H(\omega)$ se define por

$$W_{\text{eq}} = \frac{1}{|H(\omega)|_{\text{máx}}^2} \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \tag{5.179}$$

donde $|H(\omega)|_{\text{máx}}$ denota el valor máximo del espectro de magnitud. Considere el filtro pasa-bajas RC ilustrado en la figura 5-6a).

- a) Encuentre su ancho de banda de 3 dB $W_{3\text{dB}}$.
- b) Encuentre su ancho de banda equivalente W_{eq} .

a) De la ecuación (5.91), la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro RC está dada por

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_0)}$$

donde $\omega_0 = 1/RC$. Ahora

$$|H(\omega)| = \frac{1}{[1 + (\omega/\omega_0)^2]^{1/2}}$$

El espectro de amplitud $|H(\omega)|$ se grafica en la figura 5-6b). Cuando $\omega = \omega_0 = 1/RC$, $|H(\omega_0)| = 1/\sqrt{2}$. De este modo, el ancho de banda de 3 dB del filtro RC está dado por

$$W_{3\text{dB}} = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

- b) De la figura 5-6b) vemos que $|H(0)| = 1$ es el espectro de magnitud máximo. Al reescribir $H(\omega)$ como

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{RC} \frac{1}{1/RC + j\omega}$$

y por medio de la ecuación (5.179), el ancho de banda equivalente del filtro RC está dado por (figura 5-32)

$$W_{\text{eq}} = \frac{1}{(RC)^2} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(1/RC)^2 + \omega^2} = \frac{1}{(RC)^2} \frac{\pi}{2/RC} = \frac{\pi}{2RC}$$

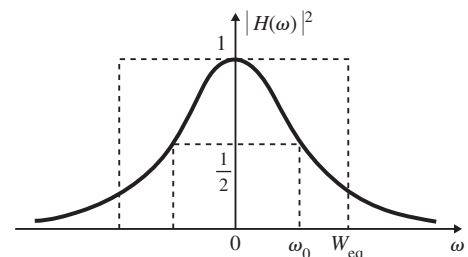


Figura 5-32 Ancho de banda del filtro.

5.56. El tiempo de subida t_r del filtro RC pasa-bajas en la figura 5-6a) se define como el tiempo requerido para que una respuesta al escalón unitario vaya de 10 a 90% de su valor final. Demuestre que

$$t_r = \frac{0.35}{f_{3\text{ dB}}}$$

donde $f_{3\text{ dB}} = W_{3\text{ dB}}/2\pi = 1/2\pi RC$ es el ancho de banda de 3 dB (en hertz [o hertzios]) del filtro.

De la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro RC , la respuesta al impulso es

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

Entonces, de la ecuación (2.12) se concluye que la respuesta al escalón unitario $s(t)$ es

$$s(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} d\tau = (1 - e^{-t/RC}) u(t)$$

lo cual se grafica en la figura 5-33. Por la definición del tiempo de subida

$$t_r = t_2 - t_1$$

donde $s(t_1) = 1 - e^{-t_1/RC} = 0.1 \rightarrow e^{-t_1/RC} = 0.9$

$$s(t_2) = 1 - e^{-t_2/RC} = 0.9 \rightarrow e^{-t_2/RC} = 0.1$$

Al dividir la primera ecuación entre la segunda del lado derecho obtenemos

$$e^{(t_2 - t_1)/RC} = 9$$

$$y \quad t_r = t_2 - t_1 = RC \ln(9) = 2.197 RC = \frac{2.197}{2\pi f_{3\text{ dB}}} = \frac{0.35}{f_{3\text{ dB}}}$$

lo que indica la relación inversa entre el ancho de banda y el tiempo de subida.

5.57. Otra definición de ancho de banda para una señal $x(t)$ es el *ancho de banda W_{90} de contenido de energía al 90%*, definido por

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-W_{90}}^{W_{90}} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{W_{90}} |X(\omega)|^2 d\omega = 0.9 E_x \quad (5.180)$$

donde E_x es el contenido de energía normalizada de la señal $x(t)$. Encuentre el W_{90} para las siguientes señales:

a) $x(t) = e^{-at} u(t)$, $a > 0$

b) $x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t}$

a) De la ecuación (5.155) $x(t) = e^{-at} u(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$

De la ecuación (1.14) $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a}$

Ahora, por la ecuación (5.180)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{W_{90}} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{W_{90}} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{a\pi} \tan^{-1} \left(\frac{W_{90}}{a} \right) = 0.9 \frac{1}{2a}$$

de lo cual obtenemos $\tan^{-1} \left(\frac{W_{90}}{a} \right) = 0.45\pi$

Así, $W_{90} = a \tan(0.45\pi) = 6.31a \quad \text{rad/s}$

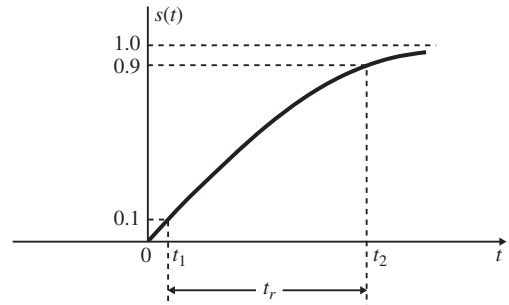


Figura 5-33

b) De la ecuación (5.137)

$$x(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t} \leftrightarrow X(\omega) = p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

Mediante la identidad de Parseval (5.64) tenemos que

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^a d\omega = \frac{a}{\pi}$$

Entonces, por la ecuación (5.180)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{W_{90}} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{W_{90}} d\omega = \frac{W_{90}}{\pi} = 0.9 \frac{a}{\pi}$$

y así obtenemos

$$W_{90} = 0.9a \quad \text{rad/s}$$

Observe que el ancho de banda absoluto de $x(t)$ es a (en radianes/segundo).

5.58. Sea $x(t)$ una señal limitada en banda de valores reales especificada por [figura 5-34b)]

$$X(\omega) = 0 \quad |\omega| > \omega_M$$

Sea $x_s(t)$ definida por

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \tag{5.181}$$

- a) Grafique $x_s(t)$ para $T_s < \pi/\omega_M$ y para $T_s > \pi/\omega_M$.
 - b) Encuentre y grafique el espectro de Fourier $X_s(\omega)$ de $x_s(t)$ para $T_s < \pi/\omega_M$ y para $T_s > \pi/\omega_M$.
- a) Mediante la ecuación (1.26) tenemos que

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s) \end{aligned} \tag{5.182}$$

La señal muestreada $x_s(t)$ se grafica en la figura 5-34c) para $T_s < \pi/\omega_M$, y en la figura 5-34i) para $T_s > \pi/\omega_M$.

La señal $x(t)$ se conoce como *señal muestreada ideal*, T_s se conoce como *intervalo* (o *periodo*) de muestreo, mientras $f_s = 1/T_s$ se conoce como *tasa* (o *frecuencia*) de muestreo.

b) De la ecuación (5.147) (problema 5.25) tenemos que

$$\delta_{T_s}(t) \leftrightarrow \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

Sea

$$x_s(t) \leftrightarrow X_s(\omega)$$

Entonces, de acuerdo con el teorema de convolución en la frecuencia (5.59) tenemos que

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= \mathcal{F}[x(t)\delta_{T_s}(t)] = \frac{1}{2\pi} \left[X(\omega) * \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) \end{aligned}$$

Por medio de la ecuación (1.26) obtenemos

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \tag{5.183}$$

lo que demuestra que $X_s(\omega)$ se compone de réplicas periódicamente repetidas de $X(\omega)$ centradas alrededor de $k\omega_s$ para toda k . El espectro de Fourier $X_s(\omega)$ se ilustra en la figura 5-34f) para $T_s < \pi/\omega_M$ (o $\omega_s > 2\omega_M$), y en la figura 5-34j) para $T_s > \pi/\omega_M$ (o $\omega_s < 2\omega_M$), donde $\omega_s = 2\pi/T_s$. Puede apreciarse que no ocurre traslape de las réplicas $X(\omega - k\omega_s)$

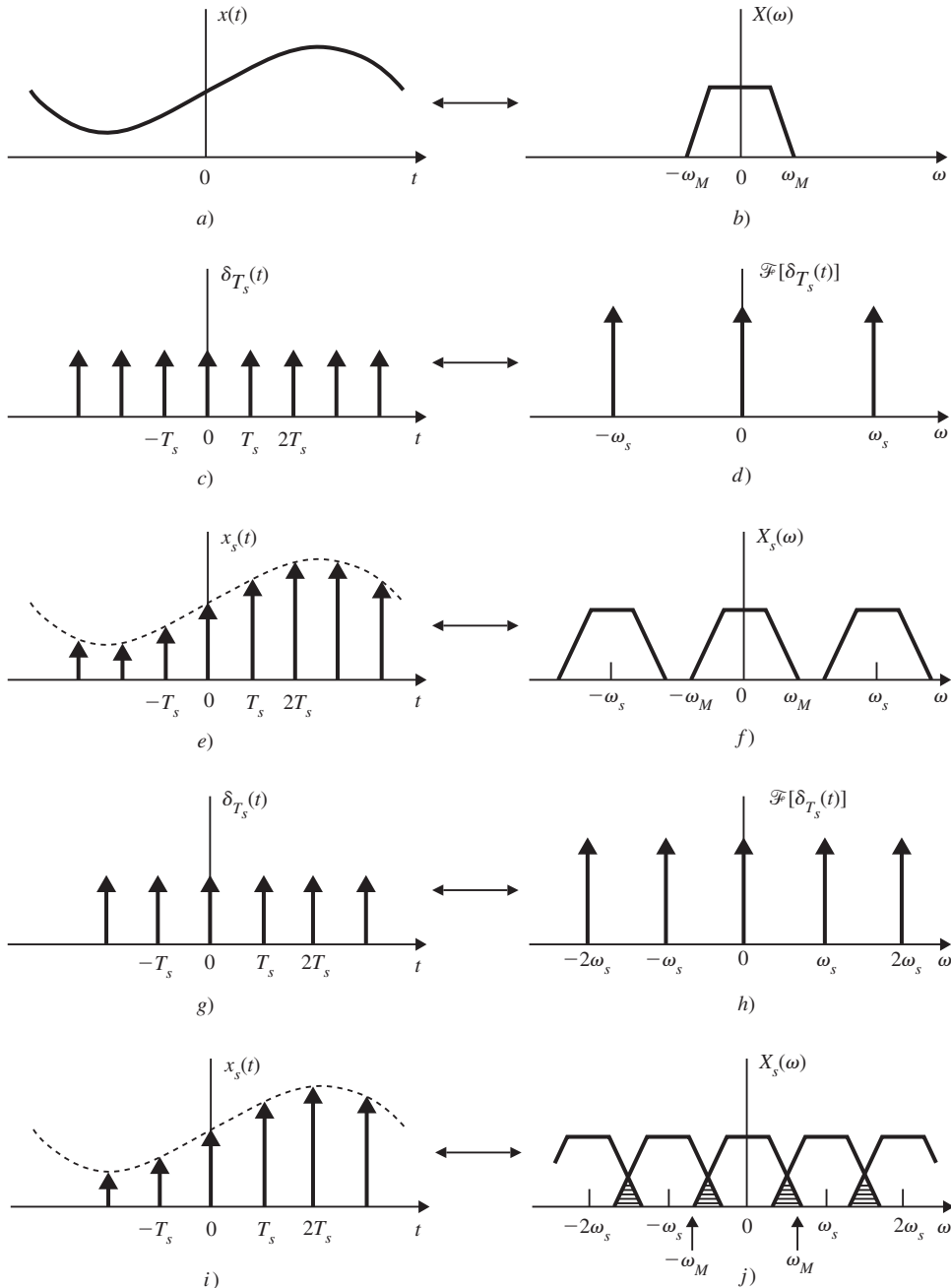


Figura 5-34 Muestreo ideal.

en $X_s(\omega)$ para $\omega_s \geq 2 \omega_M$ y que se produce traslape de las réplicas espectrales para $\omega_s < 2 \omega_M$. Este efecto se conoce como *aliasing* (o *submuestreo*).

5.59. Sea $x(t)$ una señal limitada en banda de valores reales especificada por

$$X(\omega) = 0 \quad |\omega| > \omega_M$$

Demuestre que $x(t)$ puede expresarse como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\text{sen } \omega_M(t - kT_s)}{\omega_M(t - kT_s)} \tag{5.184}$$

donde $T_s = \pi/\omega_M$.

Sea $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$
 $x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) \leftrightarrow X_s(\omega)$

De la ecuación (5.183) tenemos que $T_s X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$ (5.185)

Entonces, bajo las siguientes dos condiciones,

$$(1) X(\omega) = 0, |\omega| > \omega_M \quad \text{y} \quad (2) T_s = \frac{\pi}{\omega_M}$$

de la ecuación (5.185) vemos que $X(\omega) = \frac{\pi}{\omega_M} X_s(\omega) \quad |\omega| < \omega_M$ (5.186)

A continuación, tomando la transformada de Fourier de la ecuación (5.182) tenemos que

$$X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) e^{-jkT_s\omega}$$
 (5.187)

Sustituyendo la ecuación (5.187) en la ecuación (5.186) obtenemos

$$X(\omega) = \frac{\pi}{\omega_M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) e^{-jkT_s\omega} \quad |\omega| < \omega_M$$
 (5.188)

Tomando la transformada de Fourier inversa de la ecuación (5.188) obtenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\omega_M} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) e^{j\omega(t-kT_s)} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{1}{2\omega_M} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} e^{j\omega(t-kT_s)} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\text{sen } \omega_M(t-kT_s)}{\omega_M(t-kT_s)} \end{aligned}$$

De los problemas 5.58 y 5.59 concluimos que una señal limitada en banda que no tiene componentes de frecuencia mayores de f_M hertz puede recuperarse por completo a partir de un conjunto de muestras tomadas a la tasa de $f_s (\geq 2f_M)$ muestras por segundo. Esto se conoce como *teorema del muestreo uniforme* para señales pasa-bajas. Hacemos referencia a $T_s = \pi/\omega_M = 1/2f_M$ ($\omega_M = 2\pi f_M$) como *intervalo de muestreo de Nyquist* y a $f_s = 1/T_s = 2f_M$ como *tasa de muestreo de Nyquist*.

5.60. Considere el sistema mostrado en la figura 5-35a). La respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro ideal pasa-bajas está dada por [figura 5-35b)]

$$H(\omega) = T_s p_{\omega_c}(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Demuestre que si $\omega_c = \omega_s/2$, entonces para cualquier selección de T_s ,

$$y(mT_s) = x(mT_s) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

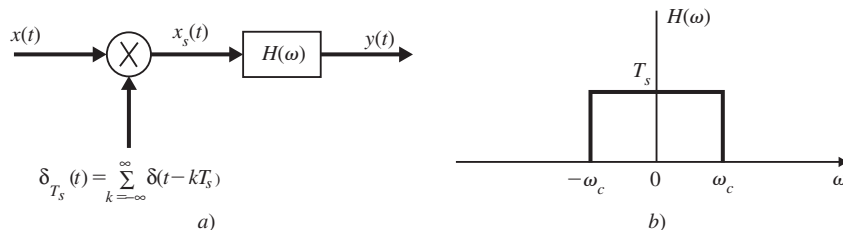


Figura 5-35

De la ecuación (5.137), la respuesta al impulso $h(t)$ del filtro ideal pasa-bajas está dada por

$$h(t) = T_s \frac{\text{sen } \omega_c t}{\pi t} = \frac{T_s \omega_c}{\pi} \frac{\text{sen } \omega_c t}{\omega_c t} \quad (5.189)$$

De la ecuación (5.182) tenemos que

$$x_s(t) = x(t) \delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

Por la ecuación (2.6) y mediante las ecuaciones (2.7) y (1.26), la salida $y(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= x_s(t) * h(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s) \right] * h(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) [h(t) * \delta(t - kT_s)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) h(t - kT_s) \end{aligned}$$

Mediante la ecuación (5.189) obtenemos

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{T_s \omega_c}{\pi} \frac{\text{sen } \omega_c (t - kT_s)}{\omega_c (t - kT_s)}$$

Si $\omega_c = \omega_s/2$, entonces $T_s \omega_c / \pi = 1$, y tenemos

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\text{sen} [\omega_s (t - kT_s) / 2]}{\omega_s (t - kT_s) / 2}$$

Estableciendo $t = mT_s$ ($m = \text{entero}$) y por el hecho que $\omega_s T_s = 2\pi$, obtenemos

$$y(mT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\text{sen } \pi(m - k)}{\pi(m - k)}$$

Como
$$\frac{\text{sen } \pi(m - k)}{\pi(m - k)} = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ 1 & m = k \end{cases}$$

tenemos que
$$y(mT_s) = x(mT_s) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

lo cual demuestra que sin ninguna restricción sobre $x(t)$, $y(mT_s) = x(mT_s)$ para cualquier valor entero de m .

Observe del teorema del muestreo (problemas 5.58 y 5.59) que si $\omega_s = 2\pi/T_s$ es dos veces mayor a la frecuencia más alta presente en $x(t)$ y $\omega_c = \omega_s/2$, entonces $y(t) = x(t)$. Si esta condición sobre el ancho de banda de $x(t)$ no se satisface, entonces $y(t) \neq x(t)$. Sin embargo, si $\omega_c = \omega_s/2$, entonces $y(mT_s) = x(mT_s)$ para cualquier valor entero de m .

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

- 5.61.** Considere una señal rectificadora de onda seno $x(t)$ definida como

$$x(t) = |A \text{sen } \pi t|$$

- Grafique $x(t)$ y encuentre su periodo fundamental.
- Encuentre la serie de Fourier exponencial compleja de $x(t)$.
- Encuentre la serie de Fourier trigonométrica de $x(t)$.

- 5.62.** Encuentre la serie de Fourier trigonométrica de una señal periódica $x(t)$ definida por

$$x(t) = t^2, \quad -\pi < t < \pi \quad \text{y} \quad x(t + 2\pi) = x(t)$$

- 5.63.** Por medio del resultado del problema 5.10, encuentre la serie de Fourier trigonométrica de la señal $x(t)$ mostrada en la figura 5-36.

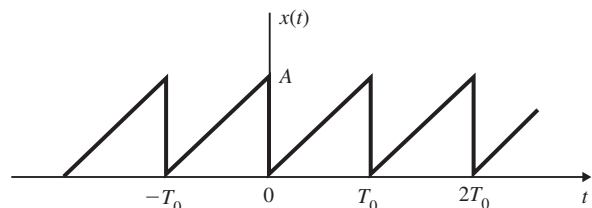


Figura 5-36

5.64. Derive la representación en serie de Fourier en forma armónica (5.15) a partir de la representación de la serie de Fourier trigonométrica (5.8).

5.65. Demuestre que el valor cuadrático medio de una señal periódica real $x(t)$ es la suma de los valores cuadráticos medios de sus armónicos.

5.66. Demuestre que si

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

entonces

$$x^{(n)}(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$$

5.67. Mediante la técnica de diferenciación, encuentre la transformada de Fourier de la señal de pulso triangular ilustrada en la figura 5-37.

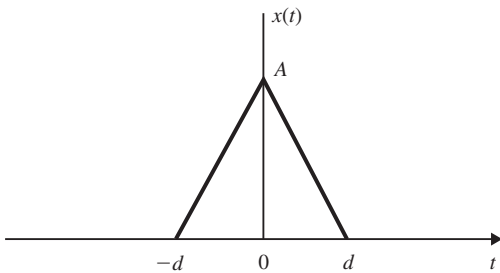


Figura 5-37

5.68. Encuentre la transformada de Fourier inversa de

$$X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^N}$$

5.69. Encuentre la transformada de Fourier inversa de

$$X(\omega) = \frac{1}{2 - \omega^2 + j3\omega}$$

5.70. Verifique la propiedad de diferenciación de la frecuencia (5.56); es decir,

$$(-jt)x(t) \leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

5.71. Encuentre la transformada de Fourier de cada una de las siguientes señales:

- a) $x(t) = \cos \omega_0 t u(t)$
- b) $x(t) = \text{sen } \omega_0 t u(t)$
- c) $x(t) = e^{-at} \cos \omega_0 t u(t), a > 0$
- d) $x(t) = e^{-at} \text{sen } \omega_0 t u(t), a > 0$

5.72. Sea $x(t)$ una señal con una transformada de Fourier $X(\omega)$ dada por

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

Considere la señal

$$y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

Encuentre el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$

5.73. Sea $x(t)$ una señal real con la transformada de Fourier $X(\omega)$. La *señal analítica* $x_+(t)$ asociada con $x(t)$ es una señal compleja definida por

$$x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

donde $\hat{x}(t)$ es la transformada de Hilbert de $x(t)$.

a) Encuentre la transformada de Fourier $X_+(\omega)$ de $x_+(t)$.

b) Encuentre la señal analítica $x_+(t)$ asociada con $\cos \omega_0 t$ y su transformada de Fourier $X_+(\omega)$.

5.74. Considere un sistema LIT de tiempo continuo con respuesta en frecuencia $H(\omega)$. Encuentre la transformada de Fourier $S(\omega)$ de la respuesta al escalón unitario $s(t)$ del sistema.

5.75. Considere el filtro RC mostrado en la figura 5-38. Encuentre la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ de este filtro y discuta su tipo.

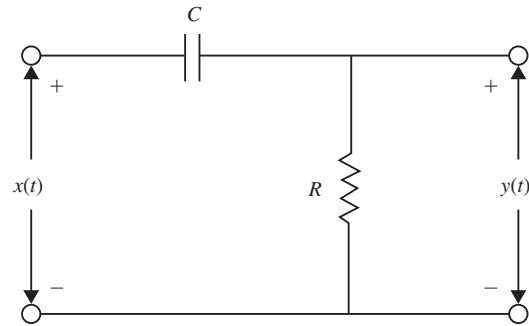


Figura 5-38

5.76. Determine el ancho de banda de contenido de energía al 99% para la señal

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$$

5.77. El *teorema de muestreo en el dominio de la frecuencia* establece que si una señal real $x(t)$ es de duración limitada, es decir,

$$x(t) = 0 \quad |t| > t_M$$

entonces su transformada de Fourier $X(\omega)$ puede determinarse de manera unívoca a partir de sus valores $X(n\pi/t_M)$ para una serie de puntos equidistantes espaciados entre sí en una cantidad π/t_M . De hecho, $X(\omega)$ está dada por

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n\pi}{t_M}\right) \frac{\text{sen}(\omega t_M - n\pi)}{\omega t_M - n\pi}$$

Verifique el teorema de muestreo anterior en el dominio de la frecuencia.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

5.61. a) $X(t)$ se grafica en la figura 5-39 y $T_0 = 1$.

$$b) \quad x(t) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} e^{jk2\pi t}$$

$$c) \quad x(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos k2\pi t$$

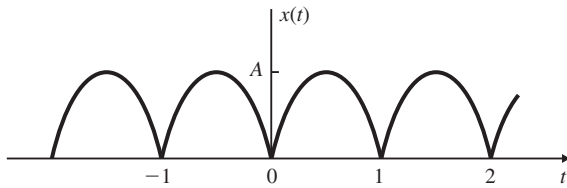


Figura 5-39

5.62. $x(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kt$

5.63. $x(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen} k\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

5.64. *Sugerencia:* Vuelva a escribir $a_k \cos k\omega_0 t + b_k \operatorname{sen} k\omega_0 t$ como

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left[\frac{a_k}{(a_k^2 + b_k^2)^{1/2}} \cos k\omega_0 t + \frac{b_k}{(a_k^2 + b_k^2)^{1/2}} \operatorname{sen} k\omega_0 t \right]$$

y haga uso de la fórmula trigonométrica $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$.

5.65. *Sugerencia:* Use la identidad de Parseval (5.21) para la serie de Fourier y la ecuación (5.168).

5.66. *Sugerencia:* Repita la propiedad de diferenciación en el tiempo (5.55).

5.67. $Ad \left[\frac{\operatorname{sen}(\omega d/2)}{\omega d/2} \right]^2$

5.68. *Sugerencia:* Haga la diferenciación de la ecuación (5.155) N veces con respecto a a .

$$\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} e^{-at} u(t)$$

5.69. *Sugerencia:* Note que

$$2 - \omega^2 + j3\omega = 2 + (j\omega)^2 + j3\omega = (1 + j\omega)(2 + j\omega)$$

y aplique la técnica de la expansión en fracciones parciales.

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

5.70. *Sugerencia:* Utilice la definición (5.31) y proceda de manera similar a la del problema 5.28.

5.71. *Sugerencia:* Haga uso de la propiedad de multiplicación (5.59).

a) $X(\omega) = \frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{\pi}{2} \delta(\omega + \omega_0) + \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \omega_0^2}$

b) $X(\omega) = \frac{\pi}{2j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{2j} \delta(\omega + \omega_0) + \frac{\omega_0}{(j\omega)^2 + \omega_0^2}$

c) $X(\omega) = \frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$

d) $X(\omega) = \frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$

5.72. *Sugerencia:* Emplee la identidad de Parseval (5.64) para la transformada de Fourier.

$$1/3 \pi$$

5.73. a) $X_+(\omega) = 2X(\omega)u(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$

b) $x_+(t) = e^{j\omega_0 t}$, $X_+(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$

5.74. *Sugerencia:* Utilice la ecuación (2.12) y la propiedad de integración (5.57).

$$S(\omega) = \pi H(0) \delta(\omega) + (1/j\omega) H(\omega)$$

5.75. $H(\omega) = \frac{j\omega}{(1/RC) + j\omega}$, filtro pasa-altas

5.76. $W_{99} = 2.3/a$ radianes/segundo o $f_{99} = 0.366/a$ hertz.

5.77. *Sugerencia:* Expanda $x(t)$ en una serie compleja de Fourier y proceda de manera semejante a la del problema 5.59.

Análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo discreto

6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos el análisis de Fourier en el contexto de las señales (secuencias) y sistemas de tiempo discreto. El análisis de Fourier desempeña el mismo papel fundamental tanto en tiempo discreto como en tiempo continuo. Como veremos, existen muchas similitudes entre las técnicas del análisis de Fourier de tiempo discreto y sus contrapartes de tiempo continuo, pero también hay algunas diferencias importantes.

6.2 SERIE DE FOURIER DISCRETA

A. SECUENCIAS PERIÓDICAS

En el capítulo 1 definimos una señal (o secuencia) $x[n]$ de tiempo discreto como periódica si existe un entero positivo N distinto de cero, para el cual

$$x[n + N] = x[n] \quad \text{para toda } n \quad (6.1)$$

El periodo fundamental N_0 de $x[n]$ es el entero positivo más pequeño de N para el cual se satisface la ecuación (6.1).

Como vimos en la sección 1.4, la secuencia exponencial compleja

$$x[n] = e^{j(2\pi/N_0)n} = e^{j\Omega_0 n} \quad (6.2)$$

donde $\Omega_0 = 2\pi/N_0$ es una secuencia periódica con periodo fundamental N_0 . Como discutimos en la sección 1.4C, una distinción muy importante entre la exponencial compleja de tiempo discreto y de tiempo continuo es que las señales $e^{j\omega_0 t}$ son distintas para diferentes valores de ω_0 , pero las secuencias $e^{j\Omega_0 n}$, que difieren en frecuencia por un múltiplo de 2π , son idénticas; es decir,

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega_0 n} \quad (6.3)$$

Sea
$$\Psi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.4)$$

Entonces, por la ecuación (6.3) tenemos que

$$\Psi_0[n] = \Psi_{N_0}[n] \quad \Psi_1[n] = \Psi_{N_0+1}[n] \quad \dots \quad \Psi_k[n] = \Psi_{N_0+k}[n] \quad \dots \quad (6.5)$$

y de manera más general,

$$\Psi_k[n] = \Psi_{k+mN_0}[n] \quad m = \text{entero} \quad (6.6)$$

De este modo, las secuencias $\Psi_k[n]$ son distintas sólo sobre un intervalo de N_0 valores sucesivos de k .

B. REPRESENTACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER DISCRETA

La representación de la serie de Fourier discreta de una secuencia periódica $x[n]$ con periodo fundamental N_0 está dada por

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad (6.7)$$

donde las c_k son los coeficientes de Fourier y están dados por (problema 6.2)

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (6.8)$$

Debido a la ecuación (6.5) [o a la ecuación (6.6)], las ecuaciones (6.7) y (6.8) pueden volver a escribirse como

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad (6.9)$$

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (6.10)$$

donde $\sum_{k=\langle N_0 \rangle}$ denota que la sumatoria es sobre k a medida que varía sobre un intervalo de N_0 enteros sucesivos. Al establecer $k = 0$ en la ecuación (6.10) tenemos

$$c_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] \quad (6.11)$$

que indica que c_0 es igual al valor promedio de $x[n]$ sobre un periodo.

Los coeficientes de Fourier c_k a menudo se conocen como los *coeficientes espectrales* de $x[n]$.

C. CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER DISCRETA

Puesto que la serie de Fourier discreta es finita, en contraste con el caso de tiempo continuo, no hay cuestiones de convergencia con la serie de Fourier discreta.

D. PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER DISCRETA

1. PERIODICIDAD DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

De las ecuaciones (6.5) y (6.7) [o (6.9)] observamos que

$$c_{k+N_0} = c_k \quad (6.12)$$

lo que indica que los coeficientes de la serie de Fourier c_k son periódicos con un periodo fundamental N_0 .

2. DUALIDAD

De la ecuación (6.12) observamos que los coeficientes de Fourier c_k forman una secuencia periódica con periodo fundamental N_0 . De este modo, escribiendo c_k como $c[k]$, la ecuación (6.10) puede volver a escribirse como

$$c[k] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (6.13)$$

Sea $n = -m$ en la ecuación (6.13). Entonces

$$c[k] = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-m] e^{jk\Omega_0 m}$$

Si $k = n$ y $m = k$ en la expresión anterior, obtenemos

$$c[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-k] e^{jk\Omega_0 n} \quad (6.14)$$

Si comparamos la ecuación (6.14) con la ecuación (6.9), vemos que $(1/N_0)x[-k]$ son los coeficientes de Fourier de $c[n]$. Si adoptamos la notación

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} c_k = c[k] \quad (6.15)$$

para denotar el par de la serie de Fourier discreta, entonces por la ecuación (6.14) tenemos que

$$c[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \frac{1}{N_0} x[-k] \quad (6.16)$$

La ecuación (6.16) se conoce como propiedad de *dualidad* de la serie de Fourier discreta.

3. OTRAS PROPIEDADES

Cuando $x[n]$ es real, entonces de la ecuación (6.8) [o ecuación (6.10)] y la ecuación (6.12) se deduce que

$$c_{-k} = c_{N_0-k} = c_k^* \quad (6.17)$$

donde * denota el complejo conjugado.

SECUENCIAS PAR E IMPAR

Cuando $x[n]$ es real, sea

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

donde $x_e[n]$ y $x_o[n]$ son los respectivos componentes par e impar de $x[n]$. Sea

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} c_k$$

Entonces

$$x_e[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \text{Re}[c_k] \quad (6.18a)$$

$$x_o[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} j \text{Im}[c_k] \quad (6.18b)$$

De este modo, observamos que si $x[n]$ es real y también par, entonces sus coeficientes de Fourier son reales; pero si $x[n]$ es real e impar, sus coeficientes de Fourier son imaginarios.

E. TEOREMA DE PARSEVAL

Si $x[n]$ está representada por la serie de Fourier discreta en la ecuación (6.9), entonces puede demostrarse que (problema 6.10)

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} |c_k|^2 \quad (6.19)$$

La ecuación (6.19) se conoce como *identidad de Parseval* (o *teorema de Parseval*) para la serie de Fourier discreta.

6.3 LA TRANSFORMADA DE FOURIER

A. DE LAS SERIE DE FOURIER DISCRETA A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Sea $x[n]$ una secuencia no periódica de duración finita. Es decir, para algún entero positivo N_1 ,

$$x[n] = 0 \quad |n| > N_1$$

La figura 6-1a) muestra una secuencia de este tipo. Sea $x_{N_0}[n]$ una secuencia periódica formada al repetir $x[n]$ con periodo fundamental N_0 como se muestra en la figura 6-1b). Si hacemos que $N_0 \rightarrow \infty$ tenemos que

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} x_{N_0}[n] = x[n] \quad (6.20)$$

La serie de Fourier discreta de $x_{N_0}[n]$ está dada por

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad (6.21)$$

donde
$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_{N_0}[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (6.22a)$$

Puesto que $x_{N_0}[n] = x[n]$ para $|n| \leq N_1$ y como $x[n] = 0$ fuera de este intervalo, la ecuación (6.22a) puede volver a escribirse como

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (6.22b)$$

Definimos $X(\Omega)$ como
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (6.23)$$

Entonces, de la ecuación (6.22b) los coeficientes de Fourier c_k pueden expresarse como

$$c_k = \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0) \quad (6.24)$$

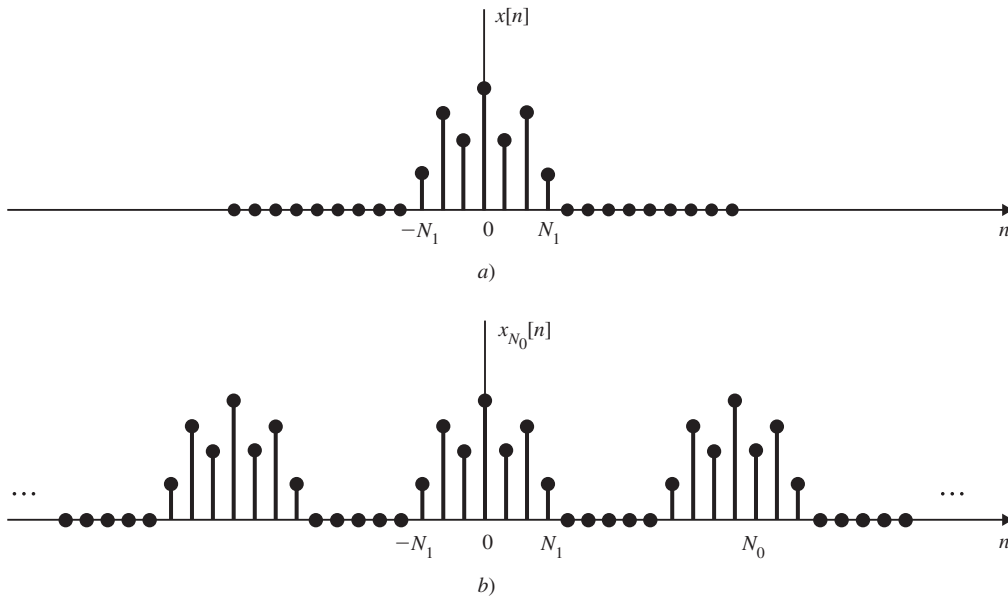


Figura 6-1 a) Secuencia finita no periódica $x[n]$; b) secuencia periódica formada por extensión periódica de $x[n]$.

Al sustituir la ecuación (6.24) en la ecuación (6.21) tenemos que

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}$$

o
$$x_{N_0}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0 \quad (6.25)$$

De la ecuación (6.23), $X(\Omega)$ es periódica con un periodo 2π , y de este modo es $e^{j\Omega n}$. De esta manera, el producto $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ también será periódico con un periodo 2π . Como se muestra en la figura 6-2, cada término en la sumatoria de la ecuación (6.25) representa el área de un rectángulo de altura $X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$ y de ancho Ω_0 . A medida que $N_0 \rightarrow \infty$, $\Omega_0 = 2\pi/N_0$ se hace infinitesimal ($\Omega_0 \rightarrow 0$), y la ecuación (6.25) se transforma en una integral. Además, puesto que la sumatoria de la ecuación (6.25) se realiza sobre N_0 intervalos consecutivos de ancho $\Omega_0 = 2\pi/N_0$, el intervalo total de integración siempre tendrá un ancho de 2π . De esta manera, a medida que $N_0 \rightarrow \infty$ y en vista de la ecuación (6.20), la ecuación (6.25) se convierte en

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (6.26)$$

Puesto que $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ es periódica con un periodo 2π , el intervalo de integración en la ecuación (6.26) puede tomarse como cualquier intervalo de longitud 2π .

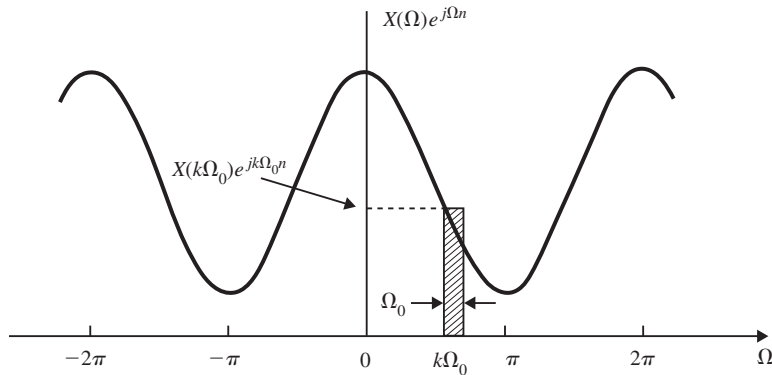


Figura 6-2 Interpretación gráfica de la ecuación (6.25).

B. PAR DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La función $X(\Omega)$ definida por la ecuación (6.23) se conoce como *transformada de Fourier* de $x[n]$, y la ecuación (6.26) define la *transformada de Fourier inversa* de $X(\Omega)$. De manera simbólica se denotan mediante

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (6.27)$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (6.28)$$

y decimos que $x[n]$ y $X(\Omega)$ forman un par de transformadas de Fourier denotado por

$$x[n] \leftrightarrow X(\Omega) \quad (6.29)$$

Las ecuaciones (6.27) y (6.28) son las contrapartes de tiempo discreto de las ecuaciones (5.31) y (5.32).

C. ESPECTRO DE FOURIER

La transformada de Fourier $X(\Omega)$ de $x[n]$ en general es compleja, y puede expresarse como

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\phi(\Omega)} \quad (6.30)$$

Como en el tiempo continuo, la transformada de Fourier $X(\Omega)$ de una secuencia no periódica $x[n]$ es la especificación en el dominio de la frecuencia de $x[n]$ y se llama *espectro* (o *espectro de Fourier*) de $x[n]$. La cantidad $|X(\Omega)|$ se conoce como *espectro de magnitud* de $x[n]$, mientras que $\phi(\Omega)$ se denomina *espectro de fase* de $x[n]$. De manera adicional, si $x[n]$ es real, el espectro de amplitud $|X(\Omega)|$ es una función par mientras que el espectro de fase $\phi(\Omega)$ es una función impar de Ω .

D. CONVERGENCIA DE $X(\Omega)$

Del mismo modo que en el caso de tiempo continuo, la condición suficiente para la convergencia de $X(\Omega)$ es que $x[n]$ sea absolutamente sumable, es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (6.31)$$

E. RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y LA TRANSFORMADA Z

La ecuación (6.27) define la transformada de Fourier de $x[n]$ como

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (6.32)$$

La transformada z de $x[n]$, como se define en la ecuación (4.3), está dada por

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (6.33)$$

Al comparar las ecuaciones (6.32) y (6.33) observamos que si la ROC de $X(z)$ contiene al círculo unitario, entonces la transformada de Fourier $X(\Omega)$ de $x[n]$ es igual a la $X(z)$ evaluada sobre el círculo unitario, esto es,

$$X(\Omega) = X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} \quad (6.34)$$

Observe que puesto que la sumatoria en la ecuación (6.33) está denotada mediante $X(z)$, entonces la sumatoria en la ecuación (6.32) puede denotarse como $X(e^{j\Omega})$. De este modo, en el resto de este libro, tanto $X(\Omega)$ como $X(e^{j\Omega})$ significarán lo mismo siempre que relacionemos la transformada de Fourier con la transformada z . Debido a que la transformada de Fourier es la transformada z con $z = e^{j\Omega}$, no debería suponerse automáticamente que la transformada de Fourier de una secuencia $x[n]$ es la transformada z , con la z reemplazada por $e^{j\Omega}$. Si $x[n]$ es absolutamente sumable, es decir, si $x[n]$ satisface la condición (6.31), la transformada de Fourier de $x[n]$ puede obtenerse a partir de la transformada z de $x[n]$ con $z = e^{j\Omega}$ puesto que la ROC de $X(z)$ contendrá el círculo unitario; esto es, $|e^{j\Omega}| = 1$. Por lo general no es verdadero para las secuencias que no son absolutamente sumables. Los siguientes ejemplos ilustran los enunciados anteriores.

EJEMPLO 6.1 Considere la secuencia del impulso unitario $\delta[n]$.

De la ecuación (4.14), la transformada z de $\delta[n]$ es

$$\mathfrak{Z}\{\delta[n]\} = 1 \quad \text{de toda } z \quad (6.35)$$

Por las definiciones (6.27) y (1.45), la transformada de Fourier de $\delta[n]$ es

$$\mathcal{F}\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = 1 \quad (6.36)$$

De este modo, la transformada z y la transformada de Fourier de $\delta[n]$ son la misma. Advierta que $\delta[n]$ es absolutamente sumable y que la ROC de la transformada z de $\delta[n]$ contiene al círculo unitario.

EJEMPLO 6.2 Considere la secuencia exponencial causal

$$x[n] = a^n u[n] \quad a \text{ real}$$

De la ecuación (4.9), la transformada z de $x[n]$ está dada por

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

De este modo, $X(e^{j\Omega})$ existe para $|a| < 1$ debido a que la ROC de $X(z)$ contiene el círculo unitario. Esto es,

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad |a| < 1 \quad (6.37)$$

A continuación, por la definición (6.27) y la ecuación (1.91) la transformada de Fourier de $x[n]$ es

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n \\ &= \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad |ae^{-j\Omega}| = |a| < 1 \end{aligned} \quad (6.38)$$

De esta manera, al comparar las ecuaciones (6.37) y (6.38) tenemos que

$$X(\Omega) = X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

Observe que $x[n]$ es absolutamente sumable.

EJEMPLO 6.3 Considere la secuencia del escalón unitario $u[n]$.

De la ecuación (4.16), la transformada z de $u[n]$ es

$$\mathfrak{Z}\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1 \quad (6.39)$$

La transformada de Fourier de $u[n]$ no puede obtenerse a partir de su transformada z debido a que la ROC de la transformada z de $u[n]$ no incluye al círculo unitario. Observe que la secuencia del escalón unitario $u[n]$ no es absolutamente sumable. La transformada de Fourier de $u[n]$ está dada por (problema 6.28)

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} \quad |\Omega| \leq \pi \quad (6.40)$$

6.4 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Las propiedades básicas de la transformada de Fourier se presentarán en los siguientes apartados. Existen muchas similitudes y algunas diferencias con respecto al caso de tiempo continuo. Muchas de estas propiedades también son semejantes a las correspondientes de la transformada z cuando la ROC de $X(z)$ incluye el círculo unitario.

A. PERIODICIDAD $X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega) \quad (6.41)$

Como una consecuencia de la ecuación (6.41), en el caso de tiempo discreto debemos considerar valores de Ω (en radianes) únicamente sobre el intervalo $0 \leq \Omega < 2\pi$ o $-\pi \leq \Omega < \pi$, mientras que en el caso de tiempo continuo tenemos que considerar valores de ω (radianes/segundo) sobre todo el intervalo $-\infty < \omega < \infty$.

B. LINEALIDAD $a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \leftrightarrow a_1X_1[\Omega] + a_2X_2[\Omega] \quad (6.42)$

C. DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

$$x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \quad (6.43)$$

D. DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0) \quad (6.44)$$

E. CONJUGACIÓN $x^*[n] \leftrightarrow X^*(-\Omega) \quad (6.45)$

donde * denota el complejo conjugado.

F. INVERSIÓN DEL TIEMPO $x[-n] \leftrightarrow X(-\Omega) \quad (6.46)$

G. ESCALAMIENTO EN EL TIEMPO

En la sección 5.4D, la propiedad de escalamiento de una transformada de Fourier de tiempo continuo se expresa como [ecuación (5.52)]

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (6.47)$$

No obstante, en el caso de tiempo discreto, $x[an]$ no es una secuencia si a no es un entero. Por otra parte, si a es un entero, digamos $a = 2$, entonces $x[2n]$ se compone sólo de las muestras pares de $x[n]$. De este modo, el escalamiento del tiempo en tiempo discreto toma una forma algo diferente de la ecuación (6.47).

Sea m un entero positivo y definamos la secuencia

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] = x[k] & \text{si } n = km, k = \text{entero} \\ 0 & \text{si } n \neq km \end{cases} \quad (6.48)$$

Entonces tenemos que $x_{(m)}[n] \leftrightarrow X(m\Omega) \quad (6.49)$

La ecuación (6.49) es la contraparte de tiempo discreto de la ecuación (6.47). Esta ecuación establece otra vez la relación inversa entre el tiempo y la frecuencia. Esto es, a medida que la señal se extiende en el tiempo ($m > 1$), su

transformada de Fourier se comprime (problema 6.22). Observe que $X(m\Omega)$ es periódica con un periodo $2\pi/m$ puesto que $X(\Omega)$ es periódica con periodo 2π .

H. DUALIDAD

En la sección 5.4F, la propiedad de dualidad de una transformada de Fourier de tiempo continuo se expresa como [ecuación (5.54)]

$$x(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \quad (6.50)$$

No existe contraparte de tiempo discreto de esta propiedad; sin embargo, existe una dualidad entre la transformada de Fourier de tiempo discreto y la serie de Fourier de tiempo continuo. Sea

$$X[n] \leftrightarrow X(\Omega)$$

$$\text{De las ecuaciones (6.27) y (6.41)} \quad X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (6.51)$$

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega) \quad (6.52)$$

Como Ω es una variable continua, si hacemos $\Omega = t$ y $n = -k$ en la ecuación (6.51) tenemos

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k] e^{jk t} \quad (6.53)$$

Puesto que $X(t)$ es periódica con periodo $T_0 = 2\pi$ y la frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 1$, la ecuación (6.53) indica que los coeficientes de la serie de Fourier de $X(t)$ serán $x[-k]$. Esta relación de dualidad se expresa mediante

$$X(t) \xleftrightarrow{\text{SF}} c_k = x[-k] \quad (6.54)$$

donde SF denota la serie de Fourier y c_k son sus coeficientes de Fourier.

I. DIFERENCIACIÓN EN LA FRECUENCIA

$$nx[n] \leftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \quad (6.55)$$

J. DIFERENCIAS

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega) \quad (6.56)$$

La secuencia $x[n] - x[n-1]$ se conoce como secuencia de *primera diferencia*. La ecuación (6.56) se obtiene fácilmente de la propiedad de linealidad (6.42) y de la propiedad de desplazamiento en el tiempo (6.43).

K. ACUMULACIÓN

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \pi X(0) \delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) \quad |\Omega| \leq \pi \quad (6.57)$$

Observe que la acumulación es la contraparte de tiempo discreto de la integración. El término del impulso en el lado derecho de la ecuación (6.57) refleja el valor de cd o promedio que puede resultar de la acumulación.

L. CONVOLUCIÓN

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(\Omega) X_2(\Omega) \quad (6.58)$$

Como en el caso de la transformada z , esta propiedad de convolución tiene un papel importante en el estudio de los sistemas LIT de tiempo discreto.

M. MULTIPLICACIÓN

$$x_1[n] x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega) \quad (6.59)$$

donde \otimes denota la convolución periódica definida por la ecuación (2.70).

$$X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega) = \int_{2\pi} X_1(\theta) X_2(\Omega - \theta) d\theta \quad (6.60)$$

La propiedad de multiplicación (6.59) es la propiedad dual de la ecuación (6.58).

Tabla 6-1 Propiedades de la transformada de Fourier

Propiedad	Secuencia	Transformada de Fourier
	$x[n]$	$X(\Omega)$
	$x_1[n]$	$X_1(\Omega)$
	$x_2[n]$	$X_2(\Omega)$
Periodicidad	$x[n]$	$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega)$
Linealidad	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(\Omega) + a_2X_2(\Omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$
Desplazamiento en la frecuencia	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
Inversión del tiempo	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Escalamiento en el tiempo	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & \text{si } n = km \\ 0 & \text{si } n \neq km \end{cases}$	$X(m\Omega)$
Diferenciación en la frecuencia	$nx[n]$	$j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\pi X(0)\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega)$ $ \Omega \leq \pi$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(\Omega)X_2(\Omega)$
Multiplicación	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega)$
Secuencia real	$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$	$X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega)$ $X(-\Omega) = X^*(\Omega)$
Componente par	$x_e[n]$	$\text{Re}\{X(\Omega)\} = A(\Omega)$
Componente impar	$x_o[n]$	$j \text{Im}\{X(\Omega)\} = jB(\Omega)$
Teorema de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\Omega)X_2(-\Omega) d\Omega$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) ^2 d\Omega$	

N. PROPIEDADES ADICIONALES

Si $x[n]$ es real, sea

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

donde $x_e[n]$ y $x_o[n]$ son los respectivos componentes par e impar de $x[n]$. Sea

$$x[n] \leftrightarrow X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\theta(\Omega)} \quad (6.61)$$

Entonces

$$X(-\Omega) = X^*(\Omega) \quad (6.62)$$

$$x_e[n] \leftrightarrow \text{Re}\{X(\Omega)\} = A(\Omega) \quad (6.63a)$$

$$x_o[n] \leftrightarrow j\text{Im}\{X(\Omega)\} = jB(\Omega) \quad (6.63b)$$

La ecuación (6.62) es la condición necesaria y suficiente para que $x[n]$ sea real. De las ecuaciones (6.62) y (6.61) tenemos

$$A(-\Omega) = A(\Omega) \quad B(-\Omega) = -B(\Omega) \quad (6.64a)$$

$$|X(-\Omega)| = |X(\Omega)| \quad \theta(-\Omega) = -\theta(\Omega) \quad (6.64b)$$

De las ecuaciones (6.63a), (6.63b) y (6.64a) podemos ver que si $x[n]$ es real y par, entonces $X(\Omega)$ también es real y par, pero si $x[n]$ es real e impar, $X(\Omega)$ es imaginaria e impar.

O. RELACIONES DE PARSEVAL

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\Omega) X_2(-\Omega) d\Omega \quad (6.65)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (6.66)$$

Tabla 6-2 Pares comunes de transformadas de Fourier

$x[n]$	$X(\Omega)$
$\delta[n]$	1
$\delta(n - n_0)$	$e^{-j\Omega n_0}$
$x[n] = 1$	$2\pi\delta(\Omega), \Omega \leq \pi$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega - \Omega_0), \Omega , \Omega_0 \leq \pi$
$\cos \Omega_0 n$	$\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)], \Omega , \Omega_0 \leq \pi$
$\text{sen } \Omega_0 n$	$-j\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)], \Omega , \Omega_0 \leq \pi$
$u[n]$	$\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}, \Omega \leq \pi$
$-u[-n - 1]$	$-\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}, \Omega \leq \pi$
$a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
$-a^n u[-n - 1], a > 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
$(n + 1) a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2}$
$a^{ n }, a < 1$	$\frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \Omega + a^2}$
$x[n] = \begin{cases} 1 & n \leq N_1 \\ 0 & n > N_1 \end{cases}$	$\frac{\text{sen} \left[\Omega \left(N_1 + \frac{1}{2} \right) \right]}{\text{sen} (\Omega / 2)}$
$\frac{\text{sen } Wn}{\pi n}, 0 < W < \pi$	$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \Omega \leq W \\ 0 & W < \Omega \leq \pi \end{cases}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN_0]$	$\Omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0), \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$

La ecuación (6.66) se conoce como *identidad de Parseval* (o *teorema de Parseval*) para la transformada de Fourier de tiempo discreto.

La tabla 6-1 contiene un resumen de las propiedades de la transformada de Fourier presentadas en esta sección. La tabla 6-2 proporciona algunas secuencias comunes, así como sus transformadas de Fourier.

6.5 LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO DISCRETO

A. RESPUESTA EN FRECUENCIA

En la sección 2.6 demostramos que la salida $y[n]$ de un sistema LIT de tiempo discreto es igual a la convolución de la entrada $x[n]$ con la respuesta al impulso $h[n]$; es decir,

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (6.67)$$

Al aplicar la propiedad de convolución (6.58) obtenemos

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \quad (6.68)$$

donde $Y(\Omega)$, $X(\Omega)$ y $H(\Omega)$ son las respectivas transformadas de Fourier de $y[n]$, $x[n]$ y $h[n]$. De la ecuación (6.68) tenemos

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \quad (6.69)$$

La figura 6-3 ilustra las relaciones representadas mediante las ecuaciones (6.67) y (6.68). Sea

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\theta} H^{\Omega} \quad (6.70)$$

Como en el caso de tiempo continuo, la función $H(\Omega)$ se denomina *respuesta en frecuencia* del sistema, $|H(\Omega)|$ se llama *respuesta de magnitud* del sistema y $\theta_H(\Omega)$ se conoce como *respuesta de fase* del sistema.

Considere la secuencia exponencial compleja

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \quad (6.71)$$

Entonces, al establecer $z = e^{j\Omega_0}$ en la ecuación (4.1) obtenemos

$$y[n] = H(e^{j\Omega_0}) e^{j\Omega_0 n} = H(\Omega_0) e^{j\Omega_0 n} \quad (6.72)$$

lo cual indica que la secuencia exponencial compleja $e^{j\Omega_0 n}$ es una función propia del sistema LIT con valor propio correspondiente $H(\Omega_0)$, como vimos en el capítulo 2 (sección 2.8). Además, por la propiedad de linealidad (6.42), si la entrada $x[n]$ es periódica con la serie de Fourier discreta

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad (6.73)$$

entonces la salida $y[n]$ correspondiente también es periódica con la serie de Fourier discreta

$$y[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k H(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \quad (6.74)$$

Si $x[n]$ no es periódica, entonces de las ecuaciones (6.68) y (6.28) la salida correspondiente $y[n]$ puede expresarse como

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} H(\Omega) X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (6.75)$$

B. SISTEMAS LIT CARACTERIZADOS POR ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Como se discutió en la sección 2.9, muchos sistemas LIT de tiempo discreto de interés práctico se describen mediante ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes de la forma

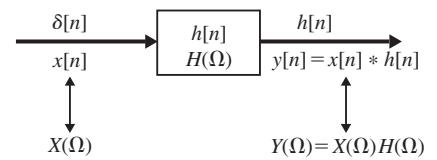


Figura 6-3 Relaciones entre entradas y salidas en un sistema LIT de tiempo discreto.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (6.76)$$

con $M \leq N$. Tomando la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (6.76) y mediante la propiedad de linealidad (6.42) y la de desplazamiento en el tiempo (6.43), tenemos que

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega} Y(\Omega) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega} X(\Omega)$$

o, de manera equivalente,

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}} \quad (6.77)$$

El resultado (6.77) es el mismo que el de la contraparte de la transformada $z H(z) = Y(z)/X(z)$ con $z = e^{j\Omega}$ [ecuación (4.44)]; es decir,

$$H(\Omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega})$$

C. NATURALEZA PERIÓDICA DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA

De la ecuación (6.41) tenemos que $H(\Omega) = H(\Omega + 2\pi)$ (6.78)

De este modo, a diferencia de la respuesta en frecuencia de los sistemas de tiempo continuo, la de todos los sistemas LIT de tiempo discreto es periódica con un periodo 2π . Por consiguiente, necesitamos observar la respuesta en frecuencia de un sistema únicamente sobre el intervalo de frecuencia $0 \leq \Omega < 2\pi$ o $-\pi \leq \Omega < \pi$.

6.6 RESPUESTA DEL SISTEMA A SENOIDALES DE TIEMPO CONTINUO MUESTREADAS

A. RESPUESTAS DEL SISTEMA

Mediante $y_c[n]$, $y_s[n]$ y $y[n]$ denotamos las respectivas respuestas del sistema a $\cos \Omega n$, $\sin \Omega n$ y $e^{j\Omega n}$ (figura 6-4). Puesto que $e^{j\Omega n} = \cos \Omega n + j \sin \Omega n$, de la ecuación (6.72) y la propiedad de linealidad del sistema se obtiene

$$y[n] = y_c[n] + j y_s[n] = H(\Omega) e^{j\Omega n} \quad (6.79a)$$

$$y_c[n] = \text{Re}\{y[n]\} = \text{Re}\{H(\Omega) e^{j\Omega n}\} \quad (6.79b)$$

$$y_s[n] = \text{Im}\{y[n]\} = \text{Im}\{H(\Omega) e^{j\Omega n}\} \quad (6.79c)$$

Cuando una senoidal $\cos \Omega n$ se obtiene mediante el muestreo de una senoidal de tiempo continuo $\cos \omega t$ con intervalo de muestreo T_s , es decir,

$$\cos \Omega n = \cos \omega t \Big|_{t=nT_s} = \cos \omega T_s n \quad (6.80)$$

todos los resultados desarrollados en esta sección se aplican si sustituimos ωT_s por Ω :

$$\Omega = \omega T_s \quad (6.81)$$

Para una senoidal de tiempo continuo $\cos \omega t$ existe una forma de onda única para cada valor de ω en el intervalo de 0 a ∞ . Al incrementar ω se produce una senoidal siempre creciente en frecuencia. Por otro lado, la senoidal de tiempo discreto $\cos \Omega n$ tiene una forma de onda única solamente para los valores de Ω en el intervalo de 0 a 2π debido a que

$$\cos[(\Omega + 2\pi m)n] = \cos(\Omega n + 2\pi mn) = \cos \Omega n \quad m = \text{entero} \quad (6.82)$$

Además, este intervalo está restringido por el hecho de que

$$\begin{aligned} \cos(\pi \pm \Omega)n &= \cos \pi n \cos \Omega n \mp \sin \pi n \sin \Omega n \\ &= (-1)^n \cos \Omega n \end{aligned} \quad (6.83)$$

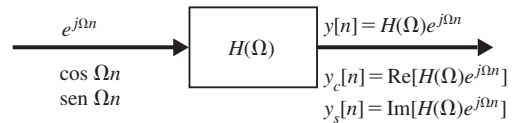


Figura 6-4 Respuestas del sistema para $e^{j\Omega n}$, $\cos \Omega n$ y $\sin \Omega n$.

Por consiguiente,
$$\cos(\pi + \Omega)n = \cos(\pi - \Omega)n \quad (6.84)$$

La ecuación (6.84) muestra que una senoidal de frecuencia $(\pi + \Omega)$ tiene la misma forma de onda que una con frecuencia $(\pi - \Omega)$; por tanto, una senoidal con cualquier valor de Ω fuera del intervalo de 0 a π es idéntica a una senoidal con Ω en el intervalo de 0 a π . De este modo concluimos que toda senoidal de tiempo discreto con una frecuencia en el intervalo de $0 \leq \Omega < \pi$ tiene una forma de onda distinta, y necesitamos observar sólo la respuesta en frecuencia de un sistema sobre el intervalo de frecuencia $0 \leq \Omega < \pi$.

B. TASA DE MUESTREO

Sea $\omega_M (= 2\pi f_M)$ la frecuencia más alta de la senoidal de tiempo continuo. Entonces de la ecuación (6.81) la condición para que una senoidal de tiempo discreto muestreada tenga una forma de onda única es

$$\omega_M T_s < \pi \rightarrow T_s < \frac{\pi}{\omega_M} \quad \text{o} \quad f_s > 2f_M \quad (6.85)$$

donde $f_s = 1/T_s$ es la tasa (o frecuencia) de muestreo. La ecuación (6.85) indica que para procesar una senoidal de tiempo continuo mediante un sistema de tiempo discreto, la tasa de muestreo no debe ser menor que el doble de la frecuencia (en hertz) de la senoidal. Este resultado es un caso especial del teorema de muestreo que discutimos en el problema 5.59.

6.7 SIMULACIÓN

Considere un sistema LIT de tiempo continuo con una entrada $x(t)$ y una salida $y(t)$. Deseamos encontrar un sistema LIT de tiempo discreto con una entrada $x[n]$ y una salida $y[n]$ tal que

$$\text{si } x[n] = x(nT_s) \text{ entonces } y[n] = y(nT_s) \quad (6.86)$$

donde T_s es el intervalo de muestreo.

Sean $H_c(s)$ y $H_d(z)$ las funciones respectivas del sistema de los sistemas de tiempo continuo y de tiempo discreto (figura 6-5). Sea

$$x(t) = e^{j\omega t} \quad x[n] = x(nT_s) = e^{jn\omega T_s} \quad (6.87)$$

Entonces, de las ecuaciones (3.1) y (4.1) tenemos que

$$y(t) = H_c(j\omega) e^{j\omega t} \quad y[n] = H_d(e^{j\omega T_s}) e^{jn\omega T_s} \quad (6.88)$$

De este modo, el requerimiento $y[n] = y(nT_s)$ conduce a la condición

$$H_c(j\omega) e^{jn\omega T_s} = H_d(e^{j\omega T_s}) e^{jn\omega T_s}$$

de lo cual se obtiene

$$H_c(j\omega) = H_d(e^{j\omega T_s}) \quad (6.89)$$

En términos de la transformada de Fourier, la ecuación (6.89) puede expresarse como

$$H_c(\omega) = H_d(\Omega) \quad \Omega = \omega T_s \quad (6.90)$$

Observe que la respuesta en frecuencia $H_d(\Omega)$ del sistema de tiempo discreto es una función periódica de ω (con un periodo de $2\pi/T_s$), pero la respuesta en frecuencia $H_c(\omega)$ del sistema de tiempo continuo no lo es; por consiguiente, la ecuación (6.90) o la ecuación (6.89) no puede, en general, ser verdadera para toda ω . Si la entrada $x(t)$ es de banda limitada [ecuación (5.94)], entonces es posible, en principio, satisfacer la ecuación (6.89) para toda ω en el intervalo de frecuencia

$(-\pi/T_s, \pi/T_s)$ (figura 6-6). Sin embargo, de las ecuaciones (5.85) y (6.77) podemos ver que $H_c(\omega)$ es una función racional de ω , mientras que $H_d(\Omega)$ es una función racional de $e^{j\Omega}$ ($\Omega = \omega T_s$); por tanto, es imposible satisfacer la ecuación (6.89). No obstante, existen métodos para determinar un sistema de tiempo discreto de modo que satisfaga la ecuación (6.89) con precisión razonable para toda ω en la banda de la entrada (problemas 6.43 a 6.47).

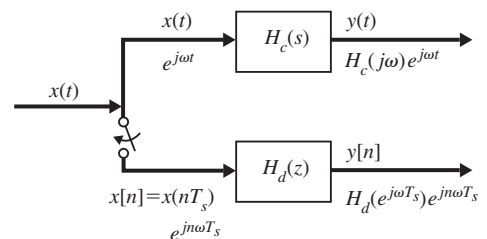


Figura 6-5 Simulación digital de sistemas analógicos.

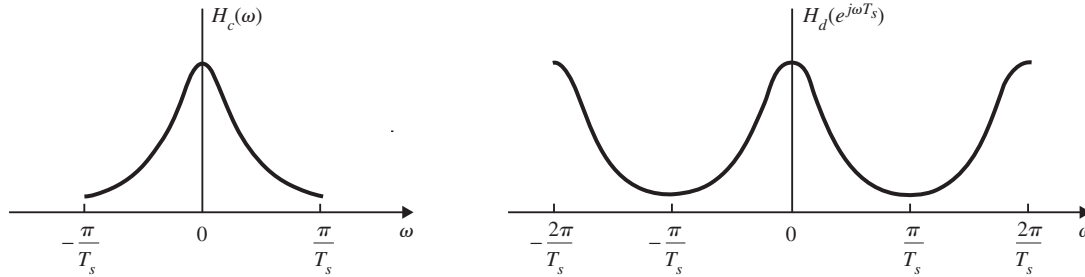


Figura 6-6

6.8 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

En esta sección presentaremos la técnica conocida como *transformada de Fourier discreta* (DFT, *discrete Fourier transform*) para secuencias de longitud finita. Es necesario notar que la DFT no debería confundirse con la transformada de Fourier.

A. DEFINICIÓN

Sea $x[n]$ una secuencia de longitud finita con longitud N , es decir,

$$x[n] = 0 \quad \text{fuera del intervalo } 0 \leq n \leq N - 1 \quad (6.91)$$

La DFT de $x[n]$, denotada como $X[k]$, está definida por

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6.92)$$

donde W_N es la N -ésima raíz dada por

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \quad (6.93)$$

La DFT inversa (IDFT) está dada por

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6.94)$$

El par DFT está denotado por

$$x[n] \leftrightarrow X[k] \quad (6.95)$$

Las características importantes de la DFT son:

1. Existe una correspondencia uno a uno entre $x[n]$ y $X[k]$.
2. Existe un algoritmo extremadamente rápido, conocido como transformada rápida de Fourier (FFT, *fast Fourier transform*) para su cálculo.
3. La DFT está estrechamente relacionada con la transformada de Fourier y la serie de Fourier discreta.
4. La DFT es la representación apropiada de Fourier para su realización digital en computadora debido a que es discreta y de longitud finita tanto en los dominios del tiempo como en el de frecuencia.

Observe que la elección de N en la ecuación (6.92) no es fija. Si $x[n]$ tiene una longitud $N_1 < N$, asumimos que $x[n]$ tiene longitud N al agregar simplemente $(N - N_1)$ muestras con un valor de 0. Esta adición de muestras de relleno se conoce como *rellenado con ceros*. Entonces la $x[n]$ resultante se conoce a menudo como *secuencia de N puntos*, y la $X[k]$ definida en la ecuación (6.92) se conoce como *DFT de N puntos*. Por medio de una selección juiciosa de N , tal como una elección que sea una potencia de 2, puede ganarse mucha eficiencia computacional.

B. RELACIÓN ENTRE LA DFT Y LA SERIE DE FOURIER DISCRETA

Al comparar las ecuaciones (6.94) y (6.92) con las ecuaciones (6.7) y (6.8), vemos que la $X[k]$ de la secuencia finita $x[n]$ puede interpretarse como los coeficientes c_k en la representación en serie de Fourier discreta de su extensión periódica multiplicada por el periodo N_0 y $N_0 = N$. Esto es,

$$X[k] = Nc_k \quad (6.96)$$

En realidad, ambas pueden hacerse idénticas al incluir el factor $1/N$ con la DFT en vez de hacerlo con la IDFT.

C. RELACIÓN ENTRE LA DFT Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Por la definición (6.27), la transformada de Fourier de $x[n]$ definida mediante la ecuación (6.91) puede expresarse como

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (6.97)$$

Al comparar la ecuación (6.97) con la ecuación (6.92) podemos ver que

$$X[k] = X(\Omega) \Big|_{\Omega=k2\pi/N} = X\left(\frac{k2\pi}{N}\right) \quad (6.98)$$

De este modo, $X[k]$ corresponde a $X(\Omega)$ muestreada para las frecuencias uniformemente espaciadas $\Omega = k2\pi/N$ para k entero.

D. PROPIEDADES DE LA DFT

Debido a la relación (6.98) entre la DFT y la transformada de Fourier, esperaríamos que sus propiedades fueran muy semejantes, excepto que $X[k]$ de la DFT es una función de una variable discreta mientras que la $X(\Omega)$ de la transformada de Fourier es una función de una variable continua. Advierta que las variables n y k de la DFT deben estar restringidas al intervalo $0 \leq n, k < N$, los desplazamientos de la DFT $x[n - n_0]$ o $X[k - k_0]$ implican $x[n - n_0]_{\text{mod } N}$ o $X[k - k_0]_{\text{mod } N}$, donde la notación del módulo $[m]_{\text{mod } N}$ significa que

$$[m]_{\text{mod } N} = m + iN \quad (6.99)$$

para algún entero i tal que

$$0 \leq [m]_{\text{mod } N} < N \quad (6.100)$$

Por ejemplo, si $x[n] = \delta[n - 3]$, entonces

$$x[n - 4]_{\text{mod } 6} = \delta[n - 7]_{\text{mod } 6} = \delta[n - 7 + 6] = \delta[n - 1]$$

El desplazamiento de la DFT también se conoce como un *desplazamiento circular*. Las propiedades básicas de la DFT son:

1. LINEALIDAD $a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \leftrightarrow a_1X_1[k] + a_2X_2[k] \quad (6.101)$

2. DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

$$x[n - n_0]_{\text{mod } N} \leftrightarrow W_N^{kn_0} X[k] \quad W_N = e^{-j(2\pi/N)} \quad (6.102)$$

3. DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA

$$W_N^{-kn_0} x[n] \leftrightarrow X[k - k_0]_{\text{mod } N} \quad (6.103)$$

4. CONJUGACIÓN

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*[-k]_{\text{mod } N} \quad (6.104)$$

donde $*$ denota el complejo conjugado.

5. INVERSIÓN DEL TIEMPO

$$x[-n]_{\text{mod } N} \leftrightarrow X[-k]_{\text{mod } N} \quad (6.105)$$

6. DUALIDAD

$$X[n] \leftrightarrow Nx[-k]_{\text{mod } N} \quad (6.106)$$

7. CONVOLUCIÓN CIRCULAR

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1[k] X_2[k] \quad (6.107)$$

donde

$$x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i] x_2[n-i]_{\text{mod } N} \quad (6.108)$$

La suma de convolución en la ecuación (6.108) se conoce como *convolución circular* de $x_1[n]$ y $x_2[n]$.

8. MULTIPLICACIÓN

$$x_1[n] x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{N} X_1[k] \otimes X_2[k] \quad (6.109)$$

donde

$$X_1[k] \otimes X_2[k] = \sum_{i=1}^{N-1} X_1[i] X_2[k-i]_{\text{mod } N}$$

9. PROPIEDADES ADICIONALES

Cuando $x[n]$ es real, sea

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

donde $x_e[n]$ y $x_o[n]$ son los respectivos componentes par e impar de $x[n]$. Sea

$$x[n] \leftrightarrow X[k] = A[k] + jB[k] = |X[k]| e^{j\theta[k]}$$

Entonces

$$X[-k]_{\text{mod } N} = X^*[k] \quad (6.110)$$

$$x_e[n] \leftrightarrow \text{Re}\{X[k]\} = A[k] \quad (6.111a)$$

$$x_o[n] \leftrightarrow j \text{Im}\{X[k]\} = jB[k] \quad (6.111b)$$

De la ecuación (6.110) tenemos que

$$A[-k]_{\text{mod } N} = A[k] \quad B[-k]_{\text{mod } N} = -B[k] \quad (6.112a)$$

$$|X[-k]_{\text{mod } N}| = |X[k]| \quad \theta[-k]_{\text{mod } N} = -\theta[k] \quad (6.112b)$$

10. RELACIÓN DE PARSEVAL

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X[k]|^2 \quad (6.113)$$

La ecuación (6.113) se conoce como *identidad de Parseval* (o *teorema de Parseval*) para la DFT.

PROBLEMAS RESUELTOS

SERIE DE FOURIER DISCRETA

6.1. Se denomina a un conjunto de secuencias $\{\Psi_k[n]\}$ ortogonal sobre un intervalo $[N_1, N_2]$ si cualesquiera dos señales $\Psi_m[n]$ y $\Psi_k[n]$ en el conjunto satisfacen la condición

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \Psi_m[n] \Psi_k^*[n] = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \alpha & m = k \end{cases} \quad (6.114)$$

donde $*$ denota el complejo conjugado y $\alpha \neq 0$. Demuestre que el conjunto de exponenciales complejas

$$\Psi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.115)$$

es ortogonal sobre cualquier intervalo de longitud N .

De la ecuación (1.90) advertimos que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (6.116)$$

Al aplicar la ecuación (6.116) con $\alpha = e^{jk(2\pi/N)}$, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{1-e^{jk(2\pi/N)N}}{1-e^{jk(2\pi/N)}} = 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (6.117)$$

puesto que $e^{jk(2\pi/N)N} = e^{jk2\pi} = 1$. Como cada una de las exponenciales complejas en la sumatoria de la ecuación (6.117) es periódica con un periodo N , la ecuación (6.117) permanece válida con una sumatoria que se lleva a cabo sobre cualquier intervalo de longitud N . Es decir,

$$\sum_{n=\langle N \rangle} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (6.118)$$

Ahora, por medio de la ecuación (6.118) tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=\langle N \rangle} \Psi_m[n] \Psi_k^*[n] &= \sum_{n=\langle N \rangle} e^{jm(2\pi/N)n} e^{-jk(2\pi/N)n} \\ &= \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(m-k)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases} \end{aligned} \quad (6.119)$$

donde $m, k < N$. La ecuación (6.119) muestra que el conjunto $\{\Psi_k[n]; k = 0, 1, \dots, N-1\}$ es ortogonal sobre cualquier intervalo de longitud N . La ecuación (6.114) es la contraparte de tiempo discreto de la ecuación (5.95) que se presentó en el problema 5.1.

6.2. Mediante la condición de ortogonalidad (6.119), deduzca la ecuación (6.8) para los coeficientes de Fourier.

Al reemplazar la variable k de la sumatoria en la ecuación (6.7) tenemos que

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{jm(2\pi/N_0)n} \quad (6.120)$$

Mediante la ecuación (6.115) con $N = N_0$, la ecuación (6.120) puede volver a escribirse como

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} c_m \Psi_m[n] \quad (6.121)$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación (6.121) por $\Psi_k^*[n]$ y sumamos sobre $n = 0$ hasta $(N_0 - 1)$, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] \Psi_k^*[n] = \sum_{n=0}^{N_0-1} \left(\sum_{m=0}^{N_0-1} c_m \Psi_m[n] \right) \Psi_k^*[n]$$

Al intercambiar el orden de la sumatoria y mediante la ecuación (6.119) obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] \Psi_k^*[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} c_m \left(\sum_{n=0}^{N_0-1} \Psi_m[n] \Psi_k^*[n] \right) = N_0 c_k \quad (6.122)$$

De este modo,

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] \Psi_k^*[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N_0)n}$$

6.3. Determine los coeficientes de Fourier para la secuencia periódica $x[n]$ mostrada en la figura 6-7.

De la figura 6-7 podemos observar que $x[n]$ es la extensión periódica de $\{0, 1, 2, 3\}$ con periodo fundamental $N_0 = 4$. De esta manera,

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{4} \quad \text{y} \quad e^{-j\Omega_0} = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2} = -j$$

Por la ecuación (6.8) los coeficientes de Fourier de tiempo discreto c_k son

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] = \frac{1}{4} (0 + 1 + 2 + 3) = \frac{3}{2} \\ c_1 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] (-j)^n = \frac{1}{4} (0 - j1 - 2 + j3) = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \\ c_2 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] (-j)^{2n} = \frac{1}{4} (0 - 1 + 2 - 3) = -\frac{1}{2} \\ c_3 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] (-j)^{3n} = \frac{1}{4} (0 + j1 - 2 - j3) = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Advierta que $c_3 = c_{4-1} = c_1^*$ [ecuación (6.17)].

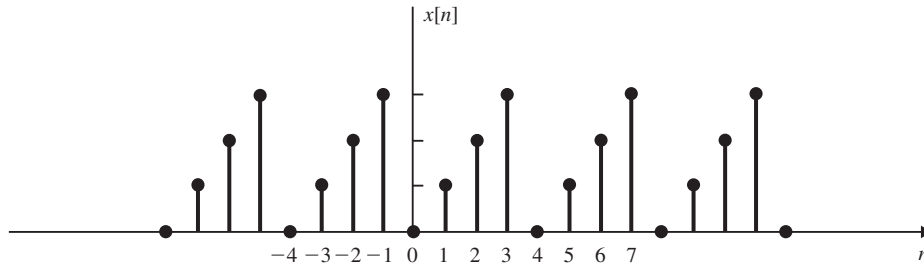


Figura 6-7

6.4. Considere la secuencia periódica $x[n]$ que se ilustra en la figura 6-8a). Determine los coeficientes de Fourier c_k y grafique el espectro de magnitud $|c_k|$.

De la figura 6-8a) observamos que el periodo fundamental de $x[n]$ es $N_0 = 10$ y $\Omega_0 = 2\pi/N_0 = \pi/5$. Mediante la ecuación (6.8) y por medio de la ecuación (1.90) obtenemos que

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{10} \sum_{n=0}^4 e^{-jk(\pi/5)n} = \frac{1}{10} \frac{1 - e^{-jk\pi}}{1 - e^{-jk(\pi/5)}} \\ &= \frac{1}{10} \frac{e^{-jk\pi/2} (e^{jk\pi/2} - e^{-jk\pi/2})}{e^{-jk\pi/10} (e^{jk\pi/10} - e^{-jk\pi/10})} \\ &= \frac{1}{10} e^{-jk(2\pi/5)} \frac{\text{sen}(k\pi/2)}{\text{sen}(k\pi/10)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 9 \end{aligned}$$

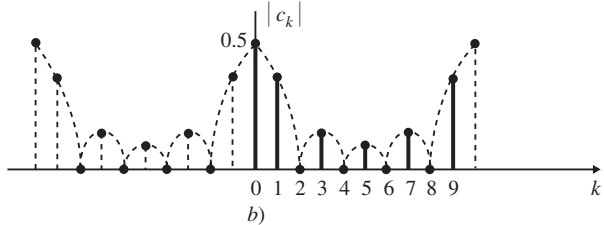
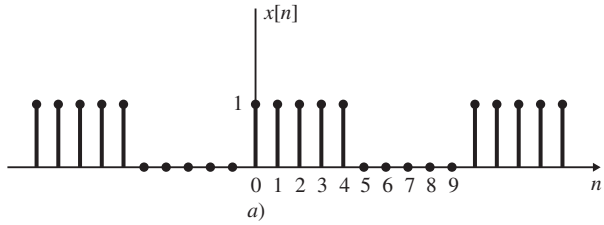


Figura 6-8

El espectro de magnitud $|c_k|$ se grafica en la figura 6-8b).

6.5. Considere una secuencia

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 4k]$$

- a) Grafique $x[n]$.
- b) Encuentre los coeficientes de Fourier c_k de $x[n]$.

- a) La secuencia $x[n]$ se grafica en la figura 6-9a). Puede verse que $x[n]$ es la extensión periódica de la secuencia $\{1, 0, 0, 0\}$ con periodo $N_0 = 4$.
- b) De las ecuaciones (6.7) y (6.8) y de la figura 6-9a) tenemos que

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 c_k e^{jk(2\pi/4)n} = \sum_{k=0}^3 c_k e^{jk(\pi/2)n}$$

y
$$c_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jk(2\pi/4)n} = \frac{1}{4} x[0] = \frac{1}{4} \quad \text{para toda } k$$

puesto que $x[1] = x[2] = x[3] = 0$. Los coeficientes de Fourier de $x[n]$ se grafican en la figura 6-9b).

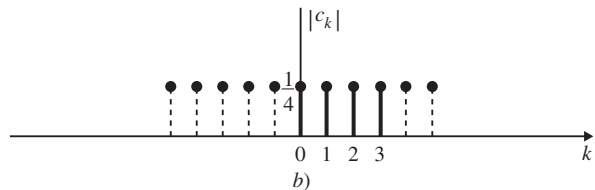
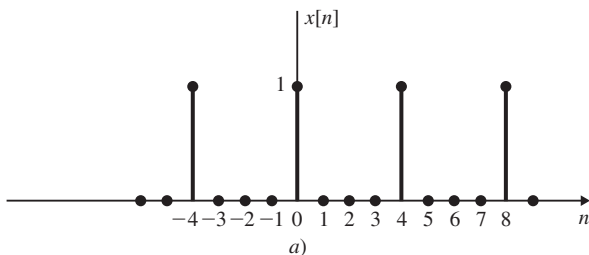


Figura 6-9

6.6. Determine la representación en serie de Fourier discreta para cada una de las siguientes secuencias:

a) $x[n] = \cos \frac{\pi}{4} n$

b) $x[n] = \cos \frac{\pi}{3} n + \text{sen} \frac{\pi}{4} n$

c) $x[n] = \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} n \right)$

a) El periodo fundamental de $x[n]$ es $N_0 = 8$, mientras que $\Omega_0 = 2\pi/N_0 = \pi/4$. En lugar de emplear la ecuación (6.8) para evaluar los coeficientes de Fourier c_k , utilizaremos la fórmula de Euler; así, obtenemos

$$\cos \frac{\pi}{4} n = \frac{1}{2} (e^{j(\pi/4)n} + e^{-j(\pi/4)n}) = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 n}$$

De este modo, los coeficientes de Fourier para $x[n]$ son $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_{-1} = c_{-1+8} = c_7 = \frac{1}{2}$, mientras que todos los otros son $c_k = 0$; por tanto, la serie de Fourier discreta de $x[n]$ es

$$x[n] = \cos \frac{\pi}{4} n = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{j7\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

b) Del problema 1.16i) el periodo fundamental de $x[n]$ es $N_0 = 24$ y $\Omega_0 = 2\pi/N_0 = \pi/12$. Nuevamente, por la fórmula de Euler tenemos que

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2} (e^{j(\pi/3)n} + e^{-j(\pi/3)n}) + \frac{1}{2j} (e^{j(\pi/4)n} - e^{-j(\pi/4)n}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-j4\Omega_0 n} + j \frac{1}{2} e^{-j3\Omega_0 n} - j \frac{1}{2} e^{j3\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{j4\Omega_0 n} \end{aligned}$$

De esta forma, $c_3 = -j(\frac{1}{2})$, $c_4 = \frac{1}{2}$, $c_{-4} = c_{-4+24} = c_{20} = \frac{1}{2}$, $c_{-3} = c_{-3+24} = c_{21} = j(\frac{1}{2})$, mientras que todos los otros son $c_k = 0$; por tanto, la serie discreta de Fourier de $x[n]$ es

$$x[n] = -j \frac{1}{2} e^{j3\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{j4\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{j20\Omega_0 n} + j \frac{1}{2} e^{j21\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{12}$$

c) Del problema 1.16j) el periodo fundamental de $x[n]$ es $N_0 = 8$ y $\Omega_0 = 2\pi/N_0 = \pi/4$. De nuevo, por la fórmula de Euler tenemos que

$$\begin{aligned} x[n] &= \left(\frac{1}{2} e^{j(\pi/8)n} + \frac{1}{2} e^{-j(\pi/8)n} \right)^2 = \frac{1}{4} e^{j(\pi/4)n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-j(\pi/4)n} \\ &= \frac{1}{4} e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-j\Omega_0 n} \end{aligned}$$

De esta forma, $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_{-1} = c_{-1+8} = c_7 = \frac{1}{4}$, todos los otros son $c_k = 0$; por tanto, la serie de Fourier discreta de $x[n]$ es

$$x[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{4} e^{j7\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

6.7. Sea $x[n]$ una secuencia periódica real con periodo fundamental N_0 y coeficientes de Fourier $c_k = a_k + jb_k$, donde tanto a_k como b_k son reales.

a) Demuestre que $a_{-k} = a_k$ y $b_{-k} = -b_k$.

b) Demuestre que $c_{N_0/2}$ es real si N_0 es par.

c) Demuestre que $x[n]$ también puede expresarse con una serie de Fourier trigonométrica discreta de la forma

$$x[n] = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} (a_k \cos k\Omega_0 n - b_k \text{sen } k\Omega_0 n) \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \tag{6.123}$$

si N_0 es impar o

$$x[n] = c_0 + (-1)^n c_{N_0/2} + 2 \sum_{k=1}^{(N_0-2)/2} (a_k \cos k\Omega_0 n - b_k \text{sen } k\Omega_0 n) \tag{6.124}$$

si N_0 es par.

a) Si $x[n]$ es real, entonces de la ecuación (6.8) tenemos que

$$c_{-k} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{jk\Omega_0 n} = \left(\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \right)^* = c_k^*$$

De esta manera,

$$c_{-k} = a_{-k} + jb_{-k} = (a_k + jb_k)^* = a_k - jb_k$$

y tenemos que

$$a_{-k} = a_k \quad \text{y} \quad b_{-k} = -b_k$$

b) Si N_0 es par, entonces de la ecuación (6.8)

$$\begin{aligned} c_{N_0/2} &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j(N_0/2)(2\pi/N_0)n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\pi n} \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} (-1)^n x[n] = \text{real} \end{aligned} \quad (6.125)$$

c) Volvemos a escribir la ecuación (6.7) como

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} = c_0 + \sum_{k=1}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

Si N_0 es par, entonces $(N_0 - 1)$ es par y podremos escribir $x[n]$ como

$$x[n] = c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} \left(c_k e^{jk\Omega_0 n} + c_{N_0-k} e^{j(N_0-k)\Omega_0 n} \right)$$

Ahora, de la ecuación (6.17)

$$c_{N_0-k} = c_k^*$$

y

$$e^{j(N_0-k)\Omega_0 n} = e^{jN_0\Omega_0 n} e^{-jk\Omega_0 n} = e^{j2\pi n} e^{-jk\Omega_0 n} = e^{-jk\Omega_0 n}$$

Así,

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} (c_k e^{jk\Omega_0 n} + c_k^* e^{-jk\Omega_0 n}) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} 2 \operatorname{Re}(c_k e^{jk\Omega_0 n}) \\ &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} \operatorname{Re}(a_k + jb_k)(\cos k\Omega_0 n + j \operatorname{sen} j\Omega_0 n) \\ &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} (a_k \cos k\Omega_0 n - b_k \operatorname{sen} k\Omega_0 n) \end{aligned}$$

Si N_0 es par, podemos escribir $x[n]$ como

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + \sum_{k=1}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-2)/2} \left(c_k e^{jk\Omega_0 n} + c_{N_0-k} e^{j(N_0-k)\Omega_0 n} \right) + c_{N_0/2} e^{j(N_0/2)\Omega_0 n} \end{aligned}$$

Otra vez, de la ecuación (6.17)

$$c_{N_0-k} = c_k^* \quad \text{y} \quad e^{j(N_0-k)\Omega_0 n} = e^{-jk\Omega_0 n}$$

y

$$e^{j(N_0/2)\Omega_0 n} = e^{j(N_0/2)(2\pi/N_0)n} = e^{j\pi n} = (-1)^n$$

Entonces

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + (-1)^n c_{N_0/2} + \sum_{k=1}^{(N_0-2)/2} 2 \operatorname{Re}(c_k e^{jk\Omega_0 n}) \\ &= c_0 + (-1)^n c_{N_0/2} + 2 \sum_{k=1}^{(N_0-2)/2} (a_k \cos k\Omega_0 n - b_k \operatorname{sen} k\Omega_0 n) \end{aligned}$$

6.8. Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ secuencias periódicas con periodo fundamental N_0 y sus series de Fourier discretas dadas por

$$x_1[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} d_k e^{jk\Omega_0 n} \quad x_2[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} e_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

Demuestre que la secuencia $x[n] = x_1[n]x_2[n]$ es periódica con el mismo periodo fundamental N_0 y puede expresarse como

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

donde c_k está dado por

$$c_k = \sum_{m=0}^{N_0-1} d_m e_{k-m} \tag{6.126}$$

Ahora observamos que $x[n + N_0] = x_1[n + N_0]x_2[n + N_0] = x_1[n]x_2[n] = x[n]$

De esta manera, $x[n]$ es periódica con periodo fundamental N_0 . Sea

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n] x_2[n] e^{-jk\Omega_0 n} \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \left(\sum_{m=0}^{N_0-1} d_m e^{jm\Omega_0 n} \right) x_2[n] e^{-jk\Omega_0 n} \\ &= \sum_{m=0}^{N_0-1} d_m \left(\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_2[n] e^{-j(k-m)\Omega_0 n} \right) = \sum_{m=0}^{N_0-1} d_m e_{k-m} \end{aligned}$$

puesto que

$$e_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_2[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

y el término entre paréntesis es igual a e_{k-m} .

6.9. Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ dos señales periódicas del problema 6.8. Demuestre que

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n] x_2[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} d_k e_{-k} \tag{6.127}$$

La ecuación (6.127) se conoce como *relación de Parseval* para secuencias periódicas.

De la ecuación (6.126) tenemos que

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n] x_2[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \sum_{m=0}^{N_0-1} d_m e_{k-m}$$

Al establecer $k = 0$ en la expresión anterior obtenemos

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n] x_2[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} d_m e_{-m} = \sum_{k=0}^{N_0-1} d_k e_{-k}$$

6.10. a) Verifique la identidad de Parseval [ecuación (6.19)] para las series de Fourier discretas; esto es,

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N_0-1} |c_k|^2$$

b) Mediante $x[n]$ en el problema 6.3, verifique la identidad de Parseval [ecuación (6.19)].

a) Sea

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$y \quad x^*[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} d_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$\text{Entonces} \quad d_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x^*[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \left(\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{jk\Omega_0 n} \right)^* = c_{-k}^* \quad (6.128)$$

La ecuación (6.128) indica que si los coeficientes de Fourier de $x[n]$ son c_k , entonces los coeficientes de Fourier de $x^*[n]$ son c_{-k}^* . Si establecemos que $x_1[n] = x[n]$ y $x_2[n] = x^*[n]$ en la ecuación (6.127), tenemos que $d_k = c_k$ y $e_k = c_{-k}^*$ (o $e^{-k} = c_k^*$) y obtenemos

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] x^*[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k c_k^* \quad (6.129)$$

$$y \quad \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N_0-1} |c_k|^2$$

b) De la figura 6-7 y los resultados del problema 6.3 tenemos que

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{4} (0 + 1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} |c_k|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

y la identidad de Parseval se verifica.

TRANSFORMADA DE FOURIER

6.11. Encuentre la transformada de Fourier de

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \quad a \text{ real}$$

De la ecuación (4.12), la transformada z de $x[n]$ está dada por

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| < |a|$$

De este modo, $X(e^{j\Omega})$ existe para $|a| > 1$ porque la ROC de $X(z)$ contiene el círculo unitario. De esta forma,

$$X(\Omega) = X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad |a| > 1 \quad (6.130)$$

6.12. Encuentre la transformada de Fourier de la secuencia del pulso rectangular (figura 6-10)

$$x[n] = u[n] - u[n-N]$$

Mediante la ecuación (1.90), la transformada z de $x[n]$ está dada por

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1-z^N}{1-z} \quad |z| > 0 \quad (6.131)$$

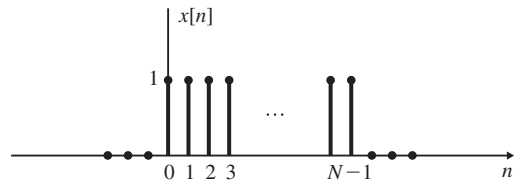


Figura 6-10

De este modo, $X(e^{j\Omega})$ existe porque la ROC de $X(z)$ incluye el círculo unitario. Por tanto,

$$X(\Omega) = X(e^{j\Omega}) = \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{e^{-j\Omega N/2} (e^{j\Omega N/2} - e^{-j\Omega N/2})}{e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})}$$

$$= e^{-j\Omega(N-1)/2} \frac{\text{sen}(\Omega N/2)}{\text{sen}(\Omega/2)} \quad (6.132)$$

6.13. Verifique la propiedad de desplazamiento en el tiempo (6.43); es decir,

$$x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

Por la definición (6.27)

$$\mathcal{F}\{x[n - n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] e^{-j\Omega n}$$

Mediante el cambio de variable $m = n - n_0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x[n - n_0]\} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\Omega(m+n_0)} \\ &= e^{-j\Omega n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\Omega m} = e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

6.14. a) Encuentre la transformada de Fourier $X(\Omega)$ de la secuencia del pulso rectangular mostrado en la figura 6-11a).

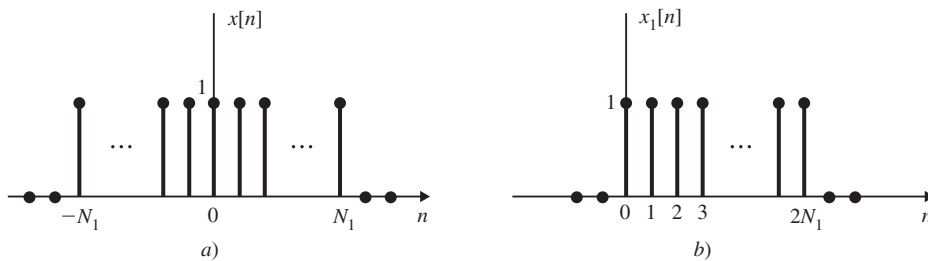


Figura 6-11

b) Grafique $X(\Omega)$ para $N_1 = 4$ y $N_1 = 8$.

a) De la figura 6-11 observamos que

$$x[n] = x_1[n + N_1]$$

donde $x_1[n]$ se ilustra en la figura 6-11b). Si establecemos $N = 2N_1 + 1$ en la ecuación (6.132) tenemos

$$X_1(\Omega) = e^{-j\Omega N_1} \frac{\text{sen}\left[\Omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\text{sen}(\Omega/2)}$$

Ahora, de la propiedad de desplazamiento en el tiempo (6.43) obtenemos que

$$X(\Omega) = e^{j\Omega N_1} X_1(\Omega) = \frac{\text{sen}\left[\Omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\text{sen}(\Omega/2)}$$

b) Al establecer $N_1 = 4$ en la ecuación (6.133) obtenemos

$$X(\Omega) = \frac{\text{sen}(4.5\Omega)}{\text{sen}(0.5\Omega)}$$

lo que se grafica en la figura 6-12a). De manera similar, para $N_1 = 8$ obtenemos

$$X(\Omega) = \frac{\text{sen}(8.5\Omega)}{\text{sen}(0.5\Omega)}$$

lo cual se grafica en la figura 6-12b).

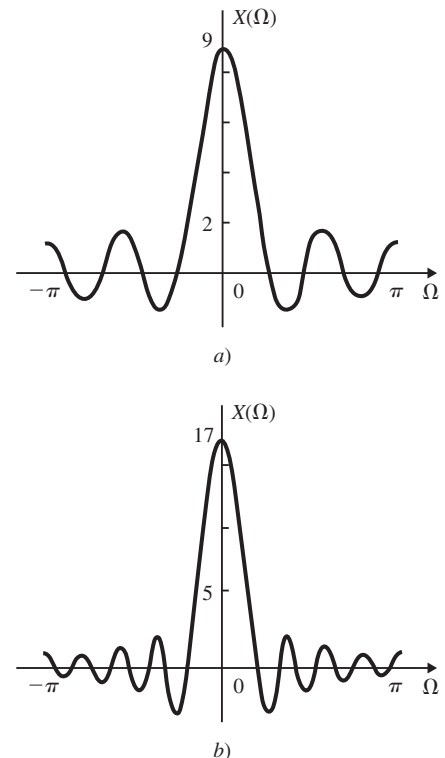


Figura 6-12

6.15. a) Encuentre la transformada de Fourier inversa $x[n]$ del espectro del pulso rectangular $X(\Omega)$ definido por [figura 6-13a)]

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq W \\ 0 & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

b) Grafique $x[n]$ para $W = \pi/4$.

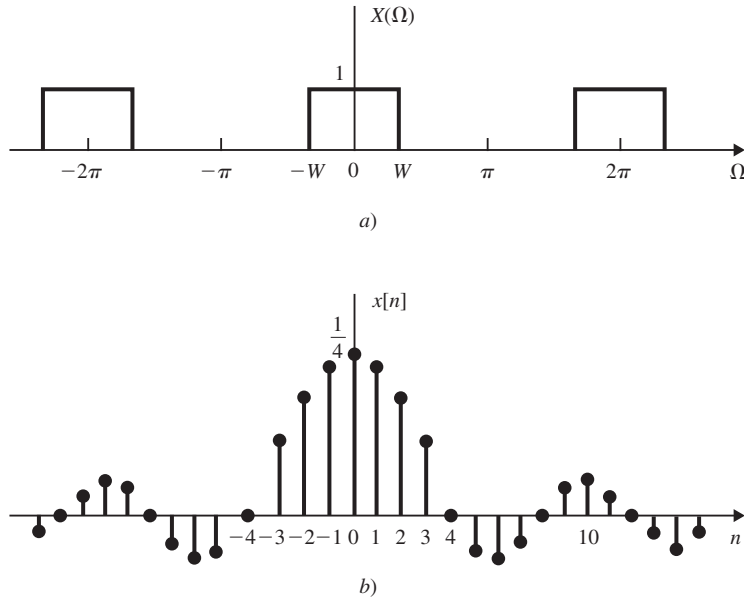


Figura 6-13

a) De la ecuación (6.28)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\text{sen } Wn}{\pi n}$$

De esta manera, obtenemos

$$\frac{\text{sen } Wn}{\pi n} \leftrightarrow X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq W \\ 0 & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (6.134)$$

b) La secuencia $x[n]$ se grafica en la figura 6-13b) para $W = \pi/4$.

6.16. Verifique la propiedad de desplazamiento en la frecuencia (6.44); es decir,

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Por la ecuación (6.27)} \quad \mathcal{F}\{e^{j\Omega_0 n} x[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 n} x[n] e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\Omega - \Omega_0)n} = X(\Omega - \Omega_0) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

6.17. Encuentre la transformada de Fourier inversa $x[n]$ de

$$X(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \quad |\Omega|, |\Omega_0| \leq \pi$$

De las ecuaciones (6.28) y (1.22) tenemos que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) e^{j\Omega n} d\Omega = e^{j\Omega_0 n}$$

De esta manera tenemos que

$$e^{j\Omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \quad |\Omega|, |\Omega_0| \leq \pi \quad (6.135)$$

6.18. Encuentre la transformada de Fourier de

$$x[n] = 1 \quad \text{para toda } n$$

Al establecer $\Omega_0 = 0$ en la ecuación (6.135) obtenemos

$$x[n] = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega) \quad |\Omega| \leq \pi \quad (6.136)$$

La ecuación (6.136) se representa en la figura 6-14.

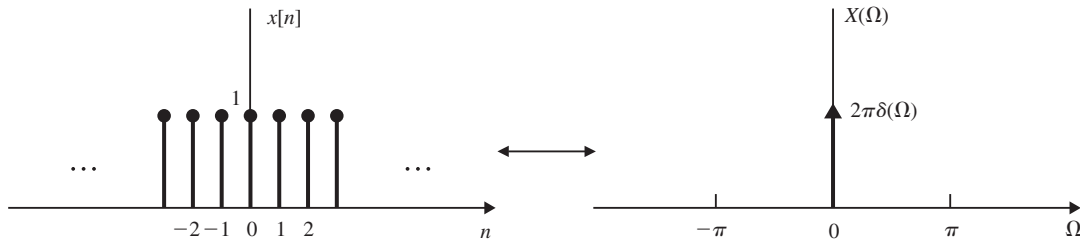


Figura 6-14 Una secuencia constante y su transformada de Fourier.

6.19. Encuentre la transformada de Fourier de la secuencia senoidal

$$x[n] = \cos \Omega_0 n \quad |\Omega_0| \leq \pi$$

De la fórmula de Euler tenemos que

$$\cos \Omega_0 n = \frac{1}{2} (e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega_0 n})$$

De este modo, por medio de la ecuación (6.135) y de la propiedad de linealidad (6.42) obtenemos

$$X(\Omega) = \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)] \quad |\Omega|, |\Omega_0| \leq \pi$$

lo que se ilustra en la figura 6-15. De esta manera,

$$\cos \Omega_0 n \leftrightarrow \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)] \quad |\Omega|, |\Omega_0| \leq \pi \quad (6.137)$$

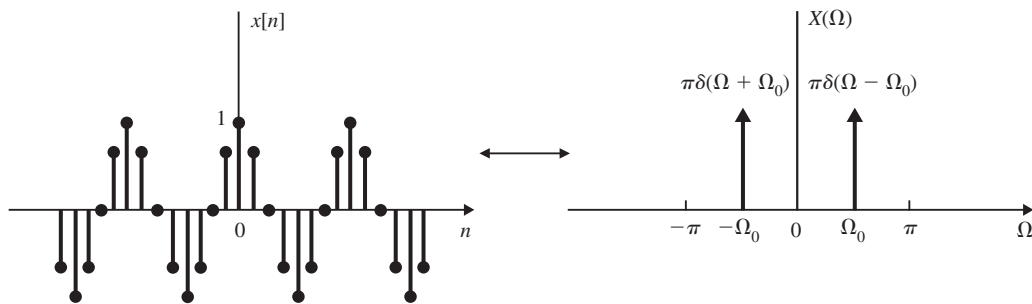


Figura 6-15 Una secuencia coseno y su transformada de Fourier.

6.20. Verifique la propiedad de conjugación (6.45); esto es,

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(-\Omega)$$

De la ecuación (6.27)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x^*[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{-j\Omega n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\Omega n} \right)^* \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(-\Omega)n} \right)^* = X^*(-\Omega) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(-\Omega)$$

6.21. Verifique la propiedad de escalamiento en el tiempo (6.49); es decir,

$$x_{(m)}[n] \leftrightarrow X(m\Omega)$$

De la ecuación (6.48)

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] = x[k] & \text{si } n = km, k = \text{integral} \\ 0 & \text{si } n \neq km \end{cases}$$

Entonces, por la ecuación (6.27),

$$\mathcal{F}\{x_{(m)}[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(m)}[n] e^{-j\Omega n}$$

Al cambiar la variable $n = km$ en el lado derecho de la expresión anterior obtenemos

$$\mathcal{F}\{x_{(m)}[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{(m)}[km] e^{-j\Omega km} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j(m\Omega)k} = X(m\Omega)$$

Por consiguiente,

$$x_{(m)}[n] \leftrightarrow X(m\Omega)$$

6.22. Considere la secuencia $x[n]$ definida por

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq 2 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

- Grafique $x[n]$ y su transformada de Fourier $X(\Omega)$.
- Grafique la secuencia escalada en el tiempo $x_{(2)}[n]$ y su transformada de Fourier $X_{(2)}(\Omega)$.
- Grafique la secuencia escalada en el tiempo $x_{(3)}[n]$ y su transformada de Fourier $X_{(3)}(\Omega)$.

a) Al establecer $N_1 = 2$ en la ecuación (6.133) tenemos que

$$X(\Omega) = \frac{\text{sen}(2.5\Omega)}{\text{sen}(0.5\Omega)} \quad (6.138)$$

La secuencia $x[n]$ y su transformada de Fourier $X(\Omega)$ se representan en la figura 6-16a).

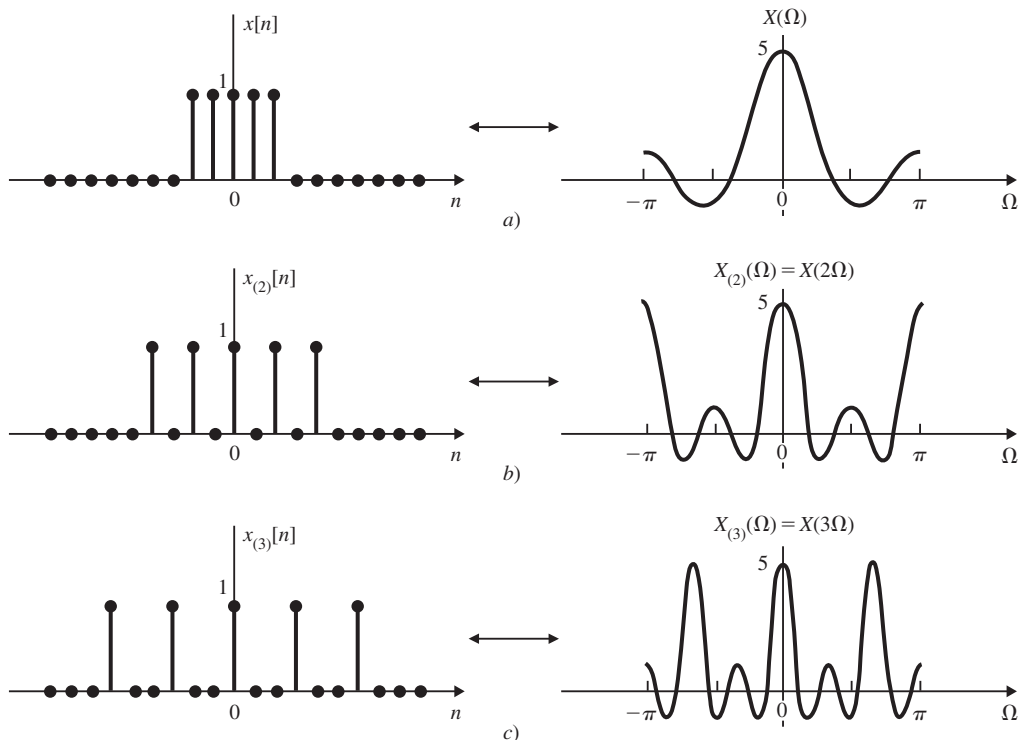


Figura 6-16

b) De las ecuaciones (6.49) y (6.138) tenemos que

$$X_{(2)}(\Omega) = X(2\Omega) = \frac{\text{sen}(5\Omega)}{\text{sen}(\Omega)}$$

La secuencia escalada en el tiempo $x_{(2)}[n]$ y su transformada de Fourier $X_{(2)}(\Omega)$ se representan en la figura 6-16b).

c) De manera semejante obtenemos

$$X_{(3)}(\Omega) = X(3\Omega) = \frac{\text{sen}(7.5\Omega)}{\text{sen}(1.5\Omega)}$$

La secuencia escalada en el tiempo $x_{(3)}[n]$ y su transformada de Fourier $X_{(3)}(\Omega)$ se representan en la figura 6-16c).

6.23. Verifique la propiedad de diferenciación en frecuencia (6.55); es decir,

$$nx[n] \leftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

De la definición (6.27)

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Si efectuamos la diferenciación en ambos lados de la expresión anterior con respecto a Ω e intercambiamos el orden de diferenciación y sumatoria, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} &= \frac{d}{d\Omega} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{d}{d\Omega} (e^{-j\Omega n}) \\ &= -j \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n] e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

Al multiplicar ambos lados por j observamos que

$$\mathcal{F}\{nx[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n] e^{-j\Omega n} = j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

Por tanto,

$$nx[n] \leftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

6.24. Verifique el teorema de convolución (6.58); es decir,

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(\Omega) X_2(\Omega)$$

Por las definiciones (2.35) y (6.27) tenemos que

$$\mathcal{F}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k] \right) e^{-j\Omega n}$$

Al cambiar el orden de las sumatorias obtenemos

$$\mathcal{F}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k] e^{-j\Omega n} \right)$$

Mediante la propiedad de desplazamiento en el tiempo ecuación (6.43)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k] e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega k} X_2(\Omega)$$

De este modo, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_1[n] * x_2[n]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] e^{-j\Omega k} X_2(\Omega) \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] e^{-j\Omega k} \right) X_2(\Omega) = X_1(\Omega) X_2(\Omega) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(\Omega) X_2(\Omega)$$

6.25. Mediante el teorema de convolución (6.58) encuentre la transformada de Fourier inversa $x[n]$ de

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2} \quad |a| < 1$$

De la ecuación (6.37) tenemos que

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad |a| < 1$$

Ahora

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2} = \left(\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \right) \left(\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \right)$$

De este modo, por el teorema de convolución, ecuación (6.58), obtenemos

$$\begin{aligned} x[n] &= a^n u[n] * a^n u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k] a^{n-k} u[n-k] \\ &= a^n \sum_{k=0}^{\infty} 1 = (n+1) a^n u[n] \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$(n+1) a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2} \quad |a| < 1 \quad (6.139)$$

6.26. Verifique la propiedad de multiplicación (6.59); es decir,

$$x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega)$$

Sea $x[n] = x_1[n]x_2[n]$. Entonces, por la definición (6.27),

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n] e^{-j\Omega n}$$

Por la ecuación (6.28)

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) e^{j\theta n} d\theta$$

Entonces

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) e^{j\theta n} d\theta \right] x_2[n] e^{-j\Omega n}$$

Al intercambiar el orden de sumatoria e integración obtenemos

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] e^{-j(\Omega-\theta)n} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) X_2(\Omega - \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega)$$

6.27. Verifique las propiedades (6.62), (6.63a) y (6.63b); es decir, si $x[n]$ es real y

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \leftrightarrow X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega) \quad (6.140)$$

donde $x_e[n]$ y $x_o[n]$ son los respectivos componentes par e impar de $x[n]$, entonces

$$\begin{aligned} X(-\Omega) &= X^*(\Omega) \\ x_e[n] &\leftrightarrow \operatorname{Re}\{X(\Omega)\} = A(\Omega) \\ x_o[n] &\leftrightarrow j \operatorname{Im}\{X(\Omega)\} = jB(\Omega) \end{aligned}$$

Si $x[n]$ es real, entonces $x^*[n] = x[n]$, y por la ecuación (6.45) tenemos que

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(-\Omega)$$

de lo que obtenemos

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega) \quad \text{o} \quad X(-\Omega) = X^*(\Omega)$$

A continuación, mediante la ecuación (6.46) y las ecuaciones (1.2) y (1.3) tenemos que

$$x[-n] = x_e[n] - x_o[n] \leftrightarrow X(-\Omega) = X^*(\Omega) = A(\Omega) - jB(\Omega) \quad (6.141)$$

Al sumar (restar) la ecuación (6.141) a (de) la ecuación (6.140) obtenemos

$$\begin{aligned} x_e[n] &\leftrightarrow A(\Omega) = \text{Re}\{X(\Omega)\} \\ x_o[n] &\leftrightarrow jB(\Omega) = j \text{Im}\{X(\Omega)\} \end{aligned}$$

6.28. Demuestre que

$$u[n] \leftrightarrow \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \quad |\Omega| \leq \pi \quad (6.142)$$

Sea

$$u[n] \leftrightarrow X(\Omega)$$

Ahora observe que

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$$

Al tomar la transformada de Fourier de ambos lados de la expresión anterior y por las ecuaciones (6.36) y (6.43) tenemos que

$$1 = (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega)$$

Nótese que $(1 - e^{-j\Omega}) = 0$ para $\Omega = 0$, $X(\Omega)$ debe ser de la forma

$$X(\Omega) = A\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \quad |\Omega| \leq \pi$$

donde A es una constante. Para determinar A procedemos así: de la ecuación (1.5) la componente par de $u[n]$ está dada por

$$u_e[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \delta[n]$$

Entonces, la componente impar de $u[n]$ está dada por

$$u_o[n] = u[n] - u_e[n] = u[n] - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \delta[n]$$

y

$$\mathcal{F}\{u_o[n]\} = A\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} - \pi\delta(\Omega) - \frac{1}{2}$$

De la ecuación (6.63b), la transformada de Fourier de una secuencia impar real debe ser puramente imaginaria. De este modo, debemos tener $A = \pi$, y

$$u[n] \leftrightarrow \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \quad |\Omega| \leq \pi$$

6.29. Verifique la propiedad de acumulación (6.57); es decir,

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \pi X(0) \delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) \quad |\Omega| \leq \pi$$

De la ecuación (2.132)

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] * u[n]$$

De esta forma, por el teorema de convolución (6.58) y la ecuación (6.142) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^n x[k] &\leftrightarrow X(\Omega) \left[\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \right] \quad |\Omega| \leq \pi \\ &= \pi X(0) \delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) \end{aligned}$$

puesto que $X(\Omega)\delta(\Omega) = X(0)\delta(\Omega)$ por la ecuación (1.25).

6.30. Por medio de la propiedad de acumulación (6.57) y la ecuación (1.50) encuentre la transformada de Fourier de $u[n]$.

De la ecuación (1.50)

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

Ahora, de la ecuación (6.36) tenemos que $\delta[n] \leftrightarrow 1$

Al establecer que $x[k] = \delta[k]$ en la ecuación (6.57) tenemos que

$$x[n] = \delta[n] \leftrightarrow X(\Omega) = 1 \quad \text{y} \quad X(0) = 1$$

y

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] \leftrightarrow \pi \delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \quad |\Omega| \leq \pi$$

RESPUESTA EN FRECUENCIA

6.31. Un sistema LIT causal de tiempo discreto está descrito por

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] \quad (6.143)$$

donde $x[n]$ y $y[n]$ son la respectiva entrada y salida del sistema (problema 4.32).

- a) Determine la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ del sistema.
 b) Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

a) Al tomar la transformada de Fourier de la ecuación (6.143) obtenemos

$$Y(\Omega) - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}Y(\Omega) + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}Y(\Omega) = X(\Omega)$$

o

$$\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}\right)Y(\Omega) = X(\Omega)$$

De este modo,

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)}$$

b) Por medio de expansiones por fracciones parciales tenemos que

$$H(\Omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

Si tomamos la transformada de Fourier inversa de $H(\Omega)$ obtenemos

$$h[n] = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

el cual es el mismo resultado obtenido en el problema 4.32b).

6.32. Considere un sistema LIT de tiempo discreto descrito por

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] \quad (6.144)$$

- a) Determine la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ del sistema.
 b) Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.
 c) Determine su respuesta $y[n]$ para la entrada

$$x[n] = \cos \frac{\pi}{2}n$$

a) Al tomar la transformada de Fourier de la ecuación (6.144) obtenemos

$$Y(\Omega) - \frac{1}{2} e^{-j\Omega} Y(\Omega) = X(\Omega) + \frac{1}{2} e^{-j\Omega} X(\Omega)$$

De esta forma,

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$

b)

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} + \frac{1}{2} \frac{e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$

Si tomamos la transformada de Fourier inversa de $H(\Omega)$ obtenemos

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & n \geq 1 \end{cases}$$

c) De la ecuación (6.137)

$$X(\Omega) = \pi \left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad |\Omega| \leq \pi$$

Entonces

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= X(\Omega) H(\Omega) = \pi \left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) \right] \frac{1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} \\ &= \pi \left(\frac{1 + \frac{1}{2} e^{-j\pi/2}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\pi/2}} \right) \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \pi \left(\frac{1 + \frac{1}{2} e^{+j\pi/2}}{1 - \frac{1}{2} e^{+j\pi/2}} \right) \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pi \left(\frac{1 - j\frac{1}{2}}{1 + j\frac{1}{2}} \right) \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \pi \left(\frac{1 + j\frac{1}{2}}{1 - j\frac{1}{2}} \right) \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pi \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) e^{-j2 \tan^{-1}(1/2)} + \pi \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) e^{j2 \tan^{-1}(1/2)} \end{aligned}$$

Al tomar la transformada de Fourier inversa de $Y(\Omega)$, y mediante la ecuación (6.135), obtenemos

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2} e^{j(\pi/2)n} e^{-j2 \tan^{-1}(1/2)} + \frac{1}{2} e^{-j(\pi/2)n} e^{j2 \tan^{-1}(1/2)} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}n - 2 \tan^{-1}\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

6.33. Considere un sistema LIT de tiempo discreto con respuesta al impulso

$$h[n] = \frac{\text{sen}(\pi n / 4)}{\pi n}$$

Encuentre la salida $y[n]$ si la entrada $x[n]$ es una secuencia periódica con periodo fundamental $N_0 = 5$, como se ilustra en la figura 6-17.

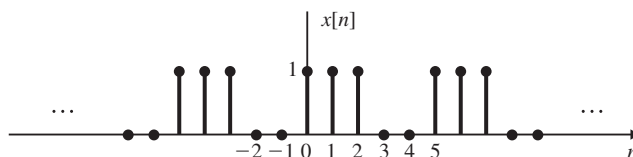


Figura 6-17

De la ecuación (6.134) tenemos que

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \pi/4 \\ 0 & \pi/4 < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

Puesto que $\Omega_0 = 2\pi/N_0 = 2\pi/5$ y el filtro sólo pasa frecuencias en el intervalo $|\Omega| \leq \pi/4$, únicamente el término de cd pasa a través del mismo. De la figura 6-17 y la ecuación (6.11)

$$c_0 = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^4 x[n] = \frac{3}{5}$$

De esta forma, la salida $y[n]$ está dada por

$$y[n] = \frac{3}{5} \quad \text{para toda } n$$

6.34. Considere el sistema LIT de tiempo discreto mostrado en la figura 6-18.

- a) Encuentre la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ del sistema.
- b) Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.
- c) Grafique la respuesta de magnitud $|H(\Omega)|$ y la respuesta de fase $\theta(\Omega)$.
- d) Encuentre el ancho de banda de 3 dB del sistema.

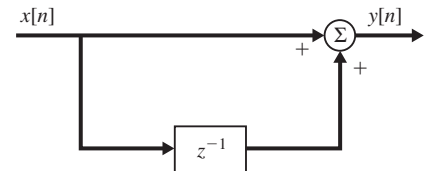


Figura 6-18

a) De la figura 6-18 tenemos que

$$y[n] = x[n] + x[n - 1] \tag{6.145}$$

Si tomamos la transformada de Fourier de la ecuación (6.145) y por la ecuación (6.77) tenemos que

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = 1 + e^{-j\Omega} = e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2}) \\ &= 2e^{-j\Omega/2} \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad |\Omega| \leq \pi \end{aligned} \tag{6.146}$$

b) Por la definición de $h[n]$ [ecuación (2.30)] y la ecuación (6.145) obtenemos

$$\begin{aligned} h[n] &= \delta[n] + \delta[n - 1] \\ \text{o} \quad h[n] &= \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \end{aligned}$$

c) De la ecuación (6.146) $|H(\Omega)| = 2 \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad |\Omega| \leq \pi$

$$\text{y} \quad \theta(\Omega) = -\frac{\Omega}{2} \quad |\Omega| \leq \pi$$

lo cual puede apreciarse en la figura 6-19.

d) Sea $\Omega_{3 \text{ dB}}$ el ancho de banda de 3 dB del sistema. Entonces, por definición (sección 5.7),

$$|H(\Omega_{3 \text{ dB}})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(\Omega)|_{\text{máx}}$$

obtenemos

$$\cos\left(\frac{\Omega_{3 \text{ dB}}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \Omega_{3 \text{ dB}} = \frac{\pi}{2}$$

Observamos que el sistema es un filtro de respuesta al impulso finito (FIR, *finite impulse response*) pasa-bajas de banda ancha, de tiempo discreto (sección 2.9C).

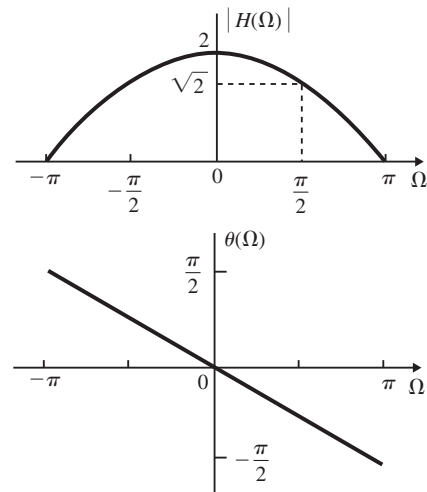


Figura 6-19

6.35. Considere el sistema LIT de tiempo discreto que se ilustra en la figura 6-20, donde a es una constante y $0 < a < 1$.

- a) Encuentre la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ del sistema.
- b) Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.
- c) Grafique la respuesta de magnitud $|H(\Omega)|$ del sistema para $a = 0.9$ y $a = 0.5$.

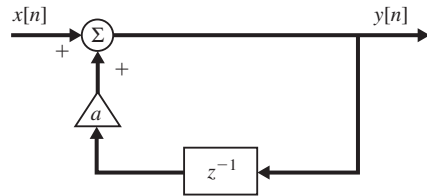


Figura 6-20

a) De la figura 6-20 tenemos que

$$y[n] - ay[n - 1] = x[n] \tag{6.147}$$

Al tomar la transformada de Fourier de la ecuación (6.147) y por la ecuación (6.77) tenemos que

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad |a| < 1 \tag{6.148}$$

b) Mediante la ecuación (6.37) obtenemos

$$h[n] = a^n u[n]$$

c) De la ecuación (6.148)

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 - a \cos \Omega + ja \operatorname{sen} \Omega}$$

$$y \quad |H(\Omega)| = \frac{1}{\left[(1 - a \cos \Omega)^2 + (a \operatorname{sen} \Omega)^2 \right]^{1/2}} = \frac{1}{(1 + a^2 - 2a \cos \Omega)^{1/2}} \tag{6.149}$$

la cual se gráfica en la figura 6-21 para $a = 0.9$ y $a = 0.5$.

Podemos observar que el sistema es un filtro con respuesta al impulso infinita (IIR, *infinite impulse response*) pasa-bajas de tiempo discreto (sección 2.9C).

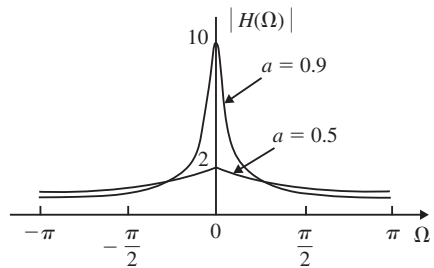


Figura 6-21

6.36. Sea $h_{\text{LPF}}[n]$ la respuesta al impulso de un filtro pasa-bajas de tiempo discreto con respuesta de frecuencia $H_{\text{LPF}}(\Omega)$. Demuestre que un filtro de tiempo discreto cuya respuesta al impulso $h[n]$ está dada por

$$h[n] = (-1)^n h_{\text{LPF}}[n] \tag{6.150}$$

es un filtro pasa-altas con la respuesta en frecuencia

$$H(\Omega) = H_{\text{LPF}}(\Omega - \pi) \tag{6.151}$$

Puesto que $-1 = e^{j\pi}$, podemos escribir

$$h[n] = (-1)^n h_{\text{LPF}}[n] = e^{j\pi n} h_{\text{LPF}}[n] \tag{6.152}$$

Tomamos la transformada de Fourier de la ecuación (6.152) y por medio de la propiedad de desplazamiento en la frecuencia (6.44) obtenemos

$$H(\Omega) = H_{\text{LPF}}(\Omega - \pi)$$

la cual representa la respuesta en frecuencia de un filtro pasa-altas. Esto se ilustra en la figura 6-22.

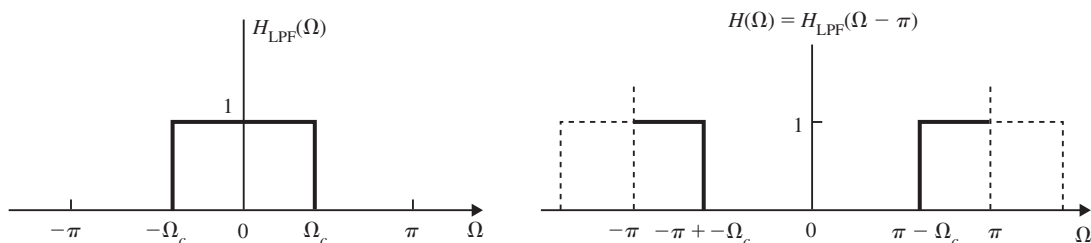


Figura 6-22 Transformación de un filtro pasa-bajas a un filtro pasa-altas.

6.37. Demuestre que si un filtro pasa-bajas de tiempo discreto se describe mediante la ecuación en diferencias

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (6.153)$$

entonces el filtro de tiempo discreto descrito por

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M (-1)^k b_k x[n-k] \quad (6.154)$$

es pasa-altas.

Al tomar la transformada de Fourier de la ecuación (6.153) obtenemos la respuesta en frecuencia $H_{\text{LPF}}(\Omega)$ del filtro pasa-bajas como

$$H_{\text{LPF}}(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-jk\Omega}} \quad (6.155)$$

Si reemplazamos Ω por $(\Omega - \pi)$ en la ecuación (6.155), entonces tenemos que

$$H_{\text{HPF}}(\Omega) = H_{\text{LPF}}(\Omega - \pi) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk(\Omega-\pi)}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-jk(\Omega-\pi)}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (-1)^k e^{-jk\Omega}}{1 + \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k e^{-jk\Omega}} \quad (6.156)$$

lo cual corresponde a la ecuación en diferencias

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M (-1)^k b_k x[n-k]$$

6.38. Convierta el filtro pasa-bajas de tiempo discreto mostrado en la figura 6-18 (problema 6.34) a un filtro pasa-altas.

Del problema 6.34, el filtro pasa-bajas de tiempo discreto mostrado en la figura 6-18 está descrito mediante la ecuación (6.145)

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

Mediante la ecuación (6.154), el filtro pasa-altas convertido está descrito por

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad (6.157)$$

lo cual nos lleva al diagrama de circuito en la figura 6-23. Si tomamos la transformada de Fourier de la ecuación (6.157) y mediante la ecuación (6.77) tenemos que

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= 1 - e^{-j\Omega} = e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}) \\ &= j2e^{-j\Omega/2} \sin \frac{\Omega}{2} = 2e^{j(\pi-\Omega)/2} \sin \frac{\Omega}{2} \quad |\Omega| \leq \pi \end{aligned} \quad (6.158)$$

De la ecuación (6.158)

$$|H(\Omega)| = 2 \left| \sin \left(\frac{\Omega}{2} \right) \right| \quad |\Omega| \leq \pi$$

$$y \quad \theta(\Omega) = \begin{cases} (\pi - \Omega) / 2 & 0 < \Omega < \pi \\ (-\pi - \Omega) / 2 & -\pi \leq \Omega < 0 \end{cases}$$

lo cual se esquematiza en la figura 6-24. Vemos que el sistema es un filtro FIR pasa-altas de tiempo discreto.

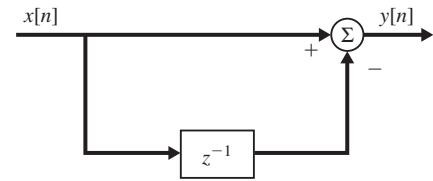


Figura 6-23

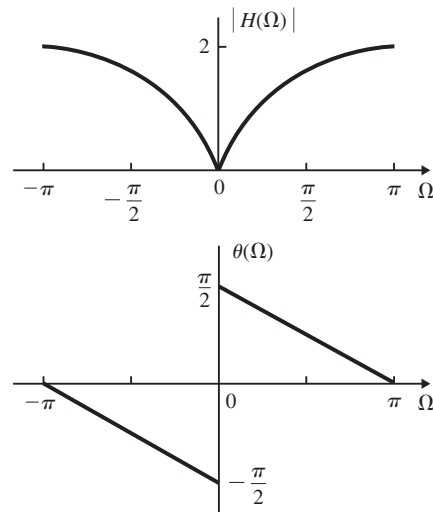


Figura 6-24

6.39. La función del sistema $H(z)$ de un sistema LIT causal de tiempo discreto está dada por

$$H(z) = \frac{b + z^{-1}}{1 - az^{-1}} \tag{6.159}$$

donde a es real y $|a| < 1$. Encuentre el valor de b de manera que la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ del sistema satisfaga la condición

$$|H(\Omega)| = 1 \quad \text{para toda } \Omega \tag{6.160}$$

Un sistema de esta clase se denomina filtro *pasa-todo*.

Por la ecuación (6.34), la respuesta en frecuencia del sistema es

$$H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{b + e^{-j\Omega}}{1 - ae^{-j\Omega}} \tag{6.161}$$

Entonces, por la ecuación (6.160),

$$|H(\Omega)| = \left| \frac{b + e^{-j\Omega}}{1 - ae^{-j\Omega}} \right| = 1$$

lo que nos conduce a

$$|b + e^{-j\Omega}| = |1 - ae^{-j\Omega}|$$

o

$$|b + \cos \Omega - j \operatorname{sen} \Omega| = |1 - a \cos \Omega + ja \operatorname{sen} \Omega|$$

o

$$1 + b^2 + 2b \cos \Omega = 1 + a^2 - 2a \cos \Omega \tag{6.162}$$

y podemos apreciar que si $b = -a$, la ecuación (6.162) se mantiene para toda Ω y la ecuación (6.160) se satisface.

6.40. Sea $h[n]$ la respuesta al impulso de un filtro FIR de manera que

$$h[n] = 0 \quad n < 0, n \geq N$$

Supongamos que $h[n]$ es real y que la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ puede expresarse como

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\theta(\Omega)}$$

a) Encuentre la respuesta de fase $\theta(\Omega)$ cuando $h[n]$ satisface la condición [figura 6-25a)]

$$h[n] = h[N - 1 - n] \tag{6.163}$$

b) Encuentre la respuesta de fase $\theta(\Omega)$ cuando $h[n]$ satisface la condición [figura 6-25b)]

$$h[n] = -h[N - 1 - n] \tag{6.164}$$

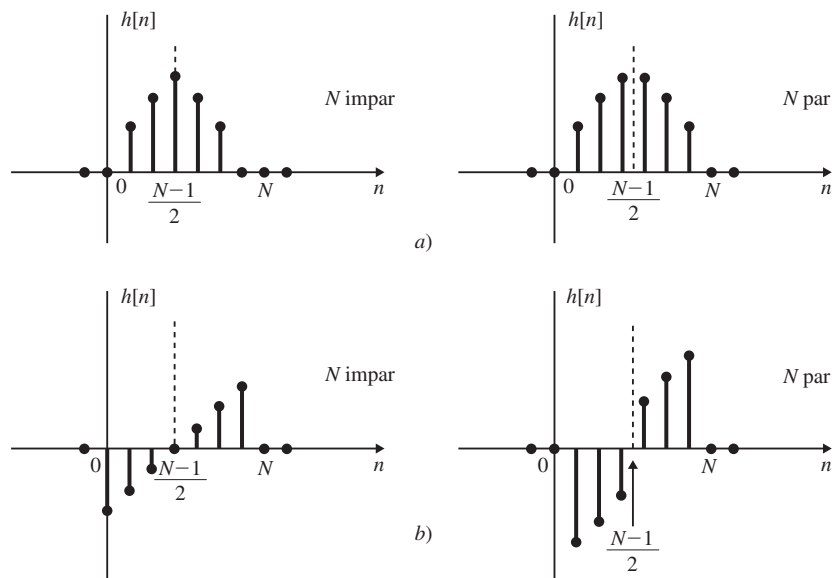


Figura 6-25

- a) Al tomar la transformada de Fourier de la ecuación (6.163) y mediante las ecuaciones (6.43), (6.46) y (6.62) obtenemos que

$$H(\Omega) = H^*(\Omega) e^{-j(N-1)\Omega}$$

o

$$|H(\Omega)| e^{j\theta(\Omega)} = |H(\Omega)| e^{-j\theta(\Omega)} e^{-j(N-1)\Omega}$$

De este modo,

$$\theta(\Omega) = -\theta(\Omega) - (N-1)\Omega$$

y

$$\theta(\Omega) = -\frac{1}{2}(N-1)\Omega \quad (6.165)$$

lo cual indica que la respuesta de fase es lineal.

- b) De manera similar, al tomar la transformada de Fourier de la ecuación (6.164) obtenemos

$$H(\Omega) = -H^*(\Omega) e^{-j(N-1)\Omega}$$

o

$$|H(\Omega)| e^{j\theta(\Omega)} = |H(\Omega)| e^{j\pi} e^{-j\theta(\Omega)} e^{-j(N-1)\Omega}$$

De esta manera,

$$\theta(\Omega) = \pi - \theta(\Omega) - (N-1)\Omega$$

y

$$\theta(\Omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(N-1)\Omega \quad (6.166)$$

lo cual indica que la respuesta de fase también es lineal.

6.41. Considere un filtro de tiempo discreto de promedio móvil de tres puntos descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] = \frac{1}{3} \{x[n] + x[n-1] + x[n-2]\} \quad (6.167)$$

- a) Encuentre y grafique la respuesta al impulso $h[n]$ del filtro.
 b) Encuentre la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ del filtro.
 c) Grafique la respuesta de magnitud $|H(\Omega)|$ y la respuesta de fase $\theta(\Omega)$ del filtro.

- a) Por la definición de $h[n]$ [ecuación (2.30)] tenemos que

$$h[n] = \frac{1}{3} \{\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\} \quad (6.168)$$

o

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

la cual se grafica en la figura 6-26a). Observe que $h[n]$ satisface la condición (6.163) con $N = 3$.

- b) Tomando la transformada de Fourier de la ecuación (6.168) tenemos que

$$H(\Omega) = \frac{1}{3} \{1 + e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}\}$$

Por la ecuación (1.90), con $\alpha = e^{-j\Omega}$, obtenemos

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \frac{1}{3} \frac{1 - e^{-j3\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{1}{3} \frac{e^{-j3\Omega/2} (e^{j3\Omega/2} - e^{-j3\Omega/2})}{e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})} \\ &= \frac{1}{3} e^{-j\Omega} \frac{\text{sen}(3\Omega/2)}{\text{sen}(\Omega/2)} = H_r(\Omega) e^{-j\Omega} \end{aligned} \quad (6.169)$$

donde

$$H_r(\Omega) = \frac{1}{3} \frac{\text{sen}(3\Omega/2)}{\text{sen}(\Omega/2)} \quad (6.170)$$

- c) De la ecuación (6.169) $|H(\Omega)| = |H_r(\Omega)| = \frac{1}{3} \left| \frac{\text{sen}(3\Omega/2)}{\text{sen}(\Omega/2)} \right|$

y

$$\theta(\Omega) = \begin{cases} -\Omega & \text{donde } H_r(\Omega) > 0 \\ -\Omega + \pi & \text{donde } H_r(\Omega) < 0 \end{cases}$$

las cuales se representan en la figura 6-26b). Podemos apreciar que el sistema es un filtro FIR pasa-bajas con fase lineal.

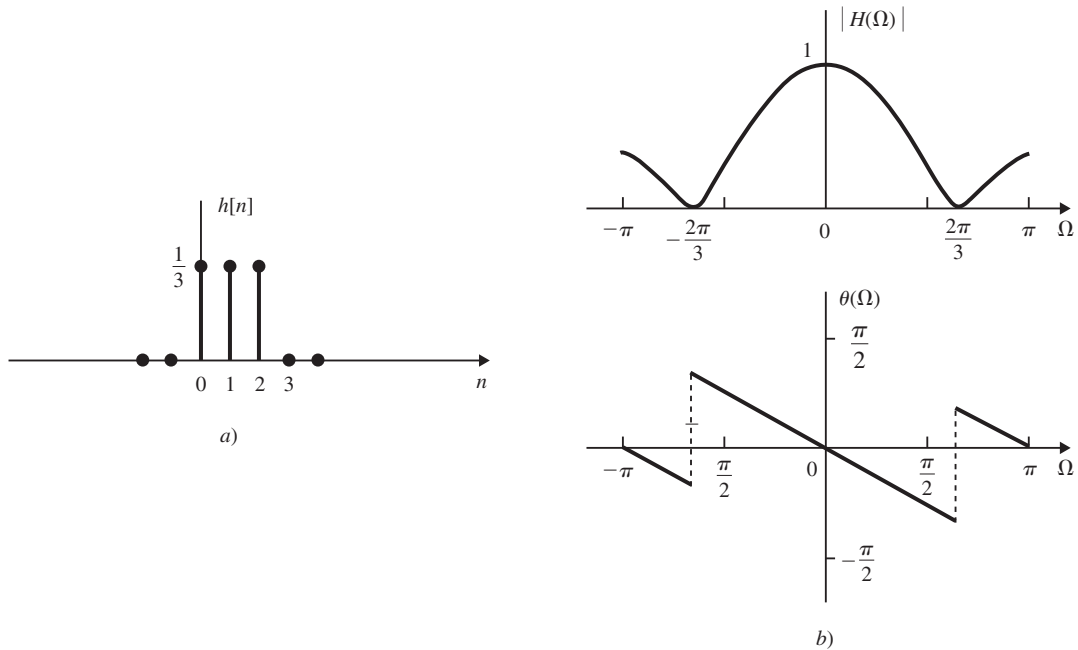


Figura 6-26

6.42. Considere un filtro FIR causal de tiempo discreto descrito por la respuesta al impulso

$$h[n] = \{2, 2, -2, -2\}$$

- Grafique la respuesta al impulso $h[n]$ del filtro.
 - Encuentre la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ del filtro.
 - Grafique la respuesta de magnitud $|H(\Omega)|$ y la respuesta de fase $\theta(\Omega)$ del filtro.
- a) La respuesta al impulso $h[n]$ está graficada en la figura 6-27a). Observe que $h[n]$ satisface la condición (6.164) con $N = 4$.

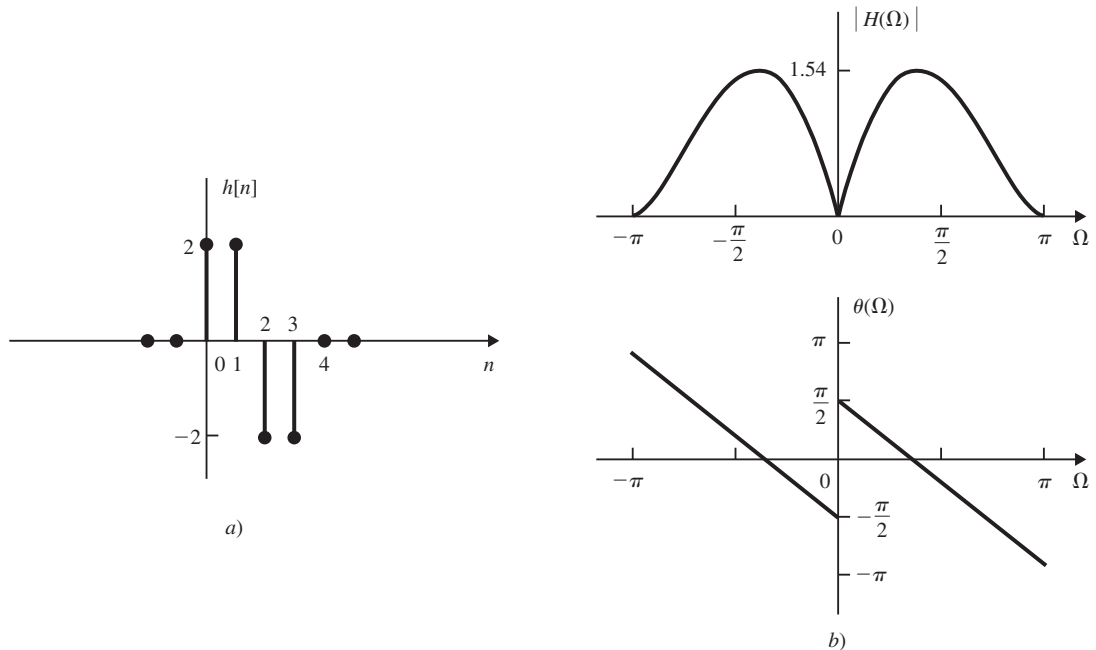


Figura 6-27

b) Por la definición (6.27)

$$\begin{aligned}
 H(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} = 2 + 2e^{-j\Omega} - 2e^{-j2\Omega} - 2e^{-j3\Omega} \\
 &= 2(1 - e^{-j3\Omega}) + 2(e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega}) \\
 &= 2e^{-j3\Omega/2} (e^{j3\Omega/2} - e^{-j3\Omega/2}) + 2e^{-j3\Omega/2} (e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}) \\
 &= je^{-j3\Omega/2} \left(\operatorname{sen} \frac{\Omega}{2} + \operatorname{sen} \frac{3\Omega}{2} \right) = H_r(\Omega) e^{j(\pi/2) - (3\Omega/2)}
 \end{aligned} \tag{6.171}$$

donde
$$H_r(\Omega) = \operatorname{sen} \left(\frac{\Omega}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{3\Omega}{2} \right)$$

c) De la ecuación (6.171)
$$|H(\Omega)| = |H_r(\Omega)| = \left| \operatorname{sen} \left(\frac{\Omega}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{3\Omega}{2} \right) \right|$$

$$\theta(\Omega) = \begin{cases} \pi/2 - \frac{3}{2}\Omega & H_r(\Omega) > 0 \\ -\pi/2 - \frac{3}{2}\Omega & H_r(\Omega) < 0 \end{cases}$$

las cuales están ilustradas en la figura 6-27b). Podemos observar que el sistema es un filtro FIR pasa-banda con fase lineal.

SIMULACIÓN

6.43. Considere el filtro pasa-bajas RC mostrado en la figura 6-28a) con $RC = 1$.

a) Construya un filtro de tiempo discreto que

$$h_d[n] = h_c(t) \Big|_{t=nT_s} = h_c(nT_s) \tag{6.172}$$

donde $h_c(t)$ es la respuesta al impulso del filtro RC, $h_d[n]$ es la respuesta al impulso del filtro de tiempo discreto y T_s es un número positivo por elegir como parte de los procedimientos de diseño.

b) Grafique la respuesta de magnitud $|H_c(\omega)|$ del filtro RC y la respuesta de magnitud $|H_d(\omega T_s)|$ del filtro de tiempo discreto para $T_s = 1$ y $T_s = 0.1$.

a) La función del sistema $H_c(s)$ del filtro RC está dado por (problema 3.23)

$$H_c(s) = \frac{1}{s + 1} \tag{6.173}$$

y la respuesta al impulso $h_c(t)$ es

$$h_c(t) = e^{-t}u(t) \tag{6.174}$$

Por la ecuación (6.172), la $h_d[n]$ correspondiente está dada por

$$h_d[n] = e^{-nT_s}u[n] = (e^{-T_s})^n u[n] \tag{6.175}$$

Entonces, tomando la transformada z de la ecuación (6.175), la función del sistema $H_d(z)$ del filtro de tiempo discreto está dado por

$$H_d(z) = \frac{1}{1 - e^{-T_s}z^{-1}}$$

de lo cual obtenemos la ecuación en diferencias que describe el filtro de tiempo discreto como

$$y[n] - e^{-T_s}y[n - 1] = x[n] \tag{6.176}$$

y el filtro de tiempo discreto que simula al filtro RC se muestra en la figura 6-28b).

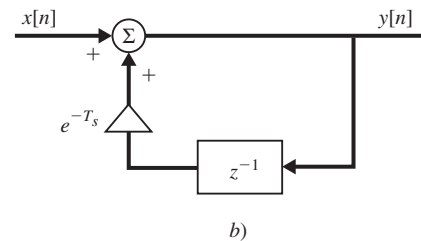
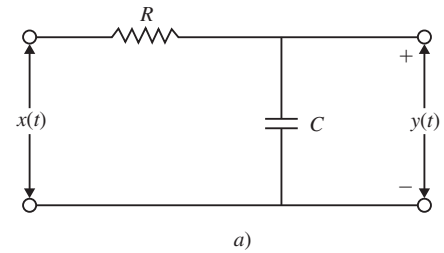


Figura 6-28 Simulación de un filtro RC por el método invariante al impulso.

b) Por la ecuación (5.40),
$$H_c(\omega) = H_c(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega + 1}$$

Entonces
$$|H_c(\omega)| = \frac{1}{(1 + \omega^2)^{1/2}}$$

Por las ecuaciones (6.34) y (6.81)

$$H_d(\omega T_s) = H_d(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_s}} = \frac{1}{1 - e^{-T_s} e^{-j\omega T_s}}$$

De la ecuación (6.149)
$$|H_d(\omega T_s)| = \frac{1}{[1 + e^{-2T_s} - 2e^{-T_s} \cos(\omega T_s)]^{1/2}}$$

De $T_s = 1$,

$$|H_d(\omega T_s)| = \frac{1}{[1 + e^{-2} - 2e^{-1} \cos(\omega)]^{1/2}}$$

Para $T_s = 0.1$,

$$|H_d(\omega T_s)| = \frac{1}{[1 + e^{-0.2} - 2e^{-0.1} \cos(0.1\omega)]^{1/2}}$$

La respuesta de magnitud $|H_c(\omega)|$ del filtro RC y la respuesta de magnitud $|H_d(\omega T_s)|$ del filtro de tiempo discreto para $T_s = 1$ y $T_s = 0.1$ se grafican en la figura 6-29. Observe que las gráficas están escaladas de tal modo que las magnitudes en $\omega = 0$ están normalizadas a 1.

El método utilizado en este problema para construir un sistema de tiempo discreto a fin de simular el sistema de tiempo continuo se conoce como método *invariante al impulso* (*impulse-invariance*).

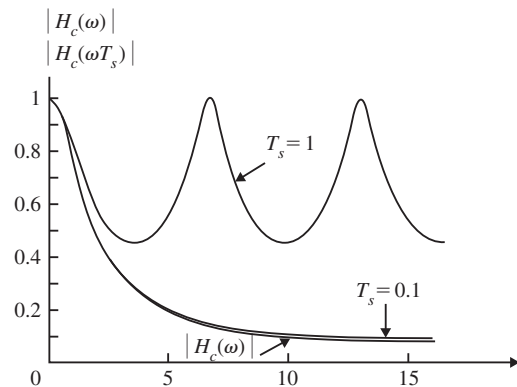


Figura 6-29

6.44. Mediante la aplicación del método invariante al impulso, determine la respuesta en frecuencia $H_d(\Omega)$ del sistema de tiempo discreto para simular el sistema LIT de tiempo continuo con la función del sistema

$$H_c(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$$

Por medio de la expansión en fracciones parciales tenemos que

$$H_c(s) = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

De este modo, mediante la tabla 3-1 la respuesta al impulso del sistema continuo en el tiempo es

$$h_c(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \tag{6.177}$$

Sea $h_d[n]$ la respuesta al impulso del sistema de tiempo discreto. Entonces, por la ecuación (6.177),

$$h_d[n] = h_c(nT_s) = (e^{-nT_s} - e^{-2nT_s})u[n]$$

y la función del sistema del sistema de tiempo discreto está dada por

$$H_d(z) = \frac{1}{1 - e^{-nT_s} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-2nT_s} z^{-1}} \tag{6.178}$$

De esta manera, la respuesta en frecuencia $H_d(\Omega)$ del sistema de tiempo discreto es

$$H_d(\Omega) = H_d(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{1 - e^{-nT_s} e^{-j\Omega}} - \frac{1}{1 - e^{-2nT_s} e^{-j\Omega}} \tag{6.179}$$

Observe que si la función del sistema de un sistema LIT de tiempo continuo está dada por

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s + \alpha_k} \quad (6.180)$$

entonces el método invariante al impulso proporciona el correspondiente sistema de tiempo discreto con la función del sistema $H_d(z)$ dada por

$$H_d(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{-\alpha_k T_s} z^{-1}} \quad (6.181)$$

6.45. Un diferenciador es un sistema LIT de tiempo continuo con la función del sistema [ecuación (3.20)]

$$H_c(s) = s \quad (6.182)$$

Un sistema LIT de tiempo discreto se construye al reemplazar s en $H_c(s)$ mediante la siguiente transformación conocida como *transformación bilineal*:

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (6.183)$$

para simular el diferenciador. De nueva cuenta, T_s en la ecuación (6.183) es un número positivo que se elige como parte del procedimiento de diseño.

- Dibuje un diagrama para el sistema de tiempo discreto.
 - Encuentre la respuesta en frecuencia $H_d(\Omega)$ del sistema de tiempo discreto y grafique sus respuestas de magnitud y de fase.
- a) Sea $H_d(z)$ la función del sistema del sistema de tiempo discreto. Entonces, de las ecuaciones (6.182) y (6.183) tenemos que

$$H_d(z) = \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (6.184)$$

Escribiendo $H_d(z)$ como

$$H_d(z) = \frac{2}{T_s} \left(\frac{1}{1 + z^{-1}} \right) (1 - z^{-1})$$

entonces, de los problemas (6.35) y (6.38), el sistema de tiempo discreto puede construirse como una conexión en cascada de dos sistemas, como se ilustra en la figura 6-30a). En esta figura puede verse que podemos reemplazar dos elementos de atraso unitario por un elemento de atraso unitario, como se muestra en la figura 6-30b).

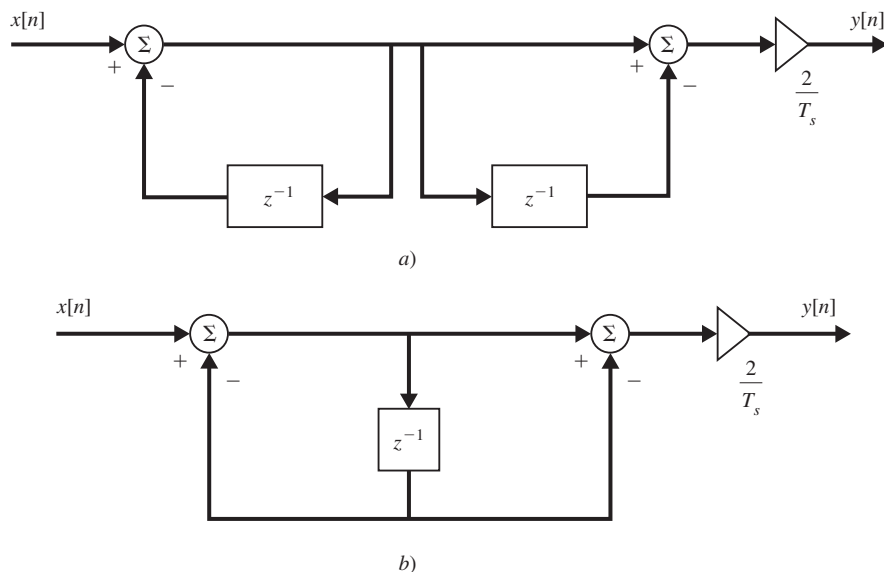


Figura 6-30 Simulación de un diferenciador.

b) Por la ecuación (6.184), la respuesta en frecuencia $H_d(\Omega)$ del sistema de tiempo discreto está dada por

$$H_d(\Omega) = \frac{2}{T_s} \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 + e^{-j\Omega}} = \frac{2}{T_s} \frac{e^{-j\Omega/2}(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})}{e^{-j\Omega/2}(e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2})}$$

$$= j \frac{2}{T_s} \frac{\text{sen } \Omega/2}{\text{cos } \Omega/2} = j \frac{2}{T_s} \tan \frac{\Omega}{2} = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\Omega}{2} e^{j\pi/2} \quad (6.185)$$

Advierta que cuando $\Omega \ll 1$, tenemos que

$$H_d(\Omega) = j \frac{2}{T_s} \tan \frac{\Omega}{2} \approx j \frac{\Omega}{T_s} = j\omega \quad (6.186)$$

Si $\Omega = \omega T_s$ (figura 6-31).

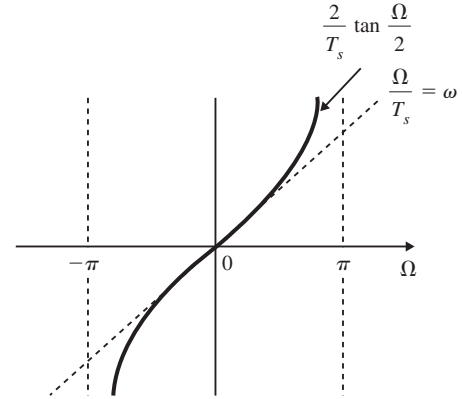


Figura 6-31

6.46. Considere el diseño de un sistema LIT de tiempo discreto con función del sistema $H_d(z)$ obtenida al aplicar la transformación bilineal a un sistema LIT de tiempo continuo con una función del sistema racional $H_c(s)$. Esto es,

$$H_d(z) = H_c(s) \Big|_{s = (2/T_s)(1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1})} \quad (6.187)$$

Demuestre que un sistema de tiempo continuo causal, estable, siempre llevará a un sistema de tiempo discreto causal, estable.

Considere la transformación bilineal de la ecuación (6.183).

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (6.188)$$

Cuando resolvemos la ecuación (6.188) para z obtenemos

$$z = \frac{1 + (T_s/2)s}{1 - (T_s/2)s} \quad (6.189)$$

Si establecemos que $s = j\omega$ en la ecuación (6.189) obtenemos

$$|z| = \left| \frac{1 + j\omega(T_s/2)}{1 - j\omega(T_s/2)} \right| = 1 \quad (6.190)$$

De este modo, observamos que el eje $j\omega$ del plano s se transforma en el círculo unitario del plano z . Sea

$$z = re^{j\Omega} \quad \text{y} \quad s = \sigma + j\omega$$

Entonces, de la ecuación (6.188),

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{T_s} \frac{re^{j\Omega} - 1}{re^{j\Omega} + 1}$$

$$= \frac{2}{T_s} \left(\frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \Omega} + j \frac{2r \text{sen } \Omega}{1 + r^2 + 2r \cos \Omega} \right)$$

Por consiguiente,

$$\sigma = \frac{2}{T_s} \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \Omega} \quad (6.191a)$$

$$\omega = \frac{2}{T_s} \frac{2r \text{sen } \Omega}{1 + r^2 + 2r \cos \Omega} \quad (6.191b)$$

De la ecuación (6.191a) observamos que si $r < 1$, entonces $\sigma < 0$, y si $r > 1$, entonces $\sigma > 0$. En consecuencia, el plano izquierdo (LHP, *left-hand plane*) en s se mapea o proyecta al interior del círculo unitario en el plano z , mientras que el plano derecho (RHP, *right-hand plane*) en s se mapea o proyecta al exterior del círculo unitario (figura 6-32). De este modo, concluimos que un sistema de tiempo continuo causal, estable, nos llevará a un sistema de tiempo discreto causal, estable, con una transformación bilineal (véase la sección 3.6B y la sección 4.6B). Cuando $r = 1$, entonces $\sigma = 0$ y

$$\omega = \frac{2}{T_s} \frac{\text{sen } \Omega}{1 + \cos \Omega} = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\Omega}{2} \quad (6.192)$$

$$\Omega = 2 \tan^{-1} \frac{\omega T_s}{2} \quad (6.193)$$

De la ecuación (6.193) observamos que todo el intervalo $-\infty < \omega < \infty$ se mapea o proyecta solamente en el intervalo $-\pi \leq \Omega \leq \pi$.

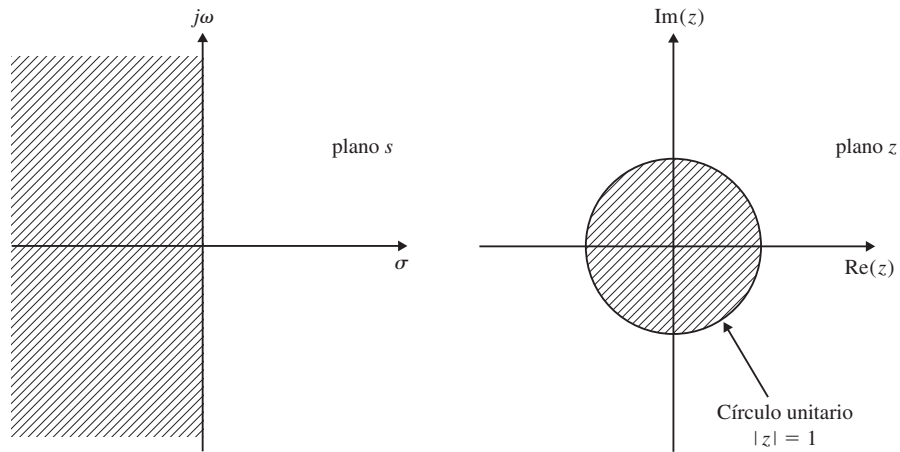


Figura 6-32 Transformación bilineal.

6.47. Considere el filtro pasa-bajas RC en la figura 6-28a). Diseñe un filtro pasa-bajas de tiempo discreto mediante el método de transformación bilineal de tal modo que su ancho de banda de 3 dB sea de $\pi/4$.

Mediante la ecuación (6.192), $\Omega_{3\text{dB}} = \pi/4$ corresponde a

$$\omega_{3\text{dB}} = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\Omega_{3\text{dB}}}{2} = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\pi}{8} = \frac{0.828}{T_s} \quad (6.194)$$

Del problema 5.55a), $\omega_{3\text{dB}} = 1/RC$. De esta forma, la función del sistema $H_c(s)$ del filtro RC está dada por

$$H_c(s) = \frac{0.828/T_s}{s + 0.828/T_s} \quad (6.195)$$

Sea $H_d(z)$ la función del sistema del filtro deseado de tiempo discreto. Al aplicar la transformación bilineal (6.183) a la ecuación (6.195) obtenemos

$$H_d(z) = \frac{0.828/T_s}{\frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{0.828}{T_s}} = \frac{0.293(1+z^{-1})}{1-0.414z^{-1}} \quad (6.196)$$

de lo cual resulta el sistema en la figura 6-33. La respuesta en frecuencia del filtro de tiempo discreto es

$$H_d(\Omega) = \frac{0.293(1+e^{-j\Omega})}{1-0.414e^{-j\Omega}} \quad (6.197)$$

Para $\Omega = 0$, $H_d(0) = 1$, y a $\Omega = \pi/4$, $|H_d(\pi/4)| = 0.707 = 1/\sqrt{2}$, la cual es la respuesta deseada.

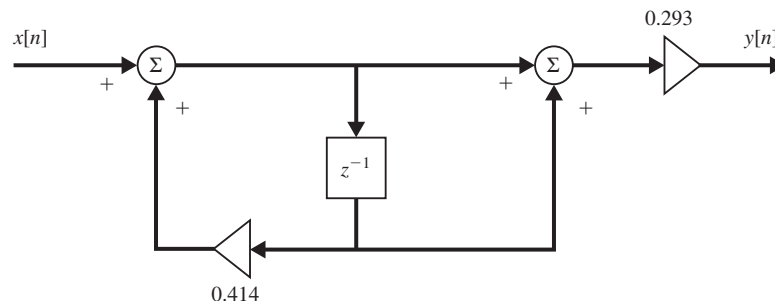


Figura 6-33 Simulación de un filtro RC mediante el método de transformación bilineal.

6.48. Si $h[n]$ denota la respuesta al impulso de un filtro IRR deseado con respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ y $h_o[n]$ indica la respuesta al impulso de un filtro FIR de longitud N con respuesta en frecuencia $H_o(\Omega)$, demuestre que cuando

$$h_o[n] = \begin{cases} h[n] & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (6.198)$$

el error cuadrático medio ε^2 definido por

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega) - H_o(\Omega)|^2 d\Omega \quad (6.199)$$

se minimiza.

Por la definición (6.27)

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} \quad \text{y} \quad H_o(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_o[n] e^{-j\Omega n}$$

Sea

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= H(\Omega) - H_o(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h[n] - h_o[n]) e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] e^{-j\Omega n} \end{aligned} \quad (6.200)$$

donde $e[n] = h[n] - h_o[n]$. Por el teorema de Parseval (6.66) tenemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(\Omega)|^2 d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] - h_o[n]|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} |h[n] - h_o[n]|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} |h[n]|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} |h[n]|^2 \end{aligned} \quad (6.201)$$

Los últimos dos términos en la ecuación (6.201) son dos constantes positivas. Así, ε^2 se minimiza cuando

$$h[n] - h_o[n] = 0 \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

es decir,

$$h[n] = h_o[n] \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

Observe que la ecuación (6.198) puede expresarse como

$$h_o[n] = h[n]w[n] \quad (6.202)$$

donde $w[n]$ se conoce como *función de ventana* rectangular dada por

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (6.203)$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

6.49. Encuentre la DFT de N puntos de las siguientes secuencias $x[n]$:

a) $x[n] = \delta[n]$

b) $x[n] = u[n] - u[n - N]$

a) De las definiciones (6.92) y (1.45) tenemos que

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] w_N^{kn} = 1 \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

La figura 6-34 muestra $x[n]$ y su DFT de N puntos $X[k]$.

b) De nuevo, de las definiciones (6.92) y (1.44), y mediante la ecuación (1.90), obtenemos

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \frac{1 - W_N^{kN}}{1 - W_N^k} = 0 \quad k \neq 0$$

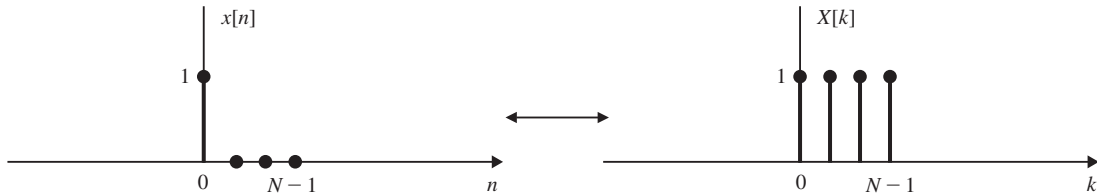


Figura 6-34

puesto que $W_N^{kN} = e^{-j(2\pi/N)kN} = e^{-jk2\pi} = 1$.

$$X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^0 = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

La figura 6-35 ilustra $x[n]$ y su DFT de N puntos $X[k]$.

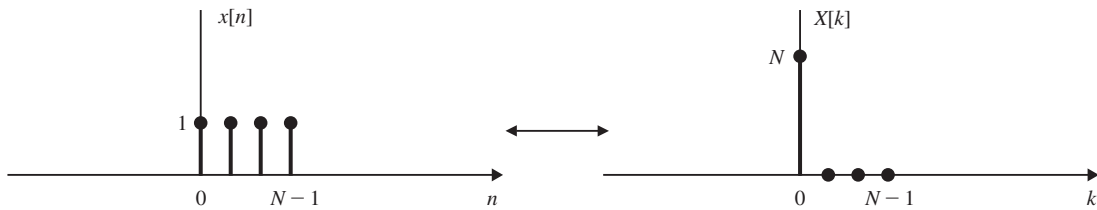


Figura 6-35

6.50. Considere dos secuencias $x[n]$ y $h[n]$ de longitud 4 dadas por

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad n = 0, 1, 2, 3$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n = 0, 1, 2, 3$$

- Calcule $y[n] = x[n] \otimes h[n]$ efectuando directamente la convolución circular.
- Calcule $y[n]$ por medio de la DFT.

a) Las secuencias $x[n]$ y $h[n]$ pueden expresarse como

$$x[n] = \{1, 0, -1, 0\} \quad \text{y} \quad h[n] = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}$$

Por la ecuación (6.108),
$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{i=0}^3 x[i]h[n-i]_{\text{mod}4}$$

Las secuencias $x[i]$ y $h[n-i]_{\text{mod}4}$ para $n = 0, 1, 2, 3$ se grafican en la figura 6-36a). De este modo, por la ecuación (6.108) obtenemos

$$n = 0 \quad y[0] = 1(1) + (-1)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$n = 1 \quad y[1] = 1\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}$$

$$n = 2 \quad y[2] = 1\left(\frac{1}{4}\right) + (-1)(1) = -\frac{3}{4}$$

$$n = 3 \quad y[3] = 1\left(\frac{1}{8}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$$

y
$$y[n] = \left\{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}\right\}$$

lo cual se grafica en la figura 6-36b).

b) Por la ecuación (6.92),

$$X[k] = \sum_{n=0}^3 x[n]W_4^{kn} = 1 - W_4^{2k} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$H[k] = \sum_{n=0}^3 h[n]W_4^{kn} = 1 + \frac{1}{2}W_4^k + \frac{1}{4}W_4^{2k} + \frac{1}{8}W_4^{3k} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Entonces, por la ecuación (6.107), la DFT de $y[n]$ es

$$Y[k] = X[k]H[k] = (1 - W_4^{2k}) \left(1 + \frac{1}{2}W_4^k + \frac{1}{4}W_4^{2k} + \frac{1}{8}W_4^{3k} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}W_4^k - \frac{3}{4}W_4^{2k} - \frac{3}{8}W_4^{3k} - \frac{1}{4}W_4^{4k} - \frac{1}{8}W_4^{5k}$$

Puesto que $W_4^{4k} = (W_4^4)^k = 1^k$ y $W_4^{5k} = W_4^{(4+1)k} = W_4^k$, obtenemos

$$Y[k] = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}W_4^k - \frac{3}{4}W_4^{2k} - \frac{3}{8}W_4^{3k} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

De este modo, por la definición de DFT [ecuación (6.92)], obtenemos que

$$y[n] = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8} \right\}$$

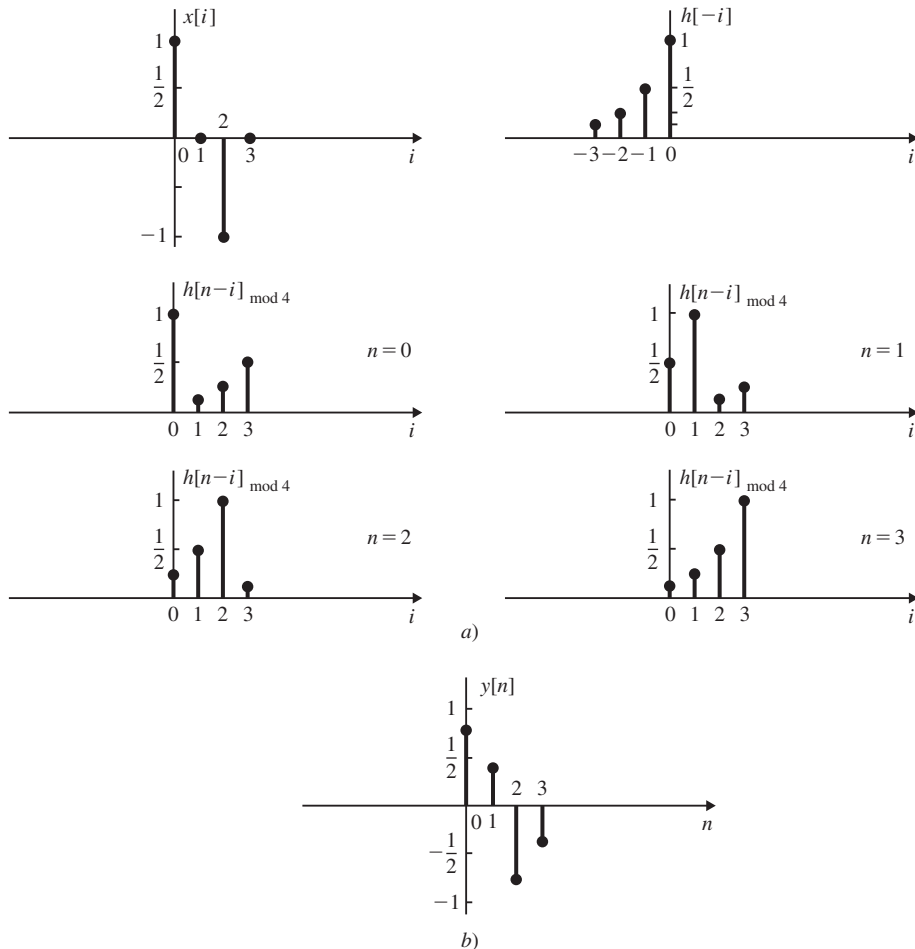


Figura 6-36

6.51. Considere la secuencia exponencial compleja de longitud finita

$$x[n] = \begin{cases} e^{j\Omega_0 n} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

a) Encuentre la transformada de Fourier $X(\Omega)$ de $x[n]$.

b) Encuentre la DFT de N puntos $X[k]$ de $x[n]$.

a) De la ecuación (6.27), y por medio de la ecuación (1.90), tenemos que

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\Omega_0 n} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\Omega - \Omega_0)n} \\ &= \frac{1 - e^{-j(\Omega - \Omega_0)N}}{1 - e^{-j(\Omega - \Omega_0)}} = \frac{e^{-j(\Omega - \Omega_0)N/2} (e^{j(\Omega - \Omega_0)N/2} - e^{-j(\Omega - \Omega_0)N/2})}{e^{-j(\Omega - \Omega_0)/2} (e^{j(\Omega - \Omega_0)/2} - e^{-j(\Omega - \Omega_0)/2})} \\ &= e^{j(\Omega - \Omega_0)(N-1)/2} \frac{\text{sen}[(\Omega - \Omega_0)N/2]}{\text{sen}[(\Omega - \Omega_0)/2]} \end{aligned}$$

b) Advierta de la ecuación (6.98) que

$$X[k] = X(\Omega) \Big|_{\Omega = k2\pi/N} = X\left(\frac{k2\pi}{N}\right)$$

obtenemos

$$X[k] = e^{j(2\pi/N)k - \Omega_0[(N-1)/2]} \frac{\text{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{N}k - \Omega_0\right)\frac{N}{2}\right]}{\text{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{N}k - \Omega_0\right)\frac{1}{2}\right]}$$

6.52. Demuestre que si $x[n]$ es real, entonces su DFT $X[k]$ satisface la relación

$$X[N - k] = X^*[k] \quad (6.204)$$

donde $*$ denota el complejo conjugado.

De la ecuación (6.92)

$$X[N - k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{(N-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)(N-k)n}$$

Ahora

$$e^{-j(2\pi/N)(N-k)n} = e^{-j2\pi n} e^{j(2\pi/N)kn} = e^{j(2\pi/N)kn}$$

Por tanto, si $x[n]$ es real, entonces $x^*[n] = x[n]$ y

$$X[N - k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j(2\pi/N)kn} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \right]^* = X^*[k]$$

6.53. Demuestre que $x[n] = \text{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{N} [\text{DFT}\{X^*[k]\}]^*$ (6.205)

donde $*$ denota el complejo conjugado y

$$X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$$

Podemos escribir la ecuación (6.94) como

$$x[n] = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)kn} \right] = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*[k] e^{-j(2\pi/N)nk} \right]^*$$

Si observamos que el término entre los corchetes en el último término es la DFT de $X^*[k]$, obtenemos

$$x[n] = \text{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{N} [\text{DFT}\{X^*[k]\}]^*$$

lo cual demuestra que el mismo algoritmo utilizado para evaluar la DFT puede emplearse para evaluar la IDFT.

6.54. La definición de la DFT en la ecuación (6.92) puede expresarse en forma de una operación de matrices como

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x} \tag{6.206}$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \tag{6.207}$$

La matriz \mathbf{W}_N de $N \times N$ se conoce como matriz DFT. Observe que \mathbf{W}_N es simétrica; es decir, $\mathbf{W}_N^T = \mathbf{W}_N$, donde \mathbf{W}_N^T es la transpuesta de \mathbf{W}_N .

a) Demuestre que
$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \tag{6.208}$$

donde \mathbf{W}_N^{-1} es la inversa de \mathbf{W}_N y \mathbf{W}_N^* es la compleja conjugada de \mathbf{W}_N .

b) Encuentre \mathbf{W}_4 y \mathbf{W}_4^{-1} de manera explícita.

a) Si suponemos que la inversa de \mathbf{W}_N existe, entonces al multiplicar ambos lados de la ecuación (6.206) por \mathbf{W}_N^{-1} obtenemos

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X} \tag{6.209}$$

lo cual es precisamente una expresión para la IDFT. La IDFT como está dada por la ecuación (6.94) puede expresarse en forma matricial como

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X} \tag{6.210}$$

Al comparar la ecuación (6.210) con la ecuación (6.209), concluimos que

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^*$$

b) Hagamos que $W_{n+1, k+1}$ denote la entrada en el renglón $(n+1)$ -ésimo y la columna $(k+1)$ -ésima de la matriz \mathbf{W}_4 . Entonces, de la ecuación (6.207),

$$W_{n+1, k+1} = W_4^{nk} = e^{-j(2\pi/4)nk} = e^{-j(\pi/2)nk} = (-j)^{nk} \tag{6.211}$$

y tenemos que

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}_4^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \tag{6.212}$$

6.55. a) Encuentre la DFT $X[k]$ de $x[n] = \{0, 1, 2, 3\}$.

b) Encuentre la IDFT $x[n]$ de la $X[k]$ obtenida en el inciso a).

a) Mediante las ecuaciones (6.206) y (6.212), la DFT $X[k]$ de $x[n]$ está dada por

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 + j2 \\ -2 \\ -2 - j2 \end{bmatrix}$$

b) Por medio de las ecuaciones (6.209) y (6.212), la IDFT $x[n]$ de $X[k]$ está dada por

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 + j2 \\ -2 \\ -2 - j2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6.56. Sea $x[n]$ una secuencia de longitud finita N tal que

$$x[n] = 0 \quad n < 0, n \geq N \quad (6.213)$$

Sea la DFT de N puntos $X[k]$ de $x[n]$ dada por la ecuación (6.92)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad W_N = e^{-j(2\pi/N)} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.214)$$

Supongamos que N sea par y sean $f[n] = x[2n]$ (6.215a)

$$g[n] = x[2n + 1] \quad (6.215b)$$

Las secuencias $f[n]$ y $g[n]$ representan las respectivas muestras pares y las impares de $x[n]$.

a) Demuestre que $f[n] = g[n] = 0$ al exterior de $0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$ (6.216)

b) Demuestre que la DFT de N puntos $X[k]$ de $x[n]$ puede expresarse como

$$X[k] = F[k] + W_N^k G[k] \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.217a)$$

$$X\left[k + \frac{N}{2}\right] = F[k] - W_N^k G[k] \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.217b)$$

donde
$$F[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n] W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.218a)$$

$$G[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n] W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.218b)$$

c) Dibuje una gráfica de flujo para ilustrar la evaluación de $X[k]$ a partir de las ecuaciones (6.217a) y (6.217b) con $N = 8$.

d) Suponga que $x[n]$ es compleja y que W_N^{nk} ha sido calculada previamente. Determine los números de multiplicaciones complejas requeridas para evaluar $X[k]$ a partir de la ecuación (6.214) y de las ecuaciones (6.217a) y (6.217b) y compare los resultados para una $N = 2^{10} = 1024$.

a) De la ecuación (6.213)

$$f[n] = x[2n] = 0, n < 0 \quad \text{y} \quad f\left[\frac{N}{2}\right] = x[N] = 0$$

De este modo
$$f[n] = 0 \quad n < 0, n \geq \frac{N}{2}$$

De manera similar

$$g[n] = x[2n + 1] = 0, n < 0 \quad \text{y} \quad g\left[\frac{N}{2}\right] = x[N + 1] = 0$$

De esta forma,
$$g[n] = 0 \quad n < 0, n \geq \frac{N}{2}$$

b) Volvamos a escribir la ecuación (6.214) como

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n \text{ par}} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n \text{ impar}} x[n] W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x[2m] W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x[2m+1] W_N^{(2m+1)k} \end{aligned} \tag{6.219}$$

Pero
$$W_N^2 = (e^{-j(2\pi/N)})^2 = e^{-j(4\pi/N)} = e^{-j(2\pi/(N/2))} = W_{N/2} \tag{6.220}$$

Con esta sustitución la ecuación (6.219) puede expresarse como

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f[m] W_{N/2}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{(N/2)-1} g[m] W_{N/2}^{mk} \\ &= F[k] + W_N^k G[k] \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \tag{6.221}$$

donde
$$F[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n] W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$G[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n] W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Nótese que $F[k]$ y $G[k]$ son las DFT de $(N/2)$ puntos de $f[n]$ y $g[n]$, respectivamente. Ahora

$$W_N^{k+N/2} = W_N^k W_N^{N/2} = -W_N^k \tag{6.222}$$

ya que
$$W_N^{N/2} = (e^{-j(2\pi/N)})^{(N/2)} = e^{-j\pi} = -1 \tag{6.223}$$

Por consiguiente, la ecuación (6.221) puede expresarse como

$$\begin{aligned} X[k] &= F[k] + W_N^k G[k] \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ X\left[k + \frac{N}{2}\right] &= F[k] - W_N^k G[k] \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned}$$

c) La gráfica de flujo que ilustra los pasos involucrados en la determinación de $X[k]$ mediante las ecuaciones (6.217a) y (6.217b) se muestra en la figura 6-37.

d) Para evaluar un valor de $X[k]$ a partir de la ecuación (6.214) se requieren N multiplicaciones complejas. De este modo, el número total de multiplicaciones complejas basadas en la ecuación (6.214) es N^2 . El número de multiplicaciones complejas para evaluar $F[k]$ o $G[k]$ es $(N/2)^2$. Además, se tienen N multiplicaciones involucradas en la evaluación de $W_N^k G[k]$. De esta forma, el número total de multiplicaciones complejas basadas en las ecuaciones (6.217a) y (6.217b) es $2(N/2)^2 + N = N^2/2 + N$. Para $N = 2^{10} = 1\,024$ el número total de multiplicaciones complejas con base en la ecuación (6.214) es $2^{20} \approx 10^6$ y es $10^6/2 + 1\,024 \approx 10^6/2$ basado en las ecuaciones (6.217a) y (6.217b). Así observamos que el número de multiplicaciones se reduce aproximadamente por un factor 2 con base en las ecuaciones (6.217a) y (6.217b).

El método para evaluar $X[k]$ basado en las ecuaciones (6.217a) y (6.217b) se conoce como algoritmo de la *transformada rápida de Fourier* (FFT, *fast Fourier transform*) con decimación en el tiempo. Advierta que como $N/2$ es par, al utilizar el mismo procedimiento, $F[k]$ y $G[k]$ pueden encontrarse al determinar primero las DFT de $(N/4)$ puntos de secuencias adecuadamente seleccionadas y combinarlas.

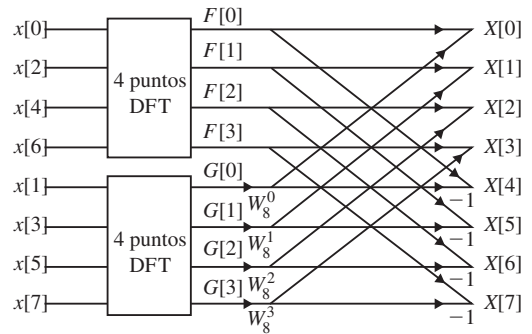


Figura 6-37 Gráfica de flujo para un algoritmo FFT con decimación en el tiempo de 8 puntos.

6.57. Considere una secuencia $x[n] = \{1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1\}$

Determine la DFT $X[k]$ de $x[n]$ por medio del algoritmo de FFT con decimación en el tiempo.

De las figuras 6-38a) y 6-38b), es fácil encontrar los factores de fase W_4^k y W_8^k de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 &W_4^0 = 1 & W_4^1 = -j & W_4^2 = -1 & W_4^3 = j \\
 \text{y} &W_8^0 = 1 & W_8^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & W_8^2 = -j & W_8^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &W_8^4 = -1 & W_8^5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & W_8^6 = j & W_8^7 = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

A continuación, de las ecuaciones (6.215a) y (6.215b)

$$\begin{aligned}
 f[n] = x[2n] &= \{x[0], x[2], x[4], x[6]\} = \{1, -1, -1, 1\} \\
 g[n] = x[2n + 1] &= \{x[1], x[3], x[5], x[7]\} = \{1, -1, 1, -1\}
 \end{aligned}$$

Entonces, mediante las ecuaciones (6.206) y (6.212), tenemos que

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ F[3] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + j2 \\ 0 \\ 2 - j2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} G[0] \\ G[1] \\ G[2] \\ G[3] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

y por las ecuaciones (6.217a) y (6.217b) obtenemos

$$\begin{aligned}
 X[0] &= F[0] + W_8^0 G[0] = 0 & X[4] &= F[0] - W_8^0 G[0] = 0 \\
 X[1] &= F[1] + W_8^1 G[1] = 2 + j2 & X[5] &= F[1] - W_8^1 G[1] = 2 + j2 \\
 X[2] &= F[2] + W_8^2 G[2] = -j4 & X[6] &= F[2] - W_8^2 G[2] = j4 \\
 X[3] &= F[3] + W_8^3 G[3] = 2 - j2 & X[7] &= F[3] - W_8^3 G[3] = 2 - j2
 \end{aligned}$$

Advierta que como $x[n]$ es real y mediante la ecuación (6.204), $X[7]$, $X[6]$ y $X[5]$ pueden obtenerse fácilmente al tomar los conjugados de $X[1]$, $X[2]$ y $X[3]$, respectivamente.

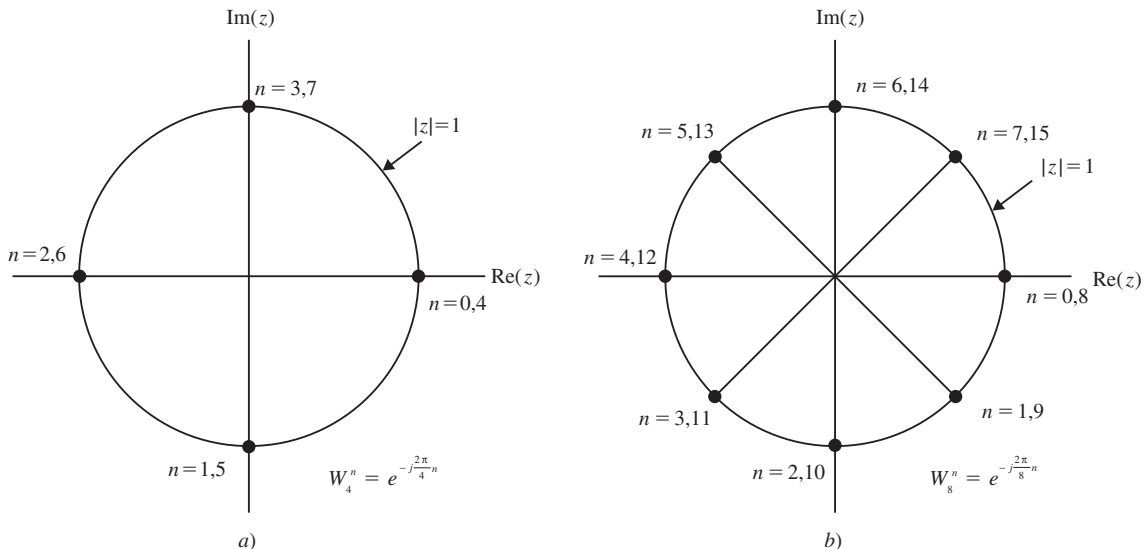


Figura 6-38 Factores de fase W_4^n y W_8^n .

6.58. Sea $x[n]$ una secuencia de longitud finita tal que

$$x[n] = 0 \quad n < 0, n \geq N$$

Sea la DFT de N puntos $X[k]$ de $x[n]$ la cual está dada por [ecuación (6.92)]

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad W_N = e^{-j(2\pi/N)} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.224)$$

Supongamos que N es par y sean

$$p[n] = x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] \quad 0 \leq n < \frac{N}{2} \quad (6.225a)$$

$$q[n] = \left(x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right) W_N^n \quad 0 \leq n < \frac{N}{2} \quad (6.225b)$$

a) Demuestre que la DFT de N puntos $X[k]$ de $x[n]$ puede expresarse como

$$X[2k] = P[k] \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.226a)$$

$$X[2k + 1] = Q[k] \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.226b)$$

donde

$$P[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} p[n] W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.227a)$$

$$Q[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} q[n] W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.227b)$$

b) Dibuje una gráfica de flujo para ilustrar la evaluación de $X[k]$ de las ecuaciones (6.226a) y (6.226b) con $N = 8$.

a) Volvamos a escribir la ecuación (6.224) como

$$X[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (6.228)$$

Cambiando la variable $n = m + N/2$ en el segundo término de la ecuación (6.228) tenemos

$$X[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{kn} + W_N^{(N/2)k} \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x\left[m + \frac{N}{2}\right] W_N^{km} \quad (6.229)$$

Observe que [ecuación (6.223)] $W_N^{(N/2)k} = (-1)^k$

La ecuación (6.229) puede expresarse como

$$X[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{ x[n] + (-1)^k x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right\} W_N^{kn} \quad (6.230)$$

Para k par, estableciendo $k = 2r$ en la ecuación (6.230), tenemos que

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} p[n] W_N^{2rn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} p[n] W_{N/2}^{rn} \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.231)$$

donde se ha utilizado la relación en la ecuación (6.220). De manera semejante, para k impar, al establecer $k = 2r + 1$ en la ecuación (6.230) obtenemos

$$X[2r + 1] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} q[n] W_N^{2rn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} q[n] W_{N/2}^{rn} \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.232)$$

Las ecuaciones (6.231) y (6.232) representan la DFT de $(N/2)$ puntos de $p[n]$ y $q[n]$, respectivamente. De esta forma, las ecuaciones (6.231) y (6.232) pueden volver a escribirse como

$$X[2k] = P[k] \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X[2k + 1] = Q[k] \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

donde

$$P[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} p[n] W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$Q[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} q[n] W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

b) La gráfica de flujo que ilustra los pasos involucrados en la determinación de $X[k]$ por medio de las ecuaciones (6.227a) y (6.227b) se muestra en la figura 6-39.

El método de evaluación de $X[k]$ basado en las ecuaciones (6.227a) y (6.227b) se conoce como algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) con decimación en frecuencia.

6.59. Por medio de la técnica FFT con decimación en frecuencia, vuelva a resolver el problema 6.57.

Del problema 6.57

$$x[n] = \{1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1\}$$

Por las ecuaciones (6.225a) y (6.225b), y por medio de los valores de W_8^n obtenidos en el problema 6.57, tenemos que

$$p[n] = x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right]$$

$$= \{(1 - 1), (1 + 1), (-1 + 1), (-1 - 1)\} = \{0, 2, 0, 2\}$$

$$q[n] = \left(x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right]\right) W_8^n$$

$$= \{(1 + 1) W_8^0, (1 - 1) W_8^1, (-1 - 1) W_8^2, (-1 + 1) W_8^3\}$$

$$= \{2, 0, j2, 0\}$$

Luego, al utilizar las ecuaciones (6.206) y (6.212) tenemos que

$$\begin{bmatrix} P[0] \\ P[1] \\ P[2] \\ P[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -j4 \\ 0 \\ j4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q[0] \\ Q[1] \\ Q[2] \\ Q[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ j2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + j2 \\ 2 - j2 \\ 2 + j2 \\ 2 - j2 \end{bmatrix}$$

y por las ecuaciones (6.226a) y (6.226b) obtenemos

$$X[0] = P[0] = 0 \quad X[4] = P[2] = 0$$

$$X[1] = Q[0] = 2 + j2 \quad X[5] = Q[2] = 2 + j2$$

$$X[2] = P[1] = -j4 \quad X[6] = P[3] = j4$$

$$X[3] = Q[1] = 2 - j2 \quad X[7] = Q[3] = 2 - j2$$

que son los mismos resultados obtenidos en el problema 6.57.

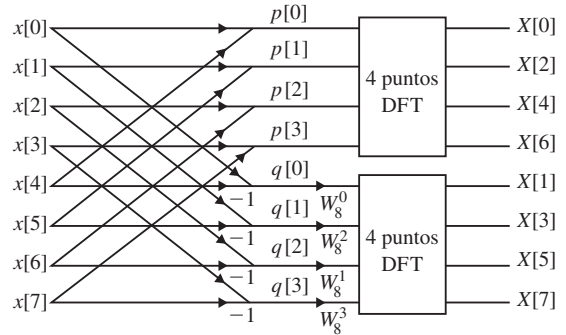


Figura 6-39 Gráfica de flujo para un algoritmo FFT con decimación en frecuencia de 8 puntos.

6.60. Considere una señal causal $x(t)$ de banda limitada y de tiempo continuo con la transformada de Fourier $X(\omega)$. Sea

$$x[n] = T_s x(nT_s) \quad (6.233)$$

donde T_s es el intervalo de muestreo en el dominio del tiempo. Sea

$$X[k] = X(k \Delta \omega) \quad (6.234)$$

donde $\Delta \omega$ es el intervalo de muestreo en el dominio de la frecuencia conocido como *resolución de frecuencia*. Sea T_1 la longitud de registro de $x(t)$, y ω_M la frecuencia más alta de $x(t)$. Demuestre que $x[n]$ y $X[k]$ forman un par de DFT de N puntos si

$$\frac{T_1}{T_s} = \frac{2\omega_M}{\Delta \omega} = N \quad \text{y} \quad N \geq \frac{\omega_M T_1}{\pi} \quad (6.235)$$

Puesto que $x(t) = 0$ para $t < 0$, la transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ está dada por [ecuación (5.31)]

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6.236)$$

Sea T_1 el tiempo de registro total de $x(t)$ necesario para evaluar $X(\omega)$. Entonces la integral anterior puede aproximarse mediante una serie finita como

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{-j\omega t_n}$$

donde $t_n = n\Delta t$ y $T_1 = N\Delta t$. Estableciendo $\omega = \omega_k$ en la expresión anterior tenemos que

$$X(\omega_k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{-j\omega_k t_n} \quad (6.237)$$

A continuación, como la frecuencia más alta de $x(t)$ es ω_M , la transformada de Fourier inversa de $X(\omega)$ está dada por [ecuación (5.32)]

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6.238)$$

Si dividimos el intervalo de frecuencia $-\omega_M \leq \omega \leq \omega_M$ en N (par) intervalos de longitud $\Delta \omega$, la integral anterior puede ser aproximada mediante

$$x(t) = \frac{\Delta \omega}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} X(\omega_k) e^{j\omega_k t}$$

donde $2\omega_M = N \Delta \omega$. Al establecer $t = t_n$ en la expresión anterior tenemos que

$$x(t_n) = \frac{\Delta \omega}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} X(\omega_k) e^{j\omega_k t_n} \quad (6.239)$$

Puesto que la frecuencia más alta en $x(t)$ es ω_M , entonces del teorema del muestreo (problema 5.59) deberíamos muestrear $x(t)$ de manera que

$$\frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_M$$

donde T_s es el intervalo de muestreo. Puesto que $T_s = \Delta t$, seleccionando el mayor valor de Δt (el intervalo de Nyquist), tenemos que

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_M}$$

y

$$\omega_M = \frac{\pi}{\Delta t} = \frac{\pi N}{T_1} \quad (6.240)$$

De este modo, N es un entero par adecuado para el cual

$$\frac{T_1}{T_s} = \frac{2\omega_M}{\Delta \omega} = N \quad \text{y} \quad N \geq \frac{\omega_M T_1}{\pi} \quad (6.241)$$

De la ecuación (6.240) la resolución de frecuencia $\Delta\omega$ está dada por

$$\Delta\omega = \frac{2\omega_M}{N} = \frac{2\pi N}{NT_1} = \frac{2\pi}{T_1} \quad (6.242)$$

Sean $t_n = n\Delta t$ y $\omega_k = k\Delta\omega$. Entonces

$$t_n \omega_k = (n\Delta t)(k\Delta\omega) = nk \frac{T_1}{N} \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{N} nk \quad (6.243)$$

Al sustituir la ecuación (6.243) en las ecuaciones (6.237) y (6.239) obtenemos que

$$X(k\Delta\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t x(n\Delta t) e^{-j(2\pi/N)nk} \quad (6.244)$$

$$x(n\Delta t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} X(k\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nk} \quad (6.245)$$

Al reescribir la ecuación (6.245) como

$$x(n\Delta t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{(N/2)-1} X(k\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nk} + \sum_{k=-N/2}^{-1} X(k\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nk} \right]$$

Entonces, de la ecuación (6.244) observamos que $X(k\Delta\omega)$ es periódica en k con un periodo de N . De este modo, al cambiar la variable $k = m - N$ en la segunda suma de la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} x(n\Delta t) &= \frac{\Delta\omega}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{(N/2)-1} X(k\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nk} + \sum_{m=N/2}^{N-1} X(m\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nm} \right] \\ &= \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nk} \end{aligned} \quad (6.246)$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación (6.246) por Δt y tomamos en cuenta que $\Delta\omega\Delta t = 2\pi/N$, tenemos

$$x(n\Delta t) \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nk} \quad (6.247)$$

$$\text{Ahora, si definimos} \quad x[n] = \Delta t x(n\Delta t) = T_s x(nT_s) \quad (6.248)$$

$$X[k] = X(k\Delta\omega) \quad (6.249)$$

entonces las ecuaciones (6.246) y (6.247) se reducen al par DFT; es decir,

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

6.61. a) Mediante la DFT, calcule el espectro de Fourier $X(\omega)$ de la señal de tiempo continuo

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

Suponga que el tiempo total de registro de $x(t)$ es $T_1 = 10$ s y la frecuencia más alta de $x(t)$ es $\omega_M = 100$ rad/s.

b) Sea $X[k]$ la DFT de la secuencia muestreada de $x(t)$. Compare los valores de $X[0]$, $X[1]$ y $X[10]$ con los valores de $X(0)$, $X(\Delta\omega)$ y $X(10\Delta\omega)$.

$$a) \text{ De la ecuación (6.241)} \quad N \geq \frac{\omega_M T_1}{\pi} = \frac{100(10)}{\pi} = 318.3$$

De este modo, al seleccionar $N = 320$ obtenemos

$$\Delta\omega = \frac{200}{320} = \frac{5}{8} = 0.625 \text{ rad}$$

$$\Delta t = \frac{10}{320} = \frac{1}{32} = 0.031 \text{ s}$$

y $W_N = W_{320} = e^{-j(2\pi/230)}$

Entonces, de las ecuaciones (6.244), (6.249) y (1.92) tenemos que

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t x(n \Delta t) e^{-j(2\pi/N)nk} \\ &= \frac{1}{32} \sum_{n=0}^{319} e^{-n(0.031)} e^{-j(2\pi/320)nk} = \frac{1}{32} \frac{1 - e^{320(0.031)}}{1 - e^{-0.031} e^{-j(2\pi/320)k}} \\ &= \frac{0.031}{[1 - 0.969 \cos(k\pi/160)] + j0.969 \sin(k\pi/160)} \end{aligned} \tag{6.250}$$

lo cual es la estimación de $X(k\Delta\omega)$.

b) Si establecemos que $k = 0, k = 1$ y $k = 10$ en la ecuación (6.250), tenemos

$$X[0] = \frac{0.031}{1 - 0.969} = 1$$

$$X[1] = \frac{0.031}{0.0312 + j0.019} = 0.855 e^{-j0.547}$$

$$X[10] = \frac{0.031}{0.0496 - j0.189} = 0.159 e^{-j1.314}$$

De la tabla 5-2

$$x(t) = e^{-t} u(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

y

$$X(0) = 1$$

$$X(\Delta\omega) = X(0.625) = \frac{1}{1 + j0.625} = 0.848 e^{-j0.559}$$

$$X(10 \Delta\omega) = X(6.25) = \frac{1}{1 + j6.25} = 0.158 e^{-j1.412}$$

Aun cuando $x(t)$ no es de banda limitada, observamos que $X[k]$ ofrece una aproximación muy buena para $X(\omega)$ para el intervalo de frecuencia que especificamos.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

6.62. Encuentre la serie de Fourier discreta para cada una de las siguientes secuencias periódicas:

- a) $x[n] = \cos(0, 1\pi n)$
- b) $x[n] = \text{sen}(0, 1\pi n)$
- c) $x[n] = 2 \cos(1.6\pi n) + \text{sen}(2.4\pi n)$

6.63. Encuentre la serie de Fourier discreta para la secuencia $x[n]$ mostrada en la figura 6-40.

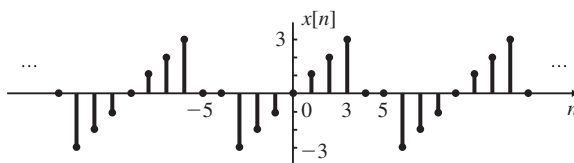


Figura 6-40

6.64. Encuentre la forma trigonométrica de la serie de Fourier discreta para la secuencia periódica $x[n]$ que se ilustra en la figura 6-7 del problema 6.3.

6.65. Encuentre la transformada de Fourier de cada una de las siguientes secuencias:

- a) $x[n] = a^{|n|}, |a| < 1$
- b) $x[n] = \text{sen}(\Omega_0 n), |\Omega_0| < \pi$
- c) $x[n] = u[-n - 1]$

6.66. Encuentre la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$ mostrada en la figura 6-41.

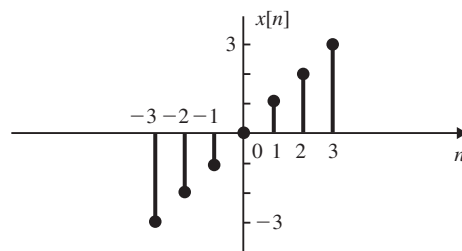


Figura 6-41

6.67. Encuentre la transformada de Fourier inversa de cada una de las siguientes transformadas de Fourier:

- a) $X(\Omega) = \cos(2\Omega)$
 b) $X(\Omega) = j\Omega$

6.68. Considere la secuencia $y[n]$ dada por

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

Expresé $y(\Omega)$ en términos de $X(\Omega)$.

6.69. Sea $x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq 2 \\ 0 & |n| > 2 \end{cases}$

- a) Encuentre $y[n] = x[n] * x[n]$.
 b) Encuentre la transformada de Fourier $Y(\Omega)$ de $y[n]$.

6.70. Verifique el teorema de Parseval [ecuación (6.66)] para la transformada de Fourier de tiempo discreto, es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

6.71. Un sistema LIT causal de tiempo discreto está descrito por

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

donde $x[n]$ y $y[n]$ son la entrada y la salida respectivas del sistema.

- a) Determine la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ del sistema.
 b) Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.
 c) Encuentre $y[n]$ si $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$.

6.72. Considere un sistema LIT causal de tiempo discreto con respuesta en frecuencia

$$H(\Omega) = \text{Re}\{H(\Omega)\} + j \text{Im}\{H(\Omega)\} = A(\Omega) + jB(\Omega)$$

- a) Demuestre que la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema puede obtenerse en términos solamente de $A(\Omega)$ o $B(\Omega)$.
 b) Encuentre $H(\Omega)$ y $h[n]$ si

$$\text{Re}\{H(\Omega)\} = A(\Omega) = 1 + \cos \Omega$$

6.73. Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ del filtro pasaltas (HPF) ideal de tiempo discreto con frecuencia de corte Ω_c ($0 < \Omega_c < \pi$) que se ilustra en la figura 6-42.

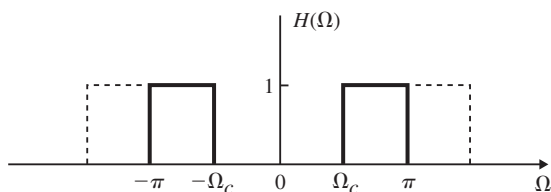


Figura 6-42

6.74. Demuestre que si $H_{\text{LPF}}(z)$ es la función del sistema de un filtro pasa-bajas de tiempo discreto, entonces el sistema de tiempo discreto cuya función del sistema $H(z)$ está dada por $H(z) = H_{\text{LPF}}(-z)$ es un filtro pasa-altas.

6.75. Considere un sistema LIT de tiempo continuo con la función del sistema

$$H_c(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Determine la respuesta en frecuencia $H_d(\Omega)$ del sistema de tiempo discreto diseñado a partir de este sistema, basado en el método invariante al impulso.

6.76. Considere un sistema LIT de tiempo continuo con la función del sistema

$$H_c(s) = \frac{1}{s+1}$$

Determine la respuesta en frecuencia $H_d(\Omega)$ del sistema de tiempo discreto diseñado a partir de este sistema, basado en la invarianza de la respuesta al escalón; es decir,

$$s_d[n] = s_c(nT_s)$$

donde $s_c(t)$ y $s_d[n]$ son las respuestas al escalón de los respectivos sistemas de tiempo continuo y de tiempo discreto.

6.77. Sea $H_p(z)$ la función del sistema de un filtro pasa-bajas prototipo de tiempo discreto. Considere un nuevo filtro pasa-bajas de tiempo discreto cuya función del sistema $H(z)$ se obtiene al reemplazar z en $H_p(z)$ con $(z - \alpha)/(1 - \alpha z)$, donde α es real.

a) Demuestre que

$$H_p(z) \Big|_{z=1+j_0} = H(z) \Big|_{z=1+j_0}$$

$$H_p(z) \Big|_{z=-1+j_0} = H(z) \Big|_{z=-1+j_0}$$

b) Sean Ω_{p1} y Ω_1 frecuencias especificadas ($< \pi$) del filtro pasa-bajas prototipo y del nuevo filtro pasa-bajas, respectivamente. Entonces demuestre que

$$\alpha = \frac{\text{sen} \left[\frac{(\Omega_{p1} - \Omega_1)/2}{2} \right]}{\text{sen} \left[\frac{(\Omega_{p1} + \Omega_1)/2}{2} \right]}$$

6.78. Considere un filtro pasa-bajas prototipo de tiempo discreto con la función del sistema

$$H_p(z) = 0.5(1 + z^{-1})$$

- a) Encuentre el ancho de banda de 3 dB del filtro prototipo.
 b) Diseñe un filtro pasa-bajas de tiempo discreto a partir de este filtro prototipo de tal manera que el ancho de banda de 3 dB del nuevo filtro sea $2\pi/3$.

6.79. Determine la DFT de la secuencia

$$x[n] = a^n \quad 0 \leq n \leq N-1$$

6.80. Evalúe la convolución circular

$$y[n] = x[n] \otimes h[n]$$

donde $x[n] = u[n] - u[n - 4]$

$$h[n] = u[n] - u[n - 3]$$

- a) Suponga que $N = 4$.
- b) Suponga que $N = 8$.

6.81. Considere las secuencias $x[n]$ y $h[n]$ en el problema 6.80.

- a) Encuentre la DFT de 4 puntos de $x[n]$, $h[n]$ y $y[n]$.
- b) Encuentre $y[n]$ a partir de la IDFT de $Y[k]$.

6.82. Considere una señal $x(t)$ de tiempo continuo que se filtró previamente mediante un filtro pasa-bajas con una frecuencia de corte de 10 kHz. El espectro de $x(t)$ se calcula mediante el uso de la DFT de N puntos. La resolución de frecuencia deseada es de 0.1 Hz. Determine el valor necesario de N (suponemos una potencia de 2) y la longitud de datos necesaria T_1 .

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

6.62. a) $x[n] = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j19\Omega_0 n}, \Omega_0 = 0.1\pi$

b) $x[n] = \frac{1}{2j}e^{j\Omega_0 n} - \frac{1}{2j}e^{j19\Omega_0 n}, \Omega_0 = 0.1\pi$

c) $x[n] = (1 - j0.5)e^{j\Omega_0 n} + (1 + j0.5)e^{j4\Omega_0 n}, \Omega_0 = 0.4\pi$

6.63.

$$x[n] = \sum_{k=0}^8 c_k e^{j\Omega_0 k n}, \Omega_0 = \frac{2\pi}{9}$$

$$c_k = -j \frac{2}{9} \left[\text{sen} \left(\frac{2\pi}{9} \right) k + 2 \text{sen} \left(\frac{4\pi}{9} \right) k + 3 \text{sen} \left(\frac{6\pi}{9} \right) k \right]$$

6.64. $x[n] = \frac{3}{2} - \cos \frac{\pi}{2} n - \text{sen} \frac{\pi}{2} n - \frac{1}{2} \cos \pi n$

6.65. a) $X(\Omega) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \Omega + a^2}$

b) $X(\Omega) = -j\pi [\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)], |\Omega|, |\Omega_0| \leq \pi$

c) $X(\Omega) = \pi \delta(\Omega) - \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}, |\Omega| \leq \pi$

6.66. $X(\Omega) = j2(\text{sen } \Omega + 2 \text{sen } 2\Omega + 3 \text{sen } 3\Omega)$

6.67. a) $x[n] = \frac{1}{2} \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \delta[n + 2]$

b) $x[n] = \begin{cases} (-1)^n / n & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$

6.68. $Y(\Omega) = \frac{1}{2}X(\Omega) + \frac{1}{2}X(\Omega - \pi)$

6.69. a) $y[n] = \begin{cases} 5(1 - |n|/5) & |n| \leq 5 \\ 0 & |n| > 5 \end{cases}$

b) $Y(\Omega) = \left(\frac{\text{sen}(2.5\Omega)}{\text{sen}(0.5\Omega)} \right)^2$

6.70. *Sugerencia:* Proceda de manera similar a como se hizo para resolver el problema 5.38.

6.71. a) $H[\Omega] = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-2j\Omega}}$

b) $h[n] = \left[2 \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] u[n]$

c) $y[n] = \left[\left(\frac{1}{4} \right)^n + n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right] u[n]$

6.72. a) *Sugerencia:* Procese de manera semejante a la del problema 5.49.

b) $H(\Omega) = 1 + e^{-j\Omega}, h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$

6.73. $h[n] = \delta[n] - \frac{\text{sen } \Omega_c n}{\pi n}$

6.74. *Sugerencia:* Utilice la ecuación (6.156) en el problema 6.37.

6.75. $H(\Omega) = T_s e^{-T_s} \frac{e^{-j\Omega}}{(1 - e^{-T_s} e^{-j\Omega})^2}$, donde T_s es el intervalo de muestreo de $h_c(t)$.

6.76. *Sugerencia:* $h_d[n] = s_d[n] - s_d[n - 1]$

$$H_d(\Omega) = \frac{(1 - e^{-T_s}) e^{-j\Omega}}{1 - e^{-T_s} e^{-j\Omega}}$$

6.77. *Sugerencia:* Establezca $e^{j\Omega p_1} = \frac{e^{j\Omega_1} - \alpha}{1 - \alpha e^{j\Omega_1}}$ y resuelva para α .

6.78. *Sugerencia:* Utilice el resultado del problema 6.77.

a) $\Omega_{3 \text{ db}} = \frac{\pi}{2}$

b) $H(z) = 0.634 \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.268z^{-1}}$

$$6.79. X[k] = \frac{1 - a^N}{1 - ae^{-j(2\pi/N)k}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$6.80. a) y[n] = \{3, 3, 3, 3\}$$

$$b) y[n] = \{1, 2, 3, 3, 2, 1, 0, 0\}$$

$$6.81. a) [X[0], X[1], X[2], X[3]] = [4, 0, 0, 0]$$

$$[H[0], H[1], H[2], H[3]] = [3, -j, 1, j]$$

$$[Y[0], Y[1], Y[2], Y[3]] = [12, 0, 0, 0]$$

$$b) y[n] = \{3, 3, 3, 3\}$$

$$6.82. N = 2^{18} \text{ y } T_1 = 13.1072 \text{ s}$$

Análisis en el espacio de estado

7.1 INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos estudiado los sistemas lineales invariantes en el tiempo basados en sus relaciones de entrada y salida, conocidas como descripciones externas de los sistemas. En este capítulo vamos a discutir el método de las representaciones en el *espacio de estados* de los sistemas, las cuales se conocen como descripciones internas de los sistemas. Representar los sistemas de esta forma ofrece muchas ventajas:

1. Proporciona un examen dentro del comportamiento del sistema.
2. Nos permite manejar los sistemas con múltiples entradas y salidas de manera unificada.
3. Puede extenderse a sistemas no lineales y variantes en el tiempo.

Puesto que la representación en el espacio de estados se da en términos de ecuaciones matriciales, el lector debería tener cierta familiaridad con álgebra lineal o matricial. En el apéndice A se proporciona un breve repaso.

7.2 EL CONCEPTO DE ESTADO

A. DEFINICIÓN

El *estado* de un sistema en el tiempo t_0 (o n_0) se define como la mínima información suficiente para determinar el estado y la salida del sistema para todo tiempo $t \geq t_0$ (o $n \geq n_0$) cuando también se conoce la entrada al sistema para todo tiempo $t \geq t_0$ (o $n \geq n_0$). Las variables que contienen esta información se denominan *variables de estado*. Observe que esta definición del estado del sistema se aplica sólo a sistemas causales.

Considere una red eléctrica LIT de una sola entrada y una sola salida cuya estructura se conoce. Entonces, todo el conocimiento acerca de la entrada $x(t)$ sobre el intervalo de tiempo de $-\infty$ hasta t es suficiente para determinar la salida $y(t)$ sobre el mismo intervalo de tiempo. Sin embargo, si la entrada $x(t)$ se conoce solamente sobre el intervalo de tiempo de t_0 hasta t , entonces la corriente a través de los inductores y el voltaje a través de los capacitores en algún momento t_0 debe conocerse a fin de determinar la salida $y(t)$ sobre el intervalo de tiempo que abarca desde t_0 hasta t . Estas corrientes y voltajes constituyen el “estado” de la red en el tiempo t_0 . En este sentido, el estado de la red se relaciona con la memoria de la misma.

B. SELECCIÓN DE VARIABLES DE ESTADO

Puesto que las variables de estado de un sistema pueden interpretarse como los “elementos de memoria” del sistema para los sistemas de tiempo discreto que están formados por amplificadores, sumadores y elementos de atraso unitario seleccionamos las salidas de los elementos de atraso unitario como las variables de estado del sistema (problema 7.1). Para los sistemas de tiempo continuo que se componen de integradores, amplificadores y sumadores elegimos las salidas de los integradores como las variables de estado del sistema (problema 7.3). Para un sistema de tiempo continuo con elementos físicos de almacenamiento de energía, las salidas de estos elementos de memoria pueden seleccionarse para

que sean las variables de estado del sistema (problemas 7.4 y 7.5). Si el sistema está descrito por la ecuación en diferencias o ecuación diferencial, las variables de estado pueden seleccionarse como se ilustra en las siguientes secciones.

Observe que la selección de las variables de estado de un sistema no es única. Existe un número infinito de selecciones para cualquier sistema dado.

7.3 REPRESENTACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADO DE LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO DISCRETO

A. SISTEMAS DESCRITOS MEDIANTE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Supongamos que un sistema LIT de tiempo discreto de una entrada y una salida está descrito por una ecuación en diferencias de N -ésimo orden:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_N y[n-N] = x[n] \quad (7.1)$$

Por la discusión anterior sabemos que si $x[n]$ está dada para $n \geq 0$, la ecuación (7.1) requiere N condiciones iniciales $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$ para determinar de manera única la solución completa para $n > 0$. Es decir, se requieren N valores para especificar el estado del sistema en cualquier tiempo.

Definamos N variables de estado $q_1[n], q_2[n], \dots, q_N[n]$ como

$$\begin{aligned} q_1[n] &= y[n-N] \\ q_2[n] &= y[n-(N-1)] = y[n-N+1] \\ &\vdots \\ q_N[n] &= y[n-1] \end{aligned} \quad (7.2)$$

Entonces, de las ecuaciones (7.2) y (7.1) tenemos que

$$\begin{aligned} q_1[n+1] &= q_2[n] \\ q_2[n+1] &= q_3[n] \\ &\vdots \\ q_N[n+1] &= -a_N q_1[n] - a_{N-1} q_2[n] - \cdots - a_1 q_N[n] + x[n] \end{aligned} \quad (7.3a)$$

$$y[n] = -a_N q_1[n] - a_{N-1} q_2[n] - \cdots - a_1 q_N[n] + x[n] \quad (7.3b)$$

Las ecuaciones (7.3a) y (7.3b) pueden expresarse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \\ \vdots \\ q_N[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ \vdots \\ q_N[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \quad (7.4a)$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} -a_N & -a_{N-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ \vdots \\ q_N[n] \end{bmatrix} + [1]x[n] \quad (7.4b)$$

Ahora definamos una matriz de $N \times 1$ (o vector N -dimensional) $\mathbf{q}[n]$, al cual llamaremos *vector de estado*:

$$\mathbf{q}[n] = \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ \vdots \\ q_N[n] \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Entonces las ecuaciones (7.4a) y (7.4b) pueden volver a escribirse de manera más compacta como

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n] \quad (7.6a)$$

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n] + dx[n] \quad (7.6b)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [-a_N \quad -a_{N-1} \quad \cdots \quad -a_1] \quad d = 1$$

Las ecuaciones (7.6a) y (7.6b) se conocen como *representación en el espacio de estado N-dimensional* (o *ecuaciones de estado*) del sistema, mientras que la matriz \mathbf{A} de $N \times N$ se denomina *matriz del sistema*. En la sección 7.5 se discute la solución de las ecuaciones (7.6a) y (7.6b) para un estado inicial dado.

B. TRANSFORMACIÓN DE SIMILITUD

Como se mencionó antes, la selección de las variables de estado no es única y existe un número infinito de selecciones de las variables de estado para cualquier sistema dado. Sea \mathbf{T} cualquier matriz *no singular* de $N \times N$ (apéndice A) y definamos un nuevo vector de estado

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{T}\mathbf{q}[n] \quad (7.7)$$

donde $\mathbf{q}[n]$ es el antiguo vector de estado que satisface las ecuaciones (7.6a) y (7.6b). Puesto que \mathbf{T} es no singular, esto es, \mathbf{T}^{-1} existe, tenemos que

$$\mathbf{q}[n] = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}[n] \quad (7.8)$$

Ahora

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[n+1] &= \mathbf{T}\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{T}(\mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n]) \\ &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{T}\mathbf{b}x[n] = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}[n] + \mathbf{T}\mathbf{b}x[n] \end{aligned} \quad (7.9a)$$

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n] + dx[n] = \mathbf{c}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}[n] + dx[n] \quad (7.9b)$$

De este modo, si hacemos que

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \quad (7.10a)$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{T}\mathbf{b} \quad \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}\mathbf{T}^{-1} \quad \hat{d} = d \quad (7.10b)$$

entonces las ecuaciones (7.9a) y (7.9b) se convierten en

$$\mathbf{v}[n+1] = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}[n] + \hat{\mathbf{b}}x[n] \quad (7.11a)$$

$$y[n] = \hat{\mathbf{c}}\mathbf{v}[n] + \hat{d}x[n] \quad (7.11b)$$

Las ecuaciones (7.11a) y (7.11b) producen la misma salida $y[n]$ para una entrada dada $x[n]$ con diferentes ecuaciones de estado. En álgebra de matrices, la ecuación (7.10a) se conoce como *transformación de similitud*, mientras que las matrices \mathbf{A} y $\hat{\mathbf{A}}$ se denominan *matrices similares* (apéndice A).

C. SISTEMAS DE MÚLTIPLES ENTRADAS Y MÚLTIPLES SALIDAS

Si un sistema LIT de tiempo discreto tiene m entradas, p salidas y N variables de estado, entonces una representación en el espacio de estado del sistema puede expresarse como

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{B}\mathbf{x}[n] \quad (7.12a)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{q}[n] + \mathbf{D}\mathbf{x}[n] \quad (7.12b)$$

donde

$$\mathbf{q}[n] = \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ \vdots \\ q_N[n] \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \vdots \\ x_m[n] \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \\ \vdots \\ y_p[n] \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{Nm} \end{bmatrix}_{N \times m}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pN} \end{bmatrix}_{p \times N} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}_{p \times m}$$

7.4 REPRESENTACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADO DE SISTEMAS LIT DE TIEMPO CONTINUO

A. SISTEMAS DESCRITOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES

Supongamos que un sistema LIT de tiempo continuo de una entrada y una salida está descrito por medio de una ecuación diferencial de N -ésimo orden

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \cdots + a_N y(t) = x(t) \quad (7.13)$$

Un posible conjunto de condiciones iniciales es $y(0), y^{(1)}(0), \dots, y^{(N-1)}(0)$, donde $y^{(k)}(t) = d^k y(t)/dt^k$. De este modo, definamos las N variables de estado $q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)$ como

$$\begin{aligned} q_1(t) &= y(t) \\ q_2(t) &= y^{(1)}(t) \\ &\vdots \\ q_N(t) &= y^{(N-1)}(t) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Entonces de las ecuaciones (7.14) y (7.13) tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= q_2(t) \\ \dot{q}_2(t) &= q_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{q}_N(t) &= -a_N q_1(t) - a_{N-1} q_2(t) - \cdots - a_1 q_N(t) + x(t) \end{aligned} \quad (7.15a)$$

$$y(t) = q_1(t) \quad (7.15b)$$

donde $\dot{q}_k(t) = dq_k(t)/dt$.

Las ecuaciones (7.15a) y (7.15b) pueden expresarse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (7.16a)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} \quad (7.16b)$$

Ahora definamos una matriz de $N \times 1$ (o vector N -dimensional) $\mathbf{q}(t)$ que llamaremos vector de estado:

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

La derivada de una matriz se obtiene al tomar la derivada de cada elemento de la matriz. De esta manera,

$$\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_N(t) \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Entonces las ecuaciones (7.16a) y (7.16b) pueden volver a escribirse de manera compacta como

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t) \quad (7.19a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{q}(t) \quad (7.19b)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

Como en el caso de tiempo discreto, las ecuaciones (7.19a) y (7.19b) se conocen como una representación en el espacio del estado N -dimensional (o ecuaciones de estado) del sistema, y la matriz \mathbf{A} de $N \times N$ se denomina matriz del sistema. En general, las ecuaciones de estado de un sistema LIT de tiempo continuo de una entrada y una salida están dadas por

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t) \quad (7.20a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{q}(t) + dx(t) \quad (7.20b)$$

Como en el caso de tiempo discreto, existe un número infinito de selecciones de las variables de estado para cualquier sistema dado. En la sección 7.6 se discute la solución de las ecuaciones (7.20a) y (7.20b) para un estado inicial dado.

B. SISTEMAS DE MÚLTIPLES ENTRADAS Y MÚLTIPLES SALIDAS

Si un sistema LIT de tiempo continuo tiene m entradas, p salidas y N variables de estado, entonces una representación en el espacio de estado del sistema puede expresarse como

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \quad (7.21a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t) \quad (7.21b)$$

donde

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{Nm} \end{bmatrix}_{N \times m}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pN} \end{bmatrix}_{p \times N} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}_{p \times m}$$

7.5 SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE ESTADO PARA SISTEMAS LIT DE TIEMPO DISCRETO

A. SOLUCIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Considere una representación de estado N -dimensional

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n] \quad (7.22a)$$

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n] + dx[n] \quad (7.22b)$$

donde \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} y d son matrices de $N \times N$, $N \times 1$, $1 \times N$ y 1×1 , respectivamente. Un método para encontrar $\mathbf{q}[n]$, dado el estado inicial $\mathbf{q}[0]$, es resolver la ecuación (7.22a) de manera iterativa. De este modo,

$$\mathbf{q}[1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[0] + \mathbf{b}x[0]$$

$$\mathbf{q}[2] = \mathbf{A}\mathbf{q}[1] + \mathbf{b}x[1] = \mathbf{A}\{\mathbf{A}\mathbf{q}[0] + \mathbf{b}x[0]\} + \mathbf{b}x[1]$$

$$= \mathbf{A}^2\mathbf{q}[0] + \mathbf{A}\mathbf{b}x[0] + \mathbf{b}x[1]$$

Al continuar este proceso obtenemos

$$\mathbf{q}[n] = \mathbf{A}^n\mathbf{q}[0] + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}x[0] + \dots + \mathbf{b}x[n-1]$$

$$= \mathbf{A}^n\mathbf{q}[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-k}\mathbf{b}x[k] \quad n > 0 \quad (7.23)$$

Si el estado inicial es $\mathbf{q}[n_0]$ y $x[n]$ está definido para $n \geq n_0$, entonces, al proceder de manera similar, obtenemos que

$$\mathbf{q}[n] = \mathbf{A}^{n-n_0}\mathbf{q}[n_0] + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-k}\mathbf{b}x[n_0+k] \quad n > n_0 \quad (7.24)$$

La matriz \mathbf{A}^n es el producto de \mathbf{A} multiplicado n veces

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_n$$

y se conoce como matriz de *transición de estado* del sistema de tiempo discreto. Al sustituir la ecuación (7.23) en la ecuación (7.22b) obtenemos

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{A}^n\mathbf{q}[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1-k}\mathbf{b}x[k] + dx[n] \quad n > 0 \quad (7.25)$$

El primer término $\mathbf{c}\mathbf{A}^n\mathbf{q}[0]$ es la respuesta de entrada cero, mientras que los términos segundo y tercero forman en conjunto la respuesta de estado cero.

B. DETERMINACIÓN DE \mathbf{A}^n

Método 1. Sea \mathbf{A} una matriz de $N \times N$. La *ecuación característica* de \mathbf{A} está definida como (apéndice A)

$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (7.26)$$

donde $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ significa el determinante de $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ e \mathbf{I} es la *matriz identidad* (o *matriz unitaria*) de N -ésimo orden. Las raíces de $c(\lambda) = 0$, λ_k ($k = 1, 2, \dots, N$), se conocen como *valores característicos* o *valores propios* de \mathbf{A} . Por el *teorema de Cayley-Hamilton*, \mathbf{A}^n puede expresarse como [apéndice A, ecuación (A.57)]

$$\mathbf{A}^n = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} + \dots + b_{N-1}\mathbf{A}^{N-1} \quad (7.27)$$

Cuando todos los valores propios λ_k son distintos, los coeficientes b_0, b_1, \dots, b_{N-1} pueden encontrarse a partir de las condiciones

$$b_0 + b_1\lambda_k + \dots + b_{N-1}\lambda_k^{N-1} = \lambda_k^n \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (7.28)$$

Véase el problema 7.25 para el caso de valores propios repetidos.

Método 2. El segundo método para encontrar \mathbf{A}^n se basa en la *diagonalización* de una matriz \mathbf{A} . Si todos los valores propios λ_k de \mathbf{A} son distintos, entonces \mathbf{A}^n puede expresarse como [apéndice A, ecuación (A.53)]

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N^n \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (7.29)$$

donde la matriz \mathbf{P} se conoce como *matriz de diagonalización* y está dada por [apéndice A, ecuación (A.36)]

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_N] \quad (7.30)$$

y $\mathbf{x}_k (k = 1, 2, \dots, N)$ son los *vectores propios* de \mathbf{A} definidos por

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (7.31)$$

Método 3. El tercer método para encontrar \mathbf{A}^n se basa en la *descomposición espectral* de una matriz \mathbf{A} . Cuando todos los valores propios de \mathbf{A} son distintos, entonces \mathbf{A} puede expresarse como

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{E}_1 + \lambda_2 \mathbf{E}_2 + \cdots + \lambda_N \mathbf{E}_N = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{E}_k \quad (7.32)$$

donde $\lambda_k (k = 1, 2, \dots, N)$ son los distintos valores propios de \mathbf{A} y $\mathbf{E}_k (k = 1, 2, \dots, N)$ se llaman *matrices constituyentes*, las cuales pueden evaluarse como [apéndice A, ecuación (A.67)]

$$\mathbf{E}_k = \frac{\prod_{m=1, m \neq k}^N (\mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{I})}{\prod_{m=1, m \neq k}^N (\lambda_k - \lambda_m)} \quad (7.33)$$

Entonces, tenemos que

$$\mathbf{A}^n = \lambda_1^n \mathbf{E}_1 + \lambda_2^n \mathbf{E}_2 + \cdots + \lambda_N^n \mathbf{E}_N \quad (7.34)$$

Método 4. El cuarto método para encontrar \mathbf{A}^n se basa en la transformada z

$$\mathbf{A}^n = \mathfrak{Z}_I^{-1} \{ (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \} \quad (7.35)$$

lo cual se deriva en la siguiente sección [ecuación (7.41)].

C. LA SOLUCIÓN CON LA TRANSFORMADA z

Al tomar la transformada z unilateral de las ecuaciones (7.22a) y (7.22b), y mediante la ecuación (4.51), obtenemos

$$z\mathbf{Q}(z) - z\mathbf{q}(0) = \mathbf{A}\mathbf{Q}(z) + \mathbf{b}X(z) \quad (7.36a)$$

$$Y(z) = \mathbf{c}\mathbf{Q}(z) + dX(z) \quad (7.36b)$$

donde $X(z) = \mathfrak{Z}_I \{x[n]\}$, $Y(z) = \mathfrak{Z}_I \{y[n]\}$, y

$$\mathbf{Q}(z) = \mathfrak{Z}_I \{ \mathbf{q}[n] \} = \begin{bmatrix} Q_1(z) \\ Q_2(z) \\ \vdots \\ Q_N(z) \end{bmatrix} \quad \text{donde } Q_k(z) = \mathfrak{Z}_I \{ q_k[n] \}$$

Si reacomodamos la ecuación (7.36a) tenemos que

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{Q}(z) = z\mathbf{q}(0) + \mathbf{b}X(z) \quad (7.37)$$

Al multiplicar previamente ambos lados de la ecuación (7.37) por $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ llegamos a

$$\mathbf{Q}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{q}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}X(z) \quad (7.38)$$

Por consiguiente, si tomamos la transformada z unilateral de la ecuación (7.38) obtenemos

$$\mathbf{q}[n] = \mathfrak{Z}_I^{-1} \left\{ (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \right\} \mathbf{q}(0) + \mathfrak{Z}_I^{-1} \left\{ (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}X(z) \right\} \quad (7.39)$$

Al sustituir la ecuación (7.39) en la ecuación (7.22b) obtenemos que

$$y[n] = \mathbf{c} \mathfrak{Z}_I^{-1} \left\{ (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \right\} \mathbf{q}(0) + \mathbf{c} \mathfrak{Z}_I^{-1} \left\{ (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}X(z) \right\} + dx[n] \quad (7.40)$$

Una comparación de la ecuación (7.39) con la ecuación (7.23) muestra que

$$\mathbf{A}^n = \mathfrak{Z}_I^{-1} \left\{ (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \right\} \quad (7.41)$$

D. FUNCIÓN DEL SISTEMA $H(z)$

En la sección 4.6, la función del sistema $H(z)$ de un sistema LIT de tiempo discreto está definida por $H(z) = Y(z)/X(z)$ con condiciones iniciales cero. De este modo, al establecer $\mathbf{q}[0] = \mathbf{0}$ en la ecuación (7.38) tenemos que

$$\mathbf{Q}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}X(z) \quad (7.42)$$

La sustitución de la ecuación (7.42) en la ecuación (7.36b) nos conduce a que

$$Y(z) = [c(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] X(z) \quad (7.43)$$

De este modo,

$$H(z) = [c(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] \quad (7.44)$$

E. ESTABILIDAD

De las ecuaciones (7.25) y (7.29) o (7.34) observamos que si las magnitudes de todos los valores propios λ_k de la matriz del sistema \mathbf{A} son menores que la unidad, es decir,

$$|\lambda_k| < 1 \quad \text{para toda } k \quad (7.45)$$

entonces se dice que el sistema es *asintóticamente estable*; es decir, si no es excitado, su estado tiende a cero a partir de cualquier estado inicial finito \mathbf{q}_0 . Se puede demostrar que si todos los valores propios de \mathbf{A} son distintos y satisfacen la condición (7.45), entonces el sistema también es estable en sentido BIBO.

7.6 SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE ESTADO PARA SISTEMAS LIT DE TIEMPO CONTINUO

A. MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Considere una representación en el espacio de estado N -dimensional

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t) \quad (7.46a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{q}(t) + dx(t) \quad (7.46b)$$

donde \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} y d son matrices de $N \times N$, $N \times 1$, $1 \times N$ y 1×1 , respectivamente. A continuación resolveremos las ecuaciones (7.46a) y (7.46b) con algún estado inicial $\mathbf{q}(0)$ por medio de la transformada de Laplace bilateral. Al tomar la transformada de Laplace unilateral de las ecuaciones (7.46a) y (7.46b), y si utilizamos la ecuación (3.44), obtenemos

$$s\mathbf{Q}(s) - \mathbf{q}(0) = \mathbf{A}\mathbf{Q}(s) + \mathbf{b}X(s) \quad (7.47a)$$

$$Y(s) = \mathbf{c}\mathbf{Q}(s) + dX(s) \quad (7.47b)$$

donde $X(s) = \mathcal{L}_I\{x(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}_I\{y(t)\}$, y

$$\mathbf{Q}(s) = \mathcal{L}_I\{\mathbf{q}(t)\} = \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ \vdots \\ Q_N(s) \end{bmatrix} \quad \text{donde } Q_k(s) = \mathcal{L}_I\{q_k(t)\}$$

Al reacomodar la ecuación (7.47a) tenemos que

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})\mathbf{Q}(s) = \mathbf{q}(0) + \mathbf{b}X(s) \quad (7.48)$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (7.48) por $(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}$ llegamos a

$$\mathbf{Q}(s) = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{q}(0) + (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}X(s) \quad (7.49)$$

Al sustituir la ecuación (7.49) en la ecuación (7.47b) obtenemos

$$Y(s) = \mathbf{c}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{q}(0) + [\mathbf{c}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] X(s) \quad (7.50)$$

Al tomar la transformada de Laplace inversa de la ecuación (7.50) obtenemos la salida $y(t)$. Observe que $\mathbf{c}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{q}(0)$ corresponde a la respuesta de entrada cero y que el segundo término corresponde a la respuesta de estado cero.

B. FUNCIÓN DEL SISTEMA $H(s)$

Como en el caso de tiempo discreto, la función del sistema $H(s)$ de un sistema LIT de tiempo continuo está definida mediante $H(s) = Y(s)/X(s)$ con condiciones iniciales cero. De este modo, al establecer $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$ en la ecuación (7.50), tenemos que

$$Y(s) = [\mathbf{c}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] X(s) \quad (7.51)$$

De este modo,

$$H(s) = \mathbf{c}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (7.52)$$

C. SOLUCIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Seguimos
$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{a^k}{k!}t^k + \dots$$

definimos
$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!}t^k + \dots \quad (7.53)$$

donde $k! = k(k-1) \cdots 2 \cdot 1$. Si $t = 0$, entonces la ecuación (7.53) se reduce a

$$e^0 = \mathbf{I} \quad (7.54)$$

donde $\mathbf{0}$ es una matriz cero de $N \times N$ y todas sus entradas son cero. Como en $e^a(t-\tau) = e^{at}e^{-a\tau} = e^{-a\tau}e^{at}$, podemos demostrar que

$$e^{\mathbf{A}(t-\tau)} = e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}\tau} = e^{-\mathbf{A}\tau}e^{\mathbf{A}t} \quad (7.55)$$

Al establecer $\tau = t$ en la ecuación (7.55) tenemos que

$$e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t} = e^0 = \mathbf{I} \quad (7.56)$$

De este modo,

$$e^{-\mathbf{A}t} = (e^{\mathbf{A}t})^{-1} \quad (7.57)$$

lo que indica que $e^{-\mathbf{A}t}$ es la inversa de $e^{\mathbf{A}t}$.

La diferenciación de la ecuación (7.53) con respecto a t nos lleva a que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{0} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}2t + \dots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!}kt^{k-1} + \dots \\ &= \mathbf{A} \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \dots \right] \\ &= \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \dots \right] \mathbf{A} \end{aligned}$$

lo cual implica
$$\frac{d}{dt} e^{At} = \mathbf{A}e^{At} = e^{At} \mathbf{A} \quad (7.58)$$

Ahora, mediante la relación [apéndice A, ecuación (A.70)]

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B} + \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

y la ecuación (7.58), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [e^{-At} \mathbf{q}(t)] &= \left[\frac{d}{dt} e^{-At} \right] \mathbf{q}(t) + e^{-At} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ &= -e^{-At} \mathbf{A} \mathbf{q}(t) + e^{-At} \dot{\mathbf{q}}(t) \end{aligned} \quad (7.59)$$

Al multiplicar ahora ambos lados de la ecuación (7.46a) por e^{-At} obtenemos

$$e^{-At} \dot{\mathbf{q}}(t) = e^{-At} \mathbf{A} \mathbf{q}(t) + e^{-At} \mathbf{b}x(t)$$

o
$$e^{-At} \dot{\mathbf{q}}(t) - e^{-At} \mathbf{A} \mathbf{q}(t) = e^{-At} \mathbf{b}x(t) \quad (7.60)$$

De la ecuación (7.59), la ecuación (7.60) puede volver a escribirse como

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} \mathbf{q}(t)] = e^{-At} \mathbf{b}x(t) \quad (7.61)$$

Si integramos ambos lados de la ecuación (7.61) desde 0 hasta t obtenemos

$$e^{-At} \mathbf{q}(t) \Big|_0^t = \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{b}x(\tau) d\tau$$

o
$$e^{-At} \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(0) = \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{b}x(\tau) d\tau$$

Por consiguiente,

$$e^{-At} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) + \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{b}x(\tau) d\tau \quad (7.62)$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (7.62) por e^{At} y por medio de las ecuaciones (7.55) y (7.56), obtenemos

$$\mathbf{q}(t) = e^{At} \mathbf{q}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}x(\tau) d\tau \quad (7.63)$$

Si el estado inicial es $\mathbf{q}(t_0)$ y tenemos que $x(t)$ para $t \geq t_0$, entonces

$$\mathbf{q}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{q}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}x(\tau) d\tau \quad (7.64)$$

lo cual se obtiene con facilidad al integrar ambos lados de la ecuación (7.61) desde t_0 hasta t . La función matricial e^{At} se conoce como matriz de transición de estado del sistema de tiempo continuo. Si sustituimos la ecuación (7.63) en la ecuación (7.46b) obtenemos

$$y(t) = \mathbf{c}e^{At} \mathbf{q}(0) + \int_0^t \mathbf{c}e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}x(\tau) d\tau + dx(t) \quad (7.65)$$

D. EVALUACIÓN DE e^{At}

Método 1. Como en la evaluación de \mathbf{A}^n , por medio del *teorema de Cayley-Hamilton* tenemos que

$$e^{At} = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{A} + \dots + b_{N-1} \mathbf{A}^{N-1} \quad (7.66)$$

Cuando todos los valores propios λ_k de \mathbf{A} son distintos, los coeficientes b_0, b_1, \dots, b_{N-1} pueden encontrarse a partir de las condiciones

$$b_0 + b_1 \lambda_k + \dots + b_{N-1} \lambda_k^{N-1} = e^{\lambda_k t} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (7.67)$$

Para el caso de valores propios repetidos véase el problema 7.45.

Método 2. Nuevamente, como en la evaluación de \mathbf{A}^n , también podemos evaluar $e^{\mathbf{A}t}$ con base en la diagonalización de \mathbf{A} . Si todos los valores propios λ_k de \mathbf{A} son distintos, tenemos que

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_N t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (7.68)$$

donde \mathbf{P} está dada por la ecuación (7.30).

Método 3. También podríamos evaluar $e^{\mathbf{A}t}$ mediante la descomposición espectral de \mathbf{A} , es decir, al encontrar las matrices constituyentes \mathbf{E}_k ($k = 1, 2, \dots, N$) para las cuales

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{E}_1 + \lambda_2 \mathbf{E}_2 + \dots + \lambda_N \mathbf{E}_N \quad (7.69)$$

donde λ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) son los distintos valores propios de \mathbf{A} . Entonces, cuando todos los valores propios λ_k de \mathbf{A} son distintos, tenemos que

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_1 t} \mathbf{E}_1 + e^{\lambda_2 t} \mathbf{E}_2 + \dots + e^{\lambda_N t} \mathbf{E}_N \quad (7.70)$$

Método 4. Mediante la transformada de Laplace podemos calcular $e^{\mathbf{A}t}$. Al comparar las ecuaciones (7.63) y (7.49), podemos ver que

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}_T^{-1} \{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \} \quad (7.71)$$

E. ESTABILIDAD

De las ecuaciones (7.63) y (7.68) o (7.70) vemos que si todos los valores propios λ_k de la matriz del sistema \mathbf{A} tienen partes reales negativas, esto es,

$$\text{Re}\{\lambda_k\} < 0 \quad \text{para toda } k \quad (7.72)$$

entonces se dice que el sistema es *asintóticamente estable*. Como en el caso de tiempo discreto, si todos los valores propios de \mathbf{A} son distintos y satisfacen la condición (7.72), entonces el sistema también es estable en sentido BIBO.

PROBLEMAS RESUELTOS

REPRESENTACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADO

7.1. Considere el sistema LIT de tiempo discreto mostrado en la figura 7-1. Encuentre la representación en el espacio de estado del sistema al seleccionar las salidas de los elementos de atraso unitario 1 y 2 como las respectivas variables de estado $q_1[n]$ y $q_2[n]$.

De la figura 7-1 tenemos que

$$\begin{aligned} q_1[n + 1] &= q_2[n] \\ q_2[n + 1] &= 2q_1[n] + 3q_2[n] + x[n] \\ y[n] &= 2q_1[n] + 3q_2[n] + x[n] \end{aligned}$$

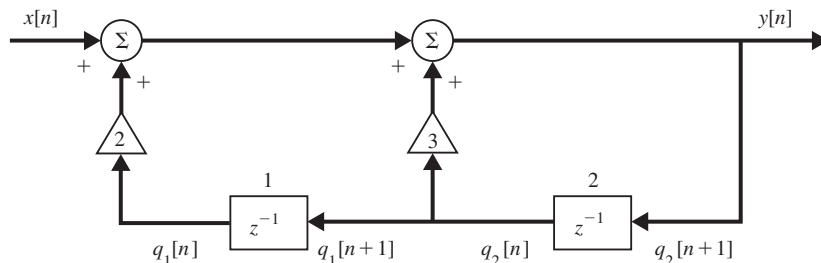


Figura 7-1

En forma matricial
$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + x[n] \quad (7.73a)$$

o
$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n]$$

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n] + dx[n] \quad (7.73b)$$

donde
$$\mathbf{q}[n] = \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [2 \ 3] \quad d = 1$$

7.2. Vuelva a resolver el problema 7.1 seleccionando las salidas de los elementos de atraso unitario 2 y 1 como las respectivas variables de estado $v_1[n]$ y $v_2[n]$ y verifique las relaciones en las ecuaciones (7.10a) y (7.10b).

Volvemos a dibujar la figura 7-1 con las nuevas variables de estado como se muestra en la figura 7-2, de la cual tenemos que

$$v_1[n+1] = 3v_1[n] + 2v_2[n] + x[n]$$

$$v_2[n+1] = v_1[n]$$

$$y[n] = 3v_1[n] + 2v_2[n] + x[n]$$

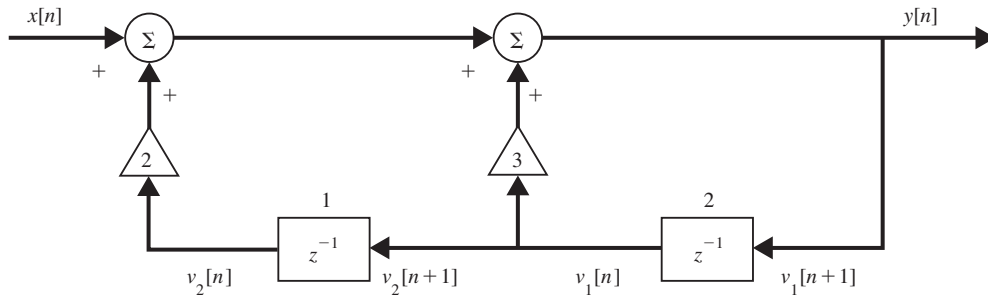


Figura 7-2

En forma matricial
$$\begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} + x[n] \quad (7.74a)$$

o
$$\mathbf{v}[n+1] = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}[n] + \hat{\mathbf{b}}x[n]$$

$$y[n] = \hat{\mathbf{c}}\mathbf{v}[n] + \hat{d}x[n] \quad (7.74b)$$

donde
$$\mathbf{v}[n] = \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{c}} = [3 \ 2] \quad \hat{d} = 1$$

Observe que $v_1[n] = q_2[n]$ y $v_2[n] = q_1[n]$. De este modo tenemos que

$$\mathbf{v}[n] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] = \mathbf{T}\mathbf{q}[n]$$

Ahora, mediante los resultados del problema 7.1, tenemos que

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}}$$

$$\mathbf{Tb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{cT}^{-1} = [2 \quad 3] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [3 \quad 2] = \hat{\mathbf{c}} \quad d = 1 = \hat{d}$$

lo cual equivale a las relaciones en las ecuaciones (7.10a) y (7.10b).

7.3. Considere el sistema LIT de tiempo continuo mostrado en la figura 7-3. Encuentre una representación en el espacio de estado del sistema.

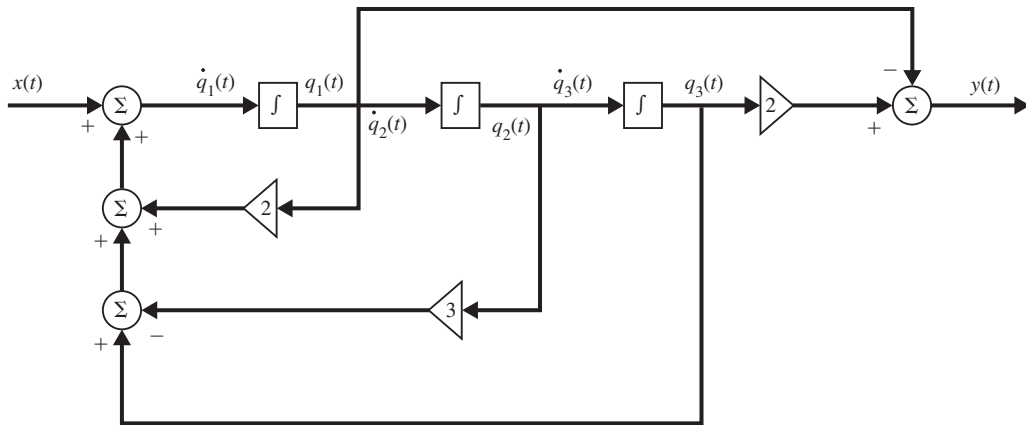


Figura 7-3

Seleccionamos las salidas de los integradores como las variables de estado $q_1(t)$, $q_2(t)$ y $q_3(t)$ como se muestra en la figura 7-3. Entonces de la figura 7-3 obtenemos que

$$\dot{q}_1(t) = 2q_1(t) - 3q_2(t) + q_3(t) + x(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = q_1(t)$$

$$\dot{q}_3(t) = q_2(t)$$

$$y(t) = -q_1(t) + 2q_3(t)$$

En forma matricial

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [-1 \quad 0 \quad 2] \mathbf{q}(t) \tag{7.75}$$

7.4. Considere el sistema mecánico mostrado en la figura 7-4, el cual consiste en un bloque con masa m conectado a una pared mediante un resorte. Sean k_1 la constante del resorte, k_2 el coeficiente de fricción viscosa, la salida $y(t)$ el desplazamiento del bloque y la entrada $x(t)$ la fuerza aplicada. Encuentre una representación en espacio de estado del sistema.

Por la ley de Newton tenemos que

$$m\ddot{y}(t) = -k_1 y(t) - k_2 \dot{y}(t) + x(t)$$

o
$$m\ddot{y}(t) + k_2 \dot{y}(t) + k_1 y(t) = x(t)$$

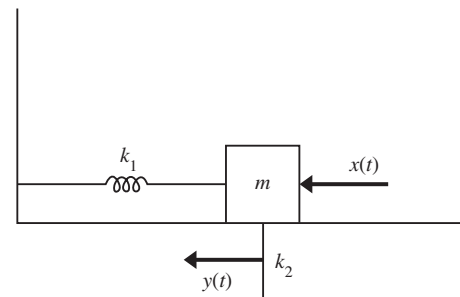


Figura 7-4 Sistema mecánico.

La energía potencial y la energía cinética de una masa están almacenadas en su posición y su velocidad. De este modo, seleccionamos las variables de estado $q_1(t)$ y $q_2(t)$ como

$$q_1(t) = y(t)$$

$$q_2(t) = \dot{y}(t)$$

Entonces tenemos que

$$\dot{q}_1(t) = q_2(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = -\frac{k_1}{m}q_1(t) - \frac{k_2}{m}q_2(t) + \frac{1}{m}x(t)$$

$$y(t) = q_1(t)$$

En forma matricial

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m} & -\frac{k_2}{m} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} x(t) \quad (7.76)$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{q}(t)$$

7.5. Considere el circuito *RLC* mostrado en la figura 7-5. Sea la salida $y(t)$ la corriente del circuito. Encuentre una representación en espacio de estado del circuito.

Seleccionamos las variables de estado $q_1(t) = i_L(t)$ y $q_2(t) = v_C(t)$. Entonces, por las leyes de Kirchhoff, obtenemos

$$L\dot{q}_1(t) + Rq_1(t) + q_2(t) = x(t)$$

$$C\dot{q}_2(t) = q_1(t)$$

$$y(t) = q_1(t)$$

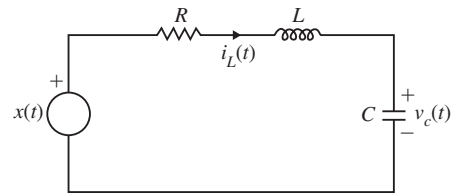


Figura 7-5 Circuito *RLC*.

Al reacomodar y escribir en forma matricial obtenemos que

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (7.77)$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{q}(t)$$

7.6. Encuentre una representación en espacio de estado para el circuito mostrado en la figura 7-6, suponiendo que las salidas son las corrientes que fluyen en R_1 y R_2 .

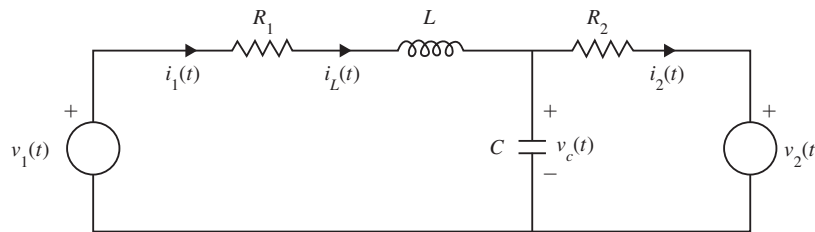


Figura 7-6

Elegimos las variables de estado $q_1(t) = i_L(t)$ y $q_2(t) = v_C(t)$. Existen dos fuentes de voltaje y dejemos que $x_1(t) = v_1(t)$ y $x_2(t) = v_2(t)$. Sean $y_1(t) = i_1(t)$ y $y_2(t) = i_2(t)$. Al aplicar las leyes de Kirchhoff para cada circuito obtenemos

$$L\dot{q}_1(t) + R_1q_1(t) + q_2(t) = x_1(t)$$

$$q_2(t) - [q_1(t) - C\dot{q}_2(t)]R_2 = x_2(t)$$

$$y_1(t) = q_1(t)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{R_2}[q_2(t) - x_2(t)]$$

Al reacomodar y reescribir en forma matricial obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{7.78}$$

donde

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

ECUACIONES DE ESTADO DE SISTEMAS LIT DE TIEMPO DISCRETO DESCRITOS POR ECUACIONES EN DIFERENCIAS

7.7. Encuentre las ecuaciones de estado de un sistema de tiempo discreto descrito por

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] \tag{7.79}$$

Seleccione las variables de estado $q_1[n]$ y $q_2[n]$ como

$$\begin{aligned} q_1[n] &= y[n-2] \\ q_2[n] &= y[n-1] \end{aligned} \tag{7.80}$$

Entonces, de las ecuaciones (7.79) y (7.80), tenemos que

$$\begin{aligned} q_1[n+1] &= q_2[n] \\ q_2[n+1] &= -\frac{1}{8}q_1[n] + \frac{3}{4}q_2[n] + x[n] \\ y[n] &= -\frac{1}{8}q_1[n] + \frac{3}{4}q_2[n] + x[n] \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\begin{aligned} \mathbf{q}[n+1] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \\ y[n] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] + x[n] \end{aligned} \tag{7.81}$$

7.8. Encuentre las ecuaciones de estado de un sistema de tiempo discreto descrito por

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] \tag{7.82}$$

Debido a la existencia del término $1/2 x[n-1]$ en el lado derecho de la ecuación (7.82), seleccionar $y[n-2]$ y $y[n-1]$ como variables de estado no produce las ecuaciones de estado deseadas del sistema. De este modo, con el fin de hallar las variables de estado adecuadas, construyamos un diagrama de simulación de la ecuación (7.82) por medio de elementos de atraso unitario, amplificadores y sumadores. Al tomar las transformadas z de ambos lados de la ecuación (7.82) y al reacomodar términos obtenemos

$$Y(z) = \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) + X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

de lo cual (observe que z^{-k} corresponde a k atrasos de tiempo unitarios) puede dibujarse el diagrama de simulación en la figura 7-7. Si seleccionamos las salidas de los elementos de atraso unitario como variables de estado, como se ilustra en la figura 7-7, obtenemos

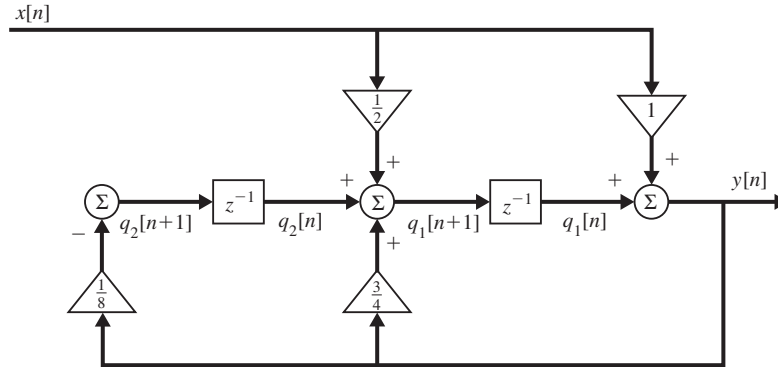


Figura 7-7

$$\begin{aligned}
 y[n] &= q_1[n] + x[n] \\
 q_1[n+1] &= q_2[n] + \frac{3}{4}y[n] + \frac{1}{2}x[n] \\
 &= \frac{3}{4}q_1[n] + q_2[n] + \frac{5}{4}x[n] \\
 q_2[n+1] &= -\frac{1}{8}y[n] = -\frac{1}{8}q_1[n] - \frac{1}{8}x[n]
 \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\mathbf{q}[n+1] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] + \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [1 \quad 0] \mathbf{q}[n] + x[n] \quad (7.83)$$

7.9. Encuentre las ecuaciones de estado de un sistema LIT de tiempo discreto con función del sistema

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad (7.84)$$

De la definición de función del sistema [ecuación (4.41)]

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

tenemos que

$$(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2})Y(z) = (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2})X(z)$$

Al reacomodar la ecuación anterior obtenemos

$$Y(z) = -a_1z^{-1}Y(z) - a_2z^{-2}Y(z) + b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z) + b_2z^{-2}X(z)$$

de la cual puede dibujarse el diagrama de simulación de la figura 7-8. Si seleccionamos las salidas de los elementos de atraso unitario como variables de estado, como se ilustra en la figura 7-8, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 y[n] &= q_1[n] + b_0x[n] \\
 q_1[n+1] &= -a_1y[n] + q_2[n] + b_1x[n] \\
 &= -a_1q_1[n] + q_2[n] + (b_1 - a_1b_0)x[n] \\
 q_2[n+1] &= -a_2y[n] + b_2x[n] \\
 &= -a_2q_1[n] + (b_2 - a_2b_0)x[n]
 \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\mathbf{q}[n+1] = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] + \begin{bmatrix} b_1 - a_1b_0 \\ b_2 - a_2b_0 \end{bmatrix} x[n] \quad (7.85)$$

$$y[n] = [1 \quad 0] \mathbf{q}[n] + b_0x[n]$$

Observe que en el diagrama de simulación de la figura 7-8 el número de elementos de atraso unitario es 2 (el orden del sistema) y es el número mínimo requerido. De este modo, la figura 7-8 se conoce como *simulación canónica de la primera forma* y la ecuación (7.85) se conoce como *representación de estado canónica de la primera forma*.

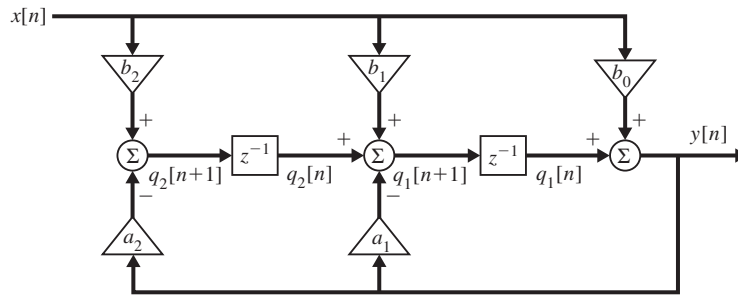


Figura 7-8 Simulación canónica de la primera forma.

7.10. Vuelva a resolver el problema 7.9 de manera que $H(z)$ se exprese como

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

donde
$$H_1(z) = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad H_2(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}$$

Sea
$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \tag{7.86}$$

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} \tag{7.87}$$

Entonces tenemos que
$$W(z) + a_1z^{-1}W(z) + a_2z^{-2}W(z) = X(z) \tag{7.88}$$

$$Y(z) = b_0W(z) + b_1z^{-1}W(z) + b_2z^{-2}W(z) \tag{7.89}$$

Al reacomodar la ecuación (7.88) obtenemos

$$W(z) = -a_1z^{-1}W(z) - a_2z^{-2}W(z) + X(z) \tag{7.90}$$

De las ecuaciones (7.89) y (7.90) puede dibujarse el diagrama de simulación en la figura 7-9. Al seleccionar las salidas de los elementos de atraso unitario como las variables de estado, como se ilustra en la figura 7-9, tenemos que

$$\begin{aligned} v_1[n+1] &= v_2[n] \\ v_2[n+1] &= -a_2v_1[n] - a_1v_2[n] + x[n] \\ y[n] &= b_2v_1[n] + b_1v_2[n] + b_0v_2[n+1] \\ &= (b_2 - b_0a_2)v_1[n] + (b_1 - b_0a_1)v_2[n] + b_0x[n] \end{aligned}$$

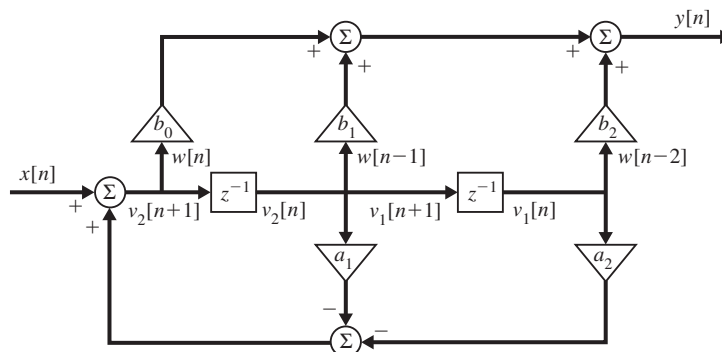


Figura 7-9 Simulación canónica de la segunda forma.

En forma matricial

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[n+1] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{v}[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \\ y[n] &= [b_2 - b_0 a_2 \quad b_1 - b_0 a_1] \mathbf{v}[n] + b_0 x[n] \end{aligned} \quad (7.91)$$

La simulación en la figura 7-9 se conoce como *simulación canónica de la segunda forma*, y a la ecuación (7.91) se le llama *representación de estado canónica de la segunda forma*.

7.11. Considere un sistema LIT de tiempo discreto con función del sistema

$$H(z) = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1} \quad (7.92)$$

Encuentre una representación de estado del sistema.

Al reescribir $H(z)$ como

$$H(z) = \frac{z}{2z^2 \left(1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \quad (7.93)$$

Al comparar la ecuación (7.93) con la ecuación (7.84) en el problema 7.9, podemos observar que

$$a_1 = -\frac{3}{2} \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad b_0 = 0 \quad b_1 = \frac{1}{2} \quad b_2 = 0$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (7.85) en el problema 7.9 obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{q}[n+1] &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} x[n] \\ y[n] &= [1 \quad 0] \mathbf{q}[n] \end{aligned} \quad (7.94)$$

7.12. Considere un sistema LIT de tiempo discreto con función del sistema

$$H(z) = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{z}{2(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)} \quad (7.95)$$

Encuentre una representación de estado del sistema de forma que su matriz del sistema \mathbf{A} sea diagonal.

En primer lugar, expandimos $H(z)$ en fracciones parciales como

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z}{2(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = H_1(z) + H_2(z) \end{aligned}$$

donde

$$H_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad H_2(z) = \frac{-1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Sea

$$H_k(z) = \frac{\alpha_k}{1 - p_k z^{-1}} = \frac{Y_k(z)}{X(z)} \quad (7.96)$$

Entonces

$$(1 - p_k z^{-1})Y_k(z) = \alpha_k X(z)$$

o

$$Y_k(z) = p_k z^{-1} Y_k(z) + \alpha_k X(z)$$

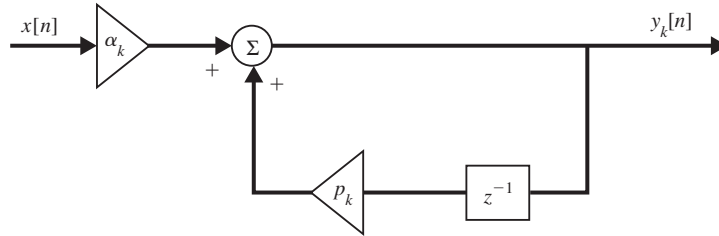


Figura 7-10

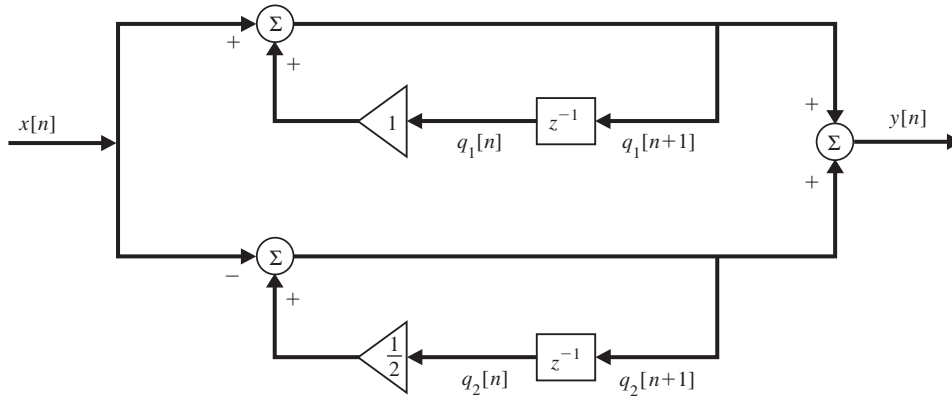


Figura 7-11

de lo cual puede dibujarse el diagrama de simulación en la figura 7-10. De esta manera, $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$ puede simularse mediante el diagrama en la figura 7-11 obtenido por conexión en paralelo de ambos sistemas. Al seleccionar las salidas de los elementos de atraso unitario como variables de estado, como se ilustra en la figura 7-11, tenemos que

$$q_1[n + 1] = q_1[n] + x[n]$$

$$q_2[n + 1] = \frac{1}{2}q_2[n] - x[n]$$

$$y[n] = q_1[n + 1] + q_2[n + 1] = q_1[n] + \frac{1}{2}q_2[n]$$

En forma matricial

$$\mathbf{q}[n + 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] \tag{7.97}$$

Observe que la matriz del sistema \mathbf{A} es diagonal y sus elementos diagonales se componen de los polos de $H(z)$.

7.13. Dibuje un diagrama de bloques de un sistema de tiempo discreto con la representación de estado

$$\mathbf{q}[n + 1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] \tag{7.98}$$

Volvemos a escribir la ecuación (7.98) como

$$q_1[n + 1] = q_2[n]$$

$$q_2[n + 1] = \frac{1}{2}q_1[n] + \frac{2}{3}q_2[n] + x[n]$$

$$y[n] = 3q_1[n] - 2q_2[n] \tag{7.99}$$

de la cual dibujamos el diagrama de bloques en la figura 7-12.

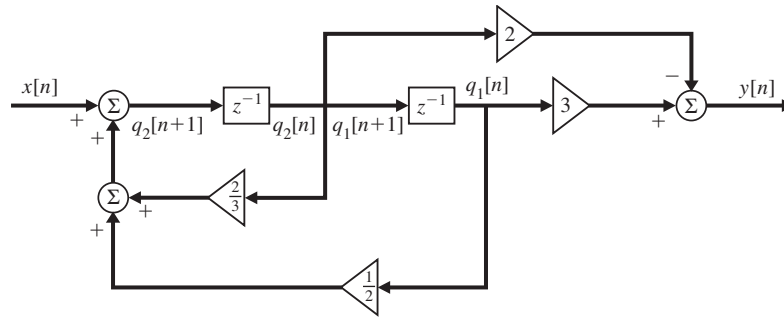


Figura 7-12

ECUACIONES DE ESTADO DE SISTEMAS LIT DE TIEMPO CONTINUO DESCRITOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES

7.14. Encuentre las ecuaciones de estado de un sistema LIT de tiempo continuo descrito por

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t) \tag{7.100}$$

Seleccione las variables de estado como

$$\begin{aligned} q_1(t) &= y(t) \\ q_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned} \tag{7.101}$$

Entonces, de las ecuaciones (7.100) y (7.101), tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= q_2(t) \\ \dot{q}_2(t) &= -2q_1(t) - 3q_2(t) + x(t) \\ y(t) &= q_1(t) \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \mathbf{q}(t) \end{aligned} \tag{7.102}$$

7.15. Encuentre las ecuaciones de estado de un sistema LIT de tiempo continuo descrito por

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\dot{x}(t) + x(t) \tag{7.103}$$

Debido a la existencia del término $4\dot{x}(t)$ en el lado derecho de la ecuación (7.103), seleccionar $y(t)$ y $\dot{y}(t)$ como variables de estado no conducirá a las ecuaciones de estado deseadas del sistema. De este modo, a fin de encontrar las variables de estado adecuadas, construiremos un diagrama de simulación de la ecuación (7.103) por medio de integradores, amplificadores y sumadores. Si tomamos la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación (7.103) obtenemos

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 4sX(s) + X(s)$$

Al dividir ambos lados de la expresión anterior entre s^2 y reacomodar los términos obtenemos

$$Y(s) = -3s^{-1}Y(s) - 2s^{-2}Y(s) + 4s^{-1}X(s) + s^{-2}X(s)$$

de lo cual puede dibujarse el diagrama de simulación en la figura 7-13 (observe que s^{-k} corresponde a k veces la integración). Si seleccionamos las salidas de los integradores para que sean variables de estado, como se ilustra en la figura 7-13, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= -3q_1(t) + q_2(t) + 4x(t) \\ \dot{q}_2(t) &= -2q_1(t) + x(t) \\ y(t) &= q_1(t) \end{aligned}$$

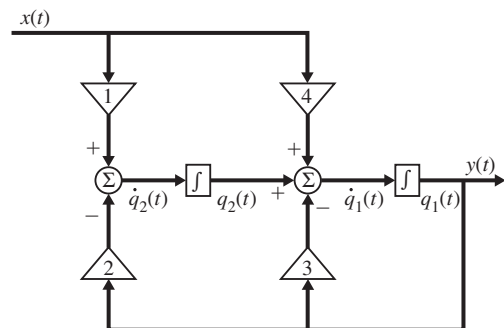


Figura 7-13

En forma matricial

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{q}(t) \tag{7.104}$$

7.16. Encuentre las ecuaciones de estado de un sistema LIT de tiempo continuo con función del sistema

$$H(s) = \frac{b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3} \tag{7.105}$$

De la definición de función del sistema [ecuación (3.37)]

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}$$

tenemos que

$$(s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3)Y(s) = (b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3)X(s)$$

Al dividir ambos lados de la expresión anterior entre s^3 y reacomodar términos obtenemos

$$Y(s) = -a_1s^{-1}Y(s) - a_2s^{-2}Y(s) - a_3s^{-3}Y(s) + b_0X(s) + b_1s^{-1}X(s) + b_2s^{-2}X(s) + b_3s^{-3}X(s)$$

de donde puede trazarse el diagrama de simulación en la figura 7-14 (se observa que s^{-k} corresponde a k veces la integración). Al seleccionar las salidas de los integradores como variables de estado, como se ilustra en la figura 7-14, obtenemos

$$y(t) = q_1(t) + b_0x(t)$$

$$\dot{q}_1(t) = -a_1y(t) + q_2(t) + b_1x(t)$$

$$= -a_1q_1(t) + q_2(t) + (b_1 - a_1b_0)x(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = -a_2y(t) + q_3(t) + b_2x(t)$$

$$= -a_2q_1(t) + q_3(t) + (b_2 - a_2b_0)x(t)$$

$$\dot{q}_3(t) = -a_3y(t) + b_3x(t)$$

$$= -a_3q_1(t) + (b_3 - a_3b_0)x(t)$$

En forma matricial

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} b_1 - a_1b_0 \\ b_2 - a_2b_0 \\ b_3 - a_3b_0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{q}(t) + b_0x(t) \tag{7.106}$$

Como en el caso de tiempo discreto, la simulación de $H(s)$ mostrada en la figura 7-14 se conoce como simulación canónica de la primera forma, mientras que a la ecuación (7.106) se le llama representación de estado canónica de la primera forma.

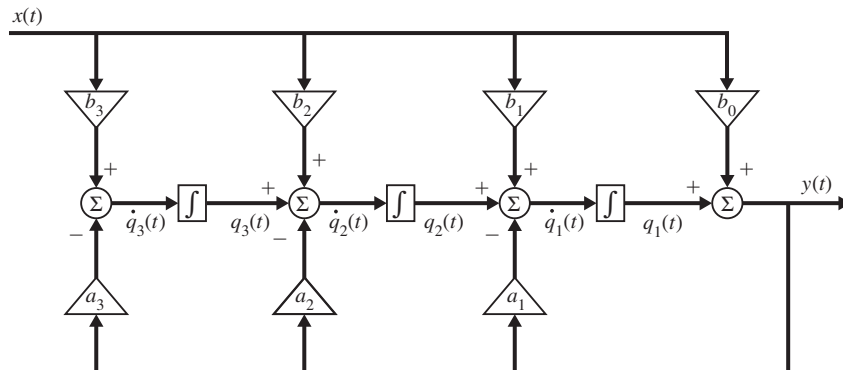


Figura 7-14 Simulación canónica de la primera forma.

7.17. Vuelva a realizar el problema 7.16 expresando $H(s)$ como

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

donde

$$H_1(s) = \frac{1}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}$$

$$H_2(s) = b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3$$

Sea

$$H_1(s) = \frac{W(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3} \tag{7.107}$$

$$H_2(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3$$

Entonces tenemos que

$$(s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3)W(s) = X(s)$$

$$Y(s) = (b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3)W(s)$$

Al reacomodar las ecuaciones anteriores obtenemos

$$s^3W(s) = -a_1s^2W(s) - a_2sW(s) - a_3W(s) + X(s)$$

$$Y(s) = b_0s^3W(s) + b_1s^2W(s) + b_2sW(s) + b_3W(s)$$

de donde, al observar la relación mostrada en la figura 7-15, puede dibujarse el diagrama de simulación en la figura 7-16. Al seleccionar las salidas de los integradores como variables de estado, como se muestra en la figura 7-16, tenemos que

$$\dot{v}_1(t) = v_2(t)$$

$$\dot{v}_2(t) = v_3(t)$$

$$\dot{v}_3(t) = -a_3v_1(t) - a_2v_2(t) - a_1v_3(t) + x(t)$$

$$y(t) = b_3v_1(t) + b_2v_2(t) + b_1v_3(t) + b_0\dot{v}_3(t)$$

$$= (b_3 - a_3b_0)v_1(t) + (b_2 - a_2b_0)v_2(t)$$

$$+ (b_1 - a_1b_0)v_3(t) + b_0x(t)$$

(7.108)



Figura 7-15

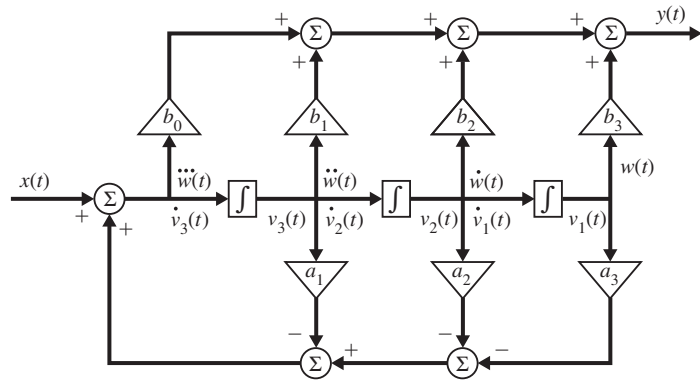


Figura 7-16 Simulación canónica de la segunda forma.

En forma matricial

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t) \tag{7.109}$$

$$y(t) = [b_3 - a_3b_0 \quad b_2 - a_2b_0 \quad b_1 - a_1b_0] \mathbf{v}(t) + b_0x(t)$$

Como en el caso de tiempo discreto, la simulación de $H(s)$ que se muestra en la figura 7-16 se conoce como simulación canónica de la segunda forma, mientras que a la ecuación (7.109) se le llama representación de estado canónica de la segunda forma.

7.18. Considere un sistema LIT de tiempo continuo con función del sistema

$$H(s) = \frac{3s + 7}{(s + 1)(s + 2)(s + 5)} \tag{7.110}$$

Encuentre una representación de estado del sistema.

Vuelva a escribir $H(s)$ como
$$H(s) = \frac{3s + 7}{(s + 1)(s + 2)(s + 5)} = \frac{3s + 7}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10} \quad (7.111)$$

Comparando la ecuación (7.111) con la ecuación (7.105) en el problema 7.16, podemos observar que

$$a_1 = 8 \quad a_2 = 17 \quad a_3 = 10 \quad b_0 = b_1 = 0 \quad b_2 = 3 \quad b_3 = 7$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (7.106) en el problema 7.16 obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) &= \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -17 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{q}(t) \end{aligned} \quad (7.112)$$

7.19. Considere un sistema LIT de tiempo continuo con función del sistema

$$H(s) = \frac{3s + 7}{(s + 1)(s + 2)(s + 5)} \quad (7.113)$$

Encuentre una representación de estado del sistema de tal modo que su matriz del sistema \mathbf{A} sea diagonal.

En primer lugar, expandimos $H(s)$ en fracciones parciales como

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{3s + 7}{(s + 1)(s + 2)(s + 5)} = \frac{1}{s + 1} - \frac{\frac{1}{3}}{s + 2} - \frac{\frac{2}{3}}{s + 5} \\ &= H_1(s) + H_2(s) + H_3(s) \end{aligned}$$

donde
$$H_1(s) = \frac{1}{s + 1} \quad H_2(s) = -\frac{\frac{1}{3}}{s + 2} \quad H_3(s) = -\frac{\frac{2}{3}}{s + 5}$$

Sea
$$H_k(s) = \frac{\alpha_k}{s - p_k} = \frac{Y_k(s)}{X(s)} \quad (7.114)$$

Entonces
$$(s - p_k)Y_k(s) = \alpha_k X(s)$$

o
$$Y_k(s) = p_k s^{-1} Y_k(s) + \alpha_k s^{-1} X(s)$$

de donde puede dibujarse el diagrama de simulación en la figura 7-17 (página siguiente). De este modo, puede simularse $H(s) = H_1(s) + H_2(s) + H_3(s)$ mediante el diagrama en la figura 7-18 obtenida por conexión en paralelo de los tres sistemas. Al seleccionar las salidas de los integradores como variables de estado, como se muestra en la figura 7-18, obtenemos

$$\dot{q}_1(t) = -q_1(t) + x(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = -2q_2(t) - \frac{1}{3}x(t)$$

$$\dot{q}_3(t) = -5q_3(t) - \frac{2}{3}x(t)$$

$$y(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$$

En forma matricial
$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} x(t) \quad (7.115)$$

$$y(t) = [1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{q}(t)$$

Observe que la matriz del sistema \mathbf{A} es diagonal y sus elementos diagonales se componen de los polos de $H(s)$.

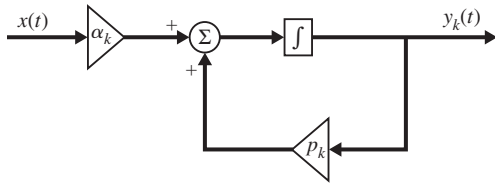


Figura 7-17

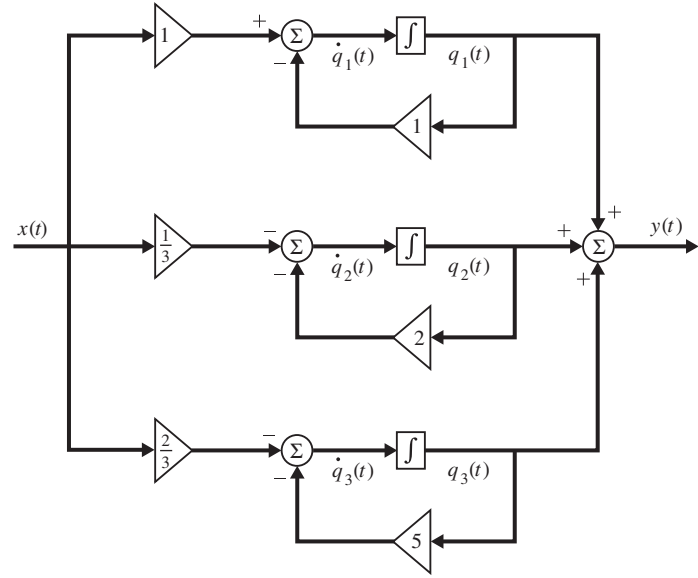


Figura 7-18

SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE ESTADO PARA LOS SISTEMAS LIT DE TIEMPO DISCRETO

7.20. Encuentre \mathbf{A}^n para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

por el método del teorema de Cayley-Hamilton.

En primer lugar, encontramos el polinomio característico $c(\lambda)$ de \mathbf{A} .

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{1}{8} & \lambda - \frac{3}{4} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

De este modo, los valores propios de \mathbf{A} son $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. Por tanto, de las ecuaciones (7.27) y (7.28) tenemos que

$$\mathbf{A}^n = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ -\frac{1}{8}b_1 & b_0 + \frac{3}{4}b_1 \end{bmatrix}$$

y b_0 y b_1 son las soluciones de

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 \left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ b_0 + b_1 \left(\frac{1}{4}\right) &= \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$b_0 = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad b_1 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.21. Repita el problema 7.20 mediante el método de diagonalización.

Sea \mathbf{x} un vector propio de \mathbf{A} asociado con λ . Entonces

$$[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{x} = 0$$

Para $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las soluciones de este sistema están dadas por $x_1 = 2x_2$. De este modo, los vectores propios asociados con λ_1 son aquellos vectores de la forma

$$\mathbf{x}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

Para $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{4}$ tenemos que

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las soluciones de este sistema están dadas por $x_1 = 4x_2$. De esta forma, los vectores propios asociados con λ_2 son aquellos vectores de la forma

$$\mathbf{x}_2 = \beta \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \beta \neq 0$$

Sea $\alpha = \beta = 1$ en las expresiones anteriores y sea

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{P}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

y por la ecuación (7.29) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.22. Repita el problema 7.20 mediante el método de descomposición espectral.

Puesto que todos los valores propios de \mathbf{A} son distintos, por la ecuación (7.33) tenemos que

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \left(\mathbf{A} - \frac{1}{4} \mathbf{I} \right) = 4 \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \left(\mathbf{A} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \right) = -4 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces, por la ecuación (7.34) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \left(\frac{1}{2} \right)^n \mathbf{E}_1 + \left(\frac{1}{4} \right)^n \mathbf{E}_2 = \left(\frac{1}{2} \right)^n \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4} \right)^n \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2} \right)^n + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n & 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 4 \left(\frac{1}{4} \right)^n \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^n & 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{4} \right)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.23. Resuelva de nuevo el problema 7.20 por medio del método de la transformada z .

En primer lugar, debemos encontrar $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

$$\begin{aligned} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} z & -1 \\ \frac{1}{8} & z - \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{4} \right)} \begin{bmatrix} z - \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{8} & z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{z - \frac{3}{4}}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{4} \right)} & \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{4} \right)} \\ \frac{-\frac{1}{8}}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{4} \right)} & \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{4} \right)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{z - \frac{1}{2}} + 2 \frac{1}{z - \frac{1}{4}} & 4 \frac{1}{z - \frac{1}{2}} - 4 \frac{1}{z - \frac{1}{4}} \\ -\frac{1}{2} \frac{1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{z - \frac{1}{4}} & 2 \frac{1}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{z - \frac{1}{4}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces, por la ecuación (7.35), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \mathfrak{Z}_I^{-1} \{ (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \} \\ &= \mathfrak{Z}_I^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{z}{z - \frac{1}{2}} + 2 \frac{z}{z - \frac{1}{4}} & 4 \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - 4 \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \\ -\frac{1}{2} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - \frac{1}{4}} & 2 \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

De los resultados anteriores observamos que cuando todos los valores propios de \mathbf{A} son distintos, el método de descomposición espectral es el más eficiente para evaluar \mathbf{A}^n en términos computacionales.

7.24. Encuentre \mathbf{A}^n para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

El polinomio característico $c(\lambda)$ de \mathbf{A} es

$$\begin{aligned}
 c(\lambda) &= |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{1}{3} & \lambda - \frac{4}{3} \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{3}\right)
 \end{aligned}$$

De esta manera, los valores propios de \mathbf{A} son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, y por la ecuación (7.33) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} (\mathbf{A} - \frac{1}{3} \mathbf{I}) = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = \frac{1}{\frac{1}{3} - 1} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) = -\frac{3}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

De este modo, por la ecuación (7.34) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^n &= (1)^n \mathbf{E}_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

7.25. Encuentre \mathbf{A}^n para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico $c(\lambda)$ de \mathbf{A} es

$$c(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2$$

De esta forma, los valores propios de \mathbf{A} son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Utilizaremos el teorema de Cayley-Hamilton para evaluar \mathbf{A}^n . Por la ecuación (7.27) tenemos que

$$\mathbf{A}^n = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_0 + 2b_1 & b_1 \\ 0 & b_0 + 2b_1 \end{bmatrix}$$

donde b_0 y b_1 están determinadas al establecer $\lambda = 2$ en las siguientes ecuaciones [apéndice A, ecuaciones (A.59) y (A.60)]:

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 \lambda &= \lambda^n \\ b_1 &= n \lambda^{n-1} \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} b_0 + 2b_1 &= 2^n \\ b_1 &= n 2^{n-1} \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$b_0 = (1-n)2^n \quad b_1 = n 2^{n-1}$$

y

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

7.26. Considere la matriz \mathbf{A} en el problema 7.25. Se descompone \mathbf{A} como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Demuestre que $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$.
- Demuestre que \mathbf{D} y \mathbf{N} conmutan, es decir, $\mathbf{DN} = \mathbf{ND}$.
- Mediante los resultados de los incisos a) y b), encuentre \mathbf{A}^n .

a) Por multiplicación simple podemos observar que

$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

b) Puesto que la matriz diagonal \mathbf{D} puede expresarse como $2\mathbf{I}$, tenemos que

$$\mathbf{DN} = 2\mathbf{IN} = 2\mathbf{N} = 2\mathbf{NI} = \mathbf{N}(2\mathbf{I}) = \mathbf{ND}$$

es decir, \mathbf{D} y \mathbf{N} conmutan.

c) Por medio de la expansión binomial y el resultado del inciso b) podemos escribir

$$(\mathbf{D} + \mathbf{N})^n = \mathbf{D}^n + n\mathbf{D}^{n-1}\mathbf{N} + \frac{n(n-1)}{2!}\mathbf{D}^{n-2}\mathbf{N}^2 + \dots + \mathbf{N}^n$$

Puesto que $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{N}^k = \mathbf{0}$ para $k \geq 2$, y tenemos que

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{D} + \mathbf{N})^n = \mathbf{D}^n + n\mathbf{D}^{n-1}\mathbf{N}$$

De este modo [véase el apéndice A, ecuación (A.43)],

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n + n \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que es el mismo resultado obtenido en el problema 7.25.

Observe que una matriz cuadrada \mathbf{N} se denomina *nilpotente de índice r* si $\mathbf{N}^{r-1} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{N}^r = \mathbf{0}$.

7.27. El polinomio mínimo $m(\lambda)$ de \mathbf{A} es el polinomio de orden mínimo que tiene 1 como coeficiente principal de modo que $m(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Encuentre el polinomio mínimo $m(\lambda)$ de \mathbf{A} .
 - b) Por medio del resultado del inciso a) encuentre \mathbf{A}^n .
- a) El polinomio característico $c(\lambda)$ de \mathbf{A} es

$$c(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & -1 \\ 0 & -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 2)^2$$

De este modo, los valores propios de \mathbf{A} son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Considere

$$m(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = \lambda^2 + \lambda - 6$$

Ahora

$$m(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

De esta forma, el polinomio mínimo de \mathbf{A} es

$$m(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = \lambda^2 + \lambda - 6$$

- b) Del resultado del inciso a) observamos que \mathbf{A}^n puede expresarse como una combinación lineal sólo de \mathbf{I} y \mathbf{A} , aun cuando el orden de \mathbf{A} es 3. Así, de manera semejante al resultado del teorema de Cayley-Hamilton, tenemos que

$$\mathbf{A}^n = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_0 & & \\ -\frac{1}{8}b_1 & b_0 + \frac{3}{4}b_1 & \\ & & \end{bmatrix}$$

donde b_0 y b_1 se determinan al establecer $\lambda = -3$ y $\lambda = 2$ en la ecuación

$$b_0 + b_1 \lambda = \lambda^n$$

De esta manera,

$$b_0 - 3b_1 = (-3)^n$$

$$b_0 + 2b_1 = 2^n$$

de donde obtenemos

$$b_0 = \frac{2}{5}(-3)^n + \frac{3}{5}(2)^n \quad b_1 = -\frac{1}{5}(-3)^n + \frac{1}{5}(2)^n$$

y

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} (2)^n & & \\ 0 & \frac{4}{5}(-3)^n + \frac{1}{5}(2)^n & -\frac{1}{5}(-3)^n + \frac{1}{5}(2)^n \\ 0 & -\frac{4}{5}(-3)^n + \frac{4}{5}(2)^n & \frac{1}{5}(-3)^n + \frac{4}{5}(2)^n \end{bmatrix}$$

$$= (-3)^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + (2)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

7.28. Por medio del método de descomposición espectral, evalúe \mathbf{A}^n para la matriz \mathbf{A} en el problema 7.27.

Puesto que el polinomio mínimo de A es

$$m(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

lo que contiene únicamente factores simples, podemos aplicar el método de descomposición espectral para evaluar A^n . De esta manera, por la ecuación (7.33) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = \frac{1}{-3 - 2} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \\ &= -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = \frac{1}{2 - (-3)} (\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Así, por la ecuación (7.34) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= (-3)^n \mathbf{E}_1 + (2)^n \mathbf{E}_2 \\ &= (-3)^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + (2)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2)^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5}(-3)^n + \frac{1}{5}(2)^n & -\frac{1}{5}(-3)^n + \frac{1}{5}(2)^n \\ 0 & -\frac{4}{5}(-3)^n + \frac{4}{5}(2)^n & \frac{1}{5}(-3)^n + \frac{4}{5}(2)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que es el mismo resultado obtenido en el problema 7.27b).

7.29. Considere el sistema de tiempo discreto en el problema 7.7. Supongamos que el sistema está inicialmente relajado.

- Mediante la representación en el espacio de estado encuentre la respuesta al escalón unitario del sistema.
- Encuentre la función del sistema $H(z)$.
- Del resultado del problema 7.7 tenemos que

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n]$$

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n] + dx[n]$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad d = 1$$

Al establecer $\mathbf{q}[0] = \mathbf{0}$ y $x[n] = u[n]$ en la ecuación (7.25), la respuesta al escalón unitario $s[n]$ está dada por

$$s[n] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1-k} \mathbf{b}u[k] + du[n] \quad (7.116)$$

Ahora, del problema 7.20 tenemos que

$$\mathbf{A}^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{cA}^{n-1-k}\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 3 \\ -\frac{1}{4} & 4 \end{bmatrix} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1-k} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 3 \\ -\frac{1}{4} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1-k} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 3 \\ -\frac{1}{4} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1-k} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} s[n] &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \right] + 1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} 2^k - \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} 4^k + 1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1-2^n}{1-2} \right) - \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1-4^n}{1-4} \right) + 1 \\ &= -2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{3} + 1 \\ &= \frac{8}{3} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

el cual es el mismo resultado obtenido en el problema 4.32c).

b) Por la ecuación (7.44), la función del sistema $H(z)$ está dada por

$$H(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d$$

Ahora

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ \frac{1}{8} & z - \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \begin{bmatrix} z - \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{8} & z \end{bmatrix}$$

Así

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 3 \\ -\frac{1}{8} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{8} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{-\frac{1}{8} + \frac{3}{4}z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} + 1 = \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \end{aligned}$$

el cual es el mismo resultado obtenido en el problema 4.32a).

7.30. Considere el sistema LIT de tiempo discreto descrito por

$$\mathbf{q}[n + 1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n]$$

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n] + dx[n]$$

a) Demuestre que la respuesta al impulso unitario $h[n]$ del sistema está dada por

$$h[n] = \begin{cases} d & n = 0 \\ \mathbf{cA}^{n-1}\mathbf{b} & n > 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (7.117)$$

b) Por medio de la ecuación (7.117), encuentre la respuesta al impulso unitario $h[n]$ del sistema en el problema 7.29.

a) Al establecer que $\mathbf{q}[0] = \mathbf{0}$, $x[k] = \delta[k]$ y $y[n] = \delta[n]$ en la ecuación (7.25) obtenemos

$$h[n] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{cA}^{n-1-k}\mathbf{b}\delta[k] + d\delta[n] \quad (7.118)$$

Observe que la suma en la ecuación (7.118) no tiene términos para $n = 0$ y que el primer término es $\mathbf{cA}^{n-1}\mathbf{b}$ para $n > 0$. El segundo término del lado derecho de la ecuación (7.118) es igual a d para $n = 0$ y cero de otra manera. De esta forma, concluimos que

$$h[n] = \begin{cases} d & n = 0 \\ \mathbf{cA}^{n-1}\mathbf{b} & n > 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

b) Del resultado del problema 7.29 tenemos que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad d = 1$$

$$y \quad \mathbf{cA}^{n-1}\mathbf{b} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad n \geq 1$$

Así, por la ecuación (7.117), $h[n]$ es

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} & n \geq 1 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

el cual es el mismo resultado obtenido en el problema 4.32b).

7.31. Utilice el método de espacio de estado para resolver la ecuación en diferencias [problema 4.38b)].

$$3y[n] - 4y[n-1] + y[n-2] = x[n] \quad (7.119)$$

con $x[n] = (1/2)^n u[n]$ y $y[-1] = 1$, $y[-2] = 2$.

Si reescribimos la ecuación (7.119), tenemos que

$$y[n] - \frac{4}{3}y[n-1] + \frac{1}{3}y[n-2] = \frac{1}{3}x[n]$$

Sean $q_1[n] = y[n-2]$ y $q_2[n] = y[n-1]$. Entonces

$$q_1[n+1] = q_2[n]$$

$$q_2[n+1] = -\frac{1}{3}q_1[n] + \frac{4}{3}q_2[n] + \frac{1}{3}x[n]$$

$$y[n] = -\frac{1}{3}q_1[n] + \frac{4}{3}q_2[n] + \frac{1}{3}x[n]$$

En forma matricial

$$\mathbf{q}_1[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n]$$

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n] + dx[n]$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad d = \frac{1}{3}$$

y

$$\mathbf{q}[0] = \begin{bmatrix} q_1[0] \\ q_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[-2] \\ y[-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, por la ecuación (7.25)

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{A}^n\mathbf{q}[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1-k}\mathbf{b}x[k] + dx[n] \quad n > 0$$

Ahora, del resultado del problema 7.24 tenemos que

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{c}\mathbf{A}^n\mathbf{q}[0] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1-k}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-k} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{18} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-k}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-k} \right] \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \left[\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \frac{3}{2}} \right] + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad n > 0 \end{aligned}$$

que es el mismo resultado obtenido en el problema 4.38b).

7.32. Considere el sistema LIT de tiempo discreto mostrado en la figura 7-19.

- ¿Es el sistema asintóticamente estable?
- Encuentre la función del sistema $H(z)$.
- ¿Es estable el sistema en el sentido BIBO?

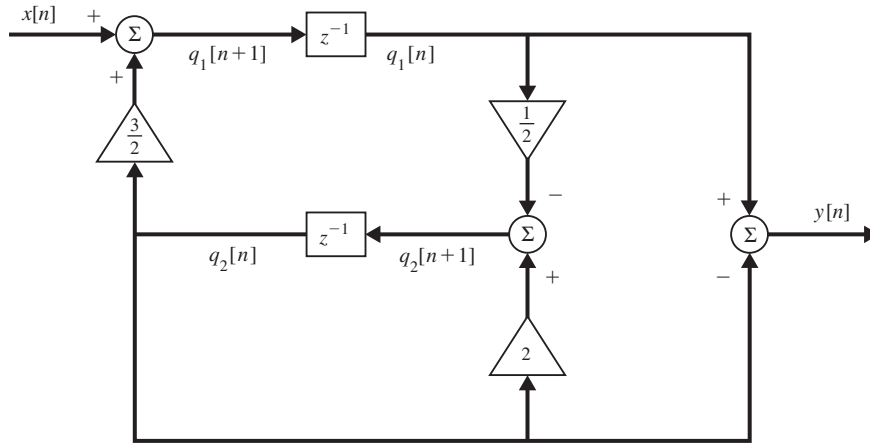


Figura 7-19

- De la figura 7-19, y al seleccionar las variables de estado $q_1[n]$ y $q_2[n]$ como se muestra, obtenemos

$$q_1[n+1] = \frac{3}{2}q_2[n] + x[n]$$

$$q_2[n+1] = -\frac{1}{2}q_1[n] + 2q_2[n]$$

$$y[n] = q_1[n] - q_2[n]$$

En forma matricial

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n]$$

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n]$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1]$$

Ahora

$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2) + \frac{3}{4} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)$$

De este modo, los valores propios de \mathbf{A} son $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. Puesto que $|\lambda_2| > 1$, el sistema no es asintóticamente estable.

- Por la ecuación (7.44), la función del sistema $H(z)$ está dada por

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} z & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & z-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{3}{2}\right)} [1 \quad -1] \begin{bmatrix} z-2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{z - \frac{3}{2}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$$

c) Observe que existe cancelación de polo-cero en $H(z)$ para $z = 3/2$. De esta manera, el único polo de $H(z)$ es $1/2$, el cual reside dentro del círculo unitario del plano z . Por consiguiente, el sistema es estable en el sentido BIBO.

Observe que aun cuando el sistema es estable en el sentido BIBO, es esencialmente inestable si no se encuentra relajado de manera inicial.

7.33. Considere un sistema LIT de tiempo discreto de N -ésimo orden con la ecuación de estado

$$\mathbf{q}[n + 1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n]$$

Se dice que este sistema es *controlable* si es posible encontrar una sucesión de N muestras de entrada $x[n_0]$, $x[n_0 + 1]$, . . . , $x[n_0 + N - 1]$ tales que llevarán al sistema desde $\mathbf{q}[n_0] = \mathbf{q}_0$ a $\mathbf{q}[n_0 + N] = \mathbf{q}_1$, mientras que \mathbf{q}_0 y \mathbf{q}_1 son cualquier estado finito. Demuestre que el sistema es controlable si la *matriz de controlabilidad* definida por

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}] \tag{7.120}$$

tiene rango N .

Supongamos que $n_0 = 0$ y $\mathbf{q}[0] = \mathbf{0}$. Entonces, por la ecuación (7.23), tenemos que

$$\mathbf{q}[N] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-1-k} \mathbf{b}x[k] \tag{7.121}$$

lo que puede volver a escribirse como

$$\mathbf{q}[N] = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} x[N-1] \\ x[N-1] \\ \vdots \\ x[0] \end{bmatrix} \tag{7.122}$$

De esta forma, si $\mathbf{q}[N]$ se define como un vector N -dimensional arbitrario y también tiene una sucesión de entrada distinta de cero, como se requiere para la controlabilidad, la matriz de coeficientes en la ecuación (7.122) debe ser no singular; es decir, la matriz

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}]$$

debe tener rango N .

7.34. Considere un sistema LIT de tiempo discreto de N -ésimo orden con una representación en el espacio de estado

$$\mathbf{q}[n + 1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n]$$

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n]$$

Se dice que el sistema es *observable* si, al comenzar con un índice de tiempo arbitrario n_0 , es posible determinar el estado $\mathbf{q}[n_0] = \mathbf{q}_0$ a partir de la secuencia de salida $y[n_0]$, $y[n_0 + 1]$, . . . , $y[n_0 + N - 1]$. Demuestre que el sistema es observable si la *matriz de observabilidad* definida por

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{N-1} \end{bmatrix} \tag{7.123}$$

tiene rango N .

Supongamos que $n_0 = 0$ y $x[n] = 0$. Entonces, por la ecuación (7.25), la salida $y[n]$ para $n = 0, 1, \dots, N - 1$, con $x[n] = 0$, está dada por

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{A}^n\mathbf{q}[0] \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \tag{7.124}$$

$$\begin{aligned}
 o \quad & y[0] = \mathbf{c}\mathbf{q}[0] \\
 & y[1] = \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{q}[0] \\
 & \vdots \\
 & y[N-1] = \mathbf{c}\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{q}[0]
 \end{aligned} \tag{7.125}$$

Al reescribir la ecuación (7.125) como una ecuación matricial obtenemos

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{q}[0] \tag{7.126}$$

De esta forma, para encontrar una solución única para $\mathbf{q}[0]$, la matriz de coeficientes de la ecuación (7.126) debe ser no singular; es decir, la matriz

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{N-1} \end{bmatrix}$$

debe tener rango N .

7.35. Considere el sistema en el problema 7.7.

- ¿El sistema es controlable?
 - ¿El sistema es observable?
 - Encuentre la función del sistema $H(z)$.
- a) Del resultado del problema 7.7 tenemos que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad d = 1$$

Ahora

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

y por la ecuación (7.120), la matriz de controlabilidad es

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

y $|\mathbf{M}_c| = -1 \neq 0$. De este modo, su rango es 2, y, por consiguiente, el sistema es controlable.

b) De manera semejante,

$$\mathbf{c}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{32} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}$$

y, por la ecuación (7.123), la matriz de observabilidad es

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{32} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}$$

y $|\mathbf{M}_o| = -\frac{1}{64} \neq 0$. De este modo, su rango es 2, y, por consiguiente, el sistema es observable.

c) Por la ecuación (7.44), la función del sistema $H(z)$ está dada por

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 3 \\ \frac{1}{8} & z - \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \\
 &= \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 3 \\ \frac{1}{8} & z - \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \\
 &= \frac{\frac{3}{4}z - \frac{1}{8}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} + 1 = \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}
 \end{aligned}$$

7.36. Considere el sistema en el problema 7.7. Suponga que

$$\mathbf{q}[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre $x[0]$ y $x[1]$ tales que $\mathbf{q}[2] = \mathbf{0}$.

De la ecuación (7.23) tenemos que

$$\mathbf{q}[2] = \mathbf{A}^2\mathbf{q}[0] + \mathbf{A}\mathbf{b}x[0] + \mathbf{b}x[1] = \mathbf{A}^2\mathbf{q}[0] + [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} x[1] \\ x[0] \end{bmatrix}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[0] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{7}{16} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] + \frac{3}{4}x[0] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos $x[0] = -\frac{3}{4}x[1] = \frac{1}{8}$.

7.37. Considere el sistema en el problema 7.7. Observamos que $y[0] = 1$ y que $y[1] = 0$ con $x[0] = x[1] = 0$. Encuentre el estado inicial $\mathbf{q}[0]$.

Mediante la ecuación (7.125) tenemos que $\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{q}[0]$

Así,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{32} & \frac{7}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[0] \\ q_2[0] \end{bmatrix}$$

Cuando resolvemos para $q_1[0]$ y $q_2[0]$, obtenemos

$$\mathbf{q}[0] = \begin{bmatrix} q_1[0] \\ q_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{32} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 6 \end{bmatrix}$$

7.38. Considere el sistema en el problema 7.32.

- a) ¿El sistema es controlable?
b) ¿El sistema es observable?

a) Del resultado del problema 7.32 tenemos que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1]$$

Ahora

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y, por la ecuación (7.120), la matriz de controlabilidad es

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y $|\mathbf{M}_c| = -\frac{1}{2} \neq 0$. De este modo, su rango es 2, y, por consiguiente, el sistema es controlable.

b) De modo similar,

$$\mathbf{cA} = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y, por la ecuación (7.123), la matriz de observabilidad es

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y $|\mathbf{M}_o| = 0$. De esta forma, su rango es menor que 2, y, por consiguiente, el sistema es no observable.

Observe que, del resultado del problema 7.32b), la función del sistema $H(z)$ tiene cancelación de polo-cero. Si $H(z)$ tiene cancelación de polo-cero, entonces el sistema no puede ser controlable ni observable.

SOLUCIONES DE ECUACIONES DE ESTADO PARA SISTEMAS LIT DE TIEMPO CONTINUO

7.39. Encuentre $e^{\mathbf{A}t}$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

por medio del método del teorema de Cayley-Hamilton.

En primer lugar, encontramos el polinomio característico $c(\lambda)$ de \mathbf{A} .

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 6 & \lambda + 5 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) \end{aligned}$$

De esta forma, los valores propios de \mathbf{A} son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -3$. Por consiguiente, por las ecuaciones (7.66) y (7.67) tenemos que

$$e^{\mathbf{A}t} = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ -6b_1 & b_0 - 5b_1 \end{bmatrix}$$

y b_0 y b_1 son las soluciones de

$$\begin{aligned} b_0 - 2b_1 &= e^{-2t} \\ b_0 - 3b_1 &= e^{-3t} \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$b_0 = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \quad b_1 = e^{-2t} - e^{-3t}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.40. Repita el problema 7.39 por medio del método de diagonalización.

Sea \mathbf{x} un vector propio de \mathbf{A} asociado con λ . Entonces

$$[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Para $\lambda = \lambda_1 = -2$ tenemos que

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las soluciones de este sistema están dadas por $x_2 = -2x_1$. De este modo, los vectores propios asociados con λ_1 son aquellos vectores de la forma

$$\mathbf{x}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{con } \alpha \neq 0$$

Para $\lambda = \lambda_2 = -3$ tenemos que

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las soluciones de este sistema están dadas por $x_2 = -3x_1$. De este modo, los vectores propios asociados con λ_2 son aquellos vectores de la forma

$$\mathbf{x}_2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{con } \beta \neq 0$$

Sea $\alpha = \beta = 1$ en las expresiones anteriores y sea

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{P}^{-1} = - \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

y por la ecuación (7.68) obtenemos

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.41. Repita el problema 7.39 por medio del método de descomposición espectral.

Puesto que todos los valores propios de \mathbf{A} son diferentes, por la ecuación (7.33) tenemos

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = \mathbf{A} + 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = -(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces por la ecuación (7.70) obtenemos

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{-2t} \mathbf{E}_1 + e^{-3t} \mathbf{E}_2 = e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.42. Repita el problema 7.39 mediante el método de la transformada de Laplace.

En primer lugar, debemos hallar $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ -\frac{6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \\ -\frac{6}{s+2} + \frac{6}{s+3} & -\frac{2}{s+2} + \frac{3}{s+3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces, por la ecuación (7.71) obtenemos

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

De nuevo notamos que cuando todos los valores propios de \mathbf{A} son distintos, el método de descomposición espectral es el más eficiente para evaluar a $e^{\mathbf{A}t}$ en términos computacionales.

7.43. Encuentre $e^{\mathbf{A}t}$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico $c(\lambda)$ de \mathbf{A} es

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3) \end{aligned}$$

De esta manera, los valores propios de \mathbf{A} son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -3$. Puesto que todos los valores propios de \mathbf{A} son distintos, por la ecuación (7.33) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\frac{1}{2}(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_2 &= -\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{I}) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces, por la ecuación (7.70) obtenemos

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= e^{-t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.44. Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Demuestre que \mathbf{A} es nilpotente de índice 3.
 b) Mediante el resultado del inciso a) encuentre $e^{\mathbf{A}t}$.

a) Por multiplicación directa tenemos que

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De este modo, \mathbf{A} es nilpotente de índice 3.

b) Por la definición (7.53) y el resultado del inciso a)

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2t & t - 3t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.45. Encuentre $e^{\mathbf{A}t}$ para la matriz \mathbf{A} en el problema 7.44 mediante el método del teorema de Cayley-Hamilton.

En primer lugar, encontramos el polinomio característico $c(\lambda)$ de \mathbf{A} .

$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 0 & \lambda & -3 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3$$

De esta manera, $\lambda = 0$ son los valores propios de \mathbf{A} con multiplicidad 3. Por la ecuación (7.66) tenemos que

$$e^{\mathbf{A}t} = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} + b_2\mathbf{A}^2$$

donde b_0, b_1 y b_2 están determinados al establecer $\lambda = 0$ en las siguientes ecuaciones [apéndice A, ecuaciones (A.59) y (A.60)]:

$$\begin{aligned} b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 &= e^{\lambda t} \\ b_1 + 2b_2\lambda &= te^{\lambda t} \\ 2b_2 &= t^2e^{\lambda t} \end{aligned}$$

De esta forma,
$$b_0 = 1 \quad b_1 = t \quad b_2 = \frac{t^2}{2}$$

Por consiguiente,
$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2$$

el cual es el mismo resultado obtenido en el problema 7.44b).

7.46. Demuestre que

$$e^{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$$

suponiendo que \mathbf{A} y \mathbf{B} conmuten; es decir, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Por la ecuación (7.53)

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \mathbf{B}^m \right) \\
&= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \dots \right) \left(\mathbf{I} + \mathbf{B} + \frac{1}{2!} \mathbf{B}^2 + \dots \right) \\
&= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \frac{1}{2!} \mathbf{B}^2 + \dots \\
e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} &= \mathbf{I} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 + \dots \\
&= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{AB} + \frac{1}{2} \mathbf{BA} + \frac{1}{2!} \mathbf{B}^2 + \dots \\
\text{y} \quad e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} - e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) + \dots
\end{aligned}$$

De este modo, si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, entonces

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$$

7.47. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora descomponemos \mathbf{A} como

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{N}$$

donde

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Demuestre que la matriz \mathbf{N} es nilpotente de índice 3.
 - Demuestre que $\mathbf{\Lambda}$ y \mathbf{N} conmutan; esto es, $\mathbf{\Lambda N} = \mathbf{N\Lambda}$.
 - Mediante los resultados de los incisos a) y b) encuentre $e^{\mathbf{A}t}$.
- a) Por multiplicación directa tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}^2 = \mathbf{N N} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{N}^3 = \mathbf{N}^2 \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De esta forma, \mathbf{N} es nilpotente de índice 3.

- b) Puesto que la matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$ puede expresarse como $2\mathbf{I}$, tenemos que

$$\mathbf{\Lambda N} = 2\mathbf{I N} = 2\mathbf{N} = 2\mathbf{N I} = \mathbf{N(2I)} = \mathbf{N\Lambda}$$

es decir, $\mathbf{\Lambda}$ y \mathbf{N} conmutan.

- c) Puesto que $\mathbf{\Lambda}$ y \mathbf{N} conmutan, entonces por el resultado del problema 7.46

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{N})t} = e^{\mathbf{\Lambda}t} e^{\mathbf{N}t}$$

Ahora [véase el apéndice A, ecuación (A.49)]

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \mathbf{I}$$

y por medio de una justificación semejante a la del problema 7.44b), tenemos que

$$e^{\mathbf{N}t} = \mathbf{I} + t\mathbf{N} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{N}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De este modo,

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{N}t} = e^{2t} \mathbf{I} e^{\mathbf{N}t} = e^{2t} e^{\mathbf{N}t} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.48. Mediante el método de variables de estado, resuelva la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t) \tag{7.127}$$

con las condiciones iniciales dadas por $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ y $x(t) = e^{-t}u(t)$ (problema 3.38).

Sean las variables de estado $q_1(t)$ y $q_2(t)$ $q_1(t) = y(t)$ $q_2(t) = y'(t)$

Entonces la representación en el espacio de estado de la ecuación (7.127) está dada por [ecuación (7.19)]

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{q}(t)$$

con $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c} = [1 \ 0]$ $\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} q_1[0] \\ q_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

De esta forma, por la ecuación (7.65)

$$y(t) = \mathbf{c}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(0) + \int_0^t \mathbf{c}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}x(\tau) d\tau$$

con $d = 0$. Ahora, del resultado del problema 7.39,

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{c}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(0) = [1 \ 0] \left\{ e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= 7e^{-2t} - 5e^{-3t}$$

$$\mathbf{c}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b} = [1 \ 0] \left\{ e^{-2(t-\tau)} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3(t-\tau)} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}$$

Así,

$$y(t) = 7e^{-2t} - 5e^{-3t} + \int_0^t (e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)})e^{-\tau} d\tau$$

$$= 7e^{-2t} - 5e^{-3t} + e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau - e^{-3t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t} + 6e^{-2t} - \frac{9}{2}e^{-3t} \quad t > 0$$

se obtiene el mismo resultado que en el problema 3.38.

7.49. Considere la red del circuito mostrada en la figura 7-20. Los voltajes iniciales a través de los capacitores C_1 y C_2 son de $1/2$ V y de 1 V, respectivamente. Mediante el método de variables de estado, encuentre los voltajes a través de estos capacitores para $t > 0$. Suponga que $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \ \Omega$ y $C_1 = C_2 = 1$ F.

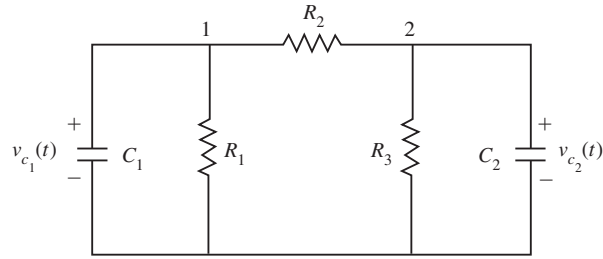


Figura 7-20

Sean las variables de estado $q_1(t)$ y $q_2(t)$ $q_1(t) = v_{C_1}(t)$ $q_2(t) = v_{C_2}(t)$

Cuando aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff en los nodos 1 y 2 obtenemos

$$C_1 \dot{q}_1(t) + \frac{q_1(t)}{R_1} + \frac{q_1(t) - q_2(t)}{R_2} = 0$$

$$C_2 \dot{q}_2(t) + \frac{q_2(t)}{R_3} + \frac{q_2(t) - q_1(t)}{R_2} = 0$$

Al sustituir los valores de R_1 , R_2 , R_3 , C_1 y C_2 , y al reacomodar, obtenemos que

$$\dot{q}_1(t) = -2q_1(t) + q_2(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = q_1(t) - 2q_2(t)$$

En forma matricial

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t)$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, por la ecuación (7.63) con $x(t) = 0$ y por medio del resultado del problema 7.43, obtenemos

$$\mathbf{q}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{q}(0) = \left\{ e^{-t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \\ \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

De esta forma, $v_{C_1}(t) = \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}$ y $v_{C_2}(t) = \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-3t}$

7.50. Considere el sistema LIT de tiempo continuo mostrado en la figura 7-21.

- ¿El sistema es asintóticamente estable?
- Encuentre la función del sistema $H(s)$.
- ¿El sistema es estable en el sentido BIBO?

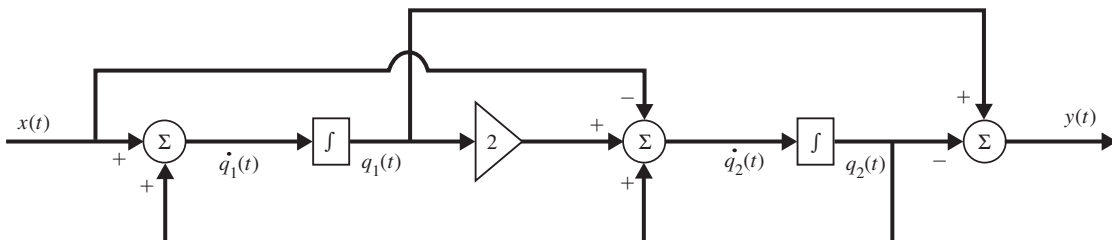


Figura 7-21

a) De la figura 7-21 y cuando seleccionamos las variables de estado $q_1(t)$ y $q_2(t)$ como se muestra, obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= q_2(t) + x(t) \\ \dot{q}_2(t) &= 2q_1(t) + q_2(t) - x(t) \\ y(t) &= q_1(t) - q_2(t)\end{aligned}$$

En forma matricial
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{q}(t)\end{aligned}$$

donde
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1]$$

Ahora
$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

De este modo, los valores propios de \mathbf{A} son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$. Puesto que $\text{Re}\{\lambda_2\} > 0$, el sistema no es asintóticamente estable.

b) Por la ecuación (7.52) la función del sistema $H(s)$ está dada por

$$\begin{aligned}H(s) &= \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s-2)} [1 \quad -1] \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2(s-2)}{(s+1)(s-2)} = \frac{2}{s+1}\end{aligned}$$

c) Observe que hay cancelación de polo-cero en $H(s)$ para $s = 2$. De esta forma, el único polo de $H(s)$ es -1 , el cual está localizado a la izquierda del plano s . Por consiguiente, el sistema es estable en el sentido BIBO.

Otra vez se observa que el sistema es esencialmente inestable si el mismo sistema no se encuentra relajado al inicio.

7.51. Considere un sistema LIT de tiempo continuo de N -ésimo orden con la ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t)$$

Se dice que el sistema es *controlable* si es posible encontrar una entrada $x(t)$ que lleve al sistema desde $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ hasta $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$, en un tiempo finito especificado y si \mathbf{q}_0 y \mathbf{q}_1 son vectores de estado finitos. Demuestre que el sistema es controlable si la *matriz de controlabilidad* definida por

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}] \tag{7.128}$$

tiene rango N .

Supongamos que $t_0 = 0$ y que $\mathbf{q}[0] = \mathbf{0}$. Entonces, por la ecuación (7.63), tenemos que

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1} \int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}x(\tau) d\tau \tag{7.129}$$

Ahora, por el teorema de Cayley-Hamilton podemos expresar $e^{-\mathbf{A}\tau}$ como

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(\tau) \mathbf{A}^k \tag{7.130}$$

Si sustituimos la ecuación (7.130) en la ecuación (7.129) y reacomodamos los términos obtenemos

$$\mathbf{q}_1 = e^{\mathbf{A}t_1} = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^k \mathbf{b} \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) x(\tau) d\tau \right] \tag{7.131}$$

Sea
$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) x(\tau) d\tau = \beta_k$$

Entonces la ecuación (7.131) puede volver a escribirse como

$$e^{-\mathbf{A}t_1} \mathbf{q}_1 = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^k \mathbf{b} \beta_k$$

$$\text{o} \quad e^{-\mathbf{A}t_1} \mathbf{q}_1 = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{bmatrix} \quad (7.132)$$

Para cualquier estado \mathbf{q}_1 dado podemos determinar de la ecuación (7.132) β_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$) únicas, y, por consiguiente, $x(t)$, si la matriz de coeficientes de la ecuación (7.132) es no singular, es decir, la matriz

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}]$$

tiene rango N .

7.52. Considere un sistema LIT de tiempo continuo de N -ésimo orden, con una representación en el espacio de estado

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{q}(t)$$

Se dice que el sistema es *observable* si cualquier estado inicial $\mathbf{q}(t_0)$ puede determinarse al examinar la salida del sistema $y(t)$ sobre algún periodo finito de tiempo desde t_0 hasta t_1 . Demuestre que el sistema es observable si la *matriz de observabilidad* definida por

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{N-1} \end{bmatrix} \quad (7.133)$$

tiene rango N .

Demostremos esto por contradicción. Supongamos que el rango de \mathbf{M}_o es menor que N . Entonces existe un estado inicial $\mathbf{q}[0] = \mathbf{q}_0 \neq \mathbf{0}$ tal que

$$\mathbf{M}_o \mathbf{q}_0 = 0$$

$$\text{o} \quad \mathbf{c}\mathbf{q}_0 = \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{q}_0 = \cdots = \mathbf{c}\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{q}_0 = 0 \quad (7.134)$$

Ahora en la ecuación (7.65), para $x(t) = 0$ y $t_0 = 0$,

$$y(t) = \mathbf{c}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}_0 \quad (7.135)$$

Sin embargo, por el teorema de Cayley-Hamilton, $e^{\mathbf{A}t}$ puede expresarse como

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(t) \mathbf{A}^k \quad (7.136)$$

Si sustituimos la ecuación (7.136) en la ecuación (7.135) obtenemos

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(t) \mathbf{c}\mathbf{A}^k \mathbf{q}_0 = 0 \quad (7.137)$$

en vista de la ecuación (7.134). De este modo, \mathbf{q}_0 es indistinguible del estado cero, y por consiguiente el sistema es no observable. Por tanto, si el sistema se hará observable, entonces \mathbf{M}_o debe tener rango N .

7.53. Considere el sistema en el problema 7.50.

a) ¿El sistema es controlable?

b) ¿El sistema es observable?

a) Del resultado del problema 7.50 tenemos que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1]$$

Ahora
$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y por la ecuación (7.128) la matriz de controlabilidad es

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y $|\mathbf{M}_c| = 0$. De esta forma, se tiene un rango menor a 2 y, por consiguiente, el sistema es no controlable.

b) De manera semejante,
$$\mathbf{cA} = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = [-2 \quad 0]$$

y por la ecuación (7.133) la matriz de observabilidad es

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

y $|\mathbf{M}_o| = -2 \neq 0$. De esta forma, su rango es 2 y, por consiguiente, el sistema es observable.

Observe del resultado del problema 7.50b) que la función del sistema $H(s)$ tiene cancelación de polo-cero. Como en el caso de tiempo discreto, si $H(s)$ tiene cancelación de polo-cero, entonces el sistema no puede ser controlable ni observable.

7.54. Considere el sistema mostrado en la figura 7-22.

- a) ¿El sistema es controlable?
- b) ¿El sistema es observable?
- c) Encuentre la función del sistema $H(s)$.

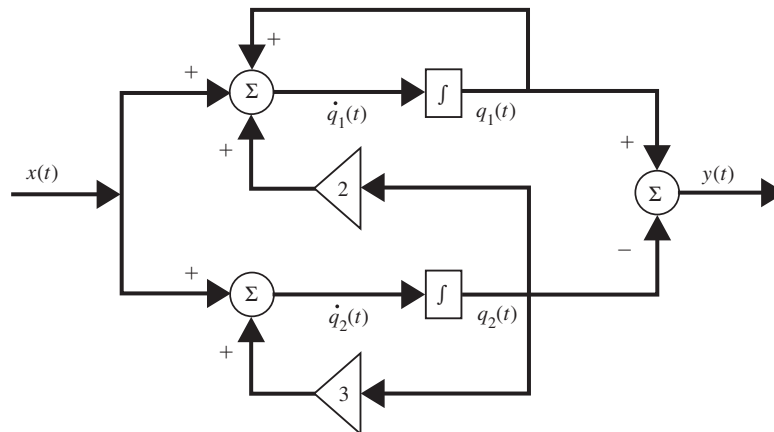


Figura 7-22

a) De la figura 7-22 y seleccionando las variables de estado $q_1(t)$ y $q_2(t)$ como se muestra, tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= q_1(t) + 2q_2(t) + x(t) \\ \dot{q}_2(t) &= 3q_2(t) + x(t) \\ y(t) &= q_1(t) - q_2(t) \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1(t) &= \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{q}(t) \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1]$$

Ahora
$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y, por la ecuación (7.128), la matriz de controlabilidad es

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

y $|\mathbf{M}_c| = 0$. De este modo, su rango es menor de 2 y, por consiguiente, el sistema es no controlable.

b) De modo semejante,
$$\mathbf{cA} = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = [1 \quad -1]$$

y, por la ecuación (7.133), la matriz de observabilidad es

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y $|\mathbf{M}_o| = 0$. De esta manera, su rango es menor que 2 y, por consiguiente, el sistema es no observable.

c) Por la ecuación (7.52), la función del sistema $H(s)$ está dada por

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \\ &= [1 \quad -1] \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s-3)} [1 \quad -1] \begin{bmatrix} s-3 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Observe que el sistema es tanto no controlable como no observable.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

7.55. Considere el sistema LIT de tiempo discreto mostrado en la figura 7-23. Encuentre la representación en el espacio de estado del sistema con las variables de estado $q_1[n]$ y $q_2[n]$ como se muestra.

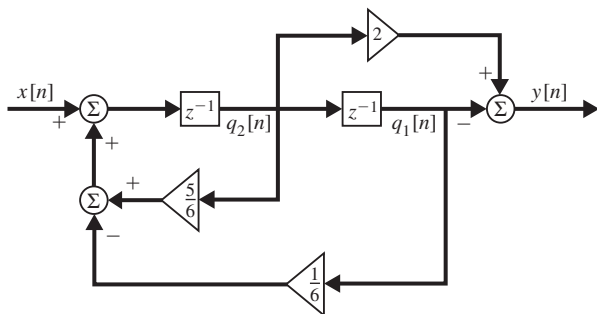


Figura 7-23

7.56. Considere el sistema LIT de tiempo discreto mostrado en la figura 7-24. Encuentre la representación del espacio de estado del sistema con las variables de estado $q_1[n]$ y $q_2[n]$ como se muestra.

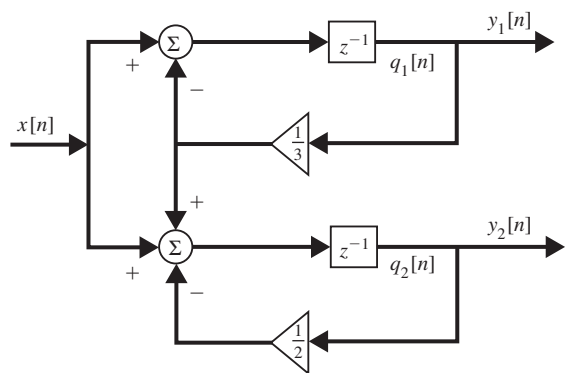


Figura 7-24

7.57. Considere el sistema LIT de tiempo discreto mostrado en la figura 7-25.

- Encuentre la representación en el espacio de estado del sistema con las variables de estado $q_1[n]$ y $q_2[n]$ como se muestra.
- Encuentre la función del sistema $H(z)$.

- c) Encuentre la ecuación en diferencias que relacione $x[n]$ y $y[n]$.

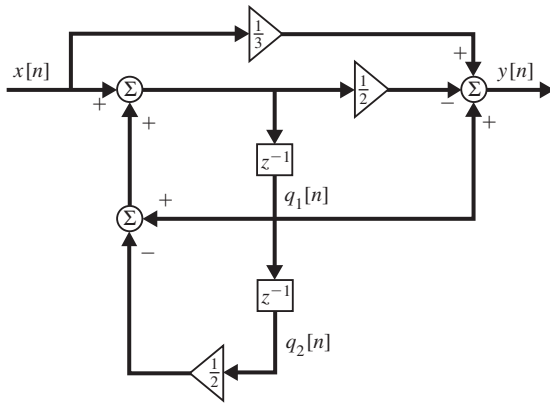


Figura 7-25

- 7.58. Un sistema LIT de tiempo discreto está especificado mediante la ecuación en diferencias

$$y[n] + y[n - 1] - 6y[n - 2] = 2x[n - 1] + x[n - 2]$$

Escriba las dos formas canónicas de representación de estado para el sistema.

- 7.59. Encuentre \mathbf{A}^n para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

- a) Mediante el método del teorema de Cayley-Hamilton.
b) Por medio del método de diagonalización.

- 7.60. Encuentre \mathbf{A}^n para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Mediante el método de descomposición espectral.
b) Con el método de la transformada z .

- 7.61. Dada una matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- a) Encuentre el polinomio mínimo $m(\lambda)$ de \mathbf{A} .
b) Mediante el resultado para el inciso a), encuentre \mathbf{A}^n .

- 7.62. Considere el sistema LIT de tiempo discreto con la siguiente representación en el espacio de estado:

$$\mathbf{q}[n + 1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{q}[n]$$

- a) Encuentre la función del sistema $H(z)$.
b) ¿El sistema es controlable?
c) ¿El sistema es observable?

- 7.63. Considere el sistema LIT de tiempo discreto en el problema 7.55.

- a) ¿Es el sistema asintóticamente estable?
b) ¿El sistema es estable en sentido BIBO?
c) ¿El sistema es controlable?
d) ¿El sistema es observable?

- 7.64. La controlabilidad y observabilidad de un sistema LIT pueden investigarse al diagonalizar la matriz \mathbf{A} del sistema. Un sistema con una representación en el espacio de estado

$$\mathbf{v}[n + 1] = \mathbf{A}\mathbf{v}[n] + \hat{\mathbf{b}}x[n]$$

$$y[n] = \hat{\mathbf{c}}\mathbf{v}[n]$$

(donde \mathbf{A} es una matriz diagonal) es controlable si el vector $\hat{\mathbf{b}}$ no tiene elementos cero, y es observable si el vector $\hat{\mathbf{c}}$ no tiene elementos cero. Considere el sistema LIT de tiempo discreto en el problema 7.55.

- a) Sea $\mathbf{v}[n] = \mathbf{T}\mathbf{q}[n]$. Encuentre la matriz \mathbf{T} tal que la nueva representación en el espacio de estado tenga una matriz del sistema diagonal.
b) Escriba la nueva representación en el espacio de estado del sistema.
c) Por medio del resultado del inciso b), investigue la controlabilidad y la observabilidad del sistema.

- 7.65. Considere la red del circuito mostrado en la figura 7-26. Encuentre una representación en el espacio de estado para la red con las variables de estado $q_1(t) = i_L(t)$, $q_2(t) = v_C(t)$ y las salidas $y_1(t) = i_1(t)$, $y_2(t) = v_C(t)$, suponiendo que $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ y $C = 1 \text{ F}$.

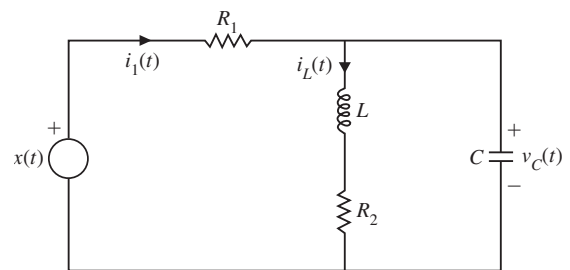


Figura 7-26

- 7.66. Considere el sistema LIT de tiempo continuo mostrado en la figura 7-27.

- a) Encuentre la representación en el espacio de estado del sistema con las variables de estado $q_1(t)$ y $q_2(t)$ como se muestra.
b) ¿Para qué valores de α será el sistema asintóticamente estable?

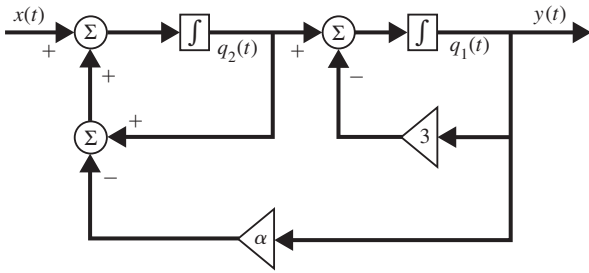


Figura 7-27

7.67. Un sistema LIT de tiempo continuo está descrito por

$$H(s) = \frac{3s^2 - 1}{s^3 + 3s^2 - s - 2}$$

Escriba dos formas canónicas de la representación de estado para el sistema.

7.68. Considere el sistema LIT de tiempo continuo mostrado en la figura 7-28.

- Encuentre la representación en el espacio de estado del sistema con las variables de estado $q_1(t)$ y $q_2(t)$ como se muestra.
- ¿El sistema es asintóticamente estable?
- Encuentre la función del sistema $H(s)$.
- ¿El sistema es estable en el sentido BIBO?

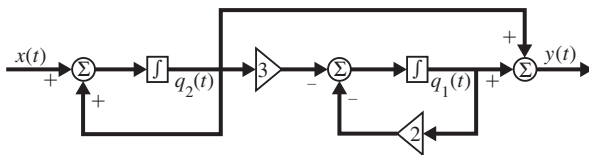


Figura 7-28

7.69. Encuentre e^{At} para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Mediante el método del teorema de Cayley-Hamilton.

b) Por medio del método de descomposición espectral.

7.70. Considere la matriz \mathbf{A} en el problema 7.69. Encuentre e^{-At} y demuestre que $e^{-At} = [e^{At}]^{-1}$.

7.71. Encuentre e^{At} para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

- Por medio del método de diagonalización.
- Con el método de la transformada de Laplace.

7.72. Considere la red de circuito en el problema 7.65 (figura 7-26). Encuentre $v_C(t)$ si $x(t) = u(t)$ bajo una condición inicialmente relajada.

7.73. Mediante el método del espacio de estado, resuelva la ecuación diferencial lineal

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

7.74. Como en el caso de tiempo discreto, la controlabilidad y la observabilidad de un sistema LIT de tiempo continuo pueden investigarse al diagonalizar la matriz \mathbf{A} del sistema. Un sistema con la representación en el espacio de estado

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \hat{\mathbf{b}}x(t)$$

$$y(t) = \hat{\mathbf{c}}\mathbf{v}(t)$$

donde \mathbf{A} es una matriz diagonal, es controlable si el vector $\hat{\mathbf{b}}$ no tiene elementos cero, y es observable si el vector $\hat{\mathbf{c}}$ no tiene elementos cero. Considere el sistema de tiempo continuo en el problema 7.50.

- Encuentre en una nueva representación en el espacio de estado del sistema al diagonalizar la matriz \mathbf{A} del sistema.
- ¿El sistema es controlable?
- ¿El sistema es observable?

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

7.55.
$$\mathbf{q}[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [-1 \quad 2] \mathbf{q}[n]$$

7.56.
$$\mathbf{q}[n+1] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}[n]$$

7.57. a)
$$\mathbf{q}[n+1] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] - \frac{1}{6} x[n]$$

b)
$$H(z) = -\frac{1}{6} \frac{z^2 - 4z - 1}{z^2 - z + \frac{1}{2}}$$

c)
$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{2} y[n-2]$$

$$= -\frac{1}{6} x[n] + \frac{2}{3} x[n-1] + \frac{1}{6} x[n-2]$$

7.58. (1) $\mathbf{q}[n+1] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$
 $y[n] = [1 \ 0] \mathbf{q}[n]$

(2) $\mathbf{v}[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$
 $y[n] = [1 \ 2] \mathbf{v}[n]$

7.59. $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} -2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n & 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{bmatrix}$

7.60. $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} (3)^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}(2)^n + \frac{4}{5}(-3)^n & \frac{1}{5}(2)^n - \frac{1}{5}(-3)^n \\ 0 & \frac{4}{5}(2)^n - \frac{4}{5}(-3)^n & \frac{4}{5}(2)^n - \frac{1}{5}(-3)^n \end{bmatrix}$

7.61. a) $m(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 3) = \lambda^2 - 9$

b) $\mathbf{A}^n = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3^n + 2(-3)^n & 3^n - (-3)^n & 3^n - (-3)^n \\ 3^n - (-3)^n & 3^n + 2(-3)^n & 3^n - (-3)^n \\ 3^n - (-3)^n & 3^n - (-3)^n & 3^n + 2(-3)^n \end{bmatrix}$

7.62. a) $H(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$

- b) El sistema es controlable.
 c) El sistema es no observable.

- 7.63. a) El sistema es asintóticamente estable.
 b) El sistema es estable en el sentido BIBO.
 c) El sistema es controlable.
 d) El sistema es no observable.

7.64. a) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{v}[n+1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{v}[n] + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} x[n]$

$y[n] = [-1 \ 0] \mathbf{v}[n]$

- c) El sistema es controlable, pero no observable.

7.65. $\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$

$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t)$

7.66. a) $\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$
 $y(t) = [1 \ 0] \mathbf{q}(t)$

- b) $\alpha \geq 4$

7.67. (1) $\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} x(t)$
 $y(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{q}(t)$

(2) $\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$

$y(t) = [-1 \ 0 \ 3] \mathbf{v}(t)$

7.68. a) $\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$

$y(t) = [1 \ 1] \mathbf{q}(t)$

- b) El sistema no es asintóticamente estable.

c) $H(s) = \frac{1}{s+2}$

- d) El sistema es estable en el sentido BIBO.

7.69. $e^{At} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sen t \\ -\sen t & \cos t \end{bmatrix}$

7.70. $e^{-At} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sen t \\ \sen t & \cos t \end{bmatrix}$

7.71. $e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

7.72. $v_C(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-t} \sen t - e^{-t} \cos t), t > 0$

7.73. $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}, t > 0$

7.74. a) $\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t)$

$y(t) = [2 \ -1] \mathbf{v}(t)$

- b) El sistema es no controlable.
 c) El sistema es observable.

Repaso de teoría de matrices

A.1 NOTACIÓN Y OPERACIONES DE MATRICES

A. DEFINICIONES

1. Una matriz \mathbf{A} de $m \times n$ es un arreglo rectangular de elementos con m renglones (o filas) y n columnas, y se denota como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n} \quad (\text{A.1})$$

Cuando $m = n$, \mathbf{A} se denomina *matriz cuadrada de orden n* .

2. Una matriz de $1 \times n$ se llama *vector renglón n -dimensional*.

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \quad (\text{A.2})$$

Una matriz de $m \times 1$ se denomina *vector columna m -dimensional*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

3. Una matriz *cero* $[\mathbf{0}]$ tiene todos sus elementos iguales a cero.
4. Una matriz *diagonal* \mathbf{D} es cuadrada y todos sus elementos, excepto los de la diagonal principal, son iguales a cero:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

En ocasiones la matriz diagonal \mathbf{D} en la ecuación (A.4) se expresa como

$$\mathbf{D} = \text{diag}(d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n) \quad (\text{A.5})$$

5. La matriz *identidad* (o *unitaria*) \mathbf{I} es diagonal y todos los elementos de su diagonal principal son iguales a 1.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

B. OPERACIONES

Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$, y $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times n}$.

a) Igualdad de dos matrices: $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad (\text{A.7})$

b) Adición: $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\text{A.8})$

c) Multiplicación por un escalar: $\mathbf{B} = \alpha \mathbf{A} \Rightarrow b_{ij} = \alpha a_{ij} \quad (\text{A.9})$

Si $\alpha = -1$, entonces $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$ se denomina *negativa* de \mathbf{A} .

EJEMPLO A.1 Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+0 & 3-1 \\ -1+4 & 0+1 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$-\mathbf{B} = (-1)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-0 & 3+1 \\ -1-4 & 0-1 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Notas:

1. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}$
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
3. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
4. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$
5. $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$
6. $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$
7. $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$
8. $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A} = \beta(\alpha\mathbf{A})$

d) Multiplicación:

Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times p}$ y $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times p}$.

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (\text{A.11})$$

La matriz del producto \mathbf{AB} está definida sólo cuando el número de columnas de \mathbf{A} es igual a la cantidad de renglones de \mathbf{B} . En este caso se dice que \mathbf{A} y \mathbf{B} son *conformables*.

EJEMPLO A.2 Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$\text{Entonces } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0(1) + (-1)3 & 0(2) + (-1)(-1) \\ 1(1) + 2(3) & 1(2) + 2(-1) \\ 2(1) + (-3)3 & 2(2) + (-3)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 0 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$$

pero \mathbf{BA} no está definido.

Adicionalmente, incluso si tanto \mathbf{AB} como \mathbf{BA} están definidos, en general

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad (\text{A.12})$$

EJEMPLO A.3 Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$\text{Entonces } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \neq \mathbf{AB}$$

Como ejemplo del caso donde $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

EJEMPLO A.4 Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\text{Entonces } \mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Notas:

1. $\mathbf{A0} = \mathbf{0A} = \mathbf{0}$
2. $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$
3. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
4. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
5. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC}$
6. $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$

(A.13)

Es importante advertir que $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ no implica necesariamente que $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ o que $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

EJEMPLO A.5 Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

$$\text{Entonces } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

A.2 TRANSPUESTA E INVERSA

A. TRANSPUESTA

Sea \mathbf{A} una matriz de $n \times m$. La *transpuesta* de \mathbf{A} , denotada por \mathbf{A}^T , es una matriz de $m \times n$ que se forma al intercambiar los renglones y las columnas de \mathbf{A} .

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \Rightarrow b_{ij} = a_{ji} \quad (\text{A.14})$$

EJEMPLO A.6 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, entonces se dice que \mathbf{A} es *simétrica*, y si $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, se dice que \mathbf{A} es *antisimétrica*.

EJEMPLO A.7 Sea
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces \mathbf{A} es una matriz simétrica y \mathbf{B} es una matriz antisimétrica.

Observe que si una matriz es antisimétrica, entonces todos sus elementos diagonales son iguales a cero.

Notas:

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
 2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
 3. $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$
 4. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
- (A.15)**

B. INVERSAS

Se dice que una matriz \mathbf{A} es *invertible* si existe una matriz \mathbf{B} tal que cumpla con

$$\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I} \quad \text{(A.16a)}$$

La matriz \mathbf{B} se denomina *inversa* de \mathbf{A} y es denotada mediante \mathbf{A}^{-1} . De este modo,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} \quad \text{(A.16b)}$$

EJEMPLO A.8
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De este modo,
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Notas:

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
 2. $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$
 3. $(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}$
 4. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- (A.17)**

Observe que si \mathbf{A} es invertible, entonces $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ puesto que

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{IB} = \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

A.3 INDEPENDENCIA LINEAL Y RANGO

A. INDEPENDENCIA LINEAL

Sea $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n]$, donde \mathbf{a}_i denota el i -ésimo vector columna de \mathbf{A} . Se dice que un conjunto de vectores columna $\mathbf{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ es *linealmente dependiente* si existen números $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$, no todos iguales a cero, tales que

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad \text{(A.18)}$$

Si la ecuación (A.18) se cumple sólo para toda $\alpha_i = 0$, entonces se dice que el conjunto es *linealmente independiente*.

EJEMPLO A.9 Sea
$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Puesto que $2\mathbf{a}_1 + (-3)\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$, \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 y \mathbf{a}_3 son linealmente dependientes. Sea

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\alpha_1 \mathbf{d}_1 + \alpha_2 \mathbf{d}_2 + \alpha_3 \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. De este modo, \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 y \mathbf{d}_3 son linealmente independientes.

B. RANGO DE UNA MATRIZ

El número de vectores columna linealmente independientes en una matriz \mathbf{A} se denomina *rango de columna* de \mathbf{A} , y el número de vectores renglón linealmente independientes en una matriz \mathbf{A} se conoce como *rango de renglón* de \mathbf{A} . Puede demostrarse que

$$\text{Rango de } \mathbf{A} = \text{rango columna de } \mathbf{A} = \text{rango renglón de } \mathbf{A} \quad (\text{A.19})$$

Nota:

Si el rango de una matriz \mathbf{A} de $N \times N$ es N , entonces \mathbf{A} es invertible y \mathbf{A}^{-1} existe.

A.4 DETERMINANTES

A. DEFINICIONES

Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden N . Asociamos \mathbf{A} con un número establecido, conocido como *determinante*, denotado como $\det \mathbf{A}$ o como $|\mathbf{A}|$. Sea \mathbf{M}_{ij} la matriz cuadrada de orden $(N - 1)$ obtenida de \mathbf{A} al eliminar el i -ésimo renglón y la j -ésima columna. El número A_{ij} definido por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{M}_{ij}| \quad (\text{A.20})$$

se conoce como *cofactor* de a_{ij} . Entonces $\det \mathbf{A}$ se obtiene por medio de

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^N a_{ik} A_{ik} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.21a})$$

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^N a_{kj} A_{kj} \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.21b})$$

La ecuación (A.21a) se conoce como *expansión de Laplace* de $|\mathbf{A}|$ a lo largo del i -ésimo renglón, y la ecuación (A.21b) se denomina *expansión de Laplace* de $|\mathbf{A}|$ a lo largo de la j -ésima columna.

EJEMPLO A.10 Para una matriz de 1×1 ,

$$\mathbf{A} = [a_{11}] \rightarrow |\mathbf{A}| = a_{11} \quad (\text{A.22})$$

Para una matriz de 2×2 ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{A.23})$$

Para una matriz de 3×3 ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Mediante las ecuaciones (A.21a) y (A.23), obtenemos

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

B. RANGO DEL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

El *rango del determinante* de una matriz \mathbf{A} se define como el orden de la submatriz cuadrada más grande \mathbf{M} de \mathbf{A} tal que $\det \mathbf{M} \neq 0$. Puede demostrarse que el rango de \mathbf{A} es igual al rango determinante de \mathbf{A} .

EJEMPLO A.11 Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Observe que $|\mathbf{A}| = 0$. Una de las submatrices más grandes cuyo determinante no es igual a cero es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, el rango de la matriz \mathbf{A} es 2. (Véase el ejemplo A.9.)

C. INVERSA DE UNA MATRIZ

Por medio de los determinantes, la inversa de una matriz \mathbf{A} de $N \times N$ puede calcularse como

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A} \tag{A.25}$$

y

$$\text{adj } \mathbf{A} = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{N1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1N} & A_{2N} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \tag{A.26}$$

donde A_{ij} es el cofactor de a_{ij} definido en la ecuación (A.20) y “adj” quiere decir *adjunta*. La fórmula (A.25) se utiliza principalmente para $N = 2$ y $N = 3$.

EJEMPLO A.12 Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$|\mathbf{A}| = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 3(-7) = 17$$

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & -3 \\ -7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

De este modo,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & -3 \\ -7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para una matriz de 2×2 ,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

De la ecuación (A.25) observamos que si el $\det \mathbf{A} = 0$, entonces \mathbf{A}^{-1} no existe. La matriz \mathbf{A} se denomina *singular* si el $\det \mathbf{A} = 0$, y *no singular* si el $\det \mathbf{A} \neq 0$. De este modo, si una matriz es no singular, entonces es invertible y \mathbf{A}^{-1} existe.

A.5 VALORES PROPIOS (VALORES CARACTERÍSTICOS) Y VECTORES PROPIOS (VECTORES CARACTERÍSTICOS)

A. DEFINICIONES

Sea \mathbf{A} una matriz de $N \times N$. Si

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (\text{A.28})$$

para algún escalar λ y vector columna distinto de cero \mathbf{x} , entonces λ se conoce como *valor propio* (o *valor característico*) de \mathbf{A} , mientras que \mathbf{x} se conoce como *vector propio* (o *vector característico*) asociado con λ .

B. ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

La ecuación (A.28) puede volver a escribirse como

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\text{A.29})$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de N -ésimo orden. La ecuación (A.29) tendrá un vector propio \mathbf{x} distinto de cero sólo si $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ es singular, es decir,

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{A.30})$$

la cual se denomina *ecuación característica* de \mathbf{A} . El polinomio $c(\lambda)$ definido por

$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^N + c_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 \quad (\text{A.31})$$

se conoce como *polinomio característico* de \mathbf{A} . Ahora bien, si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ son valores propios distintos de \mathbf{A} , entonces tenemos que

$$c(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{m_i} \quad (\text{A.32})$$

donde $m_1 + m_2 + \cdots + m_i = N$ y m_i se denomina *multiplicidad algebraica* de λ_i .

TEOREMA A.1

Sean λ_k ($k = 1, 2, \dots, i$) los distintos valores propios de \mathbf{A} y sean \mathbf{x}_k los vectores propios asociados con los valores propios λ_k . Entonces el conjunto de vectores propios $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i$ es linealmente independiente.

PRUEBA La prueba se realiza por contradicción. Suponga que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i$ son linealmente dependientes.

Entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ distintas de cero tal que

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_i\mathbf{x}_i = \sum_{k=1}^i \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \quad (\text{A.33})$$

Si suponemos que $\alpha_1 \neq 0$, entonces por la ecuación (A.33) tenemos que

$$(\lambda_2\mathbf{I} - \mathbf{A})(\lambda_3\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdots (\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A}) \left[\sum_{k=1}^i \alpha_k\mathbf{x}_k \right] = \mathbf{0} \quad (\text{A.34})$$

Ahora, de la ecuación (A.28) $(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_k = (\lambda_j - \lambda_k)\mathbf{x}_k \quad j \neq k$
y $(\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$

Entonces la ecuación (A.34) puede escribirse como

$$\alpha_1(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \cdots (\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \quad (\text{A.35})$$

Puesto que $\lambda_k (k = 1, 2, \dots, i)$ son distintos. La ecuación (A.35) implica que $\alpha_1 = 0$, lo cual es una contradicción. De este modo, el conjunto de vectores propios $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i$ son linealmente independientes.

A.6 DIAGONALIZACIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE SIMILITUD

A. DIAGONALIZACIÓN

Supongamos que todos los valores propios de una matriz \mathbf{A} de $N \times N$ son distintos. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ los vectores propios asociados con los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. Sea

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_N] \quad (\text{A.36})$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} &= \mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_N] \\ &= [\mathbf{Ax}_1 \quad \mathbf{Ax}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{Ax}_N] \\ &= [\lambda_1\mathbf{x}_1 \quad \lambda_2\mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \lambda_N\mathbf{x}_N] \\ &= [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_N] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

donde

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

Por el teorema A.1, \mathbf{P} tiene N vectores columna linealmente independientes. De este modo, \mathbf{P} es no singular y \mathbf{P}^{-1} existe, y por consiguiente

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

Denominamos a \mathbf{P} matriz de *diagonalización* o matriz de *vectores propios*, y a $\mathbf{\Lambda}$ la matriz de *valores propios*.

Notas:

1. Una condición suficiente (pero no necesaria) para que una matriz \mathbf{A} de $N \times N$ sea diagonalizable es que \mathbf{A} tenga N valores propios distintos.
2. Si \mathbf{A} no tiene N vectores propios independientes, entonces \mathbf{A} es no diagonalizable.
3. La matriz de diagonalización \mathbf{P} no es única. Al reordenar las columnas de \mathbf{P} o al multiplicarlas por escalares distintos de cero se producirá una nueva matriz de diagonalización.

B. TRANSFORMACIÓN DE SIMILITUD

Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} dos matrices cuadradas del mismo orden. Si existe una matriz no singular \mathbf{Q} tal que

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} \quad (\text{A.40})$$

entonces decimos que \mathbf{B} es *similar* o *semejante* a \mathbf{A} y la ecuación (A.40) se conoce como *transformación de similitud*.

Notas:

1. Si \mathbf{B} es similar a \mathbf{A} , entonces \mathbf{A} es similar a \mathbf{B} .
2. Si \mathbf{A} es similar a \mathbf{B} y \mathbf{B} es similar a \mathbf{C} , entonces \mathbf{A} es similar a \mathbf{C} .
3. Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son similares, entonces \mathbf{A} y \mathbf{B} tienen los mismos valores propios.
4. Una matriz \mathbf{A} de $N \times N$ es similar a una matriz diagonal \mathbf{D} si y sólo si existen N vectores propios linealmente independientes de \mathbf{A} .

A.7 FUNCIONES DE UNA MATRIZ

A. POTENCIAS DE UNA MATRIZ

Definimos las potencias de una matriz \mathbf{A} de $N \times N$ como

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_n$$

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \tag{A.41}$$

Puede verificarse fácilmente por multiplicación directa que si

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_N \end{bmatrix} \tag{A.42}$$

entonces

$$\mathbf{D}^n = \begin{bmatrix} d_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_N^n \end{bmatrix} \tag{A.43}$$

Notas:

1. Si los valores propios de \mathbf{A} son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$, entonces los valores propios de \mathbf{A}^n son $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_i^n$.
2. Cada vector propio de \mathbf{A} sigue siéndolo de \mathbf{A}^n .
3. Si \mathbf{P} diagonaliza \mathbf{A} , es decir,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} \tag{A.44}$$

entonces también diagonaliza \mathbf{A}^n , es decir,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N^n \end{bmatrix} \tag{A.45}$$

puesto que

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}^2 \\ (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^3\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}^3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{A.46}$$

B. FUNCIÓN DE UNA MATRIZ

Considere una función de λ definida por

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \quad (\text{A.47})$$

Con cualquier función de este tipo podemos asociar una función de una matriz \mathbf{A} de $N \times N$:

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{A}^k \quad (\text{A.48})$$

Si \mathbf{A} es una matriz diagonal \mathbf{D} en la ecuación (A.42), entonces por medio de la ecuación (A.43) tenemos que

$$f(\mathbf{D}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{D} + a_2\mathbf{D}^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{D}^k$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_N^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(d_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(d_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(d_N) \end{bmatrix} \quad (\text{A.49})$$

Si \mathbf{P} diagonaliza \mathbf{A} , es decir [ecuación (A.44)],

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$$

entonces tenemos que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} \quad (\text{A.50})$$

y

$$\mathbf{A}^2 = (\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^3 = (\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^3\mathbf{P}^{-1} \quad (\text{A.51})$$

⋮

De este modo, obtenemos

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{P}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-1} \quad (\text{A.52})$$

Al reemplazar \mathbf{D} y $\mathbf{\Lambda}$ en la ecuación (A.49) obtenemos que

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_N) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (\text{A.53})$$

donde λ_k son los valores propios de \mathbf{A} .

C. EL TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

Sea el polinomio característico $c(\lambda)$ de una matriz \mathbf{A} de $N \times N$ de la forma dada por [ecuación (A.31)]

$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^N + c_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$$

El *teorema de Cayley-Hamilton* establece que la matriz \mathbf{A} satisface su propia ecuación característica; es decir,

$$c(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^N + c_{N-1}\mathbf{A}^{N-1} + \dots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (\text{A.54})$$

EJEMPLO A.13 Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces su polinomio característico es

$$c(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

y

$$\begin{aligned} c(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Al reescribir la ecuación (A.54) tenemos que

$$\mathbf{A}^N = -c_0 \mathbf{I} - c_1 \mathbf{A} - \cdots - c_{N-1} \mathbf{A}^{N-1} \quad (\text{A.55})$$

Al multiplicar por \mathbf{A} y después sustituir la expresión (A.55) por \mathbf{A}^n en el lado derecho y reordenar términos, obtenemos

$$\mathbf{A}^{N+1} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} + \cdots + \alpha_{N-1} \mathbf{A}^{N-1} \quad (\text{A.56})$$

Al continuar este proceso podemos expresar cualquier potencia entera positiva de \mathbf{A} como una combinación lineal de $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{N-1}$. De este modo, $f(\mathbf{A})$ definida por la ecuación (A.48) puede representarse mediante

$$f(\mathbf{A}) = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{A} + \cdots + b_{N-1} \mathbf{A}^{N-1} = \sum_{m=0}^{N-1} b_m \mathbf{A}^m \quad (\text{A.57})$$

De manera similar, si λ es un valor propio de \mathbf{A} , entonces $f(\lambda)$ también puede expresarse como

$$f(\lambda) = b_0 + b_1 \lambda + \cdots + b_{N-1} \lambda^{N-1} = \sum_{m=0}^{N-1} b_m \lambda^m \quad (\text{A.58})$$

De este modo, si todos los valores propios de \mathbf{A} son distintos, los coeficientes b_m ($m = 0, 1, \dots, N-1$) pueden determinarse mediante las siguientes N ecuaciones:

$$f(\lambda_k) = b_0 + b_1 \lambda_k + \cdots + b_{N-1} \lambda_k^{N-1} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.59})$$

Si todos los valores propios de \mathbf{A} no son distintos, entonces la ecuación (A.59) no producirá N ecuaciones. Supongamos que un valor propio λ_i tiene multiplicidad r y que todos los demás valores propios son distintos. En este caso, al diferenciar ambos lados de la ecuación (A.58) r veces con respecto a λ y establecer $\lambda = \lambda_i$, obtenemos r ecuaciones correspondientes a λ_i :

$$\left. \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} f(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \left(\sum_{m=0}^{N-1} b_m \lambda^m \right) \right|_{\lambda=\lambda_i} \quad n = 1, 2, \dots, r \quad (\text{A.60})$$

Al combinar las ecuaciones (A.59) y (A.60), podemos determinar todos los coeficientes b_m en la ecuación (A.57).

D. POLINOMIO MÍNIMO DE \mathbf{A}

El polinomio *mínimo* $m(\lambda)$ de una matriz \mathbf{A} de $N \times N$ es el de menor grado con 1 como su coeficiente principal, de modo que $m(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Puesto que \mathbf{A} satisface su ecuación característica, el grado de $m(\lambda)$ no es mayor que N .

EJEMPLO A.14 Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es

$$c(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha)^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2$$

mientras que el polinomio mínimo es $c(\lambda) = \lambda - \alpha$

puesto que
$$m(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \alpha \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Notas:

1. Todo valor propio de \mathbf{A} es un cero de $m(\lambda)$.
2. Si todos los valores propios de \mathbf{A} son distintos, entonces $c(\lambda) = m(\lambda)$.
3. $c(\lambda)$ es divisible entre $m(\lambda)$.
4. $m(\lambda)$ puede utilizarse de la misma manera que $c(\lambda)$ para expresar las potencias más altas de \mathbf{A} en términos de un número limitado de potencias de \mathbf{A} .

Es posible demostrar que $m(\lambda)$ puede determinarse por

$$m(\lambda) = \frac{c(\lambda)}{d(\lambda)} \tag{A.61}$$

donde $d(\lambda)$ es el máximo común divisor (mcd) de todos los elementos de $\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$.

EJEMPLO A.15 Sea
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Entonces
$$c(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 6 & 6 \\ 1 & \lambda - 4 & -2 \\ -3 & 6 & \lambda + 4 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

$$\text{adj}[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ 6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ \lambda - 4 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 6 \\ -3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & \lambda - 4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 6 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 6 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\lambda + 2)(\lambda - 2) & -6(\lambda - 2) & -6(\lambda - 2) \\ -(\lambda - 2) & (\lambda + 1)(\lambda - 2) & 2(\lambda - 2) \\ 3(\lambda - 2) & -6(\lambda - 2) & (\lambda - 2)(\lambda - 7) \end{bmatrix}$$

De este modo, $d(\lambda) = \lambda - 2$ y así

$$m(\lambda) = \frac{c(\lambda)}{d(\lambda)} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

y
$$m(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E. DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL

Puede demostrarse que si el polinomio mínimo $m(\lambda)$ de una matriz \mathbf{A} de $N \times N$ tiene la forma

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_i) \tag{A.62}$$

entonces \mathbf{A} puede representarse mediante

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{E}_1 + \lambda_2 \mathbf{E}_2 + \cdots + \lambda_i \mathbf{E}_i \tag{A.63}$$

donde \mathbf{E}_j ($j = 1, 2, \dots, i$) se denominan matrices *constituyentes* y tienen las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{I} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_i$
2. $\mathbf{E}_m \mathbf{E}_k = \mathbf{0}, m \neq k$
3. $\mathbf{E}_k^2 = \mathbf{E}_k$
4. $\mathbf{A} \mathbf{E}_k = \mathbf{E}_k \mathbf{A} = \lambda_k \mathbf{E}_k$

(A.64)

Cualquier matriz \mathbf{B} para la cual $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$ se conoce como *idempotente*. De este modo, las matrices constituyentes \mathbf{E}_j son matrices idempotentes. El conjunto de valores propios de \mathbf{A} se denomina *espectro* de \mathbf{A} , y la ecuación (A.63) se conoce como *descomposición espectral* de \mathbf{A} . Mediante las propiedades de la ecuación (A.64) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \lambda_1^2 \mathbf{E}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{E}_2 + \dots + \lambda_i^2 \mathbf{E}_i \\ &\vdots \\ \mathbf{A}^n &= \lambda_1^n \mathbf{E}_1 + \lambda_2^n \mathbf{E}_2 + \dots + \lambda_i^n \mathbf{E}_i \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

y

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_1) \mathbf{E}_1 + f(\lambda_2) \mathbf{E}_2 + \dots + f(\lambda_i) \mathbf{E}_i \quad (\text{A.66})$$

Las matrices constituyentes \mathbf{E}_j pueden evaluarse como sigue. La expansión en fracciones parciales de

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(\lambda)} &= \frac{1}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_i)} \\ &= \frac{k_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{k_2}{\lambda - \lambda_2} + \dots + \frac{k_i}{\lambda - \lambda_i} \end{aligned}$$

conduce a

$$k_j = \frac{1}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^i (\lambda_j - \lambda_m)}$$

Entonces

$$\frac{1}{m(\lambda)} = \frac{k_1 g_1(\lambda) + k_2 g_2(\lambda) + \dots + k_i g_i(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_i)}$$

donde

$$g_j(\lambda) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^i (\lambda - \lambda_m)$$

Sea $e_j(\lambda) = k_j g_j(\lambda)$. Entonces las matrices constituyentes \mathbf{E}_j pueden evaluarse como

$$\mathbf{E}_j = e_j(\mathbf{A}) = \frac{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^i (\mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{I})}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^i (\lambda_j - \lambda_m)} \quad (\text{A.67})$$

EJEMPLO A.16 Considere la matriz \mathbf{A} en el ejemplo A.15:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Del ejemplo A.15, tenemos que

$$m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Entonces

$$\frac{1}{m(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda - 2)} = \frac{-1}{\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda - 2}$$

y

$$e_1(\lambda) = -(\lambda - 2) \quad e_2(\lambda) = \lambda - 1$$

Entonces

$$\mathbf{E}_1 = e_1(\mathbf{A}) = -(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = e_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{E}_1 + \lambda_2 \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 + 2\mathbf{E}_2$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

A.8 DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN DE MATRICES

A. DEFINICIONES

La derivada de una matriz $\mathbf{A}(t)$ de $m \times n$ está definida como la matriz de $m \times n$, cada elemento de la cual es la derivada del elemento correspondiente de \mathbf{A} ; esto es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) &= \left[\frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right]_{m \times n} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} a_{11}(t) & \frac{d}{dt} a_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} a_{1n}(t) \\ \frac{d}{dt} a_{21}(t) & \frac{d}{dt} a_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt} a_{m1}(t) & \frac{d}{dt} a_{m2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} a_{mn}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

De manera similar, la integral de una matriz $\mathbf{A}(t)$ de $m \times n$ está definida como

$$\begin{aligned} \int \mathbf{A}(t) dt &= \left[\int a_{ij}(t) dt \right]_{m \times n} \\ &= \begin{bmatrix} \int a_{11}(t) dt & \int a_{12}(t) dt & \cdots & \int a_{1n}(t) dt \\ \int a_{21}(t) dt & \int a_{22}(t) dt & \cdots & \int a_{2n}(t) dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int a_{m1}(t) dt & \int a_{m2}(t) dt & \cdots & \int a_{mn}(t) dt \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

EJEMPLO A.17 Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ 1 & t^3 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} t & \frac{d}{dt} t^2 \\ \frac{d}{dt} 1 & \frac{d}{dt} t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 3t^2 \end{bmatrix}$$

y

$$\int_0^1 \mathbf{A} dt = \begin{bmatrix} \int_0^1 t dt & \int_0^1 t^2 dt \\ \int_0^1 1 dt & \int_0^1 t^3 dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

B. DIFERENCIACIÓN DEL PRODUCTO DE DOS MATRICES

Si las matrices $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ pueden diferenciarse con respecto a t , entonces

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} \quad (\text{A.70})$$

Propiedades de los sistemas lineales invariantes en el tiempo y diversas transformadas

B.1 SISTEMAS LIT DE TIEMPO CONTINUO

Respuesta al impulso unitario: $h(t)$

Convolución: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$

Causalidad: $h(t) = 0, t < 0$

Estabilidad: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

B.2 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE BILATERAL (O DE DOS LADOS)

DEFINICIÓN:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE BILATERAL

Linealidad: $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s), R' \supset R_1 \cap R_2$

Desplazamiento en el tiempo: $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s), R' = R$

Desplazamiento en s : $e^{s_0t} x(t) \leftrightarrow X(s - s_0), R' = R + \text{Re}(s_0)$

Escalamiento en el tiempo: $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(s), R' = aR$

Inversión en el tiempo: $x(-t) \leftrightarrow X(-s), R' = -R$

Diferenciación en t : $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s), R' \supset R$

Diferenciación en s : $-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}$, $R' = R$

Integración: $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$, $R' \supset R \cap \{\operatorname{Re}(s) > 0\}$

Convolución: $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$, $R' \supset R_1 \cap R_2$

ALGUNOS PARES DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$\delta(t) \leftrightarrow 1$, para toda s

$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$

$-u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$, $\operatorname{Re}(s) < 0$

$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$

$t^k u(t) \leftrightarrow \frac{k!}{s^{k+1}}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$

$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$, $\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$

$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$, $\operatorname{Re}(s) < -\operatorname{Re}(a)$

$te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2}$, $\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$

$-te^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2}$, $\operatorname{Re}(s) < -\operatorname{Re}(a)$

$\cos \omega_0 tu(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \frac{\omega_0^2}{2}}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$

$\operatorname{sen} \omega_0 tu(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$

$e^{-at} \cos \omega_0 tu(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$, $\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$

$e^{-at} \operatorname{sen} \omega_0 tu(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$, $\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL (O DE UN LADO)

DEFINICIÓN

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}_I} X_I(s)$$

$$X_I(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad 0^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} (0 - \varepsilon)$$

ALGUNAS PROPIEDADES ESPECIALES

DIFERENCIACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_I(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n X_I(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-)$$

INTEGRACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$$

Teorema de valor inicial: $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX_I(s)$

Teorema de valor final: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_I(s)$

B.3 LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Definición:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Linealidad: $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$

Desplazamiento en el tiempo: $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$

Desplazamiento en la frecuencia: $e^{j\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$

Escalamiento en el tiempo: $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Inversión en el tiempo: $x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$

Dualidad: $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

Diferenciación en el tiempo: $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega)$

Diferenciación en la frecuencia: $(-jt)x(t) \leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$

Integración: $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)$

Convolución: $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega) X_2(\omega)$

Multiplicación: $x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

Señal real: $x(t) = x_e(t) + x_o(t) \leftrightarrow X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$
 $X(-\omega) = X^*(\omega)$

Componente par: $x_e(t) \leftrightarrow \text{Re}\{X(\omega)\} = A(\omega)$

Componente impar: $x_o(t) \leftrightarrow j \text{Im}\{X(\omega)\} = jB(\omega)$

RELACIONES DE PARSEVAL

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda) X_2(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) x_2(\lambda) d\lambda$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega) X_2(-\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

PARES COMUNES DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\text{sen } \omega_0 t \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$u(-t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$$

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + a}, a > 0$$

$$te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(j\omega + a)^2}, a > 0$$

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, a > 0$$

$$\frac{1}{a^2 + t^2} \leftrightarrow e^{-a|\omega|}$$

$$e^{-at^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}, a > 0$$

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases} \leftrightarrow 2a \frac{\text{sen } \omega a}{\omega a}$$

$$\frac{\text{sen } at}{\pi t} \leftrightarrow p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

$$\text{sgn } t \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0), \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

B.4 SISTEMAS LIT DE TIEMPO DISCRETO

Respuesta a la muestra unitaria: $h[n]$

$$\text{Convolución: } y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Causalidad: $h[n] = 0, n < 0$

$$\text{Estabilidad: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

B.5 LA TRANSFORMADA Z

LA TRANSFORMADA Z BILATERAL (O DE DOS LADOS)

DEFINICIÓN

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1} dz$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Linealidad: $a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \leftrightarrow a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$, $R' \supset R_1 \cap R_2$

Desplazamiento en el tiempo: $x[n - n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$, $R' \supset R_1 \cap \{0 < |z| < \infty\}$

Multiplicación por z_0^n : $z_0^n x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right)$, $R' = |z_0| R$

Multiplicación por $e^{j\Omega_0 n}$: $e^{j\Omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{-j\Omega_0} z)$, $R' = R$

Inversión en el tiempo: $x[-n] \leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$, $R' = \frac{1}{R}$

Multiplicación por n : $nx[n] \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$, $R' = R$

Acumulación: $\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$, $R' \supset R \cap \{|z| > 1\}$

Convolución: $x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$, $R' \supset R_1 \cap R_2$

ALGUNOS PARES COMUNES DE TRANSFORMADAS Z

$\delta[n] \leftrightarrow 1$, para toda z

$$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

$$-u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, |z| < 1$$

$\delta[n-m] \leftrightarrow z^{-m}$, para toda z excepto 0 si $m > 0$, o ∞ si $m < 0$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$$

$$-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, |z| < |a|$$

$$na^n u[n] \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}, |z| > |a|$$

$$-na^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}, |z| < |a|$$

$$(n+1)a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2} = \left[\frac{z}{z-a}\right]^2, |z| > |a|$$

$$(\cos \Omega_0 n) u[n] \leftrightarrow \frac{z^2 - (\cos \Omega_0) z}{z^2 - (2 \cos \Omega_0) z + 1}, |z| > 1$$

$$(\operatorname{sen} \Omega_0 n)u[n] \leftrightarrow \frac{(\operatorname{sen} \Omega_0) z}{z^2 - (2 \cos \Omega_0) z + 1}, |z| > 1$$

$$(r^n \cos \Omega_0 n)u[n] \leftrightarrow \frac{z^2 - (r \cos \Omega_0) z}{z^2 - (2r \cos \Omega_0) z + r^2}, |z| > r$$

$$(r^n \operatorname{sen} \Omega_0 n)u[n] \leftrightarrow \frac{(r \operatorname{sen} \Omega_0) z}{z^2 - (2r \cos \Omega_0) z + r^2}, |z| > r$$

$$\begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \leftrightarrow \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}, |z| > 0$$

LA TRANSFORMADA Z UNILATERAL (O DE UN LADO)

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}_I} X_I(z)$$

$$X_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

ALGUNAS PROPIEDADES ESPECIALES

PROPIEDAD DE DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

$$x[n-m] \leftrightarrow z^{-m} X_I(z) + z^{-m+1} x[-1] + z^{-m+2} x[-2] + \dots + x[-m]$$

$$x[n+m] \leftrightarrow z^m X_I(z) - z^m x[0] - z^{m-1} x[1] - \dots - z x[m-1]$$

Teorema de valor inicial: $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

Teorema de valor final: $\lim_{N \rightarrow \infty} x[N] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) X(z)$

B.6 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

DEFINICIÓN

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Periodicidad: $x[n] \leftrightarrow X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$

Linealidad: $a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \leftrightarrow a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega)$

Desplazamiento en el tiempo: $x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$

Desplazamiento en la frecuencia: $e^{j\Omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$

Conjugación: $x^*[n] \leftrightarrow X^*(-\Omega)$

Inversión en el tiempo: $x[-n] \leftrightarrow X(-\Omega)$

Escalamiento en el tiempo: $x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & \text{si } n = km \\ 0 & \text{si } n \neq km \end{cases} \leftrightarrow X(m\Omega)$

Diferenciación en frecuencia: $nx[n] \leftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d(\Omega)}$

Primera diferencia: $x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega)$

Acumulación: $\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \pi X(\Omega) \delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega)$

Convolución: $x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(\Omega) X_2(\Omega)$

Multiplicación: $x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) X_2(\Omega)$

Secuencia real: $x[n] = x_e[n] + x_o[n] \leftrightarrow X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega)$
 $X(-\Omega) = X^*(\Omega)$

Componente par: $x_e[n] \leftrightarrow \text{Re}\{X(\Omega)\} = A(\Omega)$

Componente impar: $x_o[n] \leftrightarrow j \text{Im}\{X(\Omega)\} = jB(\Omega)$

RELACIONES DE PARSEVAL

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\Omega)X_2(-\Omega) d\Omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

ALGUNOS PARES COMUNES DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$\delta[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0}$$

$$x[n] = 1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\Omega), |\Omega| \leq \pi$$

$$e^{-j\Omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0), |\Omega|, |\Omega_0| \leq \pi$$

$$\cos \Omega_0 n \leftrightarrow \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)], |\Omega|, |\Omega_0| \leq \pi$$

$$\sin \Omega_0 n \leftrightarrow -j\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)], |\Omega|, |\Omega_0| \leq \pi$$

$$u[n] \leftrightarrow \pi \delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}, |\Omega_0| \leq \pi$$

$$-u[-n-1] \leftrightarrow -\pi \delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}, |\Omega| \leq \pi$$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}, |a| < 1$$

$$-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}, |a| > 1$$

$$(n+1)a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2}, |a| < 1$$

$$a^{|n|} \leftrightarrow \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \Omega + a^2}, |a| < 1$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\text{sen} \left[\Omega \left(N_1 + \frac{1}{2} \right) \right]}{\text{sen}(\Omega / 2)}$$

$$\frac{\text{sen} W_n}{\pi n} (0 < W < \pi) \leftrightarrow X(\Omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\Omega| \leq W \\ 0 & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN_0] \leftrightarrow \Omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0), \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

B.7 TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

DEFINICIÓN

$$\begin{aligned}
 x[n] &= 0 && \text{fuera del intervalo } 0 \leq n \leq N-1 \\
 x[n] &\xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k] \\
 X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} && k = 0, 1, \dots, N-1 \quad W_N = e^{-j(2\pi/N)} \\
 x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} && n = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

PROPIEDADES DE LA TFD (TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA)

Linealidad: $a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \leftrightarrow a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k]$

Desplazamiento en el tiempo: $x[n - n_0]_{\text{mod } N} \leftrightarrow W_N^{kn_0} X[k]$

Desplazamiento en la frecuencia: $W_N^{-kn_0} x[n] \leftrightarrow X[k - k_0]_{\text{mod } N}$

Conjugación: $x^*[n] \leftrightarrow X^*[-k]_{\text{mod } N}$

Inversión en el tiempo: $x[-n]_{\text{mod } N} \leftrightarrow X[-k]_{\text{mod } N}$

Dualidad: $X[n] \leftrightarrow Nx[-k]_{\text{mod } N}$

Convolución circular: $x_1[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1[k] X_2[k]$

Multiplicación: $x_1[n] x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{N} X_1[k] \otimes X_2[k]$

Secuencia real: $x[n] = x_e[n] + x_o[n] \leftrightarrow X[k] = A[k] + jB[k]$
 $X[-k]_{\text{mod } N} = X^*[k]$

Componente par: $x_e[n] \leftrightarrow \text{Re}\{X[k]\} = A[k]$

Componente impar: $x_o[n] \leftrightarrow j \text{Im}\{X[k]\} = jB[k]$

RELACION DE PARSEVAL

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

Nótese que

$$x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i] x_2[n-i]_{\text{mod } N}$$

B.8 SERIES DE FOURIER

$$x(t + T_0) = x(t)$$

SERIE DE FOURIER EXPONENCIAL COMPLEJA

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} && \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \\
 c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt
 \end{aligned}$$

SERIE DE FOURIER TRIGONOMÉTRICA

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sen k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sen k\omega_0 t dt$$

SERIE DE FOURIER DE FORMA ARMÓNICA

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

RELACIONES ENTRE VARIOS COEFICIENTES DE FOURIER

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \quad a_k = c_k + c_{-k} \quad b_k = j(c_k - c_{-k})$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k)$$

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \theta_k = \tan^{-1} \frac{b_k}{a_k}$$

TEOREMA DE PARSEVAL PARA LA SERIE DE FOURIER

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

B.9 SERIE DE FOURIER DISCRETA

$$x[n + N_0] = x[n]$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

TEOREMA DE PARSEVAL PARA LA SERIE DE FOURIER DISCRETA

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N_0-1} |c_k|^2$$

Repaso de números complejos

C.1 REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

El número complejo z puede expresarse de varias formas.

Forma cartesiana o rectangular: $z = a + jb$ (C.1)

donde $j = \sqrt{-1}$, así como a y b son números reales que hacen referencia a la *parte real* y a la *parte imaginaria* de z . Tanto a como b se expresan a menudo como

$$a = \operatorname{Re}\{z\} \quad b = \operatorname{Im}\{z\} \quad \text{(C.2)}$$

donde “Re” denota la “parte real de” e “Im” denota la “parte imaginaria de”.

Forma polar: $z = re^{j\theta}$ (C.3)

donde $r > 0$ es la *magnitud* de z y θ es el *ángulo* o *fase* de z . Estas cantidades por lo general se escriben como

$$r = |z| \quad \theta = \angle z \quad \text{(C.4)}$$

La figura C-1 es la representación gráfica de z . Mediante la fórmula de Euler,

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta \quad \text{(C.5)}$$

o de la figura C-1, las relaciones entre las representaciones cartesiana y polar de z son

$$a = r \cos \theta \quad b = r \operatorname{sen} \theta \quad \text{(C.6a)}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad \text{(C.6b)}$$

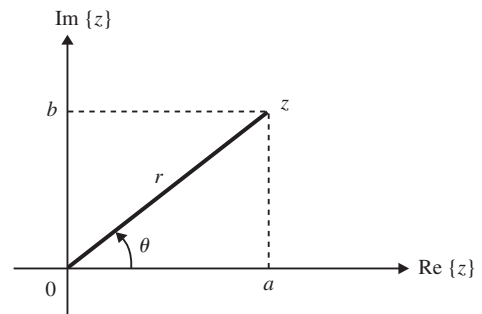


Figura C-1

C.2 ADICIÓN, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Si $z_1 = a_1 + jb_1$ y $z_2 = a_2 + jb_2$, entonces

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \quad \text{(C.7)}$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + b_1 a_2) \quad \text{(C.8)}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(-a_1 b_2 + b_1 a_2)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned} \quad \text{(C.9)}$$

Si $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$, entonces $z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$ (C.10)

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \quad \text{(C.11)}$$

C.3 EL COMPLEJO CONJUGADO

El *complejo conjugado* de z se denota por medio de z^* y está dado por

$$z^* = a - jb = r e^{-j\theta} \quad \text{(C.12)}$$

Relaciones útiles:

1. $z z^* = r^2$
2. $\frac{z}{z^*} = e^{j2\theta}$
3. $z + z^* = 2 \operatorname{Re}\{z\}$
4. $z - z^* = j2 \operatorname{Im}\{z\}$
5. $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
6. $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$
7. $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$

C.4 POTENCIAS Y RAÍCES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

La n -ésima potencia del número complejo $z = r e^{j\theta}$ es

$$z^n = r^n e^{jn\theta} = r^n (\cos n\theta + j \operatorname{sen} n\theta) \quad \text{(C.13)}$$

de lo cual tenemos la relación de De Moivre

$$(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + j \operatorname{sen} n\theta \quad \text{(C.14)}$$

La n -ésima raíz de un complejo z es el número w tal que

$$w^n = z = r e^{j\theta} \quad \text{(C.15)}$$

De este modo, para encontrar la n -ésima raíz de un número complejo z debemos resolver

$$w^n - r e^{j\theta} = 0 \quad \text{(C.16)}$$

la cual es una ecuación de grado n y por consiguiente tiene n raíces. Éstas están dadas por

$$w_k = r^{1/n} e^{j[\theta + 2(k-1)\pi]/n} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{(C.17)}$$

Fórmulas matemáticas útiles

D.1 FÓRMULAS DE SUMATORIAS

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ N & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \quad |\alpha| < 1$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \quad |\alpha| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \quad |\alpha| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2\alpha^n = \frac{\alpha^2 + \alpha}{(1-\alpha)^3} \quad |\alpha| < 1$$

D.2 FÓRMULAS DE EULER

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \operatorname{sen} \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

D.3 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\operatorname{sen}(a \pm \beta) = \operatorname{sen} a \cos \beta \pm \cos a \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(\alpha - \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)$$

D.4 EXPANSIONES EN SERIE DE POTENCIAS

$$e^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = 1 + \alpha + \frac{1}{2!} \alpha^2 + \frac{1}{3!} \alpha^3 + \dots$$

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!} \alpha^2 + \dots + \binom{n}{k} \alpha^k + \dots + \alpha^n$$

$$\ln(1 + \alpha) = \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{3} \alpha^3 - \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{k} \alpha^k + \dots \quad |\alpha| < 1$$

D.5 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

$$e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$$

$$\frac{e^\alpha}{e^\beta} = e^{\alpha-\beta}$$

$$\ln(\alpha\beta) = \ln \alpha + \ln \beta$$

$$\ln \frac{\alpha}{\beta} = \ln \alpha - \ln \beta$$

$$\ln \alpha^\beta = \beta \ln \alpha$$

$$\log_b N = \log_a N \log_b a = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

D.6 ALGUNAS INTEGRALES DEFINIDAS

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \quad a > 0$$

ÍNDICE ANALÍTICO

A

Acumulación, 122
Aditividad, 11
Alias o submuestreo, 204
Ancho de banda:
 absoluto, 167
 contenido de energía, 202
 de 3 dB (de media potencia), 168
 equivalente, 201
 filtro (o sistema), 167
 señal, 168
Ancho de banda absoluto, 167
Ancho de banda de 3 dB, 167
Ancho de banda de contenido de energía, 202
Ancho de banda de la señal, 167
Ancho de banda equivalente, 201
Avance, unitario, 121

C

Causalidad, 33, 40, 42, 44, 68, 86, 125
 descritos por ecuaciones diferenciales, 41, 165
 estabilidad, 40
 función del sistema (o de transferencia), 86
 funciones propias, 41
 propiedades, 40
 representación en el espacio de estado, 270
 respuesta, 38
 respuesta al escalón, 39
 respuesta al impulso, 38
 respuesta en frecuencia, 164
Ceros, 79
Circuitos degenerativos, 114
Circuitos transformados, 89
Círculo unitario, 118
Coeficientes espectrales, 209
Cofactor, A-5
Componente armónico, 154
Compresor, 32
Condición de reposo inicial (véase Reposo inicial)
Condiciones de Dirichlet:
 para las series de Fourier, 154
 para transformadas de Fourier, 156
Condición inicial, 42
Conexión entre:
 la transformada de Fourier (de tiempo continuo) y la transformada de Laplace

 la transformada de Fourier (de tiempo discreto) y la transformada z , 214
Conjunto de índices, 318
Contenido de energía, 4
 normalizado, 4
Contenido de energía normalizado, 4
Convolución:
 circular, 223
 de tiempo continuo, 39
 de tiempo discreto, 43
 en frecuencia, 159
 integral de, 39
 periódica, 52, 66
 propiedades de la, 39, 44
 suma de, 43
Convolución circular, 223
Convolución periódica:
 de tiempo continuo, 52
 de tiempo discreto, 66

D

Decimación en frecuencia, 260
Decimación en tiempo, 257
Derivadas generalizadas, 6
Descomposición espectral, 273, 277, A-12
Desplazador de fase, 198
Desplazamiento circular, 223
Desplazamiento de frecuencia, 159, 176, 215, 223
Desplazamiento en el dominio s , 82
Desplazamiento en el tiempo, 82, 122, 158, 215, 223
Determinantes, A-5
 expansión de Laplace, A-5
DFS (véase Serie de Fourier discreta)
DFT (véase Transformada de Fourier discreta)
Distorsión de amplitud, 164
Distorsión de fase, 169

E

Ecuación característica, 272, A-7
Ecuaciones de estado:
 de tiempo continuo, 271, 274
 de tiempo discreto, 269, 272
Ecuaciones de estado N dimensión, 269
Ecuaciones diferenciales, 41
 solución homogénea, 41
 solución particular, 41

Ecuaciones en diferencias, 45
 recursivas, 46
Ecuación no recursiva, 46
Ecuación recursiva, 45
Elemento de retraso unitario, 31
Escalamiento en el tiempo, 83, 158, 215
Espacio de estado, 267
Espacio muestral, 318
Espectro de amplitud, 154
Espectro de densidad de energía, 160
Espectro de fase, 154, 156
Espectro de Fourier, 156, 213
Espectro de líneas, 154
Espectro de magnitud, 154, 156
Espectro discreto de frecuencias (o líneas), 154
Espectro (o espectros), 154
 amplitud, 154
 de Fourier, 157, 213
 densidad de energía, 160
 frase, 154, 157
 frecuencia discreta, 154
 línea, 154
 magnitud, 154, 157
 plano s , 78
Estabilidad:
 asintótica, 274, 277
 de entrada acotada/salida acotada (BIBO, *bounded-input/bounded-output*), 12, 41, 45, 55, 69, 86, 103, 143, 274, 277
Estabilidad de Entrada Acotada/Salida Acotada (*Bounded-Input/Bounded-Output* o BIBO), 12, 40, 45, 55, 69, 86, 103, 143, 274, 277
Estado, 267
Estado inicial, 312
Expansión en fracciones parciales, 85, 125
Expansión en serie de potencias, 124

F

FFT (véase *Fast Fourier Transform*)
Filtrado, 166
Filtro:
 ancho de banda, 167
 de banda estrecha, 166
 pasaaltas ideal, 165
 pasabajas ideal, 165
 pasabandas ideal, 166
 selectivo en frecuencia ideal, 165

selectivo en frecuencia no ideal, 165
 supresor de banda ideal, 166
 Filtro pasa todo, 243
 Filtro selectivo en frecuencia, 165
 FIR (véase Respuesta al impulso finita)
 Frecuencia:
 angular, 152
 fundamental, 152
 compleja, 156
 en radianes, 7
 fundamental, 7, 152
 teorema de convolución, 160
 Frecuencia compleja, 157
 Función característica (véase función propia)
 Función de escalón unitario, 4, 25
 Función de impulso unitario, 4
 Función de prueba, 5
 Función de rampa unitaria, 30
 Función de transferencia, 86
 Función del sistema:
 sistemas LIT de tiempo continuo, 86, 102, 275
 sistemas LIT de tiempo discreto, 125, 139, 274
 Función delta de Dirac (función δ) (véase Función impulso unitario)
 Función muestral, 318
 Función signo (signum), 205
 Funciones generalizadas, 5
 Funciones propias (o función característica), 34
 de sistemas LIT de tiempo continuo, 40
 de sistemas LIT de tiempo discreto, 45

G

Ganancia, 164
 Gráficas de Bode, 193

H

Homogeneidad, 11

I

Identidad de Parseval (véase Teorema de Parseval)
 IIR (véase Respuesta al impulso infinita)
 Interconexión de sistemas, 55, 87
 Intervalo de muestreo de Nyquist, 205
 Invariante al desplazamiento, 12
 Invarianza en el tiempo, 42
 Inversión del tiempo, 92, 122, 158, 215, 223

L

Linealidad, 11, 42, 81

M

Matriz adjunta (o adyugado), A-6
 Matriz constitutiva, 273, 277, A-13
 Matriz de controlabilidad, 301, 311
 Matriz de observabilidad, 301, 312
 Matriz de transición de estado, 272
 Matriz DFT, 255
 Matriz diagonal, A-1
 Matriz diagonalizada, A-8
 Matriz identidad, 272, A-2
 Matriz (o matrices):
 antisimétrica (*skew-symmetric*), A-4
 conformable, A-2
 constitutiva, 273, 277, A-13
 controlabilidad, 301, 311
 descomposición espectral, 273, 277, A-12
 diagonal, A-1
 diagonalización, A-8
 diferenciación, A-14
 ecuación característica, A-7
 espectro, A-12
 función de, A-9
 idempotente, A-13
 identidad (o unitario), 272, A-2
 integración, A-14
 inversa, A-3, A-6
 nilpotente, 294
 no singular, 269, A-7
 observabilidad, 301, 312
 polinomio característico, A-7
 polinomios mínimos, 295, A-11
 potencia, A-9
 rango, A-5
 singular, A-7
 simétrica, A-3
 similar, 269, A-8
 sistema, 269
 transición de estado, 273
 transpuesta, A-3
 valores propios, A-7
 vectores propios, A-7
 Matriz singular, A-7
 Matrices similares, 269, A-9
 Método invariante al impulso, 247
 Muestras, 2
 Muestreo, 1
 de Nyquist, 205
 intervalo de, 2
 Nyquist, 205
 tasa (o frecuencia) de, 203, 221

N

Nilpotente, 294
 No ideal, filtro selectivo en frecuencia, 167
 No lineal, sistema, 11
 No periódica (o aperiódica), secuencia, 4

señales, 3

No singular, matriz, 269, A-7
 N puntos, DFT, 223
 secuencia, 223
 Números complejos, A-25

O

Operador de adelanto unitario, 121
 Operador de retraso unitario, 121
 Ortogonal, variables aleatorias
 secuencia, 224
 señales, 168

P

Pasabandas, 165
 Periodo, 3
 fundamental, 3
 Plano z , 118
 Polinomio característico, A-7
 Polos, 79
 Potencia, 4
 promedio, 4
 Potencia promedio, 4
 normalizada, 4
 Procesos aleatorios (o estocásticos), 318
 realización, 318
 Propiedad de dualidad:
 serie de Fourier discreta, 210
 transformada de Fourier discreta, 223
 Propiedad de equivalencia, 26
 Propiedad de superposición, 11
 Pulso gaussiano, 190

R

Región de convergencia (ROC, *Region of Convergence*): 1-5
 transformada de Laplace, 78
 Relación de Parseval, 160
 secuencias periódicas, 229
 señales periódicas, 177
 serie de Fourier, 178
 serie de Fourier discreta (DFS, *Discrete Fourier Series*), 229
 transformada de Fourier (de tiempo continuo), 161, 187, 188
 transformada de Fourier (de tiempo discreto), 218
 transformada de Fourier discreta (DFT, *Discrete Fourier Transform*), 224
 Relación entre:
 la DFT y la DFS, 223
 la DFT y la transformada de Fourier de tiempo discreto, 223
 Relleno con ceros, 223
 Reposo inicial, 42
 Representación de Estado Canónico:
 la primera forma, 283, 288
 la segunda forma, 284, 289

- Representación del espacio de estado:
 canónico:
 la primera forma, 283
 la segunda forma, 284
 sistemas LIT de tiempo continuo,
 270
 sistemas LIT de tiempo discreto,
 269, 272
- Representación del sistema, 10
- Respuesta:
 a entrada cero, 42
 de estado cero, 42
 escalón, 39, 44
 fase, 1634, 219
 frecuencia, 162, 191, 219, 238
 impulso, 38, 42
 magnitud, 163, 219
 sistema, 220
- Respuesta a la muestra unitaria, 42
 (Véase también Respuesta al impulso)
- Respuesta al escalón, 39, 44
- Respuesta al impulso:
 sistemas LIT de tiempo continuo, 38
 sistemas LIT de tiempo discreto, 42
- Respuesta al impulso infinita (IIR, *Infinite Impulse Response*), 46
- Respuesta de entrada cero, 42
- Respuesta de estado cero, 42
- Respuesta de fase, 163, 219
- Respuesta de magnitud, 163, 272
- Respuesta del sistema, 220
- Respuesta en frecuencia:
 sistemas LIT de tiempo continuo,
 162, 191
 sistemas LIT de tiempo discreto,
 219, 238
- Retardo, unitario, 31, 121
- Retraso en el tiempo, 164
- S**
- Secuencia, 1
 de dos lados, 119
 exponencial, 9
 exponencial compleja, 9
 finita, 119
 N puntos, 223
 no periódica (o aperiódica), 4
 ortogonal, 225
 periódica, 4
 por la derecha, 119
 por la izquierda, 119
 primera diferencia, 216
 senoidal, 10
- Secuencia causal, 44
- Secuencia de escalón unitario, 8
- Secuencia de impulso unitario, 8
- Secuencia de muestra unitaria (véase
 Secuencia de impulso unitario)
- Secuencia de primera diferencia, 217
- Secuencia finita, 119
- Secuencia no causal, 44
- Secuencias aperiódicas (véase Secuen-
 cias no periódicas)
- Secuencias exponenciales:
 complejas, 9
 reales, 9
- Secuencias periódicas, 209
- Secuencias senoidales, 10
- Señal analítica, 207
- Señal causal, 40
- Señal de banda limitada, 168, 203
- Señal de dos lados, 80
- Señal de duración finita, 80
- Señal de duración limitada, 207
- Señal de energía, 4
- Señal impar, 3
- Señal muestreada, ideal, 203
- Señal par, 2
- Señal pasa-banda, 168
- Señal por la derecha, 80
- Señal por la izquierda, 80
- Señales:
 aleatoria, 2, 318
 analítica, 207
 no causal, 40
 analógicas, 2
 causal, 40
 compleja, 2
 de banda limitada, 167, 203, 204
 de dos lados, 80, I-5
 de duración finita, 80
 de duración limitada, 207
 de potencia, 4
 de tiempo continuo, 1
 de tiempo discreto, 1
 determinística, 2
 digital, 2
 energía, 4
 exponencial compleja, 6
 impar, 2
 limitada en tiempo, 80
 muestreada de manera ideal, 203
 no periódica (o aperiódica), 3
 par, 2
 pasa-altas, 168
 pasa-bajas, 167
 pasabandas, 168
 periódica, 3
 por la derecha, 80
 por la izquierda, 80
 pulso gaussiano, 190
 real, 2
 senoidal, 7
- Señales aleatorias, 2
- Señales analógicas, 2
- Señales aperiódicas (véase Señales no
 periódicas)
- Señales complejas, 2
- Señales de potencia, 4
- Señales de tiempo continuo, 1
- Señales de tiempo discreto, 1
- Señales determinísticas, 3
- Señales digitales, 2
- Señales exponenciales:
 complejas, 6
 reales, 7
- Señales no causales, 40
- Señales periódicas, 3
- Señales reales, 2
- Señales senoidales, 7
- Serie de Fourier:
 coeficientes, 153
 convergencia, 154
 discreta (DFS), 209, 224
 exponencial compleja, 153
 forma armónica, 154
 trigonométrica, 153
- Serie de Fourier discreta (DFS), 209,
 224
 propiedades, 210
- Simulación, 221, 246
 canónica, 283, 284
 método de invarianza al impulso, 247
 por transformación bilineal, 248
- Simulación canónica:
 la primera forma, 283, 288
 la segunda forma, 284, 289
- Simulación digital de señales analógi-
 cas, 221
- Sistema causal, 11
- Sistema invertible, 36
- Sistema lineal, 11
- Sistema lineal invariante en el tiempo
 (LIT), 12
 de tiempo continuo, 38
 de tiempo discreto, 42
- Sistema no causal, 11
- Sistema observable, 301, 312
- Sistemas:
 causal y no causal, 11
 controlable, 301
 con y sin memoria, 10
 de tiempo continuo y de tiempo
 discreto, 10
 descrito por ecuaciones en diferen-
 cias, 45, 70
 descrito por ecuaciones diferenciales,
 41, 58
 estable, 12
 interconexión de, 87
 invariante en el tiempo y variante en
 el tiempo, 12
 invertible, 36
 lineal invariante en el tiempo (LTI),
 12, 38
 lineal y no lineal, 11
 LIT de tiempo continuo, 38
 LIT de tiempo discreto, 42
 múltiples entradas múltiples salidas,
 269
 observable, 301
 retroalimentación, 12
 sin memoria, 10
- Sistemas asintóticamente estables, 274,
 277

- Sistemas controlables, 301, 311
 Sistemas de tiempo continuo, 10
 Sistemas de tiempo discreto, 10
 Sistemas estables, 12
 Sistemas invariantes en el tiempo, 11
 Sistemas LIT de tiempo continuo, 38
 Sistemas LIT de tiempo discreto:
 causalidad, 44, 122
 descritos mediante ecuaciones en diferencias, 45
 estabilidad, 44, 125
 función del sistema, 124, I-2
 funciones propias, 45
 propiedades, 44
 representación en el espacio de estados, 268
 respuesta, 42
 respuesta al escalón, 44
 respuesta al impulso, 42
 respuesta al impulso finita (FIR, *finite impulse response*), 46
 respuesta al impulso infinita (IIR, *infinite impulse response*), 46
 Sistemas retroalimentados, 12
 Sistemas variantes en el tiempo, 12
 Supresor de banda, 165
- T**
- Tasa de muestreo de Nyquist, 205
 Teorema de Cayley-Hamilton, 273, 276, 294, A-10
 Teorema de convolución:
 frecuencia, 159, 187
 tiempo, 159, 186
 Teorema de convolución en el tiempo, 159, 186
 Teorema de energía, 160
 Teorema de modulación, 183
 Teorema de muestreo uniforme, 205
 Teorema de Parseval:
 serie de Fourier, 155
 serie de Fourier discreta (DFS, *Discrete Fourier Series*), 211, 229
 transformada de Fourier (de tiempo continuo), 160, 188
 transformada de Fourier discreta (DFT, *Discrete Fourier Transform*), 224
 transformada de Fourier (de tiempo discreto), 219
 Teorema de valor final:
 transformada de Laplace unilateral, 107
 transformada z unilateral, 149
 Teorema del muestreo:
 en el dominio de la frecuencia, 204
 uniforme, 205
 Teorema del valor inicial:
 transformada de Laplace unilateral, 107
 transformada z unilateral, 148
 Tiempo de subida, 202
 Transformación bilineal, 248
 Transformación de similitud, 269, A-8
 Transformada de Fourier (de tiempo continuo), 157, 158, 159, 179, 189
 convergencia, 157
 definición, 157
 inversa, 157
 propiedades, 158
 tablas, 160, 162
 Transformada de Fourier (de tiempo discreto), 213, 215, 216, 219, 255
 convergencia, 214
 definición, 213
 inversa, 213
 propiedades, 215
 tablas, 217, 219
 Transformada de Fourier Discreta (DFT):
 definición, 222
 inversa, 222
 N puntos, 223
 propiedades, 223
 Transformada de Fourier Discreta (DFT, *Discrete Fourier Transform*), 224
 Transformada de Hilbert, 198
 Transformada de Laplace: 84
 bilateral (de dos lados), 77
 definición, 77
 inversa, 84
 propiedades, 81, 94
 región de convergencia (ROC, *Region Of Convergence*), 78
 tablas, 80, 85
 unilateral (un lado), 77, 88, 106
 Transformada de Laplace bilateral (o de dos lados), 77
 Transformada de Laplace unilateral, 77, 106
 Transformada inversa (*véase* Fourier, Laplace, etc.)
 Transformada rápida de Fourier (FFT, *Fast Fourier Transform*):
 decimación en frecuencia, algoritmo, 260
 decimación en tiempo, algoritmo, 257
 Transformada z : 118, 122, 132
 bilateral (o de dos lados), 117
 definición, 117
 inversa, 123
 propiedades, 120, 131
 región de convergencia (ROC), 118
 tablas, 121, 123
 unilateral (o de un lado), 118, 146
 Transformada z bilateral (o de dos lados), 118
 Transformada z unilateral, 118, 146
 Transformadas (*véase* Fourier, Laplace, etc.)
 Transmisión sin distorsión, 164
 Tren de impulsos, periódico, 173
 Tren de impulsos periódicos, 174
- V**
- Valores característicos (*véase* Valores propios)
 Valores propios (o valores característicos), 34, 74, 272, A-7
 Variables de estado, 267
 Vectores de estado, 268
 Vectores propios, 272, A-7